Modélisation et tarification de tranches de CDO synthétiques

Projet d'option mathématiques appliquées

Auteurs: Alexandre BRIARD
Lucas HAYASHI SILVA XAVIER
Yanis JOUVAIN

Tuteur: Mathieu RIBATET

Nantes, 08 décembre 2025

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

"How do you explain to an innocent citizen of the free world the importance of a credit default swap on a double-A tranche of a subprime-backed collateralized debt obligation ?"

— Michael Lewis, The Big Short : Inside the Doomsday Machine

1 Introduction

1.1 Motivation

Depuis les années 1990, le développement des marchés de crédit a donné naissance à une classe de produits dérivés complexes destinés à transférer, mutualiser et redistribuer le risque de défaut : les *Collateralized Debt Obligations* (CDO) ou titre de créance collatéralisé en français. Initialement introduits par des institutions financières telles que *Drexel Burnham Lambert* à la fin des années 1980, puis massivement développés par *J.P. Morgan* au cours de la décennie suivante, les CDO avaient pour ambition d'optimiser l'allocation du risque de crédit en permettant la titrisation de portefeuilles d'actifs hétérogènes. Ils offraient aux investisseurs la possibilité de prendre des expositions ajustées au risque grâce à une structure hiérarchisée en tranches (*equity*, *mezzanine* et *senior*), chacune absorbant une fraction distincte des pertes éventuelles.

Les *CDO synthétiques*, reposant non pas sur des obligations physiques mais sur des contrats de *Credit Default Swap* (CDS), ont marqué une étape importante dans cette évolution. Présentés comme plus flexibles, plus liquides et plus rapides à structurer, ils permettaient aux institutions financières d'accroître ou de couvrir leurs expositions sur des portefeuilles de crédit sans détenir directement les actifs sous-jacents. Cette innovation a contribué à l'expansion rapide du marché des produits structurés au cours des années 2000.

Cependant, la crise financière de 2007–2008 a mis en lumière les risques systémiques liés à ces instruments. Leur complexité intrinsèque, la difficulté d'estimer correctement les corrélations de défaut et les limites du modèle de copule gaussienne largement utilisé à l'époque ont conduit à une sous-estimation significative des risques réels associés à certaines tranches, en particulier les tranches *mezzanine* et *senior*. Ces insuffisances de modélisation et de calibration ont joué un rôle non négligeable dans l'amplification de la crise.

Dans ce contexte, une compréhension rigoureuse des mécanismes de valorisation des CDO synthétiques, notamment des modèles de dépendance et des dynamiques de défaut, demeure essentielle. La capacité à tarifier correctement ces instruments est déterminante pour la gestion du risque et la stabilité financière. Le présent rapport s'inscrit dans cette perspective : il vise à étudier, formaliser et comparer plusieurs approches de modélisation du risque de défaut et de tarification des tranches synthétiques, en particulier les modèles à copules et les modèles à intensité.

1.2 Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané

1.2.1 Espace probabilisé et filtration

Nous nous plaçons dans un cadre continu en temps sur un horizon fini $[0, T]$, muni d'un espace probabilisé complet

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},),$$

où la filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfait les conditions usuelles :

- Continuité à droite : $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$
- Complétude : Soit N un ensemble négligeable, alors $N \subset \mathcal{F}_0$

Tous les processus considérés sont supposés adaptés à $(\mathcal{F}_t)$ c'est à dire, pour tout processus $(X_t)_{t\geq 0}$, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

1.2.2 Intérêts composés, numéraire et taux instantanés

Cas déterministe Considérons un taux annuel constant $r \in \mathbb{R}$, un capital initial $N_0 = 1$ et cherchons à calculer le capital au temps T avec n compositions par an :

$$B_T^{(n)} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} \tag{1.1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} = e^{rT} \tag{1.2}$$

Donc le capital en capitalisation continue est :

$$B_T = e^{rT} \tag{1.3}$$

A présent découpons l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n} \tag{1.4}$$

Et supposons sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ le taux constant et égal à $r(t_i)$. Nous pouvons alors définir le schéma d'Euler explicite tel que :

$$\begin{cases} B_0^{(n)} = 1 \\ B_{t_{i+1}}^{(n)} = B_{t_i}^{(n)} \left(1 + r(t_i)\Delta t\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{B}_t = r(t)B_t \tag{1.6}$$

Sous l'hypothèse d'intégrabilité de r sur $[0, T]$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] il existe une unique solution à ce problème que l'on nommera *numéraire* : un actif sans risque $B = (B_t)_{t\geq 0}$ vérifiant

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right), \tag{1.7}$$

Ce numéraire nous offre une mesure de la valeur monétaire au temps t, pour 1€ placé en banque au temps initial on récupère B_t au temps t.

Cas stochastique Cette définition s'étend naturellement dans le cas où r_t suit le processus stochastique de *taux instantané* (ou *taux court*) $(r_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- **(H1) Adaptation et mesurabilité :** r_t est $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable.
- **(H2) Bornes ou conditions d'intégrabilité :** $\displaystyle\int_0^T |r_s| \, ds < \infty$ p.s., ce qui garantit que $B_t > 0$ est bien défini et continu.

