

Antoine DE BROUWER  
Élise DELHEZ  
Julien DULAR  
Thibault PICHÂ



*Bachelier en sciences de l'ingénieur, orientation ingénieur civil*  
*MECA0036 : Finite element method*

## **Problème 18 : Maillon de Chaine**

Année académique 2015-2016

# Table des matières.

<b>Introduction.</b>	<b>7</b>
<b>1 Résistance des matériaux.</b>	<b>9</b>
1.1 Symétrie. . . . .	9
1.2 Équations du problème mécanique. . . . .	10
1.3 Simplification du problème. . . . .	12
1.4 Résolution du modèle simplifié. . . . .	13
1.4.1 Détermination des réactions d'appui. . . . .	13
1.4.2 Contraintes dans la partie droite. . . . .	14
1.4.3 Contraintes dans la partie courbe. . . . .	15
1.4.4 Estimation de la force maximale admissible. . . . .	17
1.4.5 Énergie interne de déformation. . . . .	17
1.4.6 Travail de la force extérieure. . . . .	17
1.4.7 Champ de déplacements. . . . .	18
1.5 Concentrations de contraintes et zones de forts gradients de contraintes. . . . .	21
<b>2 Étude avec la méthode des éléments finis.</b>	<b>24</b>
2.1 Modélisation du problème mécanique avec le logiciel SAMCEF Field. . . . .	24
2.1.1 Chargement et singularités. . . . .	25
2.2 Maillages proposés. . . . .	27
2.3 Différents types d'éléments. . . . .	28
2.3.1 Éléments triangulaires du premier ordre ( $T_3$ ). . . . .	29
2.3.2 Éléments triangulaires du second ordre ( $T_6$ ). . . . .	29
2.3.3 Éléments quadrangulaires du premier ordre ( $Q_4$ ). . . . .	30
2.3.4 Éléments quadrangulaires du second ordre ( $Q_8$ ). . . . .	31
2.4 Étude de la qualité du maillage. . . . .	32
2.4.1 Outils d'analyse de la qualité du maillage. . . . .	33
2.4.2 Qualité des maillages avec des éléments triangulaires. . . . .	34
2.4.3 Qualité du maillage avec éléments quadrangulaires. . . . .	36
2.5 Comparaison des différents maillages et des différents types d'éléments. . . . .	38
2.5.1 Approximation de la géométrie. . . . .	38
2.5.2 Temps de calcul. . . . .	39
2.5.3 Mémoire utilisée. . . . .	41
2.5.4 Énergie potentielle totale et convergence globale. . . . .	42
2.5.5 Contrainte maximale et convergence locale. . . . .	45
2.6 Choix final du maillage. . . . .	47
2.7 Discussion des résultats. . . . .	48
2.7.1 Comparaison avec les résultats obtenus par la résistance des matériaux. . . . .	49

2.7.2	Remarque sur le <i>gap by node</i> . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Optimisation.</b>	<b>56</b>
3.1	Démarche générale. . . . .	56
3.2	Maillon rectangulaire. . . . .	57
3.2.1	Remarque sur le champ des déplacements. . . . .	59
3.3	Détermination de la géométrie optimale. . . . .	60
3.3.1	Description et justification de la forme choisie. . . . .	60
3.3.2	Géométrie optimale. . . . .	61
3.3.3	Maillage et type d'éléments. . . . .	62
3.3.4	Résultats. . . . .	64
	<b>Conclusion.</b>	<b>66</b>
<b>A</b>	<b>Code MATLAB pour la partie résistance des matériaux.</b>	<b>67</b>

# Table des figures.

1	Géométrie du maillon complet (dimensions en [mm]). . . . .	7
1.1	Géométrie et conditions limites d'un quart de maillon (dimensions en [mm]). .	10
1.2	Schéma rendu libre du modèle simplifié - Structure de poutres. . . . .	13
1.3	Calcul des efforts internes. . . . .	14
1.4	Contraintes dans la partie droite pour une charge $P_s = 100$ [N]. . . . .	15
1.5	Coordonnées $(r, \phi)$ pour la partie courbe. . . . .	15
1.6	Contraintes de Von Mises pour une charge $P_s = 100$ [N], unité [MPa]. . . . .	16
1.7	Nouvelle simplification du problème pour la détermination du champ des déplacements, dimensions en [mm]. . . . .	19
1.8	Allure de la déformée de la fibre moyenne, exagérée 10000 fois, pour une force $P_s = 100$ [N]. . . . .	20
1.9	Déplacement relatif à la fibre neutre d'un point quelconque de la poutre pour des rotations de faible amplitude. . . . .	20
1.10	Déformée de la structure simplifiée, exagérée 10000 fois sur la figure, pour une force $P_s = 100$ [N], valeurs en [mm]. . . . .	21
1.11	Problème de Flamant et contraintes de Von Mises [N/m <sup>2</sup> ] dues à une charge concentrée $P = 200$ [N], dimensions en [m]. . . . .	22
1.12	Zones de concentrations de contraintes et de forts gradients de contraintes attendues par la théorie de l'élasticité linéaire. . . . .	23
2.1	Divergence des contraintes au voisinage du point d'application de $P_s$ lors du raffinement de maillage. . . . .	25
2.2	Champ de contraintes au voisinage de la singularité. . . . .	25
2.3	Nouveau problème permettant d'éviter la singularité. . . . .	26
2.4	Sous-domaines des maillages intermédiaire (haut) et élaboré (bas) (dimensions en [mm]). . . . .	27
2.5	Maillage grossier pour les T3. . . . .	29
2.6	Maillage intermédiaire pour les T3. . . . .	29
2.7	Maillage élaboré pour les T3. . . . .	30
2.8	Maillage grossier pour les Q4. . . . .	31
2.9	Maillage intermédiaire pour les Q4. . . . .	31
2.10	Maillage élaboré pour les Q4. . . . .	32
2.11	<i>Aspect Ratio</i> pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires. . . .	34
2.12	<i>Skew</i> pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires. . . . .	35
2.13	<i>Corner Angle</i> pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires. . . .	35
2.14	<i>Aspect Ratio</i> pour le maillage élaboré et des éléments triangulaires. . . . .	36
2.15	<i>Skew</i> pour le maillage élaboré et des éléments triangulaires. . . . .	36
2.16	<i>Aspect Ratio</i> pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires. . . . .	37

2.17	<i>Skew</i> pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires. . . . .	37
2.18	<i>Jacobian Ratio</i> pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires. . . .	37
2.19	Approximation de l'aire par les différents éléments en fonction du nombre d'éléments. . . . .	38
2.20	Temps de calcul en fonction du nombre d'éléments et en fonction du nombre de degrés de liberté. Les résultats relatifs au maillage grossier, intermédiaire et élaboré sont représentés respectivement en rouge, en vert et en bleu. Les différents symboles correspondent aux types d'éléments : $\circ = T_3$ , $\times = Q_4$ , $+= T_6$ , $\square = Q_8$ . . . . .	40
2.21	Mémoire centrale utilisée en fonction du nombre d'éléments et en fonction du nombre de degrés de liberté. Les résultats relatifs au maillage grossier, intermédiaire et élaboré sont représentés respectivement en rouge, en vert et en bleu. Les différents symboles correspondent aux types d'éléments : $\circ = T_3$ , $\times = Q_4$ , $+= T_6$ , $\square = Q_8$ . . . . .	41
2.22	<i>TPE</i> en fonction du nombre d'éléments (maillage grossier). . . . .	43
2.23	<i>TPE</i> en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage grossier). . . . .	43
2.24	<i>TPE</i> en fonction du nombre d'éléments (maillage intermédiaire). . . . .	43
2.25	<i>TPE</i> en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage intermédiaire). . . .	43
2.26	<i>TPE</i> en fonction du nombre d'éléments (maillage élaboré). . . . .	44
2.27	<i>TPE</i> en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage élaboré). . . . .	44
2.28	Erreur relative sur la <i>TPE</i> (échelle logarithmique) en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage grossier) et du type d'éléments. Le trait noir est illustratif d'une décroissance linéaire. . . . .	44
2.29	Erreur relative sur la <i>TPE</i> (échelle logarithmique) en fonction du nombre de degrés de liberté et de la stratégie de maillage (élément $Q_4$ ). Le trait noir est illustratif d'une décroissance linéaire. . . . .	45
2.30	Convergence de la contrainte maximale pour $Q_4$ et $Q_8$ . . . . .	46
2.31	Convergence de la contrainte maximale pour $T_3$ et $T_6$ . . . . .	46
2.32	Champ des contraintes pour $P_s = 100$ [N]. . . . .	48
2.33	Réactions d'appui pour $P_s = 100$ [N]. . . . .	49
2.34	Champ des déplacements pour $P_s = 100$ [N]. . . . .	49
2.35	Champ des contraintes calculés par la résistance des matériaux (au-dessus) et par la méthode des éléments finis (en dessous) pour $P_s = 100$ [N], valeurs en [MPa]. . . . .	50
2.36	Comparaison des déplacements par la résistance des matériaux et les éléments finis pour $P_s = 100$ [N], même échelle de couleur, valeurs en [mm]. . . . .	52
2.37	Champ du <i>gap by node</i> absolu pour le maillage optimal dans la partie courbe, les éléments $Q_4$ et une force $P_s = 100$ [N], valeurs en [MPa]. . . . .	54
2.38	Champ du <i>gap by node</i> relatif pour le maillage optimal dans la zone de contraintes maximales, les éléments $Q_4$ et une force $P_s = 100$ [N], valeurs en [%].	55
3.1	Géométrie du maillon rectangulaire (dimensions en [mm]). . . . .	57
3.2	Champ des contraintes dans la maillon rectangulaire. . . . .	57
3.3	Zoom sur la singularité du maillon rectangulaire. . . . .	58
3.4	Comparaison des déplacements par la résistance des matériaux et les éléments finis pour $P_s = 100$ [N], même échelle de couleur, déplacements en [mm]. . . .	59
3.5	Famille de géométries proposée (dimensions en [mm]). . . . .	60
3.6	Géométrie du maillon optimal (dimensions en [mm]). . . . .	62

3.7	Sous-domaines de la pièce optimisée. . . . .	62
3.8	Maillage de la pièce optimisée. . . . .	63
3.9	Zoom du maillage de la pièce optimisée. . . . .	63
3.10	Distribution du <i>Jacobian Ratio</i> dans la pièce optimisée. . . . .	64
3.11	Contraintes de Von Mises dans la pièce optimisée. . . . .	64

## Liste des tableaux.

1	Caractéristiques du matériau. . . . .	8
2.1	Nombre d'éléments et de degrés de liberté pour chacun des maillages. . . . .	33
3.1	Optimisation des paramètres $c$ et $d$ , valeurs pour $P_s = 100$ [N]. . . . .	61

# Introduction.

La pièce mécanique étudiée est un maillon de chaîne dont la géométrie est représentée à la figure 1. Les dimensions de la pièce y sont également reprises. Ce maillon est soumis à deux forces concentrées  $P$  de même amplitude et de sens opposés.

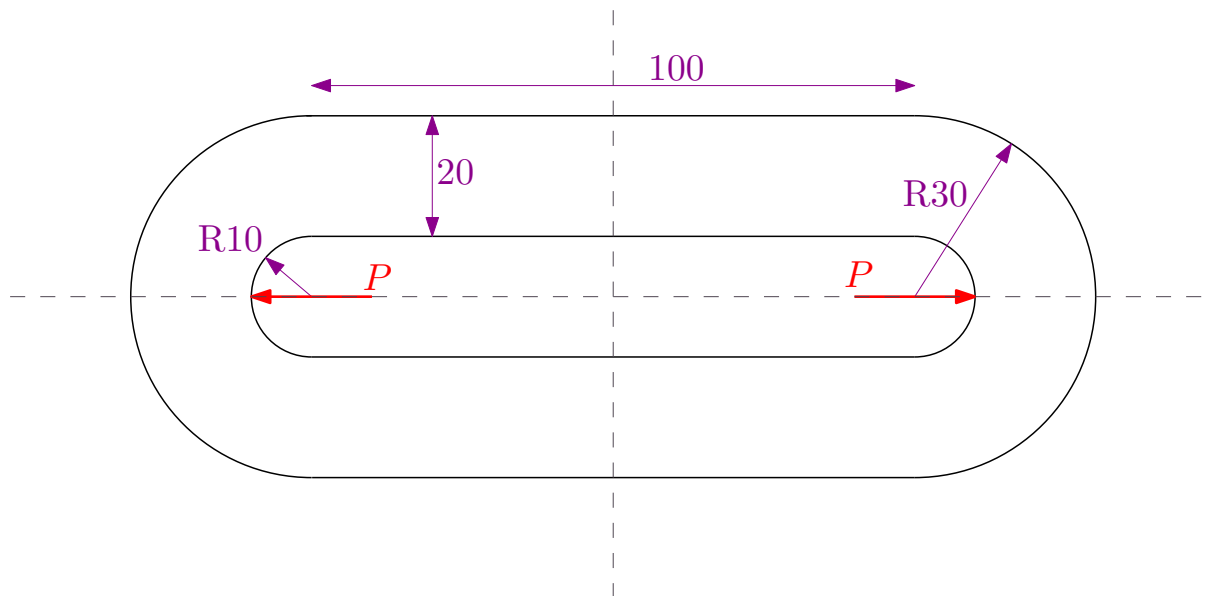


FIGURE 1 : Géométrie du maillon complet (dimensions en [mm]).

Le maillon de chaîne est étudié sous l'hypothèse d'état plan de contrainte. Pour simplifier le problème, on suppose que le maillon se comporte comme une membrane de 10 [mm] d'épaisseur.

Le matériau qui compose cette pièce est caractérisé par un module de Young  $E$  de 210 000 [MPa], un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à 0.3 [-] et une limite élastique  $\sigma_y^0$  de 600 [MPa]. Ces caractéristiques reprises dans le tableau 1 sont semblables à celles d'un acier.

L'objectif de l'étude est, d'une part, de déterminer la force maximale  $P^{max}$  pouvant être appliquée au maillon en restant dans le domaine élastique et, d'autre part, d'optimiser la forme et les dimensions du maillon afin d'augmenter cette charge  $P^{max}$ .

Dans un premier temps, le problème est étudié en utilisant la théorie de l'élasticité linéaire. En réalisant quelques hypothèses simplificatrices, les champs des contraintes et des déplacements, l'énergie potentielle totale ( $TPE$ ) et la force maximale  $P^{max}$  pouvant être



<i>Paramètre</i>	<i>Symbole</i>	<i>Valeur</i>	<i>Unités</i>
Module de Young	$E$	210 000	[MPa]
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	[-]
Limite élastique	$\sigma_y^0$	600	[MPa]

TABLEAU 1 : Caractéristiques du matériau.

appliquée au maillon sont déterminés.

Ensuite, le logiciel SAMCEF Field est utilisé afin de traiter le problème numériquement avec la méthode des éléments finis. Différents types d'éléments finis sont comparés et un compromis entre convergence locale et convergence globale est trouvé. Les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis sont comparés à ceux résultant de l'étude analytique du problème.

Enfin, tenant compte des résultats obtenus grâce à la résistance des matériaux et à la méthode des éléments finis, la forme et les dimensions de la pièce mécanique sont optimisées afin d'augmenter la charge maximale pouvant être appliquée tout en restant dans le domaine élastique.

# Partie 1

## Résistance des matériaux.

Dans cette partie, on étudie le champ des contraintes et de déplacements dans le maillon par les méthodes analytiques de résistance des matériaux. Il n'est donc pas question ici d'éléments finis. Pour résoudre le problème de manière analytique, des simplifications doivent être effectuées. Dans un premier temps, on utilise la théorie des poutres et les théorèmes énergétiques pour déterminer le champ des contraintes. Ensuite, une nouvelle simplification est réalisée pour déterminer le champ des déplacements. La dernière section décrit plus précisément les concentrations de contraintes et les zones de forts gradients de contraintes.

L'objectif de cette section est donc d'obtenir une première estimation de la charge maximale pouvant être comparée avec la solution numérique calculée dans la suite par la méthode des éléments finis. L'étude mettra aussi en évidence les zones du maillon sur lesquelles il faudra porter une attention particulière lors du maillage dans la seconde partie. Les calculs de cette section sont en partie effectués par le code MATLAB disponible en annexe.

### 1.1 Symétrie.

Avant de commencer tout calcul, il est bon de remarquer que la géométrie et la mise en charge sont symétriques. On observe deux axes de symétrie. Étant donné que tout le maillon est constitué du même matériau, il est donc possible d'étudier uniquement une partie de la pièce. Dans ce cas, comme on a à la fois une symétrie horizontale et verticale, l'étude d'un *quart de maillon* est suffisante. On représente à la figure 1.1 le problème équivalent.

Pour que le problème de la figure 1.1 soit identique au problème initial, il faut imposer des conditions aux limites cohérentes aux sections coupées par les axes de symétries.

Le champ des déplacements doit être continu, il ne peut pas se former de trou ni de recouvrement. Vu la symétrie, cela impose quatre conditions :

- Translation horizontale nulle de la section A.
- Translation verticale nulle de la section B.
- Rotation nulle de la section A.
- Rotation nulle de la section B.

Ces conditions reviennent à considérer des encastresments à rouleaux au niveau des sections A et B, comme indiqué sur la figure 1.1.

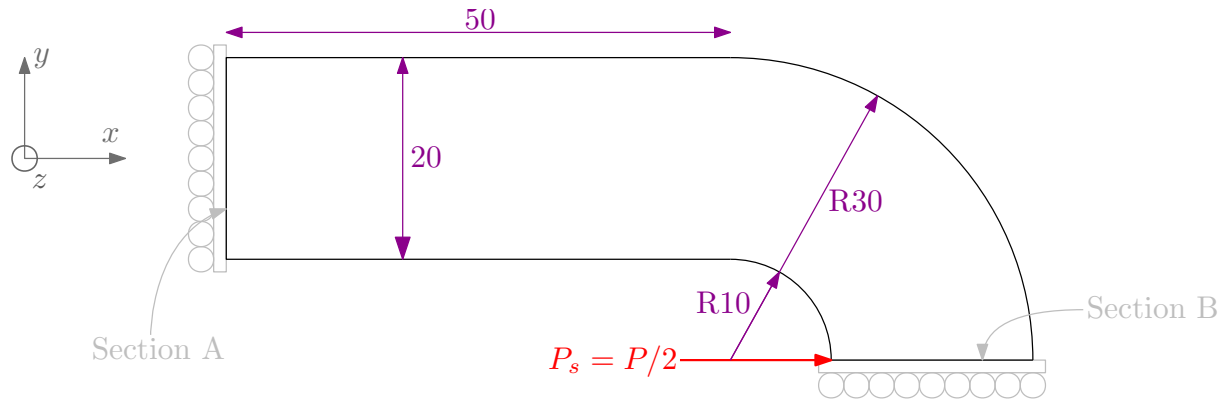


FIGURE 1.1 : Géométrie et conditions limites d'un quart de maillon (dimensions en [mm]).

On notera que ces appuis suffisent pour bloquer les modes rigides de la pièce. En effet, la rotation, la translation horizontale et la translation verticale sont bloquées.

La charge  $P$  appliquée sur le maillon complet doit être divisée en deux si on ne considère qu'un quart de maillon. On notera dans la suite du rapport  $P_s = P/2$  [N] pour désigner la charge appliquée sur le quart de maillon.

Une dernière remarque s'impose quant aux encastresments à rouleaux. Pour la section A, aucune condition n'est imposée sur le déplacement vertical. On pourra donc bien observer une déformation selon cet axe, par effet Poisson par exemple. De même, la déformation selon l'axe horizontal n'est pas bloquée sur la section B.

## 1.2 Équations du problème mécanique.

L'hypothèse d'analyse est celle d'un état plan de contrainte. Cette hypothèse est bien justifiée dans le problème étudié ici. En effet, en prenant le système d'axes de la figure 1.1,

- le maillon admet le plan  $xy$  comme plan de symétrie ;
- tous les supports et les conditions limites sont symétriques par rapport à ce plan ;
- l'épaisseur du maillon est plus petite que les dimensions caractéristiques du maillon dans le plan  $xy$  ;
- aucune force n'est appliquée dans la direction  $z$ .

Pour ces raisons, on fera l'hypothèse d'un état plan de contrainte. La géométrie implique que les contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont faibles et dès lors supposées nulles dans le cadre de l'hypothèse de l'état plan de contrainte. Cependant, seules les déformations  $\epsilon_{xz}$  et  $\epsilon_{yz}$  sont nulles, l'effet Poisson engendrera potentiellement une déformation hors-plan  $\epsilon_{zz}$  non nulle. On rappelle que cette déformation n'est pas empêchée par les encastresments à rouleaux non plus. L'hypothèse d'état plan de contrainte implique également que les déplacements, contraintes et déformations sont uniformes sur toute l'épaisseur du maillon.

Sous l'hypothèse d'un état plan de contrainte, les équations de l'élasticité se simplifient. En utilisant la notation de Voigt, on représente les déformations, les contraintes et les déplacements

par les vecteurs

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où  $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ .

En supposant le matériau isotrope, la *loi de Hooke* prend la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{où} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

avec  $E = 210\,000$  [MPa] le module de Young du matériau et  $\nu = 0.3$  [-] son coefficient de Poisson. La composante de déformation hors-plan  $\epsilon_{zz}$  peut être calculée de manière indépendante du reste des composantes par

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.3)$$

Le lien *déformations-déplacements* s'écrit

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{où} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Sous l'hypothèse d'un chargement quasi-statique, les équations d'*équilibre en volume* sont notées

$$\partial_j \sigma_{ji} + \rho \bar{b}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

avec  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] la masse volumique du matériau et  $\bar{b}_i$  la force volumique externe. Dans notre cas, les forces  $P$  mises en jeu étant bien supérieures au poids propre de la pièce, la gravité est négligée. On obtient alors

$$\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \tau_{xy} = 0 \quad (1.6)$$

$$\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_{xy} = 0 \quad (1.7)$$

Les *conditions limites cinématiques* sont celles liées aux appuis, ici aux encastresments à rouleaux. On a

$$u = 0, \quad \forall (x, y) \in S_u^x \quad (1.8)$$

$$v = 0, \quad \forall (x, y) \in S_u^y \quad (1.9)$$

$$\partial_x v = 0, \quad \forall (x, y) \in S_u^x \quad (1.10)$$

$$\partial_y u = 0, \quad \forall (x, y) \in S_u^y \quad (1.11)$$

avec  $S_u^x$  la surface de la section A et  $S_u^y$  la surface de la section B.

