

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

FINITE ELEMENT METHOD

MECA0036

SUPPORT DE TUYAU

PROBLÈME N°34

Rapport de Projet

Auteurs

Jonathan MAHAUX
Laurie PAZIENZA
Florence PLUMACKER

Année académique 2014-2015



Table des matières

I	Introduction	6
II	Résistance des matériaux	8
1	Modèle simplifié et hypothèses	8
2	Schéma rendu libre et détermination des réactions d'appui	9
3	Efforts internes et diagrammes MNT	10
3.1	Analyse des efforts internes dans la plage AC	10
3.2	Analyse des efforts internes dans la plage CE	11
3.3	Diagrammes MNT	13
4	Calcul des différentes contraintes	14
4.1	Calcul des contraintes dans la plage AC	14
4.1.1	Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage AC . . .	14
4.1.2	Contraintes de cisaillement dans la plage AC	16
4.1.3	Contraintes normales de flexion dans la plage AC	18
4.1.4	Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage AC	20
4.2	Calcul des contraintes dans la plage CE	20
4.2.1	Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage CF . . .	21
4.2.2	Contraintes de cisaillement dans la plage CF	21
4.2.3	Contraintes normales de flexion dans la plage CF	22
4.2.4	Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage CF	23
4.2.5	Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage FE . . .	23
4.2.6	Contraintes de cisaillement dans la plage FE	23
4.2.7	Contraintes normales de flexion dans la plage EF	25
4.2.8	Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage EF	26
5	Conclusion sur la valeur de P_{max}	27
6	Contraintes engendrées par la pression q dans le cylindre	27
7	Résumé des champs de contraintes	29
8	Calcul de P_{max} en considérant la pression q	30
9	Analyse des déplacements	30
9.1	Calcul de la flèche au point C	31
9.2	Calcul de la flèche au point E	32

10	Equations du problème mécanique	32
10.1	Relations déformations-déplacements	32
10.2	Equations constitutives : relations contraintes-déformations	33
11	Calcul de l'énergie potentielle totale	33
12	Conclusion	34
III	Méthode des éléments finis	35
13	Modélisation numérique du support	35
13.1	Onglet <i>Modeler</i>	35
13.1.1	Géométrie	35
13.2	Onglet <i>Analysis Data</i>	36
13.2.1	Hypothèses	36
13.2.2	Comportement	36
13.2.3	Caractéristiques du matériau	36
13.2.4	Conditions aux limites	36
13.2.5	Mise en charge	37
14	Détermination de la charge maximale P	37
14.1	Maillage grossier	38
14.1.1	Eléments triangulaires linéaires T3	38
14.1.2	Eléments triangulaires quadratiques T6	39
14.1.3	Eléments quadrilatères bilinéaires Q4	40
14.1.4	Eléments quadrilatères biquadratiques Q8	41
14.1.5	Discussion des résultats	42
14.2	Maillage avec sous-domaines simples	45
14.2.1	Eléments triangulaires linéaires T3	46
14.2.2	Eléments triangulaires quadratiques T6	47
14.2.3	Eléments quadrilatères linéaires Q4	49
14.2.4	Eléments quadrilatères quadratiques Q8	50
14.3	Maillage raffiné	51
14.3.1	Eléments triangulaires linéaires T3	51
14.3.2	Eléments triangulaires quadratiques T6	52
14.3.3	Eléments quadrilatères linéaires Q4	54
14.3.4	Eléments quadrilatères quadratiques Q8	55
14.4	Discussion des résultats	57
14.4.1	Conditions aux limites	57
14.4.2	Qualité du maillage	57
14.4.3	Compromis sur le maillage	59
14.4.4	Champ de contraintes	60

15 Comparaison avec la résistance des matériaux	61
15.1 Force résultante maximale	61
15.2 TPE	61
15.3 Déplacements	62
15.4 Encastrement	62
16 Optimisation	62
16.1 Première optimisation	63
16.2 Seconde optimisation	64
 IV Conclusion	 66

Table des figures

1	Pièce étudiée : support de tuyau.	7
2	Modèle simplifié de la structure.	8
3	Schéma rendu libre du modèle simplifié.	9
4	Etude des efforts internes dans la plage AC.	11
5	Etude des efforts internes dans la plage CE.	12
6	Diagramme de l'effort axial sur la structure.	13
7	Diagramme de l'effort tranchant sur la structure.	13
8	Diagramme du moment sur la structure.	13
9	Schéma de la section simplifiée.	15
10	Evolution des contraintes normales sur la plage AC.	16
11	Distribution des contraintes tangentiels et schéma de la section.	16
12	Evolution des contraintes tangentiels sur la plage AC.	18
13	Schéma de la section et disposition du moment de flexion.	18
14	Evolution des contraintes dues au moment de flexion dans la plage AC.	19
15	Contraintes sur la plage AC.	20
16	Schéma de la section et distribution des contraintes tangentiels.	21
17	Schéma de la section.	22
18	Evolution des contraintes dues au moment de flexion sur la plage CF.	22
19	Evolution des contraintes sur la plage CF.	23
20	Distribution des contraintes et schéma de la section.	24
21	Evolution des contraintes tangentiels sur la plage FE.	25
22	Schéma de la section considérée et disposition du moment.	25
23	Evolution des contraintes normales de flexion dans la plage FE.	26
24	Evolution des contraintes dans la plage FE.	26
25	Schéma des contraintes cylindriques.	29
26	Schéma de la flèche sur la plage AC.	31
27	Schéma de la flèche sur la plage CE.	32
28	Symétrie du problème.	36
29	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	39
30	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	40
31	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	41
32	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	42
33	Evolution du temps de calcul.	43
34	Evolution de la mémoire utilisée.	43
35	Evolution de l'énergie potentielle totale.	44
36	Maillage avec sous-domaines d'éléments T3.	46
37	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	47
38	Maillage avec sous-domaines d'éléments T6.	48
39	Valeur du <i>Jacobian's Ratio</i> le long du trou circulaire [-].	48
40	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	49
41	Maillage avec sous-domaines d'éléments Q4.	49

42	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	50
43	Maillage avec sous-domaines d'éléments Q8.	50
44	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	51
45	Maillage raffiné avec éléments T3.	51
46	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	52
47	Maillage raffiné avec éléments T6.	53
48	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	53
49	Maillage raffiné avec éléments Q4.	54
50	Aspect ratio aux gradient de contraintes importants [-].	55
51	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	55
52	Maillage raffiné avec éléments Q8.	56
53	Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].	56
54	Respect des conditions aux limites.	57
55	Discontinuité de l'effort tranchant.	58
56	Maillage raffiné avec suppression de la singularité.	59
57	Détermination de P_{max} [MPa].	60
58	Gap by Node lors de la suppression de la singularité.	60
59	Contraintes équivalentes de Von-Mises pour la première géométrie [MPa].	63
60	Configuration optimisée.	64
61	Maillage utilisé pour l'optimisation finale.	64
62	Contraintes équivalentes de Von-Mises pour la seconde géométrie [MPa].	65
63	Palier à semelles.	65

Liste des tableaux

1	Valeurs de P_{max} des trois plages.	27
---	--	----

Première partie

Introduction

Ce projet consiste en l'étude du comportement de la structure suivante sous différentes charges. Celle-ci est illustrée à la Fig. 1. Les charges appliquées sont représentées ci-dessous, elle est également soumise à son propre poids. Cette pièce est en réalité un support de tuyau.

La charge répartie q est une pression de 10 bar à l'intérieur du trou permettant l'insertion du tuyau et probablement due à la présence du tuyau lui-même. La force P est, quant à elle, une force résultante dont la valeur numérique est inconnue, elle est appliquée sur la surface intérieure du trou. Toutes les dimensions indiquées sur le schéma sont en millimètres. Nous travaillerons avec cette unité tout au long de ce rapport. La structure présente une épaisseur constante de 30mm, nous étudierons cependant un problème bidimensionnel et nous travaillerons en état plan de contrainte mais cette donnée est requise pas le logiciel *SAMCEF FIELD*. Il semble également utile de préciser que la structure est encastrée à ses deux extrémités. D'autres caractéristiques de la structure sont également à notre disposition, à savoir :

- le module de Young : $E = 210000MPa$
- le coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
- la masse volumique du matériau : $\rho = 7850kg/m^3$
- et la contrainte maximale admissible par celui-ci dans le domaine élastique : $\sigma_y^0 = 250MPa$

A la vue de ces données, notamment le module de Young et le coefficient de Poisson, nous pouvons supposer que le support de tuyau est en acier. Ce matériau semble approprié à ce type de structure.

A l'aide de la masse volumique du matériau ainsi que des dimension de la pièce, la masse de celle-ci peut être déduite : 201.035 kg. Comme exposé-ci dessus, la structure est soumise à son propre poids, celui-ci peut alors être calculé.

L'objectif de cette étude est de déterminer la charge maximale P_{max} à appliquer à cette pièce tout en restant dans le domaine élastique du matériau. En effet, aucune déformation plastique ne sera étudiée. Nous procéderons alors en différentes étapes afin d'atteindre cet objectif.

Tout d'abord, une étude analytique du comportement de cette structure est effectuée. Pour ce faire, un modèle simplifié de la pièce est adopté et différentes hypothèses sont également imposées. Nous déterminerons alors les champs de contraintes, de déformations et de déplacement ainsi que l'énergie potentielle totale du modèle. Ceci permettra l'estimation d'une première valeur de P_{max} .

Ensuite, nous étudierons la pièce à l'aide de la *Méthode des éléments finis* via le logiciel *SAMCEF FIELD*. Nous utiliserons également le logiciel *CATIA* pour plus de facilité et de précision.

Les champs de contraintes et de déformations seront alors, à nouveau, évalués ainsi qu'une seconde valeur de P_{max} . Pour ce faire, différents maillages sont définis, certains sont affinés dans les zones de concentration de contraintes afin d'obtenir une meilleure précision des résultats et donc une meilleure représentation de la réalité. Les résultats obtenus l'aide des deux méthodes seront alors comparés.

Enfin, nous procéderons à l'optimisation de la géométrie de la pièce afin de répartir au mieux les contraintes et d'éviter la concentration de celles-ci. Les lignes rouges sur la Fig. 1 ci-dessous représentent les zones que nous pouvons modifier. L'objectif est d'augmenter la charge maximale applicable P_{max} tout en respectant la limite d'élasticité du matériau et en répartissant les contraintes de façon optimale. Le volume ne peut également pas être affecté d'une augmentation de plus de 25%.

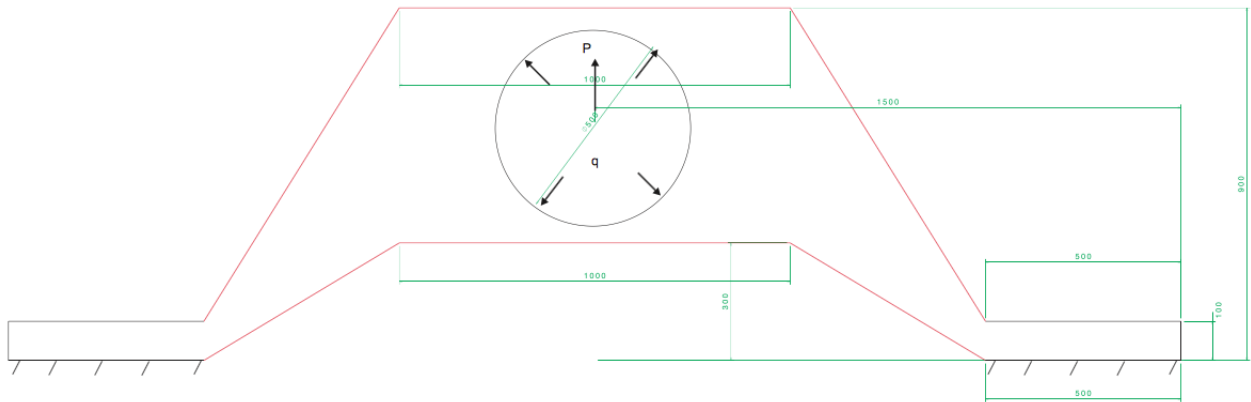


FIGURE 1 – Pièce étudiée : support de tuyau.

Deuxième partie

Résistance des matériaux

1 Modèle simplifié et hypothèses

Afin de réaliser l'étude analytique de la structure, nous avons établi un modèle simplifié de celle-ci représenté à la Fig. 2, nous utiliserons la théorie des poutres pour mener cette étude. Ce modèle consiste en trois poutres : une poutre horizontale joignant deux poutres obliques. Ceci est une première simplification du problème. Nous considérerons cependant que celles-ci présentent des sections variables afin de ne pas trop s'éloigner de la structure initiale.

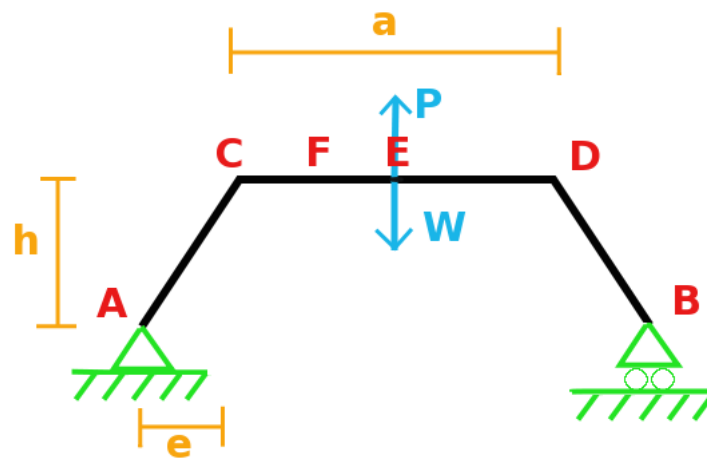


FIGURE 2 – Modèle simplifié de la structure.

Etant donné la section complexe des poutres obliques, celles-ci sont schématisées par leur fibre moyenne sur la Fig. 2. Une simplification sera également faite sur la disposition de ces deux poutres, ceci sera expliqué par la suite.

Une autre hypothèse consiste à considérer que la force P est une force ponctuelle appliquée en E et non une force répartie sur la surface intérieure du trou. La même hypothèse est faite sur la force poids W, celle-ci s'applique cependant dans la direction opposée à P. La pression q agissant dans le trou ne sera pas considérée dans un premier temps. L'analyse sera donc menée uniquement sur les forces P et W. Dans un second temps, la pression sera traitée seule, pour plus de facilité, et le principe de superposition sera appliqué.

Ensuite, le modèle étudié n'est pas encasté à ses extrémités car le problème serait alors hyperstatique. En effet, la théorie des poutres dans un plan offre trois équations : une équation d'équilibre en translation horizontale, une pour l'équilibre en translation verticale et une dernière d'équilibre

en rotation. Deux appuis de type "encastrement" apportent 6 réactions inconnues, il y aurait donc trop peu d'équations pour le nombre d'inconnues [1]. Nous choisissons alors un appui simple pour le point A et un appui à rouleau pour le point B. Le schéma rendu libre est disponible à la Fig. 3 ci-dessous. Un appui simple exerce deux efforts, un vertical et un horizontal. Par contre, un appui à rouleau n'induit qu'un seul effort vertical puisque le mouvement horizontal n'est pas bloqué. Il y a donc trois inconnues, la structure est isostatique et le problème peut alors être résolu.

D'autres hypothèses sont également émises quant au matériau ou à l'analyse en elle-même, celles-ci sont les suivantes :

- structure en état plan de contrainte
- pièce en équilibre statique
- membrane d'épaisseur constante : 30mm
- matériau isotrope dont les caractéristiques sont reprises ci-dessus
- matériau élastique linéaire (domaine plastique non étudié)
- déformations et déplacements infinitésimaux
- influence d'autres quelconques paramètres négligée, notamment la température.

2 Schéma rendu libre et détermination des réactions d'appui

Comme expliqué ci-dessus, deux degrés de liberté sont bloqués par l'appui simple au point A et seul le mouvement vertical est empêché par l'appui à rouleau au point B. En effet, ce type d'appui permet un mouvement horizontal à ce point. Ainsi sur le schéma rendu libre, représenté à la Fig. 3, deux réactions sont ainsi placées au point A, une verticale V_A et une horizontale H_A , et une réaction verticale V_B est placée au point B.

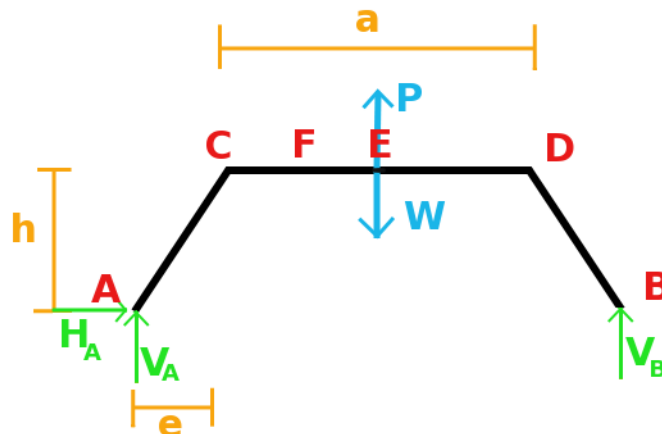


FIGURE 3 – Schéma rendu libre du modèle simplifié.

Nous pouvons alors déterminer les réactions d'appuis H_A , V_A , V_B grâce aux Eq. (1), (2) et (3) :

$$H_A = 0 \quad (1)$$

$$V_A + V_B = W - P \quad (2)$$

$$V_B(a + 2e) + P\left(\frac{a}{2} + e\right) = W\left(\frac{a}{2} + e\right). \quad (3)$$

Les Eq. (1) et (2) expriment l'équilibre en translation de la pièce. L'Eq. (3) traduit l'équilibre en rotation de celle-ci, celui-ci s'effectue autour du point A dans ce cas. Ce sont les équations d'équilibre bidimensionnel de la mécanique des matériaux.

Nous obtenons les résultats décrits par les Eq. (4) et (5).

$$H_A = 0 \quad (4)$$

$$V_A = V_B = \frac{W - P}{2}. \quad (5)$$

3 Efforts internes et diagrammes MNT

Une fois, les réactions d'appui déterminées, les efforts internes à la structure $M(x)$, $N(x)$ et $T(x)$ peuvent être analysés. Ceux-ci sont au nombre de trois car la structure est bidimensionnelle. Pour ce faire, la pièce est décomposée en différentes plages, à savoir les plages AC et CE. En effet, il est inutile d'étudier la structure dans son entièreté étant donné sa symétrie, ces deux plages suffisent alors.

3.1 Analyse des efforts internes dans la plage AC

Pour ce faire, les efforts internes seront déterminés en fonction d'un axe x , représenté sur la Fig. 4. Ces efforts étant connus au point A, celui-ci sera l'origine de cet axe. La longueur de la fibre moyenne de la poutre considérée est notée l , l'axe x appartient donc à l'intervalle $[0, l]$.

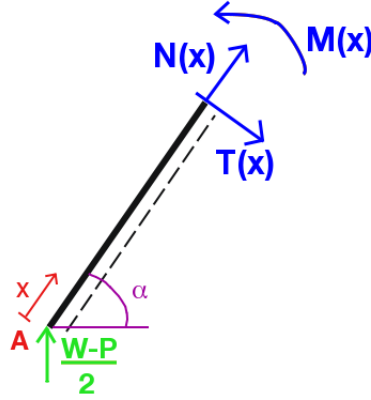


FIGURE 4 – Etude des efforts internes dans la plage AC.

Les efforts $N(x)$, $T(x)$ et $M(x)$ sont déterminés par les Eq.6, (7) et (8) :

$$N(x) = \frac{P - W}{2} \sin \alpha \quad (6)$$

$$T(x) = \frac{W - P}{2} \cos \alpha \quad (7)$$

$$M(x) = \frac{W - P}{2} x \cdot \cos \alpha. \quad (8)$$

Les Eq. (6) et (7) expriment l'équilibre en translation, les efforts axial $N(x)$ et tranchant $T(x)$ en sont immédiatement déduits. L'Eq. (8) traduit l'équilibre en rotation de la pièce, celui-ci est effectué autour du point de coupe. L'angle α peut être aisément calculé à l'aide des différentes dimensions de la pièce.

Les efforts axial $N(x)$ et tranchant $T(x)$ sont constants tout au long de la plage. Le moment $M(x)$ dépend de l'axe x , il est nul au point A et maximal au point C où il vaut : $M(C) = \frac{W-P}{2} l \cdot \cos \alpha$.

3.2 Analyse des efforts internes dans la plage CE

A nouveau, les efforts internes sont déterminés en fonction d'un nouvel axe x , représenté sur la Fig. 5. Les efforts étant inconnus en ces deux points, la partie de la structure avant le point C est considérée à nouveau, cependant l'origine de l'axe x se trouve tout de même au point C car uniquement la plage CE est étudiée dans ce cas. L'axe x appartient à l'intervalle $[0, \frac{a}{2}]$.

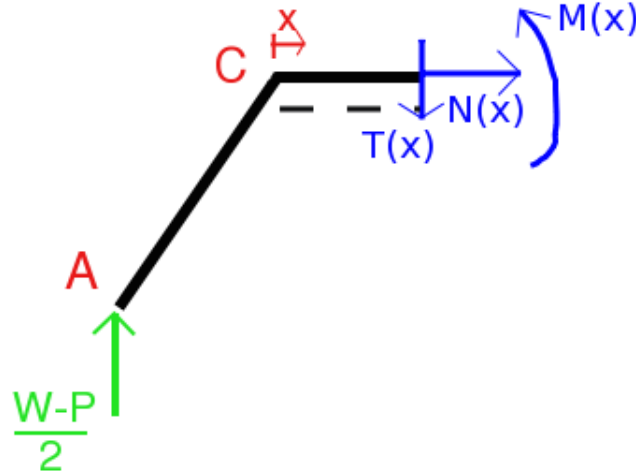


FIGURE 5 – Etude des efforts internes dans la plage CE.

Les Eq. (9), (10) et (11) expriment l'équilibre de la pièce, les efforts $N(x)$, $T(x)$ et $M(x)$ en sont déduits.

$$N(x) = 0 \quad (9)$$

$$T(x) = \frac{W - P}{2} \quad (10)$$

$$M(x) = \frac{W - P}{2}(e + x). \quad (11)$$

L'effort axial $N(x)$ est nul sur l'entièreté de la plage, l'effort tranchant $T(x)$ est également constant tout au long de celle-ci mais est non nul. L'équilibre en rotation est réalisé autour du point de coupe et le moment $M(x)$ évolue tout au long de l'axe.

La valeur de ce moment coïncide avec celle calculée au point C pour la plage AC. En effet :

$$M_{AC}(C) = \frac{W-P}{2}l \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad M_{CE}(C) = \frac{W-P}{2}e$$

$$\text{or } l \cdot \cos\alpha = e$$

$$\text{il vient donc } M_{AC}(C) = M_{CE}(C).$$

Ceci est correct car aucun moment extérieur n'est appliqué en ce point. Le changement d'inclinaison n'a aucun effet sur la valeur du moment car un moment ne possède pas de direction. Il y a donc continuité des moments internes puisque que la poutre est continue.

3.3 Diagrammes MNT

L'étude analytique des différents efforts internes à la structure étant menée, les diagrammes de ces efforts sont tracés. Ceux-ci sont représentés aux Fig.6, 7 et 8.