1. En posant $f(t, B) = r(t)B$, r est localement bornée sur $[0, T]$ donc f est localement lipschitzienne et continue presque partout par rapport à la deuxième variable ce qui vérifie les hypothèses du théorème.

— **(H3) Modélisation stochastique :** r_t est généralement supposé être une diffusion de la forme :

$$dr_t = \mu(t, r_t)\,dt + \sigma(t, r_t)\,dW_t, \tag{1.8}$$

où (W_t) est un Brownien sous $\mathbb{P}$, et les coefficients μ, σ satisfont des conditions de Lipschitz et croissance linéaire assurant l'existence et l'unicité forte de la solution.

Cette fois, nous définissons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ dB_t = r_t B_t dt \end{cases} \tag{1.9}$$

Cette EDS est en réalité une équation différentielle aléatoire puisqu'elle ne comporte pas de terme de diffusion mais ses coefficients sont aléatoires. Nous cherchons ainsi à déterminer le champ mesurable

$$B : [0, T] \to \mathbb{R} \tag{1.10}$$

vérifiant, pour tout $t \in [0, T]$,

$$B_t(\omega) = 1 + \int_0^t r_s(\omega) B_s(\omega) ds, \quad \text{p.s.} \tag{1.11}$$

Remarquons que pour $\omega \in \Omega$ fixé cette égalité est déterministe, l'intégrale est de Lebesgue classique.

Cette fois, en posant $f(t, x, \omega) = r_t(\omega)x$ nous vérifions que f est continue et localement lipschitzienne en x et intégrable en t, il existe donc une unique solution chemin par chemin à notre équation différentielle par le théorème de Carathéodory [2] pour les EDO. En séparant les variables et en résolvant pour tout $\omega \in \Omega$ vérifiant (**H2**) nous obtenons la solution suivante :

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds \right), \quad \text{p.s.} \tag{1.12}$$

1.2.3 Processus de prix des actifs risqués

Définition 1.1 (Martingale locale)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. Un processus adapté *càdlàg* [3] $(M_t)_{t\geq 0}$ est appelé *martingale locale* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\tau_n \to +\infty \quad \text{p.s.},$$

et que, pour tout n, le processus arrêté

$$(M_{\min(t,\tau_n)})_{t\geq 0}$$

est une martingale (intégrable) par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

2. Dans le cas stochastique $(r_t)_{t\geq 0}$ suit un processus non continu de manière générale mais mesurable donc le théorème de Carathéodory s'applique mais pas Cauchy-Lipschitz.

3. Un processus *càdlàg* est un processus dont les trajectoires sont presque sûrement continues à droite et dont des limites à gauche existent partout.

Soit $S = (S_t)_{t\geq 0}$ un actif risqué. Sous la probabilité historique $\mathbb{P}$, sa dynamique est supposée être une *semi-martingale*, c'est-à-dire un processus pouvant être décomposé en une *locale martingale* et un processus adapté càdlag à variations locales finies, typiquement un processus de diffusion :

$$dS_t = S_t\big(b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t\big), \tag{1.13}$$

où (b_t) est la dérive ou "*drift*" (prime de risque incluse) et (σ_t) la volatilité.

On note les prix actualisés par le numéraire :

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}. \tag{1.14}$$

1.2.4 Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre

Définition 1.2 (Mesures équivalentes)**.** Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{F})$ et notons

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) = 0\}, \quad \mathcal{N}_\nu := \{A \in \mathcal{F} \mid \nu(A) = 0\}$$

les mesures μ et ν sont dites *équivalentes* si $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$ et nous noterons $\mu \sim \nu$.

Selon le théorème fondamental de l'évaluation des actifs [1], l'hypothèse *Absence of free lunch with vanishing risk*[4] (NFLVR) est équivalente à l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ (appelée *mesure équivalente martingale* ou *mesure risque-neutre*) telle que les prix actualisés soient des *martingales locales* sous $\mathbb{P}^*$:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} \quad \text{est une } \mathbb{P}^*\text{-locale martingale.}$$

Sous cette mesure, la dynamique de S_t s'écrit :

$$dS_t = S_t\big(r_t\,dt + \sigma_t\,dW_t^*\big), \tag{1.15}$$

où (W_t^*) est un processus de Wiener sous $\mathbb{P}^*$.

1.3 Le modèle de crédit

Nous cherchons à présent à connaître le prix juste $\Pi_X(t, T)$ (i.e. sans prime de risque) à payer en t pour acheter un actif ayant une revendication ou *payoff* $X \in L^1(\mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ en T.

Nous commençons donc par actualiser la valeur de X en T par le numéraire B_T (car 1€ demain vaut moins que 1€ aujourd'hui) et nous estimons cette quantité inconnue en prenant son espérance sous un univers sans prime de risque conditionnellement à l'information disponible en t c'est à dire $\mathcal{F}_t$. En normalisant par le numéraire à l'instant présent nous obtenons :

$$\Pi_X(t, T) = N_t\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{B_T}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{1.16}$$

4. Cette hypothèse est complexe à définir mathématiquement et ne nous apporte rien d'intéressant, en revanche c'est celle-ci qui justifie l'existence de la mesure équivalente risque-neutre. Nous pouvons l'interpréter comme une absence de stratégie ayant un gain sans risque réel ou investissement initial.

Cette formule suit directement de la propriété de martingale de $(\tilde{S}_t)$.