Les *conditions limites statiques* sont

$$n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} = \bar{t}_x, \quad \forall (x, y) \in S_\sigma^x \quad (1.12)$$

$$n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} = \bar{t}_y, \quad \forall (x, y) \in S_\sigma^y \quad (1.13)$$

avec  $n_i$  la composante selon l'axe  $i$  de la normale extérieure et  $\bar{t}_i$  la traction de surface extérieure selon l'axe  $i$ . Les surfaces  $S_\sigma^x$  et  $S_\sigma^y$  sont les complémentaires des sections A et B respectivement<sup>1</sup>. La distinction est faite à cause des encastresments à rouleaux. Ils n'imposent une condition cinématique que dans une direction, il faut donc une condition statique dans l'autre. Pour ce problème, la traction de surface est nulle partout sauf au point d'application de  $P_s$ .

### 1.3 Simplification du problème.

Pour résoudre le problème analytiquement, il est nécessaire de réaliser des hypothèses simplificatrices. Celles-ci limiteront la validité des résultats obtenus.

On décide de traiter le quart de maillon de la figure 1.1 comme une *poutre*. Cette hypothèse est en principe valide lorsque la longueur de la fibre moyenne est grande par rapport aux dimensions de la section droite, ce qui est discutable ici. En effet, pour la partie courbe du quart de maillon, la largeur de la section est importante par rapport au rayon moyen. On réalise néanmoins cette simplification.

Les dimensions de la structure de poutre doivent être fixées. La longueur de la partie droite reste de  $l = 50$  [mm], comme pour la géométrie réelle. Le rayon de la partie courbe est choisi comme le rayon moyen de la géométrie réelle, soit  $a = 20$  [mm].

On veillera à rester conscient des hypothèses que la simplification implique dans l'interprétation des résultats.

La simplification revient à supposer que la taille de la section droite n'influence pas les *efforts* internes<sup>2</sup> (résultantes des contraintes sur une section). Schématiquement, cela revient à considérer une géométrie "fine" comme illustré à la figure 1.2.

Ensuite, les sections droites sont supposées indéformables, elles restent planes et constamment perpendiculaires à la fibre moyenne. L'effet Poisson est donc notamment négligé. Il s'agit de l'hypothèse d'*Euler-Bernoulli* à la différence près que l'on tiendra compte du cisaillement lors du calcul des déplacements.

Enfin, la force  $P_s$  appliquée est supposée distribuée sur la section de coupe B, elle n'est plus concentrée. L'approche par la théorie des poutres nous amène ainsi à ne pas tenir compte des *concentrations de contraintes* au voisinage du point d'application réel de la force  $P_s$ . On reviendra sur celles-ci dans la section 1.5.

---

1. Et donc aussi des surfaces  $S_u^x$  et  $S_u^y$ .

2. Évidemment, lors du calcul des contraintes, la taille et la géométrie de la section droite auront une influence.

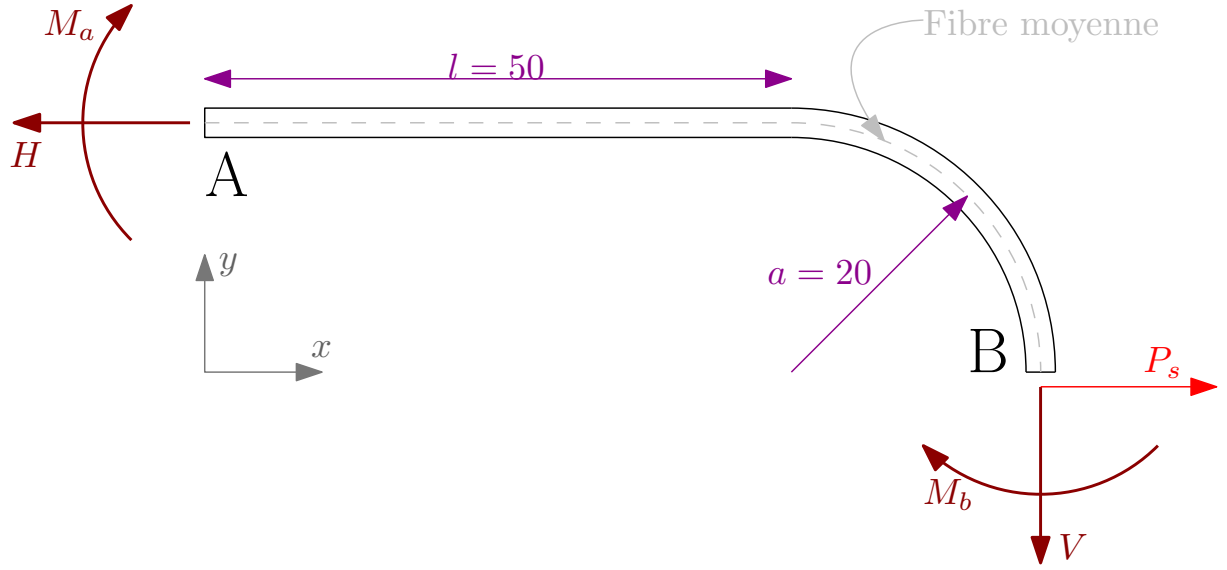


FIGURE 1.2 : Schéma rendu libre du modèle simplifié - Structure de poutres.

## 1.4 Résolution du modèle simplifié.

### 1.4.1 Détermination des réactions d'appui.

Le problème à résoudre est hyperstatique. En effet, les conditions limites font intervenir quatre réactions d'appui comme illustré sur la figure 1.2 pour seulement trois équations d'équilibre global.

Les équations d'équilibre en translation donnent immédiatement

$$V = 0 \quad \text{et} \quad H = P_s \quad (1.14)$$

L'équation d'équilibre en rotation ne permet pas de déterminer les valeurs de  $M_a$  et  $M_b$ . Le système est indéterminé et il est dès lors nécessaire de se servir des théorèmes énergétiques pour le résoudre [1].

En vue d'appliquer le théorème d'Engesser, on coupe l'encastrement de la section B de manière à permettre la rotation  $\theta_{M_b}$  de cette section. La "force" correspondant à cette rotation est le moment  $M_b$ . Par le théorème d'Engesser, on a

$$\theta_{M_b} = \frac{\partial W_E^*}{\partial M_b} \quad (1.15)$$

où  $W_E^*$  est le travail complémentaire des forces externes. Pour un système conservatif, on a  $W_E^* = W_I^*$  où  $W_I^*$  est le travail complémentaire interne. Ce dernier s'exprime, pour un modèle plan de poutre, par

$$W_I^* = \frac{1}{2} \int_{\text{poutre}} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA'} + \frac{M^2}{EI} \right] ds \quad (1.16)$$

avec  $M$ ,  $N$  et  $T$  les efforts internes de flexion, traction et cisaillement,  $A$  et  $I$  l'aire et l'inertie flexionnelle de la section rectangulaire et  $A' = \frac{5}{6}A$  la section équivalente pour le cisaillement.

Dans notre cas,  $A = 20 \times 10 = 200 \text{ [mm}^2\text{]}$  et  $I = 10 \times 20^3 / 12 = 6666.6 \text{ [mm}^4\text{]}$ .

En évaluant l'expression (1.15) et en imposant une rotation  $\theta_{M_b}$  nulle, on trouvera une condition sur l'effort  $M_b$ . Il s'agira de la réaction d'appui du problème hyperstatique.

On détermine en premier lieu la réaction d'appui  $M_a$  en fonction de  $P_s$  et de  $M_b$ . Ensuite, comme le montre la figure 1.3, on détermine les efforts internes. Ceux-ci sont continus le long de la poutre. On trouve, pour les parties droite et courbe,

$$\begin{aligned} \text{Partie droite} \begin{cases} N = H = P_s \\ T = 0 \\ M = M_a = aP_s - M_b \end{cases} & \quad \text{Partie courbe} \begin{cases} N = P_s \sin \phi \\ T = -P_s \cos \phi \\ M = aP_s \sin \phi - M_b \end{cases} \end{aligned} \quad (1.17)$$

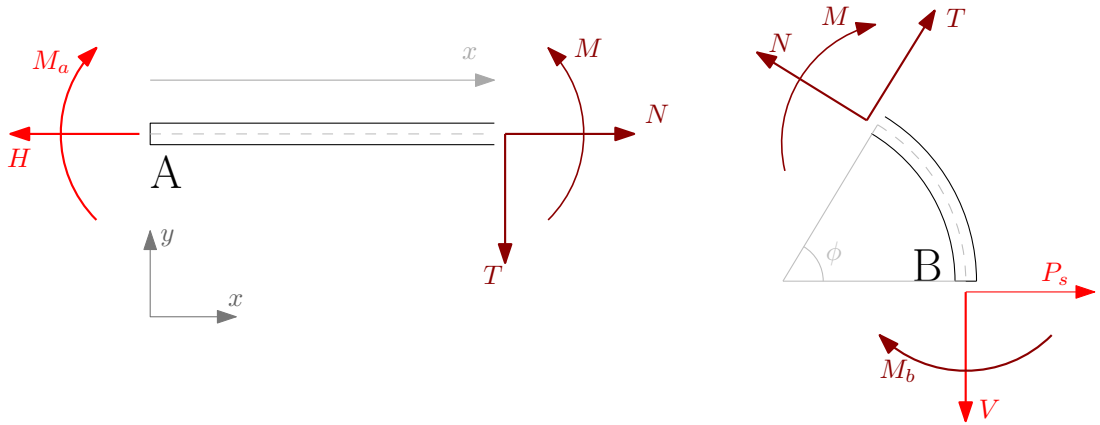


FIGURE 1.3 : Calcul des efforts internes.

En calculant  $W_I^*$  et en appliquant (1.15) avec  $\theta_{M_b} = 0$ , on trouve après quelques manipulations

$$M_b = \frac{aP_s(a+l)}{l + \pi a/2} = k'P_s \quad (1.18)$$

avec  $k' = 17.196 \text{ [mm]}$ .

Finalement, les réactions d'appui du problème sont donc

$$V = 0 \quad H = P_s \quad M_a = kP_s \quad M_b = k'P_s \quad (1.19)$$

avec  $k = a - k' = 2.804 \text{ [mm]}$ .

## 1.4.2 Contraintes dans la partie droite.

Les réactions d'appui étant maintenant connues, les efforts internes  $M$ ,  $N$  et  $T$  sont connus en tout point de la poutre. On peut dès lors déduire entièrement le champ des contraintes.

Des efforts internes (1.17), on tire que la partie droite n'est soumise qu'à de la flexion et de la traction. Les contraintes sont donc uniquement normales pour des facettes perpendiculaires

à l'axe  $x$ . En introduisant la coordonnée transversale  $t$  définie sur la figure 1.4, on a, pour les contraintes de traction  $\sigma_N$  et de flexion  $\sigma_M$  les expressions suivantes

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad \sigma_M = \frac{Mt}{I} \quad (1.20)$$

La contrainte totale vaut  $\sigma_N + \sigma_M$ , la distribution est linéaire par rapport à  $t$ . Comme les contraintes tangentielles sont nulles sur cette partie, la contrainte totale, en valeur absolue, est également la contrainte équivalente de Von Mises. Pour une charge  $P_s = 100$  [N], celle-ci varie de 0.08 [MPa] à 0.92 [MPa].

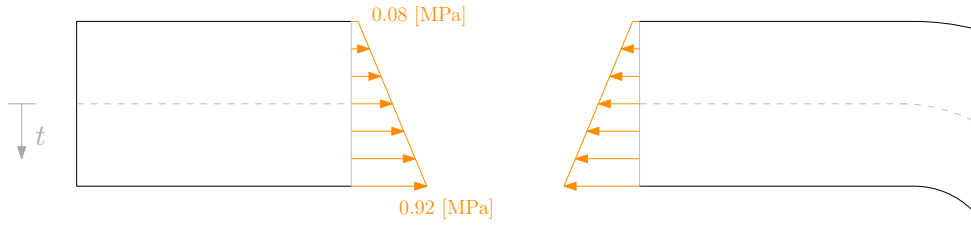


FIGURE 1.4 : Contraintes dans la partie droite pour une charge  $P_s = 100$  [N].

### 1.4.3 Contraintes dans la partie courbe.

Dans la partie courbe, les efforts internes ne sont plus constants et dépendent de la coordonnée angulaire  $\phi$ . De plus, on observe un cisaillement non nul. La traction et la flexion sont traitées comme pour la partie droite. On notera qu'il s'agit d'une approximation pour la flexion puisque l'équation de Navier  $\sigma_M = Mt/I$  n'est exacte que pour de la flexion pure et une poutre rectiligne.

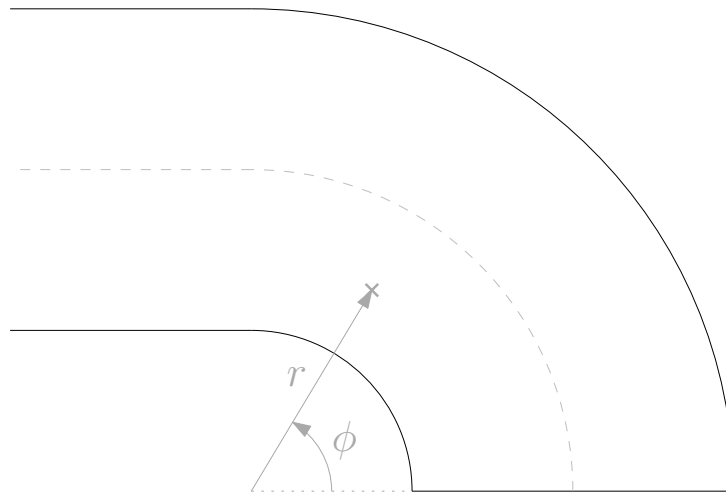


FIGURE 1.5 : Coordonnées  $(r, \phi)$  pour la partie courbe.



Avec les notations de la figure 1.5, on a pour les contraintes normales  $\sigma_N$  et  $\sigma_M$  des facettes perpendiculaires à l'axe neutre

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad \sigma_M = \frac{M(a-r)}{I} \quad (1.21)$$

où  $N$  et  $M$  sont donnés en (1.17) et dépendent de  $\phi$ .

Pour le cisaillement, on part du résultat théorique d'une section rectangulaire [1]. La distribution de contraintes tangentielles est parabolique, s'annule aux extrémités et est telle que son intégrale sur la section est égale à l'effort de cisaillement  $T$ . La contrainte tangentielle  $\tau_T$  due à  $T$  prend donc la forme suivante

$$\tau_T = \alpha(R30 - r)(r - R10) \quad (1.22)$$

où  $\alpha$  permet de satisfaire la dernière condition et dépend donc de  $\phi$ . En effectuant les calculs, on trouve  $\alpha = -7.5 \times 10^{-5} P_s \cos \phi$ .

La contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_M)^2 + 3\tau_T^2}$  peut être calculée en tout point.

La figure 1.6 présente la répartition sur le quart de maillon des contraintes de Von Mises en [MPa] qui résultent de ce calcul.

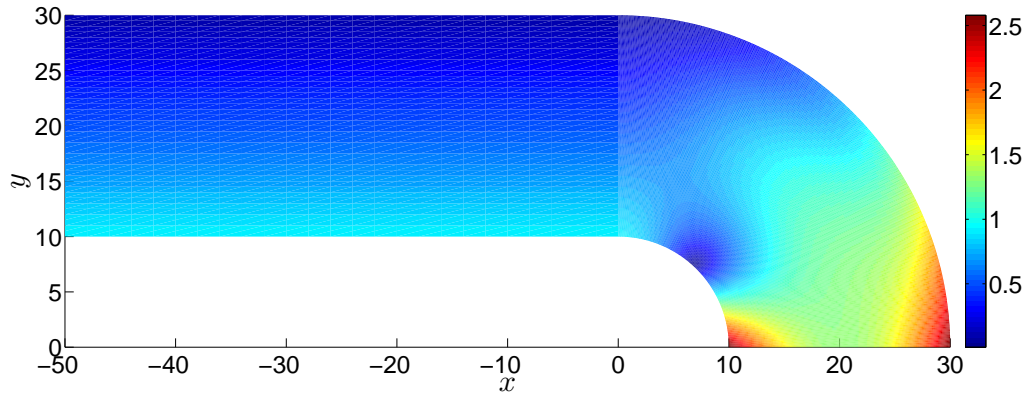


FIGURE 1.6 : Contraintes de Von Mises pour une charge  $P_s = 100$  [N], unité [MPa].

On retrouve sur cette figure une distribution des contraintes linéaire par rapport à  $y$  sur la partie droite. On observe également que les contraintes les plus élevées sont rencontrées sur la section B, à l'extrémité inférieure de la partie courbe. On peut déjà prévoir un maillage plus fin dans cette partie pour la résolution par éléments finis. Une zone semble aussi particulièrement peu sollicitée au centre de l'arc interne de la partie courbe. On pourra exploiter ce phénomène lors de l'optimisation. En effet, si cette zone ne participe pas beaucoup à la résistance du maillon, il doit être possible de s'en affranchir pour gagner de la matière et renforcer des zones plus sollicitées.

#### 1.4.4 Estimation de la force maximale admissible.

À partir du champ des contraintes déterminé dans la section précédente, on peut déduire la valeur maximale admissible pour  $P_s$  avant d'entrer dans le domaine plastique. Pour le matériau constituant le maillon, la contrainte de Von Mises d'entrée en plasticité est donnée dans le tableau 1 et vaut  $\sigma_y^0 = 600$  [MPa].

Pour une charge  $P_s = 100$  [N], on trouve une contrainte de Von Mises maximale dans la pièce de 2.58 [MPa]. Comme l'ensemble des équations est linéaire, on peut directement déterminer la force  $P_s^{max}$  qui engendre une contrainte maximale de 600 [MPa]. Celle-ci vaut

$$P_s^{max} = 100 \times \frac{\sigma_y^0}{2.58} = 23.26 \text{ [kN]} \quad (1.23)$$

Pour le maillon entier, on a donc une force maximale  $P^{max} = 2 \times P_s^{max} = 46.51$  [kN].

La valeur obtenue a été calculée au prix de nombreuses simplifications. En particulier, on a négligé les concentrations de contraintes. Or, comme on le montre dans la section 1.5, celles-ci sont principalement rencontrées dans la zone critique, le voisinage du point d'application de  $P_s$ , où l'on rencontre les contraintes maximales. Le fait de ne pas les considérer amène à surestimer la force maximale  $P^{max}$ . La résolution par éléments finis tiendra compte de ces concentrations de contraintes et permettra d'estimer  $P^{max}$  plus précisément. En attendant, on dispose d'une valeur approximative qui, on le verra, n'est pas trop éloignée de la réalité.

#### 1.4.5 Énergie interne de déformation.

Pour un système conservatif et linéaire, ce qui est le cas ici, l'énergie interne de déformation  $\mathcal{U}$  est identique au travail complémentaire interne  $W_I^*$  dont l'expression pour une poutre étudiée dans un plan est donnée à l'équation (1.16). Comme nous connaissons les efforts de traction, de flexion et de cisaillement en tout point de l'axe de la poutre (équations 1.17), l'intégrale peut être directement évaluée. Le code MATLAB repris en annexe effectue le calcul. On trouve

$$\mathcal{U} = 2.1547 \times 10^{-9} P_s^2 \text{ [J]} \quad (1.24)$$

soit  $\mathcal{U} = 21.547 \times 10^{-6}$  [J] pour une force de 100 [N]. On remarque la dépendance de  $\mathcal{U}$  en  $P_s^2$ , ce qui est attendu.

#### 1.4.6 Travail de la force extérieure.

L'objectif est d'exprimer l'énergie potentielle totale, la *TPE*, définie par  $\mathcal{U} - \mathcal{P}$ . On vient de déterminer la valeur de  $\mathcal{U}$ , il reste à calculer  $\mathcal{P}$ , le travail des forces extérieures. Dans notre cas, une seule force extérieure est à prendre en compte, il s'agit de la charge  $P_s$ . En effet, les quatre réactions d'appui n'effectuent aucun travail puisqu'elles bloquent le déplacement qui leur est associé en leur point d'application. Le travail des forces extérieures s'exprime donc comme  $\mathcal{P} = P_s \Delta_{P_s}$  où  $\Delta_{P_s}$  est le déplacement du point d'application de  $P_s$  dans l'axe de cette force, horizontal. Le déplacement  $\Delta_{P_s}$  dépend linéairement de  $P_s$  et donc le travail  $\mathcal{P}$  évolue quadratiquement avec  $P_s$ .

Le déplacement horizontal  $\Delta_{P_s}$  peut être déterminé par le théorème d'Engesser. On a en effet

$$\Delta_{P_s} = \frac{\partial W_I^*}{\partial P_s} \quad (1.25)$$

De manière similaire à la détermination des conditions d'appui hyperstatiques, on évalue  $\Delta_{P_s}$  à l'aide de l'expression (1.16). Les calculs sont effectués par le code MATLAB, qui fournit la valeur  $\Delta_{P_s} = 4.3051 \times 10^{-6} P_s$  [mm]. Dès lors,

$$\mathcal{P} = 4.3051 \times 10^{-9} P_s^2 \text{ [J]} \quad (1.26)$$

et, pour une force  $P_s = 100$  [N],  $\mathcal{P} = 4.3051 \times 10^{-6}$  [J]. On a presque  $2\mathcal{U} = \mathcal{P}$ , ce qui est attendu comme la poutre est à l'équilibre et que le problème est piloté par des forces<sup>3</sup>. La *TPE* vaut  $\mathcal{U} - \mathcal{P} = -2.1504 \times 10^{-9} P_s^2$  [J] et est bien négative.

Pour la validité des résultats, on reste attentif au fait que de grosses simplifications ont été effectuées pour ramener le problème à une structure de poutre. Pour rappel, on notamment totalement négligé les concentrations de contraintes. Malgré cela, comme on le verra dans la section 2.7.1, la *TPE* obtenue par la méthode des éléments finis est très proche de celle de cette section. Cela indique que, *globalement*, notre simplification du problème est satisfaisante. *Localement*, on peut cependant s'attendre à des différences importantes.

