Rapport de stage juin/juillet 2004 : orbites de matrices nilpotentes

Yann STROZECKI

12 avril 2006

1 Matrices nilpotentes, tableau de Young et forme de Jordan

Soit n un entier naturel, $M_n(\mathbb{C})$ les matrices carrés d'ordre n, $GL_n(\mathbb{C})$ les matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$. Sauf mention contraire, les matrices considérées sont dans $M_n(\mathbb{C})$. Dans ce qui suit, on considère l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

1.1 Généralités sur la forme de Jordan d'une matrice

La décomposition de Jordan permet de voir toute matrice comme la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice diagonalisable qui commutent entre elles. Toute matrice est semblable à une matrice du type suivant :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \text{ où } J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les matrices nilpotentes n'ayant que des valeurs propres nulles, toute matrice nilpotente est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \text{ où } J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les J_k sont des blocs de Jordan d'ordre p_k classés par ordre décroissant d'ordre.

Définition 1 (Matrice nilpotente régulière) *Une matrice nilpotente régulière d'ordre n est une matrice semblable à un bloc de Jordan nilpotent d'ordre n.*

La suite $p_1, \dots, p_m$ des ordres des matrices $J_1, \dots, J_m$ est une partition de n, et on a une application des classes de similitude des matrices nilpotentes d'ordre n dans l'ensemble des partitions de n. Il est facile de voir que c'est une bijection.

Définition 2 (Tableau de Young) *On associe un tableau de Young à toute partition $p_1, \dots, p_m$ de n, c'est un tableau qui a p_k cases dans la k^e ligne. Le tableau de Young d'une matrice nilpotente est donc celui de la partition de n qu'on lui a associé précédemment.*

Par exemple le tableau $(5, 2, 1)$ se représente ainsi : La partition duale $(\hat{p}_k)$ est définie de la manière suivante : $\hat{p}_k = \sharp(i \,|\, p_i \geq k)$.
Le tableau de Young de $(\hat{p}_k)$ s'appelle le tableau dual. Dans certains cas, le tableau de Young peut être égal au tableau dual, on appelle ces tableaux des tableaux auto-duaux.

Lemme 1 *Soit A une matrice nilpotente et (p_k) la partition de n associée. Pour tout k, $\hat{p}_k = \dim KerA^k - \dim KerA^{k-1}$*

Démonstration :
Le rang d'un bloc de Jordan nilpotent diminue de p s'il est élevé à la puissance p^{e} et le rang de A est la somme du rang des blocs de sa forme de Jordan $(J_1, \dots, J_m)$. Donc en passant de la puissance $k-1^{\mathrm{e}}$ à la k^{e}, on perd autant de dimension qu'il y a de blocs J_i^{k-1} non nuls. Ceci est égal au nombre de blocs de Jordan de rang supérieur à k dans $J_1, \dots, J_m$, i.e. $\hat{p}_k$.

Remarque 1 *Les tableaux de Young sont un outil très souple. Par exemple pour trouver le tableau de Young d'une matrice A^p à partir de celui de A, il suffit d'ajouter les cases des p premières colonnes pour avoir le nombre de case de la première colonne du tableau de A^p et ainsi de suite pour les colonnes suivantes.*

1.2 Dimension d'une orbite

Soit π le morphisme orbital :

$$\pi : \mathrm{GL_n} \mapsto \mathrm{GL_n.M}, \quad \mathrm{G} \mapsto \mathrm{GMG^{-1}}$$

Il nous permet de trouver la dimension de l'orbite de la matrice M en tant que variété. L'image réciproque $\pi^{-1}(\mathrm{M})$ de M est le centralisateur de M dans $\mathrm{GL_n}$ noté $\mathrm{GL_n(M)}$; donc d'un un résultat de géométrie algébrique, on déduit les égalités :

$$\dim \mathrm{GL_n} = \dim \mathrm{GL_n.M} + \dim \mathrm{GL_n(M)}$$

$$\dim \mathrm{GL_n.M} = \mathrm{n}^2 - \dim \mathrm{GL_n(M)} \ .$$

1.3 Centralisateur et orbites

Soit M la matrice nilpotente composée des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_m$ et de partitions de n associée $p_1, \ldots, p_m$. On va utiliser un calcul direct pour déterminer la forme et la dimension du centralisateur de M.