A partir de cette formule il est possible de définir l'obligation zéro-coupon (i.e. à prix juste) sans risque, il s'agit d'un actif (une dette) ayant une revendication de 1€ au temps T dont la valeur est donnée par

$$D(t,T) = N_t \, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \tag{1.17}$$

Il est alors possible de rentrer le terme N_t dans l'espérance puisque celui-ci est constant conditionnellement à l'information $\mathcal{F}_t$ et en remplaçant par l'expression du numéraire nous obtenons :

$$D(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \tag{1.18}$$

Si le risque de contrepartie de l'émetteur du zéro-coupon n'est pas nul, l'évaluation du zéro-coupon doit tenir compte de la possibilité du défaut de celui-ci : deux nouveaux risques entrent en jeu :

- l'instant de défaut,
- la perte en cas de défaut (*Loss Given Default*).

La perte en cas de défaut s'exprime comme un taux de recouvrement R éventuellement aléatoire et d'une hypothèse de recouvrement. Nous notons $D_\tau(t,T)$ la valeur en t d'un zéro-coupon risqué de maturité T et τ l'instant de défaut de l'émetteur de ce titre. Il existe plusieurs hypothèses de recouvrement en théorie des mathématiques financières mais nous utiliserons la plus courante dite *recovery of par value* et qui consiste en le recouvrement à l'instant de défaut d'une fraction R du nominal du titre

$$D_\tau(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_t^T r_s\, ds}\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + Re^{-\int_t^T r_s\, ds}\mathbb{1}_{\{t<\tau<T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \tag{1.19}$$

Dans la suite du document nous chercherons à évaluer le prix des actifs à l'instant initial $t_0 = 0$, les prix seront donc donnés par des espérances conditionnellement à l'information initiale $\mathcal{F}_0$. Afin de simplifier les notations nous omettrons le conditionnement trivial et utiliserons simplement l'espérance.

2 Produits dérivés de crédit

2.1 Le marché du crédit risqué

2.1.1 Les obligations risquées

2.1.2 Spread de crédit

2.1.3 Notations de crédit

2.2 Credit Default Swap

2.2.1 Description du produit

Un *Credit Default Swap* (CDS) ou plus simplement *swap* est un produit dérivé du crédit et peut être vu comme l'élément fondamental (ou sous-jacent) des produits plus exotiques comme les CDO synthétiques que nous verrons plus tard.

Sa fonction principale est de transférer le risque de crédit de référence d'une entreprise C (*entité de référence*) entre deux contreparties A et B. Dans le contrat standard, l'une des parties en question, disons A, achète une protection contre le risque de perte en cas de défaut de l'entité de référence C. Ce défaut est déclenché par un évènement de crédit formel spécifié dans le contrat. Cet événement peut être la faillite de l'entreprise, un défaut de paiement ou la restructuration de sa dette.

La protection est valable jusqu'à la maturité du swap. En échange de cette protection, l'acheteur A verse périodiquement (en général, tous les 3 mois) au vendeur B une prime et ce jusqu'au défaut de C ou jusqu'à maturité du swap. La jambe du swap correspondante est appelée *premium leg*.

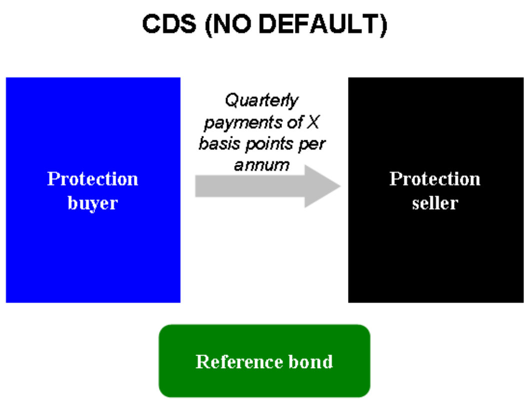

FIGURE 1 – Schéma de transaction d'un CDS sans défaut

Si le défaut intervient avant la maturité du swap, le vendeur de protection effectue un paiement à l'acheteur de protection. Ce paiement équivaut à la différence entre le nominal de la dette couverte par le swap et le taux de recouvrement observé à l'instant du défaut. Cette fois la jambe du swap correspondante est appelée *protection leg*.

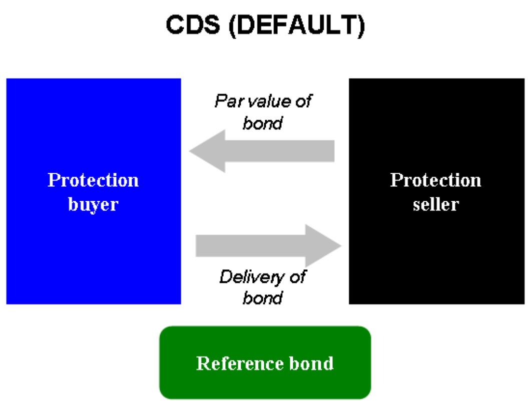

FIGURE 2 – Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut

2.2.2 Évaluation de la marge d'un CDS

Considérons un CDS de maturité $T > 0$ sur une entité de référence, portant sur un notionnel $N > 0$. On note $(T_k)_{k=1,\dots,m}$ les dates de paiement de la jambe de prime (généralement trimestrielles), avec $0 < T_1 < \cdots < T_m = T$. La fraction d'année associée au coupon k selon la convention du marché est notée $\delta_k = T_k - T_{k-1}$. Considérons τ le temps de défaut de l'entité de référence, défini comme un temps d'arrêt, nous y associons un taux de recouvrement noté $R \in [0, 1]$.