### 1.4.7 Champ de déplacements.

La détermination du champ des déplacements nécessite la formulation d'hypothèses supplémentaires, qui n'étaient pas nécessaires pour le calcul de l'énergie potentielle totale. On s'attend à ce que les résultats que l'on obtiendra dans cette section soient un peu moins fiables que les précédents.

Connaissant le champ des contraintes, celui des déformations peut être obtenu en utilisant la loi de Hooke (1.2). La résolution du système d'équations différentielles (1.4) donne ensuite l'expression des déplacements à partir des déformations. Cependant, comme la pièce possède une partie courbe, ces équations doivent être exprimées en coordonnées polaires pour les déplacements  $u_r$  et  $u_\phi$ .

Pour contourner le problème, on simplifie encore un peu plus le système, on considère que la structure de poutre n'est même plus courbe et qu'elle prend la forme de la figure 1.7. Les conditions d'appui sont identiques au problème courbe. La longueur  $b$  est choisie égale à 20 [mm] de façon cohérente avec l'approximation précédente.

Pour déterminer les réactions d'appui de la structure, on utilise une nouvelle fois le théorème d'Engesser, on trouve

$$M_b = \frac{a(a/2 + l + b)}{a + l + b} P_s \quad (1.27)$$

soit,  $M_b = 17.778 P_s = k'_c P_s$ . Ce moment est presque égal à celui que l'on avait avec une poutre courbe.

---

3. Les déplacements imposés sont tous nuls.

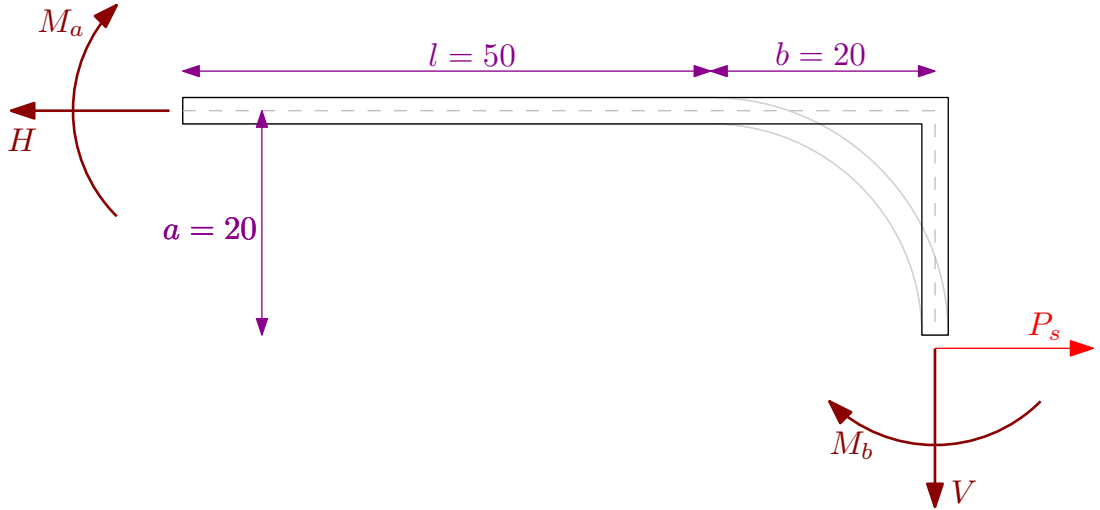


FIGURE 1.7 : Nouvelle simplification du problème pour la détermination du champ des déplacements, dimensions en [mm].

À partir des réactions d'appui, on peut déterminer les efforts internes et en déduire les déplacements de la fibre neutre  $v_{perp}$  perpendiculaires à l'axe de la poutre par

$$\frac{d^2 v_{perp}}{ds^2} = \frac{M}{EI} + \frac{1}{GA'} \frac{dT}{ds} \quad (1.28)$$

où  $s$  est une coordonnée qui suit l'axe de la poutre,  $M(s)$  est le moment fléchissant interne dans la section et  $T = P_s$  l'effort tranchant qui est constant [1]. On calcule également le déplacement horizontal  $u_{hor}$  de la partie horizontale dû à l'effort normal. Celui-ci est donné par

$$\frac{du_{hor}}{ds} = \frac{N}{EA} \quad (1.29)$$

avec  $N = P_s$  dans la partie horizontale.

L'intégration des deux dernières équations fait apparaître trois constantes que l'on fixe grâce aux conditions d'appui. On notera que cela donne 4 équations (pour les 4 conditions d'appui) pour 3 inconnues. La procédure de résolution du problème hyperstatique par les théorèmes énergétiques assure la compatibilité des solutions.

Pour la fibre moyenne, on obtient des déplacements polynomiaux par rapport aux coordonnées. Ils sont représentés à la figure 1.8 pour une force  $P_s = 100$  [N] (ils sont amplifiés 10000 fois). La déformée est intuitive pour la géométrie simplifiée. On remarque que l'angle droit entre les parties horizontale et verticale est bien conservé. De même, les conditions limites sont respectées.

On détermine ensuite le déplacement en chaque point de la pièce. On néglige l'effet Poisson, on considère donc que l'aire de la section reste constante. On considère également qu'elle reste plane et constamment perpendiculaire à la fibre neutre. On tient enfin compte du fait que l'angle de rotation  $\theta$  des sections droites est très faible. Perpendiculairement à l'axe de la poutre, le déplacement est égal au déplacement de la fibre neutre au premier ordre. Parallèlement, la

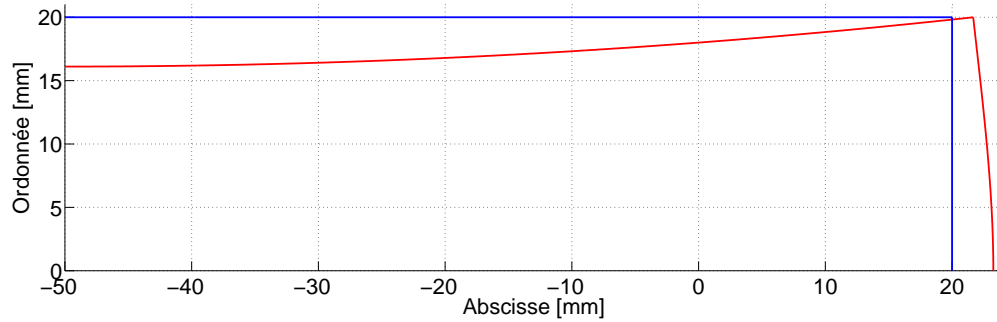


FIGURE 1.8 : Allure de la déformée de la fibre moyenne, exagérée 10000 fois, pour une force  $P_s = 100$  [N].

rotation des sections engendre un déplacement non négligeable. La figure 1.9 illustre la situation pour la partie horizontale. On ajoute au déplacement horizontal dû à la traction une composante causée par la rotation. Au premier ordre toujours, celle-ci vaut  $-y_0\theta$  où  $y_0$  est l'ordonnée du point considéré par rapport à la fibre neutre.

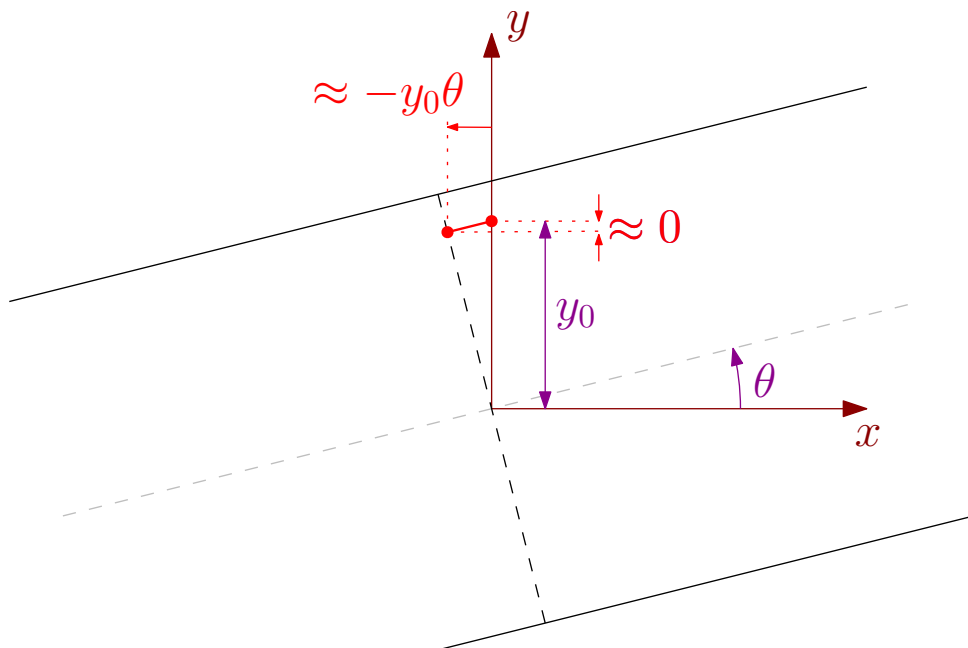


FIGURE 1.9 : Déplacement relatif à la fibre neutre d'un point quelconque de la poutre pour des rotations de faible amplitude.

Après calculs, on trouve, pour  $P_s = 100$  [N], le champ des déplacements représenté à la figure 1.10. Il est calculé en trois parties : une partie horizontale, verticale et un rectangle pour combler l'espace manquant. Cette dernière partie est calculée en extrapolant les valeurs des deux premières parties et en calculant leur moyenne. Les petites discontinuités entre les parties

sont dues au fait que la poutre est fort large par rapport à sa longueur. C'est une conséquence des hypothèses effectuées, cela ne correspond pas à une discontinuité réelle dans la pièce.

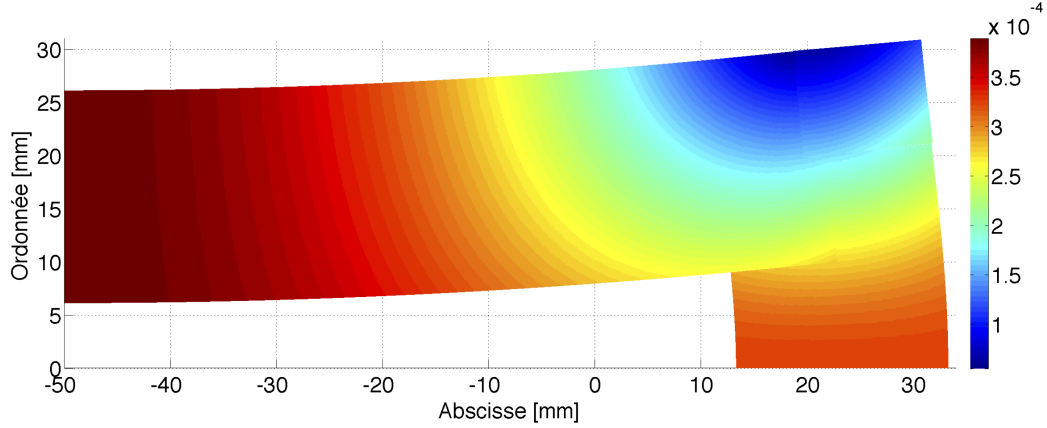


FIGURE 1.10 : Déformée de la structure simplifiée, exagérée 10000 fois sur la figure, pour une force  $P_s = 100$  [N], valeurs en [mm].

On comparera les résultats obtenus dans cette section avec ceux issus de la méthode des éléments finis. En attendant, on peut comparer localement le déplacement de la poutre au point d'application de  $P_s$  que l'on avait calculé à l'aide des théorèmes énergétiques dans la section 1.4.6. On a ici  $3.2540 \times 10^{-6} P_s$  [mm] contre  $4.3051 \times 10^{-6} P_s$  [mm] auparavant. La différence est inférieure à 25%, ce qui reste raisonnable compte tenu des approximations supplémentaires effectuées dans cette section. On s'attend à ce que la valeur de la section 1.4.6 soit plus fiable. On a par contre ici une information sur l'ensemble de la pièce.

## 1.5 Concentrations de contraintes et zones de forts gradients de contraintes.

Le problème initial non simplifié comporte une force concentrée comme l'illustre la figure 1. On n'en a pas tenu compte lors de la simplification par une poutre. Dans cette section, on analyse l'effet local de la force concentrée.

L'étude de l'application d'une force linéique concentrée  $P$  sur un plan semi-infini a été réalisée par Flamant [2]. Avec les coordonnées polaires définies à la figure 1.11, on a

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi} \frac{1}{r} \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.30)$$

pour un problème en état plan (de contrainte ou de déformation). Le champ des contraintes équivalentes de Von Mises est représenté à la figure 1.11 également.

La première observation que l'on fait est que la contrainte  $\sigma_r$  est infinie au point d'application de  $P$ . C'est l'implication logique de la définition d'une force concentrée en milieu continu. Rappelons qu'un tel chargement n'existe pas en réalité, il ne constitue qu'une

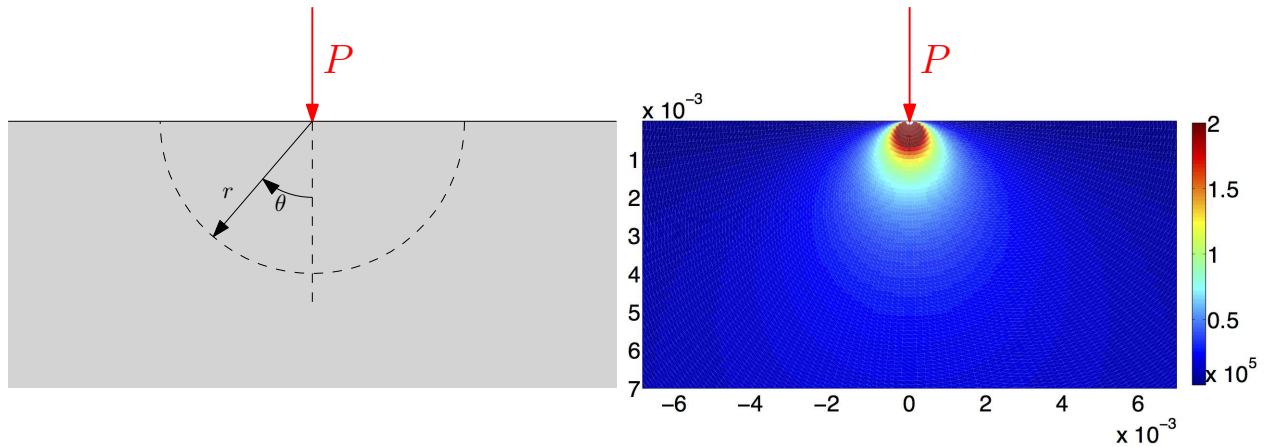


FIGURE 1.11 : Problème de Flamant et contraintes de Von Mises  $[\text{N/m}^2]$  dues à une charge concentrée  $P = 200 [\text{N}]$ , dimensions en  $[\text{m}]$ .

modélisation d'une force appliquée sur une petite surface.

Ensuite, les contraintes décroissent en  $1/r$  si bien que la taille de la zone d'influence où la contrainte est significativement supérieure à la valeur moyenne estimée précédemment (de l'ordre de  $1 [\text{MPa}]$ ) est d'environ  $5 [\text{mm}]$ .

Enfin, en comparant le cas théorique du problème de Flamant avec la situation du maillon, on doit noter deux différences essentielles. Le maillon n'est pas semi-infini, sa largeur dans le plan est limitée (elle vaut  $20 [\text{mm}]$ ). Il en résulte des conditions limites en surface, celles-ci imposent notamment que  $\sigma_r = 0$  sur le demi-cercle extérieur. Cette condition n'est pas compatible avec la solution (1.30). De plus, la surface contenant le point d'application de  $P$  est courbe et non plane. On ne pourra donc pas directement appliquer le résultat du problème de Flamant au maillon.

Toutefois, proche du point d'application de  $P$ , la surface circulaire du maillon peut être assimilée à un plan et on s'attend à ce que les conditions limites aient peu d'influence. Ainsi, dans cette zone, sans pour autant connaître l'expression exacte du champ des contraintes, on prédit une concentration de contrainte qui décroît en  $1/r$ .

On verra que l'on retrouve ce résultat avec la méthode des éléments finis. Cela entraînera une singularité que l'on évitera en modifiant légèrement le chargement. On gardera toutefois toujours une concentration de contrainte à cet endroit, c'est juste qu'elle ne sera plus infinie. Ainsi, même si l'on évite la singularité, le maillage devra toujours être suffisamment fin.

En résumé, on s'attend principalement à de fortes contraintes au voisinage de l'application de  $P$ . Cette zone est représentée en jaune sur la figure 1.12.

En plus de ces remarques, on déduit du champ des contraintes de Von Mises (Fig. 1.6) qu'il apparaît deux zones de forts gradients de contraintes. La première est rencontrée le long de l'arc circulaire intérieur. Les contraintes de Von Mises passent sur une courte distance de leur valeur maximale à leur valeur minimale. La deuxième se situe le long de la coupe B, le gradient  $y$  est

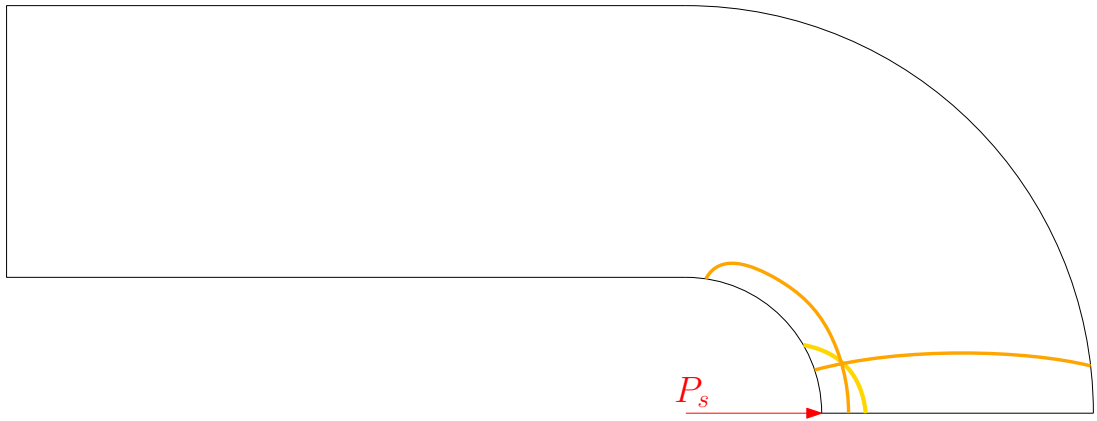


FIGURE 1.12 : Zones de concentrations de contraintes et de forts gradients de contraintes attendues par la théorie de l'élasticité linéaire.

presque aussi important que dans la première zone. Le gradient important provient du moment élevé qui s'exerce sur cette section. On avait en effet calculé  $M_b = k'P_s = 17.196P_s$ . Les deux zones sont représentées en orange sur la figure 1.12.

En tenant compte de toutes ces remarques, on s'attend à devoir raffiner le maillage aux zones mises en évidence dans la figure 1.12.



## Partie 2

# Étude avec la méthode des éléments finis.

Dans cette seconde partie, le problème du maillon de chaîne est étudié à l'aide de la méthode des éléments finis dans le but de déterminer la force maximale admissible. Le logiciel SAMCEF Field (Système pour l'Analyse des Milieux Continus par Éléments Finis) est utilisé.

Dans un premier temps, la modélisation du problème mécanique dans le logiciel SAMCEF Field est présentée. Les conditions d'appui et le chargement imposés sont décrits et justifiés.

Ensuite, les différents types d'éléments disponibles dans SAMCEF Field sont comparés sur plusieurs aspects afin de déterminer le maillage optimal qu'on utilisera pour la suite de l'étude.

Finalement, les résultats relatifs aux champs des déplacements et de contraintes obtenus sont discutés. En particulier, ils sont comparés à ceux obtenus en utilisant les développements analytiques de la partie précédente.

## 2.1 Modélisation du problème mécanique avec le logiciel SAMCEF Field.

Dans un premier temps, la géométrie de la pièce mécanique est dessinée dans le logiciel CATIA. Comme dans la partie précédente et pour les mêmes raisons, seule l'étude d'un quart de maillon est nécessaire.

La géométrie est alors importée dans SAMCEF Field. Après s'être placé en état plan de contrainte, on définit un comportement de membrane de 10 [mm] d'épaisseur sur l'ensemble du maillon. Les caractéristiques du matériau (Tableau 1) sont complétées.

Les conditions limites imposées aux sections coupées par les symétries sont celles décrites précédemment, à savoir, des encastremements à rouleaux aux deux sections coupées. Les modes rigides sont ainsi bloqués. On vérifiera plus loin que la manière de traiter la symétrie de la pièce est bien justifiée et que les résultats obtenus sur le quart de maillon correspondent à ceux qui auraient pu être obtenus en étudiant le maillon complet.

### 2.1.1 Chargement et singularités.

Le quart de maillon de chaîne est soumis à une force concentrée. Il s'agit d'une simplification de la réalité qui n'est pas rencontrée en pratique et qui pose des problèmes numériques. Celle-ci engendre en effet une singularité. On s'en rend compte en raffinant le maillage au voisinage de son point d'application ; on observe que les contraintes calculées par SAMCEF Field ne convergent pas dans le sens où, plus les éléments utilisés sont petits, plus la contrainte prédite est élevée. La figure 2.1 illustre ce phénomène. La contrainte calculée au voisinage du point d'application de  $P_s$  est inversement proportionnelle à la taille des éléments dans cette zone, l'ajustement en  $1/r$  le confirme.

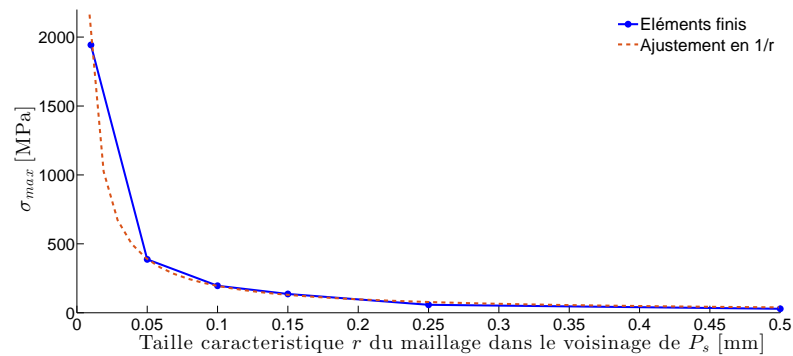


FIGURE 2.1 : Divergence des contraintes au voisinage du point d'application de  $P_s$  lors du raffinement de maillage.

