Session : 1	Durée de l'épreuve : 3 heures
Date : Janvier 2017	
	Documents autorisés : Aucun
Master Informatique	
Théorie des bases de connaissances (HMIN312)	

Exercice 1. Fragment existentiel conjonctif

On considère les deux formules suivantes :
$f = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (p(x_1, x_2) \land q(x_2, x_3) \land p(x_1, x_4) \land q(x_4, x_3))$
$g = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (p(y_1, y_2) \land q(y_2, y_3) \land p(y_3, y_1))$

Question 1 Comparez f et g du point de vue de la conséquence logique (a-t-on $f \models g$? $g \models f$?). Justifiez votre réponse.

Question 2 Rappelons que, pour deux requêtes conjonctives booléennes Q_1 et Q_2, on dit que Q_1 est incluse dans Q_2 (notation $Q_1 \sqsubseteq Q_2$) si toute base de faits F qui répond oui à Q_1 répond également oui à Q_2. Si l'on voit f et g comme des requêtes conjonctives booléennes, a-t-on $f \sqsubseteq g$ et/ou $g \sqsubseteq f$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Modélisation en logique

Considérez les phrases suivantes :

1. Tout ce qui enseigne est un professeur.
2. Tout ce qui est enseigné est un cours.
3. Tout professeur doit enseigner au moins un cours de licence.
4. Tout professeur doit enseigner au moins trois cours (distincts).
5. Chaque cours est un cours de licence ou un cours de master.
6. Il est impossible pour un cours d'être à la fois cours de licence et cours de master.

et les langages logiques suivants (voir annexe pour un rappel des logiques de description) :

- règles existentielles (positives : ne contenant pas $\bot$)
- règles Datalog (aussi dites "range-restricted")
- $\mathcal{ALC}$
- $\mathcal{EL}$
- DL-Lite$_\mathcal{R}$

Pour chacune des phrases et chacun des langages ci-dessus, décidez si la phrase peut être exprimée dans le langage. Si oui, donnez une formule dans le langage qui décrit la phrase, et si la réponse est non, expliquez brièvement pourquoi.

Vous devez utiliser les prédicats suivants (l'arité des prédicats est indiquée en parenthèses) : Prof(1), Cours(1), Licence(1), Master(1), Enseigne(2)

Exercice 3. Règles existentielles

Question 1 Soit la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R})$, avec $F = \{p(a,b)\}$ et $\mathcal{R} = \{p(x,y) \rightarrow r(x,y,z)\ ;\ r(x,y,z) \rightarrow p(y,z)\}$. Et soit l'interprétation $\mathcal{I} = (D, .^I)$ où $D = \{a,b\}$ (on suppose que chaque constante est interprétée par elle-même), $p^I = \{(a,b),(b,a)\}$ et $r^I = \{(a,b,a),(b,a,b)\}$. $\mathcal{I}$ est-elle un modèle de $\mathcal{K}$? Si oui, est-ce un modèle *universel* de $\mathcal{K}$? Sinon, que faudrait-il ajouter à $\mathcal{I}$ pour que ce soit un modèle de $\mathcal{K}$? Prouvez vos réponses.

Question 2 On considère la requête booléenne $q = q(a,u)$ (où a est une constante et u une variable) et l'ensemble $\mathcal{R} = \{q(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow q(x,z)\ ;\ s(x) \rightarrow p(x,y)\}$.

1. Quel est l'ensemble $\mathcal{Q}$ de toutes les réécritures de la requête q avec $\mathcal{R}$ (à un renommage bijectif des variables près) que l'on peut obtenir au moyen de l'opérateur d'unification par pièce (piece-unifier) ? Indiquez comment ces réécritures sont obtenues.
2. Cet ensemble $\mathcal{Q}$ est *adéquat* et *complet* (par rapport à $\mathcal{R}$). Qu'est-ce que cela signifie ?
3. Existe-t-il un sous-ensemble strict de $\mathcal{Q}$ qui reste adéquat et complet ? Si oui, donnez le plus petit sous-ensemble que vous puissiez trouver. Dans tous les cas, justifiez vos affirmations.

Exercice 4. Logiques de description

Question 1 Indiquez pour quelles logiques de description (parmi DL-Lite$_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{EL}$, $\mathcal{ALC}$) les phrases suivantes sont vérifiées (voir annexe pour un rappel de ces logiques). Justifiez vos réponses.

1. Chaque base de connaissances est satisfiable.
2. Chaque base de connaissances satisfiable admet un modèle canonique (universel).
3. Chaque TBox peut être traduite en un ensemble de règles existentielles (positives).
4. Chaque TBox peut être traduite en un ensemble de règles existentielles et contraintes négatives.
5. Il existe une procédure de décision qui permet de répondre aux requêtes d'instance en temps polynomial pour la complexité combinée.

Question 2 Utilisez la méthode de tableau pour décider si le concept

$$C = (\exists R.\exists S.H) \sqcap (\forall R.(\forall S.\neg H \sqcup \forall S.G))$$

est satisfiable par rapport à la terminologie acyclique suivante :

$$\mathcal{T} = \{H \equiv D \sqcap E, G \equiv \exists R.B\}$$

Indiquez clairement vos étapes et les règles de tableau utilisées.