Jambe fixe (premium leg). À chaque date de coupon T_k, l'acheteur de protection paie un montant proportionnel au *spread* (ou marge) s (exprimé en taux annuel), au notionnel et à la fraction d'année. Ce paiement n'a lieu que si l'entité de référence n'a pas fait défaut avant T_k, c'est-à-dire si $\tau > T_k$. La valeur présente sous la mesure risque-neutre $\mathbb{P}^*$ de la jambe fixe est donc :

$$\mathrm{JF}(s) = s\,N \sum_{k=1}^{m} \delta_k\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}}\right]. \tag{2.1}$$

Jambe variable (protection leg). En cas de défaut à un temps aléatoire $\tau \leq T$, le vendeur de protection verse la *loss given default* :

$$\mathrm{LGD} = N(1 - R). \tag{2.2}$$

La valeur présente de la jambe de protection ou jambe variable est alors

$$\mathrm{JV} = N(1 - R)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_\tau}\right]. \tag{2.3}$$

Détermination du spread. Un CDS s'échange à valeur nulle à l'initiation. Le spread s^* est donc défini par l'égalité :

$$\mathrm{JF}(s^*) = \mathrm{JV}. \tag{2.4}$$

On obtient :

$$s^* = (1 - R)\,\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_\tau}\right]}{\sum_{k=1}^{m} \delta_k\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}}\right]}. \tag{2.5}$$

Ce spread constitue la prime d'assurance annuelle qui égalise la valeur actualisée des paiements fixes et celle du paiement contingent versé en cas de défaut de l'entité sous-jacente.

2.3 Collateralized Debt Obligation

Les *Collateralized Debt Obligations* ou CDO sont des produits obligataires adossés à des dettes, résultant d'un mécanisme relativement complexe d'ingénierie financière appelé *titrisation* (*securitization*). A partir d'un panier de titres de dette (de 50 à 10000 créances), l'émetteur synthétise des actifs obligataires. Les CDO se distinguent selon la nature de la dette sous-jacente : s'il s'agit de produits obligataires, on parle de "*Collateralized Bond Obligations*" ou CBO. Dans le cas ou le panier est constitué uniquement de titres de prêts, on parle de "Collateralized Loan Obligations" ou CLO. Bien entendu, dans le cas général, le panier est mixte. Depuis sa création dans le milieu des années 1990, le marché des CDO n'a cessé de se développer. En 2000, il dépassait les 100 Milliards de dollars d'émission.

Après la crise des *subprimes* de 2008 les CDO ont été pointés du doigt pour leur manque de transparance et difficultées d'évaluation des risques. Suite à cela le marché a chuté considérablement cependant aujourd'hui ce marché représente toujours 23,4 milliards d'euros et les projections actuelles lui prédisent près de 69 milliards d'euros en 2033.

Nous présentons dans cette partie les enjeux du processus de titrisation ainsi que ses mécanismes, puis les techniques récentes liées à la génération synthétique de tranches utilisées en trading de corrélation.

2.3.1 Titrisation

La titrisation est une technique financière qui consiste à transférer à des investisseurs des actifs financiers tels que des créances (par exemple des factures émises non soldées, ou des prêts en cours), en les transformant, par le passage à travers une structure *ad hoc* — souvent un *Special Purpose Vehicule*, une entité spécialement dédiée à absorbée les risques de ces produits — en titres financiers émis sur le marché des capitaux.

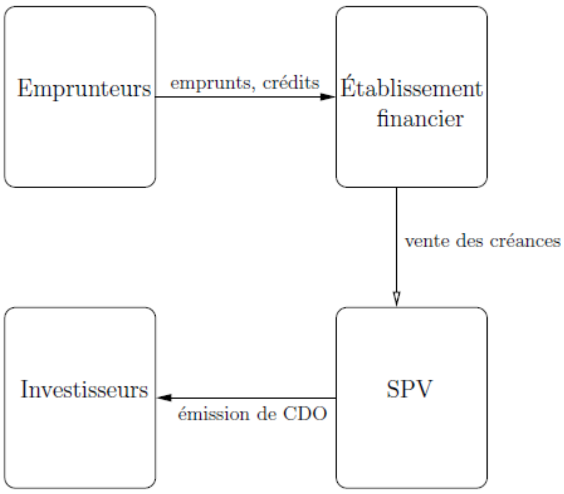

FIGURE 3 – Méchanisme d'émission d'un CDO

L'intérêt est multiple, premièrement il permet à l'émetteur de crédit de transférer ces actifs et donc ces risques à une autre entité, il n'a donc pas besoin d'accumuler des liquidités pour couvrir les risques de défaut. Deuxièmement ces produits peuvent, comme nous le verrons ensuite, être les sous-jacents de produits dérivés. Enfin, le plus grand intérêt est le découpage des CDO en *tranches* de différents niveaux de risques à partir de sous-jacents de notations à priori quelconques. Elles se décomposent sous cette forme :

— la tranche *junior* ou *equity* supporte les premières pertes sur l'ensemble de créances. Il s'agit donc d'un produit très risqué, payant un spread très élevé à l'investisseur. Il s'agit d'un produit purement spéculatif ;

— la tranche intermédiaire, dite *mezzanine* supporte les pertes au delà de la tranche equity, c'est un produit moyennement risqué, offrant un spread intéressant ;
— la tranche *senior* supporte les pertes restantes, si elles ont lieu. Elle est la moins soumise au risque de crédit, et offre donc un coupon faible.

