Déduction automatique en logique du premier ordre classique

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master Informatique M2 2021-2022

Méthode des tableaux

Un peu d'histoire

- Méthode plus ancienne que la résolution ;
- Introduite par les pionniers Hintikka et Beth (années 50) ;
- Perfectionnée ensuite par Smullyan et Fitting ;
- À partir du calcul des séquents de Gentzen sans coupure.

Principe

- Par réfutation sur la proposition initiale et par cas ;
- Sans ou avec variables libres (métavariables) ;
- Avec skolémisation ou ϵ-termes.
- En version destructive ou non destructive.

Méthode des tableaux

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \qquad \neg P}{\odot}\ \odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\ \alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

Méthode des tableaux (sans variable libre)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(c)}\,\delta_{\exists},\ \ c \text{ frais} \qquad\qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(c)}\,\delta_{\neg\forall},\ \ c \text{ frais}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad\qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_{\exists},\quad f \text{ frais, } X_i \text{ var. lib.} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1,\ldots,X_n))}\ \delta_{\neg\forall},\quad f \text{ frais, } X_i \text{ var. lib.}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall \text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists \text{inst}}$$

$$\frac{\text{Appliquer } \sigma \text{ à l'arbre s'il existe dans la branche deux littéraux } K \text{ et } \neg L \text{ t.q. } \sigma = mgu(K, L)}{\odot}\ \odot$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, non destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1,\ldots,X_n))}\,\delta_{\exists},\quad \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1,\ldots,X_n))}\,\delta_{\neg\forall},\quad \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\,\gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\,\gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))}\ \delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))}\ \delta_{\neg\forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists \mathrm{inst}}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

- Preuve de : $(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)$;
- Réfutation : $\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$;
- Premières règles $(\alpha_{\neg\Rightarrow}, \alpha_{\neg\vee})$: $\forall x.P(x) \vee Q(x)$, $\neg P(a)$, $\neg Q(a)$.

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\frac{\forall x\,(P(x) \lor Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{P(X) \vee Q(X)}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\cfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\cfrac{P(X) \vee Q(X)}{P(X) \qquad\qquad Q(X)}\ \beta_\vee}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\cfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\quad \neg P(a)\ ,\quad \neg Q(a)}{\cfrac{P(X) \vee Q(X)}{P(X) \qquad\qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(X) \vee Q(X)}{\dfrac{P(X)}{P(a) \vee Q(a)}\ \gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad\qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\cfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\cfrac{P(X) \vee Q(X)}{\cfrac{P(X)}{\cfrac{P(a) \vee Q(a)}{{\color{red}P(a)} \qquad {\color{red}Q(a)}}\ {\color{red}\beta_{\vee}}}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$
\cfrac{\forall x\,(P(x)\lor Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\cfrac{P(X)\lor Q(X)}{\cfrac{P(X)}{\cfrac{P(a)\lor Q(a)}{\cfrac{P(a)}{\odot}\ \ \odot \qquad \cfrac{Q(a)}{}}\ \beta_{\lor}}\ \gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\ \beta_{\lor}}\ \gamma_{\forall M}
$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(X) \vee Q(X)}{\dfrac{P(X)}{\dfrac{P(a) \vee Q(a)}{\dfrac{P(a)}{\odot}\ \odot \qquad \dfrac{Q(a)}{\odot}\ \odot}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\dfrac{\forall x\,(P(x)\vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(X)\vee Q(X)}{\dfrac{P(X)}{\dfrac{P(a)\vee Q(a)}{\dfrac{P(a)}{\odot}\,\odot \qquad \dfrac{Q(a)}{\odot}\,\odot}\,\beta_\vee}\,\gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\,\beta_\vee}\,\gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \lor Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(a) \lor Q(a)}{\dfrac{P(a)}{\odot}\ \odot \qquad \dfrac{Q(a)}{\odot}\ \odot}\ \beta_\lor}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}}$$

Résolution

Principe

- Par réfutation ;
- Nécessité de clausifier ;
- Obtention d'une formule universelle (skolémisation) ;
- Variables universelles $\equiv$ métavariables (unification).

Skolémisation

Formule existentielle/universelle

- Formule existentielle : $\exists x_1. \ldots .\exists x_n.P(x_1, \ldots, x_n)$;
- Formule universelle : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.P(x_1, \ldots, x_n)$.