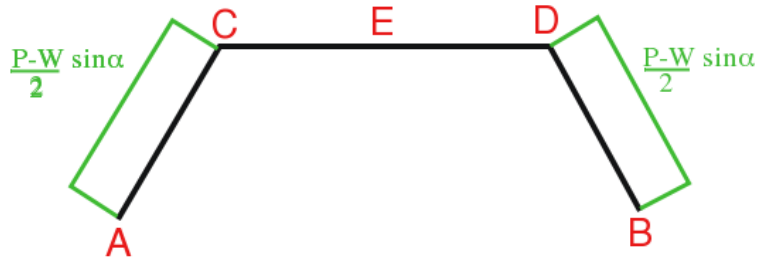


FIGURE 6 – Diagramme de l'effort axial sur la structure.

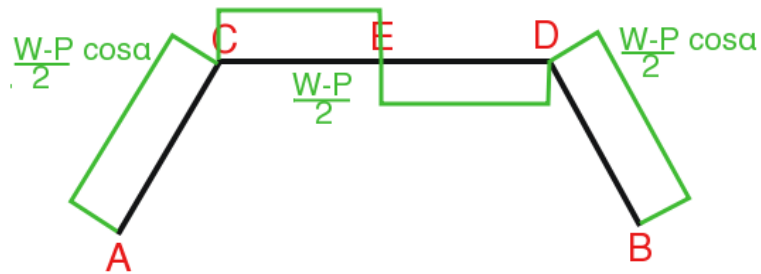


FIGURE 7 – Diagramme de l'effort tranchant sur la structure.

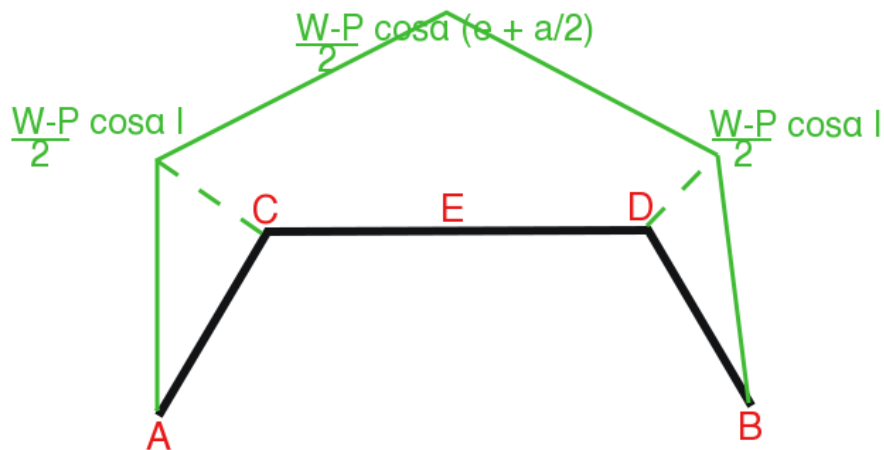


FIGURE 8 – Diagramme du moment sur la structure.

Les diagrammes de $N(x)$ et de $T(x)$ sont discontinus aux points C et D, ceci s'explique par un changement d'inclinaison de la poutre. En effet, ces efforts présentent un changement d'orientation en ces points. Ces diagrammes sont également symétriques par rapport au point E étant donné la symétrie de la pièce.

La formule $T(x) = \pm \frac{dM}{dx}$ est également respectée sur toutes les plages de la structure.

Les valeurs des efforts internes sont en [N], l'unité des moments est le [N mm].

Rappelons également que ces diagrammes et toute l'analyse menée ci-dessus se rapportent au modèle simplifié du problème pour lequel la pression q est négligée. Connaissant ces efforts, les contraintes internes au matériau peuvent être déterminées.

4 Calcul des différentes contraintes

Une fois les efforts internes déterminés, les contraintes sont calculées. L'effort axial $N(x)$ provoque des contraintes normales de traction ou de compression au sein de la poutre. L'effort tranchant $T(x)$ induit, quant à lui, des contraintes de cisaillement. Enfin, le moment $M(x)$ engendre des contraintes normales de flexion. Ces efforts étant connus pour les différentes plages, les contraintes seront calculées sur ces dernières également.

4.1 Calcul des contraintes dans la plage AC

La plage AC présente une section variable mais l'évolution de celle-ci est linéaire, il est donc aisé de traiter cette plage en un seul morceau.

4.1.1 Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage AC

Un effort normal de traction ou de compression est toujours dirigé selon l'axe de la poutre, la fibre moyenne dans ce cas, et agit toujours perpendiculairement à la section de celle-ci.

La pièce étudiée présente cependant une section droite sur la plage AC, autrement dit, la section est verticale et n'est donc pas perpendiculaire à la fibre moyenne. Afin de faciliter l'étude analytique, nous allons simplifier la structure, comme évoqué ci-dessus, et considérer la poutre schématisée en bleu sur la Fig. 9. Celle-ci diffère légèrement de la poutre initiale. Notons également que la section au point C de la plage AC ne coïncidera plus avec la même section de la plage CE. Cette simplification est cependant un bon compromis car elle permet de conserver le caractère variable de la section mais par contre apporte ce problème de continuité.

Nous pouvons maintenant calculer les contraintes normales dues à la traction ou à la compression par la formule suivante :

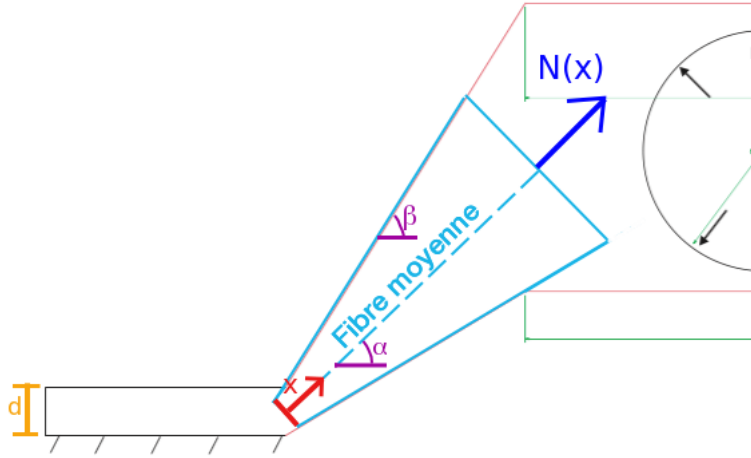


FIGURE 9 – Schéma de la section simplifiée.

$$\sigma_N = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{\frac{P-W}{2} \sin \alpha}{2 \cdot \tan(\beta - \alpha) \cdot p \cdot x + p \cdot d}. \quad (12)$$

Les dimensions de la contrainte σ_N sont $[\frac{N}{mm^2}]$

En effet, la section varie également selon l'axe x de la plage AC. L'angle α est l'angle entre la fibre moyenne et l'axe horizontal, comme évoqué précédemment. L'angle β est, quant à lui, l'angle entre la fibre supérieure de la poutre et l'horizontale. d est la hauteur de l'encastrement, ces paramètres sont représentés sur la Fig. 9.

L'effort normal étant constant sur toute la plage et la section étant croissante selon l'axe x , d'après l'Eq. (12), la contrainte σ_N est décroissante selon ce même axe.

La Fig. 10 représente l'évolution de cette contrainte le long de la fibre moyenne de la plage AC pour une force P maximale, des informations supplémentaires quant à cette force seront données par la suite. En effet, celle-ci est bien décroissante selon l'axe x .

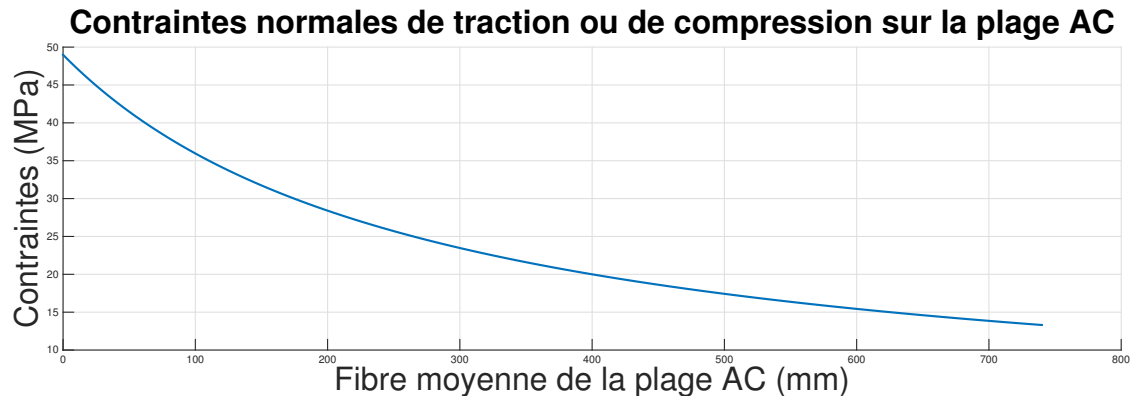


FIGURE 10 – Evolution des contraintes normales sur la plage AC.

Ces contraintes étant positives, il s’agit donc de contraintes de traction dans cette plage, l’orientation de la force $N(x)$ sur la Fig. 9 est donc correcte.

4.1.2 Contraintes de cisaillement dans la plage AC

Un effort tranchant provoque des contraintes tangentielles dans chaque section de la poutre. L’apparition d’un tel effort est lié à la variation du moment de flexion via la relation $T(x) = \pm \frac{dM}{dx}$.

La Fig. 11 représente la distribution des contraintes tangentielles dans la section, celles-ci sont représentées en vert.

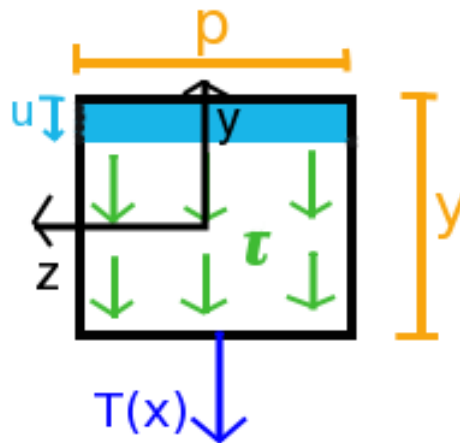


FIGURE 11 – Distribution des contraintes tangentielles et schéma de la section.

Ces contraintes se calculent par l'Eq. (13) :

$$\tau = \frac{T \cdot Sn}{p \cdot I_z} \quad (13)$$

- T étant l'effort tranchant [N]
- Sn le moment statique par rapport à l'axe de flexion [mm^3]
- p l'épaisseur de la section [mm]
- et I_z l'inertie selon l'axe z [mm^4].

La contrainte τ s'exprime donc en [$\frac{N}{mm^2}$].

Le moment statique Sn est défini par la surface d'un élément infinitésimal multipliée par la distance du centre de gravité de celui-ci à l'axe z . Ce moment statique est calculé par l'Eq. (14) ci-dessous :

$$Sn = \int_0^y p \left(\frac{y}{2} - \frac{u}{2} \right) du = \frac{py^2}{4}. \quad (14)$$

Le vecteur infinitésimal u est représenté à la Fig. 11, les dimensions y et p le sont également.

L'inertie selon l'axe z est, quant à elle, calculée par l'Eq. (15), ceci représente simplement l'inertie d'une section rectangulaire :

$$I_z = \frac{y^3 p}{12}. \quad (15)$$

Nous obtenons finalement l'expression suivante de ces contraintes selon l'axe x de la plage AC à l'Eq. (16) :

$$\tau = \frac{T \cdot Sn}{p \cdot I_z} = \frac{T \frac{py^2}{4}}{p \frac{y^3 p}{12}} = \frac{3T}{py} \quad (16)$$

y [mm] étant la hauteur de la section, celle-ci varie selon l'axe x , l'Eq. (17) illustre cette variation :

$$y(x) = 2 \cdot tg(\beta - \alpha) \cdot x + d. \quad (17)$$

L'évolution des contraintes de cisaillement est représentée à la Fig. 12 ci-dessous.

L'effort tranchant T ne varie pas sur cette plage, l'épaisseur est également constante, seule la section variable cause une évolution non constante de ces contraintes selon l'axe x . La hauteur y de cette section est donc la seule variable, celle-ci étant directement proportionnelle à x , le comportement décroissant des contraintes tangentielles semble correct. Ce graphe est également obtenu pour une force P maximale. Notons également que les valeurs des contraintes sont prises en valeur absolue car initialement la valeur maximale de la force P était inconnue. Celle-ci étant supérieure à la valeur de la force poids, les contraintes sont négatives. Ceci signifie uniquement que les contraintes ainsi que la force se dirigent vers le haut et non comme le présente la Fig. 11. A nouveau, les contraintes sont maximales au point A de la plage.

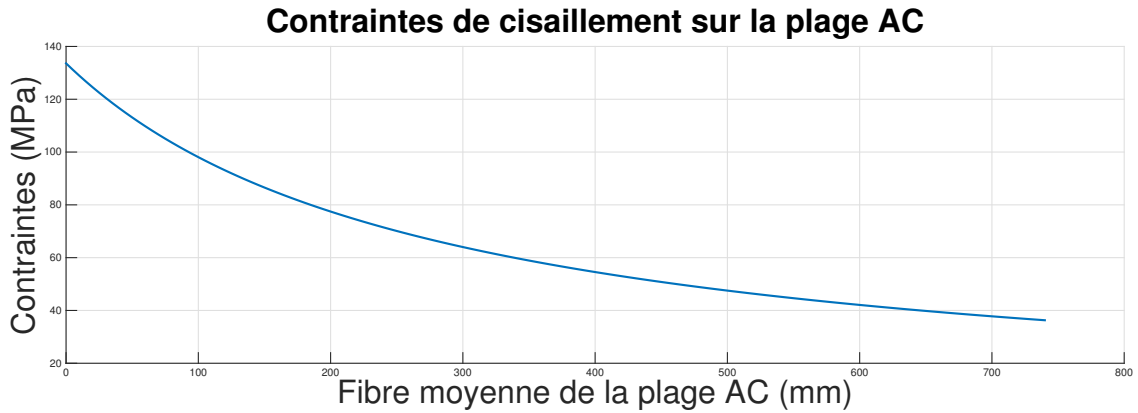


FIGURE 12 – Evolution des contraintes tangentielles sur la plage AC.

4.1.3 Contraintes normales de flexion dans la plage AC

Le moment $M(x)$ engendre des contraintes normales de flexion dans les sections de la plage AC. En effet, celui-ci est un moment de flexion. Il existe également des moments de torsion mais nous ignorons de tels efforts dans ce projet car la structure est considérée en état plan de contrainte.

La Fig. 13 montre la disposition de ce moment dans une section de la poutre.

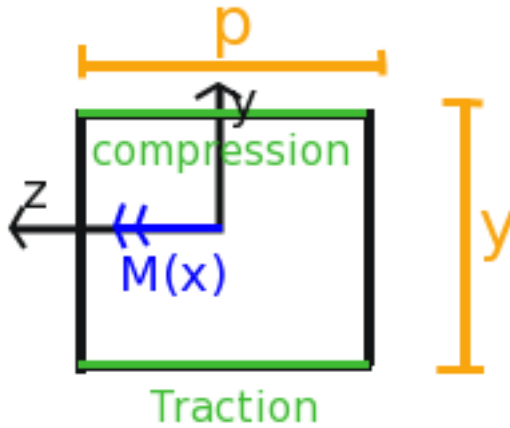


FIGURE 13 – Schéma de la section et disposition du moment de flexion.

Les faces supérieure et inférieure sont respectivement en compression et en traction, ceci dépend de l'orientation du moment, la Fig.13 ci-dessus illustre cela.

Les contraintes normales de flexion sont calculées par la formule à l'Eq. (18)

$$\sigma_M = \frac{M(x) \frac{y}{2}}{I_z} \quad (18)$$

- M est le moment de flexion [N mm]
- y étant la hauteur de la section comme évoqué précédemment, celle-ci dépend donc de la position sur l'axe x [mm]
- I_z est l'inertie selon l'axe z , calculée comme ci-dessus par l'Eq. (15) [mm^4].

A nouveau, la contrainte s'exprime en [$\frac{N}{mm^2}$].

Nous obtenons finalement l'expression des contraintes décrite par l'Eq. (19)

$$\sigma_M = \frac{\frac{W-P}{2} \cos \alpha \cdot x \cdot \frac{y}{2}}{\frac{y^3 p}{12}} = \frac{3(W-P) \cos \alpha \cdot x}{y^2 p}. \quad (19)$$

Il vient donc que le numérateur et le dénominateur de cette expression dépendent de la position de la section considérée sur l'axe x .

La Fig. 14 représente l'évolution des contraintes normales de flexion selon l'axe x pour une force P maximale. Les valeurs de celles-ci sont, à nouveau, prises en valeur absolue et sont calculées sur les faces supérieure et inférieure de la poutre uniquement car elles y sont maximales. La force P_{max} étant numériquement supérieure à la force poids, les contraintes sont négatives. Ceci signifie uniquement que le moment est dirigé dans le sens opposé à celui représenté à la Fig. 13. Les faces supérieure et inférieure de la poutre sont donc respectivement en traction et en compression.

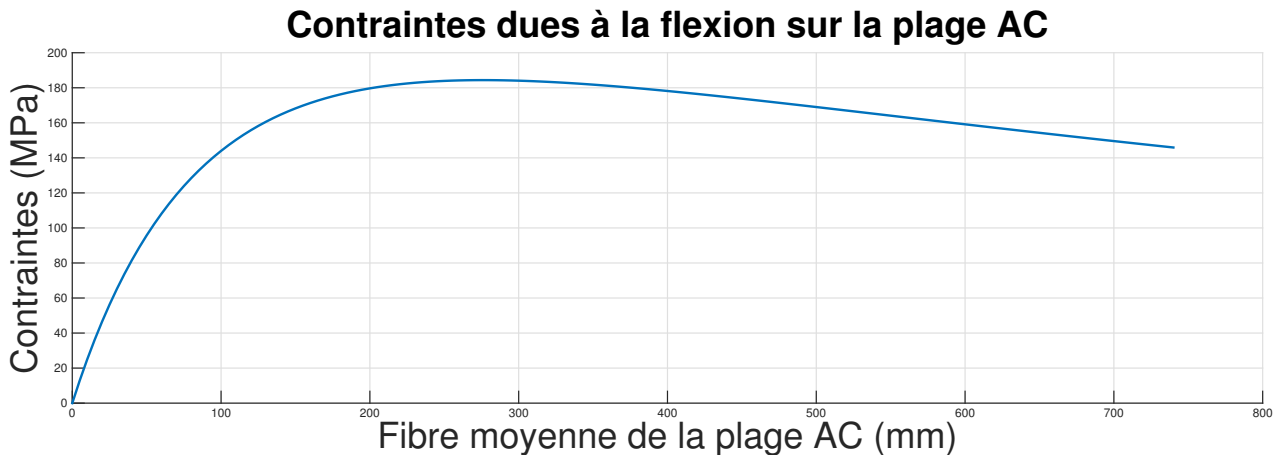


FIGURE 14 – Evolution des contraintes dues au moment de flexion dans la plage AC.

L'évolution des contraintes dues au moment de flexion présente un maximum. Ce comportement s'explique par la présence d'un facteur quadratique au dénominateur de l'expression des contraintes à l'Eq. (19).

4.1.4 Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage AC

Toutes les contraintes étant calculées, la force maximale P_{max} applicable à cette partie de la structure peut être déterminée.

Pour ce faire, nous calculons la contrainte de comparaison de Von Mises par la formule à l'Eq. (20)

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (20)$$

avec $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$.

Puisque nous recherchons la charge maximale à appliquer à la pièce à partir de laquelle celle-ci sort du domaine de plasticité, nous appliquons alors le *critère de plasticité*. Celui-ci se traduit mathématiquement par l'Eq. (21)

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_e. \quad (21)$$

R_e est la limite élastique du matériau, évoquée ci-dessus, celle-ci vaut 250 MPa. Nous obtenons alors un effort P_{max} d'une valeur de 399.2 kN en résolvant cette équation. Les trois graphes des diverses contraintes ci-dessus sont tracés pour cet effort. La Fig. 15 reprend les trois courbes illustrées précédemment ainsi que la courbe des contraintes de comparaison de Von Mises selon l'axe x .

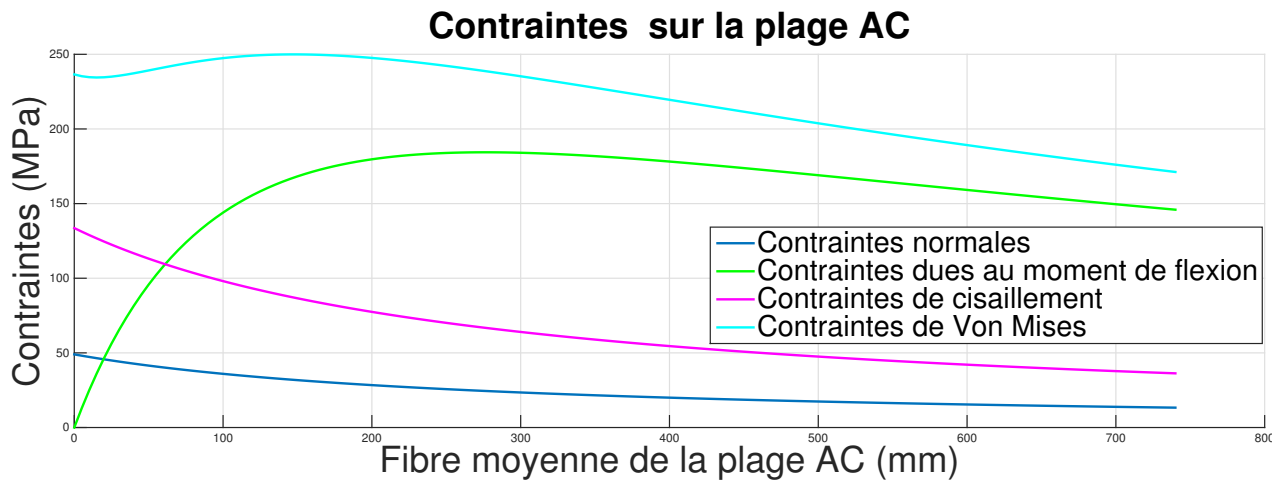


FIGURE 15 – Contraintes sur la plage AC.

L'évolution des contraintes de Von Mises est représentée par la courbe bleue claire. Il est remarquable que celle-ci suit le comportement de l'évolution des contraintes dues au moment de flexion, tracée en vert. Les contraintes de traction et de cisaillement sont en effet plus faibles.

4.2 Calcul des contraintes dans la plage CE

La plage CE est cependant difficile à traiter en une seule pièce. En effet, celle-ci est de section rectangulaire pleine jusqu'au point F et présente ensuite une section creuse et variable. Nous allons

donc considérer séparément les contraintes sur les plages CF et FE.

4.2.1 Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage CF

Comme expliqué ci-dessus, des contraintes de traction ou de compression apparaissent lorsqu'un effort axial est présent. Puisque sur cette plage cet effort est nul, il n'y aura aucune contrainte de ce type dans la plage CF.

4.2.2 Contraintes de cisaillement dans la plage CF

Un effort tranchant est cependant présent au sein de cette plage, des contraintes de cisaillement apparaissent alors. Celles-ci se calculent par la même formule qu'exposée ci-dessus, l'Eq.(22) reprend cette équation :

$$\tau_T = \frac{T \cdot S_n}{p \cdot I_z}. \quad (22)$$

S_n et I_z ont les mêmes significations que ci-dessus, ceux-ci se calculent par les Eq. (23) et (24)

$$S_n = \frac{p(c-b)^2}{4} \quad (23)$$

$$I_z = \frac{(c-b)^3 p}{12}. \quad (24)$$

En effet, la hauteur de la section de cette plage est constante et vaut $c - b$.

