第四章 导数与微分

§4.1 导数概念引入与导数的定义

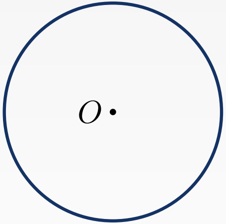
Author Name

Institute Name

2025 年 12 月 30 日

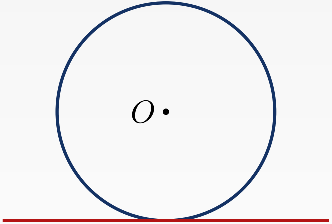
课程目录

1. 切线问题：从直观到定义



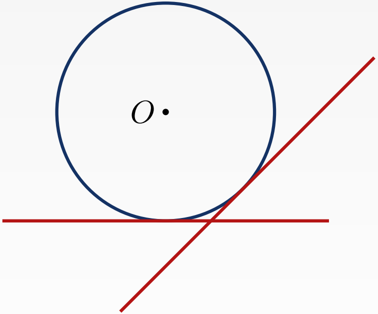
圆

1. 切线问题：从直观到定义



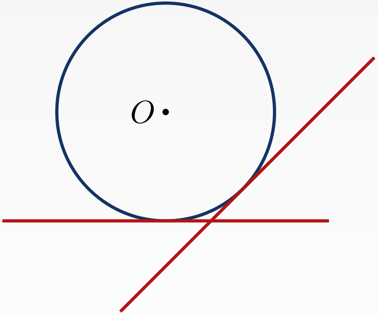
圆

1. 切线问题：从直观到定义

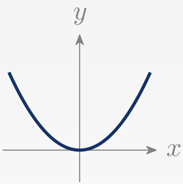


圆

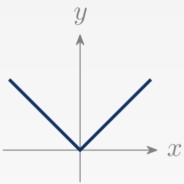
1. 切线问题：从直观到定义



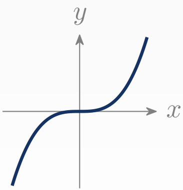
圆



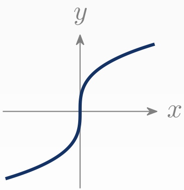
1. $y = x^2$



2. $y = |x|$

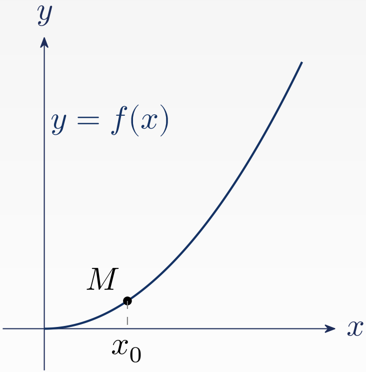


3. $y = x^3$



4. $y = \sqrt[3]{x}$

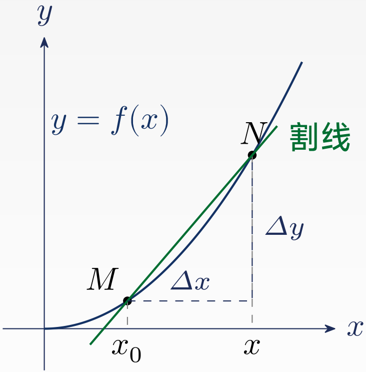
2. 曲线切线的本质:割线的极限位置



从割线到切线:

1. 设 $M(x_0, y_0)$ 为曲线上定点。

2. 曲线切线的本质：割线的极限位置



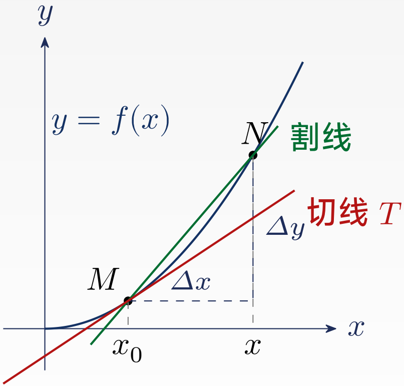
从割线到切线：

1. 设 $M(x_0, y_0)$ 为曲线上定点。
2. 设 $N(x, y)$ 为邻近动点。

   割线 MN 的斜率：

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. 曲线切线的本质:割线的极限位置



从割线到切线:

1. 设 $M(x_0, y_0)$ 为曲线上定点。
2. 设 $N(x, y)$ 为邻近动点。

   割线 MN 的斜率:

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. 当 N 沿曲线趋近于 M $(x \to x_0)$ 时,割线 MN 的极限位置的直线 MT 存在且唯一。

切线定义的实质

割线 MN 的极限位置即为切线 MT。

3. 切线的定义与斜率

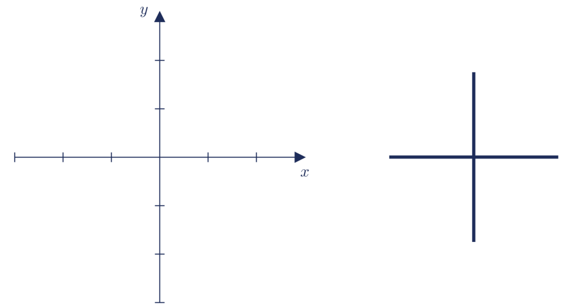
切线的定义 (几何本质)

设 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上一点。当动点 N 沿曲线无限趋近于点 M 时，如果割线 MN 的极限位置直线 MT 存在，则称直线 MT 为曲线在点 M 处的切线。

3. 切线的定义与斜率

切线的定义 (几何本质)

设 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上一点。当动点 N 沿曲线无限趋近于点 M 时,如果割线 MN 的极限位置直线 MT 存在,则称直线 MT 为曲线在点 M 处的切线。



4. 切线的定义与斜率

切线的定义

当动点 N 沿曲线无限趋近于点 M 时，割线 MN 的极限位置即为切线。

4. 切线的定义与斜率

切线的定义

当动点 N 沿曲线无限趋近于点 M 时，割线 MN 的极限位置即为切线。

斜率的代数表达：若切线 MT 的倾斜角 $\alpha \neq 90^\circ$，根据上述定义，其斜率 k 即为割线斜率 k_{MN} 的极限：

$$\boxed{k = \lim_{N \to M} k_{MN} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

4. 切线的定义与斜率

切线的定义

当动点 N 沿曲线无限趋近于点 M 时，割线 MN 的极限位置即为切线。

斜率的代数表达：若切线 MT 的倾斜角 $\alpha \neq 90^\circ$，根据上述定义，其斜率 k 即为割线斜率 k_{MN} 的极限：

$$\boxed{k = \lim_{N \to M} k_{MN} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

关键认知与辨析

- **本质回归**：切线是割线的极限位置，而非简单的“只有一个交点”。
- **特殊情形**：若上述极限为 ∞，表示切线平行于 y 轴（即垂直切线）。

  注：此时切线几何上存在，但导数（斜率）不存在。

5. 物理背景：变速直线运动 (1)

图：非匀速直线运动演示

核心问题

已知一个物体做变速直线运动，其位移规律为 $s = s(t)$。

5. 物理背景:变速直线运动 (1)

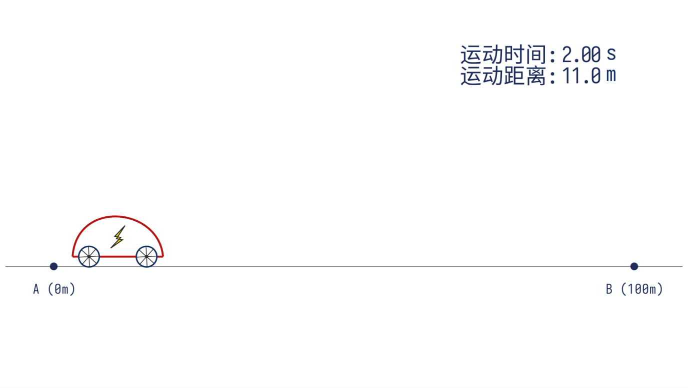


图:非匀速直线运动演示

核心问题

已知一个物体做变速直线运动,其位移规律为 $s = s(t)$。

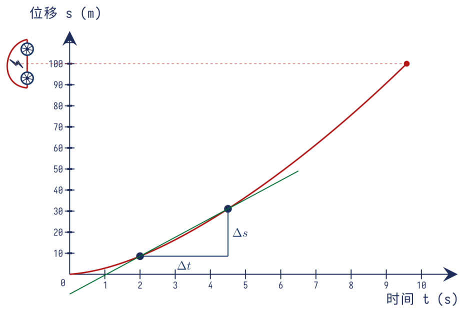
求:物体在 $t_0 = 2$ s 时刻的瞬时速度 $v(2)$。

6. 物理背景:变速直线运动 (2)