Théorème de Herbrand-Skolem

Pour toute formule Φ :

- Il existe une formule existentielle Φ' t.q. Φ' est valide ssi Φ est valide (Φ' est une forme de Herbrand de Φ) ;
- Il existe une formule universelle Φ' t.q. Φ' est insatisfiable ssi Φ est insatisfiable (Φ' est une forme de Skolem de Φ).

Skolémisation

Fonctions de skolémisation et herbrandisation

- Si Φ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$;
- $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$;
- $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$;
- $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$;
- $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$;
- $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = h(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\forall x.\Phi$;
- $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\exists x.\Phi$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.
- Ensuite, une fois le calcul terminé :
  - Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $s(\Phi)$;
  - Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\forall x_n.h(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $h(\Phi)$.

Skolémisation

Exemple

- Skolémisation de $\forall x. \exists y. \forall z. P(x, y, z)$;
- $s(\forall x. \exists y. \forall z. P(x, y, z)) =$
  $s(\exists y. \forall z. P(x, y, z)) =$
  $s(\forall z. P(x, y, z))[f(x)/y] =$
  $s(P(x, y, z))[f(x)/y] =$
  $P(x, y, z)[f(x)/y] =$
  $P(x, f(x), z)$;
- On obtient donc : $\forall x. \forall z. P(x, f(x), z)$.

Clausification

Principe

- On skolémise : on obtient une formule universelle $\forall \vec{x}.\Phi$;
- On élimine les quantificateurs, puis on met Φ en cnf.

Exemple

- $s(\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(h((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(s(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow h(P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$;
- $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x)) \vee P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a)) =$
  $(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a))$;
- $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$.

Résolution et factorisations binaires

Résolution binaire

$$\frac{A \vee C \qquad \neg B \vee D}{\sigma(C) \vee \sigma(D)}\ \mathrm{res}$$

où $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Factorisations binaires

$$\frac{A \vee B \vee C}{\sigma(B) \vee \sigma(C)}\ \mathrm{fact}^{+} \qquad \frac{\neg A \vee \neg B \vee C}{\neg\sigma(B) \vee \sigma(C)}\ \mathrm{fact}^{-}$$

où $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Attention aux noms des variables !

Un problème

- Est-ce que l'ensemble $S = \{P(x, a), \neg P(b, x)\}$ est insatisfiable ?
- Oui car les clauses sont universellement quantifiées :
  - $\forall x.P(x, a)$
  - $\forall x.\neg P(b, x)$
- Mais aucune règle de résolution ne s'applique !

Solution : renommage

- Avant de faire une résolution entre deux clauses C_1 et C_2, on renomme les variables de C_1 et C_2 de manière à ce que les deux clauses ne partagent plus aucune variable ;
- On appelle ça la standardisation des variables (terme qui vient de la communauté programmation logique).

Attention aux noms des variables !

Un problème

- Est-ce que l'ensemble $S = \{P(x,a), \neg P(b,x)\}$ est insatisfiable ?
- Oui car les clauses sont universellement quantifiées :
  - $\forall x.P(x,a)$
  - $\forall x.\neg P(b,x)$
- Mais aucune règle de résolution ne s'applique !

Solution : renommage

- Avant de faire une résolution entre deux clauses C_1 et C_2, on renomme les variables de C_1 et C_2 de manière à ce que les deux clauses ne partagent plus aucune variable ;
- On appelle ça la standardisation des variables (terme qui vient de la communauté programmation logique).

Attention aux noms des variables !

Un problème

- Est-ce que l'ensemble $S = \{P(x, a), \neg P(b, x)\}$ est insatisfiable ?
- Oui car les clauses sont universellement quantifiées :
  - $\forall x.P(x, a)$
  - $\forall x.\neg P(b, x)$
- Mais aucune règle de résolution ne s'applique !

Solution : renommage

- Avant de faire une résolution entre deux clauses C_1 et C_2, on renomme les variables de C_1 et C_2 de manière à ce que les deux clauses ne partagent plus aucune variable ;
- On appelle ça la standardisation des variables (terme qui vient de la communauté programmation logique).

Attention aux noms des variables !

