



# Calcul des prix des obligations et des options avec le modèle de Vasicek

---

Gilles BLANCHET

Eric JEANGIRARD



## Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>                           | <b>4</b>  |
| <b>1 Etude théorique</b>                      | <b>4</b>  |
| 1.1 Présentation du modèle . . . . .          | 4         |
| 1.2 Calcul du prix des obligations . . . . .  | 5         |
| 1.3 Calcul du prix du call européen . . . . . | 6         |
| 1.3.1 Question 1 . . . . .                    | 6         |
| 1.3.2 Question 2 . . . . .                    | 8         |
| 1.3.3 Question 3 . . . . .                    | 9         |
| 1.3.4 Question 4 . . . . .                    | 9         |
| <b>2 Analyse pratique</b>                     | <b>13</b> |
| 2.1 Courbe des taux . . . . .                 | 13        |
| 2.2 Influence des paramètres . . . . .        | 14        |
| 2.2.1 Influence de $a$ . . . . .              | 14        |
| 2.2.2 Influence de $b$ . . . . .              | 16        |
| 2.2.3 Influence de $\sigma$ . . . . .         | 16        |
| 2.3 Avantages et limites du modèle . . . . .  | 17        |
| 2.3.1 Retour à la moyenne . . . . .           | 17        |
| 2.3.2 Autres avantages . . . . .              | 17        |
| 2.3.3 Inconvénients . . . . .                 | 18        |
| <b>Conclusion</b>                             | <b>18</b> |

## Introduction

Ce projet de mathématiques financières vise à évaluer le prix des zéro-coupons et des options sur zéro-coupons dans le cadre du modèle de Vasicek. Ainsi, dans un premier temps, nous mènerons une étude théorique dans le cadre de la modélisation des taux courts proposée par Vasicek en 1977 puis dans un deuxième temps, nous analyserons l'influence de chaque paramètre du modèle ; enfin, nous ferons quelques critiques sur le modèle.

## 1 Etude théorique

Pour mener l'étude théorique des prix des obligations et des options dans le cadre du modèle de Vasicek, nous reprendrons certains éléments de *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance* de D. LAMBERTON et B. LAPEYRE, et nous résoudrons l'exercice 33 tiré du même ouvrage.

Par la suite, si une variable aléatoire  $X$  suit une loi gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , nous adopterons la notation  $X \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

### 1.1 Présentation du modèle

Dans toute la suite, on utilisera la propriété qu'il existe une probabilité  $\mathbb{P}^*$  équivalente à  $\mathbb{P}$ , sous laquelle, pour tout réel  $u \in [0, T]$ , le processus  $\left( e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t, u) \right)_{0 \leq t \leq u}$  est une martingale.

Dans le modèle de Vasicek, on suppose que le processus  $r(t)$  vérifie :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

Commençons par remarquer que le processus  $X_t = r(t) - b$  est solution de

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

$(X_t)$  suit ainsi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On peut ainsi en déduire que

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \quad (3)$$

Ainsi,

$$r(t) \stackrel{\mathbb{P}^*}{\sim} \mathcal{N}\left(r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right) \quad (4)$$

## 1.2 Calcul du prix des obligations

Pour calculer le prix des zéro-coupons, on se place sous  $\mathbb{P}^*$  :

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^* \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| F_t \right) \\ &= e^{-b(T-t)} \mathbb{E}^* \left( e^{-\int_t^T X_s ds} \middle| F_t \right) \\ &= e^{-b\theta} \mathbb{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta X_s^{r(t)-b} ds} \right) \end{aligned}$$

où  $(X_t^x)$  est l'unique solution de l'équation 2 vérifiant  $X_0^x = x$  avec  $\theta = T - t$ .

