Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \text{cont}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C}\ \Leftrightarrow_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C}\ \Leftrightarrow_{\text{left2}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_{\text{right1}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_{\text{right2}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash A}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash B}\ \forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash B}\ \exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, B \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\ \exists_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \text{cut}$$

Calcul des séquents classique (LJ_{em})

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash B}\ \forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash B}\ \exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, B \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\ \exists_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \text{cut} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ \text{em}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \mathrm{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top} \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\,\forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\,\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\,\exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\,\exists_{\text{right}}$$

Tableaux et superdéduction

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \qquad \neg P}{\odot}\ \odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\ \alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Procédure de DPLL

Algorithme

DPLL(S)=

si $S = \emptyset$ alors retourner « satisfiable » ;

sinon si $\square \in S$ alors retourner « insatisfiable » ;

sinon si S contient une tautologie C alors retourner DPLL($S \backslash C$) ;

sinon si S contient une clause unitaire avec A (resp. $\neg A$) alors
  retourner DPLL($S[A := \top]$) (resp. DPLL($S[A := \bot]$)) ;

sinon si A (resp. $\neg A$) est pur dans S alors
  retourner DPLL($S[A := \top]$) (resp. DPLL($S[A := \bot]$)) ;

sinon choisir une variable A de S
  et retourner DPLL($S[A := \top]$) ou DPLL($S[A := \bot]$).

Procédure de résolution

Algorithme

$Sat := \emptyset$;
tant que $S \neq \emptyset$ faire
    choisir $C \in S$;
    $S := S \backslash \{C\}$;
    si $C = \Box$ alors retourner « insatisfiable » ;
    si C est une tautologie alors ; (* passer à la clause suivante *)
    sinon, si $C \in Sat$ alors ; (* idem *)
    sinon pour tout résolvant C_1 entre C
    et une clause de $Sat \cup \{C\}$ faire
        $S := S \cup \{C_1\}$;
    $Sat := Sat \cup \{C\}$;
retourner « satisfiable ».

Méthode des tableaux

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\,\odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\,\odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \qquad \neg P}{\odot}\,\odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\,\alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\,\beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\,\beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\,\alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\,\alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\,\alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\,\beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\,\beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\,\beta_{\Rightarrow}$$

Méthode des tableaux (sans variable libre)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(c)}\,\delta_{\exists},\ \ c \text{ frais} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(c)}\,\delta_{\neg\forall},\ \ c \text{ frais}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_{\exists},\ \begin{array}{l}f \text{ frais,}\\ X_i \text{ var. lib.}\end{array} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_{\neg\forall},\ \begin{array}{l}f \text{ frais,}\\ X_i \text{ var. lib.}\end{array}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists \mathrm{inst}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Appliquer } \sigma \text{ à l'arbre s'il existe dans la branche}\\ \text{deux littéraux } K \text{ et } \neg L \text{ t.q. } \sigma = mgu(K,L)\end{array}}{\odot}\ \odot$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, non destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_\exists,\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_{\neg\forall},\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall \text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists \text{inst}}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))}\ \delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))}\ \delta_{\neg\forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists \mathrm{inst}}$$