Théorème 1 *Soit X une matrice du centralisateur de M dans $M_n(\mathbb{C})$.*
i) Si M est une matrice nilpotente régulière, X est un polynôme en M.
ii) On décompose X en blocs $X_{i,j}$ correspondant au blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_m$. Alors on a $X_{i,j}J_i = J_jX_{j,i}$ pour $i, j = 1, \ldots, m$.
iii) La dimension du centralisateur de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est $\sum_{i,j} min(p_i, p_j)$.
iv) La dimension de l'orbite de M est égale à $n^2 - \sum_i \hat{p_i}^2$ et cette dimension est paire.

Démonstration :
i) On suppose M régulière. En effectuant le calcul on trouve que la matrice X a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & \ldots & c \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & \ddots & a \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

C'est donc un polynôme en M, avec des coefficients quelconques, ici $a, b, \ldots, c$. Une base du centralisateur est donnée par les puissance de M, il est donc de dimension l'ordre de M.
ii) En effectuant la multiplication par blocs, on obtient les égalités $X_{i,j}.J_i = J_j.X_{j,i}$, pour tout i, j.
iii) Les blocs diagonaux doivent commuter avec les blocs réguliers, d'après (i) on connait une base de leur centralisateur. Les autres blocs sont rectangulaires de dimension $p_i \times p_j$. Ils sont de la même forme que les matrices commutant à une matrice régulière. On a donc une base des matrices $X_{i,j}$ vérifiant l'égalité ci-dessus en prenant les matrices nulles sauf une diagonale de 1 sur la k^{e} diagonale supérieure, pour $k = 1$ à $min(p_i, p_j)$. La dimension du centralisateur de M est donc $\sum_{i,j} min(p_i, p_j)$.
iv) De l'égalité

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} min(p_i, p_j) = \sum_{i=1}^{m} (2n - 2i + 1)p_i,$$

on déduit en regroupant les termes différemment :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} min(p_i, p_j) = \sum_{i=1}^{m} i^2(p_{i+1} - p_i)$$

Comme $\hat{p}_{p_{i+1}} = i$ on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} min(p_i, p_j) = \sum_i \hat{p}^2_{p_{i+1}} (p_{i+1} - p_i)$$

et par définition de $\hat{p}_{p_{i+1}}$on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} min(p_i, p_j) = \sum_i \hat{p}_i^2$$

La dimension de l'orbite de M est donc $n^2 - \sum_i \hat{p}_i^2$. Puisque $(\hat{p}_i)$ est une partition de n, $n^2 = \sum_i \hat{p}_i^2 + 2 \sum_{i<j} \hat{p}_i \hat{p}_j$; donc la dimension de l'orbite de M est paire.

Définition 3 *L'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est noté $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*

Tout élément nilpotent de $M_n(\mathbb{C})$ est dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Définition 4 (Matrices nilpotentes distinguées dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$) *Les matrices nilpotentes distinguées sont celles dont le centralisateur dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ne contient que des éléments nilpotents.*

Lemme 2 *Une matrice nilpotente dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est distinguée si et seulement si elle est régulière.*

Démonstration :
Soit M une matrice nilpotente. Si M est régulière, d'après l'assertion (i) du Théorème 1, les éléments de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ qui centralisent M sont des polynômes en M de terme constant non nul ; donc M est distingué.
On suppose M non régulière, c'est à dire conjuguée à la matrice de blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_m$ où $m \geq 2$. Une matrice scalaire par blocs commute à M et en prenant les scalaires de manière que la trace soit nulle, on voit que le centralisateur de M dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ contient des éléments semi-simples non nuls.