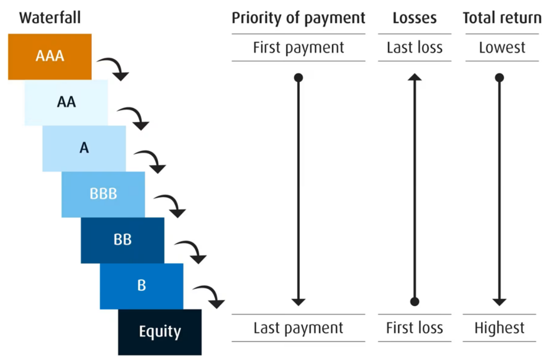

FIGURE 4 – Distribution des tranches et effet "*waterfall*" d'un CDO

2.3.2 Les produits synthétiques

Devant le développement impressionnant du marché des CDO et la demande de produits de corrélation de plus en plus forte de la part des investisseurs, des techniques d'ingénierie financière ont donné naissance au concept des CDO synthétiques.

De l'utilisation originelle dans les stratégies de gestion de fonds propres, les CDO deviennent peu à peu des produits d'investissement spéculatifs.

Le principe de la titrisation synthétique est de constituer des produits tranchés à partir, non plus d'un ensemble de crédits ou créances, mais d'un ensemble de CDS. Ceci revient à dire que l'organisme émetteur créé une exposition au risque de crédit et de corrélation en prenant des positions sur un ensemble de CDS.

L'intérêt mais également le plus grand risque de ces produits est qu'il n'est plus adossé à un crédit en tant que tel mais véritablement à un CDS, swaps qui peuvent être émis en quantités illimités et souvent non rapportée sur un même crédit — en 2006 selon le journaliste Gregory Zuckerman il y avait 5 fois plus de CDO synthétiques que classiques adossés à des prêts *subprime* sur le marché. De plus, là où l'intestisseur d'un *cash* CDO classique engage les fonds *ex ante* c'est à dire avant le défaut éventuel en achetant la tranche, l'investisseur d'un CDO synthétique engage les fonds *ex post* et donc uniquement en cas de défaut. Ainsi, sans vérification de sa solvabilité, celui-ci peut s'exposer à un remboursement très important sur un grand nombre de swap pour lesquels il ne s'attendait pas à ce qu'il y ait défaut (typiquement les tranches *senior* d'un CDO synthétique à priori sans risque).

En effet, dans le cas classique les sous-jacents constituant un CDO sont décoréllés géographiquement, typiquement les crédits et les CDS associés à ceux-ci proviennent de zones géographiques diverses. La probabilité que tous ces swaps s'activent au sein du CDO est donc infime en théorie et donc les tranches supérieures ne devraient jamais être impactées même pour des crédits de très mauvaise qualité.

3 Modélisation du risque de défaut

3.1 Modélisation du risque d'un CDS

La détermination du prix d'un Credit Default Swap repose sur la modélisation probabiliste du temps de défaut de l'entité de référence. L'objectif de cette section est d'établir le cadre théorique permettant de dériver la loi de probabilité du temps de défaut, afin de calculer le spread équitable du contrat.

Nous nous plaçons dans un espace probabilisé doublement filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0})$ muni d'une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$. La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ représente l'information disponible sur les marchés financiers à l'instant t, tandis que la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration augmentée qui incorpore l'information relative au défaut. Plus précisément, nous définissons $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\{\tau \leq s\} : s \leq t)$, où τ désigne le temps de défaut, variable aléatoire positive représentant l'instant du défaut de crédit.

Considérons un CDS de maturité T portant sur un notionnel N, avec un taux de recouvrement R et un spread s. Le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage impose l'égalité entre la valeur actualisée de la jambe premium (2.1) et celle de la jambe protection (2.3), permettant de déterminer le spread de marché équitable.

Pour modéliser le temps de défaut, nous adoptons une approche par intensité. Nous supposons que τ admet une intensité de défaut $\lambda(t)$, processus stochastique adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Le temps de défaut suit un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(t)$, avec probabilité de survie

$$\mathbb{P}^*(\tau > t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\, ds\right)\right], \tag{3.1}$$

et densité de probabilité

$$f_\tau(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\lambda(t) \exp\left(-\lambda(t)\, dt\right)\right]. \tag{3.2}$$

Lorsque l'intensité est déterministe, $\lambda(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, la probabilité de survie devient

$$\mathbb{P}^*(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\, ds\right). \tag{3.3}$$