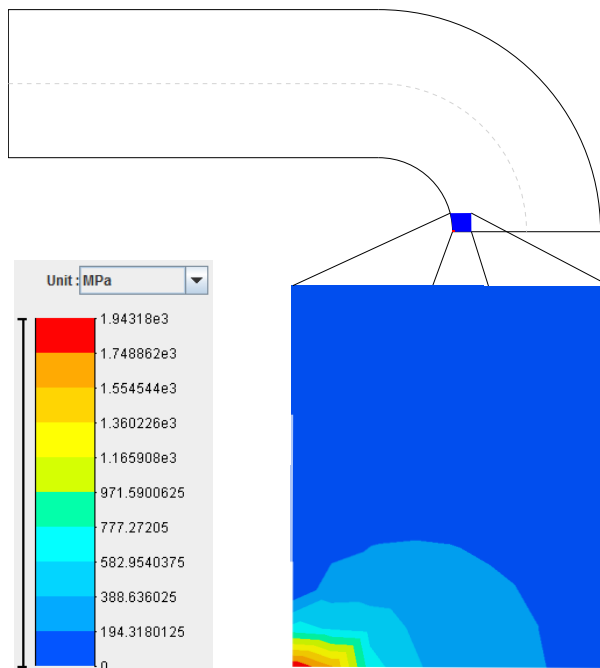


FIGURE 2.2 : Champ de contraintes au voisinage de la singularité.

La contrainte théorique correspondant à ce chargement est infinie (cf. problème de Flamant). Le défaut de convergence et la singularité en  $1/r$  étaient attendus<sup>1</sup>. À titre d'illustration, la figure 2.2 présente la distribution des contraintes au voisinage de  $P_s$  pour de très petits éléments. Sur cette figure, les valeurs des contraintes ont été lissées pour augmenter la lisibilité. On reste attentif au fait que dans une résolution par éléments cinématiquement admissibles, seules les moyennes des contraintes sur chaque élément sont réellement significatives. Les valeurs ponctuelles ne sont pas réellement représentatives [6].

Pour éviter l'apparition de la singularité associée à une force ponctuelle, on applique la force  $P_s$  sur une surface finie - une longueur dans le plan - plutôt qu'en un point. L'aire de cette surface d'application de la force est susceptible d'influencer considérablement les valeurs locales des contraintes et donc la charge maximale admissible. Étant donné que le maillon est destiné à s'assembler avec d'autres maillons pour former une chaîne, la force  $P$  s'applique en pratique sur toute la zone de contact entre deux maillons successifs, soit, en première approximation, sur une longueur égale à l'épaisseur  $t$  d'un maillon. Comme on a choisi d'étudier seulement un quart de maillon, la force résultante  $P_s = P/2$  est appliquée sur une longueur  $t/2$  de 5 [mm], cela correspond à un angle de 29 degrés. Ce choix est adopté pour toute la suite du rapport. Le nouveau problème est représenté à la figure 2.3.

Lors de l'optimisation, on sera amené à modifier l'épaisseur du maillon, on veillera à adapter la longueur d'application de la charge en conséquence.

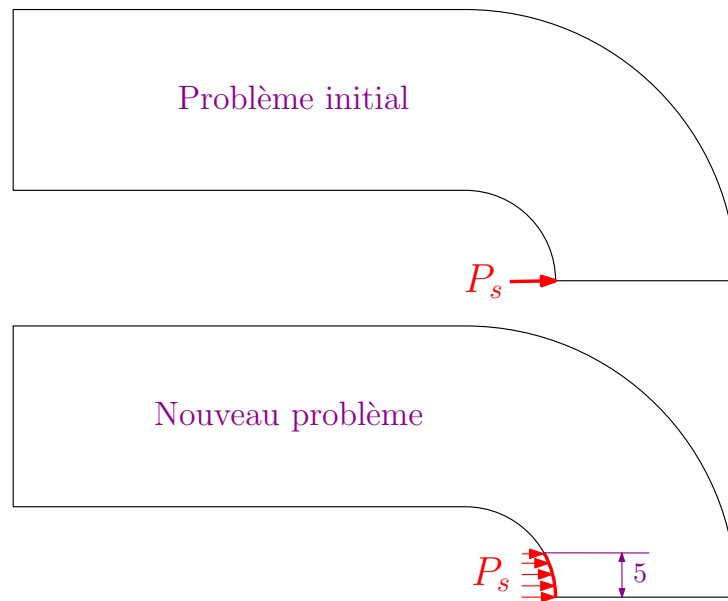


FIGURE 2.3 : Nouveau problème permettant d'éviter la singularité.

1. On notera que la taille caractéristique de l'élément juste sous  $P_s$  est liée à la distance  $r$  par rapport à  $P_s$ . Il s'ensuit le lien entre taille de l'élément et décroissance en  $1/r$ .

## 2.2 Maillages proposés.

L'étude réalisée grâce à la théorie de l'élasticité linéaire a permis de mettre en évidence les zones présentant des gradients de contraintes élevés. Plus le gradient des contraintes est élevé, plus le maillage doit être raffiné. Il est inutile et coûteux de raffiner excessivement le maillage dans des zones présentant un faible gradient des contraintes. Ces zones peuvent en effet être résolues correctement avec un maillage grossier. Affiner le maillage augmente inutilement le temps de calcul ainsi que la mémoire utilisée. Dès lors, certaines parties de la pièce mécanique doivent contenir un maillage fin, d'autres pas. Il est donc nécessaire de décomposer la pièce en sous-domaines, zones sur lesquelles le maillage peut être contrôlé spécifiquement, pour différencier les zones à fort et à faible gradient de contraintes.

On propose ici trois types de maillages : les maillages grossiers, les maillages intermédiaires et les maillages élaborés.

- Les maillages dits 'grossiers' ne comportent pas de sous-domaine : la même taille d'élément est utilisée sur tout le maillon. Ils permettent de se faire une idée globale de la répartition des contraintes. Pour ce maillage, si l'on veut capter correctement les rapides variations de contraintes, on doit raffiner l'ensemble du maillon. Cela n'est pas efficace.
- Les maillages dits 'intermédiaires' contiennent peu de sous-domaines. Comme illustré sur le haut de la figure 2.4, on divise la pièce en trois parties. La maillage est raffiné à l'extrémité circulaire de la pièce, là où les plus fortes contraintes sont prédites par la théorie de l'élasticité linéaire. On introduit un maillage de taille intermédiaire dans le domaine central. La définition d'une zone droite permet d'éviter la propagation dans la zone rectiligne des difficultés de maillage dans la zone courbe.

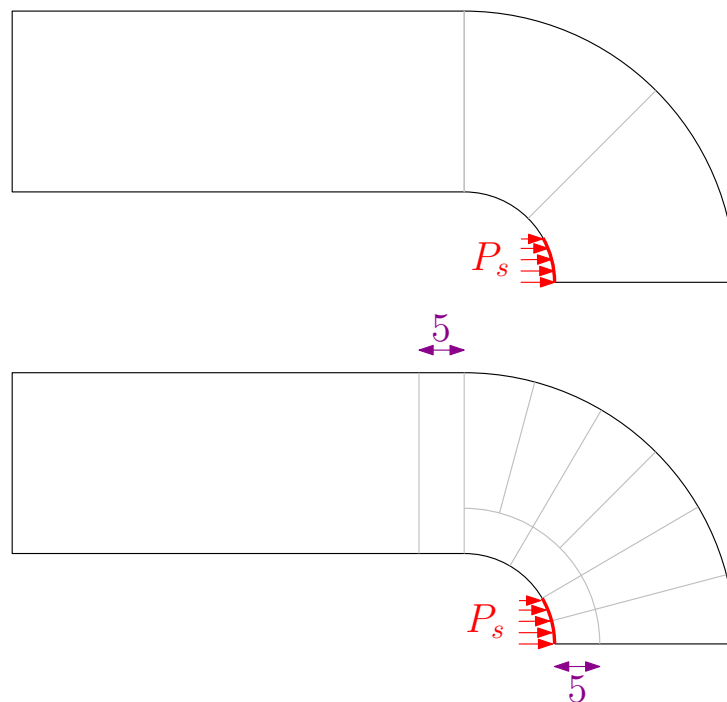


FIGURE 2.4 : Sous-domaines des maillages intermédiaire (haut) et élaboré (bas) (dimensions en [mm]).

- Les maillages dits ‘élaborés’ sont composés de plus de sous-domaines. La pièce est divisée en douze parties, reprises dans le bas de la figure 2.4.

La construction des sous-domaines n’a pas été réalisée en une fois et a nécessité l’analyse de la qualité des maillages en utilisant les outils présentés à la section 2.4.

La démarche de construction est la suivante.

En partant du maillage intermédiaire (figure 2.4), on analyse la répartition et la qualité des éléments. Si le maillage est effectivement fin près de l’application de  $P_s$  comme souhaité, sa qualité globale n’est pas satisfaisante. En particulier, les zones circulaires sont grandes et le maillage se détériore lorsqu’on s’éloigne de leurs frontières. Pour pallier ce problème, on introduit plus de coupes radiales dans la partie courbe. Le maillage élaboré est construit avec 6 coupes radiales qui permettent (Cf. section 2.4) d’obtenir un maillage de bonne qualité.

L’analyse menée dans la section précédente ne fait pas apparaître de grandes valeurs du gradient des contraintes dans la partie extérieure de la zone courbe du maillon, il n’est donc pas nécessaire d’y raffiner particulièrement le maillage. Par contre, un maillage très fin doit être introduit dans la partie intérieure de la zone courbe à proximité de la zone d’application de  $P_s$ . Dès lors, la partie circulaire est coupée à un rayon de 15 [mm]. Des coupes radiales sont également introduites dans la zone d’application de  $P_s$  pour éviter une perte de qualité du maillage dans la direction radiale.

La partie rectiligne ne doit pas être particulièrement raffinée. Le gradient de contrainte y est constant et bien plus faible que dans la partie courbe.

Pour éviter un changement brutal de la taille des éléments entre la partie courbe et la partie rectiligne, on introduit un dernier sous-domaine entre les sous-domaines correspondants. La largeur de ce sous-domaine est de 5 [mm], ce qui est suffisant pour permettre une transition progressive de la taille des éléments.

Que ce soit pour le maillage intermédiaire ou le maillage élaboré, il convient de toujours veiller à avoir une évolution graduelle de la résolution spatiale et ainsi d’éviter tout changement brutal dans la taille d’éléments adjacents.

## 2.3 Différents types d’éléments.

Les trois stratégies de maillages présentées à la section précédente sont mise en œuvre en utilisant des éléments finis de quatre types différents :

- les éléments triangulaires du premier ordre ( $T_3$ )
- les éléments triangulaires du second ordre ( $T_6$ ) ;
- les éléments quadrangulaires du premier ordre ( $Q_4$ ) ;
- les éléments quadrangulaires du second ordre ( $Q_8$ ).

Les différents types d’éléments sont décrits aux paragraphes suivants [5]. Les maillages correspondants sont également présentés.

### 2.3.1 Éléments triangulaires du premier ordre ( $T_3$ ).

L'élément triangulaire linéaire est le plus simple des éléments quand on travaille à deux dimensions. Il compte trois nœuds qui possèdent chacun deux degrés de liberté.

Les fonctions de forme d'un élément  $T_3$  permettent de représenter les modes rigides et les déformations constantes : cet élément est dit complet. Il est aussi compatible. Ces deux caractéristiques font de l'élément  $T_3$  un élément consistant.

Les trois types de maillages réalisés sont représentés aux figures 2.5, 2.6 et 2.7. Pour assurer la lisibilité, les maillages représentés comportent bien moins d'éléments que les maillages réellement utilisés. Les figures permettent néanmoins d'illustrer les différentes stratégies de maillage.

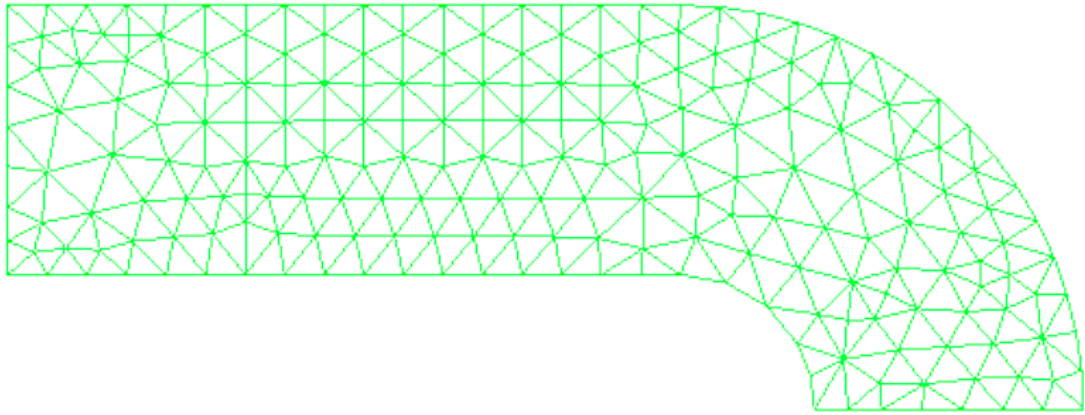


FIGURE 2.5 : Maillage grossier pour les  $T_3$ .

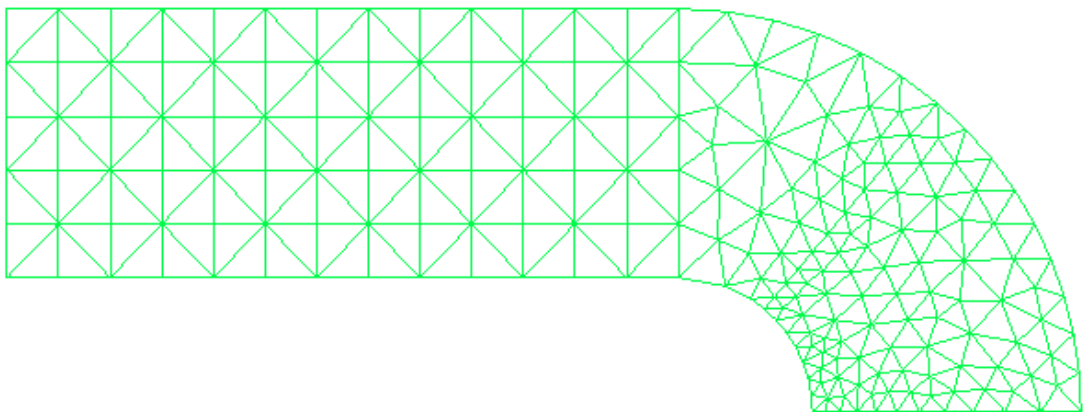


FIGURE 2.6 : Maillage intermédiaire pour les  $T_3$ .

### 2.3.2 Éléments triangulaires du second ordre ( $T_6$ ).

Les éléments triangulaires quadratiques ont 6 nœuds (3 aux sommets et 3 aux milieux des côtés) comptant chacun deux degrés de liberté. Ces éléments sont également consistants.

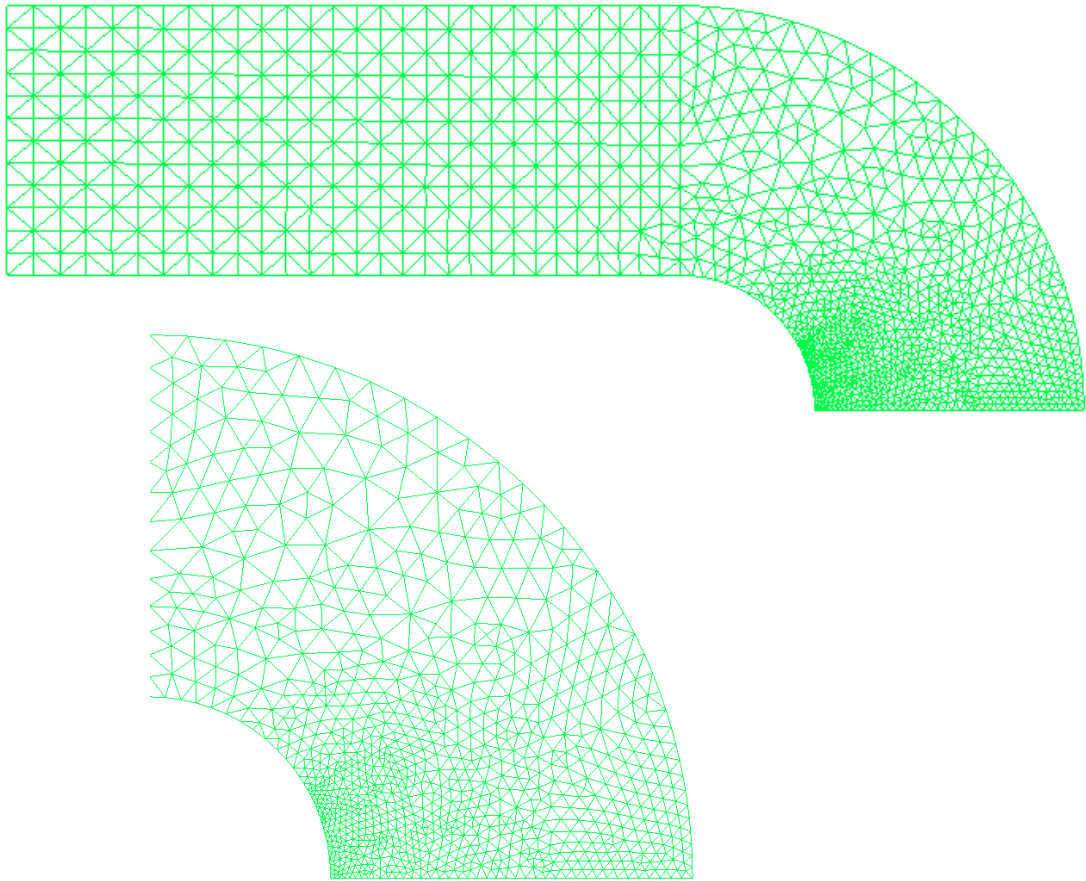


FIGURE 2.7 : Maillage élaboré pour les  $T_3$ .

Les maillages correspondants sont identiques à ceux réalisés avec l'élément  $T_3$ . Seul le recours à des fonctions de forme quadratiques distingue ces maillages de ceux construits avec les éléments  $T_3$ .

### 2.3.3 Éléments quadrangulaires du premier ordre ( $Q_4$ ).

Les éléments  $Q_4$  sont des éléments bilinéaires comportant 4 nœuds. Les champs des déplacements sont supposés pouvoir s'écrire comme un produit de fonctions linéaires en  $x$  et en  $y$ .

Ces éléments sont incompatibles de sorte que la convergence de ceux-ci ne peut être démontrée. On verra cependant plus loin que ces éléments convergent, et même plus vite que les éléments triangulaires.

On pourrait être tenté d'introduire des mailles étirées longitudinalement dans la partie rectiligne du maillon. En effet, les contraintes varient peu le long de l'axe du maillon puisque les efforts normaux et de flexion sont constants en première approximation. Ce choix est pourtant écarté car plus le rapport de longueurs - *Aspect Ratio* - est élevé, moins les éléments bilinéaires  $Q_4$  sont fiables en flexion : les éléments avec un grand *Aspect Ratio* conduisent à surestimer la raideur en flexion. Dès lors, des éléments carrés sont utilisés dans la partie rectiligne.

Les trois maillages obtenus par application des différentes stratégies envisagées sont représentés aux figures 2.8, 2.9 et 2.10. Notons que ces maillages comportent un très faible pourcentage d'éléments triangulaires.

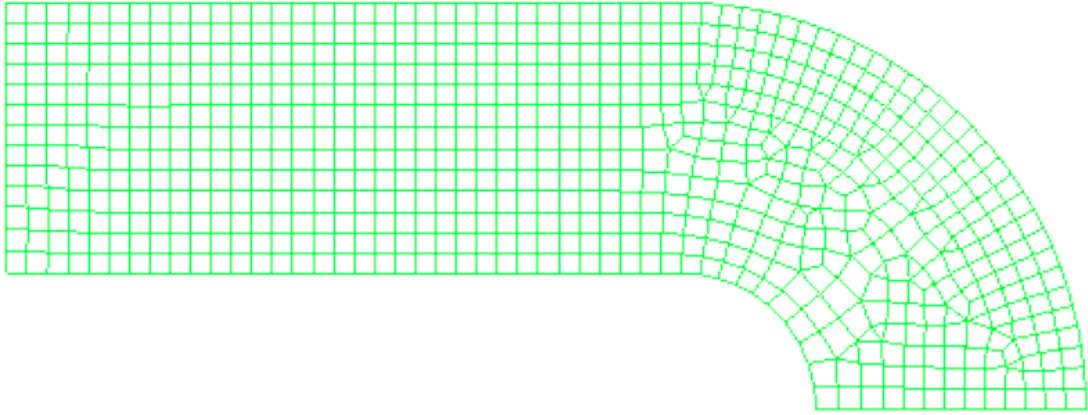


FIGURE 2.8 : Maillage grossier pour les  $Q_4$ .

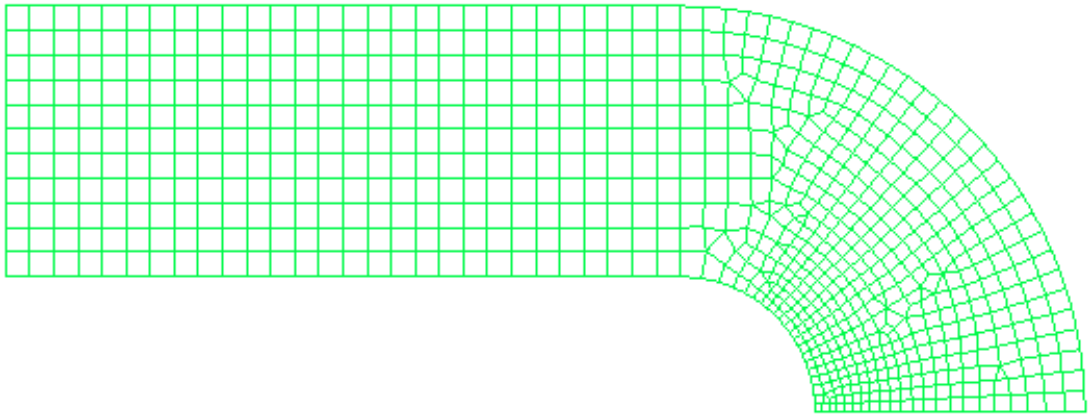


FIGURE 2.9 : Maillage intermédiaire pour les  $Q_4$ .