On sait que  $(X_t^x)$  est gaussien et à trajectoires continues.  $\int_0^\theta X_s^x ds$  est donc aussi gaussien, puisque l'intégrale est limite de sommes de Riemann qui sont gaussiennes. On a donc :

$$\mathbb{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta X_s^x ds} \right) = e^{-\mathbb{E}^* \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) + \frac{1}{2} \text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right)}$$

Le calcul de l'espérance s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) &= \int_0^\theta \left( \mathbb{E}^* (X_s^x) \right) ds \\ &= \int_0^\theta x e^{-as} ds \\ &= x \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} \end{aligned}$$

Pour la variance, le calcul donne :

$$\text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) = \frac{\sigma^2 \theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2$$

Au final, on obtient donc :

$$P(t, T) = e^{-b\theta} \exp \left[ -(r(t) - b) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2 \theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2 \right) \right]$$

Cette dernière expression peut se réécrire :

$$P(t, T) = \exp \left[ -(T - t) R(T - t, r(t)) \right]$$

où

$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta} \left[ (R_\infty - r)(1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \right] \quad \text{et} \quad R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

### 1.3 Calcul du prix du call européen

#### 1.3.1 Question 1

**Montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont bien vérifiées.**

Il s'agit d'abord de vérifier dans le modèle de Vasicek que l'on a :

$$\begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq T} |r(t)| < +\infty \\ \sigma_t^T \neq 0 \text{ p.s. } \forall t \in [0, \theta] \end{cases}$$

Ensuite, il faut s'assurer du fait que  $\forall \theta \leq T$  et pour  $h = (P(\theta, T) - K)^+$ ,  $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$  est de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Vérification de la 1<sup>re</sup> hypothèse** A partir de l'équation 3, on peut effectuer la majoration suivante :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |r(t)| \leq r(0) + b + \sigma \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t e^{as} dW_s$$

or  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,  $\mathbb{P} \left( \int_0^t e^{2as} ds < +\infty \right) = 1$  donc  $\int_0^t e^{as} dW_s$  est un processus continu, ce qui signifie que  $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t e^{as} dW_s < \infty$ . Donc  $\sup_{0 \leq t \leq T} |r(t)|$  est borné, ce qui justifie la première hypothèse.

**Vérification de la 2<sup>e</sup> hypothèse**  $\sigma_t^T$  n'est pas formulé de façon explicite par le modèle de Vasicek. Pour l'expliciter, rappelons-nous de la façon dont son existence a été justifiée.

**Proposition** Pour chaque échéance  $u$ , il existe un processus adapté  $(\sigma_t^u)_{0 \leq t \leq u}$  tel que, sur  $[0, u]$  :

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t))dt + \sigma_t^u dW_t$$

Ainsi, en calculant  $\frac{dP(t, u)}{P(t, u)}$ , on obtient l'expression de  $\sigma_t^u$  or

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(T-t, r(t))}$$

où

$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta} \left[ (R_\infty - r) (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \right]$$

On a :

$$dP(t, T) = \left[ R(T - t, r(t)) dt - (T - t) dR(T - t, r(t)) \right] P(t, T)$$

Pour calculer  $dR(T - t, r(t))$ , on utilise le lemme d'Itô. Celui-ci nous donne :

$$dR(\theta, r) = \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial R}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} d\theta$$

Or seul le coefficient en facteur de  $dW_t$  nous intéresse pour déterminer  $\sigma_t^T$ . Donc on s'intéresse seulement à :

$$\frac{\partial R}{\partial r}(T - t, r(t)) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)}$$

Avec l'équation 1 on obtient donc :

$$\sigma_t^T = \sigma \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a}$$

Ceci nous assure que  $\sigma_t^T \neq 0$  p.s.  $\forall t \in [0, \theta]$ .

**Vérification de la 3<sup>e</sup> hypothèse** On utilise la majoration suivante :

$$h = (P(\theta, T) - K)^+ \leq P(\theta, T)$$

Ainsi, on obtient :

$$\left| h e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \right| \leq P(\theta, T) e^{-\int_0^\theta r(s) ds}$$

donc

$$\left| h e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \right|^2 \leq e^{-2(T-t)R(T-t, r(t)) - 2 \int_0^\theta r(s) ds}$$

Le fait que  $r(s)$  soit un processus borné nous assure que le terme  $e^{-2(T-t)R(T-t, r(t)) - 2 \int_0^\theta r(s) ds}$  est borné donc de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ .

Toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer sans retenue la proposition 1.6.