Les valeurs actualisées des jambes (2.1) et (2.3) peuvent alors être calculées semi-analytiquement. Le cas particulier d'une intensité constante $\lambda(t) = \lambda$ conduit à une loi exponentielle $\mathbb{P}^*(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ et en effectuant l'hypothèse d'un taux constant $r_t = r$ il est possible d'obtenir une expression analytique pour le spread. En effet, considérons que la prime est payée jusqu'au défaut, la jambe fixe s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{JF}(s) &= s\,N \sum_{k=1}^{m} \delta_k \,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbb{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}}\right] \\
&= s\,N \sum_{k=1}^{m} \delta_k \, e^{-(r+\lambda)T_{i+1}} \\
&\approx s\,N \int_0^T e^{-(r+\lambda)u} du \\
&= s\,N \frac{1-e^{-(r+\lambda)T}}{r+\lambda}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

De la même manière la jambe variable s'écrit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{JV} &= N(1-R)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}}{B_\tau}\right] \\
&= N(1-R) \int_0^T \lambda e^{-(r+\lambda)u} du \\
&= N(1-R)\,\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1-e^{-(r+\lambda)T}\right)
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

En égalisant les deux termes nous obtenons le *fair spread* qui satisfait *l'égalité du triangle*

$$s^* = (1-R)\lambda \tag{3.6}$$

En pratique, l'intensité $\lambda(t)$ est déterminée à partir de la notation de crédit via des tables historiques de taux de défaut par classe de notation. Le calcul du spread s'effectue ensuite par simulation Monte Carlo : on génère des trajectoires du processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(t)$ pour obtenir des réalisations du temps de défaut, puis on calcule la moyenne empirique des flux actualisés sur l'ensemble des simulations.

3.2 Défauts corrélés

3.2.1 Modèles de copules

La valorisation des tranches de CDO synthétiques requiert la modélisation de la distribution jointe des temps de défaut $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ du portefeuille. Les distributions marginales $F_i(t) = \mathbb{P}^*(\tau_i \le t)$ étant connues, il reste à spécifier la structure de dépendance.

Le théorème de Sklar stipule qu'il existe une fonction de copule $C : [0,1]^n \to [0,1]$ telle que

$$F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = C(F_1(\tau_1), F_2(\tau_2), \ldots, F_n(\tau_n)). \tag{3.7}$$

La copule C encode la structure de dépendance indépendamment des marginales.

Copule gaussienne. La copule gaussienne suppose que les variables $\Phi^{-1}(F_i(\tau_i))$ suivent une loi normale multivariée de matrice de corrélation Σ, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Elle s'écrit

$$C_\Sigma^{\mathrm{Gauss}}(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)), \tag{3.8}$$

avec Φ_Σ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. En pratique, on impose souvent une corrélation uniforme ρ entre toutes les paires d'entités, réduisant le nombre de paramètres à un seul.

La copule de Student. Une extension importante de la copule gaussienne est la copule de Student, qui s'écrit

$$C^t_{\Sigma,\nu}(u_1, \dots, u_n) = t_{\Sigma,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)), \tag{3.9}$$

où t_ν désigne la fonction de répartition de la loi de Student univariée à ν degrés de liberté, et $t_{\Sigma,\nu}$ celle de la loi de Student multivariée. Le paramètre ν contrôle l'épaisseur des queues de distribution : plus ν est faible, plus les queues sont épaisses, capturant ainsi une dépendance extrême plus forte entre les défauts. Lorsque $\nu \to \infty$, la copule de Student converge vers la copule gaussienne. Cette propriété permet de mieux modéliser les défauts simultanés observés lors des périodes de stress financier, où la copule gaussienne tend à sous-estimer les événements de queue.

L'absence de formule analytique pour la distribution des pertes nécessite une simulation Monte Carlo. L'algorithme génère un vecteur $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, puis applique les transformations

$$U_i = \Phi(Z_i), \quad \tau_i = F_i^{-1}(U_i), \tag{3.10}$$

pour obtenir des scénarios de défaut corrélés permettant d'estimer les prix par moyenne empirique.

3.2.2 Modèles à intensité stochastique

Les modèles de copules présentent plusieurs limitations : structure de dépendance statique, absence de facteurs économiques explicites, et sous-estimation de la dépendance de queue. Une approche alternative décompose l'intensité de défaut de chaque entité i en

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^{\text{idio}}(t) + \beta_i \cdot \lambda^{\text{syst}}(t), \tag{3.11}$$

où $\lambda_i^{\text{idio}}(t)$ est la composante idiosyncratique, $\lambda^{\text{syst}}(t)$ le facteur systémique commun, et $\beta_i \geq 0$ la sensibilité au risque systémique.

Les intensités sont modélisées par des processus stochastiques. Pour capturer les chocs macroéconomiques brutaux et les variations discontinues du risque de crédit, nous utilisons un processus de diffusion avec sauts pour le facteur systémique :

$$d\lambda^{\text{syst}}(t) = \kappa(\theta - \lambda^{\text{syst}}(t))\, dt + \sigma\sqrt{\lambda^{\text{syst}}(t)}\, dW(t) + dJ(t), \tag{3.12}$$

où $\kappa > 0$ est la vitesse de retour à la moyenne, $\theta > 0$ le niveau de long terme, $\sigma > 0$ la volatilité, $W(t)$ un mouvement brownien, et $J(t)$ un processus de Poisson composé modélisant les sauts. Le processus de sauts s'écrit

$$J(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} Y_i, \tag{3.13}$$

où $P(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ_J et les Y_i sont des variables aléatoires i.i.d. représentant l'amplitude des sauts (typiquement positives pour modéliser des augmentations soudaines du risque systémique). Cette spécification permet de capturer à la fois la dynamique continue du risque via la composante diffusion et les événements de crise via les sauts.