Lemme 3 *L'orbite d'une matrice diagonalisable M est un fermé de Zariski de $M_n(\mathbb{C})$ égal à l'ensemble des zéros communs de son polynôme minimal et de son polynôme caractéristique.*

Démonstration : Soit M une matrice diagonal, p son polynôme caractéristique et q son polynôme minimal. Alors p et q sont les polynômes caractéristique et minimal de toute matrice conjuguée à M. Réciproquement soit X un zéro commun à p et q. Comme q est scindé à racine simple, X est diagonalisable. Par ailleurs X et M ont même les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités ; donc ils sont conjugués.

Remarque 2 *Soit M dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = X + S$ sa décomposition de Jordan. Alors S est adhérent à l'orbite de M. Par conséquent, l'orbite de S est incluse dans l'adhérence de l'orbite de M. En outre, l'orbite de M est fermée si et seulement si M est diagonalisable.*

1.4 Adhérence d'une orbite

On se propose dans cette section de décrire explicitement l'adhérence de l'orbite d'une matrice nilpotente.

Lemme 4 *Soit J_1, J_2 deux blocs de Jordan d'ordre respectif p et k et N la matrice rectangulaire de dimension $p \times k$ dont le seul terme non nul $N_{p,k}$ est égal à 1. On pose*

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} J_1 & \varepsilon N \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

i) La matrice A_0 est adhérente à l'ensemble des A_ε.
ii) L'ensemble des A_ε apartient à la même orbite nilpotente associée à la partition $(p+1, k-1)$ de $p+k$.

Démonstration :
L'assertion i) est claire.
ii) Pour ε non nul, la matrice A_ε est une matrice nilpotente semblable à la matrice de blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_m$. On remarque que $A_\varepsilon^{p+1} = 0$ et que $A_\varepsilon^p \neq 0$ en considérant l'action successive de A_ε sur le vecteur de base e_{p+k}. Par conséquent, le plus gros bloc de Jordan est alors d'ordre $p+1$. Par ailleurs, le noyeau de (A_ε) est de dimension 2 ; donc $m = 2$ par le lemme 1. Comme A_ε est d'ordre $p+k$, la somme des ordres des blocs de Jordan vaut $p+k$, donc on a un bloc d'ordre $p+1$ et un d'ordre $k-1$. C'est à dire que A_ε est conjuguée à la matrice composée de deux blocs de Jordan d'ordre $p+1$ et $k-1$.

Définition 5 (Ordre de chevalley) *On dit que la partition $p = p_1, \ldots, p_m$ est plus grande que la partition $p' = p'_1, \ldots, p'_{m'}$ si pour tout k*

$$\sum_{1 \le i \le k} p_i \ge \sum_{1 \le i \le k} p'_i \ ,$$

et on note $p \ge p'$

Si $p \ge p'$, le tableau de Young de p' se déduit en faisant glisser des cases du tableau de Young de p vers le bas.

Théorème 2 *Soient M et M' deux matrices nilpotentes, p et p' les partitions de n associées. Alors M' est dans l'adhérence de l'orbite de M si $p \ge p'$.*

Démonstration :
On suppose $p \ge p'$. On a vu qu'une matrice nilpotente semblable à une matrice à deux blocs d'ordre (p, k) est dans l'adhérence de la matrice à deux blocs d'ordre $(p+1, k-1)$. On considére la matrice composée des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_m$, d'après la démonstration du lemme 4, en placant un bloc εN entre J_i et J_{i+1}, l'adhérence de l'orbite de M contient les matrices dont le tableau de Young se déduit de celui de M en faisant glisser une case vers le bas. De plus, si A est dans l'adhérence de l'orbite de B et B dans l'adhérence de l'orbite de C alors A est dans l'adhérence de l'orbite de C. Donc par récurrence sur le nombre de glissements, l'adhérence de l'orbite de M contient M'.

Corollaire 1 *L'adhérence de l'orbite de M est l'ensemble des matrices nilpotentes A qui satisfont les égalité pour tout $k \leq n$,*

$$rang(A^k) \leq rang(M^k)$$

Par le lemme 1, les inégalités traduisent que A a un tableau de Young plus petit que celui de M ; or l'ensemble des matrices de tableau de Young inférieur à celui de M est un fermé qui contient l'orbite de M et qui est contenu dans l'adhérence de l'orbite de M par le théorème précédent, d'où le corollaire.