图:位移-时间图像与平均速度

分析路径:

6. 物理背景：变速直线运动 (2)

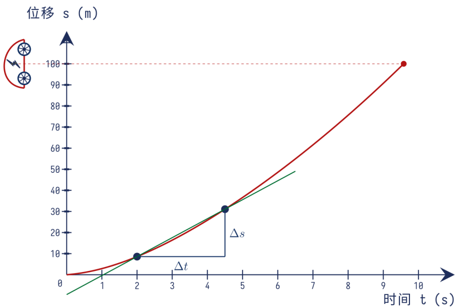


图：位移-时间图像与平均速度

分析路径：

1. **取增量：**
   取邻近时刻 t，时间增量
   $\Delta t = t - t_0$。

6. 物理背景：变速直线运动 (2)



图：位移-时间图像与平均速度

分析路径：

1. **取增量：** 取邻近时刻 t，时间增量 $\Delta t = t - t_0$。
2. **算平均：** 计算 t_0 到 t 的平均速度：

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

6. 物理背景:变速直线运动 (2)

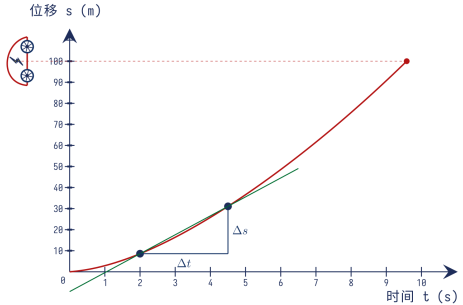


图:位移-时间图像与平均速度

分析路径:

1. **取增量:**
   取邻近时刻 t,时间增量 $\Delta t = t - t_0$。
2. **算平均:**
   计算 t_0 到 t 的平均速度:
   $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$
3. **取极限:**
   令 $t \to t_0$ $(\Delta t \to 0)$,平均速度的极限即为瞬时速度:
   $$\boxed{v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}}$$

7. 导数 (Derivative) 的定义

综合几何切线斜率与物理瞬时速度,我们抽离出共同的数学结构:

定义 1 (导数)

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 $U(x_0)$ 有定义。如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导。此极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数(也叫变化率,微商)。

记号:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

8. 导数定义的两种形式

形式一:$x \to x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

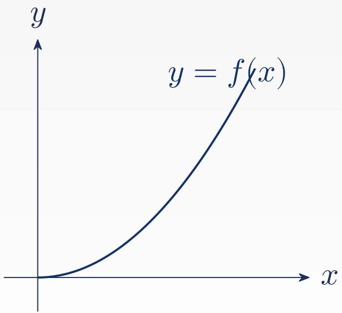
形式二:$\Delta x \to 0$ (增量形式)

令 $\Delta x = x - x_0$,则 $x = x_0 + \Delta x$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

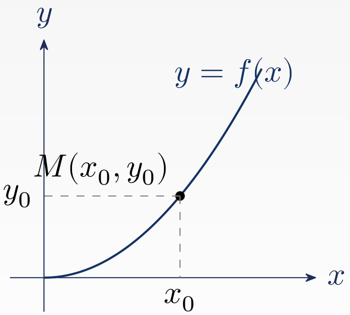
9. 导数的几何意义

❶ **几何意义：**
导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率。



9. 导数的几何意义

1. **几何意义：**
   导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率。



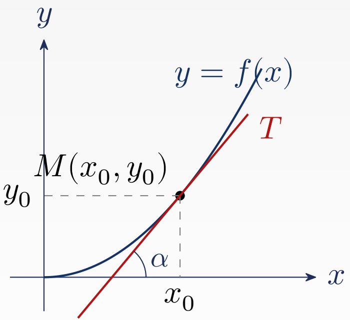
9. 导数的几何意义

1. **几何意义：**
   导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率。

2. **数学表达：**

$$\boxed{k = \tan \alpha = f'(x_0)}$$

(其中 α 为切线的倾斜角)



9. 导数的几何意义

❶ 几何意义:

导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率。

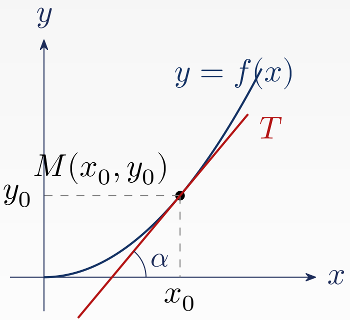
❷ 数学表达:

$$\boxed{k = \tan\alpha = f'(x_0)}$$

(其中 α 为切线的倾斜角)

❸ 切线方程:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

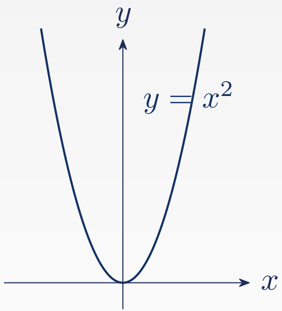


10. 导数的几何应用：切线与法线

例 1

求曲线 $y = x^2$ 在点 $M(-2, 4)$ 处的切线与法线方程。

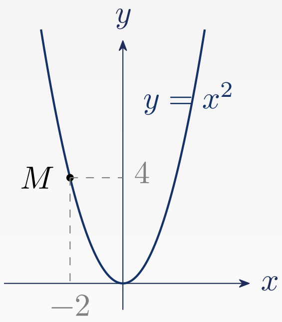
解：设 $f(x) = x^2$。



10. 导数的几何应用:切线与法线

例 1

求曲线 $y=x^2$ 在点 $M(-2,4)$ 处的切线与法线方程。



解:设 $f(x)=x^2$。

1. 定义法求斜率 k_T:

$$
\begin{aligned}
k_T &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4-4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(-4+\Delta x)=-4
\end{aligned}
$$

10. 导数的几何应用：切线与法线

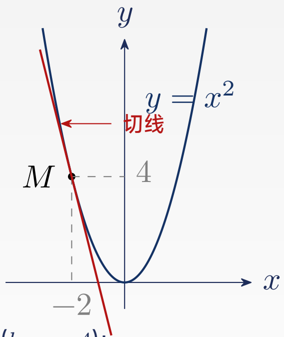
例 1

求曲线 $y = x^2$ 在点 $M(-2,4)$ 处的切线与法线方程。

解：设 $f(x) = x^2$。

1. 定义法求斜率 k_T:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4$$



- 2. 切线 ($k_T = -4$):

$$y - 4 = -4(x+2) \implies \boxed{y = -4x - 4}$$

10. 导数的几何应用:切线与法线

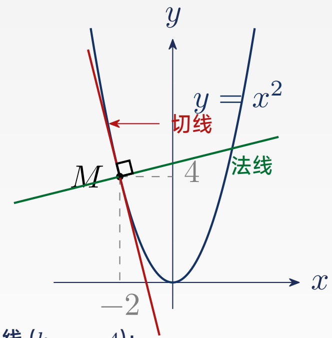
例 1

求曲线 $y = x^2$ 在点 $M(-2, 4)$ 处的切线与法线方程。

解:设 $f(x) = x^2$。

1. 定义法求斜率 k_T:

$$\begin{aligned} k_T &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4 \end{aligned}$$



- **2. 切线 ($k_T = -4$):**

$$y - 4 = -4(x+2) \implies \boxed{y = -4x - 4}$$

- **3. 法线 ($k_N = 1/4$):**

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x+2) \implies \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}}$$

11. 导数的物理应用：瞬时速度

例 2：自由落体运动

位移公式 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$。求 $t=2$ 时的瞬时速度。

解：瞬时速度即位移对时间的导数 $v(2)=s'(2)$。

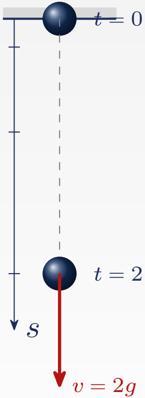
11. 导数的物理应用：瞬时速度

例 2：自由落体运动

位移公式 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$。求 $t = 2$ 时的瞬时速度。

解：瞬时速度即位移对时间的导数 $v(2) = s'(2)$。

$$
\begin{aligned}
v(2) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(2+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}g(2)^2}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2}g \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2) - 4}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2}g \cdot \lim_{\Delta t \to 0} (4 + \Delta t) \\
&= \frac{1}{2}g \cdot 4 = \boxed{2g \quad (\mathrm{m/s})}
\end{aligned}
$$



谢谢观看