### 1.3.2 Question 2

On exerce l'option si et seulement si  $P(\theta, T) - K > 0$ , c'est à dire si et seulement si, en passant aux logarithmes :

$$\begin{aligned} \ln(K) &< \ln(P(\theta, T)) \\ -\frac{\ln(K)}{T-\theta} &> R_\infty - \frac{1}{a\theta} \left[ (R_\infty - r) (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \right] \end{aligned}$$

d'où

$$r < R_\infty \left( 1 - \frac{a(T-\theta)}{1 - e^{-a(T-\theta)}} \right) - \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-\theta)})}{4a^2} - \ln(K) \left( \frac{a}{1 - e^{-a(T-\theta)}} \right)$$

Ainsi, l'option est exercée si et seulement si  $r(\theta) < r^*$ , où

$$r^* = R_\infty \left( 1 - \frac{a(T-\theta)}{1 - e^{-a(T-\theta)}} \right) - \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-\theta)})}{4a^2} - \ln(K) \left( \frac{a}{1 - e^{-a(T-\theta)}} \right)$$

### 1.3.3 Question 3

Soit  $(X, Y)$ , un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  sous une probabilité  $\mathbb{P}$ , et soit  $\tilde{\mathbb{P}}$  la probabilité absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , de densité :

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{-\lambda X}}{\mathbb{E}(e^{-\lambda X})}$$

Sous  $\mathbb{P}$ , le couple  $(X, Y)$  est un vecteur gaussien de moyenne  $(\mu_1, \mu_2)$  et de matrice de variance-covariance :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \alpha \\ \alpha & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Intéressons nous à la fonction caractéristique de  $Y$  sous  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

$$\tilde{\Phi}_Y(u) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{iuY}) = \mathbb{E} \left( e^{iuY} \frac{e^{-\lambda X}}{\mathbb{E}(e^{-\lambda X})} \right) = \frac{1}{\mathbb{E}(e^{-\lambda X})} \mathbb{E}(e^{i(uY + \lambda X)})$$

$(X, Y)$  étant un vecteur gaussien, la variable aléatoire  $uY + i\lambda X$  suit une loi gaussienne de moyenne  $i\lambda\mu_1 + u\mu_2$  et de variance  $-\lambda^2\sigma_1^2 + u^2\sigma_2^2 + 2iu\lambda\alpha$ .



On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_Y(u) &= \exp\left(\lambda\mu_1 - \lambda^2\frac{\sigma_1^2}{2}\right) \exp\left(-\lambda\mu_1 + iu\mu_2 - \frac{-\lambda^2\sigma_1^2 + u^2\sigma_2^2 + 2iu\lambda\alpha}{2}\right) \\ &= \exp\left(iu(\mu_2 - \lambda\alpha) - u^2\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi :

$$Y \stackrel{\tilde{\mathbb{P}}}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(Y) - \lambda \text{Cov}(X, Y), \text{Var}(Y)\right)$$

#### 1.3.4 Question 4

La formule 4 assure que  $r(t)$  suit une loi gaussienne. On peut alors montrer que le vecteur  $\left(\int_0^\theta r(s)ds, r(\theta)\right)$  est un vecteur gaussien. En effet, si on introduit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux scalaires, on remarque que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^\theta r(s)ds \\ r(\theta) \end{pmatrix} &= \lambda_1 \int_0^\theta r(s)ds + \lambda_2 r(\theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{n} r\left(\frac{i\theta}{n}\right) + \lambda_2 r(\theta) \right)\end{aligned}$$

or, puisque  $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$  est un processus gaussien, on a que  $\lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{n} r\left(\frac{i\theta}{n}\right) + \lambda_2 r(\theta)$  est une gaussienne. Par théorème, la limite d'une suite de gaussiennes est une gaussienne, on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta r(s)ds \\ r(\theta) \end{pmatrix} \text{ est un vecteur gaussien à valeurs dans } \mathbb{R}^2 \text{ sous } \mathbb{P}^*.$$

On peut alors se ramener à la question 3 en prenant  $\lambda = 1$  et  $X = \int_0^\theta r(s)ds$ . Ainsi, en se rappelant que :

$$P(0, \theta) = \mathbb{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \right)$$

et en introduisant  $\mathbb{P}_1$ , la probabilité absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , de densité :