Un problème

- Est-ce que l'ensemble $S = \{P(x, a), \neg P(b, x)\}$ est insatisfiable ?
- Oui car les clauses sont universellement quantifiées :
  - $\forall x.P(x, a)$
  - $\forall x.\neg P(b, x)$
- Mais aucune règle de résolution ne s'applique !

Solution : renommage

- Avant de faire une résolution entre deux clauses C_1 et C_2, on renomme les variables de C_1 et C_2 de manière à ce que les deux clauses ne partagent plus aucune variable ;
- On appelle ça la standardisation des variables (terme qui vient de la communauté programmation logique).

Attention aux noms des variables !

Un problème

- Est-ce que l'ensemble $S = \{P(x, a), \neg P(b, x)\}$ est insatisfiable ?
- Oui car les clauses sont universellement quantifiées :
  - $\forall x.P(x, a)$
  - $\forall x.\neg P(b, x)$
- Mais aucune règle de résolution ne s'applique !

Solution : renommage

- Avant de faire une résolution entre deux clauses C_1 et C_2, on renomme les variables de C_1 et C_2 de manière à ce que les deux clauses ne partagent plus aucune variable ;
- On appelle ça la standardisation des variables (terme qui vient de la communauté programmation logique).

Procédure de résolution (la même qu'en propositionnel !)

Algorithme (« Given-Clause Algorithm »)

$Sat := \emptyset$;
tant que $S \neq \emptyset$ faire
  choisir $C \in S$;
  $S := S \backslash \{C\}$;
  si $C = \square$ alors retourner « insatisfiable » ;
  si C est une tautologie alors ; (* passer à la clause suivante *)
  sinon, si $C \in Sat$ alors ; (* idem *)
  sinon pour tout résolvant C_1 entre C
  et une clause de $Sat \cup \{C\}$ faire
    $S := S \cup \{C_1\}$;
  $Sat := Sat \cup \{C\}$;
retourner « satisfiable ».

Résolution

Exemple

- Preuve de : $(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)$;
- Clausification de $\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$:
  $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$;
- Résolution entre $P(x) \vee Q(x)$ et $\neg P(a)$, $\sigma = [a/x]$: $Q(a)$;
- Résolution entre $Q(a)$ et $\neg Q(a)$: $\square$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact$^+$ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact$^-$ sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\square$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact^{+} sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact^{-} sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\square$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact$^+$ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact$^-$ sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\Box$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact$^+$ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact$^-$ sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\Box$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact^{+} sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact^{-} sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\square$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact^+ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact^- sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\Box$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact$^+$ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact$^-$ sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\Box$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact^+ sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact^- sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\square$.

Pourquoi des règles de factorisation ?

Exemple

- Ensemble de clauses : $S = \{P(x) \vee P(y), \neg P(a) \vee \neg P(z)\}$;
- S est bien insatisfiable ;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee \neg P(z)$;
- Résolution entre $P(x) \vee P(y)$ et $P(y') \vee \neg P(z)$: $P(y) \vee P(y')$;
- Résolution entre $\neg P(a) \vee \neg P(z)$ et $P(y) \vee \neg P(z')$: $\neg P(z) \vee \neg P(z')$;
- On regénère les mêmes clauses indéfiniment ;
- Règle fact^{+} sur $P(x) \vee P(y)$: $P(x)$;
- Règle fact^{-} sur $\neg P(a) \vee \neg P(z)$: $\neg P(a)$;
- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(a)$: $\Box$.

Propriétés de la résolution

Correction et complétude

- La résolution est correcte et complète : un ensemble de clauses S est insatisfiable ssi on peut dériver la clause vide à partir de S ;
- La correction est triviale car la conclusion de chaque règle de résolution est une conséquence logique de ses prémisses ;
- La complétude peut être démontrée en utilisant la complétude de la résolution propositionnelle et le « lifting ».

Quelques mots sur la complétude

Règles et méthode de recherche de preuve

- Ne pas confondre la complétude des règles de résolution et la complétude de l'algorithme de recherche de preuve ;
- Les règles de résolution sont complètes ;
- En revanche, l'algorithme doit être plus précis sur le choix de la clause pour établir sa complétude ;
- La résolution avec sélection arbitraire des clauses est incomplète ;
- La résolution ordonnée (avec un ordre sur les clauses) est complète.