

Déduction modulo théorie et variantes

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master Informatique M2 2021-2022

Déduction modulo théorie

Une preuve c'est quoi ?

- Comment démontrer $2 + 2 = 4$?
- Point de vue des Babyloniens : c'est du calcul !
- Point de vue des Grecs : c'est de la déduction !

Une preuve

- C'est un peu des deux ;
- Les systèmes de preuve n'incluent pas la notion de calcul.

Déduction modulo théorie

- Faire la part du calcul et de la déduction (dichotomie) ;
- Raisonner modulo une congruence sur les propositions.

Axiomes ou pas axiomes ?

Place des axiomes ?

- Les laisser parmi la liste des hypothèses ?
- Explosion combinatoire dans l'espace de recherche de preuve ;
- Pas d'indications pour outils de déduction automatique.

Une solution : les solveurs SMT

- SMT = « Satisfiability Modulo Theories » ;
- Combinaison d'un solveur SAT (DPLL) et de plugins de théories ;
- Mais :
 - ▶ Procédures de décision spécifiques pour chaque théorie donnée ;
 - ▶ Contrainte de décidabilité des théories ;
 - ▶ Manque d'automatisabilité et de généricité.

Axiomes ou pas axiomes ?

Déduction modulo théorie

- Transformer les axiomes en règles de réécriture ;
- Changer la recherche de preuves avec axiomes en calculs ;
- Éviter l'explosion combinatoire dans la recherche de preuve ;
- Réduire la taille des preuves (on ne garde que les étapes significatives).

Déduction modulo théorie

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en calcul des séquents

$$\frac{\frac{\frac{\dots, x \in A \vdash A \subseteq A, x \in A}{\dots \vdash A \subseteq A, x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\dots \vdash A \subseteq A, \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A} \forall_{\text{right}} \quad \frac{\frac{\dots, A \subseteq A \vdash A \subseteq A}{\dots, A \subseteq A \vdash A \subseteq A} \text{ax}}{\dots, A \subseteq A \vdash A \subseteq A} \Rightarrow_{\text{left}}}{\frac{\dots, (\forall x. x \in A \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A \subseteq A \vdash A \subseteq A}{A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A \vdash A \subseteq A} \wedge_{\text{left}}}{\frac{\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash A \subseteq A}{\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash A \subseteq A} \forall_{\text{left}} \times 2}$$

Dédution modulo théorie

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Règle de réécriture

$$a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en déduction modulo théorie

$$\frac{\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}^{\text{ax}}}{\vdash x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash A \subseteq A} \forall_{\text{right}} (A \subseteq A \longrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A)$$

Dédution modulo théorie

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Règle de réécriture

$$a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en déduction modulo théorie

$$\frac{\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}^{\text{ax}}}{\vdash x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash A \subseteq A} \forall_{\text{right}} (A \subseteq A \longrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A)$$

Dédution modulo théorie

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Règle de réécriture

$$a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en déduction modulo théorie

$$\frac{\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}^{\text{ax}}}{\vdash x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash A \subseteq A} \forall_{\text{right}} (A \subseteq A \longrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A)$$

Dédution modulo théorie

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Règle de réécriture

$$a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en déduction modulo théorie

$$\frac{\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}^{\text{ax}}}{\vdash x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash A \subseteq A} \forall_{\text{right}} (A \subseteq A \longrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A)$$

Superdédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Preuve en calcul des séquents

$$\frac{\frac{\frac{\dots, x \in A \vdash A \subseteq A, x \in A}{\dots \vdash A \subseteq A, x \in A \Rightarrow x \in A} \Rightarrow_{\text{right}}}{\dots \vdash A \subseteq A, \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A} \forall_{\text{right}} \quad \frac{\frac{\dots, A \subseteq A \vdash A \subseteq A}{\dots, (\forall x. x \in A \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A \subseteq A \vdash A \subseteq A} \Rightarrow_{\text{left}}}{\frac{A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A \vdash A \subseteq A}{\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash A \subseteq A} \wedge_{\text{left}} \quad \forall_{\text{left}} \times 2$$

Superdédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Calcul de la règle de superdédution

Preuve en superdédution

$$\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A} \text{ ax}}{\vdash A \subseteq A} \subseteq_{\text{right}}$$

Superdédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Calcul de la règle de superdédution

Preuve en superdédution

$$\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}}{\vdash A \subseteq A} \begin{array}{l} \text{ax} \\ \subseteq_{\text{right}} \end{array}$$

Superdéduction (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$



Calcul de la règle de superdéduction

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x (x \in a \Rightarrow x \in b), \Delta}{\Gamma \vdash a \subseteq b, \Delta}$$

Preuve en superdéduction

$$\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}}{\vdash A \subseteq A} \begin{matrix} ax \\ \subseteq_{right} \end{matrix}$$

Suprédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Calcul de la règle de suprédution

$$\frac{\frac{\Gamma, x \in a \vdash x \in b, \Delta}{\Gamma \vdash x \in a \Rightarrow x \in b, \Delta} \Rightarrow_{\text{right}}}{\frac{\Gamma \vdash \forall x (x \in a \Rightarrow x \in b), \Delta}{\Gamma \vdash a \subseteq b, \Delta} \forall_{\text{right}}, x \notin \Gamma, \Delta}$$

Preuve en suprédution

$$\frac{x \in A \vdash x \in A}{\vdash A \subseteq A} \begin{matrix} ax \\ \subseteq_{\text{right}} \end{matrix}$$

Superdédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Calcul de la règle de superdédution

$$\frac{\Gamma, x \in a \vdash x \in b, \Delta}{\Gamma \vdash a \subseteq b, \Delta} \subseteq_{\text{right}}, x \notin \Gamma, \Delta$$

Preuve en superdédution

$$\frac{\frac{x \in A \vdash x \in A}{\vdash A \subseteq A}}{\vdash A \subseteq A} \begin{matrix} ax \\ \subseteq_{\text{right}} \end{matrix}$$

Superdédution (variante)

Inclusion

$$\forall a. \forall b. a \subseteq b \longrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b$$

Calcul de la règle de superdédution

$$\frac{\Gamma, x \in a \vdash x \in b, \Delta}{\Gamma \vdash a \subseteq b, \Delta} \subseteq_{\text{right}}, x \notin \Gamma, \Delta$$

Preuve en superdédution

$$\frac{\overline{x \in A \vdash x \in A}}{\vdash A \subseteq A} \begin{matrix} \text{ax} \\ \subseteq_{\text{right}} \end{matrix}$$

Tableaux et superdédution

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\perp}{\odot} \odot \perp$$

$$\frac{\neg \top}{\odot} \odot \neg \top$$

$$\frac{P \quad \neg P}{\odot} \odot$$

$$\frac{\neg \neg P}{P} \alpha_{\neg \neg}$$

$$\frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q} \beta_{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q} \beta_{\neg \Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q} \alpha_{\wedge}$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q} \alpha_{\neg \vee}$$

$$\frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q} \alpha_{\neg \Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \beta_{\vee}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \beta_{\neg \wedge}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q} \beta_{\Rightarrow}$$

Tableaux et superdédution

δ/γ -règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))} \delta_{\exists}$$

$$\frac{\neg \forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))} \delta_{\neg \forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)} \gamma_{\forall M}$$

$$\frac{\neg \exists x.P(x)}{\neg P(X)} \gamma_{\neg \exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)} \gamma_{\forall \text{inst}}$$

$$\frac{\neg \exists x.P(x)}{\neg P(t)} \gamma_{\neg \exists \text{inst}}$$

Tableaux et superdédution

Calcul des règles de superdédution

- $\mathcal{S} \equiv$ règles de clôture, règles analytiques, règles δ , $\gamma_{\forall M}$ et $\gamma_{\neg \exists M}$;
- Axiome : $R : P \longrightarrow \varphi$;
- Une règle de superdédution positive R (et une négative $\neg R$) :
 - ▶ Initialiser la procédure avec la formule φ ;
 - ▶ Appliquer les règles de \mathcal{S} jusqu'à ce que plus aucune ne s'applique ;
 - ▶ Collecter les prémisses et la conclusion, et remplacer φ par P .
- S'il y a des metavariables, ajouter une règle d'instanciation R_{inst} (ou $\neg R_{\text{inst}}$).

