Projet L3 MIASHS - Les nombres de Catalan

Yanis Benmaddi Magueye Fall Hamza Jasny

30 mai 2022

Pour tout entier natuel $n \geq 0$, le n-ième nombre de Catalan est défini par : $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Les nombres de Catalan sont omniprésents en combinatoire. L'une des façons dont ils apparaissent est la suivante :

Soient $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ des variables dans un anneau.
Pour calculer le produit $\prod_{i=1}^{n+1} a_i$, on doit choisir un parenthésage.
Quelques exemples : (on écrit $a, b, c, \ldots$ au lieu de $a_1, a_2, a_3, \ldots$)

— Pour $n = 1$: un seul parenthésage ab.
— Pour $n = 2$: 2 parenthésages $a(bc)$ et $(ab)c$.
— Pour $n = 3$: 5 parenthésages $a(b(cd))$, $a((bc)d)$,$(ab)(cd)$,$(a(bc))d$ et $((ab)c)d$.

Combien de groupe pouvons nous faire pour chaque valeur de n ?

Le tableau ici présenté montre les possibilités pour $0 \leq n \leq 5$

n	*	nb manière
n=0	*	1
n=1	()	1
n=2	()(),(())	2
n=3	()()(),()(()),(())(),((()))	5
n=4	()()()(),()()(()),()(())(),()(()()),()((())),(())()(),(())(()),(()())(), ((()))(),(()()()),(())(()),((())()),((()())),(((())))	14
n=5	()()()()(),()()()(()),()()(())(),()()(()()),()()((())) ()(())()(),()(())(()),()(()())(),()((()))(),()(()()()) ()(()(())),()((())()),()((()())),()(((()))),(())()()() (())()(()),(())(())(),(())(()()),(())((())),(()())()() (()())(()),((()))()(),((()))(()),(()()())(),(()(()))() ((())())(),((()()))(),(((())))(),(()()()(),(()()(())) (()(())()),(()(()())),(()((()))),((())()()),((())(())) ((()())()),(((()))())((()()())),((()(()))),(((())())) (((()()))),((((()))))	42

Partons de l'hypothèse suivante : le nombre de parenthésages possibles pour $n+1$ variables est le n-ième nombre de Catalan.
L'idée est de montrer que $P_n = C_n$ avec P_n le nombre de parenthésages.

Pour cela, on peut procéder ainsi :
Pour $n+1$ variables on peut ainsi créer 2 ensembles A et B de parenthèses dans lequel A peut contenir jusqu'à n paires de parenthèses et B aussi.

Par exemple : pour 4 variables :

$abcd$: $\underset{A}{[abc]}\underset{B}{[d]}$, $\underset{A}{[ab]}\underset{B}{[cd]}$, $\underset{A}{[a]}\underset{B}{[bcd]}$
$P_3 = P_2P_0 + P_1P_1 + P_0P_2$.

pour 5 variables :

$abcde$: $\underset{A}{[abcd]}\underset{B}{[e]}$, $\underset{A}{[abc]}\underset{B}{[de]}$, $\underset{A}{[ab]}\underset{B}{[cde]}$, $\underset{A}{[a]}\underset{B}{[bcde]}$
$P_4 = P_3P_0 + P_2P_1 + P_1P_2 + P_0P_3$ et ainsi de suite.

Mais si A contient k paires, alors B contient $n-k+1$ paires et inversement.
Il n'y a exactement qu'une seule façon de les construire.
Nous pouvons compter toutes les configurations où A a 0 paire et B a $n+1$ paires.
Ainsi, si A a 1 paire, B a n paires et ainsi de suite.
En les additionnant nous obtenons le nombre total de configurations possibles :

$P_1 = P_0P_0$

$P_2 = P_1P_0 + P_0P_1$

$P_3 = P_2P_0 + P_1P_1 + P_0P_2$

$P_4 = P_3P_0 + P_2P_1 + P_1P_2 + P_0P_3$

$\vdots$

$P_n = P_{n-1}P_0 + P_{n-2}P_1 + ... + P_1P_{n-2} + P_0P_{n-1}$

avec $P_0 = P_1 = 1$.

