Théorie des bases de données et de connaissances (HAI933I)
Contrôle n°1

Durée : 45 mn. Sans documents.

Exercice 1

Soient 2 ensembles d'atomes, où a est la seule constante
$A_1 = \{p(x_1, y_1), q(y_1, u_1), p(x_1, z_1), q(v_1, z_1)\}$
$A_2 = \{p(a, x_2), p(a, y_2), q(y_2, u_2), q(x_2, x_2)\}$

Question 1. Dessinez les graphes associés à ces ensembles d'atomes (les prédicats étant binaires, choissez une représentation simple).

Correction: On représente chaque ensemble d'atomes par un graphe orienté étiqueté, où les sommets correspondent aux termes et les arcs aux atomes.

Question 2. Donnez tous les homomorphismes de A_1 dans A_2 et de A_2 dans A_1. Il peut n'y en avoir aucun (dire pourquoi), un ou plusieurs (les énumérer).

Correction: Il y a 2 homomorphismes de A_1 dans A_2 :
$h_1 = \{x_1 \mapsto a, y_1 \mapsto x_2, u_1 \mapsto x_2, z_1 \mapsto x_2, v_1 \mapsto x_2\}$
$h_2 = \{x_1 \mapsto a, y_1 \mapsto y_2, u_1 \mapsto u_2, z_1 \mapsto x_2, v_1 \mapsto x_2\}$
Il n'y a pas d'homomorphisme de A_2 dans A_1 (car A_2 a une constante mais pas A_1, car A_2 a une boucle mais pas A_1, ...).

Question 3. A tout ensemble d'atomes A_i, on associe une formule conjonctive fermée existentiellement (qu'on note f_i). Quels sont les liens de conséquence logique ($\models$) entre f_1 et f_2 ?

Correction: Puisqu'il y a un homomorphisme de A_1 dans A_2, on a $f_2 \models f_1$. Puisqu'il n'y a pas d'homomorphisme de A_1 dans A_2, on n'a pas $f_1 \models f_2$.

Question 4. A_1 et A_2 sont-ils des *cores* ? Quand votre réponse est non, justifiez-la par un homomorphisme. On rappelle qu'un ensemble d'atomes A est un core s'il n'existe pas d'homomorphisme de A dans $A' \subset A$.

Correction: A_1 est un core, mais pas A_2 : l'homomorphisme $h = \{x_2 \mapsto x_2, y_2 \mapsto x_2, u_2 \mapsto x_2\}$ envoie A_2 dans l'un de ses sous-ensembles stricts (c'est-à-dire $h(A_2) \subsetneq A_2$).

Exercice 2

Soient deux requêtes conjonctives booléennes Q_1 et Q_2. On note $Q_1 \sqsubseteq Q_2$ si toute base de faits qui répond oui à Q_1 répond aussi oui à Q_2. Montrez que : si $Q_1 \sqsubseteq Q_2$ alors il existe un homomorphisme de Q_2 dans Q_1.

Correction: Voir le corrigé de cet exercice sur moodle.

Exercice 3

Question 1. Qu'est-ce qu'un *modèle universel* d'une base de connaissances $\mathcal{K}$?

Correction: C'est un modèle de $\mathcal{K}$ qui s'envoie par homomorphisme dans tout modèle de $\mathcal{K}$.

Question 2. Quel est l'intérêt de cette notion pour répondre à des requêtes conjonctives (disons : booléennes pour simplifier) ?

Correction: Une base de connaissances $\mathcal{K}$ répond oui à une CQ booléenne q si et seulement si $\mathcal{K} \models q$, c'est-à-dire tout modèle de $\mathcal{K}$ est un modèle de q. Si $\mathcal{K}$ a un modèle universel, il suffit de tester si ce modèle (appelons-le M_K) est un modèle de q au lieu de considérer tous les modèles de $\mathcal{K}$: en effet, si M_K est un modèle de q, alors tout modèle de $\mathcal{K}$ dans lequel M_K s'envoie par homomorphisme est aussi un modèle de q.

Question 3. Soit la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R})$ où $F = \{p(a, b)\}$ et $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ avec :
$R_1 : p(x, y) \rightarrow \exists z\ q(y, z)$
$R_2 : q(x, y) \rightarrow p(x, y)$
$\mathcal{K}$ admet-elle un modèle universel ? Si oui, donner un tel modèle (sous forme d'interprétation ou sous forme d'ensemble d'atomes). Si non, pourquoi ?

Correction: Oui, et on peut calculer ce modèle universel par le chase. Ici :
$Chase(\mathcal{K}) = \{p(a, b), q(b, z_0), p(b, z_0)\} \cup \{q(z_i, z_{i+1}), p(z_i, z_{i+1}) | i \geq 0\}$.
Remarque : Toutes les variantes de chase que nous avons vues donnent le même résultat sur cette base de connaissances. Puisque c'est aussi le résultat du core chase, on en conclut que $\mathcal{K}$ n'a pas de modèle universel fini.

Question 4. L'ensemble d'atomes $M_1 = \{p(a, b), q(b, a)\}$ correspond-il à un modèle de $\mathcal{K}$? À un modèle universel de $\mathcal{K}$? Justifiez vos réponses.

Correction: M_1 n'est pas un modèle de $\mathcal{K}$ car il ne satisfait pas R_2 : on a $q(b, a) \in M_1$ mais $p(b, a) \notin M_1$.

Question 5 Mêmes questions avec $M_2 = \{p(a, b), p(b, b), q(b, b)\}$.

Correction: M_2 est un modèle de $\mathcal{K}$: il satisfait F ($F \subseteq M_2$), R_1 (pour $(x, y) = (a, b)$, on a $p(a, b) \in M_2$, et en prenant $z = b$ on a bien $q(b, b) \in M_2$, et pour $(x, y) = (b, b)$ on a $p(b, b) \in M_2$, et en prenant $z = b$, on a bien $p(b, b) \in M_2$) et R_2 (pour $(x, y) = (a, b)$, on a $q(a, b) \in M_2$, et on a bien $p(a, b) \in M_2$). Mais M_2 n'est pas un modèle universel de $\mathcal{K}$ car il ne s'envoie pas par homomorphisme dans $Chase(\mathcal{K})$ qui est un modèle de $\mathcal{K}$.