### 2.3.4 Éléments quadrangulaires du second ordre ( $Q_8$ ).

Les éléments  $Q_8$  comptent 8 nœuds (4 aux sommets et 4 aux milieux des côtés) et donc 16 degrés de liberté. Ce sont des éléments biquadratiques pour lesquels les déplacements sont supposés pouvoir s'écrire comme un produit d'un polynôme du second degré en  $x$  et d'un autre en  $y$ .

Ces éléments ne sont ni complets, ni compatibles, et la convergence ne peut donc pas être démontrée. En pratique, ces éléments convergent cependant.

Les trois maillages ont la même allure que ceux réalisés avec l'élément  $Q_4$ .



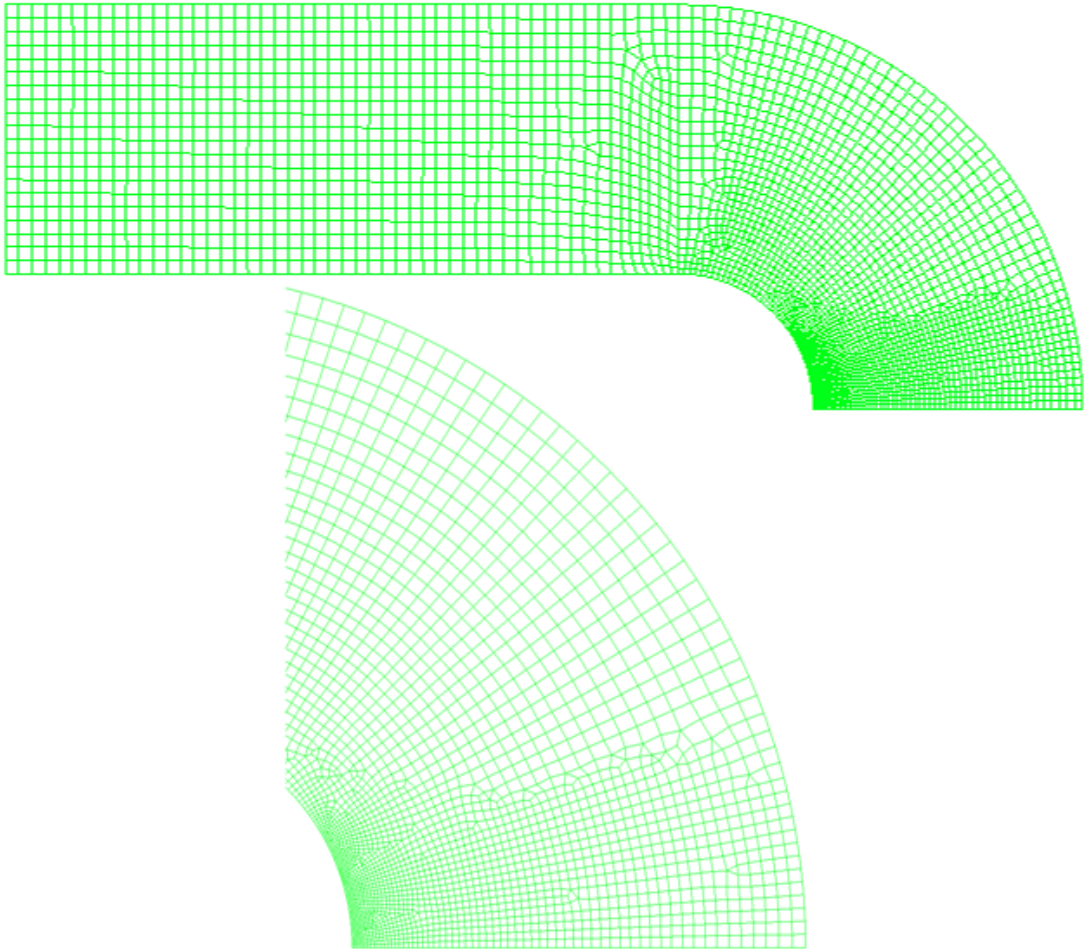


FIGURE 2.10 : Maillage élaboré pour les Q4.

## 2.4 Étude de la qualité du maillage.

Les éventuelles irrégularités du maillage risquent d'influencer la solution et/ou la convergence, il convient donc de vérifier la qualité des maillages.

Le tableau 2.1 reprend, pour chaque stratégie de maillage et chaque type d'éléments finis, le nombre d'éléments utilisés ainsi que le nombre de degrés de liberté des maillages étudiés dans cette section <sup>2</sup>.

---

2. Il convient d'être attentif au fait que le nombre de degrés de liberté affiché dans SAMCEF Field pour les quadrangles linéaires est erroné. Le nombre exact de degrés de liberté est obtenu en multipliant le nombre de nœuds par le nombre de degrés de liberté par nœud et en retirant le nombre de degrés de liberté imposés par les conditions d'appui [3].

<i>Stratégie</i>	<i>Maillages grossiers</i>				<i>Maillages intermédiaires</i>			
<i>Éléments</i>	$T_3$	$T_6$	$Q_4$	$Q_8$	$T_3$	$T_6$	$Q_4$	$Q_8$
<i>Nombre d'éléments</i>	3976	3976	3882	3882	4266	4266	4538	4538
<i>Nombre de degrés de liberté</i>	4132	14305	6512	23281	4412	15364	7561	29756

<i>Stratégie</i>	<i>Maillages élaborés</i>			
<i>Éléments</i>	$T_3$	$T_6$	$Q_4$	$Q_8$
<i>Nombre d'éléments</i>	4195	4195	4622	4622
<i>Nombre de degrés de liberté</i>	4825	15102	9432	26531

TABLEAU 2.1 : Nombre d'éléments et de degrés de liberté pour chacun des maillages.

### 2.4.1 Outils d'analyse de la qualité du maillage.

Différents outils peuvent être utilisés pour quantifier la qualité des maillages. Ces outils mesurent l'écart des éléments du maillage considéré par rapport aux formes idéales que sont le carré, dans le cas d'éléments quadrangulaires, et le triangle équilatéral, dans le cas d'éléments triangulaires [3] [4].

**Jacobian Ratio.** Le *Jacobian Ratio* est le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur du Jacobien calculé en les différents points de Gauss d'un élément isoparamétrique. Idéalement, ce ratio doit être égal à 1. Une valeur négative est à proscrire absolument. Cet outil ne peut être utilisé que dans le cas de quadrangles avec SAMCEF Field.

**Aspect Ratio.** L'*Aspect Ratio* est le rapport entre la plus grande et la plus petite dimension d'un élément. Sa valeur idéale est également de 1.

**Skew.** Pour un quadrangle, le *Skew* est le plus petit des angles formés par l'intersection des médianes. Dans le cas d'un triangle, il s'agit du plus petit des angles formés par l'intersection de la droite joignant les milieux de deux des cotés du triangle avec la médiane du troisième côté. Dans les deux cas, la valeur idéale est de  $90^\circ$ .

**Corner Angle.** Le *Corner Angle* est défini par la différence d'amplitude de deux angles adjacents d'un élément. La valeur idéale est de  $0^\circ$ .

**Taper.** Le *Taper* est défini dans le cas d'éléments quadrangles uniquement. On commence par définir 4 aires dans le quadrangle. Les aires 1 et 2 sont les aires se trouvant de part et d'autres de la diagonale principale du quadrangle, tandis que les aires 3 et 4 sont les aires de trouvant de part et d'autres de la diagonale secondaire du quadrangle. Le *Taper* mesure la plus grande différence relative entre l'aire d'un des triangles et la moyenne de l'aire des 4 triangles. Sa valeur idéale est nulle.

Le *Taper* apparaît comme peu robuste. En effet, d’une part cet outil est défini seulement pour les quadrangles. D’autre part, le *Taper* d’un losange est identiquement nul quel que soit son rapport d’aspect. Il ne sera donc pas utilisé dans la suite.

Les outils mesurant la qualité des maillages se rapportent exclusivement aux aspects géométriques de ceux-ci. La richesse des champs n’est pas prise en compte dans l’analyse : les éléments du premier et du deuxième degré ne peuvent être distingués avec ces outils.

L’introduction d’un maillage grossier étant motivée essentiellement par la volonté de comparer l’efficacité du calcul (convergence et temps de calcul) avec celle des stratégies de maillage plus élaborées, l’analyse de la qualité des maillages grossiers ne sera pas détaillée ici.

Dans l’analyse de la qualité des différents maillages, on peut distinguer les zones de faible gradient de contraintes et les zones de forts gradients de contraintes. Dans les premières, il convient évidemment d’utiliser un maillage de bonne qualité mais il n’est pas non plus nécessaire d’imposer des contraintes fortes sur la qualité du maillage. Par contre, les zones d’intérêt identifiées à la section 1.5 et représentées à la figure 1.12 méritent une attention toute particulière et une haute qualité de maillage. En effet, c’est sur base de ces zones que doit être déterminée la charge maximale admissible  $P^{max}$ .

## 2.4.2 Qualité des maillages avec des éléments triangulaires.

Les figures 2.11 à 2.13 présentent les distributions des différentes grandeurs diagnostiques utilisées pour mesurer la qualité du maillage intermédiaire réalisé avec des éléments triangulaires. Pour une meilleure lisibilité, les maillages ne sont pas représentés.



FIGURE 2.11 : *Aspect Ratio* pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires.

Dans la partie rectiligne du maillon, le générateur de maillage privilégie l’utilisation de triangles rectangles isocèles (moitié d’un carré) parfaitement agencés, ce qui se traduit par des distributions uniformes des différents outils diagnostiques dans les régions correspondantes.

Les triangles rectangles isocèles ne sont pas réellement optimaux (ils ne sont pas équilatéraux) mais présentent néanmoins une bonne qualité. Leur rapport d’aspect est idéal

et leur *Skew*, égal à la valeur théorique de  $\arctg 2 = 63^\circ$ , diffère de  $30^\circ$  seulement de la valeur idéale. Le *Corner Angle* correspondant est de  $30^\circ$ .

Dans la partie courbe, la forme et les paramètres de qualité du maillage présentent une beaucoup plus grande variabilité. Les rapports d'aspect y restent très proches de l'unité. Les valeurs des paramètres *Skew* et *Corner Angle* y sont globalement plus favorables que dans la partie rectiligne du maillon, à l'exception de quelques mailles situées au voisinage de la face intérieure de la partie courbe, en-dehors de la zone où la charge est appliquée.

Les informations fournies par ces différents indicateurs sont donc convergentes et indiquent un maillage de bonne qualité.



FIGURE 2.12 : *Skew* pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires.



FIGURE 2.13 : *Corner Angle* pour le maillage intermédiaire et des éléments triangulaires.

Il est intéressant de comparer la figure 2.11 avec la distribution correspondante de l'*Aspect Ratio* dans le cas du maillage élaboré à la figure 2.14. On constate que l'introduction de sous-domaines et des contraintes imposées au générateur de maillage n'introduit pas de détérioration de la qualité du maillage. Grâce aux choix appropriés effectués lors de la définition des différents sous-domaines, les transitions entre ceux-ci s'effectuent en douceur. Tous les maillages construits avec des éléments triangulaires sont de bonne qualité.

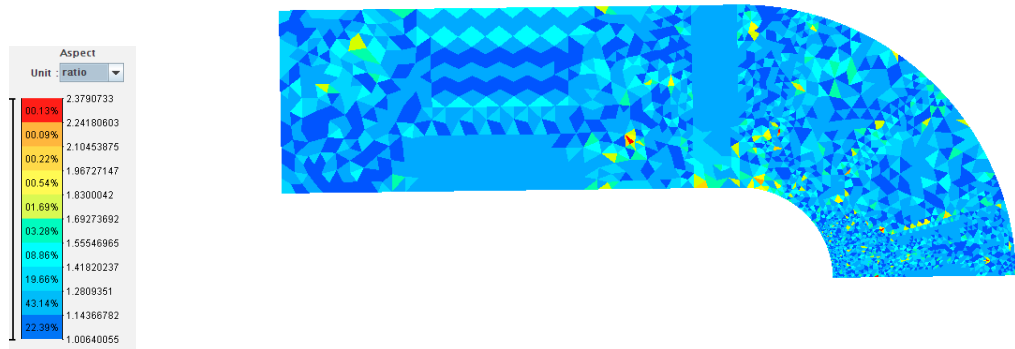


FIGURE 2.14 : *Aspect Ratio* pour le maillage élaboré et des éléments triangulaires.

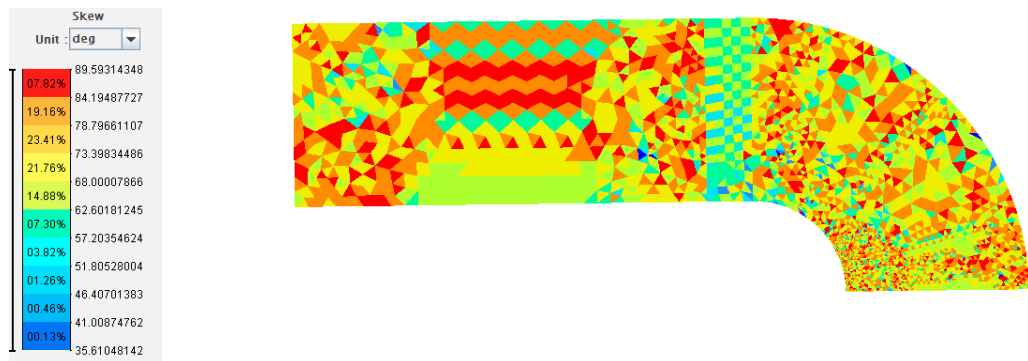


FIGURE 2.15 : *Skew* pour le maillage élaboré et des éléments triangulaires.

### 2.4.3 Qualité du maillage avec éléments quadrangulaires.

Les principaux paramètres de qualité correspondant au maillage élaboré construits sur base d'éléments quadrangulaires sont présentés dans les figures 2.16 à 2.18.

Les différents paramètres témoignent de la qualité du maillage. Tout au plus peut-on constater une légère diminution de celle-ci au niveau de certaines séparations entre les sous-domaines construits pour contrôler la construction du maillage. Ces frontières artificielles se marquent sur tous les paramètres considérés. En particulier, la transition entre les deux premiers sous-domaines situés à l'aplomb de la zone d'imposition du chargement et la variation de la résolution spatiale entre ces deux régions s'accompagne d'un maillage quelque peu irrégulier, avec également la présence d'éléments triangulaires. Les écarts par rapport aux valeurs optimales restent cependant très faible.

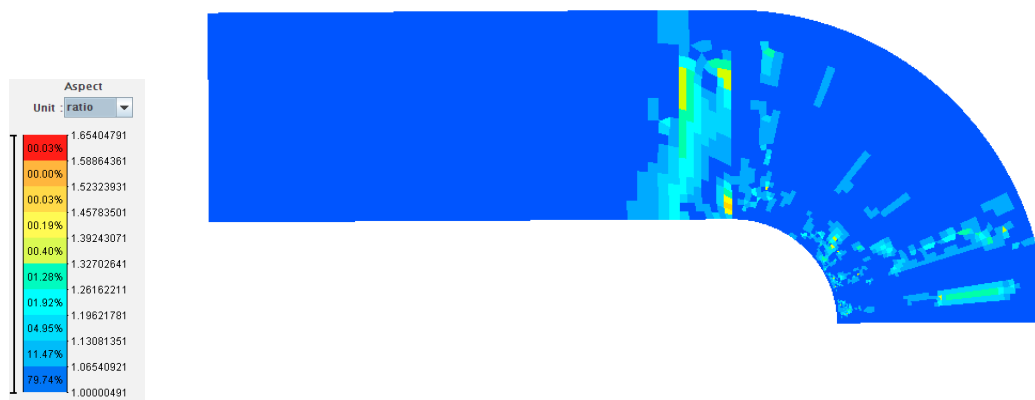


FIGURE 2.16 : *Aspect Ratio* pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires.

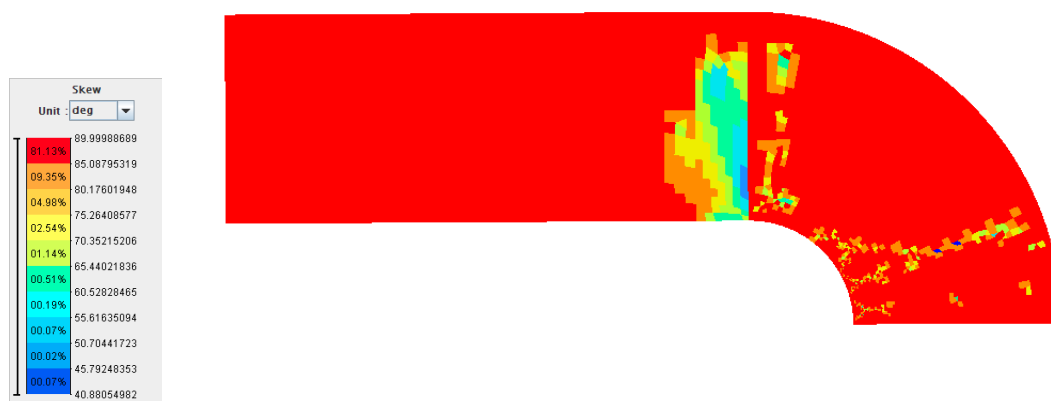


FIGURE 2.17 : *Skew* pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires.



FIGURE 2.18 : *Jacobian Ratio* pour le maillage élaboré et des éléments quadrangulaires.

## 2.5 Comparaison des différents maillages et des différents types d'éléments.

L'objectif de cette section est de déterminer le type et le nombre d'éléments les plus appropriés pour le problème considéré. Il convient d'utiliser de façon efficace les ressources informatiques tout en garantissant la convergence, *i.e.* l'indépendance des résultats obtenus par rapport au maillage. Ce choix se fera selon 5 critères : l'approximation de l'aire, le temps de calcul, la mémoire utilisée, la convergence de l'énergie potentielle totale, la convergence du champ des contraintes.

Tous les calculs ont été réalisés avec une force répartie dont la résultante vaut  $P_s = 100$  [N]. Cette valeur influence uniquement la valeur numérique de l'énergie potentielle totale, pas la convergence ni les autres critères utilisés.

### 2.5.1 Approximation de la géométrie.

L'étude de l'approximation de l'aire a été réalisée sur le maillage intermédiaire. L'aire réelle du maillon vaut

$$A = 2 \times 100 \times 20 + \pi \times (30^2 - 10^2) = 6513.274 \text{ [mm}^2\text{]} \quad (2.1)$$

Étant donné que le maillon a une épaisseur constante de 10 [mm], on obtient un volume de 65 132.74 [mm<sup>3</sup>]. En profitant de la symétrie, on étudie un quart du maillon. Son aire est de 1 628.318 [mm<sup>2</sup>]. La comparaison de l'aire du maillon tel que décrit par le maillage avec cette valeur de référence permet de juger de la qualité de l'approximation de la géométrie en fonction du nombre d'éléments.

La figure 2.19 présente l'aire du modèle numérique du maillon en fonction du nombre et du type des éléments utilisés pour la discrétisation.

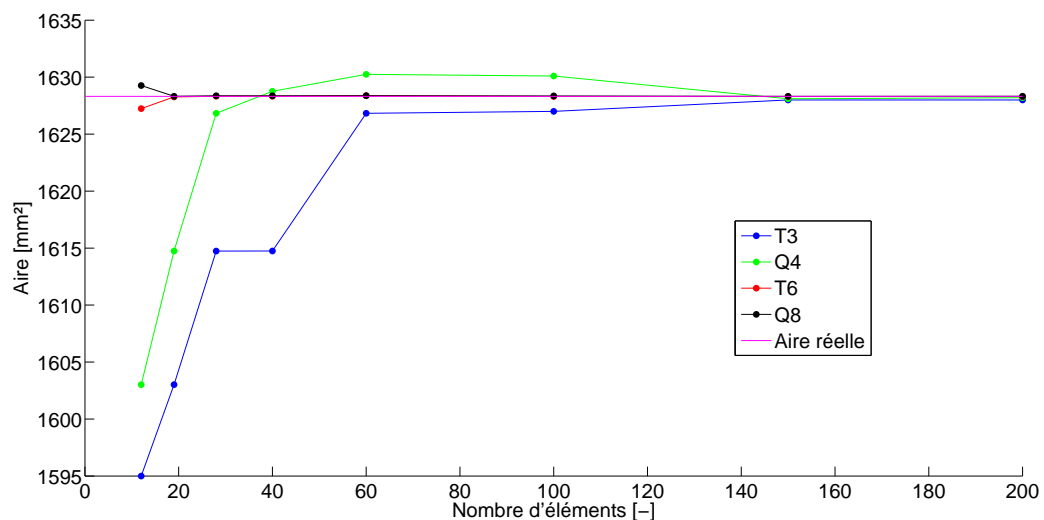


FIGURE 2.19 : Approximation de l'aire par les différents éléments en fonction du nombre d'éléments.

Quel que soit le nombre d'éléments utilisés, les éléments du second degré fournissent une meilleure approximation de l'aire du maillon que les éléments linéaires. Avec seulement 12 éléments, l'erreur associée aux éléments  $T_6$  et  $Q_8$  est déjà inférieure à 0,005 %. Parmi les éléments linéaires, les quadrangles semblent mieux se comporter que les triangles.

Si tous les éléments décrivent parfaitement une surface dont les contours sont droits, il n'en va pas de même pour des contours courbes. Les éléments  $T_3$  et  $Q_4$  sont respectivement des triangles et des quadrangles qui possèdent des nœuds uniquement en leurs sommets. Un maillage composé de tels éléments approche donc les contours courbes par une succession de segments de droites. Les éléments  $T_6$  et  $Q_8$  possèdent en plus un nœud au centre de chacun de leurs côtés. Ces nœuds supplémentaires permettent d'approcher les contours courbes par des paraboles ; cette augmentation de l'ordre d'approximation explique les meilleurs résultats obtenus avec ces éléments. Toutefois, comme les courbes de la géométrie sont des arcs de cercle, il subsistera toujours une petite erreur.