La Fig. 16 représente un schéma de la section ainsi que la distribution des contraintes tangentielles dans celle-ci.

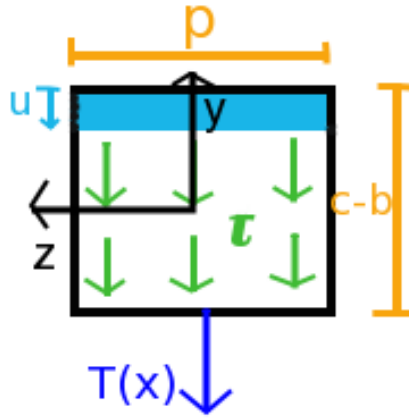


FIGURE 16 – Schéma de la section et distribution des contraintes tangentielles.

Finalement, nous obtenons l'expression des contraintes de cisaillement à l'Eq. 25 :

$$\tau = \frac{3 \cdot T}{(c-b)p}. \quad (25)$$

Ces contraintes présentent une valeur constante de 82.17 MPa. En effet, l'effort tranchant T ne varie pas sur la plage CF.

4.2.3 Contraintes normales de flexion dans la plage CF

Comme le montre le diagramme des moments à la Fig. 8, un moment de flexion est présent dans la plage CF, des contraintes normales de flexion apparaissent alors. La disposition de ce moment et un schéma de la section considérée sont illustrés à la Fig. 17.

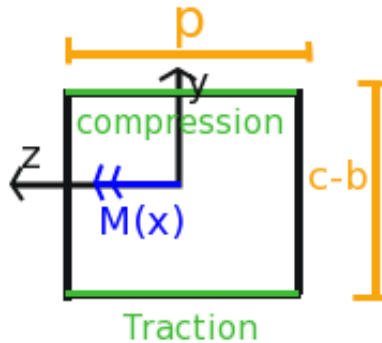


FIGURE 17 – Schéma de la section.

Les contraintes sont calculées par la formule de l'Eq. (26)

$$\sigma_M = \frac{M(x)(c-b)}{2 \cdot I_z}. \quad (26)$$

I_z est l'inertie autour de l'axe z , la même que précédemment. Celle-ci ne variant pas selon l'axe x , seule l'évolution linéaire du moment cause une variation de ces contraintes. La Fig. 18 trace cette variation en fonction de la position sur la plage CF. La courbe obtenue est en effet une droite.

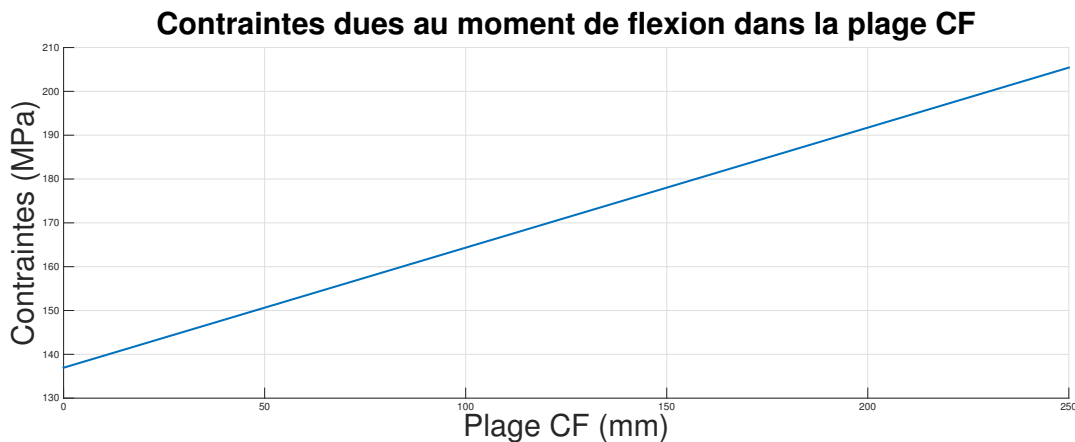


FIGURE 18 – Evolution des contraintes dues au moment de flexion sur la plage CF.

4.2.4 Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage CF

Afin d'obtenir la charge maximale P_{max} acceptable à partir de laquelle la pièce sort du domaine élastique, nous procédons de la même façon que pour la plage AC. Nous obtenons alors une évolution des contraintes représentée à la Fig. 19.

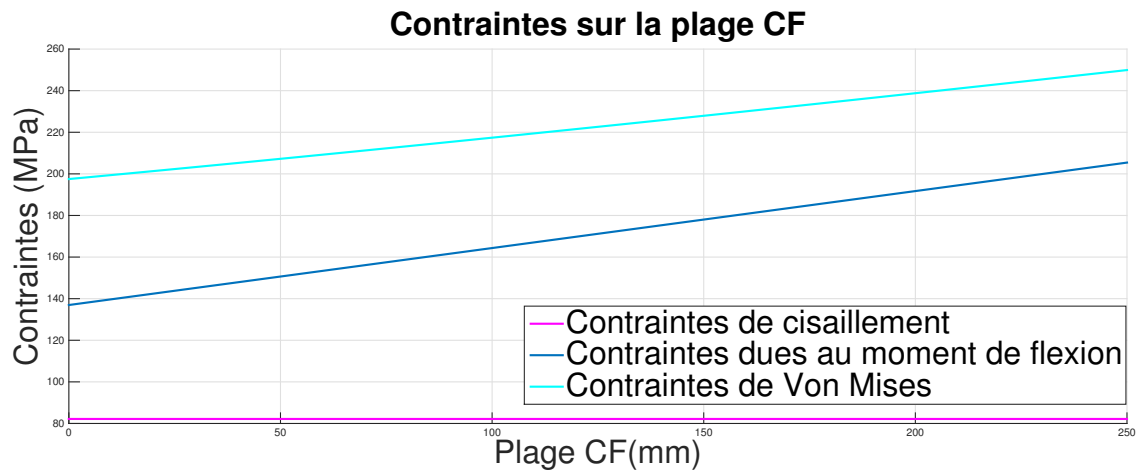


FIGURE 19 – Evolution des contraintes sur la plage CF.

Ces courbes sont tracées pour un effort P_{max} , par le *critère de plasticité* nous obtenons une valeur de celui-ci de 988kN. Celle-ci est nettement plus élevée que pour la plage AC, ceci peut s'expliquer par une plus grande épaisseur de la section, celle-ci résistera alors à un effort P plus élevé.

4.2.5 Contraintes normales de traction ou de compression dans la plage FE

Pour les mêmes raisons que précédemment, aucune contrainte de ce type n'apparaît dans la plage FE.

4.2.6 Contraintes de cisaillement dans la plage FE

L'effort tranchant présent dans la plage FE engendre des contraintes de cisaillement dans celle-ci. Leur distribution est représentée à la Fig. 20.

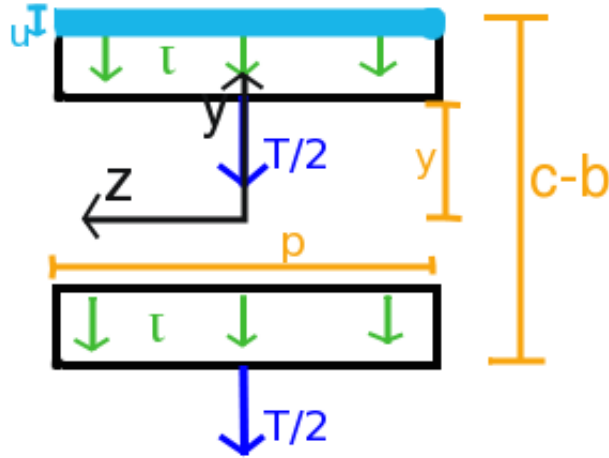


FIGURE 20 – Distribution des contraintes et schéma de la section.

La section de cette plaque consiste en effet en deux sections rectangulaires dont la hauteur varie en fonction de la position de cette section sur la plaque FE. L'Eq. (27) exprime cette relation :

$$y(x) = \sqrt{r^2 - (x - r)^2}. \quad (27)$$

La hauteur y est représentée en orange sur le schéma de la Fig.20, x est la position de la section considérée sur la plaque FE et r est le rayon du cylindre soit 250mm.

Nous allons donc étudier le comportement d'une de ces sections rectangulaires car par symétrie, le comportement dans la seconde sera identique. Les contraintes tangentielles dans une telle section se calculent par l'Eq. (28)

$$\tau = \frac{T \cdot S_n}{p \cdot I_z}. \quad (28)$$

S_n est à nouveau le moment statique de la section, il se calcule par l'Eq. (29)

$$S_n = \int_0^{\frac{c-b}{2}-y} p \left(\frac{c-b}{2} - \frac{u}{2} \right) du = p \frac{c-b}{2} \left(\frac{c-b}{2} - y \right) - \frac{p}{4} \left(\frac{c-b}{2} - y \right)^2. \quad (29)$$

Le vecteur infinitésimal u est représenté à la Fig. 20. L'inertie autour de l'axe z est calculée par l'Eq. (30)

$$I_z = \frac{\left(\frac{c-b}{2} - y \right)^3 p}{12}. \quad (30)$$

L'expression finale des contraintes de cisaillement peut alors être déduite. La Fig. 21 illustre l'évolution de ces contraintes sur la plaque FE. Nous remarquons la croissance de celles-ci lorsque la hauteur de la section diminue.

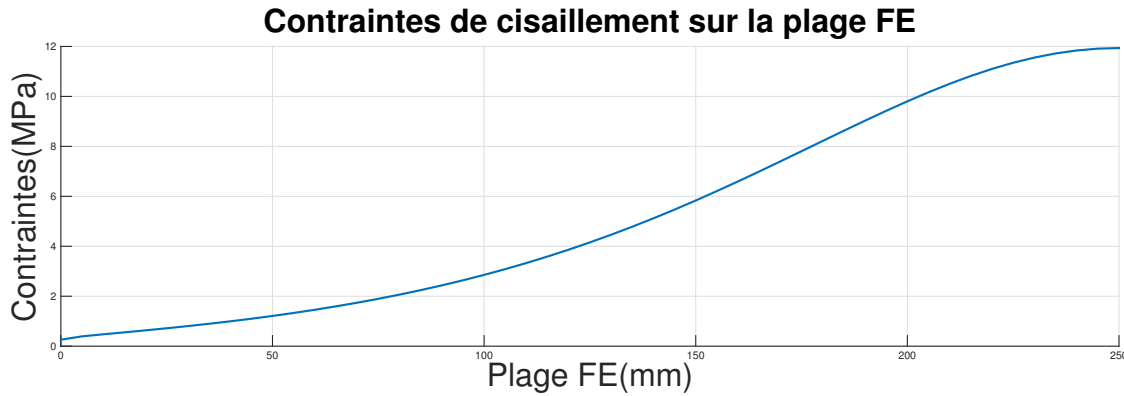


FIGURE 21 – Evolution des contraintes tangentielles sur la plaque FE.

4.2.7 Contraintes normales de flexion dans la plaque EF

Comme expliqué ci-dessus, le moment de flexion présent dans la plaque EF engendre des contraintes de flexion dans celle-ci. La Fig. 22 représente la disposition de ce moment par rapport à une des deux sections rectangulaires. Les contraintes seront calculées sur la face supérieure de la poutre car c'est là qu'apparaît une compression maximale.

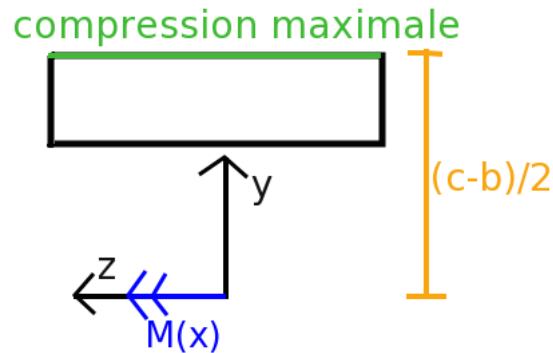


FIGURE 22 – Schéma de la section considérée et disposition du moment.

L'expression de ces contraintes est reprise à l'Eq.(31) :

$$\sigma_M = \frac{M(x) \frac{c-b}{2}}{I_z}. \quad (31)$$

I_z étant l'inertie autour de l'axe z exprimée ci-dessus à l'Eq. (30). Cette fois, le moment $M(x)$ et l'inertie I_z dépendent de la position de la section considérée.

La Fig. 23 représente l'évolution des contraintes dues au moment de flexion. Celles-ci sont maximales au point E de la poutre. Ceci s'explique par la faible surface de cette section, les contraintes y seront donc plus concentrées.

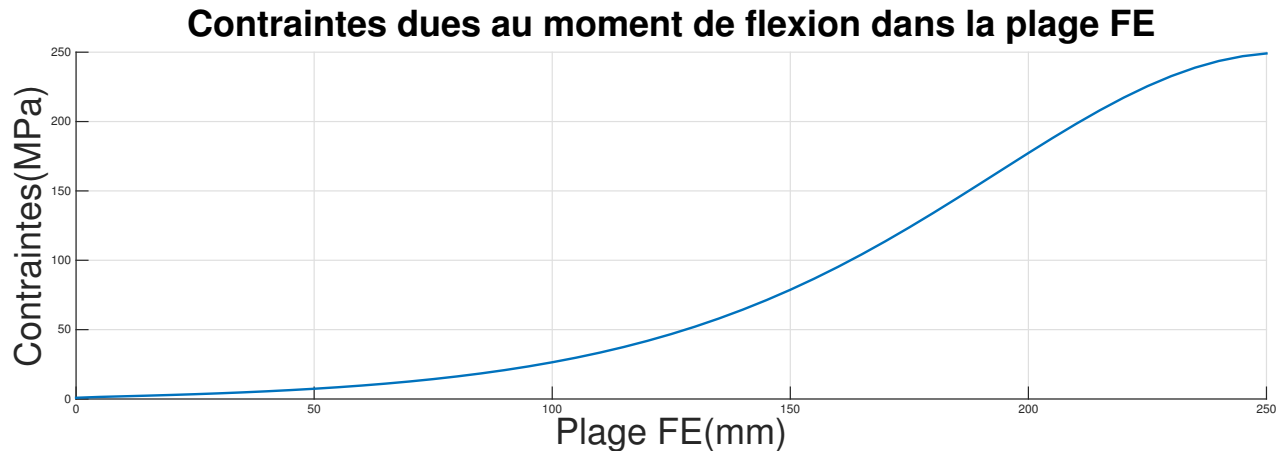


FIGURE 23 – Evolution des contraintes normales de flexion dans la plage FE.

4.2.8 Contraintes de comparaison de Von Mises dans la plage EF

De la même manière que précédemment la charge maximale P_{max} est calculée. Nous obtenons dans ce cas une charge beaucoup plus faible. En effet, il semble logique au vu de la pièce que le dessus et le dessous du cylindre soient les zones soumises à de fortes contraintes, les efforts P et W s'appliquant également en ce point.

La charge maximale acceptable afin que la pièce reste dans le domaine élastique vaut cette fois : 4.048 kN. La Fig. 24 représente les courbes des différentes contraintes pour un effort P_{max} . Nous remarquons que les courbes de contraintes en flexion et de contraintes de comparaison de Von Mises se superposent, nous pouvons en déduire que le cisaillement est négligeable pour cette plage.

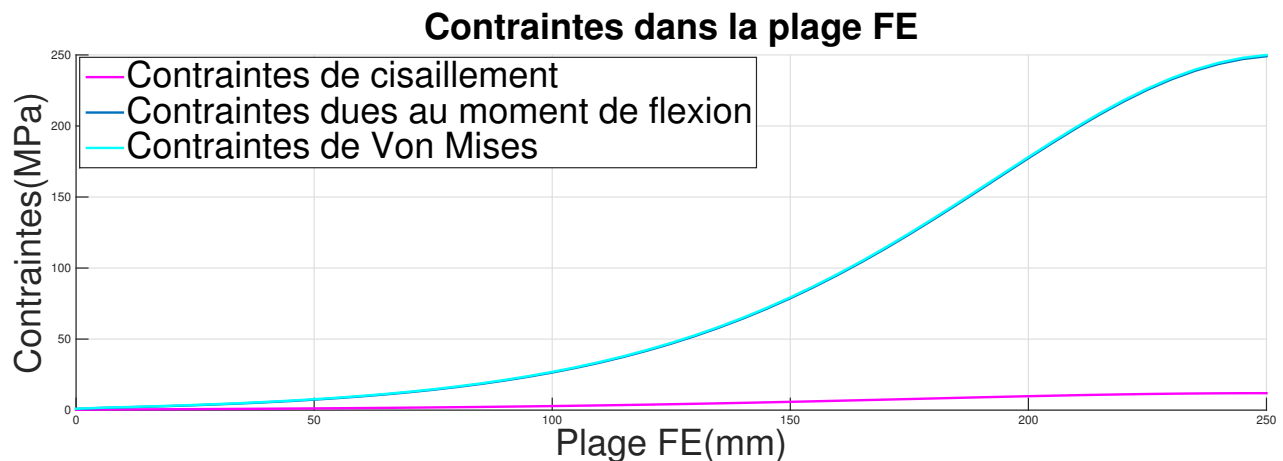


FIGURE 24 – Evolution des contraintes dans la plage FE.

5 Conclusion sur la valeur de P_{max}

Un des objectifs de cette étude analytique est la détermination de la charge maximale P_{max} à appliquer à cette structure à partir de laquelle celle-ci sort du domaine élastique.

Pour ce faire nous avons déterminé les contraintes dans les plages AC, CF et FE et nous avons ensuite appliqué le *critère de plasticité* afin d'obtenir la valeur de P_{max} . La Table 1 résume les différentes valeurs obtenues pour les trois plages considérées.

Plages	AC	CF	FE
P_{max} (kN)	399.2	988	4.048

TABLE 1 – Valeurs de P_{max} des trois plages.

La valeur de cet effort maximal est la plus élevée pour la plage CF. En effet, la section de cette plage est la plus étendue, celle-ci adopte donc un meilleur comportement face aux contraintes.

La valeur de la charge P_{max} est cependant beaucoup plus faible pour la plage FE. Le bout de cette plage présente une section très étroite au point d'application des forces P et W, les contraintes y sont alors plus concentrées. Ces zones sont plus sensibles à une augmentation de l'effort P.

La valeur la plus faible de cette charge est cependant retenue, à savoir 4.048kN, car pour des valeurs plus élevées le bout de la plage CE sortira du domaine élastique pour passer dans le domaine plastique.

A l'aide de la *méthode des éléments finis* et du logiciel *SAMCEF FIELD*, nous calculerons également cette charge, nous verrons alors les limites du modèle simplifié de cette structure.

6 Contraintes engendrées par la pression q dans le cylindre

Dans les sections précédentes, nous avons étudié le modèle simplifié avec comme seuls efforts extérieurs les forces P et W, ceci par souci de facilité et de simplification de calculs. Nous passons maintenant à l'étude de la pression q de 10 bar appliquée radialement dans le cylindre. En effet, ce phénomène est compliqué à étudier via la théorie des poutres utilisée ci-dessus. La pression étant appliquée sur l'ensemble de la surface intérieure du cylindre, elle ne présente pas une direction précise comme les autres efforts.

Pour ce faire, nous avons le choix entre trois problèmes classiques de solides élastiques linéaires isotropes présentant la symétrie de révolution à savoir : le problème de Boussinesq, le modèle du cylindre sous pression à paroi mince et le modèle du cylindre épais sous pression. Nous devons alors faire un choix quant à ces trois possibilités.

Le problème de Boussinesq consiste en un solide élastique linéaire semi-indéfini, limité par un plan horizontal et sollicité par une force verticale appliquée à l'origine du cercle délimitant le cylindre. Ce modèle nous permettrait donc d'étudier les contraintes engendrées par une force dans un demi cylindre. Nous choisissons cependant d'écarter cette possibilité. En effet, dans notre cas, la charge appliquée n'est pas une force ponctuelle mais une pression appliquée radialement. De plus, dans les zones de sections très faibles du dessus (point E) et du dessous du cylindre, l'hypothèse de solide infini ne serait pas respectée.

Ensuite, nous avons examiné la possibilité d'utiliser le modèle du cylindre sous pression à paroi mince. Celui-ci est donc correct et sans hypothèse quant au type de charge appliquée. Cependant, dans le cas d'une application de ce modèle il faut vérifier que $\frac{D}{e} \ll 10$, afin de satisfaire la condition de paroi mince, D étant le diamètre du cylindre et e l'épaisseur de la paroi. Cette condition n'est pas vérifiée dans notre cas, même pour les zones de faibles section du dessus et du dessous du cylindre le rapport $\frac{D}{e}$ vaut tout juste 10. Nous n'utiliserons donc pas ce modèle.

Enfin, la dernière possibilité était le modèle du cylindre épais sous pression. Celle-ci convient mieux que les précédentes. En effet, la charge appliquée est du même type et l'hypothèse de cylindre épais est la moins contraignante. Ce modèle est donc un bon compromis.

Nous obtenons alors le champ de contraintes repris par l'Eq. (32) :

$$\begin{cases} \sigma_r &= \frac{a^2 q}{b^2 - a^2} - \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 q}{b^2 - a^2} + \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \end{cases} \quad (32)$$

a et b étant respectivement les rayons intérieur et extérieur, dans notre cas, $a = 250mm$ et $b = 400mm$. La valeur de b est choisie de façon à faire un compromis acceptable entre les différentes épaisseurs de la paroi du cylindre. Le vecteur r est représenté sur la schéma ci-dessous.

Il suffit alors de projeter ces contraintes pour les obtenir selon X et Y comme l'illustre la Fig. 25 :

Il vient alors le champ de contraintes suivant décrit par l'Eq. (33) :

$$\begin{cases} \sigma_X &= \sigma_r \cos\theta - \sigma_\theta \sin\theta \\ \sigma_Y &= \sigma_r \sin\theta + \sigma_\theta \cos\theta \end{cases} \quad (33)$$

Par le *principe de superposition*, nous pouvons sommer ce champ de contrainte à celui des plages CF et FE, nous considérons alors qu'il n'a aucune influence sur la plage AC. Remarquons que ce principe s'applique sur les champs de contraintes et non sur les contraintes de comparaison de Von Mises directement. En effet, l'expression de celles-ci n'étant pas linéaire, ce principe n'est pas applicable.

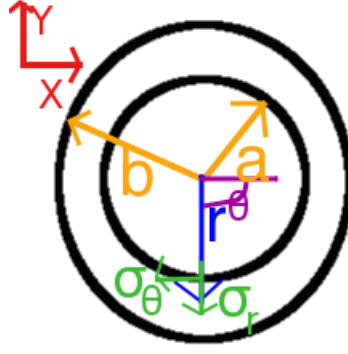


FIGURE 25 – Schéma des contraintes cylindriques.

7 Résumé des champs de contraintes

Finalement après avoir analysé les contraintes provoquées par tous les efforts nous obtenons les champs de contraintes suivants.

L'Eq. (34) reprend le champ de contraintes dans la plage AC :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{\frac{P-W}{2} \sin \alpha}{2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot p \cdot x + p} + \frac{3(W-P) \cos \alpha \cdot x}{(2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot x + d)^2 p} \\ \sigma_Y = \frac{3(W-P)}{2p(2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot x + d)} \end{cases} \quad (34)$$

Les axes X et Y sont dans ce cas, l'axe de la fibre moyenne et l'axe perpendiculaire à celui-ci.