1.5 Exemple

Voir le document annexe pour le tableau.

2 Théorème de Jacobson-Morozov

Définition 6 *On appelle $\mathfrak{sl}_2$-triplet tout triplet (X,H,Y) de matrices qui vérifie les conditions suivantes :*

$$[H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y, [X, Y] = H$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ admet une base x, h, y où

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est aussi un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. On se propose de démontrer un résultat classique sur les $\mathfrak{sl}_2$-triplets qui servira plus tard dans la décomposition d'algèbres de Lie semi-simples. On va voir qu'il existe une unique représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans un espace de dimension $m + 1$.

Théorème 3 (Jacobson Morozov pour les matrices) *Soit X une matrice nilpotente. Alors il existe deux matrices Y et H telles que que (X, H, Y) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet*

Démonstration :
Si (X, H, Y) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet, alors pour tout g dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, $(gXg^{-1}, gHg^{-1}, gYg^{-1})$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Il suffit donc de faire la démonstration pour X sous forme de Jordan. On commence par démontrer le théorème pour X régulière. On pose :

$$H_m = Diag(m, m-2, \ldots, -m)$$

$$Y_m = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1.m & 0 & & & \\ 0 & 2.(m-1) & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & m.1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effectuant le calcul on voit que

$$[H_m, X_m] = 2X_m, [H_m, Y_m] = -2Y_m, [X_m, Y_m] = H_m$$

D'où le théorème dans ce cas là. Dans le cas général, X est une matrice composée de blocs nilpotents réguliers. On définit donc Y et H par bloc comme dans le cas régulier. Les égalités étant vérifiées pour chacun des blocs, elles sont vérifiées pour les matrices Y et H.

Soit ρ_m la représentation de dimension $m+1$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui aux éléments x, h, y associe respectivement X_m, H_m, Y_m.

Lemme 5 *Soit ρ une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans V et v_0 dans V tel que $\rho(h)v_0 = \mu v_0$.*
i) On a les égalités : $\rho(h)\rho(x)v_0 = (\mu+2)\rho(x)v_0$, $\rho(h)\rho(y)v_0 = (\mu-2)\rho(y)v_0$.
ii) Si $\rho(x)v_0 = 0$, alors $\rho(x)v_i = i.(\mu - i + 1)v_{i-1}$ où $v_i = \rho(y)^i v_0$.

Démonstration :
i) Des égalités $[\rho(x), \rho(h)] = 2\rho(x)$ et $[\rho(y), \rho(h)] = -2\rho(y)$, on tire :

$$\rho(h)\rho(x)v_0 = \rho(x)\rho(h)v_0 + 2\rho(x)v_0 = (\mu+2)\rho(x)v_0$$

$$\rho(h)\rho(y)v_0 = \rho(y)\rho(h)v_0 - 2\rho(y)v_0 = (\mu-2)\rho(y)v_0$$

ii) On suppose $\rho(x)v_0 = 0$. On montre l'égalité en raisonnant par récurrence sur i. De l'égalité $[\rho(x), \rho(y)] = \rho(h)$, on déduit :

$$\rho(x)v_i = \rho(x)\rho(y)v_{i-1} = \rho(y)\rho(x)v_{i-1} + \rho(h)v_{i-1}.$$

D'où :

$$\rho(x)v_i = \rho(y)(i-1).(\mu - i + 2)v_{i-2} + \rho(h)v_{i-1}$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence. Il résulte alors de (i) :

$$\rho(x)v_i = (i-1).(\mu - i + 2)v_{i-1} + \mu - 2(i-1)v_{i-1} = i.(\mu - i + 1)v_{i-1}.$$

Théorème 4 *Soit ρ une représentation simple de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans V.*
i) La représentation ρ_m est simple.
ii) Les valeurs propres de $\rho(h)$ sont entières.
iii) Si m est la plus grande valeur propre de $\rho(h)$, alors ρ est équivalente à ρ_m.

