

TD - Arithmétique linéaire

Exercices

Question 1

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5x_3 \wedge 2x_1 - 2x_2 = 0$$

Forme générale:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - s_1 &= 0 \wedge \\ 2x_1 - 2x_2 - s_2 &= 0 \wedge \\ 0 &\geq s_1 \wedge \\ 0 &\leq s_2 \wedge \\ s_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Application du simplexe :

$$N = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$B = \{s_1, s_2\}$$

$$\alpha(x_1) = 0, \alpha(x_2) = 0, \alpha(x_3) = 0, \alpha(s_1) = 0, \alpha(s_2) = 0$$

Tableau:

	x_1	x_2	x_3
s_1	3	2	-5
s_2	2	-2	0

$$\begin{aligned} s_1 &\leq 0 \wedge \\ 0 &\leq s_2 \wedge \\ s_2 &\leq 0 \wedge \end{aligned}$$

La solution est : $\alpha(x_1) = 0, \alpha(x_2) = 0, \alpha(x_3) = 0$

Question 2

$$3x + y \leq 3 \wedge x + y \geq 1 \wedge x - y \geq -2$$

Forme générale:

$$\begin{aligned}
3x + y - s_1 &= 0 \wedge \\
x + y - s_2 &= 0 \wedge \\
x - y - s_3 &= 0 \wedge \\
s_1 &\leq 3 \wedge \\
s_2 &\geq 1 \wedge \\
s_3 &\geq -2
\end{aligned}$$

Application du simplexe:

$$N = \{x, y\}$$

$$B = \{s_1, s_2, s_3\}$$

$$\alpha(x) = 0, \alpha(y) = 0, \alpha(s_1) = 0, \alpha(s_2) = 0, \alpha(s_3) = 0$$

Tableau :

	x	y
s_1	3	1
s_2	1	1
s_3	1	-1

$$s_1 \leq 3 \wedge$$

$$s_2 \geq 1 \wedge$$

$$s_3 \geq -2$$

s_2 n'est pas dans sa borne. s_2 doit être augmenté de 1 pour être dans sa borne (inférieure).

Pivot avec x :

$$\theta = \frac{(1-(0))}{1} \text{ donc } 1$$

$$s_2 = x + y \Rightarrow x = s_2 - y$$

$$s_1 = 3(s_2 - y) + y = 3s_2 - 2y$$

$$s_3 = s_2 - 2y$$

	s_2	y
s_1	3	-2
x	1	-1
s_3	1	-2

$$\alpha(x) = 1, \alpha(y) = 0, \alpha(s_1) = 3, \alpha(s_2) = 1, \alpha(s_3) = 1$$

La solution est : $\alpha(x) = 1, \alpha(y) = 0$

Question 3

$$3x + y \leq 3 \wedge x + 2y \geq 2 \wedge x - y \geq -2$$

Forme générale :

$$\begin{aligned}
3x + y - s_1 &= 0 \wedge \\
x + 2y - s_2 &= 0 \wedge \\
x - y - s_3 &= 0 \wedge \\
s_1 &\leq 3 \wedge \\
s_2 &\geq 2 \wedge \\
s_3 &\geq -2
\end{aligned}$$

Application du simplexe:

$$N = \{x, y\}$$

$$B = \{s_1, s_2, s_3\}$$

$$\alpha(x) = 0, \alpha(y) = 0, \alpha(s_1) = 0, \alpha(s_2) = 0, \alpha(s_3) = 0$$

Tableau :

	x	y
s_1	3	1
s_2	1	2
s_3	1	-1

$$\begin{aligned}
s_1 &\leq 3 \wedge \\
s_2 &\geq 2 \wedge \\
s_3 &\geq -2
\end{aligned}$$

s_2 n'est pas dans sa borne. Il doit être augmenté de 2.

Pivot avec x : x doit être augmenté de 2.

$$s_2 = x + 2y \Leftrightarrow x = s_2 - 2y$$

$$s_1 = 3(s_2 - 2y) + y = 3s_2 - 5y$$

$$s_3 = s_2 - 2y - y = s_2 - 3y$$

Tableau:

	s_2	y
s_1	3	-5
x	1	-2
s_3	1	-3

$$\alpha(x) = 2, \alpha(s_2) = 2, \alpha(y) = 0, \alpha(s_1) = 6, \alpha(s_3) = 2$$

s_1 n'est pas dans sa borne. il doit être diminué de 3.

pivot avec y : on doit augmenter y de ? (calcul de θ)

$$\theta = \frac{(3-6)}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$s_1 = 3s_2 - 5y \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}s_2 - \frac{1}{5}s_1$$

$$x = s_2 - 2y \Leftrightarrow x = s_2 - 2\left(\frac{3}{5}s_2 - \frac{1}{5}s_1\right) = -\frac{1}{5}s_2 + \frac{2}{5}s_1$$

$$s_3 = s_2 - 3y \Leftrightarrow s_3 = s_2 - 3\left(\frac{3}{5}s_2 - \frac{1}{5}s_1\right) = -\frac{4}{5}s_2 + \frac{3}{5}s_1$$

Tableau :

	s_2	s_1
y	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
s_3	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$\alpha(s_1) = 3, \alpha(y) = \frac{3}{5}, \alpha(s_2) = 2, \alpha(x) = \frac{4}{5}, \alpha(s_3) = \frac{1}{5}$$

Tout le monde est dans ses bornes.

La solution est : $\alpha(x) = \frac{4}{5}, \alpha(y) = \frac{3}{5}$