Ensuite, le champ de contraintes dans la plage CF est repris par l'Eq. (35) :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{3(W-P)(e+x)}{(c-b)^2 p} + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} - \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \right) \cos \theta - \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} + \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}} \right) \sin \theta \\ \sigma_Y = \frac{3(W-P)}{2(c-b)p} + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} - \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \right) \sin \theta + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} + \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}} \right) \cos \theta \end{cases} \quad (35)$$

Enfin, l'Eq. (36) reprend le champ de contraintes dans la plage FE :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{3(W-P)(e+x)(c-b)}{(\frac{c-b}{2} - (2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot x + d))^3 p} + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} - \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \right) \cos \theta - \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} + \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}} \right) \sin \theta \\ \sigma_Y = \frac{3(W-P)[3(c-b) - 2(2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot x + d)]}{p(c-b - 2(2 \cdot t g(\beta - \alpha) \cdot x + d))^2} + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} - \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}} \right) \sin \theta + \left(\frac{a^2 q}{b^2 - a^2} + \frac{q}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}} \right) \cos \theta \end{cases} \quad (36)$$

Les deux derniers champs de contraintes sont établis par rapport à des axes parallèles aux axes X et Y représentés sur la schéma de la Fig.25 mais leur origine se trouvent en C et en F.

8 Calcul de P_{max} en considérant la pression q

Afin de calculer la charge maximale dans ce cas, il suffit d'appliquer le *principe d'élasticité* aux champs de contraintes des plages CF et FE. En effet, nous considérons que la plage AC n'est pas affectée par la pression q .

Nous résolvons alors l'Eq. (37) :

$$\sqrt{\sigma_X^2 + 3\sigma_Y^2} \leq Re. \quad (37)$$

La charge maximale applicable P_{max} obtenue est de 4.038kN dans la plage FE. La charge est maximale pour cette plage car c'est sur celle-ci que se trouvent les zones de concentration de contraintes. Cette valeur n'est que très peu affectée par la pression q . En effet, la pression est de 1 MPa, ce qui est très faible par rapport aux valeurs des contraintes, son effet est donc négligeable.

Rappelons que tous les calculs numériques de l'étude analytique sont menés à l'aide du logiciel MATLAB.

9 Analyse des déplacements

Connaissant les efforts internes à la structure, nous pouvons analyser la déformation de celle-ci suite à ces efforts. Ceci peut se faire par un calcul de flèches. La mécanique des matériaux nous apprend que la déformabilité des poutres vis-à-vis des efforts $N(x)$ et $T(x)$ est faible par rapport à sa déformabilité vis-à-vis de l'effort de flexion $M(x)$. Dans cette section, nous négligerons alors les efforts axiaux et tranchants.

L'équation fondamentale de l'élasticité est représentée à l'Eq. (38) :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \quad (38)$$

- v étant le déplacement vertical de la poutre [mm]
- E le module de Young du matériau à savoir 210000 [MPa]
- I_z l'inertie flexionnelle autour de l'axe z calculée de nombreuses fois ci-dessus [mm^4].

Nous pourrions résoudre cette équation pour chacun des tronçons de la structure et déterminer ainsi les déplacements verticaux de celle-ci. Nous utiliserons cependant une superposition de cas simples dont les résultats sont fournis dans le cours de *Mécanique des matériaux*.

Nous avons fait l'hypothèse de petites déformations, seuls les déplacements verticaux seront alors considérés. En effet, selon la théorie d'Euler-Bernoulli, lors de petites déformations, la section droite reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre après déformation, le

phénomène de gauchissement est ainsi négligé.

La pression q interne au trou ne sera pas considérée dans cette section, celle-ci étant négligeable par rapport aux autres efforts extérieurs appliqués à la structure, comme démontré ci-dessus. Les déplacements sont calculés pour un effort P maximal dans le domaine élastique, à savoir $4.048kN$.

9.1 Calcul de la flèche au point C

Le calcul de flèches s'effectue en démarrant d'un point fixe et en progressant dans la structure tout en considérant les tronçons déjà analysés comme indéformables.

La plage AC étant oblique, la flèche calculée est le déplacement perpendiculaire à l'axe de cette plage comme illustré sur le schéma de la Fig. 26.

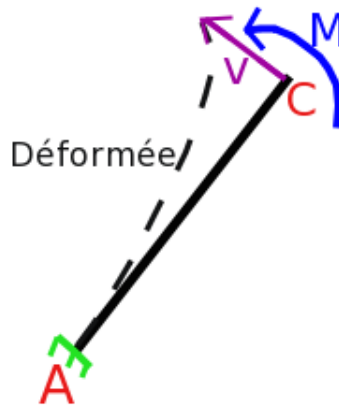


FIGURE 26 – Schéma de la flèche sur la plage AC.

La flèche est en effet calculé au point C car elle est maximale en ce point pour ce tronçon.

La déplacement v_C de ce point est décrit par l'Eq. (39)

$$v_C = \frac{Ml^2}{2E \cdot I_z} = 0.00247mm \quad (39)$$

- M est le moment de flexion au point C : $M(C) = 5.14 \cdot 10^5 N$
- l étant la longueur de la plage AC soit 743.3 mm
- E est à nouveau le module de Young du matériau soit 210000 MPa
- et I_z est l'inertie flexionnelle de la section au point C, celle-ci vaut $1.247 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$.

Le déplacement obtenu est de l'ordre de grandeur attendu au vu de l'amplitude du moment de flexion au point C.

9.2 Calcul de la flèche au point E

Le second point où il semble intéressant de calculer la flèche est le point E. En effet, il est le point de symétrie de la pièce et il est également le point d'application des forces P et W.

Le tronçon AC ayant été analysé ci-dessus, nous le considérons alors indéformable et schématisons cette considération par un encastrement au point C, ceci est illustré à la Fig. 27.

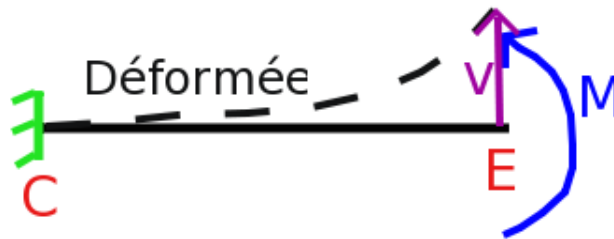


FIGURE 27 – Schéma de la flèche sur la plage CE.

Le déplacement vertical du point E est repris à l'Eq. 40

$$v_E = \frac{M(\frac{a}{2})^2}{2E \cdot I_z} = 0.983mm \quad (40)$$

- M est le moment de flexion au point C : $M(E) = 5.16 \cdot 10^5 N$
- $\frac{a}{2}$ étant la longueur de la plage CE soit 500 mm
- E est à nouveau le module de Young du matériau soit 210000 MPa
- et I_z est l'inertie flexionnelle de la section au point E, celle-ci vaut $312500mm^4$.

Ce déplacement est le déplacement maximal $v_{max} = 0.983mm$. En effet, les efforts s'appliquant en ce point, le moment engendré y est élevé. De plus, l'inertie flexionnelle y est plus faible étant donné la faible surface de la section.

10 Equations du problème mécanique

10.1 Relations déformations-déplacements

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse de faibles déformations et déplacements, nous pouvons alors déduire du tenseur de Cauchy, l'Eq. (41) suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) \quad (41)$$

ϵ représente les déformations, celles-ci sont adimensionnelles et v représentent les déplacements verticaux[2].

10.2 Equations constitutives : relations contraintes-déformations

Puisque la structure est en état plan de contrainte, le tenseur des contraintes suivant

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se réduit à ce simple vecteur

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des déformations comporte cependant une composante supplémentaire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

En effet, lorsque des contraintes sont présentes dans les deux directions du plan, une déformation est engendrée selon la troisième direction perpendiculaire au plan, ceci est l'*effet de Poisson*.

Nous pouvons alors utiliser la loi de Hooke à l'Eq. (42) pour déterminer les déformations [2] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]. \quad (42)$$

11 Calcul de l'énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale contenue dans une structure est définie par l'Eq. (43)

$$TPE = U - P. \quad (43)$$

U est l'énergie interne contenue dans la pièce, elle est due aux efforts internes à celle-ci. P est l'énergie potentielle due au déplacement de la pièce, ces deux type d'énergie s'expriment en Joules.

Nous commençons tout d'abord par le calcul de l'énergie interne à la pièce U . Les théorèmes énergétiques de la *Mécanique des matériaux* nous apprennent que l'énergie interne peut être calculée par le travail interne à la structure, il vient alors les Eq. (44) et (45) [3] :

$$U = W_I = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N(x)^2}{EA(x)} + \frac{M(x)^2}{EI_z(x)} + \frac{T(x)^2}{GA(x)} dx \quad (44)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{AC} \frac{N(x)^2}{EA(x)} + \frac{M(x)^2}{EI_z(x)} + \frac{T(x)^2}{GA(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{CF} \frac{N(x)^2}{EA(x)} + \frac{M(x)^2}{EI_z(x)} + \frac{T(x)^2}{GA(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{FE} \frac{N(x)^2}{EA(x)} + \frac{M(x)^2}{EI_z(x)} + \frac{T(x)^2}{GA(x)} dx \quad (45)$$

L est la longueur de la demi-structure, nous allons donc intégrer cette expression sur les trois plages AC, CF et FE de la demi-structure. Nous utilisons à nouveau le logiciel MATLAB pour déterminer la valeur de l'énergie interne U . Nous obtenons finalement $U = 258.33J$.

Ensuite nous calculons l'énergie potentielle P par le travail exercé par la force appliquée au point E. Pour ce faire, nous multiplions la flèche maximale par la force exercée en ce point, il vient alors l'Eq. (46)

$$P = v_{max}(P - W) = 0.983(4.048 \cdot 10^3 - 1972.15) = 1993.38J. \quad (46)$$

Finalement, nous obtenons l'énergie potentielle totale de la structure à l'Eq. (47)

$$TPE = U - P = -1735.4J = -1.75kJ. \quad (47)$$

12 Conclusion

L'étude analytique de cette structure est essentiellement basée sur la *théorie des poutres* et la *mécanique des matériaux*. De nombreuses hypothèses sont posées afin de rendre cette étude plus accessible. La plus contraignante est l'hypothèse des forces P et W (poids) ponctuelles et non réparties. En effet, celle-ci entraîne des efforts internes élevés au point d'application de ces forces. L'étude entière se basant sur ces efforts internes, les résultats peuvent donc être éloignés de la réalité.

Cette hypothèse engendre une concentration de contraintes au point d'application de ces forces, nous obtenons alors une valeur numérique de P_{max} plus faible qu'en réalité. Nous nous attendons donc à une valeur plus élevée dans le cas de l'étude de cette structure à l'aide de la *méthode des éléments finis*.

En ce qui concerne l'énergie potentielle totale, celle-ci est également affectée par cette hypothèse. En effet, le calcul de cette énergie se base sur les efforts internes à la structure et sur le déplacement maximal de celle-ci qui dépend lui aussi du moment interne.

Cependant cette hypothèse est nécessaire pour permettre l'étude analytique de la pièce. La démarche exposée ci-dessus constitue alors une idée du comportement de la pièce. Des résultats plus fiables seront obtenus par la *méthode des éléments finis*.

Troisième partie

Méthode des éléments finis

13 Modélisation numérique du support

Avant de chercher à obtenir numériquement les champs de contraintes et de déplacements du support, il est nécessaire de le modéliser. Cette modélisation est faite à l'aide du logiciel *SAMCEF FIELD*. La géométrie, les hypothèses, le comportement du matériau, ses caractéristiques, les conditions aux limites ainsi que la mise en charge doivent y être définis.

La procédure expliquée ci-dessous sera appliquée à chacun des 12 types de maillages demandés.

13.1 Onglet *Modeler*

13.1.1 Géométrie

Modeler

Le dessin de la pièce est réalisé grâce au logiciel *CATIA*, bien plus pratique et maniable que l'outil de modélisation de *SAMCEF FIELD*. Une fois la géométrie créée dans *CATIA*, il est nécessaire de l'importer ainsi que de spécifier les surfaces pleines de notre pièce, en définissant les surfaces et limites grâce aux outils *Faces* et *Gluing*.

Symétrie

Le coût de calcul étant souvent un paramètre crucial en méthode des éléments finis, il nous faut donc réduire au maximum le nombre de noeuds et d'éléments dans le maillage tout en conservant une bonne précision sur les résultats. L'utilisation d'une symétrie permet de faciliter la simulation et réduire significativement ce coût de calcul et le nombre de noeuds, d'autant plus que la license disponible ne permet que de générer des résultats pour un nombre maximal de 5000 noeuds. Elle n'est applicable que si tous les types de symétrie sont rencontrés, à savoir la géométrie, la mise en charge, les conditions aux limites et le comportement. La pièce étudiée vérifiant tous ces types de symétrie, la modélisation et l'étude du support ne se feront donc que sur une moitié de celui-ci.

La pièce présente une symétrie axiale, dirigée selon l'axe y et passant par le centre du trou circulaire.

Le matériau utilisé est supposé isotrope et assure donc un comportement symétrique. Les symétries de mise en charge et de conditions aux limites seront, elles, expliquées respectivement aux sous-sections 1.2.4 et 1.2.5. Les conséquences de l'utilisation d'une telle symétrie seront détaillées à la sous-section 1.2.4.

La Fig.28 illustre cette symétrie.

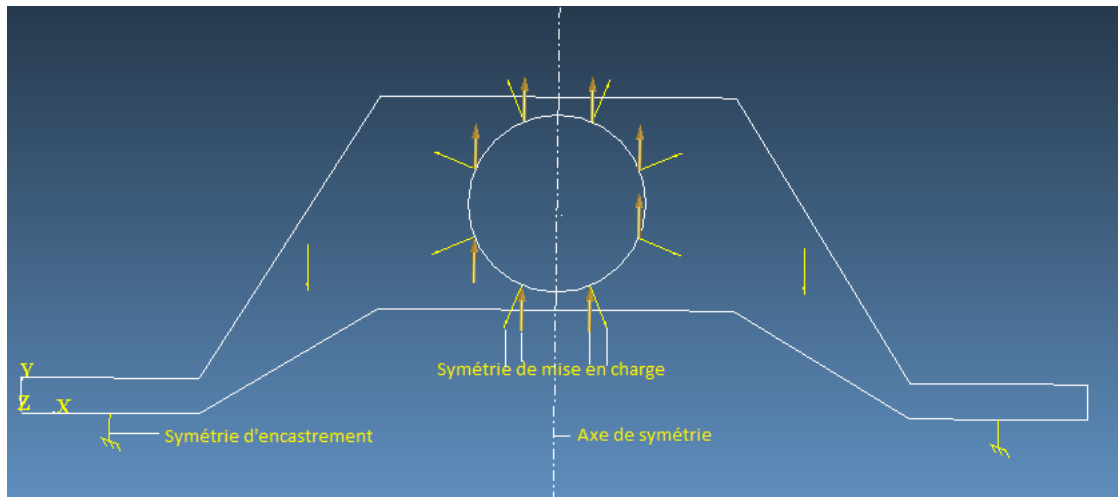


FIGURE 28 – Symétrie du problème.

13.2 Onglet *Analysis Data*

13.2.1 Hypothèses

L'étude du support est simplifiée par une idéalisation du problème. Le support est supposé en état plan de contrainte, de telle sorte que l'analyse du champ de contraintes se fera en deux dimensions. Cette hypothèse doit être spécifiée en hypothèse spatial dans les paramètres du solver.

13.2.2 Comportement

Le comportement suivi par le matériau spécifié dans l'énoncé est celui d'une membrane de 30 mm. Ce comportement est défini grâce à l'outil *behavior*, et ce pour toutes les surfaces définies à l'intérieur de la géométrie.

13.2.3 Caractéristiques du matériau

Les caractéristiques du matériau sont également spécifiées dans l'énoncé et sont définies dans *SAMCEF FIELD* avec l'outil *Material*.

Les caractéristiques fournies sont reprises dans l'introduction.

13.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites essentielles, devant donc être définies préalablement à l'étude, ne sont pour ce problème, que des conditions aux limites cinématiques. Le support est en effet encasté sur sa partie inférieure et annule le déplacement à cet endroit,

$$\varepsilon_{xj}(0 : 500, 0) = 0, \forall j = y, z. \quad (48)$$

Cette condition aux limites est définie grâce à l'outil *Constraint* en appliquant une condition de type *clamp* au bord encasté.

Mode rigide

L'encastrement présent bloque tout mouvement de la pièce à l'endroit où il est appliqué. La translation rigide longitudinale et transversale de la pièce ainsi que sa rotation sont empêchées. Nous sommes donc assurés que tout les modes rigides sont bloqués. Le support ne se mettra en mouvement que par déformation.

Symétrie

Les conditions aux limites sont en effet symétriques puisque les encastrements le sont comme le montre la Fig. 28.

L'utilisation de la symétrie de la pièce impose la définition d'autres appuis à l'endroit de la coupe effectuée. La matière étant continue et la mise en charge se compensant selon l'axe x , aucune déformation ne peut être observée dans cette direction au bord situés sur l'axe de symétrie. Des conditions aux limites cinématiques, ne bloquant que les déplacements selon x , sont donc appliquées. Elles correspondent aux contraintes de type *locking* de l'outil *Constraint*.

13.2.5 Mise en charge

Type

Le support de tuyau est soumis à 3 charges différentes :

- L'accélération de la pesanteur g , dirigée selon $-y$, de $9.81m/s^2$
- Une pression interne, appliquée au trou circulaire, $q = 10bar$
- Une force résultante P à maximiser, dirigée selon y .

Symétrie

L'accélération de la pesanteur et la force résultante étant dirigées selon y et la résultante due à la pression étant nulle selon x et y , la résultante de charge selon x l'est également. Il y a donc bien une symétrie de charge.

Implémentation

La modélisation de ces forces se fait grâce à l'outil *load*.

La pression interne et la force résultante sont toutes deux appliquées sur le trou circulaire. Il faut donc appliquer une pression de 10 bar sur chacun des arcs du demi-cercle représentant le trou. Pour la force résultante, seule la moitié de celle-ci doit être appliquée à l'ensemble des arcs étant donné la symétrie. L'accélération de la pesanteur est, elle, exercée sur l'entièreté de la pièce.

14 Détermination de la charge maximale P

Un des désavantages de la méthode des éléments finis est qu'elle ne peut combiner une bonne connaissance des champs de déplacements et de contraintes. Cette connaissance dépend de l'hypothèse faite sur les éléments. Le logiciel *SAMCEF* utilise des éléments cinématiquement admissibles pour lesquels le champ de déplacements est supposé continu et ainsi connu localement. Cependant, ces éléments ne permettent pas de vérifier les équations d'équilibre en tout point [4].

Le champ de contraintes n'est connu que de manière globale, en moyenne sur les éléments. Le *Code 3310* disponible dans les options du *solver* calcule les contraintes équivalentes de Von-Mises en moyenne sur les éléments, il est donc le plus fiable pour l'analyse des champs de contraintes bien qu'il donne un résultat discontinu. Il sera utilisé pour tout les champs de contraintes présentés par la suite.

Les éléments cinématiquement admissibles utilisés lors de l'analyse du comportement sont bidimensionnels. Chaque noeud possédera donc deux degrés de liberté, bloqués ou non par les conditions aux limites.

L'outil *load* de *SAMCEF FIELD* impose la spécification d'une valeur numérique pour la force résultante P . On la fixe à une valeur de 220 kN, de telle sorte que les contraintes équivalentes de Von-Mises soient proches de la limite élastique du matériau. Chaque simulation sera faite avec cette valeur.

La force maximale que l'on peut appliquer à la structure sera calculée selon l'Eq.49

$$\frac{P_{max}}{P_{fixé}} = \frac{\sigma_0^y}{\bar{\sigma}_{VM,max}} \rightarrow P_{max} = \frac{250}{\bar{\sigma}_{VM,max}} \times 220 \quad [kN]. \quad (49)$$

Il faudra donc pour chaque maillage déterminer la contrainte maximum.

14.1 Maillage grossier

Une analyse globale du problème est nécessaire afin de se faire une idée du comportement général de la pièce lors de la mise en charge et ainsi sélectionner les endroits où l'on raffinerait le maillage. On définit pour cela des maillages grossiers, pour les types d'éléments T3, T6, Q4 et Q8.

La pièce n'est donc définie que par un seul domaine et la seule contrainte appliquée aux maillages est une longueur de maille de 50 mm sur le contour du support¹ afin d'obtenir un maillage à peu près régulier dans le but de pouvoir le comparer aux maillages suivants.

La qualité des maillages obtenus ne sera pas discutée dans cette section étant donné que ceux-ci servent à déterminer le type de sous-domaines à définir lors d'un maillage moins grossier. Ils ne seront pas représentés explicitement.

14.1.1 Éléments triangulaires linéaires T3

Les éléments triangulaires linéaires ont des fonctions de forme affines. C'est-à-dire que les déplacements sont supposés linéaires, comme à l'Eq.50 [4] :

$$\begin{cases} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \end{cases} \quad (50)$$

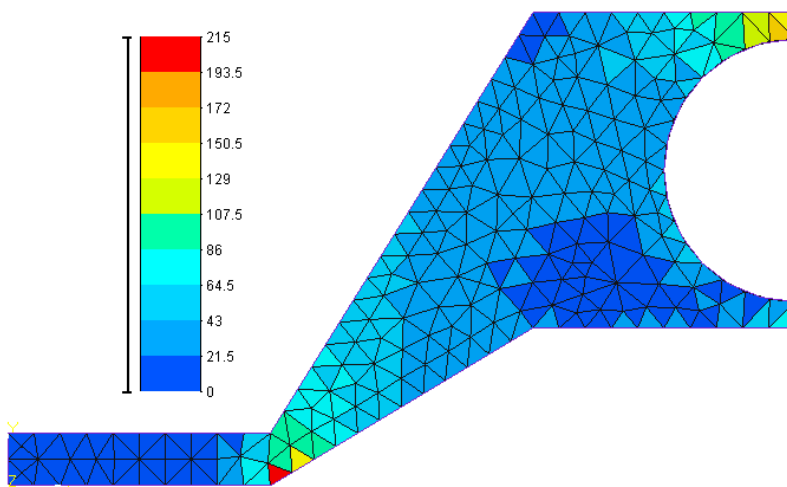
1. à l'aide de l'outil *Length*.

Ces éléments sont composés de 3 noeuds et leurs arêtes sont rectilignes, ils sont alors facilement adaptables à toutes les géométries planes. Ils ne pourront cependant qu'approximer des surfaces courbes.

Maillage

Le maillage est constitué de 225 noeuds, constituant 357 éléments, et 424 degrés de liberté² pour un volume total de $12.823 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Il surestime donc légèrement le volume réel, qui est de $12.804 \times 10^6 \text{ mm}^3$.³ Cette surestimation est due à la présence de la courbe représentant le trou qui est approximée par des segments de droite.

Résultats



La contrainte maximum se situe en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 214.56 \text{ MPa}$. La force maximale à appliquer à la structure pour ce maillage est $P_{max} = 256.33 \text{ kN}$.

FIGURE 29 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.1.2 Éléments triangulaires quadratiques T6

Les éléments triangulaires quadratiques ont des fonctions de formes quadratiques. Les déplacements sont supposés suivre un polynôme du second degré complet, comme celui de l'Eq.51 [4]

$$\begin{cases} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \end{cases} \quad (51)$$

Ces éléments sont composés de 6 noeuds, dont 3 sont situés au milieu de leurs arêtes. Ils peuvent donc s'incurver et sont facilement adaptables à des surfaces courbes, à l'inverse des éléments linéaires.