Tableaux et superdédution

Exemple (inclusion)

$$\frac{\frac{\forall x. x \in a \Rightarrow x \in b}{X \in a \Rightarrow X \in b} \gamma_{\forall M}}{X \notin a \mid X \in b} \beta_{\Rightarrow}$$

$$\frac{a \subseteq b}{X \notin a \mid X \in b} \subseteq$$

$$\frac{\frac{\neg \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b}{\neg (\epsilon_x \in a \Rightarrow \epsilon_x \in b)} \delta_{\neg \forall}}{\epsilon_x \in a, \epsilon_x \notin b} \alpha_{\neg \Rightarrow}$$

avec $\epsilon_x = \epsilon(x). \neg(x \in a \Rightarrow x \in b)$

$$\frac{a \not\subseteq b}{\epsilon_x \in a, \epsilon_x \notin b} \neg \subseteq$$

avec $\epsilon_x = \epsilon(x). \neg(x \in a \Rightarrow x \in b)$


$$\frac{a \subseteq b}{X \notin a \mid t \in b} \subseteq_{\text{inst}}$$



Tableaux et superdédution

Exemple de recherche de preuve

- Avec les règles classiques des tableaux :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b, A \not\subseteq A}{X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x. x \in X \Rightarrow x \in Y} \gamma_{\forall M} \times 2 \\
 \frac{X \subseteq Y, \forall x. x \in X \Rightarrow x \in Y}{A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A} \gamma_{\forall inst} \times 2 \quad \Pi' \beta_{\Leftrightarrow} \\
 \frac{A \subseteq A, \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A}{A \subseteq A, \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A} \Pi \beta_{\Leftrightarrow} \\
 \frac{}{\odot} \odot
 \end{array}$$


Où Π est :

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \not\subseteq A, \neg \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A}{\neg(\epsilon_x \in A \Rightarrow \epsilon_x \in A)} \delta_{\neg \forall} \\
 \frac{\neg(\epsilon_x \in A \Rightarrow \epsilon_x \in A)}{\epsilon_x \in A, \epsilon_x \notin A} \alpha_{\neg \Rightarrow} \\
 \frac{}{\odot} \odot
 \end{array}$$

avec $\epsilon_x = \epsilon(x). \neg(x \in A \Rightarrow x \in A)$

Tableaux et superdédution

Exemple de recherche de preuve

- Avec les règles classiques des tableaux :

$$\frac{\frac{\frac{\forall a. \forall b. a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b, A \not\subseteq A}{A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A} \gamma_{\text{Vinst}} \times 2}{\frac{A \subseteq A, \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A}{\quad} \Pi} \beta_{\Leftrightarrow} \odot$$

Où Π est :

$$\frac{\frac{\frac{A \not\subseteq A, \neg \forall x. x \in A \Rightarrow x \in A}{\neg(\epsilon_x \in A \Rightarrow \epsilon_x \in A)} \delta_{\neg\forall}}{\frac{\epsilon_x \in A, \epsilon_x \notin A}{\quad} \alpha_{\neg\Rightarrow}} \odot$$

avec $\epsilon_x = \epsilon(x). \neg(x \in A \Rightarrow x \in A)$

Tableaux et superdédution

Exemple de recherche de preuve

- Avec les règles de superdédution :

$$\frac{\frac{A \not\subseteq A}{\epsilon_x \in A, \epsilon_x \not\in A} \neg \subseteq}{\odot} \odot$$

avec $\epsilon_x = \epsilon(x). \neg(x \in A \Rightarrow x \in A)$