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s)ds}}{P(0, \theta)}$$

on obtient :

$$r(\theta) \stackrel{\mathbb{P}_1}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}^*(r(\theta)) - Cov^*\left(\int_0^\theta r(s)ds, r(\theta)\right), Var^*(r(\theta))\right) \quad (5)$$

De même, en introduisant  $\mathbb{P}_2$ , la probabilité absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , de densité :

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds}}{P(0, T)}$$

on obtient :

$$r(\theta) \stackrel{\mathbb{P}_2}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}^*(r(\theta)) - Cov^*\left(\int_0^T r(s)ds, r(\theta)\right), Var^*(r(\theta))\right) \quad (6)$$

On se réfère alors à la proposition 1.6 pour laquelle on a prouvé dans la question 1 que les conditions de son application étaient réunies dans le cas du pricing des call. Il vient alors que :

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} (P(\theta, T) - K)^+\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} P(\theta, T) \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) - K \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) \end{aligned}$$

or, si on se rappelle que  $P(0, \theta)P(\theta, T) = P(0, T)$  alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} P(\theta, T) \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \frac{P(0, \theta)}{P(0, \theta)} P(\theta, T) \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \frac{P(0, T)}{P(0, \theta)} \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) \end{aligned}$$

ainsi sous la probabilité  $\mathbb{P}_1$ , considérant que le prix  $P(0, T)$  est connu, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} P(\theta, T) \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \frac{P(0, T)}{P(0, \theta)} \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) \\ &= P(0, T) \mathbb{P}_1(r(\theta) < r^*) \\ &= P(0, T) p_1 \end{aligned}$$

De même, sous la probabilité  $\mathbb{P}_2$ , considérant que le prix  $P(0, \theta)$  est connu, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} \frac{P(0, \theta)}{P(0, \theta)} \mathbb{1}_{r(\theta) < r^*}\right) \\ &= P(0, \theta) \mathbb{P}_2(r(\theta) < r^*) \\ &= P(0, \theta) p_2\end{aligned}$$

A ce stade, nous avons établi que

$$C_0 = P(0, T) p_1 - K P(0, \theta) p_2$$

où  $p_1 = \mathbb{P}_1(r(\theta) < r^*)$  et  $p_2 = \mathbb{P}_2(r(\theta) < r^*)$

Pour évaluer les quantités  $p_1$  et  $p_2$ , au regard de 5 et 6 et en prenant en compte la formule 4, il ne reste plus qu'à calculer  $Cov^*(\int_0^\theta r(s)ds, r(\theta))$  et  $Cov^*\left(\int_0^T r(s)ds, r(\theta)\right)$ .

Pour le calcul de  $Cov^*(\int_0^\theta r(s)ds, r(\theta))$ , on utilise le fait que  $r(t) = X_t + b$  où  $X_t$  suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. En utilisant l'équation 3, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}Cov^*\left(\int_0^\theta r(s)ds, r(\theta)\right) &= \int_0^\theta Cov^*(r(s), r(\theta))ds \\ &= \int_0^\theta \sigma^2 e^{-a(s+\theta)} \mathbb{E}^*\left(\int_0^s e^{au} dW_u \int_0^\theta e^{au} dW_u\right)ds \\ &= \int_0^\theta \sigma^2 e^{-a(s+\theta)} \int_0^{\min(s, \theta)} e^{2au} du \\ &= \int_0^\theta \sigma^2 e^{-a(s+\theta)} \frac{e^{2as} - 1}{2a} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 Cov^* \left( \int_0^T r(s) ds, r(\theta) \right) &= \int_0^T Cov^*(r(s), r(\theta)) ds \\
 &= \int_\theta^T \sigma^2 e^{-a(\theta+s)} \frac{e^{2a\theta} - 1}{2a} ds + Cov^* \left( \int_0^\theta r(s) ds, r(\theta) \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a\theta} - e^{a\theta}) (e^{-aT} - e^{-a\theta}) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2
 \end{aligned}$$