En pratique, l'erreur de représentation de la géométrie est négligeable. En effet, la représentation correcte des champs des déplacements et des contraintes demande de considérer de l'ordre d'un millier d'éléments. Pour un tel nombre d'éléments, la différence entre l'aire réelle et l'aire couverte par le maillage est infime quel que soit le type d'élément utilisé<sup>3</sup> comme on peut déjà le voir sur la figure 2.19. Le critère de l'aire n'est donc pas un critère utile dans la recherche de l'élément optimal.

### 2.5.2 Temps de calcul.

Nous allons à présent nous intéresser au temps de calcul nécessaire au logiciel SAMCEF Field pour résoudre le problème mécanique. Le problème est ici relativement académique : la question des ressources n'est pas vraiment critique. Les simulations peuvent être réalisées en moins d'une minute. Mais la question devient plus pertinente dans un cas plus général et c'est dans cette perspective qu'elle est étudiée ici.

Les temps de calcul sont portés dans la figure 2.20 pour les différentes stratégies de maillage et pour les différents types éléments. Les résultats sont présentés en fonction du nombre d'éléments et en fonction du nombre de degrés de liberté.

Le temps de calcul est pratiquement indépendant de la stratégie de maillage considérée. Que l'on considère les maillages grossiers, intermédiaires ou élaborés, le temps de calcul ne dépend pratiquement que du type et du nombre d'éléments.

Pour un type d'éléments donné, on observe que le temps de calcul est proportionnel au nombre de ces éléments. Les constantes de proportionnalité, *i.e.* les pentes des droites, varient cependant en fonction du type d'éléments.

Le coût de calcul pour un type d'éléments est une fonction croissante du nombre de degrés de liberté de celui-ci. La dépendance n'est cependant pas linéaire. Lorsqu'on rapporte le temps de calcul au nombre de degrés de liberté, on constate que celui-ci est supérieur dans le cas des éléments linéaires.

---

3. Les éléments quadratiques seront cependant toujours un peu plus précis.



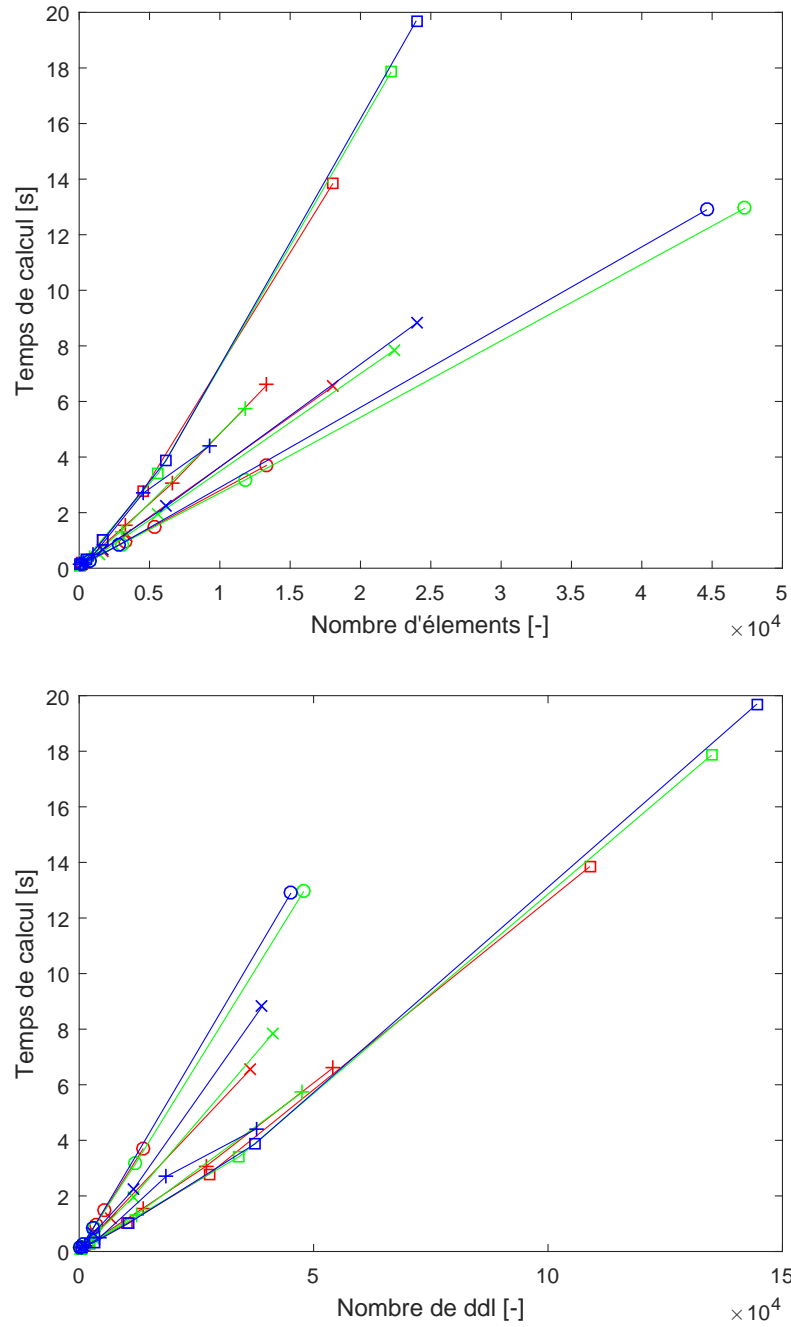


FIGURE 2.20 : Temps de calcul en fonction du nombre d'éléments et en fonction du nombre de degrés de liberté. Les résultats relatifs au maillage grossier, intermédiaire et élaboré sont représentés respectivement en rouge, en vert et en bleu.

Les différents symboles correspondent aux types d'éléments :  $\circ = T_3$ ,  $\times = Q_4$ ,  $+= T_6$ ,  $\square = Q_8$ .

Parmi les éléments linéaires, le temps de calcul par degré de liberté est le plus grand pour les éléments  $T_3$ . Par contre, les éléments quadratiques sont caractérisés par des coûts par degré de liberté quasiment identiques, avec un très léger avantage pour les quadrangles avec approximation quadratique des champs.

### 2.5.3 Mémoire utilisée.

L'utilisation de la mémoire est représentée à la figure 2.21. Ici encore, en raison de la nature académique du problème traité, la question de la mémoire centrale utilisée n'est pas pertinente. Elle pourrait cependant devoir être prise en compte dans l'étude d'un problème mécanique plus complexe.

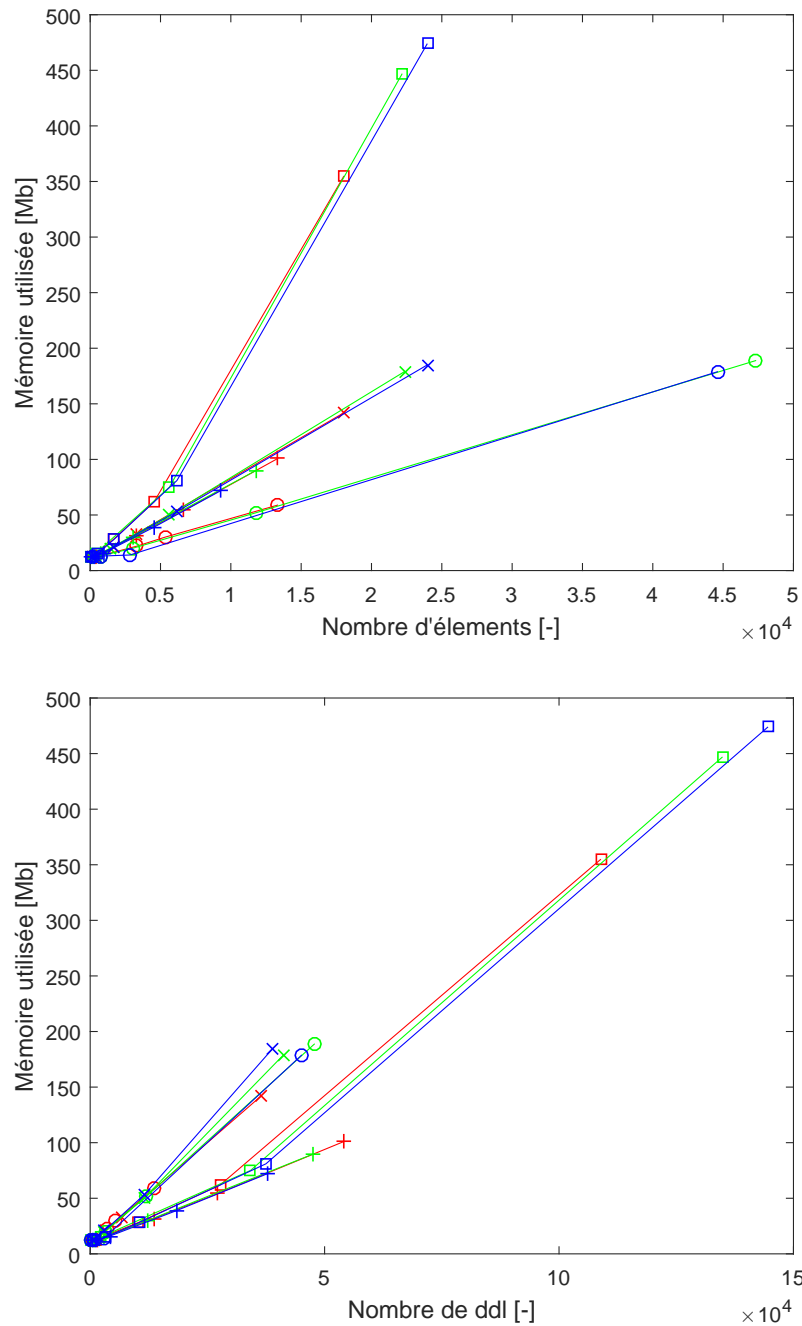


FIGURE 2.21 : Mémoire centrale utilisée en fonction du nombre d'éléments et en fonction du nombre de degrés de liberté. Les résultats relatifs au maillage grossier, intermédiaire et élaboré sont représentés respectivement en rouge, en vert et en bleu. Les différents symboles correspondent aux types d'éléments :  $\circ = T_3$ ,  $\times = Q_4$ ,  $+= T_6$ ,  $\square = Q_8$ .

Sauf pour les modèles comportant très peu d'éléments, la mémoire utilisée est approximativement proportionnelle au nombre de ceux-ci. La constante de proportionnalité varie cependant en fonction du type d'éléments considérés ; les besoins de mémoire centrale sont une fonction croissante du nombre de degrés de liberté des éléments utilisés. Pour un même nombre d'éléments, l'utilisation de triangles  $T_3$  requiert moins de ressources que les quadrangles  $Q_4$ , les triangles  $T_6$  ou les quadrangles  $Q_8$ .

Si l'utilisation de la mémoire croît avec le nombre de degrés de liberté, la dépendance n'est cependant linéaire que pour les valeurs modérées du nombre de degrés de liberté ( $< 5 \cdot 10^4$ ). Pour des maillages relativement peu raffinés, les éléments  $T_6$  et  $Q_8$  utilisent à peu près le même espace mémoire par degré de liberté et permettent de mieux économiser la mémoire que les éléments linéaires  $T_3$  et  $Q_4$ , lesquels utilisent environ deux fois plus d'espace mémoire par degré de liberté. Pour les discrétisations comportant un grand nombre de degrés de liberté, l'utilisation de la mémoire semble augmenter plus que proportionnellement.

#### 2.5.4 Énergie potentielle totale et convergence globale.

La convergence globale assurant l'indépendance des résultats par rapport à la discrétisation utilisée peut être observée en comparant les valeurs de l'énergie potentielle totale calculée en adoptant différentes stratégies de maillage et différents types d'éléments.

Idéalement, pour isoler l'influence de la taille des mailles des effets liés à la modification de la distribution de celles-ci, il conviendrait de pouvoir effectuer le calcul sur des maillages de plus en plus fins obtenus en divisant chaque élément en éléments de plus petite taille homothétiques à l'élément initial et ce de façon homogène sur toute la pièce considérée. Il faudrait pour cela pouvoir contrôler finement le travail du générateur de maillage, ce qui n'est malheureusement pas réalisable en pratique.

Les figures 2.22 à 2.27 présentent la valeur de l'énergie potentielle totale pour chaque choix de sous-domaines (grossier, intermédiaire, élaboré) et pour chaque type d'éléments. L'énergie potentielle totale à l'équilibre étant négative, c'est sa valeur absolue qui est ici représentée en fonction du nombre d'éléments ou du nombre de degrés de liberté.

Quelle que soit la stratégie de maillage ou le type d'éléments considéré, les simulations convergent vers une valeur identique qui peut être estimée à  $43.8472 \text{ } [\mu\text{J}]$ . Tous les choix de maillages peuvent donc conduire à une estimation fiable de la *TPE* pour autant qu'une résolution spatiale suffisante soit utilisée.

Quelle que soit la stratégie de maillage utilisée, la convergence des éléments  $T_3$  apparaît plus lente que celle des autres éléments. Les simulations avec cet élément requièrent plus d'éléments et plus de degrés de liberté que les simulations réalisées avec les autres éléments. On peut expliquer cette convergence relativement lente par l'incapacité de ces éléments à capter correctement le comportement du maillon dans les zones de grand gradient de contraintes. En effet, les éléments  $T_3$  ne possèdent que des fonctions de formes linéaires pour les déplacements ce qui implique qu'ils ne peuvent représenter qu'un état de contrainte constant sur l'élément. Toutefois, pour autant que leur Jacobien soit positif, ces éléments sont à la fois compatibles et complets. La convergence est donc assurée. Il suffit alors d'augmenter la résolution du maillage pour s'approcher de la solution réelle. C'est bien ce que l'on observe, les courbes correspondant

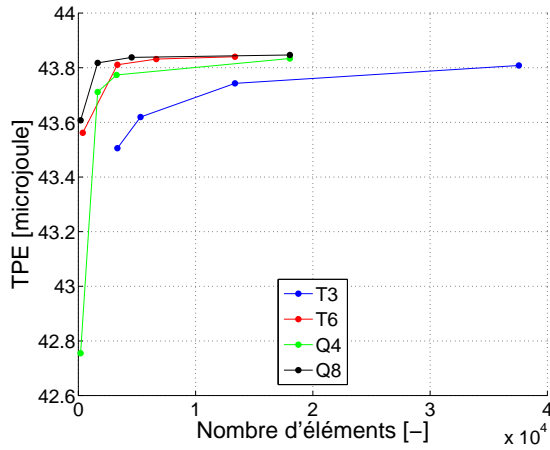


FIGURE 2.22 :  $TPE$  en fonction du nombre d'éléments (maillage grossier).

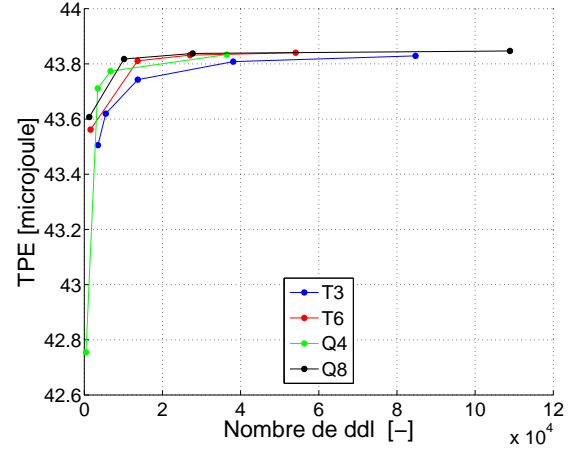


FIGURE 2.23 :  $TPE$  en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage grossier).

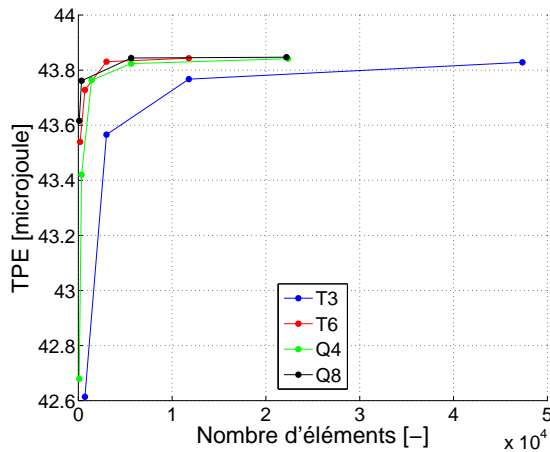


FIGURE 2.24 :  $TPE$  en fonction du nombre d'éléments (maillage intermédiaire).

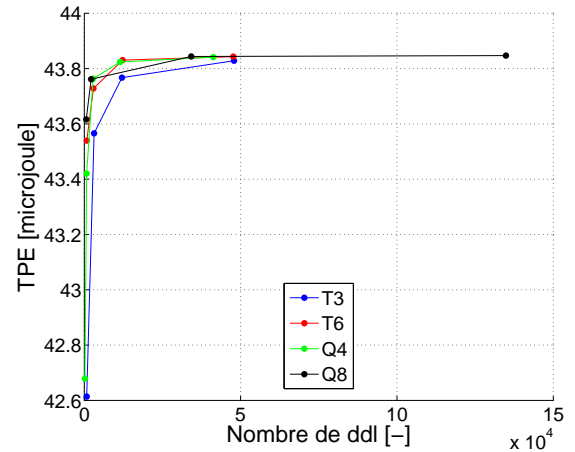


FIGURE 2.25 :  $TPE$  en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage intermédiaire).

aux  $T_3$  convergent comme les autres, même si cela demande plus d'éléments.

Les éléments  $Q_4$  donnent lieu à une convergence rapide, même si l'approximation de la  $TPE$  est de moins bonne qualité que celle des éléments quadratiques pour les maillages contenant peu d'éléments. Les éléments  $T_6$  et  $Q_8$  apparaissent comme les plus performants.

La vitesse de convergence peut être mise en évidence en considérant comme valeur de référence l'énergie potentielle totale calculée avec le modèle comportant le plus de degrés de liberté (modèle avec maillage élaboré et éléments  $Q_8$ ) et en calculant les erreurs par rapport à cette valeur de référence. Les résultats correspondants sont représentés à la figure 2.28 dans le cas du maillage grossier<sup>4</sup>. On constate que l'erreur décroît linéairement avec le nombre de degrés de liberté, que ce soit pour les éléments linéaires ou pour les éléments quadratiques. Un

4. Ce maillage est celui pour lequel le raffinement du maillage peut être réalisé de la façon la plus homogène.

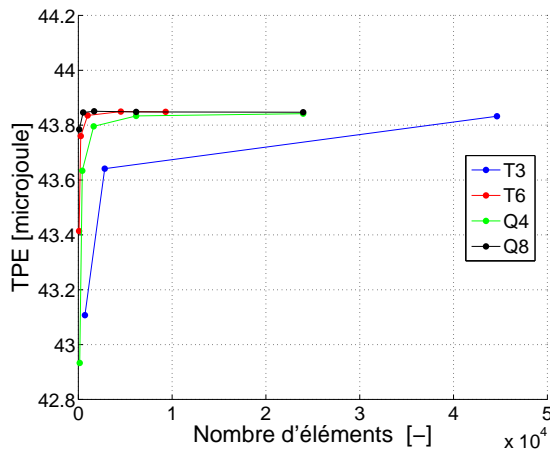


FIGURE 2.26 :  $TPE$  en fonction du nombre d'éléments (maillage élaboré).

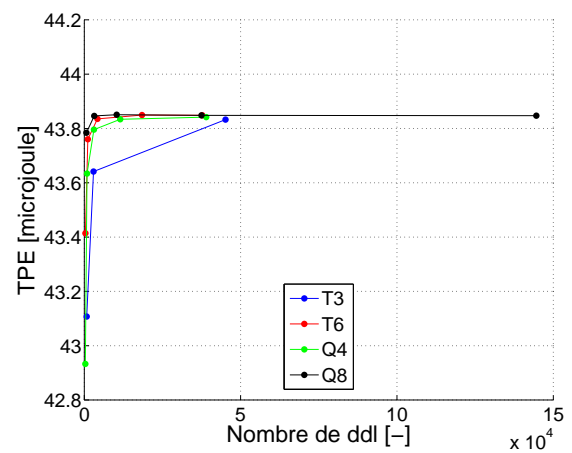


FIGURE 2.27 :  $TPE$  en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage élaboré).

écart par rapport à ce comportement linéaire de l'erreur n'est observé que pour la simulation utilisant le maillage le plus fin avec l'élément  $Q_8$ . Le graphique confirme également que, comme indiqué plus haut, pour un nombre donné de degrés de liberté, la précision la plus grande est obtenue avec les éléments  $Q_8$  alors que les éléments  $T_3$  sont les moins précis. Les résultats obtenus avec les éléments  $Q_4$  et  $T_6$  sont très semblables. Le même type de comportement est observé avec les autres types de maillage.

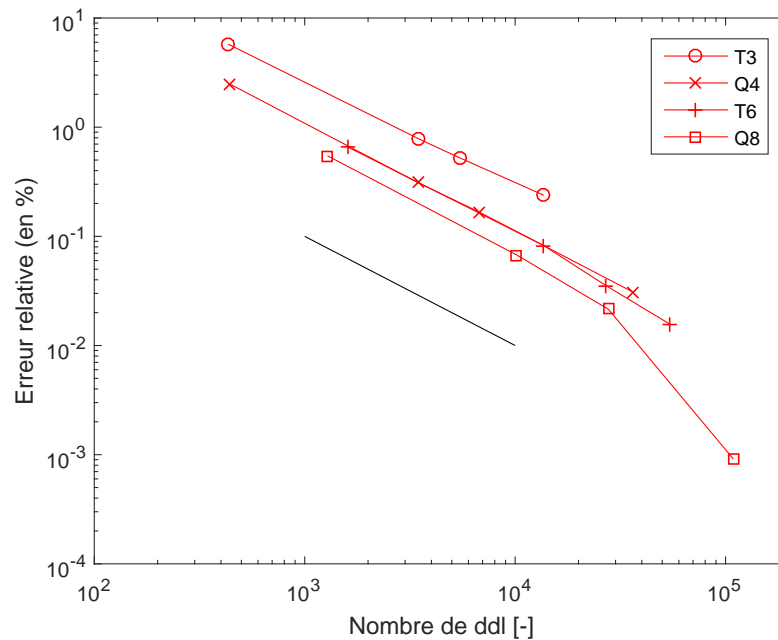


FIGURE 2.28 : Erreur relative sur la  $TPE$  (échelle logarithmique) en fonction du nombre de degrés de liberté (maillage grossier) et du type d'éléments. Le trait noir est illustratif d'une décroissance linéaire.