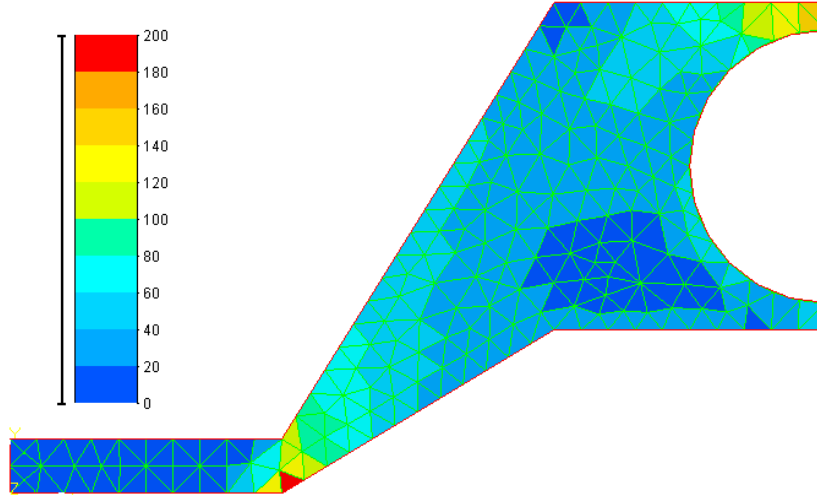
2. Le nombre de degrés de libertés sera systématiquement calculé comme suit : nombre de noeuds \times 2 - nombre de noeuds à l'encastrement \times 2 - nombre de noeuds situés sur l'axe de symétrie.

3. Ce volume correspond au demi-volume de l'entièreté de la pièce, du fait de l'utilisation de la symétrie.

Maillage

Le maillage est constitué de 806 noeuds, soit 357 éléments, et 1564 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 mm^3$. Le semi-volume réel est correctement représenté par ce maillage.

Résultats



La contrainte maximum se situe à nouveau en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 199.74 MPa$. La force maximale à appliquer à la structure pour ce maillage est $P_{max} = 275.36 kN$.

FIGURE 30 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.1.3 Éléments quadrilatères bilinéaires Q4

Les déplacements associés aux éléments Q4 sont supposés bilinéaires. C'est-à-dire qu'ils suivent un polynôme du second degré incomplet, tel que celui de l'Eq.52[4].

$$\begin{cases} u = (C_1 + C_2x)(C_3 + C_4y) \\ v = (D_1 + D_2x)(D_3 + D_4y) \end{cases} \quad (52)$$

Les termes en x^2 et y^2 sont les termes manquants pour compléter ce polynôme du second degré.

Ces éléments sont composés de 4 noeuds, et leurs arêtes sont rectilignes. Le maillage complet d'une géométrie à l'aide de ces éléments est alors presque impossible, ils seront souvent accompagnés d'éléments triangulaires. En effet, *SAMCEF* propose uniquement une combinaison d'éléments triangulaires et quadrilatères lors de l'utilisation d'éléments Q4 ou Q8.

Maillage

Le maillage est constitué de 213 noeuds, soit 172 éléments dont 161 sont des quadrilatères ; les 11 autres étant des triangles. Il jouit de 400 degrés de liberté pour un volume total de $12.823 \times 10^6 mm^3$. Il surestime donc légèrement le volume réel, qui est de $12.804 \times 10^6 mm^3$. Cette surestimation est, à nouveau, due à la présence du trou circulaire, approximée par des segments de droite.

Résultats

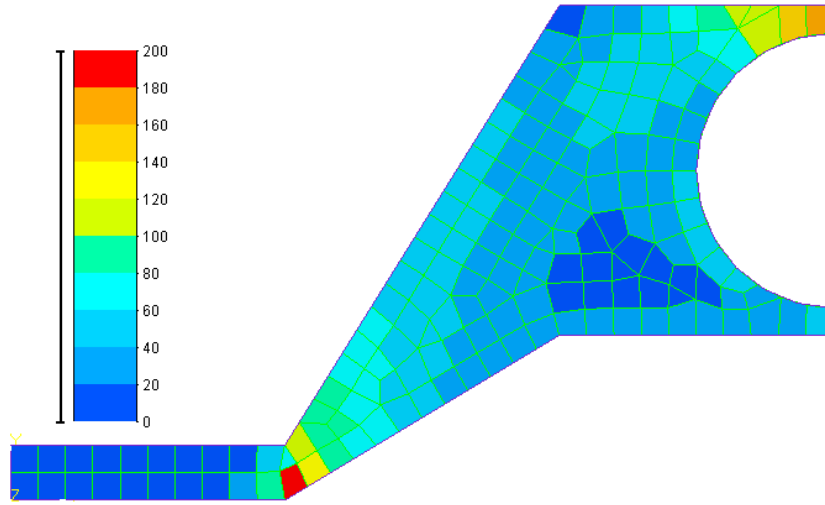


FIGURE 31 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

La contrainte maximum, située en bout d'encastrement, vaut

$\bar{\sigma}_{VM,max} = 171.54 \text{ MPa}$. La force maximale à appliquer à la structure pour ce maillage est $P_{max} = 320.62 \text{ kN}$.

14.1.4 Éléments quadrilatères biquadratiques Q8

Les déplacements associés aux éléments Q8 sont supposés biquadratiques. C'est-à-dire qu'ils suivent un polynôme du troisième degré incomplet, tel que celui de l'Eq.53[4].

$$\begin{cases} u &= (C_1 + C_2x + C_3x^2)(C_4 + C_5y + C_6y^2) \\ v &= (D_1 + D_2x + D_3x^2)(D_4 + D_5y + D_6y^2) \end{cases} \quad (53)$$

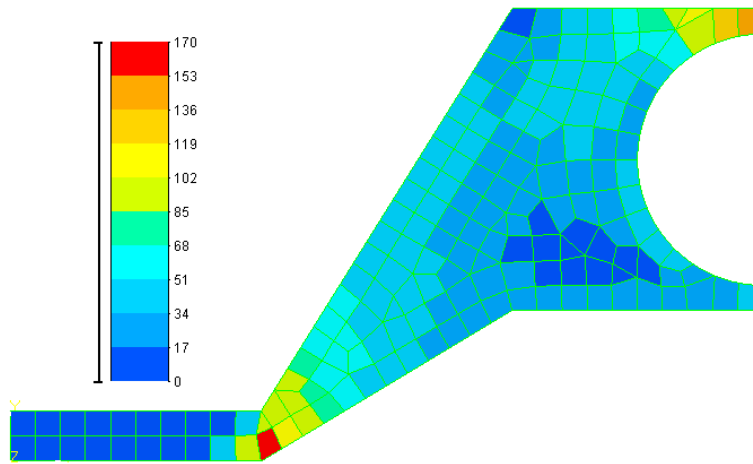
Les termes en x^3 et y^3 sont les termes manquants pour compléter ce polynôme du troisième degré.

Ces éléments sont composés de 8 noeuds, dont 4 sont au milieu de leurs arêtes, ce qui leur permet d'épouser correctement des surfaces courbes.

Maillage

Le maillage est constitué de 597 noeuds, soit 172 éléments, à nouveau réparti en 161 quadrilatères et 11 triangles, et 1146 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Le semi-volume réel est correctement représenté par ce maillage.

Résultats



La contrainte maximum, située en bout d'encastrement, vaut

$\bar{\sigma}_{VM,max} = 160.86 MPa$. La force maximale à appliquer à la structure pour ce maillage est $P_{max} = 341.91 kN$.

FIGURE 32 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.1.5 Discussion des résultats

Types d'éléments

L'utilisation des éléments triangulaires et quadrilatères doit être adaptée au but recherché par le maillage. Lorsque celui-ci est d'obtenir une bonne précision sur les champs de déplacements et de contraintes, les éléments quadrilatères seront préférés. En effet, vu l'hypothèse de déplacements bilinéaires/biquadratiques, les gradients des contraintes sont représentés de manière plus continue que pour les éléments triangulaires[5].

Lorsque la géométrie à mailler est complexe, les éléments triangulaires seront préférés vu leur bonne adaptation à toutes les géométries.

L'objectif de cette étude étant la maximisation de la force résultante P , l'utilisation de quadrans sera préférée.

Ordre des éléments

Les éléments (bi)quadratiques apportent une meilleure précision lors de la représentation des gradients de contraintes étant donné la présence des noeuds au milieu des arêtes. En effet, ceux-ci permettent une évolution des contraintes à l'intérieur de l'élément même.

De plus, comme évoqué précédemment, les éléments T6 et Q8 s'adaptent à des surfaces courbes. Idéalement, ils seront donc toujours préférés aux éléments T3 et Q4.

Performance

Outre leurs fonctions de forme, les différents types d'éléments peuvent être comparés selon le temps de calcul qu'ils engendrent, l'espace disque utilisé ainsi que sur la convergence de l'énergie potentielle totale calculée à partir de ceux-ci.

Les 6 graphiques ci-dessous présentent l'évolution de ces paramètres en fonction du nombre de degrés de liberté et du nombre d'éléments pour les quatre types d'éléments mis en jeu. Le raffinement étant le facteur dominant dans la variation de ces paramètres, l'étude de leur variation se fera pour des maillages sans sous-domaines mais de plus en plus raffinés.⁴

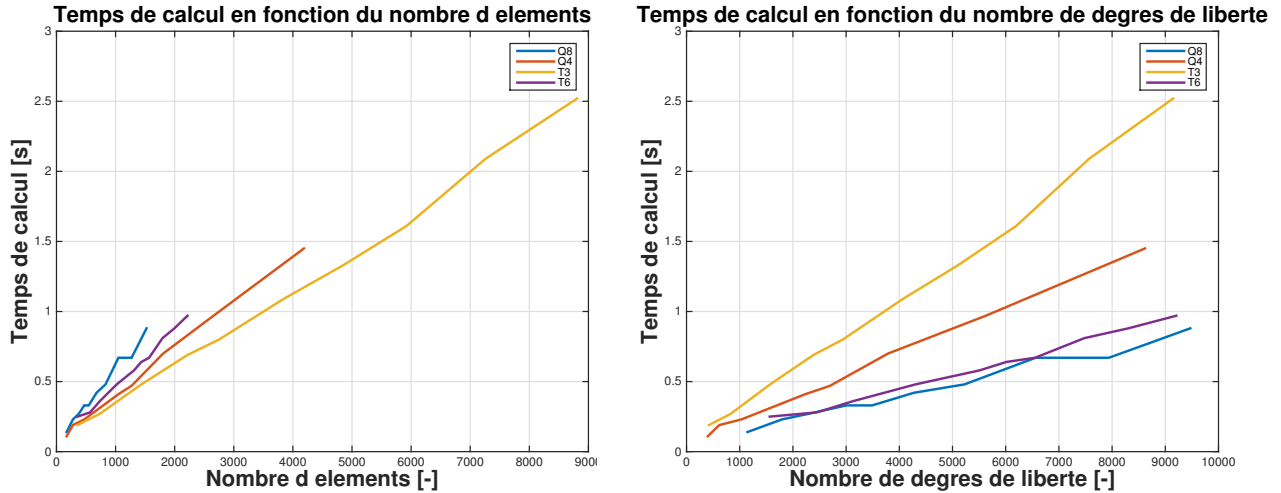


FIGURE 33 – Evolution du temps de calcul.

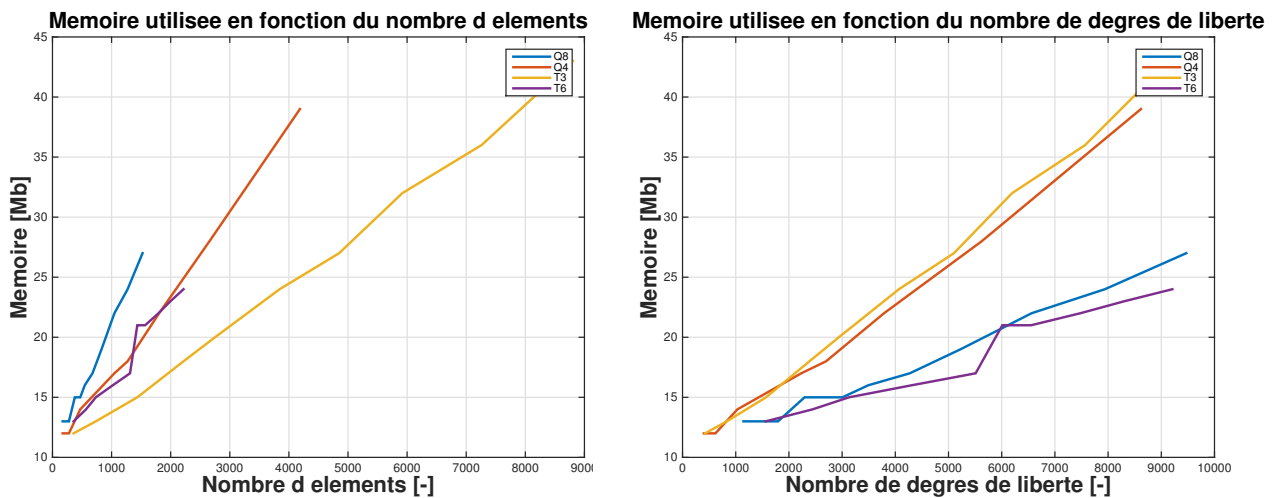


FIGURE 34 – Evolution de la mémoire utilisée.

Les relations liant la mémoire utilisée et le temps de calcul aux nombres de degrés de liberté et nombre d'éléments suivent le même schéma. Elles ont toutes deux une allure linéaire. On observe cependant une inversion des performances des éléments selon que l'on considère leur nombre ou le nombre de degrés de libertés.

Lorsque l'on analyse les paramètres en fonction du nombre d'éléments, les éléments T3 sont

4. La longueur moyenne de mailles a été graduellement diminuée.

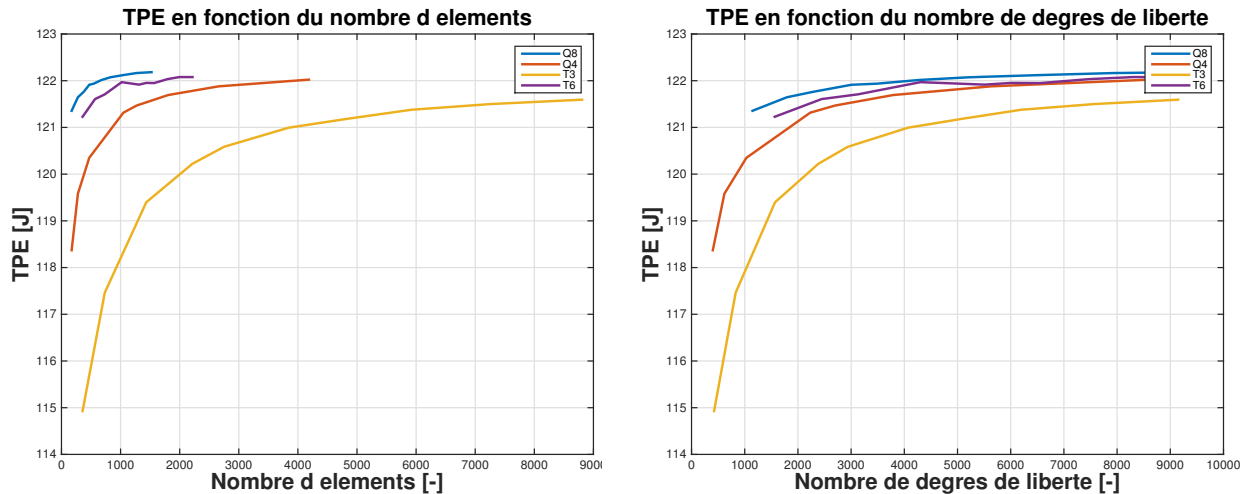


FIGURE 35 – Evolution de l'énergie potentielle totale.

logiquement les plus performants. En effet, ces éléments ont un plus petit nombre de noeuds et des fonctions de formes moins élaborées, ils requièrent donc moins de puissance numérique.

Si l'analyse est faite en fonction du nombre de degrés de libertés, ce sont les éléments Q8 qui sont à privilégier. Les 16 d.d.l. les composant, lorsque ceux-ci ne sont pas bloqués par des conditions aux limites, ils sont liés par leur fonction de forme. Ce lien facilite donc le travail du solveur.

L'information la plus pertinente à retenir pour l'analyse des résultats est le nombre de degrés de liberté. Les éléments cinématiquement admissibles amenant à une connaissance locale du champ de déplacements et seulement globale du champ de contraintes, la solution numérique est sensiblement améliorée lorsque le nombre de d.d.l. augmente et non le nombre d'éléments.⁵

Il ressort de cette analyse que les éléments Q8 devraient être adoptés pour obtenir la meilleure précision possible. Néanmoins, la licence ne permettant pas d'étudier des maillages de plus de 5000 noeuds, on étudiera les résultats grâce aux éléments Q4 lors de l'optimisation.

Convergence

La méthode des éléments finis étant une méthode de discrétisation, il faut s'assurer de sa bonne convergence.

L'énergie potentielle totale (TPE) est un paramètre scalaire global. Il est possible de prouver qu'elle converge monotonément vers la valeur réelle lorsque le maillage est de plus en plus raffiné [3]. La TPE est donc un outil d'analyse de la convergence globale de la solution discrète.

On observe à la Fig.35 que la TPE calculée en raffinant de plus en plus le maillage, c'est à dire lorsque le nombre d'éléments et de degrés de liberté augmente, converge bien vers une valeur stationnaire, et ce pour les quatre types d'éléments. Le modèle mathématique utilisé est bien représenté par le solveur [4].

5. La précision des déplacements est liée aux degrés de liberté tandis que la précision des contraintes, qui sont calculées aux points de Gauss, est liée au nombre d'éléments.

On remarque également que la TPE varie selon le type d'éléments, elle est plus grande pour les éléments quadrilatères et du second ordre. Cette différence est due au type de mise en charge appliquée à la structure qui la sollicite principalement en flexion, comme on a pu le constater lors de l'étude analytique.

Champ de contraintes

L'analyse du champ de contraintes pour des maillages grossiers ne sera que succincte. On observe pour tout les types d'éléments deux gradients de contraintes importants. Le premier se situe en bout d'encastrement et le second au dessus du cylindre. Les sections suivantes auront, entre autre, pour but de mieux représenter ces gradients.

Les champs de contraintes observés sont fortement discontinus. Cela est dû à l'utilisation du *Code 3310* qui représente la contrainte moyenne sur les éléments. Un champ continu peut être obtenu en considérant des contraintes nodales.

Pour des éléments cinématiquement admissibles, les contraintes sont calculées aux points de Gauss, une extrapolation de ces contraintes aux noeuds est donc nécessaire. La continuité du champ est ensuite obtenue en définissant la contrainte nodale comme moyenne des contraintes extrapolées de tous les éléments entourant le noeud [4]. Cependant, illustrer un champ continu peut avoir pour effet de "lisser" certaines discontinuités, telles des singularités. Ainsi, l'utilisation du *Code 3310* avec l'outil *mean by element* est justifiée et permet de déceler ces éventuelles singularités. A première vue, il semble qu'une singularité en bout d'encastrement soit présente. Le raffinement avec sous-domaines permettra de le confirmer.

14.2 Maillage avec sous-domaines simples

Afin d'obtenir un maillage d'une qualité supérieure, nous allons diviser l'unique face du support précédemment maillée en différents sous-domaines simples permettant une meilleure qualité du maillage. Pour améliorer l'étude aux alentours des mailles dont le gradient de contraintes est le plus important, nous avons isolé les zones concernées dans de plus petits sous-domaines. Ces zones sont situées au bout de l'encastrement ainsi qu'au dessus du trou circulaire.

Les nouveaux sous-domaines créés seront adaptés afin de convenir au maximum au type de maillage utilisé. En effet, des triangles réguliers seront plus facilement obtenus dans un sous-domaine en forme de triangle et composé d'angles droits. De même, des quadrilatères réguliers seront maillés aisément dans un sous-domaine rectangulaire et composé d'angles droits.

Afin d'évaluer la qualité du maillage, nous allons utiliser les outils fournis par le logiciel. Ceux-ci sont repris ci-dessous :

- Le *Jacobian's Ratio* : Il représente le rapport entre les jacobiens les plus élevés et les plus faibles. Sa valeur idéale est de 1.
- L'*Aspect* : Il donne une représentation du rapport entre la longueur et la largeur d'un élément. Sa valeur idéale est de 1.

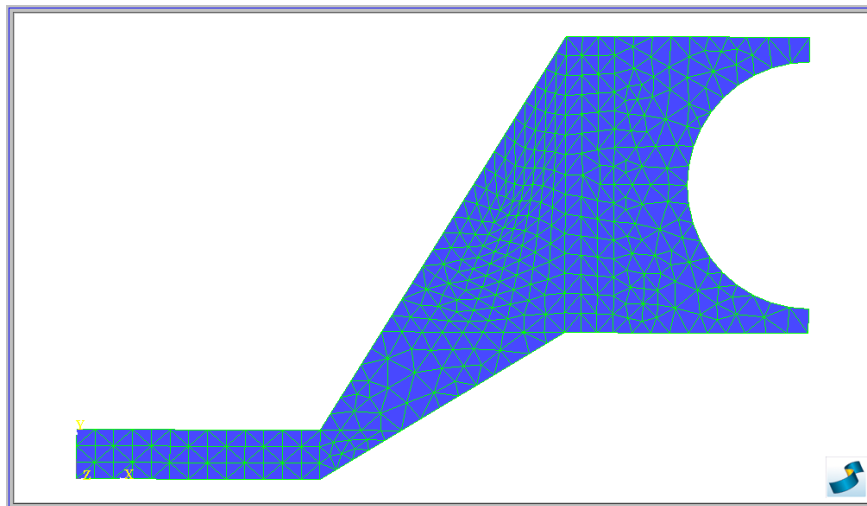
- Le *Skew* : Il est défini comme l'angle minimal formé par les médianes de l'élément et les côtés respectifs. Sa valeur idéale est alors 90° .
- Le *Taper* : Si l'on divise le quadrilatères selon chacune de ses diagonales, il représente, pour les quadrilatères uniquement, la plus grande valeur du rapport entre la différence entre l'aire d'un quart de surface délimité par les diagonales et l'aire moyenne des quarts de surface, et cette aire moyenne. Sa valeur idéale est de 0.
- Le *Corner Angle* est la différence entre l'angle compris entre deux côtés de l'élément et l'angle idéal, à savoir 60° pour les triangles et 90° pour les quadrilatères. Sa valeur idéale est de 0.

L'analyse de la qualité d'un maillage ne se fait pas que selon la géométrie mais aussi sur la convergence locale du champ de contraintes. En effet, un maillage ne permettra pas de représenter correctement le comportement d'une structure réelle lorsque qu'il ne permet pas la convergence locale. Cette dernière nécessite que la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale des contraintes extrapolées à partir des points de Gauss pour un même noeud tende vers 0. Cette différence est illustrée grâce à l'outil *Gap by Node*. En raffinant de plus en plus le maillage, celle-ci doit tendre vers 0.

14.2.1 Éléments triangulaires linéaires T3

Le type de mailles étant principalement triangulaire, nous allons diviser la géométrie en divers sous-domaines rectangulaires ou triangulaires dans la mesure du possible. Nous avons isolé les mailles de gradients de contraintes importants dans des domaines les plus triangulaires possible. Afin d'améliorer la précision des résultats, nous avons imposé une longueur moyenne plus faible que pour le maillage grossier. Celle-ci est définie à 40mm.