Si on note  $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, alors on obtient que :

$$C_0 = P(0, T)p_1 - KP(0, \theta)p_2$$

où :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= N \left( \frac{r^* - \left( r(0)e^{-a\theta} + b(1 - e^{-a\theta}) \right) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\theta}}{2a}}} \right) \\
 p_2 &= N \left( \frac{r^* - \left( r(0)e^{-a\theta} + b(1 - e^{-a\theta}) \right) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a\theta} - e^{a\theta}) (e^{-aT} - e^{-a\theta}) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\theta}}{2a}}} \right)
 \end{aligned}$$

## 2 Analyse pratique

Dans la première partie, nous avons montré comment il était possible de pricer une option sur zéro-coupon à partir de la modélisation suivante du taux court :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t$$

Pour analyser le modèle, il nous a semblé intéressant de tracer quelques courbes de taux et d'étudier l'influence des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  sur le prix des options.

### 2.1 Courbe des taux

Le modèle de Vasicek permet d'obtenir des courbes des taux ayant les allures présentées sur la Fig. 2.1.

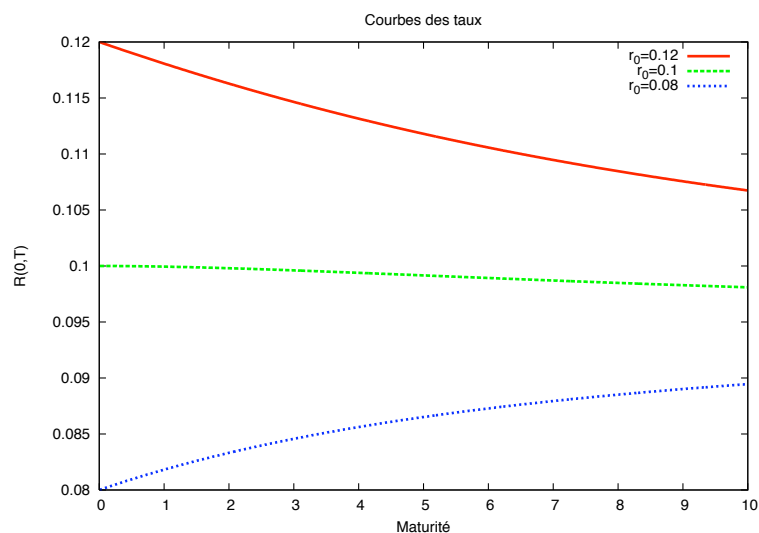


FIG. 1 – Allure des courbes des taux avec le modèle de Vasicek ( $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ )

## 2.2 Influence des paramètres

"a" est appelé vitesse de retour à la moyenne et "b" moyenne sur long terme. En effet, nous avons vu que :

$$r(t) \stackrel{\mathbb{P}^*}{\sim} \mathcal{N}\left(r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right)$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^*(r(t)) = b$$

ce qui justifie le nom de moyenne sur long terme.

### 2.2.1 Influence de a

Deux cas se présentent si  $r(t)$  est éloigné de b. Si  $r(t) < b$ , l'espérance de la variation instantanée de  $r(t)$ , égale à  $a(b - r(t))$  est positive. Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur long terme à une vitesse dépendant de la valeur de a. A l'inverse, si  $r(t) > b$ , l'espérance de variation instantanée de  $r(t)$  est négative et  $r(t)$  diminue dans le temps pour se rapprocher de b.

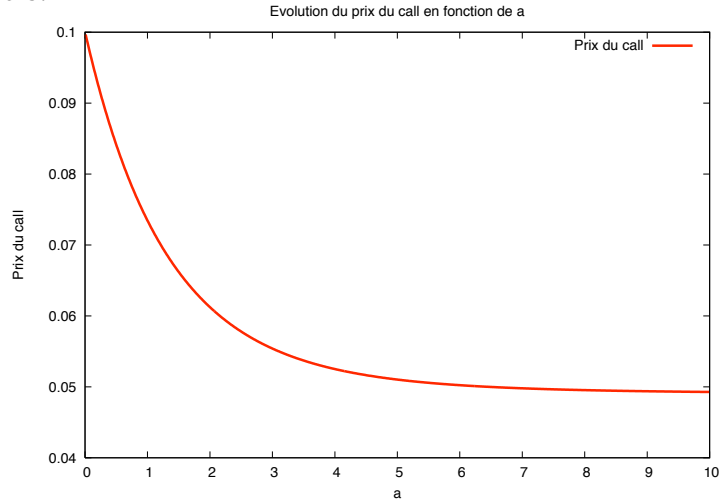


FIG. 2 – Evolution du prix du call en fonction de a ( $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $T = 1$ ,  $r_0 = 0.1$ ,  $K = 0.9$ )

