Règles existentielles : chaînage avant (*chase*)

1 Application directe du cours

Exercice 1. Règles existentielles

On considère la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \{R\})$ avec :
$F = person(a)$
$R = person(x) \rightarrow \exists y\ hasParent(x, y) \wedge person(y)$

Question 1 Définir F^* et son modèle isomorphe M^*. Ce modèle est-il fini ?
Remarque : les différentes variantes du chase se comportent toutes de la même façon sur cet exemple.

Question 2 Quel est le plus petit modèle de $\mathcal{K}$ (au sens du nombre d'atomes dans la base de faits associée) ? Est-il fini ? Est-il universel ? Justifier.

Exercice 2. Règles existentielles

On considère des bases de connaissances composées de faits (conjonctions d'atomes fermées existentiellement) et de règles existentielles positives (ne contenant pas $\perp$).

Question 1 De telles bases de connaissances sont-elles toujours *satisfiables* ?

Question 2 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *fini* ?

Question 3 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *universel* ?

Question 4 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *universel fini* ?

Justifier chaque réponse (donner un contre-exemple simple ou les arguments qui prouvent la propriété).

Exercice 3. Règles existentielles et contraintes négatives

Définition préalable. On ajoute un prédicat (0-aire) particulier, noté $\perp$, dont la valeur est *faux* dans toute interprétation. Une *contrainte négative* est une règle dont le corps est une conjonction d'atomes et dont la tête est réduite au prédicat $\perp$.

Exemples typiques parmi d'autres :
$\forall x\ (grand(x) \wedge petit(x)) \rightarrow \perp$; *concept disjoints*

$\forall x \forall y\ (supStrict(x, y) \wedge supStrict(y, x)) \rightarrow \perp$; *antisymétrie de relations*

On considère maintenant des bases de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ où F est une base de faits, $\mathcal{R}$ un ensemble de règles existentielles (positives) et $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes négatives.

Question 1 Soit une base sans règles existentielles, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{K} = (F, \emptyset, \mathcal{C})$. Cette base est-elle forcément satisfiable ? Donner un contre-exemple ou justifier votre affirmation.

Question 2 Donner une requête permettant de tester si une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ est insatisfiable (c'est-à-dire telle que la réponse à la requête est oui sur $\mathcal{K}$ si et seulement si $\mathcal{K}$ est insatisfiable).

Question 3 Sachant que le problème de réponse à une requête conjonctive booléenne sur une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \emptyset)$ n'est pas décidable, montrer que le problème de test de la satisfiabilité d'une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ ne l'est pas non plus.

2 Chase

Exercice 1 : Oblivious chase (cf. contrôle 2016)

On considère un mécanisme de chaînage avant simple (connu sous le nom de *oblivious chase*), qui procède *en largeur*. On désignera par F_i la base de faits obtenue après une étape de largeur (donc i ne correspond pas à la longueur de la dérivation courante mais bien au nombre d'étapes de largeur effectuées).

Question 1 Soit la base de connaissances $K = (F, \mathcal{R})$, avec $F = \{q(a)\}$ où a est une constante, et $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3\}$, où :
$R_1 = q(x) \rightarrow \exists z\ p(x, z)$
$R_2 = p(x, y) \rightarrow q(y)$
$R_3 = q(x) \wedge q(y) \rightarrow p(x, y)$

1. Définir F_1, F_2 et F_3 obtenues par le chaînage avant simple en indiquant quelles applications de règles sont effectuées.
2. Le mécanisme de chaînage avant simple s'arrête-t-il dans le cas de cette base de connaissances ?

Question 2 Définir le modèle de K isomorphe à la base de faits saturée par le mécanisme de chaînage avant simple.

Exercice 2 : Restricted chase (cf. contrôle 2016)

On considère maintenant un mécanisme de chaînage avant qui diffère du chaînage avant simple en n'effectuant que des applications de règles “localement non redondantes” : à une étape $i > 0$, l'application d'une règle $B \rightarrow H$ sur F_{i-1} selon un homomorphisme h n'est effectuée que si h ne peut pas s'étendre à un homomorphisme de H dans F_{i-1} (autrement dit il n'existe pas d'homomorphisme h' de H dans F_{i-1} tel que pour toute variable frontière

x, $h('x) = h(x)$). Ce mécanisme est connu sous le nom de chaînage restreint ("restricted chase").

On considère à nouveau la base K de l'exercice précédent.

Question

1. Définir F_1, F_2 et F_3 obtenues par le chaînage avant restreint en indiquant quelles applications de règles sont effectuées.

2. Le mécanisme de chaînage avant restreint s'arrête-t-il dans le cas de cette base de connaissances ?

Exercice 3 : Chase et décomposition de règles

Soit $R = p(x, y) \rightarrow \exists z\ p(y, z) \wedge p(z, y)$. Soit $F = p(a, b)$, où a et b sont des constantes.

1. On considère *l'oblivious chase* sur $K = (F, \{R\})$. Quelle est la base de faits obtenue à l'issue de l'étape 2 de largeur ? [Donnez-la sous forme logique ou graphique]. L'oblivious chase s'arrête-t-il sur K ? Qu'en est-il du *semi-oblivious* chase ?
2. Même question pour le *restricted chase*.
3. On appelle *pièce* d'une tête de règle un sous-ensemble P non vide d'atomes qui vérifie : (1) pour toute variable existentielle z de la tête de règle, si un atome contenant z est dans P alors tous les atomes qui contiennent z sont dans P et (2) P est minimal pour cette propriété.
   Par exemple, quelles sont les pièces de la règle R ci-dessus ? Et celles de la règle $R' = p(x, y) \wedge p(y, t) \rightarrow \exists z \exists u \exists v\ r(x, z) \wedge r(z, u) \wedge q(u) \wedge s(x, y, v) \wedge q(y)$? Quelles sont les pièces d'une règle sans variable existentielle ?
   On peut décomposer chaque règle R en un ensemble de règles dont la tête n'a qu'une seule pièce, chacune ayant le même corps que R. Cet ensemble de règles est-il équivalent à R ? Que dire de l'effet de la transformation sur l'arrêt du chase (selon les différentes variantes du chase) ?
4. On considère maintenant la décomposition classique des règles en règles à tête atomique : à chaque règle R de la forme $Body[X, Y] \rightarrow \exists Z\ Head[X, Z]$, où X, Y et Z sont des ensembles de variables, on associe un nouveau prédicat p_R dont l'arité est $|X| + |Z|$, et on remplace R par l'ensemble de règles suivant :
   $Body[X, Y] \rightarrow \exists Z\ p_R(X, Z)$
   $p_R(X, Z) \rightarrow \exists Z_i\ A_i(X_i, Z_i)$ pour chaque atome $A_i(X_i, Z_i) \in Head[X, Z]$.

   Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de règles, et $\mathcal{R}'$ obtenu en décomposant les règles de $\mathcal{R}$ en tête atomique. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ne sont pas équivalents car n'ont pas le même vocabulaire, mais on a la propriété suivante : pour toute requête conjonctive q et toute base de faits F (toutes deux sur le même vocabulaire que $\mathcal{R}$), les ensembles de réponses à q sur $(F, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{R}')$ sont les mêmes. Cependant, que dire de l'effet de la transformation sur l'arrêt du chase (selon les différentes variantes du chase) ? Illustrer votre réponse en particulier avec la base de connaissances $(F, \{R\})$ du début de l'exercice.