La corrélation entre défauts émerge naturellement via le facteur commun $\lambda^{\text{syst}}(t)$: lorsque le risque systémique s'élève, toutes les intensités augmentent simultanément, générant une dépendance dynamique et capturant la dépendance de queue observée empiriquement.

Pour l'évaluation numérique, une propriété clé simplifie considérablement les calculs : conditionnellement à la trajectoire du facteur systémique $\{\lambda^{\text{syst}}(s), 0 \leq s \leq T\}$, les temps de défaut des différentes entités sont indépendants. En effet, étant donné $\lambda^{\text{syst}}(t)$, chaque intensité $\lambda_i(t)$ devient un processus déterministe (à la composante idiosyncratique près, qui est indépendante entre entités), et les défauts suivent des processus de Poisson indépendants. Cette observation permet de décomposer la simulation en deux étapes :

1. Simuler une trajectoire du facteur systémique $\lambda^{\text{syst}}(t)$ par discrétisation d'Euler de l'équation de diffusion avec sauts.
2. Conditionnellement à cette trajectoire, générer les temps de défaut de manière indépendante pour chaque entité via des processus de Poisson non-homogènes d'intensité $\lambda_i(t) = \lambda_i^{\text{idio}}(t) + \beta_i \cdot \lambda^{\text{syst}}(t)$.

Cette approche par conditionnement offre un gain computationnel substantiel comparé à une simulation Monte Carlo directe de la distribution jointe, car elle réduit le problème de dimension n (nombre d'entités) à un problème de dimension 1 (le facteur systémique) suivi de n simulations indépendantes.

4 Pricing des tranches de CDO synthétiques

4.1 Structure et définition mathématique des tranches

Un CDO synthétique est structuré sur un portefeuille de référence composé de n entités, chacune associée à un CDS. Notons N_i le notionnel de l'entité i, R_i son taux de recouvrement, et τ_i son temps de défaut. Le notionnel total du portefeuille s'écrit $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} N_i$. La perte cumulée du portefeuille à l'instant t est définie par

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(1 - R_i)\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \tag{4.1}$$

Cette quantité représente la somme des pertes effectives dues aux défauts survenus avant ou à l'instant t. Il est commode de normaliser cette perte en proportion du notionnel total et d'introduire le taux de perte du portefeuille

$$\ell(t) = \frac{L(t)}{N_{\text{tot}}} = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{n} N_i(1 - R_i)\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \tag{4.2}$$

Le capital du CDO est divisé en tranches caractérisées par leurs points d'attachement et de détachement. Une tranche $[K_1, K_2]$ est définie par un point d'attachement inférieur K_1 et un point de détachement supérieur K_2, avec $0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$. La tranche absorbe les pertes du portefeuille comprises entre $K_1 \cdot N_{\text{tot}}$ et $K_2 \cdot N_{\text{tot}}$. La perte de la tranche à l'instant t s'exprime comme

$$L_{\text{tranche}}(t) = \min\left(\max(L(t) - K_1 N_{\text{tot}}, 0), (K_2 - K_1)N_{\text{tot}}\right), \tag{4.3}$$

ou de manière équivalente en termes normalisés

$$\ell_{\text{tranche}}(t) = \min(\max(\ell(t) - K_1, 0), K_2 - K_1). \tag{4.4}$$

La tranche subit des pertes uniquement lorsque le taux de perte du portefeuille dépasse son point d'attachement inférieur K_1, et ces pertes sont plafonnées à l'épaisseur de la tranche $K_2 - K_1$. En pratique, les CDO synthétiques sont structurés en plusieurs tranches de subordination différente. Par exemple, une distribution de tranches classiques pourrait prendre la forme suivante : Equity $[0\%, 5\%]$, Mezzanine $[5\%, 12\%]$, Senior $[12\%, 15\%]$, et Super-Senior $[15\%, 100\%]$.

4.2 Perte espérée et distribution des pertes

L'évaluation d'une tranche de CDO repose sur la connaissance de la distribution de probabilité de sa perte $L_{\text{tranche}}(t)$ sous la mesure risque-neutre $\mathbb{P}^*$. Une quantité centrale est la perte espérée de la tranche à la maturité T, définie par

$$\text{EL}_{\text{tranche}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[L_{\text{tranche}}(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\min\left(\max(L(T) - K_1 N_{\text{tot}}, 0), (K_2 - K_1)N_{\text{tot}}\right)\right]. \tag{4.5}$$

Le calcul de cette espérance nécessite la connaissance de la distribution jointe des temps de défaut $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, obtenue par les modèles de copule ou d'intensité stochastique présentés précédemment.