Maillage



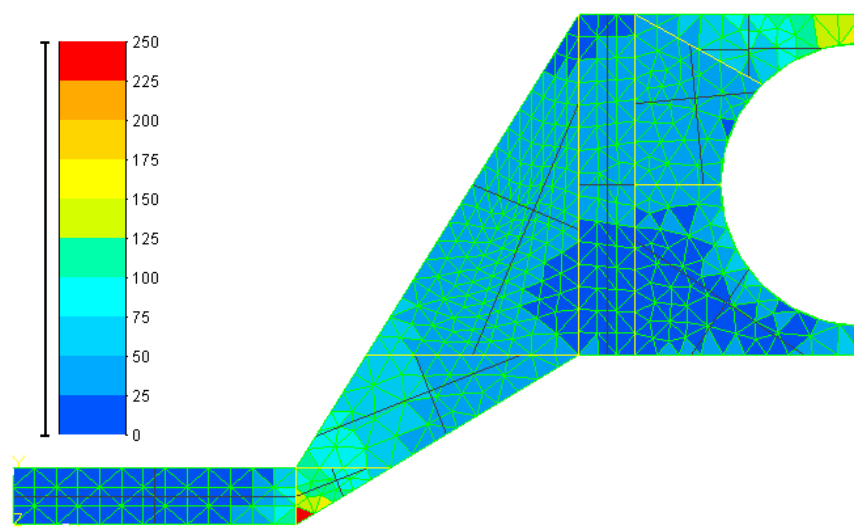
Ce maillage est constitué de 417 noeuds, soit 717 éléments, et 802 degrés de liberté pour un volume total de $12.816 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Le semi-volume réel est légèrement sur-évalué par ce maillage.

FIGURE 36 – Maillage avec sous-domaines d'éléments T3.

Dans le but de contrôler la qualité du maillage, nous devons vérifier que les triangles obtenus ne sont pas trop "aplatis". C'est à dire que l'un de leurs côtés n'est pas trop long par rapport aux deux autres. Cela se caractériserait par la présence de triangles obtusangles. Cette donnée est obtenue à l'aide de l'outil *Corner Angle* défini ci-dessus. On peut voir que 73% des éléments ont une valeur inférieure à 30° .

La recherche du *Jacobian's Ratio* est ici inutile puisqu'il s'agit de triangles linéaires. Par contre, l'analyse de l'*Aspect* est intéressante. On y remarque que 79% des éléments ont une valeur inférieure à 1,5. La valeur maximale est de 2,26. Le dernier indicateur intéressant à analyser est le *Skew*. Il apparaît que plus de 22% ont une valeur comprise entre 75° et 90° .

Résultats.



La contrainte maximale est obtenue en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 245.27$ MPa. La force maximale à exercer avant la plasticité vaut donc $P_{Max} = 224.24$ kN. Un autre indicateur de la qualité du raffinement de notre maillage est la valeur du *Gap by Node* maximal dans les zones de gradient de contraintes élevé.

FIGURE 37 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

Sa valeur maximale se situe en bout d'encastrement, où elle vaut 184 MPa. Au dessus du trou circulaire, elle est inférieure à 74 MPa.

Ces valeurs seront comparées à celles obtenues pour le maillage raffiné afin d'en déduire la qualité relative.

14.2.2 Éléments triangulaires quadratiques T6

Les sous-domaines utilisés dans cette section demeurent semblables à ceux utilisés pour les éléments triangulaires linéaires T3. La longueur moyenne des mailles est également imposée à 40mm.

Maillage

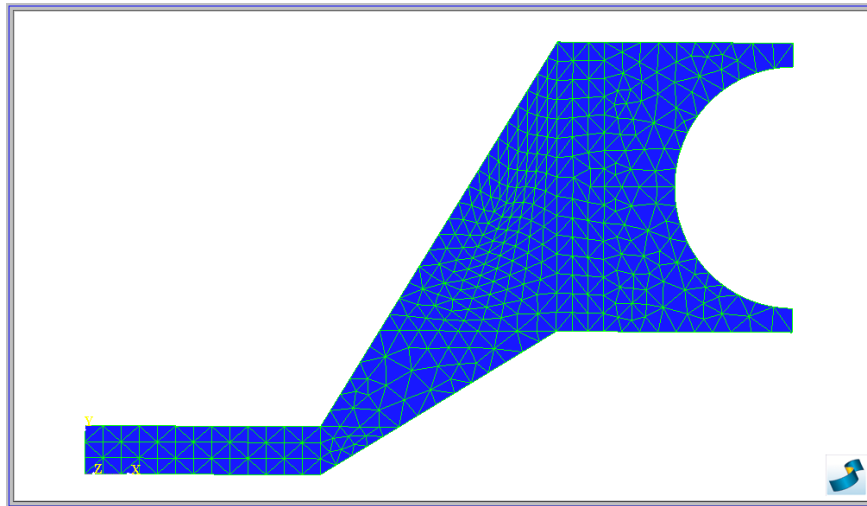


FIGURE 38 – Maillage avec sous-domaines d'éléments T6.

Ce maillage est constitué de 1550 noeuds, soit 717 éléments, et 3040 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 mm^3$. Le semi-volume réel est bien représenté par ce maillage.

Si on analyse plus avant notre maillage, il est aisé de remarquer que le *Jacobian's Ratio* n'est plus constant sur l'ensemble des éléments mais est légèrement inférieur à 1 pour les éléments situés sur le pourtour du trou circulaire comme le montre la Fig. 39.

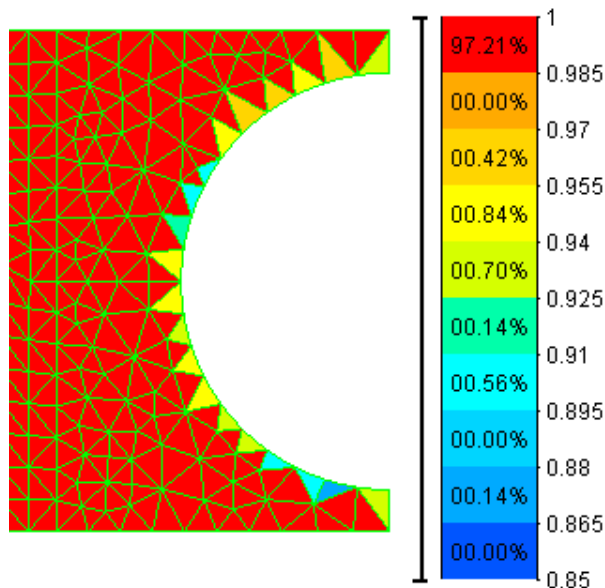
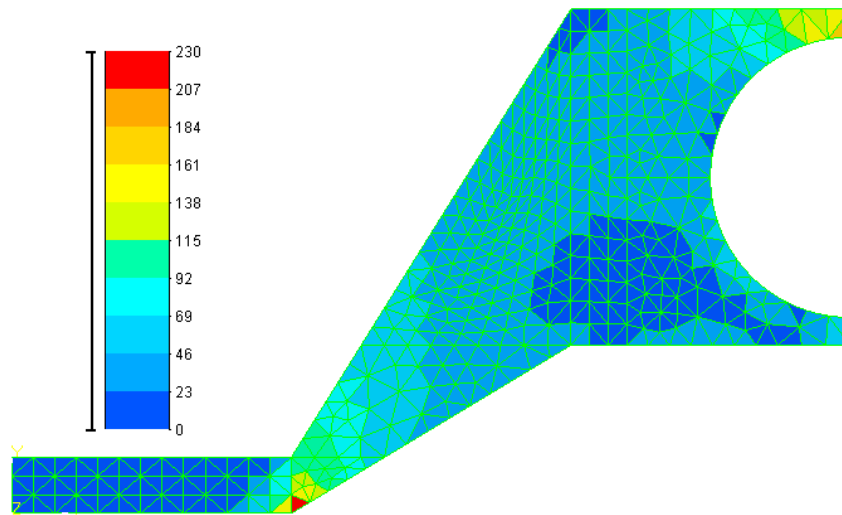


FIGURE 39 – Valeur du *Jacobian's Ratio* le long du trou circulaire [-].

En effet, les sous-domaines ne possédant pas de limites courbes, les seuls endroits où les éléments auront des arêtes courbes sont situés le long du cercle. Toutefois, 97% des éléments conservent un rapport idéal. Les valeurs obtenues à l'aide des outils *Aspect*, *Corner Angle* et *Skew* demeurent totalement semblables à celles obtenues pour les triangles linéaires T3. Cela témoigne du fait que seules les mailles autour du trou ont changé mais que le maillage reste majoritairement semblable au précédent.

L'utilisation de l'outil *Taper* n'est toujours pas pertinent.

Résultats



La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 226.17$ MPa. La force maximale à exercer avant la plasticité vaut donc $P_{Max} = 243.17$ kN. La valeur du *Gap by Node* en bout d'encastrement vaut 157 MPa et est inférieure à 31 MPa au dessus du trou.

FIGURE 40 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.2.3 Éléments quadrilatères linéaires Q4

Pour les éléments quadrilatères, deux techniques de maillage sont utilisées. Premièrement, *SAM-CEF FIELD* propose plusieurs procédés de maillage tel que le *Mapping LUI*. Ce procédé sera utilisé dans les parties où il est difficile d'obtenir des sous-domaines rectangulaires, en d'autres termes la partie montante de la pièce ainsi que le pourtour du cercle. En vue d'obtenir un maillage régulier, celui-ci a été inscrit dans un carré divisé en 4 sous-domaines. Le reste de la pièce a été divisée en sous-domaines rectangulaires afin d'obtenir une bonne qualité de maillage.

Un raffinement par rapport au maillage grossier a été obtenu en imposant un nombre de divisions aux arêtes des sous-domaines.

Maillage

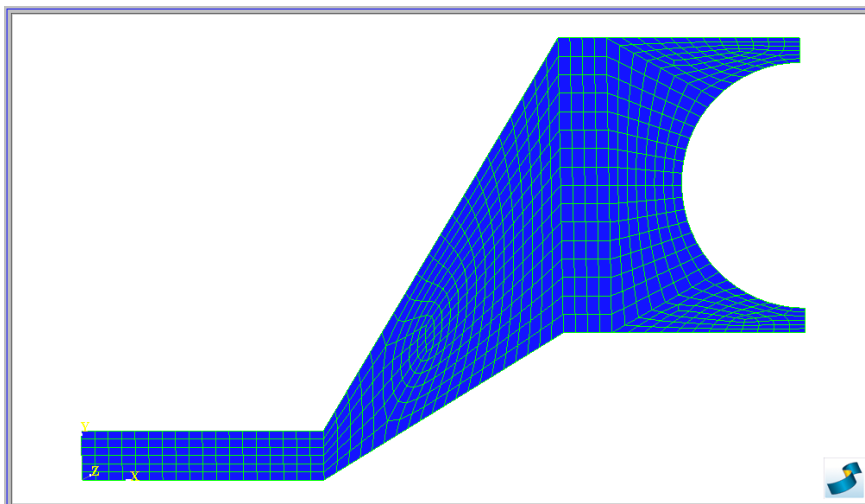


FIGURE 41 – Maillage avec sous-domaines d'éléments Q4.

Ce maillage est constitué de 838 noeuds, soit 758 éléments, et 1624 degrés de liberté pour un volume total de $12.809 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Le semi-volume réel est légèrement sur-évalué par ce maillage.

L'analyse géométrique de la qualité du maillage se fera à l'aide des outils *Jacobian's ratio*, *Aspect* et *Taper*.

Rappelons qu'il est en général plus compliqué d'obtenir de bonnes propriétés géométriques pour les quadrilatères que pour les triangles. La qualité de ce maillage est cependant tout à fait correcte ; 79% des éléments ont un *Jacobian's ratio* supérieur à 0.84, 83% ont une valeur d'aspect inférieur à 2 et 86 % ont une valeur de *Taper* inférieur à 0.11. Néanmoins, les valeurs éloignées des valeurs idéales sont, pour la plupart, obtenues aux zones de gradients de concentrations important. Un raffinement du maillage dans ces zones sera nécessaire.

Résultats

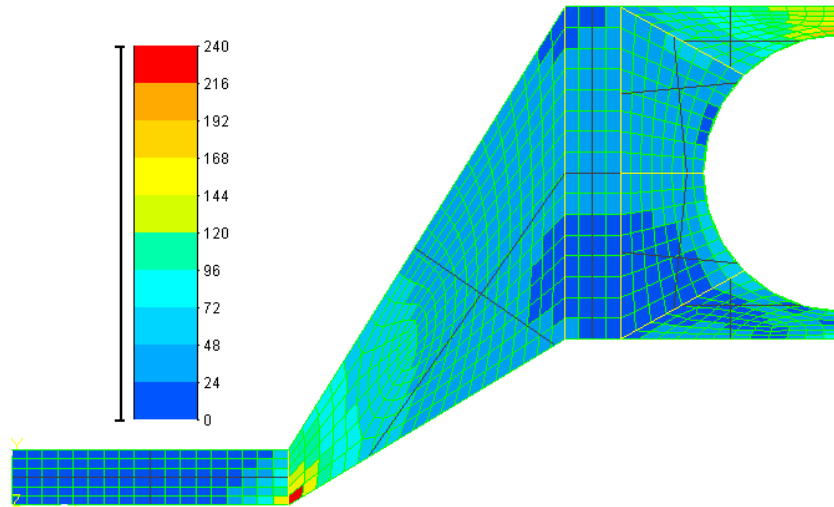


FIGURE 42 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.2.4 Éléments quadrilatères quadratiques Q8

Les sous-domaines utilisés pour ces éléments ainsi que les divisions imposées aux arêtes sont les mêmes que pour les éléments Q4.

Maillage.

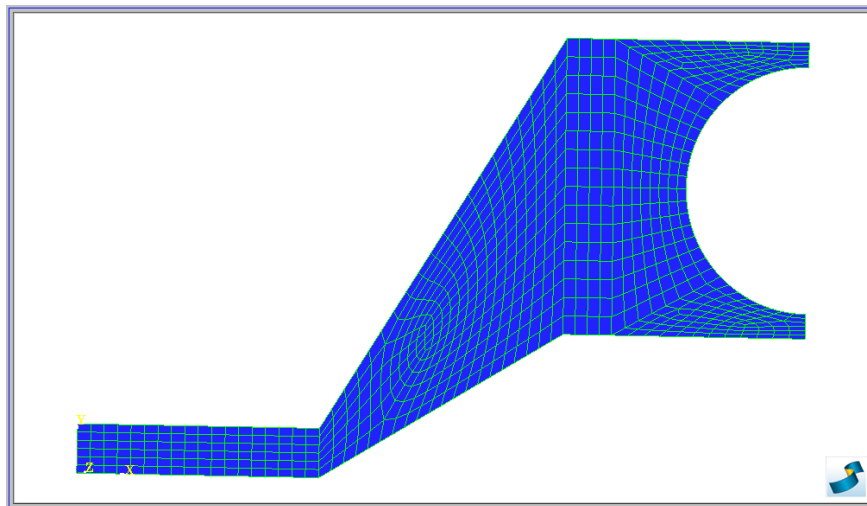


FIGURE 43 – Maillage avec sous-domaines d'éléments Q8.

La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 236.82$ MPa. La force maximale à exercer avant la plasticité vaut donc $P_{Max} = 232.24$ kN.

La valeur du *Gap by Node* en bout d'encastrement vaut 127.56 MPa et est inférieure à 51 MPa au dessus du trou.

Ce maillage est constitué de 2433 noeuds, soit 758 éléments, et 4766 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 mm^3$. Le semi-volume réel est bien représenté par ce maillage.

Les valeurs obtenues à l'aide des outils *Jacobian's Ratio Aspect* et *Taper* demeurent totalement semblables à celles obtenues pour les quadrilatères bilinéaires Q4.

Résultats

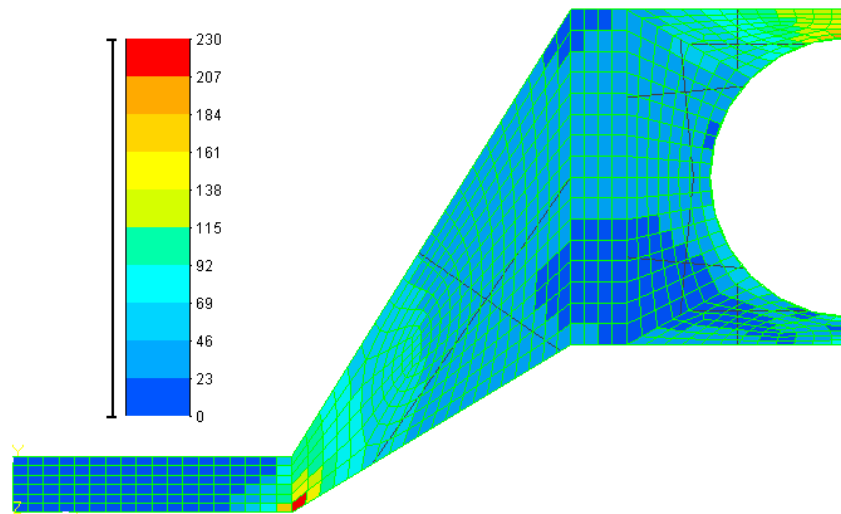


FIGURE 44 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

14.3 Maillage raffiné

14.3.1 Éléments triangulaires linéaires T3

Afin de raffiner de façon optimale, nous avons tout d'abord regardé les endroits où se situaient les gradients de contraintes les plus importants et nous y avons augmenté significativement le nombre de mailles. Dans le but d'obtenir une meilleure qualité de maillage, nous avons ensuite amélioré les sous-domaines préexistants dans lesquels les triangles semblaient majoritairement obtusangles. Pour cela, nous avons créé des sous-domaines les plus carrés possible. Ainsi, les triangles formés seront réguliers. Les zones présentant un gradient de contraintes peu important ont, quant à elles, été maillées plus grossièrement.

Maillage

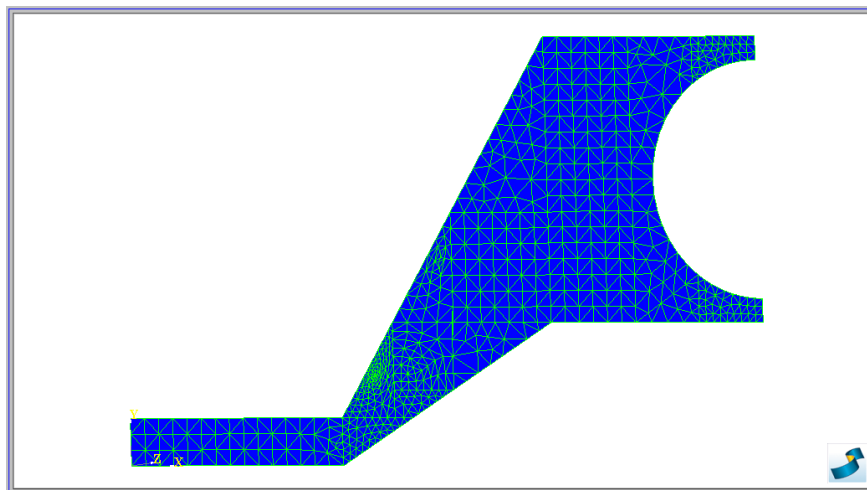


FIGURE 45 – Maillage raffiné avec éléments T3.

La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 222.59$ MPa. La force maximale à exercer avant la plasticité vaut donc $P_{Max} = 247.09$ kN.

La valeur du *Gap by Node* en bout d'encastrement vaut 108.4 MPa et est inférieure à 43 MPa au-dessus du trou.

Ce maillage est constitué de 668 noeuds, soit 1165 éléments, et 1296 degrés de liberté pour un volume total de $12.811 \times 10^6 mm^3$. Le semi-volume réel est à nouveau légèrement sur-évalué par ce maillage.

L'indicateur *Aspect* montre que près de 80% des éléments ont une valeur inférieure à 1.5, ce qui est légèrement mieux que le maillage en sous-domaines simples. Les valeurs obtenues à l'aide de l'outil *Skew* sont légèrement moins bonnes que pour le maillage en sous-domaines simples mais sont bien meilleures aux alentours des gradients de pression importants et en particulier au bout de l'encastrement. Bien que les valeurs obtenues pour l'indicateur *Corner Angle* sont un peu moins optimales que celles trouvées pour le maillage précédent, elles sont également idéales au bout de l'encastrement ainsi qu'au dessus du trou circulaire.

Résultats

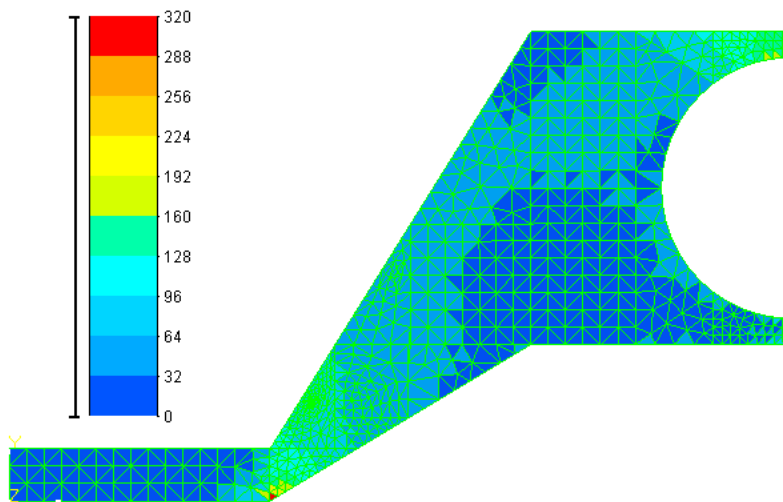


FIGURE 46 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

La valeur maximale du *Gap By Node* est de 240 MPa et se situe en bout d'encastrement tandis que la valeur au dessus du trou est inférieure à 48 MPa.

On remarque qu'en ayant raffiné dans ces deux zones, l'indicateur a bel et bien diminué pour le gradient de contrainte situé au dessus du trou mais a beaucoup augmenté au bout d'encastrement.

La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 315.59 \text{ MPa}$. Cela est supérieur à la limite élastique. Une force de 220 kN provoquerait donc une transition vers la plasticité et la force maximale à exercer pour demeurer dans le domaine élastique vaut $P_{Max} = 174.28 \text{ kN}$.

14.3.2 Éléments triangulaires quadratiques T6

Le maillage utilisé est le même que pour les éléments triangulaires linéaires T3.

Maillage

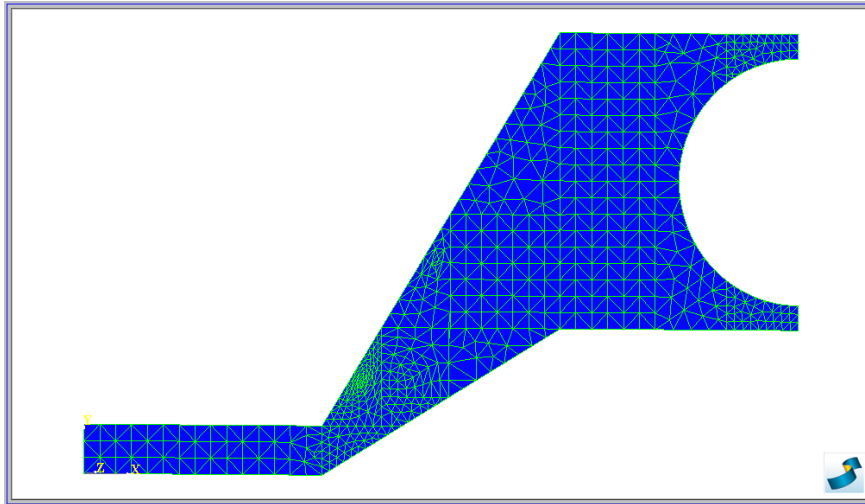


FIGURE 47 – Maillage raffiné avec éléments T6.