Les différentes stratégies de maillage peuvent être comparées de la même façon. À la figure 2.28 on a porté l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de libertés pour les différentes simulations utilisant l'élément  $Q_4$ . Au-delà de la décroissance linéaire de l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté, on constate que la stratégie de maillage élaborée s'avère payante. En concentrant les éléments dans les zones où les variations de contraintes sont les plus importantes, on obtient une meilleure précision globale (pour un nombre donné de degrés de liberté) qu'avec les autres stratégies adoptées.

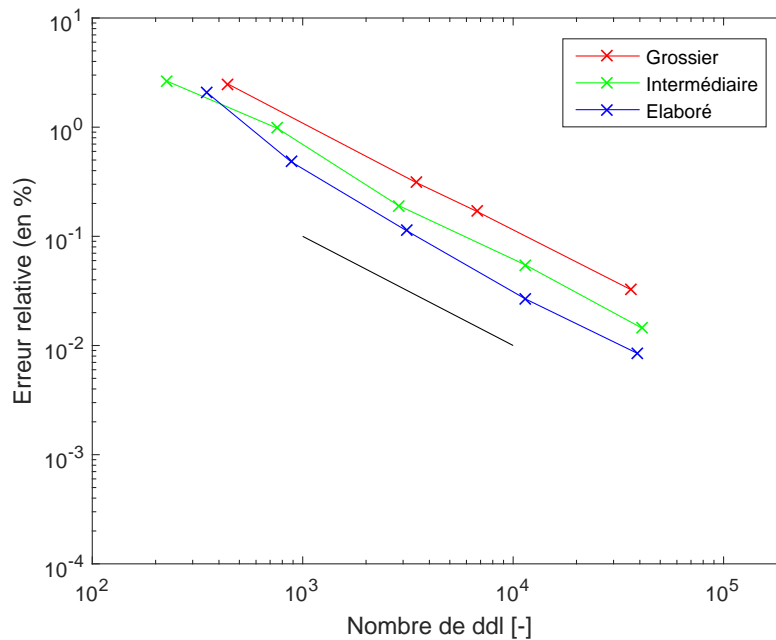


FIGURE 2.29 : Erreur relative sur la *TPE* (échelle logarithmique) en fonction du nombre de degrés de liberté et de la stratégie de maillage (élément  $Q_4$ ). Le trait noir est illustratif d'une décroissance linéaire.

### 2.5.5 Contrainte maximale et convergence locale.

Il est judicieux d'étudier la convergence locale des résultats en fonction du nombre d'éléments du maillage. Pour ce faire, on choisit les sous-domaines élaborés. La section précédente montre que c'est la discrétisation qui fournit les meilleurs résultats.

La qualité de la convergence locale est évaluée en regardant la contrainte maximale obtenue sur le quart de maillon. Cela est justifié par deux choses. D'une part, on désire déterminer la force maximale que l'on peut exercer sur la pièce, c'est uniquement dans la contrainte maximale que l'on tire cette information. D'autre part, on sait de l'étude par la résistance des matériaux, que la contrainte maximale est réalisée là où les gradients de contraintes sont les plus élevés. La qualité de l'évaluation de cette contrainte fournit donc une idée de la qualité de la résolution locale dans cette zone critique.

Dans la collecte des données, on veille à se fier uniquement aux résultats pour les valeurs moyennes des contraintes sur les éléments et non aux résultats interpolés que fournit aussi SAMCEF Field. Ces valeurs moyennes sont en effet les seules fiables. Il est bon de rappeler que l'approche par éléments cinématiquement admissibles ne fournit qu'une connaissance faible du champ de contraintes [6].

Les figures 2.30 et 2.31 présentent respectivement les différentes estimations de la contrainte maximale obtenues avec des éléments quadrangulaires et des éléments triangulaires dans les maillages dits élaborés.

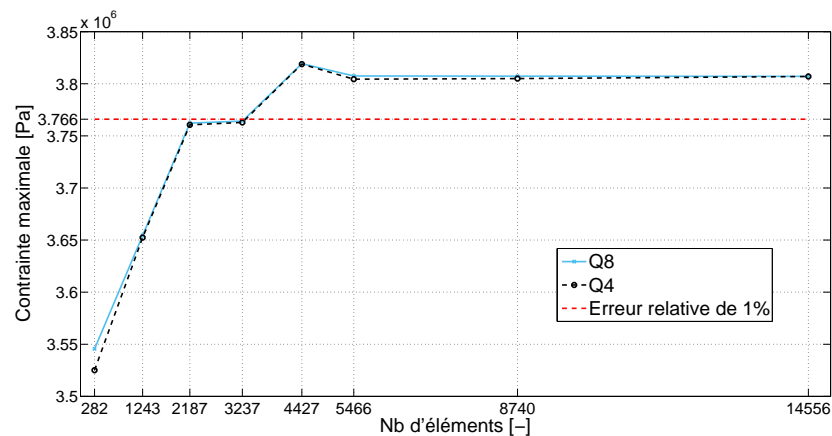


FIGURE 2.30 : Convergence de la contrainte maximale pour  $Q_4$  et  $Q_8$ .

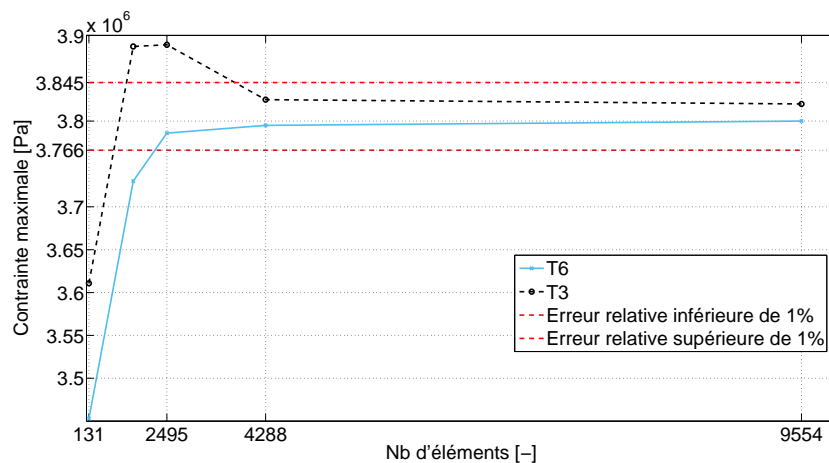


FIGURE 2.31 : Convergence de la contrainte maximale pour  $T_3$  et  $T_6$ .

Les solutions obtenues avec des éléments quadrangulaires comportant le même nombre d'éléments (Figure 2.30) conduisent à des estimations quasiment identiques de la contrainte maximale, même avec un nombre réduit d'éléments. Ceci est surprenant dans la mesure où les éléments  $Q_8$  possèdent deux fois plus de degrés de liberté que les éléments  $Q_4$ . Les deux solutions étant calculées sur des maillages identiques, le résultat suggère que la distribution des

mailles influence davantage la solution que le degré des fonctions de forme.

Sur base de la figure 2.30, la meilleure estimation de la contrainte maximale est de l'ordre de 3.81 [MPa]. Cette valeur est approchée avec une erreur relative inférieure à 1 % pour les maillages utilisant plus de 3 400 éléments  $Q_4$ .

Par comparaison, la figure 2.31 montre qu'il faut de l'ordre de 4 300 éléments  $T_6$  ou 10 000 éléments  $T_3$  pour atteindre une précision semblable. La convergence locale apparaît également assez lente avec de tels éléments : avec près de 40 000 éléments, les simulations utilisant des éléments triangulaires ne semblent toujours pas avoir convergés.

## 2.6 Choix final du maillage.

Le but de l'étude étant de déterminer la charge maximale pouvant être supportée par le maillon sans dépasser la limite élastique, le critère à privilégier est la capacité du maillage à décrire précisément la distribution des contraintes au voisinage de la zone d'application de la charge.

Comme le montre la figure 2.29, la stratégie dite élaborée conduit à une distribution des mailles permettant la réduction la plus rapide de l'erreur globale. C'est aussi celle qui implique le raffinement de maillage le plus grand dans la zone d'intérêt.

La discussion de la section 2.5.5 fait apparaître que les éléments quadrangulaires permettent d'obtenir une meilleure convergence locale et une meilleure précision que les éléments triangulaires.

La même discussion montre que des résultats de qualités semblables sont obtenus avec les éléments linéaires et quadratiques pour un même nombre d'éléments et qu'une précision de 1 % est atteinte avec 4000 éléments.

Puisque, pour un même nombre d'éléments, le temps de calcul correspondant aux éléments  $Q_8$  est approximativement double de celui nécessaire aux simulations utilisant des éléments linéaires  $Q_4$  (Figure 2.20), ces derniers sont finalement préférés.

Les caractéristiques du maillage retenu pour la suite du travail sont donc les suivantes :

- stratégie : élaborée (découpage en 12 sous-domaines)
- type d'éléments<sup>5</sup> :  $Q_4$
- nombre d'éléments : 4622
- nombre de nœuds : 4758
- nombre de degrés de liberté :  $2 \times 4758 - (21 + 63) = 9432$

Ce maillage est illustré à la figure 2.10.

---

5. Le maillage n'est pas exclusivement constitué de  $Q_4$ , certains éléments triangulaires (linéaires)  $T_3$  sont également présents.



## 2.7 Discussion des résultats.

La figure 2.32 présente le champ des contraintes calculé avec le maillage décrit dans la section précédente dans le cas d'une charge nominale  $P_s = 100$  [N]. La contrainte maximale vaut 3.77 [MPa] et est rencontrée dans la zone d'application de la force.



FIGURE 2.32 : Champ des contraintes pour  $P_s = 100$  [N].

Sur base de ces résultats, on peut évaluer la force maximale admise  $P^{max}$  en appliquant la formule (1.23) présentée dans la partie résistance des matériaux. On trouve

$$P^{max} = 2 \times 100 \times \frac{\sigma_y^0}{3.771} = 31.82 \text{ [kN]} \quad (2.2)$$

où le facteur 2 permet de considérer le maillon entier et où  $\sigma_y^0 = 600$  [MPa] est l'entrée en plasticité.

Les figures 2.33 et 2.34 présentent les réactions d'appui et le champ des déplacements correspondants. Les déplacements sont faibles pour  $P_s = 100$  [N], le déplacement maximal est de 0.5 [ $\mu\text{m}$ ]. Cela équivaut, pour  $P_s = P_s^{max}$ , à un déplacement maximal de 79 [ $\mu\text{m}$ ].

Les réactions d'appui sont presque identiques à celles que l'on aurait obtenues avec la résistance des matériaux. Vu les conditions limites, elles sont uniquement normales aux surfaces. Pour la partie droite, on retrouve la distribution linéaire évoquée dans la partie 1 (Fig. 1.4). À l'extrémité de la partie courbe, il est difficile de juger de la forme de la distribution puisque les éléments y sont de tailles variables et les valeurs affichées correspondent à des forces plutôt qu'à des contraintes. Avec la résistance des matériaux simple, on s'attend à une distribution linéaire<sup>6</sup>.

6. Avec une étude plus approfondie (théorie de l'élasticité linéaire en état plan), on s'attend plutôt à une distribution semblable à celle d'un barreau courbe soumis à de la flexion pure à la différence qu'ici, le moment de flexion n'est pas constant [2].

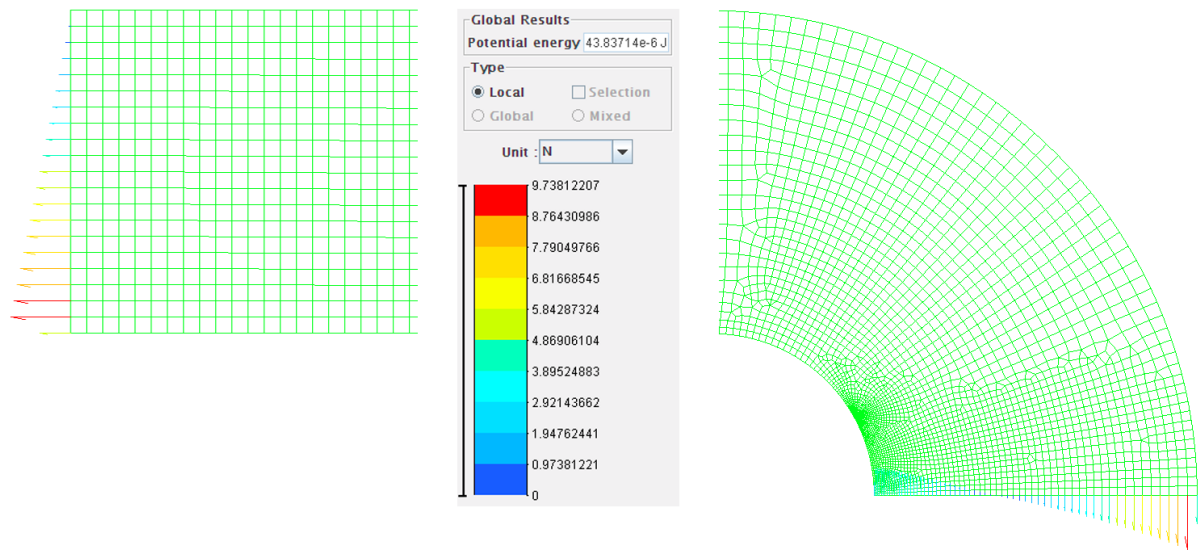


FIGURE 2.33 : Réactions d'appui pour  $P_s = 100$  [N].

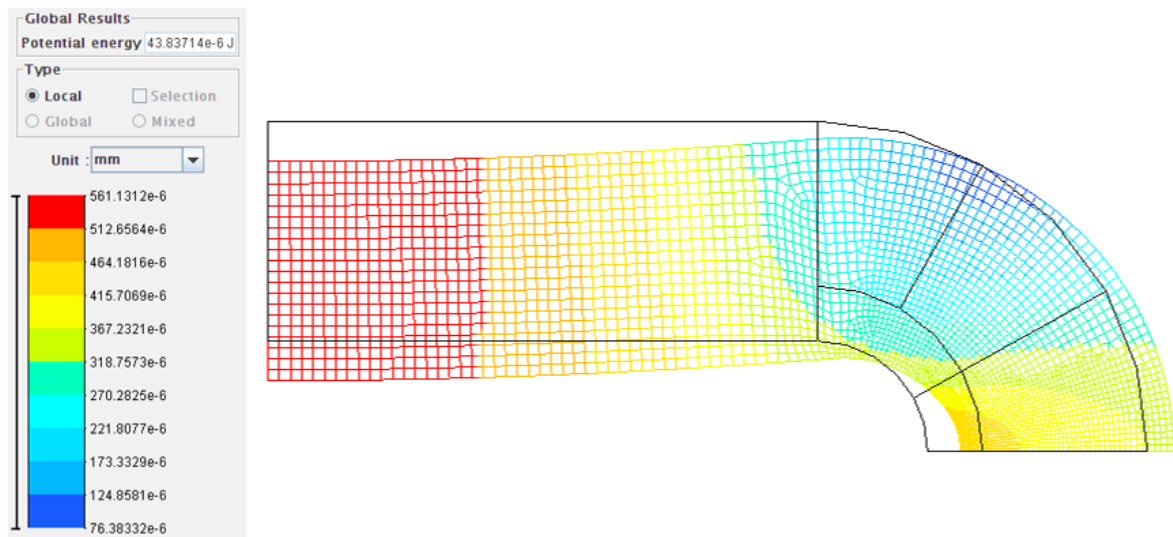


FIGURE 2.34 : Champ des déplacements pour  $P_s = 100$  [N].

### 2.7.1 Comparaison avec les résultats obtenus par la résistance des matériaux.

Dans cette section, on revient sur les résultats de la partie 1. On compare successivement la valeur de la force maximale  $P^{max}$ , le champ des contraintes, l'énergie potentielle totale et le champ des déplacements.

On analyse la validité des résultats provenant de la résistance des matériaux en les comparant avec ceux issus de la méthode des éléments finis. On verra que les estimations fournies par le modèle simplifié étudié analytiquement sont du même ordre de grandeur que les solutions numériques.

**Mise en charge admissible.** Avec les méthodes de résistance des matériaux, on avait trouvé  $P^{max} = 46.51$  [kN], ce qui représente 15 [kN] de plus que la valeur fournie par la méthode des éléments finis. Le fait que la différence entre les deux valeurs soit dans ce sens était prévue. On a en effet déjà mentionné que les concentrations de contraintes étaient négligées avec la résistance des matériaux alors qu'elles sont prises en compte dans cette partie. Comme les concentrations de contraintes se retrouvent dans la zone de contraintes maximales, cela explique que l'on surestimait  $P^{max}$ .

L'erreur relative d'environ 50% commise par la résistance des matériaux est considérable, ce qui justifie la résolution numérique pour ce type de problème.

**Champ des contraintes de Von Mises.** Contrairement à la valeur de la contrainte maximale, le champ des contraintes global est bien évalué par la résistance des matériaux comme on le voit à la figure 2.35 où les couleurs dans les deux graphes correspondent aux mêmes valeurs de contraintes.

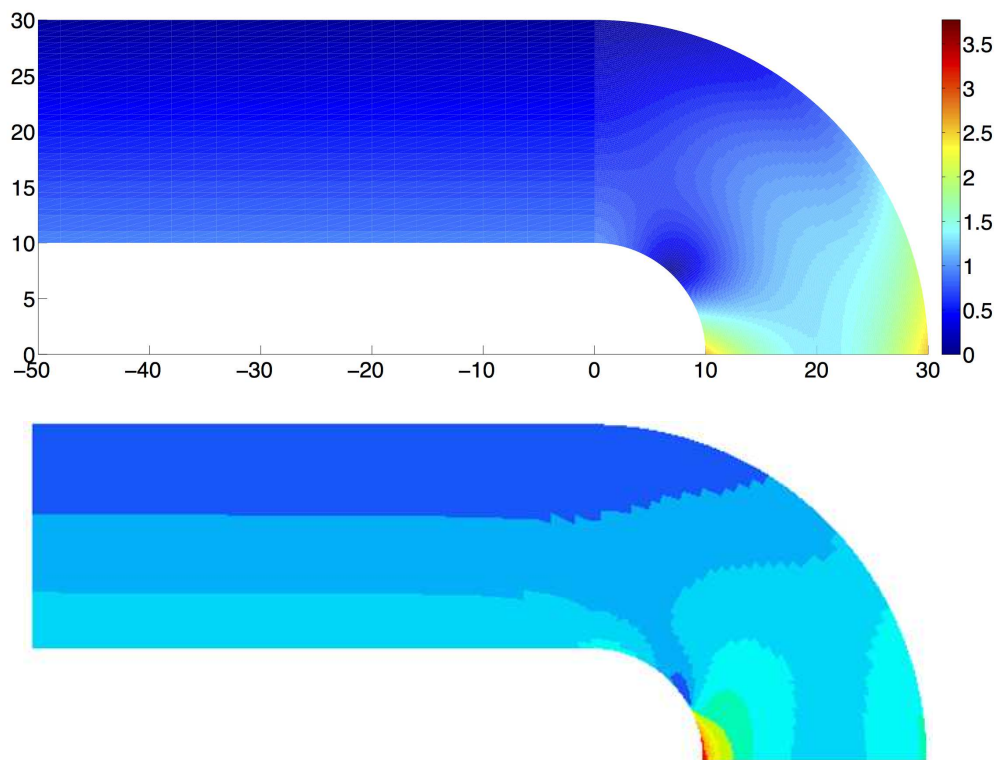


FIGURE 2.35 : Champ des contraintes calculés par la résistance des matériaux (au-dessus) et par la méthode des éléments finis (en dessous) pour  $P_s = 100$  [N], valeurs en [MPa].

L'ordre de grandeur des contraintes de Von Mises est correct sur l'ensemble de la pièce.

Dans la partie droite, la résistance des matériaux fournit d'excellents résultats. Cela est attendu puisque cette partie est soumise à des efforts de traction et de flexion constants, pour

lesquels la théorie des poutres est particulièrement bien adaptée. De plus, l'axe neutre est rectiligne, ce qui correspond au cas idéal pour une poutre. Le fait d'avoir simplifié le chargement et supposé qu'il s'appliquait sur la section inférieure en entier ne semble pas poser problème pour cette partie. On peut mettre cette observation en lien avec le *principe de Saint-Venant*, qui stipule que la distribution des contraintes devient indépendante de la répartition exacte du chargement à une distance suffisamment élevée de celui-ci.

La partie courbe fournit des résultats un peu moins bons mais l'allure générale est assez bien représentée. On observe une zone presque libre de contraintes au centre de l'arc intérieur dans les deux cas.

Ce qui est moins satisfaisant est le voisinage de  $P_s$  mais cela était attendu. C'est ce qui a mené à l'erreur importante lors du calcul de  $P^{max}$ .

Pour le champ des contraintes, le choix de traiter le quart de maillon comme une structure de poutre hyperstatique semble donc justifié.

**Énergie potentielle totale.** Pour une force  $P_s$  de 100 [N], l'énergie potentielle totale  $TPE = \mathcal{U} - \mathcal{P}$  obtenue à partir des deux approches vaut 21.504 [ $\mu$ J] par la résistance des matériaux et 21.923 [ $\mu$ J] par la méthode des éléments finis<sup>7</sup>.

Comme pour les contraintes, les deux valeurs sont très proches l'une de l'autre, l'erreur n'est que de 2%. Cela montre que *globalement*, la résistance des matériaux est très bonne. Encore une fois, cela permet de justifier les hypothèses effectuées.

On rappelle que le calcul de  $\mathcal{P}$  par la résistance des matériaux a nécessité la détermination du déplacement du point d'application de  $P_s$ . Pour une force de 100 [N], on avait trouvé par le théorème d'Engesser un déplacement de 0.43 [ $\mu$ m]. Par la méthode des éléments finis, on a 0.46 [ $\mu$ m]. Il est impressionnant de voir qu'on ne commet qu'une erreur de 5% en utilisant la théorie des poutres et en négligeant les concentrations de contraintes qui apparaissent pourtant à l'endroit où le déplacement est évalué.