Démonstration :
i) Soit $(e_1, \dots, e_{m+1})$ la base canonique de $(\mathbb{C})^{m+1}$. Soit W un sous-espace stable par ρ_m et w dans W non nul. Puisque $\rho_m(y)^n(\mathbb{C}^{m+1})$ est engendré par e_{m+1} qui engendre aussi le noyeau de $\rho_m(y)$, il existe n tel que $\rho_m(y)^n w = 0$ et $\rho_m(y)^{n-1}w = \lambda e_{r+1}$; or W est stable par ρ_m ; donc e_{m+1} appartient à W. Pour $j = 1, \dots, m+1$, $\rho_m(x)^j e_{m+1} = e_{m+1-j}$; donc $W = \mathbb{C}^{m+1}$, d'où l'assertion.
ii) Soit v_0 dans V vecteur propre de $\rho(h)$ pour la valeur propre μ tel que $Re(\mu)$ soit maximale. D'après l'assertion (i) du lemme 5 et la maximalité

de $Re(\mu)$, $\rho(x)v_0 = 0$ et on pose $v_i = \rho(y)^i v_0$. Soit s le plus grand entier tels que $v_0, \dots, v_s$ soient non nuls. La famille $v_0, \dots, v_s$ est libre car les v_i sont des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres deux à deux distinctes. D'après le lemme 5, $\mathbb{C}v_0 + \dots + \mathbb{C}v_s$ est stable par ρ qui est simple, donc $V = \mathbb{C}v_0 + \dots + \mathbb{C}v_s$ et $s+1$ est la dimension de V. Par le lemme précédent, $(s+1)(\mu - s)\rho(x)v_s = \rho(x)v_{s+1} = \rho(x).0 = 0$, donc $\mu = s$, d'où l'assertion car la valeur propre de $\rho(h)$ associée a v_i est obtenue en retranchant $2i$ à μ.
iii) D'après ii), m est la plus grande valeur propre de $\rho(h)$. Soit A l'isomorphisme linéaire

$$A : \mathbb{C}^{m+1} \to V \ , \ A(e_1) = v_0 \ , \ \dots \ , \ A(e_{m+1}) = v_m \ .$$

Alors on a $\rho_m A = A\rho$, c'est à dire que ρ et ρ_m sont équivalents.

Toute représentation de dimension finie d'algèbre de Lie semi-simple est somme de représentations irréductibles. Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est semi-simple, on a le théorème suivant.

Théorème 5 *Toute représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^{m+1}$ peut s'écrire*

$$\rho_{m_1} \bigoplus \cdots \bigoplus \rho_{m_p}$$

où $\sum_i m_i = m + 1$

Lemme 6 *Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ tels que A commute à $[A, B]$.*
i) La matrice $[A, B]$ est nilpotente.
ii) Si A est nilpotente, alors AB est nilpotente.

Démonstration :
i) On va montrer que les traces des puissances successives de $[A, B]$ sont nulles ce qui est équivalent à dire que $[A, B]$ est nilpotente. On a

$$[A, B[A, B]^p] = [A, B][A, B]^p = [A, B]^{p+1}$$

car A commute avec $[A, B]$ et donc avec $[A, B]^p$, alors

$$Tr[A, B]^{p+1} = Tr[A, B[A, B]^p] = 0$$

car la trace d'un crochet est nulle (les permutations circulaires laissent la trace invariante).
ii) On suppose que A est nilpotente. On a par ailleurs $[B, A^p] = p[B, A]A^{p-1}$ en utilisant la relation $[[B, A], A] = 0$ Soit x un vecteur propre de AB pour la valeur propre λ. Soit r le plus petit entier pour lequel $A^r x$ est nul. Puisque $[B, A]$ et A commutent, on a :

$$\lambda A^{r-1}x = A^{r-1}ABx = BA^r x - [B, A^r]x = -r[B, A]A^{r-1}x$$

Donc $-\frac{\lambda}{r}$ est une valeur propre de $[A, B]$. Il résulte alors de (i) que λ est nul par suite AB est nilpotente car toutes ses valeurs propres sont nulles.