Soit t une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle fonction génératrice la série entière suivant :

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n$$

Soit $S(x)$ une fonction génératrice de la suite (P_n) pour $n \geq 0$

$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + ...$

En élevant $S(x)$ au carré on obtient :

$S^2(x) = P_0 P_0 + (P_1 P_0 + P_0 P_1)x + (P_2 P_0 + P_1 P_1 + P_0 P_2)x^2 + ...$

Or on a vu que $P_0 P_0 = P_1$
et que $P_2 = P_1 P_0 + P_0 P_1$.

Ainsi, on a : $S^2(x) = P_1 + P_2 x + P_3 x^2 + ...$ (1)

avec $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$.

On multiplie par x :

$xS^2(x) = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + ... = S(x) - P_0$ (2)

$\Leftrightarrow xS^2(x) = s(x) - P_0$, avec $P_0 = 1$

$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0$

L'équation obtenue est une équation quadratique en $S(x)$ que nous pouvons résoudre en utilisant la formule quadratique sous une forme plus familière.

Nous pouvons le réécrire comme suit :

$aS^2 + bS + c$

avec $a = x$, $b = -1$ et $c = P_0 = 1$.

$xS - S + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4x \geq 0$

Car sinon S n'existe pas, ce qui construit la démarche :

$\Rightarrow \; S(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \quad ou \quad \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

La solution $S(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ n'est pas possible donc on prend $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

car $S(0) = P_0 = 1 \quad (2) \qquad$ et avec cette solution :

Pour $x \to 0, \quad S(x) \to \infty$

$$S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \qquad (3)$$

Faisons maintenant le développement limité de S(x) afin de l'étudier.

Rappelons que :

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$$

Sachant que le développement limité de la fonction $(1+x)^\alpha$ s'écrit :

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$ [*]

Ainsi, le développement limité de $(1-4x)^{1/2}$ s'écrit :

$(1-4x)^{1/2} = 1 - \dfrac{(\frac{1}{2})}{1}4x + \dfrac{(\frac{1}{2}).(\frac{-1}{2})}{2.1}(4x)^2 - \dfrac{(\frac{1}{2}).(\frac{-1}{2}).(\frac{-3}{2})}{3.2.1}(4x)^3 + \dfrac{(\frac{1}{2}).(\frac{-1}{2}).(\frac{-3}{2}).(\frac{-5}{2})}{4.3.2.1}(4x)^4 - \dfrac{(\frac{1}{2}).(\frac{-1}{2}).(\frac{-3}{2}).(\frac{-5}{2}).(\frac{-7}{2})}{5.4.3.2.1}(4x)^5 + ...$

On peut transformer l'expression en combinant et ainsi obtenir :

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3.1}{3!}8x^3 - \frac{5.3.1}{4!}16x^4 - \frac{7.5.3.1}{5!}32x^5 - \;\; ... \quad (4)$$

À l'aide de (3) et (4), on obtient :

$$S(x) = 1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{3.1}{3!}4x^2 + \frac{5.3.1}{4!}8x^3 + \frac{7.5.3.1}{5!}32x^5 - ... \quad (5)$$

Les termes 7.5.3.1 sont un peu gênants. Ils sont comme des factorielles, sauf qu'il manque les nombres pairs.
Mais remarquez que $2^2.2! = 4.2$, que $2^3.3! = 6.4.2$, que $2^4.4! = 8.6.4.2$ etc...
Ainsi $(7.5.3.1).2^4.4! = 8!$

En appliquant cette idée dans l'équation (5), on obtient :

$$S(x) = 1+\frac{1}{2}(\frac{2!}{1!1!})x+\frac{1}{3}(\frac{4!}{2!2!})x^2+\frac{1}{4}(\frac{6!}{3!3!})x^3+\frac{1}{5}(\frac{8!}{4!4!})x^4+... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i.$$

Par identification, $P_i = \frac{1}{1+i}\binom{2i}{i}$.

Ainsi on peut conclure que le nombre de parenthésages pour (n+1) variables est le n-ième nombre de Catalan caractérisé par sa formule :

$$C_i = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$$

.

Références

[1] Tom Davis, *Catalan Numbers*, http ://www.geometer.org/mathcircles, 19.02.2016

[*]