Pour calculer la perte espérée, il est utile d'introduire la fonction de répartition de la perte du portefeuille. Notons $F_L(x,t) = \mathbb{P}^*(L(t) \leq x)$ la probabilité que la perte cumulée à l'instant t n'excède pas x. La perte espérée de la tranche peut alors s'exprimer comme une intégrale faisant intervenir cette distribution. En effet, en notant $\ell = L/N_{\text{tot}}$ le taux de perte normalisé, nous avons

$$\text{EL}_{\text{tranche}} = N_{\text{tot}} \int_{K_1}^{K_2} \mathbb{P}^*(\ell(T) > x)\, dx. \tag{4.6}$$

Cette formule illustre que la perte espérée d'une tranche correspond à l'intégrale de la probabilité de défaut excédant chaque niveau de perte dans l'intervalle $[K_1, K_2]$.

La distribution $F_L(x,t)$ n'admet généralement pas de forme analytique, sauf dans des cas très particuliers. Le calcul numérique de cette distribution et de l'expected loss repose sur les méthodes de simulation de Monte Carlo. L'algorithme procède comme suit :

1. Générer M scénarios de la distribution jointe des temps de défaut $\{(\tau_1^{(m)}, \ldots, \tau_n^{(m)})\}_{m=1}^M$ en utilisant soit la simulation par copule, soit la simulation du modèle à intensité stochastique avec conditionnement sur le facteur systémique.
2. Pour chaque scénario m, calculer la perte cumulée du portefeuille à l'instant t :
$$L^{(m)}(t) = N(1-R)\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau_i^{(m)} \leq t\}}.$$
3. En déduire la perte de la tranche pour ce scénario :
$$L_{\text{tranche}}^{(m)}(t) = \min\Big(\max(L^{(m)}(t) - K_1 N_{\text{tot}}, 0), (K_2 - K_1)N_{\text{tot}}\Big).$$
4. Estimer la perte espérée par moyenne empirique :
$$\text{EL}_{\text{tranche}}(t) \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} L_{\text{tranche}}^{(m)}(t).$$

Le nombre de simulations M doit être suffisamment élevé pour garantir la convergence de l'estimateur Monte Carlo.

4.3 Valorisation des tranches et calcul du spread

Une tranche de CDO synthétique peut être vue comme un CDS dont le sous-jacent est le portefeuille de référence, mais avec une subordination définie par les points d'attachement et de détachement. L'acheteur de protection sur une tranche paie un spread périodique s et reçoit une compensation en cas de pertes affectant la tranche. Le vendeur de protection perçoit le spread et s'engage à compenser les pertes de la tranche.

La valorisation de la tranche repose sur l'égalité entre la valeur actualisée de la jambe premium ou jambe fixe (payée par l'acheteur de protection) et la valeur actualisée de la jambe protection ou jambe variable (payée par le vendeur). Cette condition d'absence d'arbitrage permet de déterminer le spread équitable de la tranche.

4.3.1 Jambe premium

L'acheteur de protection paie le spread s de manière périodique aux dates $t_1, t_2, \dots, t_m = T$, avec une fréquence généralement trimestrielle. Le paiement à chaque date est proportionnel au notionnel restant de la tranche, c'est-à-dire à la partie de la tranche qui n'a pas encore subi de pertes. Le notionnel restant à l'instant t_i est

$$N_{\text{restant}}(t_i) = (K_2 - K_1)N_{\text{tot}} - L_{\text{tranche}}(t_i). \tag{4.7}$$

La valeur actualisée de la jambe premium s'écrit

$$\text{JF}(s) = s\sum_{i=1}^{m} \delta_i \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{N_{\text{restant}}(t_i)}{B_{t_i}}\right], \tag{4.8}$$

où $\delta_i = t_i - t_{i-1}$ est la fraction d'année entre deux paiements et B_{t_i} est le numéraire.

4.3.2 Jambe protection

Le vendeur de protection s'engage à compenser les pertes subies par la tranche. Lorsqu'un défaut survient dans le portefeuille et que la perte cumulée du portefeuille atteint ou dépasse le point d'attachement de la tranche, le vendeur effectue un paiement correspondant à l'augmentation de la perte de la tranche. La valeur actualisée de la jambe protection s'exprime comme

$$\text{JV} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\int_0^T \frac{dL_{\text{tranche}}(t)}{B_t}\right], \tag{4.9}$$

où $dL_{\text{tranche}}(t)$ représente l'incrément de perte de la tranche à l'instant t. En pratique, cette intégrale est approchée par une somme discrète sur les dates d'observation :

$$\text{JV} \approx \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{L_{\text{tranche}}(t_i) - L_{\text{tranche}}(t_{i-1})}{B_{t_i}}\right]. \tag{4.10}$$

4.3.3 Spread équitable

Le spread équitable s^* de la tranche est déterminé par la condition d'absence d'arbitrage imposant l'égalité entre les deux jambes :

$$\text{PF}(s^*) = \text{JV}. \tag{4.11}$$

En explicitant cette condition et en isolant s^*, nous obtenons

$$s^* \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[B_{t_i}^{-1}(L_{\text{tranche}}(t_i) - L_{\text{tranche}}(t_{i-1}))]}{\sum_{i=1}^{m} \delta_i \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[B_{t_i}^{-1}][(K_2 - K_1)N_{\text{tot}} - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[L_{\text{tranche}}(t_i)]]}. \tag{4.12}$$

5 Méthodes numériques

5.1 Simulation des taux d'intérêts

5.2 Approche à copule

5.3 Approche à intensité

6 Application numérique

7 Conclusion

Références

[1] Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Annal.*, 123 (1994), 463-520.