Le graphe 2.2.1 présente une limite nulle quand  $a \rightarrow \infty$ . Quand  $a$  est élevé, dès que  $r(t)$  s'éloigne de  $b$ ,  $a(b - r(t))$  devient très grand, ce qui a pour effet de ramener le taux instantané  $r(t)$  vers  $b$ . Au delà d'une certaine limite située à environ 2.5 sur le graphe, la vitesse de retour à la moyenne est telle que le prix de l'option devient constant. Ce résultat se retrouve théoriquement. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow +\infty} P(0, \theta) &= \exp(-b\theta) \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} P(\theta, T) &= \exp(-b(T - \theta))\end{aligned}$$

Pour déterminer le prix de l'option quand  $a$  tend vers l'infini, il n'est pas indispensable d'utiliser le calcul du prix de l'option effectué précédemment. Il suffit de raisonner par absence d'opportunité d'arbitrage. On note  $x$  le prix de l'option quand  $a$  tend vers l'infini. Considérons deux stratégies.

| Instant  | Stratégie 1   | Cash-Flow               |
|----------|---|-------------------------|
| 0        | Achat de $x/P(0, \theta)$ coupons d'échéance $\theta$ | $-x$                    |
| $\theta$ | Paievements reçus                                     | $+x/P(0, \theta)$       |
| Instant  | Stratégie 2   | Cash-Flow               |
| 0        | Achat d'une option                                    | $-x$                    |
| $\theta$ | Exercice de l'option                                  | $+(P(\theta, T) - K)^+$ |

Nécessairement, par absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir :

$$x/P(0, \theta) = (P(\theta, T) - K)^+$$

soit

$$\begin{aligned}x &= (P(\theta, T) - K)^+ P(0, \theta) \\ &= (\exp(-b(T - \theta)) - K)^+ \exp(-b\theta)\end{aligned}$$

Ce qui dans le cas du graphe 2.2.1 nous donne une droite asymptotique à l'infini d'équation :

$$y \approx 0.049$$

### 2.2.2 Influence de $b$

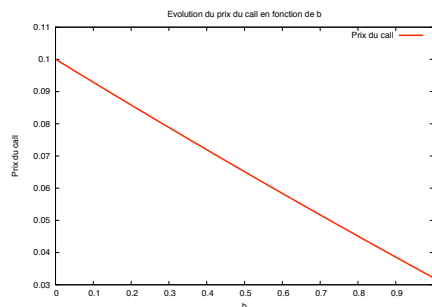


FIG. 3 – Evolution du prix du call en fonction de  $b$  ( $a = 0.2$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $T = 1$ ,  $r_0 = 0.1$ ,  $K = 0.9$ )

Le prix de l'option est une fonction décroissante de  $b$ .

### 2.2.3 Influence de $\sigma$

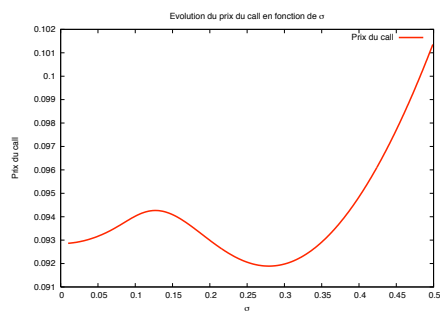


FIG. 4 – Evolution du prix du call en fonction de  $\sigma$  ( $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $T = 1$ ,  $r_0 = 0.1$ ,  $K = 0.9$ )



## 2.3 Avantages et limites du modèle

### 2.3.1 Retour à la moyenne

Le modèle de Vasicek permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne que l'on peut constater sur les taux d'intérêt. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus souvent par des baisses que par des hausses. Inversement, l'effet opposé est également constaté pour des niveaux de taux trop bas. La Fig. 5 montre que les taux, sur longue période n'ont pas de drift. A l'inverse des actions et indices sur actions, ils évoluent dans "un tunnel".