Ce maillage est constitué de 2500 noeuds, soit 1165 éléments, et 4924 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Le semi-volume réel est donc bien représenté par ce maillage étant donné la bonne adaptation des éléments à la géométrie circulaire du trou.

A nouveau, pour des éléments triangulaires quadratiques, seuls les éléments possédant une arête courbe généreront des *Jacobian's Ratio* différents de l'unité. Ces éléments ne se situent donc que le long de la courbe du trou circulaire.

Les autres indicateurs de la qualité du maillage donneront des résultats semblables à ceux du maillage triangulaire linéaire T3. Leur analyse n'est donc que peu pertinente.

Résultats

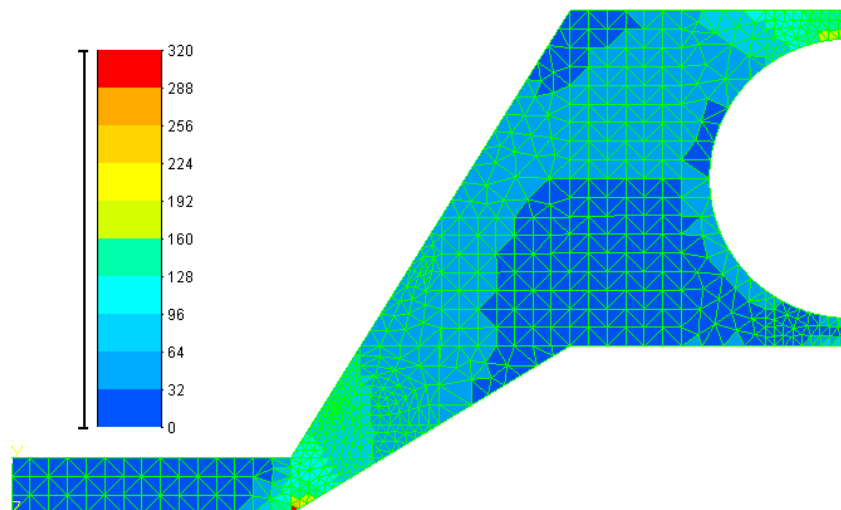


FIGURE 48 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

De plus, au dessus du trou circulaire, elle vaut moins de 43 MPa.

La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 316.19 \text{ MPa}$. Cela est supérieur à la limite élastique. Une force de 220 kN provoquerait donc la plasticité et la force maximale à exercer vaut donc $P_{Max} = 173.95 \text{ kN}$. La valeur de l'indicateur *Gap by Node* est toujours maximale au bout de l'encastrement et est de 218 MPa.

14.3.3 Éléments quadrilatères linéaires Q4

Les éléments Q4 sont assez raides en flexion, leur valeur d'*Aspect* doivent dès lors se trouver proche de la valeur idéale de 1. On prêtera donc une attention particulière à cet aspect ratio lors du raffinement aux zones de gradient de contraintes importants.

Pour effectuer ce raffinement, nous avons défini de nouveaux sous-domaines dans ces zones afin de permettre une augmentation importante du nombre de mailles.

Les zones où le gradient est moindre ont été maillées plus grossièrement. Il a fallu pour cela utiliser l'outil *distribution*, pour ne pas obtenir de saut de dimensions trop important entre deux mailles voisines, phénomène assez mal géré par le solveur.

Maillage

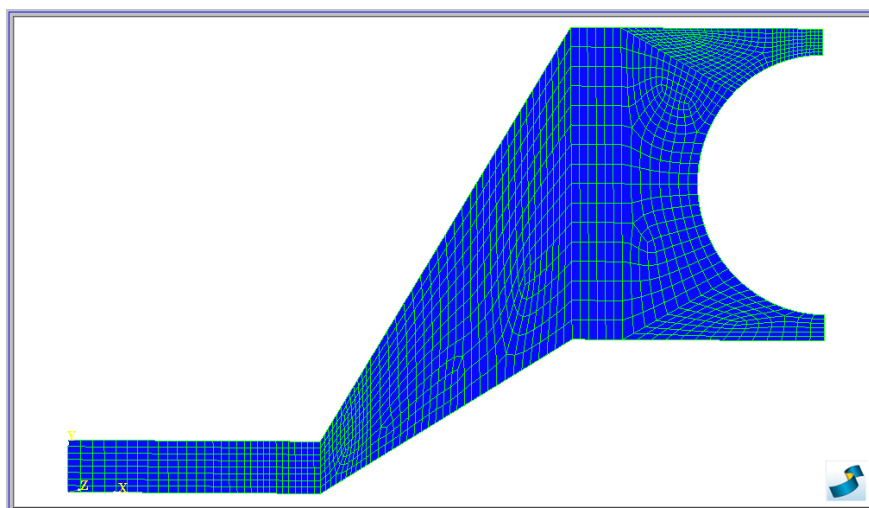


FIGURE 49 – Maillage raffiné avec éléments Q4.

Ce maillage est constitué de 1664 noeuds, soit 1528 éléments, et 1586 degrés de liberté pour un volume total de $12.807 \times 10^6 mm^3$. Le semi-volume réel est à nouveau légèrement sur-évalué par ce maillage.

En vérifiant l'entière du maillage, l'ensemble des paramètres géométriques est meilleur que ceux obtenus pour les sous-domaines simples : 88% des éléments ont un *Jacobian's Ratio* supérieur à 0.833, 82% ont un aspect ratio inférieur à 1.95 et 92% ont une valeur de *Taper* inférieure à 0.11.

L'aspect ratio aux zones de gradients de contraintes élevés étant important, il est représenté à la Fig. 50 respectivement pour le bout de l'encastrement et pour le dessus du trou.

On observe que la qualité du maillage dans ces zones a été améliorée par rapport au maillage avec sous-domaines simples où l'aspect ratio était catastrophique.

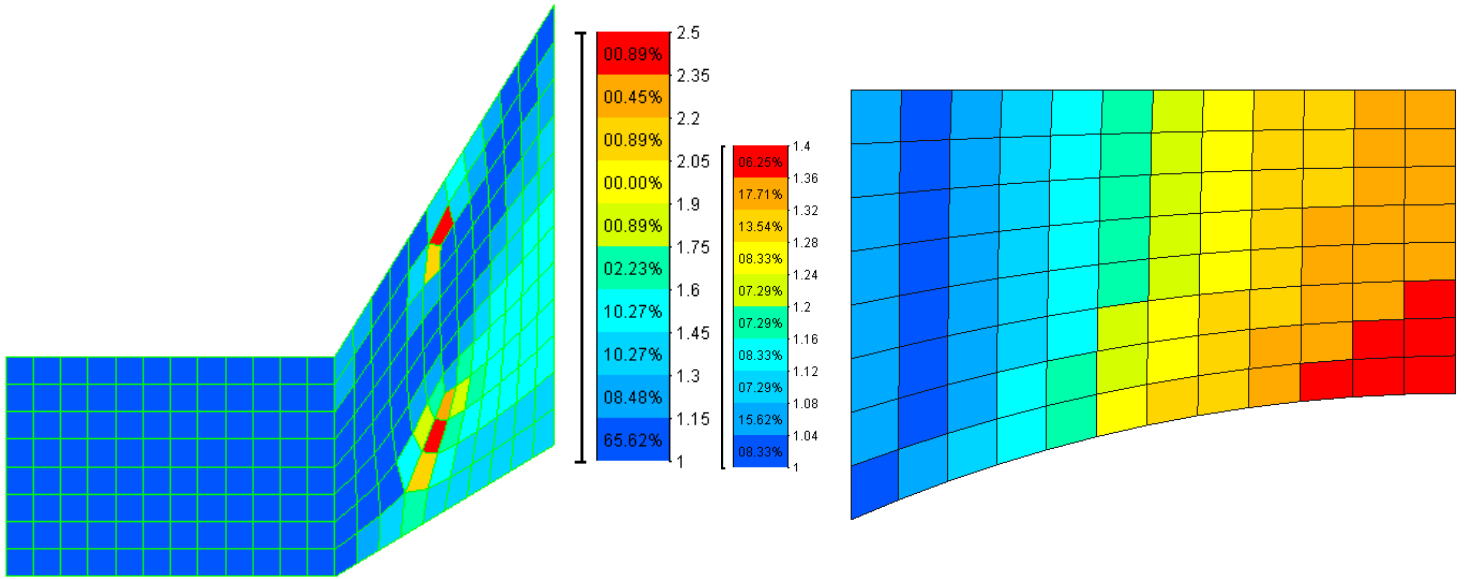


FIGURE 50 – Aspect ratio aux gradient de contraintes importants [-].

Résultats.

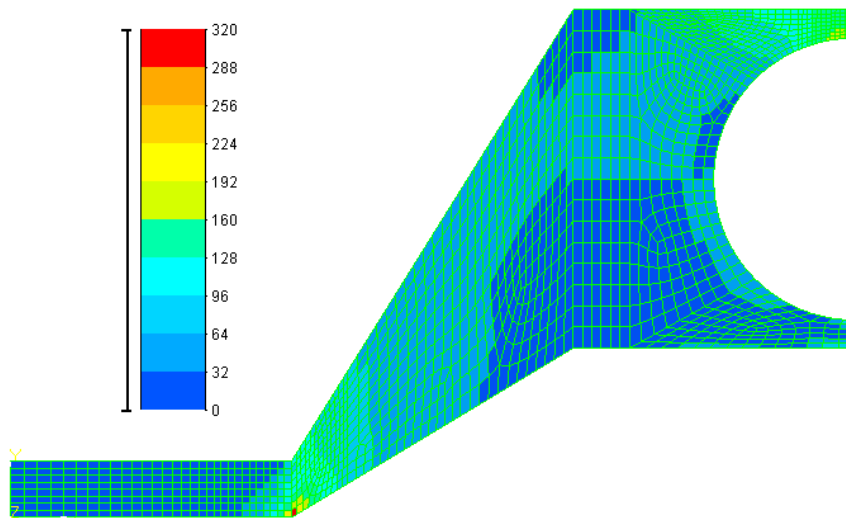


FIGURE 51 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

De plus, au dessus du trou circulaire, elle vaut moins de 34 MPa.

La contrainte maximale se trouve toujours en bout d'encastrement et vaut $\bar{\sigma}_{VM,max} = 316.87$ MPa. Cela est supérieur à la limite élastique. Une force de 220 kN provoquerait donc la plasticité et la force maximale à exercer vaut donc $P_{Max} = 173.57$ kN. La valeur de l'indicateur *Gap By Node* est toujours maximale au bout de l'encastrement et est de 169.92 MPa.

14.3.4 Éléments quadrilatères quadratiques Q8

Les sous-domaines, divisions et distributions utilisés sont les mêmes que pour les éléments Q4.

Maillage

Les paramètres géométriques sont identiques à ceux obtenus pour les éléments Q4.

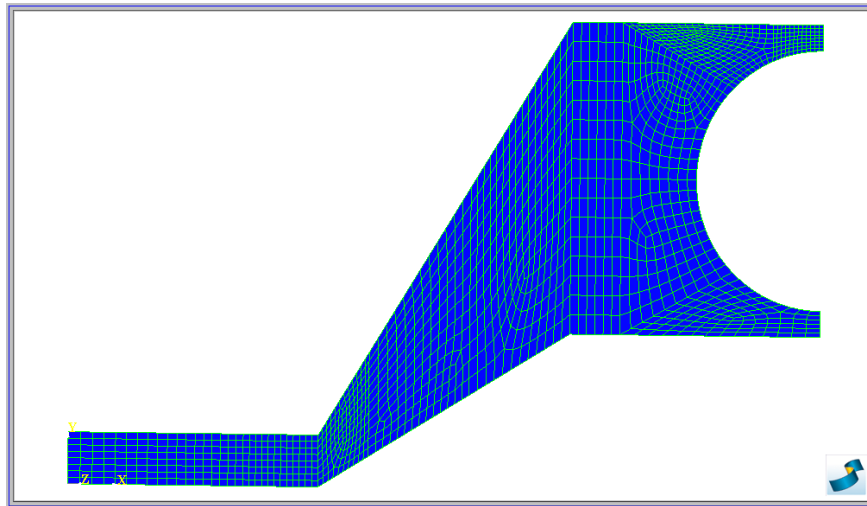


FIGURE 52 – Maillage raffiné avec éléments Q8.

Ce maillage est constitué de 4855 noeuds, soit 1528 éléments, et 9558 degrés de liberté pour un volume total de $12.804 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Le semi-volume réel est donc bien représenté par ce maillage étant donné la bonne adaptation des éléments à la géométrie circulaire du trou.

Résultats

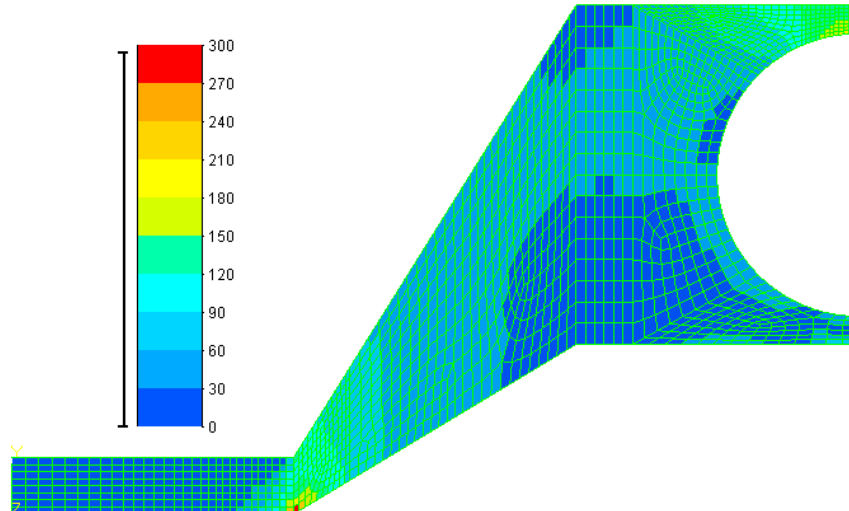


FIGURE 53 – Contraintes équivalentes de Von-Mises [MPa].

Les mêmes observations peuvent être faites que pour les autres types d'éléments, seules quelques valeurs changent. On a $\bar{\sigma}_{VM,max} = 294.85$ MPa et donc $P_{Max} = 186.53$ kN. La valeur maximale du *Gap by Node* à l'encastrement est de 140.48 MPa et les valeurs au dessus du trou sont inférieures à 28.1 MPa.

14.4 Discussion des résultats

14.4.1 Conditions aux limites

Une manière de vérifier que les conditions aux limites sont bien respectées est d'analyser le champ de déplacements. L'encastrement a pour effet de bloquer ces déplacements selon les axes x et y . L'utilisation de la symétrie bloque la déformation selon x au niveau de l'axe de la symétrie. Les composantes du champ de déplacements pour le maillage raffiné avec éléments Q8 sont représentées ci-dessous à la Fig.54.

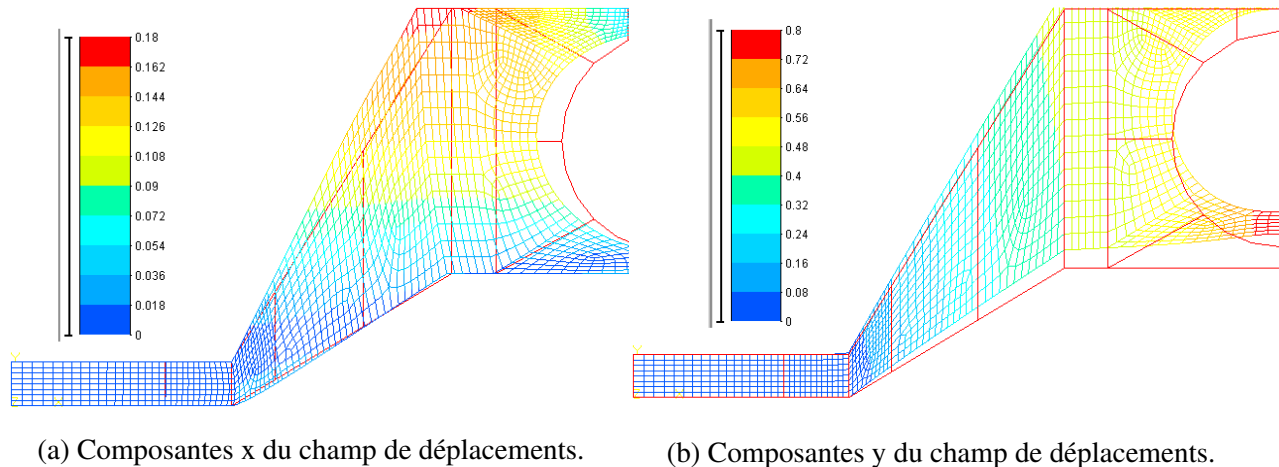


FIGURE 54 – Respect des conditions aux limites.

On observe bien que les déplacements sont nuls à l'encastrement selon x et y et nuls au niveau de l'axe de symétrie uniquement selon x . Notons que *SAMCEF* ne représente pas ces déplacements à l'échelle afin d'obtenir une meilleure visibilité. Ils sont en réalité bien moins amples.

14.4.2 Qualité du maillage

On peut observer qu'en raffinant, la valeur globale du *Gap by Node* diminue. En effet, la taille des mailles diminuant, les points de Gauss où les fonctions sont évaluées se rapprochent et les valeurs calculées tendent donc vers les valeurs réelles du champ de contrainte continu et le *Gap by Node* décroît. Cependant, on remarque que les valeurs en bout d'encastrement ne décroissent pas du tout mais, au contraire, augmentent fortement. Cela semble incohérent avec l'interprétation du *Gap by Node* sauf dans le cas de la présence d'une singularité. Cette hypothétique singularité remettrait en question l'ensemble des valeurs trouvées pour la force maximale. En effet, la contrainte ne serait pas finie à l'encastrement et l'endroit où la contrainte maximale prend place ne serait plus défini avec certitude.

Cette singularité s'expliquerait par la présence de l'encastrement. Ce dernier empêcherait l'effet de Poisson dans la section concernée ce qui entraînerait une discontinuité de l'effort tranchant.

Cette discontinuité est représentée à la Fig.55, elle provient de l'angle vif que prend la structure en bout d'encastrement.

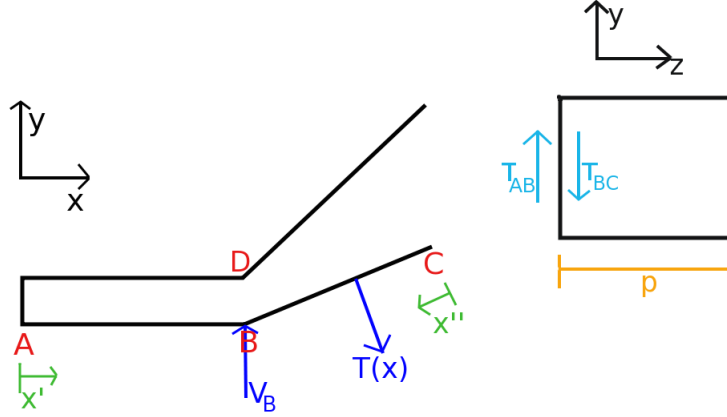


FIGURE 55 – Discontinuité de l'effort tranchant.

En effet, le long de la poutre oblique, les contraintes sont telles que décrites à l'Eq.(13).

$$\tau_{BC} = \frac{T(x'') \cdot Sn}{p \cdot I_z}$$

Le long de la poutre horizontale, l'encastrement engendre une réaction d'appui verticale, responsable de contraintes de cisaillement suivant l'Eq.54

$$\tau_{AB} = \frac{V_B \cdot Sn}{p \cdot I_z} \quad (54)$$

où τ_{AB} représente les contraintes de cisaillement et V_B la force de réaction verticale due à l'encastrement. On a bien une discontinuité au point B, étant donné que

$$\begin{cases} \lim_{x' \rightarrow B} \tau = \frac{V_B \cdot Sn}{p \cdot I_z} \\ \lim_{x'' \rightarrow B} \tau = \frac{T(B) \cdot Sn}{p \cdot I_z} \end{cases} \quad (55)$$

La limite des contraintes de cisaillement prend donc deux valeurs différentes et n'est donc pas finie.

Cette contrainte qui tend vers l'infini fausse donc nos résultats. En effet, une concentration de contrainte est attendue en bout d'encastrement et la présence de cette singularité entraîne une contrainte non bornée. Il nous est donc impossible de calculer une force maximale car celle-ci tend vers zéro lorsque l'on raffine.⁶

6. Une force de 0 [N] entraînerait donc la rupture de la pièce, ce qui n'a pas de sens physique [6].

Afin de supprimer cette singularité, nous allons devoir modifier les conditions aux limites. L'encastrement va être remplacé par un appui à rouleau additionné à un encastrement ponctuel situé au milieu de l'appui. De plus, nous allons, pour éviter les effets néfastes de l'angle vif, le remplacer par un angle droit suivi d'un congé de raccordement au bout de l'ancien encastrement. Ceci permet de lever la discontinuité de l'effort tranchant en bout d'encastrement. L'angle vif au point D de la Fig.55 est également remplacé par un congé de raccordement afin d'éviter toute apparition d'une nouvelle singularité.

Pour que notre nouvelle configuration équivale à notre ancienne, il nous faudrait instaurer un effort résultant au niveau de notre appui [7]. Toutefois, la détermination de cet effort devient fort compliquée et n'est pas nécessaire dans la mesure où, même sans celui-ci, notre singularité a été levée en bout d'encastrement bien qu'une nouvelle soit apparue au lieu de notre nouvel encastrement. Cependant, par le principe de Saint-Venant, la singularité n'a que peu d'influence sur le résultat des contraintes sur le reste de la structure et en particulier sur les zones qui nous intéressent, le bout de l'encastrement ainsi que la surface surplombant le trou circulaire.

14.4.3 Compromis sur le maillage

Dans le but d'obtenir la vraie valeur de la force maximale à exercer, nous allons, dès lors, étudier la nouvelle configuration. Comme expliqué plus haut, nous allons utiliser un maillage Q4 afin d'obtenir une meilleure précision qu'un maillage triangulaire mais de pouvoir tout de même raffiner suffisamment tout en conservant un nombre de noeuds inférieur à 5000.