Théorème 6 (Jacobson-Morozov pour les algèbres de Lie) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et X un élément nilpotent non nul de $\mathfrak{g}$. Alors il existe H,Y tels que (X,H,Y) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.*

Idée de démonstration :
On démontre que s'il existe un élément H de $(adX)(\mathfrak{g})$ tel que $[H, X] = 2X$, alors il existe Y tel que (X, H, Y) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Puis par le lemme précédent, à partir de X on arrive à trouver un tel H et on conclut.

Corollaire 2 *Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple et G son groupe adjoint. Alors l'application qui à tout $\mathfrak{sl}_2$-triplet (X,H,Y) associe X définit, par passage au quotient, une bijection des classes de G-conjugaison des $\mathfrak{sl}_2$-triplets sur l'ensemble des G-orbites nilpotentes.*

3 Orbites nilpotentes dans $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Dans cette section, on désigne par $\mathfrak{g}$ une des algèbres de Lie $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$,$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, G le groupe usuel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et N l'entier $2n$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}_{2\mathrm{n}}(\mathbb{C})$ et $2n + 1$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Dans ce qui suit, on considère l'action de G dans $\mathfrak{g}$ par conjugaison.

3.1 Classification des orbites et définition

Soit X une matrice nilpotente de $\mathfrak{g}$. Soit (p_k) la partition asociée à l'élément nilpotent X de $M_n(\mathbb{C})$.

Propriété 1 *i) Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, les orbites nilpotentes sont en bijection avec les partitions de 2n+1 dans lesquelles les éléments pairs ont une multiplicité paire.*
ii) Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, les orbites nilpotentes sont en bijection avec les partitions de 2n dans lesquelles les éléments impairs ont une multiplicité paire.
iii) Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$, les orbites nilpotentes sont en bijection avec les partitions de 2n dans lesquelles les éléments pairs ont une multiplicité paire sauf pour les partitions "très paires", c'est à dire avec seulement des éléments pairs de multiplicité paire, qui correspondent à deux orbites différentes.

3.2 Partitions et orbites

On note $\langle .,. \rangle$ une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathbb{C}^N$ qui est invariante par $\mathfrak{g}$. Soit : $G = \{g \in GL_N(\mathbb{C}) | \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{C}^N\}$. Soit x un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ qu'on peut voir aussi comme un élément nilpotent de $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ auquel est associée une partition de N, $p_1, \dots, p_m$, comme dans la première partie et cette partition ne dépend que de la G-orbite de x. D'après le théorème de Jacobson-Morozov, x est le premier terme d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (x, h, y) et tout $\mathfrak{sl}_2$-triplet ainsi choisi est conjugué aux autres par G d'après le corollaire 2. On note $\mathfrak{a}$ la sous algèbre engendrée par x, h, y. On a alors une décomposition de $\mathbb{C}^N$ comme $\mathfrak{a}$-module :

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{r\geq 0} M(r)$$

où $M(r)$ est la somme directe des sous-modules simples de dimension $r+1$. On note $H(r)$ le noyau de la restriction de $\rho - r$ à $M(r)$. Les entiers $p_1, \ldots, p_m$ sont les dimensions des sous $\mathfrak{a}$ modules simples et la multiplicité de r dans la partition est donnée par la dimension de $H(r)$. On défini alors une nouvelle forme bilinéaire sur $H(r) \times H(r)$:

$$(v, w) \mapsto (v, w)_r = \langle v, y^r w\rangle$$

Soit $\Omega = h^2 + 2xy + 2yx$ l'opérateur de Casimir dans $\mathbb{C}^N$. On peut vérifier aisément que $[\Omega, h] = [\Omega, y] = [\Omega, x] = 0$. De plus $\langle \Omega v, w\rangle = \langle v, \Omega w\rangle$.