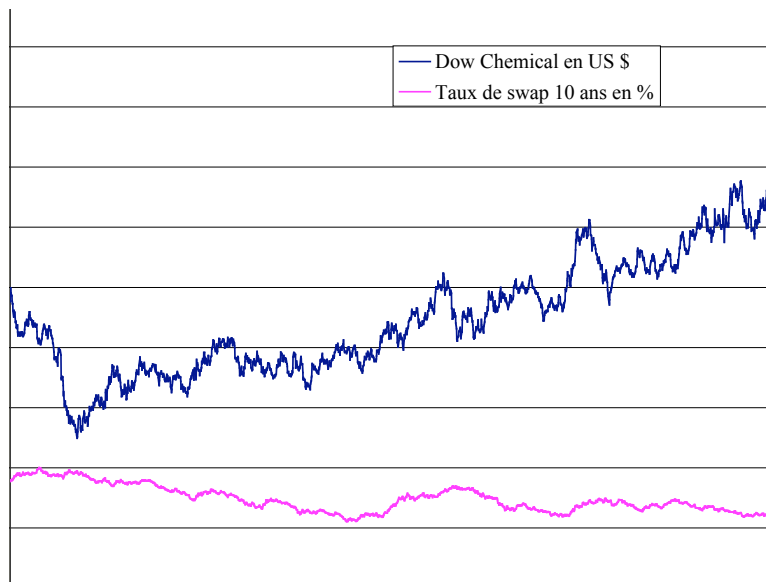


FIG. 5 – Evolution du cours d'un indice actions et d'un taux de swap

### 2.3.2 Autres avantages

Le modèle de Vasicek est un modèle à un facteur, facile à comprendre sur le plan théorique, et qui a le mérite de donner des expressions analytiques pour les zéro-coupons ainsi que pour les calls sur zéro-coupons. Ces expressions sont facilement implémentables informatiquement, et, connaissant les paramètres, on peut obtenir les prix de manière très rapide.

### 2.3.3 Inconvénients

Un des inconvénient du modèle de Vasicek est que, dans la mesure où  $r(t)$  suit une loi gaussienne de variance strictement positive,

$$\mathbb{P}(r < 0) > 0$$

ce qui en pratique n'est pas très satisfaisant. Notons néanmoins que cette probabilité reste faible et d'autre part que des taux négatifs se sont déjà rencontrés sur le marché asiatique.

D'autre part, une des principales problématiques en ce qui concerne les modèles financiers reste celle de la calibration. Dans le cas du modèle de Vasicek, le plus simple pour calibrer les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  est de résoudre le problème d'optimisation

$$\arg \inf_{p \in \mathbb{R}^3} \int_0^T \left( V(0, u, p) - P(0, u) \right)^2 du$$

où  $V(0, u, p)$  sont les prix des zéro-coupons (fonction de  $p = (a, b, \sigma)$ ) selon le modèle de Vasicek et les  $P(0, u)$  les prix des zéro-coupons effectivement observés sur le marché.

Ce problème est très complexe à résoudre et il devient difficile d'utiliser le modèle de Vasicek pour pricer des options sur zéro-coupon quand les paramètres intervenant dans la formule ne reproduisent pas parfaitement la courbe des taux.

## Conclusion

Nous avons montré que le modèle de Vasicek permet d'obtenir une formule close pour les prix des zéro-coupons ainsi que pour les options sur zéro-coupons. Néanmoins, un des principaux défauts de ce modèle est qu'il permet au taux d'intérêt instantané de prendre des valeurs négatives avec probabilité non nulle. Pour palier à ce défaut, d'autres modélisations de  $r(t)$  ont été imaginées comme celle de Cox-Ingersoll-Ross en 1985 :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW_t$$

Un autre problème vient de son incapacité à reproduire la courbe des taux. On peut alors changer d'approche, en se basant sur les travaux de Heath, Jarrow et Merton qui ont ainsi modélisé en 1990 non plus le processus suivi par le taux instantané mais celui suivi par les zéro-coupons.