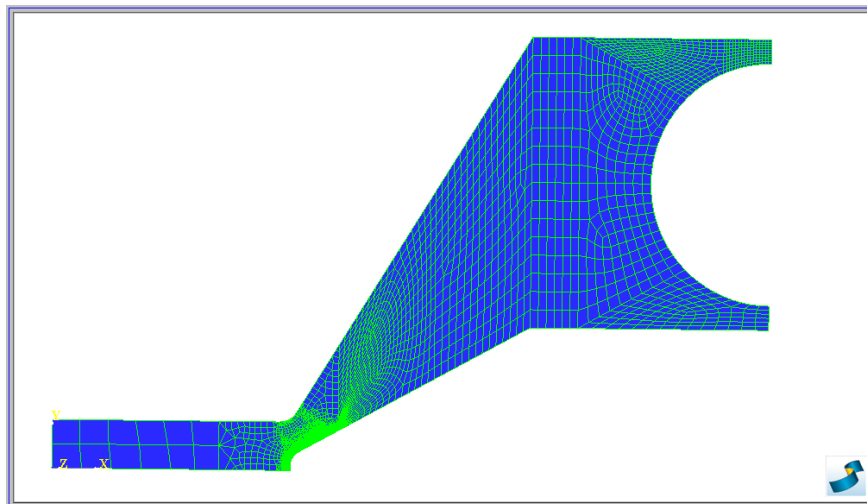
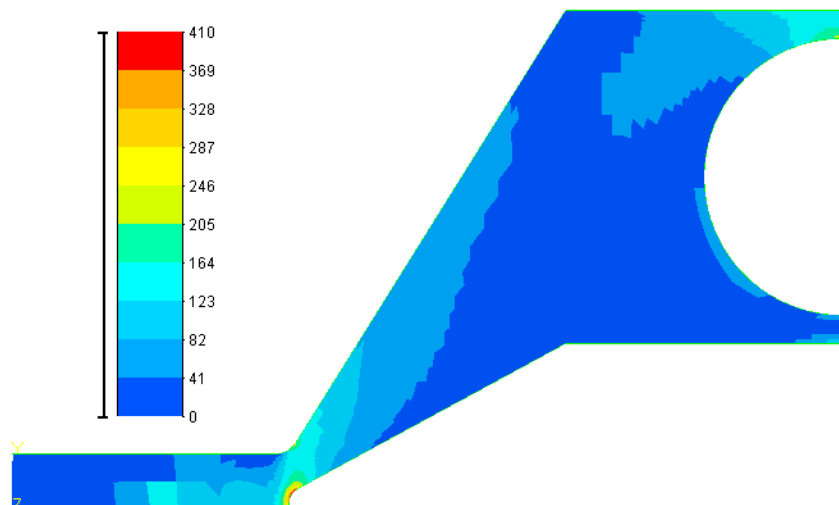


FIGURE 56 – Maillage raffiné avec suppression de la singularité.

Un raffinement plus précis sera effectué aux alentours des deux zones à gradient de contraintes élevé et un plus grossier sera effectué aux alentours de la nouvelle singularité afin que celle-ci n'induisse pas une contrainte trop importante. Le raffinement est tel que la valeur de la contrainte maximale a convergé. Ce maillage est représenté à la Fig.56.

14.4.4 Champ de contraintes

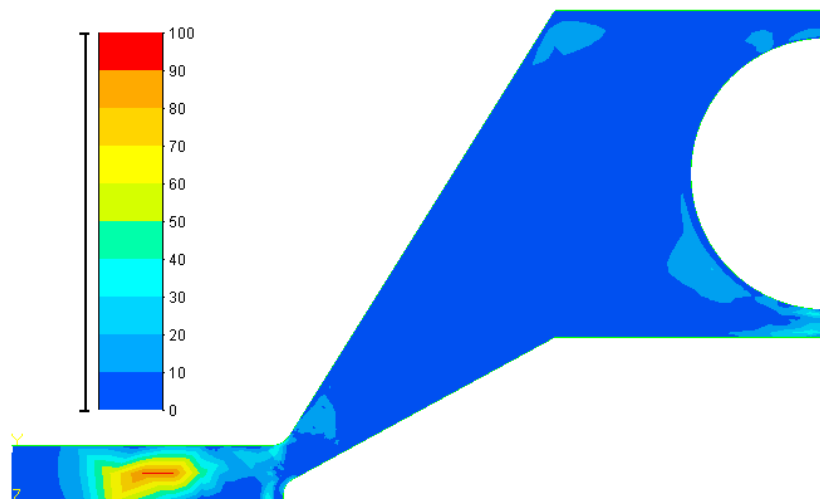
Le champ de contraintes équivalentes de Von-Mises ainsi que la modification des conditions aux limites sont représentés à la Fig.57.



On observe trois concentrations de contraintes, les deux premières sont situées aux deux congés de raccordement. La troisième, comme précédemment, prend place au dessus du trou.

FIGURE 57 – Détermination de P_{max} [MPa].

La contrainte maximale se situe au congé de raccordement suivant l'angle droit et a convergé vers la valeur de 403 MPa. Nous la prendrons en compte pour calculer P_{max} , vu que les autres zones de concentrations de contraintes ne rentrent en plasticité qu'après le congé.



Pour ce champ de contraintes, seule la valeur du *Gap by Node* à l'encastrement ponctuel ne tend pas vers zéro lorsque l'on raffine (voir Fig.58). Nous avons donc bien supprimé la singularité en bout d'encastrement et pouvons dès lors calculer la force résultante maximale à appliquer à la structure.

FIGURE 58 – Gap by Node lors de la suppression de la singularité.

On a donc, selon l'Eq.49, $P_{max} = 136.5kN$.

15 Comparaison avec la résistance des matériaux

Les résultats obtenus par l'étude numérique⁷ et l'étude analytique semblent très différents. En effet, il existe un facteur 35 entre les forces résultantes maximales à appliquer analytiquement et numériquement ainsi qu'une différence importante entre les TPE calculées selon les deux méthodes. Les sous-sections suivantes discutent ces résultats.

15.1 Force résultante maximale

La détermination de P_{max} par la résistance des matériaux amène à une valeur assez faible de 4 kN. En effet, le matériau utilisé a un module de Young élevé, sa résistance mécanique est assez élevée. Cependant, cette force résultante de 4 kN n'est que 4 fois plus élevée que le poids de la pièce, ce qui ne représente pas un matériau fort résistant.

De plus, la force résultante calculée numériquement est 35 fois plus grande. Cette comparaison n'a cependant pas de sens. De fait, les contraintes maximales ne prennent pas naissance au même endroit dans les deux méthodes et ne sont pas à mettre en relation. La comparaison ne peut être faite que pour des contraintes maximales située à la même place.

Si la contrainte était maximale en bout d'encastrement lors de l'étude analytique, la valeur hypothétique que prendrait P_{max} serait de 399.2 kN (voir Table 1). Le facteur entre le numérique et l'analytique ne serait plus que de 3, valeur toute à fait acceptable au vu des diverses hypothèses faites.

En revanche, lorsque l'on considère la contrainte maximale au dessus du trou lors de l'étude numérique, le résultat n'est plus satisfaisant. En effet, la valeur de la contrainte équivalente de Von-Mises vers laquelle un raffinement progressif du maillage converge est de 242 MPa⁸. La valeur de P_{max} serait donc de 227 kN et le facteur serait dès lors de 57.

On observe donc une différence notable dans le comportement au dessus du trou. Elle est due à l'hypothèse trop simplificatrice⁹ de remplacement de la force résultante par une force ponctuelle. En effet, cette force ponctuelle a pour effet de créer une concentration de contraintes et fausse le résultat. Nous nous fierons donc au résultat obtenu par la méthode des éléments finis.

15.2 TPE

La TPE obtenue numériquement, à la limite élastique, est de 30.8 J¹⁰. Il y a donc un facteur 57 avec celle calculée analytiquement. Comme expliqué lors de la partie résistance des matériaux, la TPE est affectée par l'hypothèse de force ponctuelle, et donc dépend de la force P_{max} appliquée. Nous retrouvons ici le même facteur pour la TPE que pour la force à appliquer si on considère l'emplacement de la contrainte maximale comme étant celui de la méthode analytique.

7. La géométrie utilisée est celle supprimant la singularité en bout d'encastrement.

8. Les contraintes sont toujours calculées pour une force résultante de 220 kN

9. Cette hypothèse est néanmoins nécessaire pour éviter une étude analytique accessible.

10. SAMCEF affiche la TPE en valeur absolue.

Les valeurs trouvées correspondent donc bien aux modèles respectifs mais à nouveau, nous prendrons comme valeur proche de la réalité celle calculée grâce à la méthode des éléments finis.

15.3 Déplacements

La méthode analytique est limitée quant à l'expression des déplacements. Effectivement, le calcul des flèches selon le principe d'Euler-Bernoulli ne permet pas de représenter autant de déplacements que la méthode des éléments finis. Les sections droites restant planes après déformation, le déplacement plus important sur le dessous du cercle est ignoré.

Le principe d'Euler-Bernoulli fait aussi l'hypothèse que les sections droites restent perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre et donc le gauchissement est négligé. Cependant, celui calculé numériquement ne l'est pas, notamment au point C (voir Fig. 2). Le déplacement vertical y est de 0.4 mm alors que le déplacement horizontal est de 0.11 mm¹¹ et ne peut donc être négligé.

15.4 Encastrement

L'étude par la résistance des matériaux ne permet pas de prendre en compte la poutre encastree. En effet, d'une part d'autres appuis sont utilisés pour cette étude et d'autre part nous ne considérons pas le comportement à l'intérieur de l'appui. Il est donc impossible d'examiner les phénomènes se produisant dans la poutre à cet endroit. En effet, la singularité n'a pas été détectée et une valeur finie de P_{max} a pu être déterminée en bout d'encastrement sans que la géométrie ne soit modifiée.

Hormis cette limitation concernant les singularités, omettre la présence de la poutre est acceptable étant donné qu'elle n'est que très peu contrainte.

16 Optimisation

Pour permettre à l'appui de tuyau étudié de résister à une force plus importante, il nous faut optimiser la géométrie. Les appuis ainsi que la position du trou circulaire resteront inchangés.

La ligne directrice qui a été suivie durant cette optimisation était de répartir au maximum les contraintes importantes via l'élargissement de leur champ d'application ainsi que la suppression de matière aux endroits où la contrainte était faible. Les résultats seront tout d'abord analysés pour un maillage grossier et ce dernier sera amélioré lorsque la configuration obtenue correspondra à une bonne optimisation. Les éléments utilisés seront quadrilatères bilinéaires comme justifié précédemment.

N'oublions pas de souligner qu'une singularité est toujours présente au lieu de l'encastrement ponctuel.

Il est important de noter que nous aurions également pu optimiser la structure en réduisant son épaisseur à certains endroits si celle-ci n'était pas considérée comme constante.

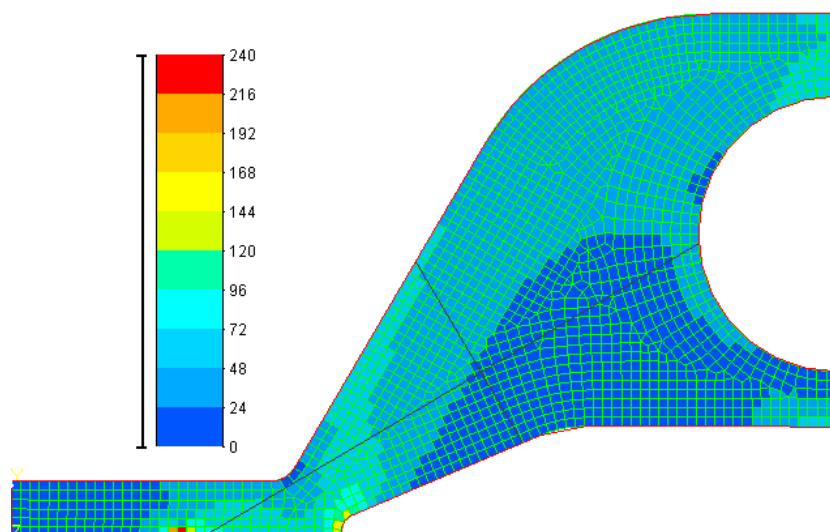
11. Ces valeurs sont calculées à la limite élastique, c'est-à-dire pour une force résultante de 136.5 kN.

16.1 Première optimisation

Comme on peut le voir sur la Fig. 57, certaines surfaces sont presque libres de contraintes tandis que la contrainte maximale ne s'exerce que sur une très petite zone. La première modification qui sera faite sera donc d'augmenter la quantité de matière au dessus du trou ainsi qu'aux alentours de la contrainte maximale.

Le nouvel appui à rouleau ne mesurera plus 500 mm mais 700 mm afin d'éviter un rétrécissement trop important de la section du à l'élimination de la singularité près de la contrainte maximale. Pour esquiver les effets néfastes provenant de la présence d'angles vifs, ceux-ci ont été adoucis via la mise en place de congés de raccordement.

Toutes ces modifications ont entraîné une claire augmentation de volume. Pour ne pas que celle-ci ne devienne trop importante, le congé de raccordement créé sur la surface supérieure du support a été fait de telle sorte que la matière superflue soit supprimée. En effet, cette zone n'était soumise qu'à une faible contrainte et l'enlèvement de matière a donc un faible impact. La nouvelle géométrie et les contraintes internes auxquelles elle est soumise, pour un maillage grossier, sont représentées à la Fig. 59.



La figure obtenue montre que, outre la singularité, la valeur maximale de contrainte équivalente est proche de 130 MPa. Cela correspond à une force de 424 kN. Ce dernier résultat constitue une énorme évolution par rapport à ce que l'on obtenait précédemment.

FIGURE 59 – Contraintes équivalentes de Von-Mises pour la première géométrie [MPa].

Toutefois, la distribution de contraintes n'est pas vraiment uniforme dans le reste de la structure. Pour améliorer cet aspect important d'une optimisation, nous allons retirer une plus grande quantité de matière sur la partie supérieure de la structure. Une même opération sera faite sur la partie inférieure à l'aide, à nouveau, de congés de raccordement. Les contraintes équivalentes sont effectivement plus faibles dans cette partie du support.

16.2 Seconde optimisation

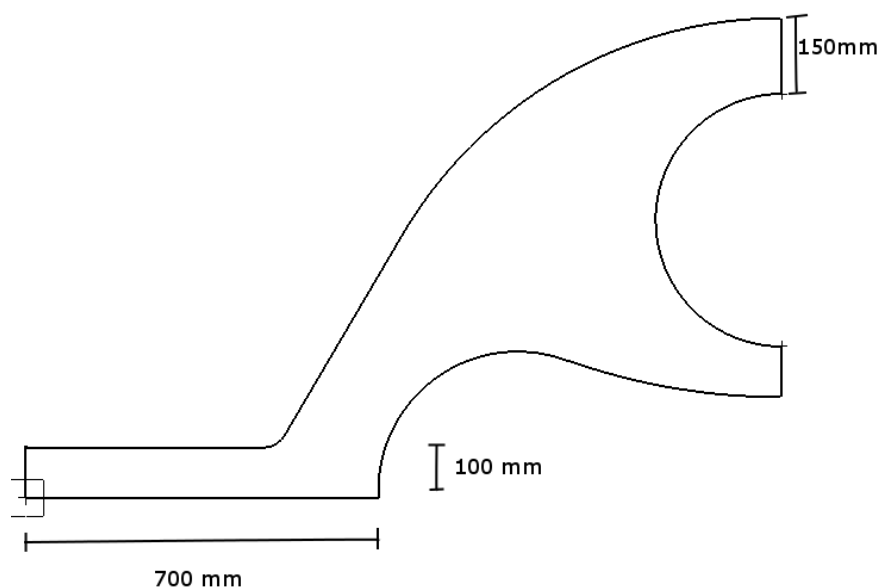


FIGURE 60 – Configuration optimisée.

Pour diminuer au maximum la contrainte exercée en bout d'appui, nous avons tenté de la répartir sur le congé. Ainsi, ce dernier a été allongé et le rayon de courbure augmenté. La géométrie générée possède un volume de $13.89 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Cela constitue une faible augmentation de 8.5% du volume initial. La nouvelle géométrie est représentée à la Fig. 60.

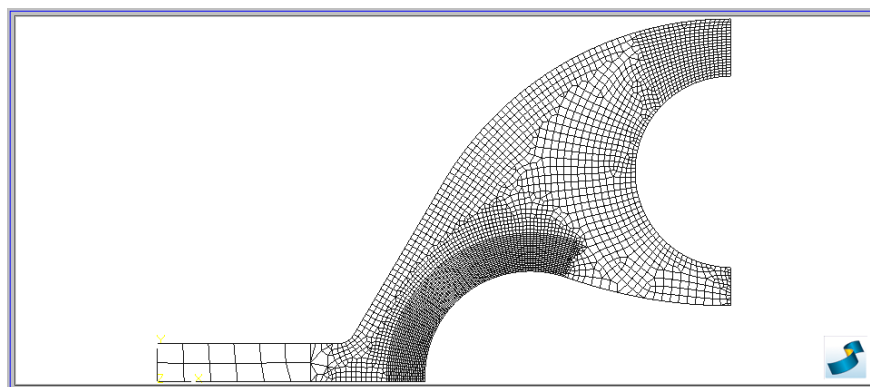
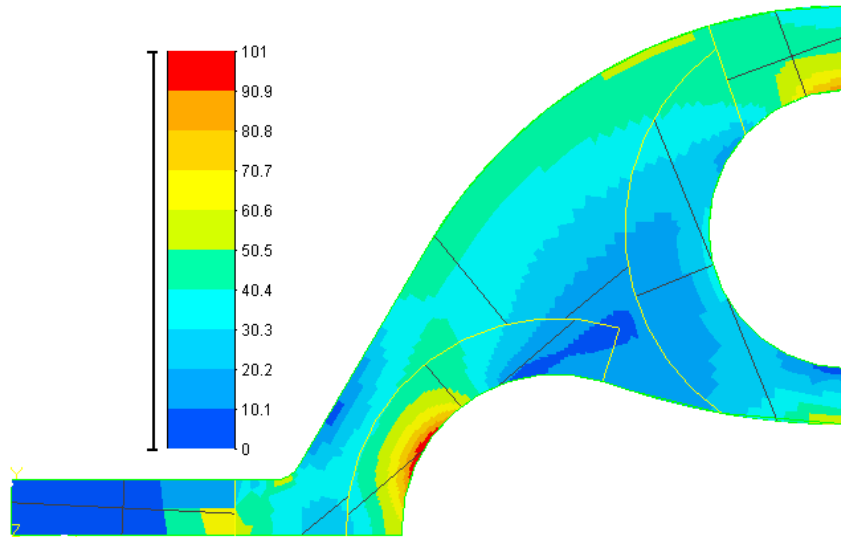


FIGURE 61 – Maillage utilisé pour l'optimisation finale.

Afin d'obtenir une bonne qualité de maillage, nous avons créé des sous-domaines aux alentours de gradients de contraintes importants dans le but d'y mailler avec plus de finesse. Un autre sous-domaine sera créé aux environs de la singularité.

Cette dernière sera alors adoucie par un maillage extrêmement large. Le trou a été entouré par un sous-domaine courbe permettant une meilleure qualité du maillage en ce lieu. Ce maillage est représenté à la Fig. 61.



La nouvelle géométrie converge vers une contrainte équivalente maximale de 101 Mpa. Cela correspond à une force de $P_{max} = 545$ kN. La force maximale a donc été multipliée par quatre. Cette optimisation semble, dès lors, fort acceptable.

FIGURE 62 – Contraintes équivalentes de Von-Mises pour la seconde géométrie [MPa].

La configuration générée évoque la forme d'un roulement palier servant, par exemple à soutenir un arbre de transmission. Ce roulement possède une épaisseur plus faible dans les endroits où la contrainte est minimale, permettant ainsi de diminuer la quantité de matière utilisée.

Afin d'éviter la singularité, ou la zone de concentration de contraintes située en bout d'encastrement, le roulement est encasturé sur toute sa longueur. Cela permet d'abaisser encore la contrainte maximale mais surtout de déplacer celle-ci au dessus du trou.

Nous ne pouvons cependant effectuer cette amélioration vu la restriction volumique qui nous est imposée.

Un palier est représenté à la Fig.63



FIGURE 63 – Palier à semelles.

Quatrième partie

Conclusion

L'étude de notre support a été réalisée de deux manières différentes.

L'étude analytique a nécessité un certain nombre d'hypothèses, notamment le caractère ponctuel des différentes forces, réduisant son domaine de validité. Cette hypothèse induit, en outre, une force P_{max} sous évaluée, étant donné les concentrations de contraintes engendrées. La valeur de l'énergie potentielle totale sera également influencée par cette simplification. Elle vaut, ici, -1.75 kJ. La contrainte maximale est située au dessus du trou circulaire et induit une charge appliquée maximale de 4.038 kN.

L'étude numérique via la méthode des éléments finis a été compliquée par la présence de singularités. Afin d'en éviter les effets néfastes, nous avons dû modifier légèrement la structure analysée. Nous nous sommes également penché sur l'influence du maillage sur les résultats obtenus. Il en est ressorti que les éléments Q8 étaient les plus fiables mais que la limitation sur le nombre de noeuds nous poussait à choisir un maillage à l'aide d'éléments quadrilatères bilinéaires. De plus, les zones dans lesquelles un grand gradient de contraintes prenait place ont été maillées plus finement que le reste.

La méthode des éléments finis nous donne une valeur de la charge maximale applicable de $P_{max} = 136.5$ kN. Cette dernière dérive d'une contrainte maximale située en bout d'encastrement, c'est-à-dire en un lieu différent de celui calculé lors de l'étude analytique. Une comparaison n'est donc que peu pertinente. Cependant, la valeur qui serait trouvée si la contrainte maximale analytique se situait en bout d'encastrement se rapproche de la valeur calculée numériquement.

La comparaison des valeurs de TPE obtenues n'est pas pertinente vu les hypothèses simplificatrices qui faussent nos résultats.

Dans le but d'augmenter la charge maximale applicable, nous avons tenté d'optimiser le support tout en se limitant à une faible augmentation du volume. La nouvelle configuration peut supporter une nouvelle charge valant $P_{max} = 545$ kN. Cette dernière a donc été multipliée par quatre. Le volume n'a varié que de 8.5% .

L'étude du comportement de cette pièce sous différentes charges nous a permis de voir les limites de l'analyse d'un modèle simplifié à l'aide de la résistance des matériaux. Il faut donc être attentif aux hypothèses imposées et à leurs conséquences. Nous avons également appris à manipuler un logiciel utilisant la méthode des éléments finis. Cette méthode est très répandue de nos jours, ce logiciel nous sera donc probablement utile dans notre métier d'ingénieur.

Références

- [1] CESCOTTO, S., *Mécanique des matériaux Théorie*, De Boeck, 2001.
- [2] CESCOTTO, S., *Mécanique des solides Théorie*, Centrale des Cours asbl., Edition 2013.
- [3] WAUTELET, Gaëtan, « Energy Theorems 2014-2015 », Plateforme de support de cours e-campus, Section Project, [http ://www.ecampus.ulg.ac.be/bbcswebdav/pid-195317-dt-content-rid-1556285_1/courses/MECA0036-A-a/Projet/EnergyTheoremsMain.pdf](http://www.ecampus.ulg.ac.be/bbcswebdav/pid-195317-dt-content-rid-1556285_1/courses/MECA0036-A-a/Projet/EnergyTheoremsMain.pdf).
- [4] PONTHOT, Jean-Philippe, *An introduction to finite element method*, Slides, Centrale des Cours asbl., 2015.
- [5] GENDRE, Lionel et LOUF, François, « La démarche de modélisation d'un produit par éléments finis », Site des Sciences de l'Ingénieur, [http ://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressourceid=180sec33](http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressourceid=180sec33), Publié le 11-01-2013.
- [6] GENDRE, Lionel et CHAMPANEY, Laurent, « Les éléments finis par l'exemple : attention aux singularités ! », Site des Sciences de l'Ingénieur, [http ://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressourceid=175](http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressourceid=175), Publié le 30-01-2012.
- [7] C.E. Augarde, A.J. Deeks, The use of Timoshenko's exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis, *Finite Elem. Anal. Des.* (2008), doi : 10.1016/j.finel.2008.01.010.