Lemme 7 *i) Si v et w sont deux vecteurs propres de h pour les valeurs propres i, j avec $i + j \neq 0$, alors ils sont orthogonaux.*
ii) Les $M(r)$ sont deux à deux orthogonaux pour $\langle ., .\rangle$.
iii) La forme $(., .)_r$ sur $H(r)\times$ $H(r)$ est non dégénérée pour tout r.

Démonstration :
i) De l'égalité $\langle hv, w\rangle + \langle v, hw\rangle = 0$, on déduit $(i+j)\langle v, w\rangle = 0$. Comme $i+j \neq 0$, $\langle v, w\rangle = 0$, c'est à dire que v et w sont orthogonaux.
ii) Soient r et r' deux entiers positifs distincts et v dans $H(r)$, $\Omega v = r^2 v + 2xyv + 0$. En utilisant l'égalité $[x, y] = h$, on obtient :

$$\Omega v = r^2 v + 2hv + 0 = (r^2 + 2r)v\ .$$

Comme $[\Omega, y] = 0$, on obtient :

$$\Omega y^i v = (r^2 + 2r)y^i v\ ,$$

Soit w dans $H(r')$, alors $\langle \Omega y^i v, y^j w\rangle = \langle y^i v, \Omega y^j w\rangle$ pour tout i,j ; donc

$$(r^2 + 2r)\langle y^i v, y^j w\rangle = (r'^2 + 2r')\langle y^i v, y^j w\rangle$$

Puisque r est distinct de r', $(r^2 + 2r)$ est distinct de $(r'^2 + 2r')$; donc $\langle y^i v, y^j w\rangle = 0$. Puisque les $y^i v$ et $y^j w$ engendrent respectivement $M(r)$ et $M(r')$, $M(r)$ et $M(r')$ sont orthogonaux.
iii) Soit v dans $H(r)$ et tel que $(v, H(r))_r = \{0\}$. Alors v est orthogonal à $y^r H(r)$ par définition. Puisque $y^r H(r)$ est le noyeau de la restriction de $h + r$ à $M(r)$, v est orthogonal à $M(r)$ d'après l'assertion i). Enfin par (ii) v est orthogonal aux $M(r')$ pour $r \neq r'$ donc à $\mathbb{C}^N$ relativement à $\langle ., .\rangle$. Il en résulte que v est nul, d'où l'assertion.

On démontre la proposition dans le cas particulier de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Alors la forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathbb{C}^{2n}$, $\langle ., .\rangle$, est symplectique. Dans ce cas, la forme $(., .)_r$ est symplectique quand r est pair ou symétrique quand r est impair. Il résulte alors de l'assertion iii) du lemme 7 que $H(r)$ est de dimension paire quand r est pair car un espace symplectique est de dimension paire ; or la dimension de H(r) est la multiplicité de $r+1$ dans la partion de $2n$ $p_1, \ldots, p_m$. En conclusion dans la parttion $p_1, \ldots, p_m$ les éléments impairs ont une multiplicité paire.

Théorème 7 *L'application π de l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des partitions de $2n$ ayant un nombre pair d'élément impair est bijective.*

Idée de démonstration :
On se donne une partition de $2n$, $p_1, \ldots, p_m$, dont les éléments pairs ont une multiplicité impaire. On construit une décomposition de $\mathbb{C}^N$ en $\mathfrak{sl}_2$-sous-modules simples et on redéfinit $(.,.)_r$. Pour cela on considére des espaces $H(r)$ de dimension la multiplicité de $r+1$ dans la partition et on les choisit orthogonaux deux a deux, on prend aussi $(.,.)_r$ symplectique quand r est pair et symétrique quand r est impair. On étend les $H(r)$ de manière à retrouver la décomposition de $\mathbb{C}^N$ en sous-modules $M(r)$ et on redéfinit $\langle .,. \rangle$ à partir de $(.,.)_r$. Au final on obtient une décomposition de $\mathbb{C}^N$ associée à la partition $p_1, \ldots, p_m$, c'est à dire qu'il y a une orbite nilpotente associée à cette partition. On a ainsi démontré la surjectivité de π.

La démonstration de la propriété 1 est similaire dans les cas i) et iii).