Exercice 5. Règles (existentielles) avec négation

Au cours de cet exercice, et pour les questions 1 à 4, nous utilisons l'ensemble $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ de règles propositionnelles avec négation défini par :

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad b \leftarrow a \\ R_2 &: \quad c \leftarrow a, not\, b \\ R_3 &: \quad d \leftarrow b, not\, c \\ R_4 &: \quad d \leftarrow c \end{aligned}$$

Nous utiliserons également les deux bases d'atomes $\mathcal{F}_1 = \{a, c\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{a, b\}$. Voir annexe pour un rappel de définitions.

Question 1 En utilisant la définition des modèles stables par point fixe, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- $\mathcal{E}_1 = \{a, c, d\}$ est un modèle stable de $(\mathcal{F}_1, \mathcal{R})$.
- $\mathcal{E}_2 = \{a, b, d\}$ est un modèle stable de $(\mathcal{F}_2, \mathcal{R})$.

Question 2 En utilisant l'algorithme ASPERIX vu en cours construisant de façon arborescente les modèles stables, déterminez *tous* les modèles stables de $(\{a\}, \mathcal{R})$.

Question 3 Dessinez le graphe de dépendance des prédicats (dans le cas propositionnel, ce sera celui des atomes) de $\mathcal{R}$.

Question 4 En vous aidant de la question précédente, montrez que pour tout ensemble d'atomes propositionnels $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ admet exactement un modèle stable.

Question 5 Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, vous fournirez un contre-exemple, si elles sont vraies, vous donnerez une démonstration (attention, cette question n'a plus rien à voir avec les questions 1 à 4). Indice : pour les assertions fausses, un contre-exemple propositionnel suffit. Pour les assertions vraies, une démonstration dans le cas propositionnel sera acceptée. Dans ce qui suit, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des bases de faits et $\mathcal{R}$ des ensembles de RENs.

1. Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ ayant $\mathcal{E}$ pour modèle stable. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, alors $(\mathcal{F}', \mathcal{R})$ admet un modèle stable.
2. Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ ayant $\mathcal{E}$ pour modèle stable. Si $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, alors $(\mathcal{F}', \mathcal{R})$ admet un modèle stable.
3. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de RENs dont les corps positifs sont non vides. Alors il existe $\mathcal{F}$ tel que $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ admet un modèle stable.

Annexe A : Rappels Logiques de Description

Logique $\mathcal{ALC}$

$\mathcal{ALC}$ admet des concepts complexes de la forme suivante :

$$C \ := \top \mid A \mid C_1 \sqcap C_2 \mid \exists R.C$$

où A est un concept atomique et R est un rôle atomique.

Une $\mathcal{ALC}$-TBox contient des inclusions de concepts $C_1 \sqsubseteq C_2$ (avec C_1, C_2 comme ci-dessus)

Logique $\mathcal{EL}$

$\mathcal{EL}$ admet des concepts complexes de la forme suivante :

$$C \ := \top \mid A \mid C_1 \sqcap C_2 \mid \exists R.C$$

où A est un concept atomique et R est un rôle atomique.

Une $\mathcal{EL}$-TBox contient des inclusions de concepts $C_1 \sqsubseteq C_2$ (avec C_1, C_2 comme ci-dessus). Une TBox est sous forme normale si elle contient uniquement les inclusions des formes suivantes :

$$A_1 \sqcap A_2 \sqsubseteq B \quad A \sqsubseteq \exists R.B \quad \exists R.A \sqsubseteq B$$

où A, A_1, A_2, B sont des concepts atomiques (ou $\top$).

Logique DL-Lite$_{\mathcal{R}}$

En DL-Lite$_{\mathcal{R}}$, une TBox consiste en un ensemble d'inclusions de l'une des formes suivantes :

$$B_1 \sqsubseteq B_2 \quad B_1 \sqsubseteq \neg B_2 \quad S_1 \sqsubseteq S_2 \quad S_1 \sqsubseteq \neg S_2$$

où

$$B \ := A \mid \exists S \qquad S \ := R \mid R^-$$

avec A un concept atomique et R un rôle atomique.

Annexe B : Rappels Règles Existentielles avec Négation

Une règle existentielle avec négation (REN) est de la forme :

$$H \leftarrow B^+, not\, B_1^-, \ldots, not\, B_k^-$$

où la tête H, le corps positif B^+ et les corps négatifs B_i^- sont des ensembles d'atomes en logique des prédicats.

Nous ne considérons comme dans le cours que des règles "safe", c'est à dire que toute variable apparaissant à la fois dans la tête et dans un corps négatif doit apparaître aussi dans le corps positif.

Une base de connaissances $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ (où $\mathcal{F}$ est un ensemble d'atomes et $\mathcal{R}$ est un ensemble de RENs) sera dite propositionnelle quand elle ne comporte aucune variable. Les atomes de cette base pourront alors être remplacés par des atomes propositionnels.

Rappelons également que le *not* représente la négation par l'échec. La règle $H \leftarrow B^+, not\, B_1^-, \ldots, not\, B_k^-$ sera applicable à $\mathcal{F}$ si il existe un homomorphisme de B^+ dans $\mathcal{F}$ qui n'est extensible à aucun homomorphisme d'un $B^+ \cup B_i^-$ dans $\mathcal{F}$.