**Champ des déplacements.** Pour le calcul du champ des déplacements complet, la théorie des poutres ne suffisait pas et menait à des équations trop compliquées. On a donc dû simplifier davantage la géométrie et ainsi s'éloigner du problème réel. Malgré tout, le champ des déplacements calculé a bien la même allure comme le montre la figure 2.36.

Les valeurs précises sont néanmoins moins satisfaisantes. Alors que l'on s'approchait fort de la valeur réelle avec le théorème d'Engesser pour le déplacement du point d'application de  $P_s$ , ici, on trouve 0.32 [ $\mu$ m] seulement. On commet une erreur de 30%. Le fait de considérer une géométrie rectangulaire semble rendre la structure plus rigide.

---

7. SAMCEF Field fournit en fait le travail des forces extérieures  $\mathcal{P}$  lorsqu'il indique la  $TPE$ , il faut diviser celui-ci par 2 pour obtenir la  $TPE = \mathcal{U} - \mathcal{P}$ .

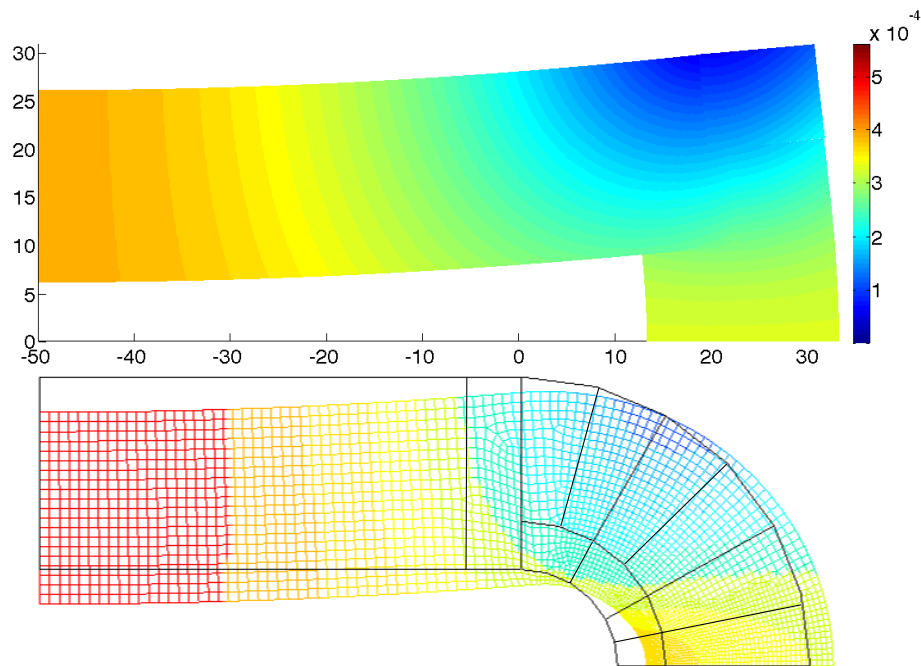


FIGURE 2.36 : Comparaison des déplacements par la résistance des matériaux et les éléments finis pour  $P_s = 100$  [N], même échelle de couleur, valeurs en [mm].

Pour conclure, on retiendra que la théorie des poutres a fourni d'excellents résultats pour la partie droite et qu'elle reste acceptable pour la partie courbe. Globalement, le champ est très bien évalué. Localement, négliger les concentrations de contraintes a un impact important. Pour les déplacements, la simplification supplémentaire détériore la qualité des résultats mais elle est nécessaire pour la résolution analytique.

### 2.7.2 Remarque sur le *gap by node*.

Pour conclure cette partie, il convient d'envisager le *gap by node* qui constitue une limite aux résultats obtenus.

Pour des éléments isoparamétriques, les intégrales définissant les éléments de la matrice de raideur sont effectuées numériquement en évaluant l'intégrand en certains points des éléments uniquement (points de Gauss). Les valeurs des contraintes ne sont évaluées qu'en ces points et peuvent être extrapolées aux nœuds. Pour des éléments adjacents, les valeurs extrapolées vers un même nœud peuvent être différentes. L'outil *gap by node* de SAMCEF Field évalue cette différence. Idéalement, la différence devrait être nulle. En pratique, il faut qu'elle ne soit pas trop élevée pour assurer que le maillage est suffisamment fin pour capter les variations de contraintes.

Il existe cependant des cas dans lesquels il est impossible d'annuler ce *gap by node*, par exemple si le problème étudié comporte un saut de contraintes. C'est le cas ici.

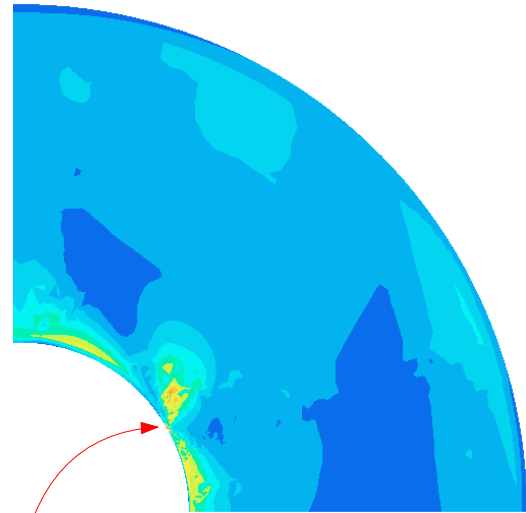
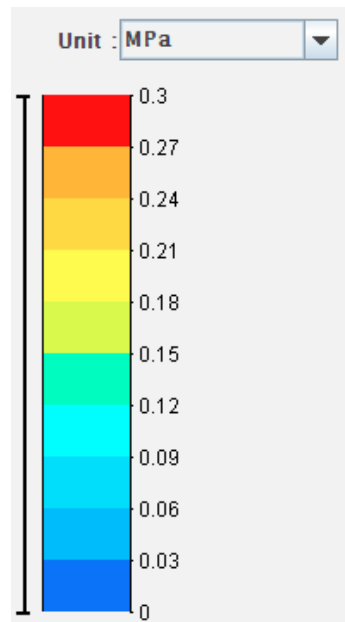
La force  $P_s$  est appliquée sur une longueur non nulle, cela évite la singularité mentionnée à la section 2.1.1. Aux limites de sa longueur d'application, la force s'arrête brusquement, c'est ce qui est modélisé dans SAMCEF Field. On peut montrer que cela engendre une discontinuité du champ des contraintes à l'endroit où la force devient nulle<sup>8</sup>.

On s'attend donc à observer un *gap by node* important à la fin de l'application de  $P_s$ . Ailleurs, on ne devrait pas avoir de discontinuité et on veut donc qu'il soit limité. La figure 2.37 montre le champ du *gap by node* (absolu) pour le maillage optimal et les éléments  $Q_4$  dans la partie courbe. La partie droite est bien résolue et le *gap by node* absolu y est très faible, il n'est pas utile de la représenter.

On retrouve bien la manifestation du saut de contrainte. Ailleurs, la valeur du *gap by node* est limité, et ne dépasse pas 0.25 [MPa]. Toutefois, l'objectif premier de l'étude est de déterminer la valeur de  $P^{max}$  et celle-ci dépend uniquement de la valeur de la contrainte maximale, que l'on retrouve à l'extrémité inférieure de la zone d'application de  $P_s$ . À cet endroit, le *gap by node* est un peu plus important, mais comme c'est aussi l'endroit où les contraintes sont les plus importantes, une valeur relative est plus appropriée et elle y est inférieure à 5% comme illustré à la figure 2.38. Cela est faible par rapport au reste de la pièce. Si on voulait obtenir des résultats plus précis, il faudrait réduire cette valeur et donc affiner d'avantage le maillage dans cette zone. On se contente ici de cette résolution car on a montré précédemment qu'elle n'engendrait qu'une erreur inférieure à 1% par rapport à la meilleure estimation possible.

---

8. On peut s'en convaincre en remarquant que les équations d'équilibre en surface donnent directement lieu à une discontinuité du vecteur tension de surface si le chargement  $\bar{t}$  change brusquement.



Fin de l'application de  $P_s$

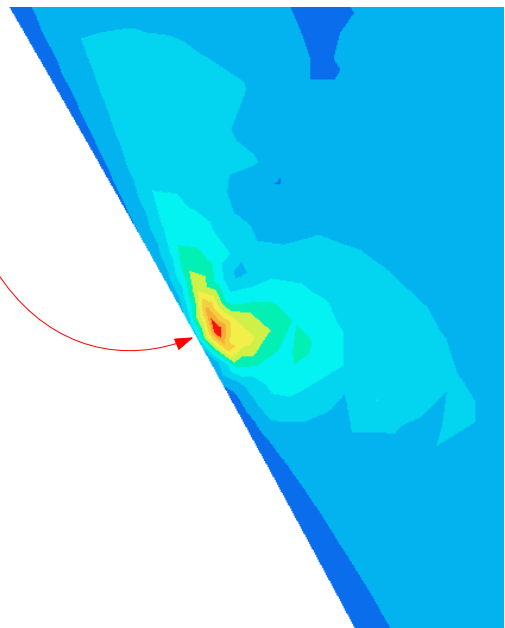
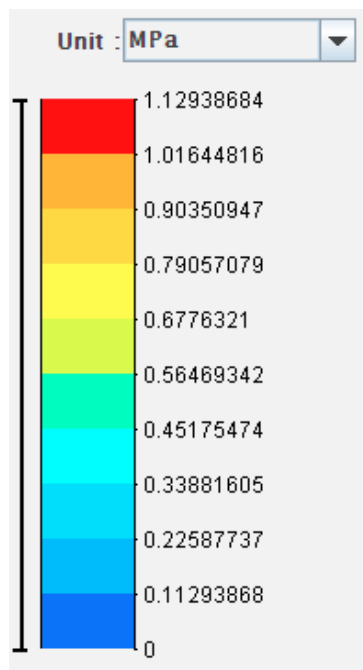


FIGURE 2.37 : Champ du *gap by node* absolu pour le maillage optimal dans la partie courbe, les éléments  $Q_4$  et une force  $P_s = 100$  [N], valeurs en [MPa].

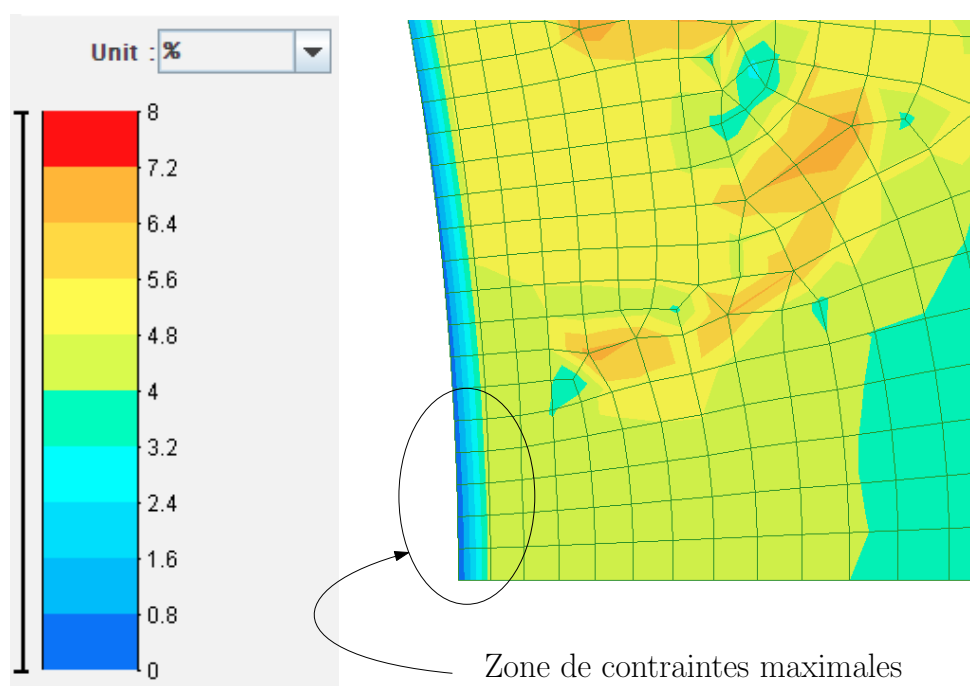


FIGURE 2.38 : Champ du *gap by node* relatif pour le maillage optimal dans la zone de contraintes maximales, les éléments  $Q_4$  et une force  $P_s = 100$  [N], valeurs en [%].



## Partie 3

# Optimisation.

La dernière partie de l'étude consiste à optimiser la pièce mécanique afin d'augmenter la charge maximale  $P^{max}$  qui peut être appliquée sans sortir du domaine élastique.

Pour atteindre cet objectif, seules la forme et les dimensions des zones circulaires du maillon ainsi que l'épaisseur hors plan de la pièce peuvent être modifiées. Ces modifications ne peuvent cependant pas augmenter le volume de la pièce. On veillera par ailleurs à répartir le plus uniformément possible la contrainte équivalente de Von Mises dans la zone à optimiser.

Pour les raisons énoncées précédemment, l'optimisation est réalisée sur un quart du maillon, il n'y a aucune raison de casser la symétrie de la pièce.

### 3.1 Démarche générale.

Notre démarche est motivée par les résultats obtenus par les approches numérique et analytique. En particulier, certaines zones du maillon sont peu sollicitées par rapport aux autres. On tente d'en profiter pour gagner de la matière à ces endroits. La matière gagnée peut soit être répartie sur l'épaisseur de tout le maillon<sup>1</sup>, auquel cas on augmente la résistance globale de toute la pièce, soit utilisée pour renforcer les zones fort sollicitées. Dans ce dernier cas, on améliore localement la résistance. Remarquons que si on augmente l'épaisseur hors-plan, on augmente également la longueur de l'application de  $P_s$  puisqu'on imagine que les maillons sont assemblés les uns aux autres. Cela permet de rendre l'optimisation encore plus efficace.

Dans un premier temps, on étudie une géométrie toute simple dont on sait *a priori* qu'elle ne sera pas efficace. Elle permettra cependant quelques enseignements.

Dans un second temps, on exploite effectivement les résultats de la résistance des matériaux ainsi que le test précédent. On réalise une famille de géométries caractérisées par deux degrés de liberté. On joue sur chacun d'entre eux pour déterminer la forme optimale.

Pour chaque test, on vérifie la qualité du maillage utilisé. Comme les nouvelles formes testées ne modifient pas profondément la géométrie initiale, on conserve notre choix d'utiliser

---

1. Pour que l'hypothèse d'état plan de contrainte reste valide, il est nécessaire de modifier l'épaisseur de tout le maillon.

les éléments quadrangulaires bilinéaires  $Q_4$ . La résolution du maillage sera discutée dans chaque cas.

### 3.2 Maillon rectangulaire.

Dans un premier temps, les extrémités circulaires du maillon sont simplement remplacées par une géométrie rectangulaire (Fig. 3.1). Cette géométrie vérifie bien les contraintes imposées : seules les extrémités de la pièce sont modifiées et le volume diminue.

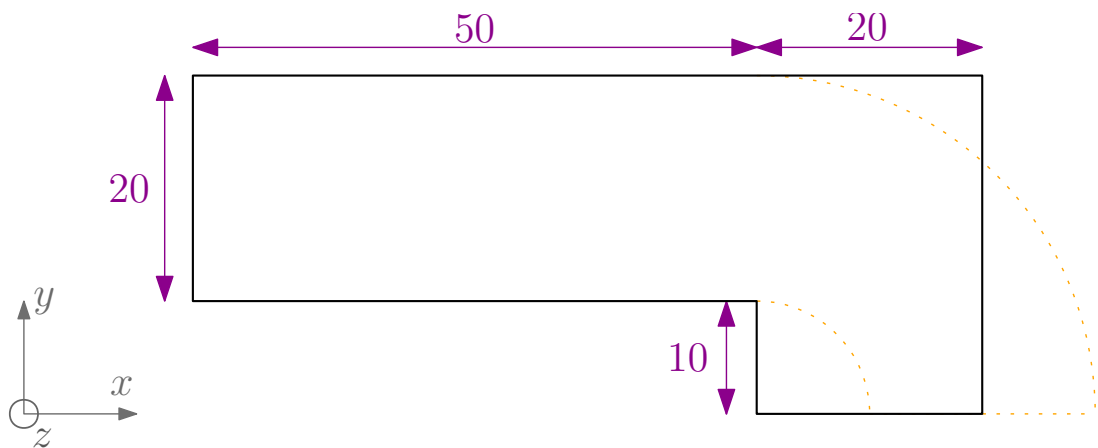


FIGURE 3.1 : Géométrie du maillon rectangulaire (dimensions en [mm]).



FIGURE 3.2 : Champ des contraintes dans la maillon rectangulaire.

Le maillage pour cette géométrie est particulièrement fin dans le voisinage de  $P_s$  et à l'angle rentrant. On s'attend en effet à une singularité à cet endroit par la résistance des matériaux. Les éléments choisis sont les quadrangles bilinéaires  $Q_4$ . Le maillage est rapidement vérifié, les éléments sont de bonne qualité dans les zones où un fort gradient est attendu. Le champ des contraintes calculé est représenté à la figure 3.2, un grossissement sur le coin rentrant est

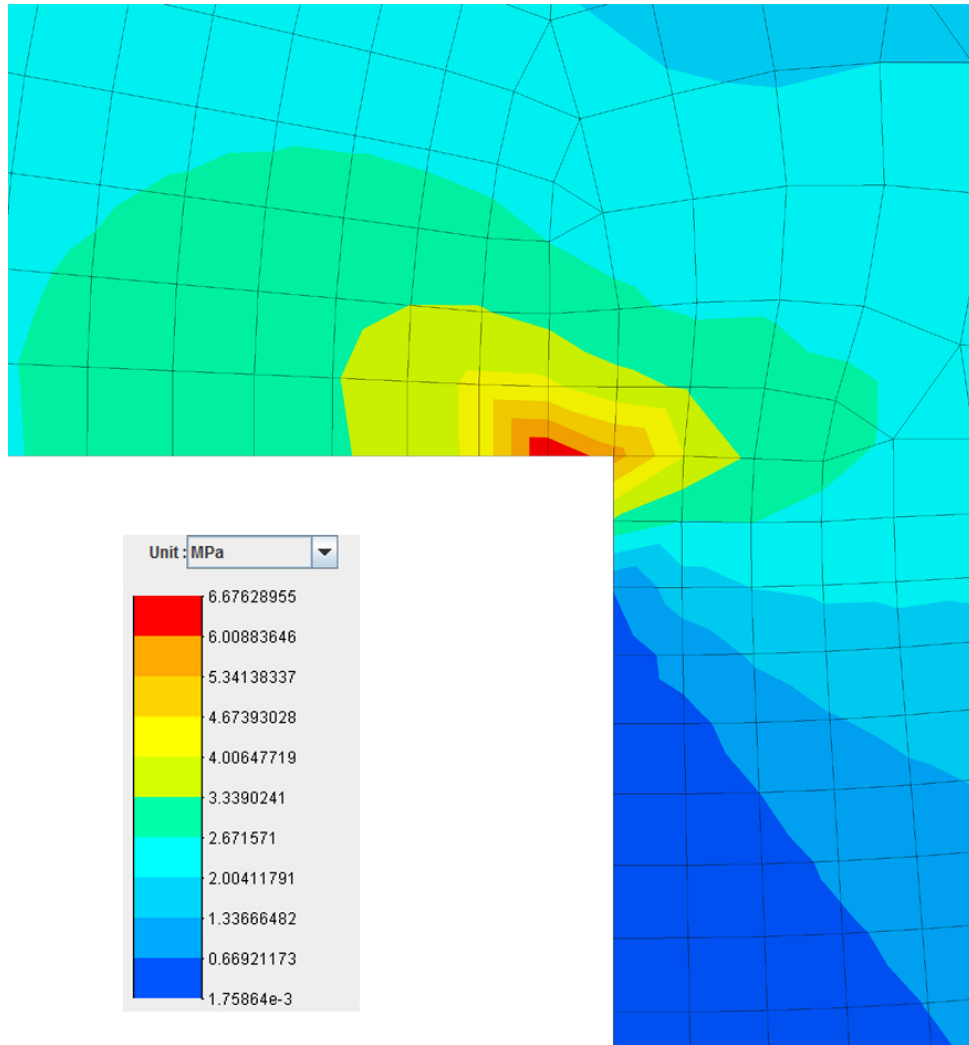


FIGURE 3.3 : Zoom sur la singularité du maillon rectangulaire.

disponible à la figure 3.3 <sup>2</sup>.

Comme on pouvait s'y attendre, l'angle rentrant du maillon induit une singularité qui est absolument à éviter. On comprend ainsi pourquoi les maillons de chaîne présentent traditionnellement une jonction courbe aux extrémités. Cette géométrie ne peut donc être conservée telle quelle.

La distribution des contraintes permet cependant de tirer quelques conclusions utiles dans la démarche d'optimisation.

D'une part, l'application de la force sur un côté droit semble induire une meilleure répartition des contraintes dans la zone d'intérêt.

D'autre part, les faibles contraintes observées dans le coin extérieur du maillon indiquent

<sup>2</sup>. Les contraintes sont interpolées sur cette figure, on ne tentera donc pas d'en tirer des informations quantitatives précises.

que la matière qui y est présente ne contribue que très peu à la résistance de la pièce et pourrait certainement être mieux utilisée pour renforcer certaines zones.

### 3.2.1 Remarque sur le champ des déplacements.

La géométrie rectangulaire que l'on a étudiée ici est en fait identique à celle que l'on a été amené à considérer dans la partie résistance des matériaux pour le champ des déplacements, avec la dimension  $b$  égale à 10 [mm]. Pour se convaincre de la validité des hypothèses effectuées à ce moment, on peut comparer les résultats obtenus. La figure 3.4 montre l'allure de la déformée calculée à partir de la résistance des matériaux, pour  $b = 10$  [mm] et  $P_s = 100$  [N] ainsi que l'allure de la déformée du maillon rectangulaire étudié dans cette section calculée par la méthode des éléments finis.

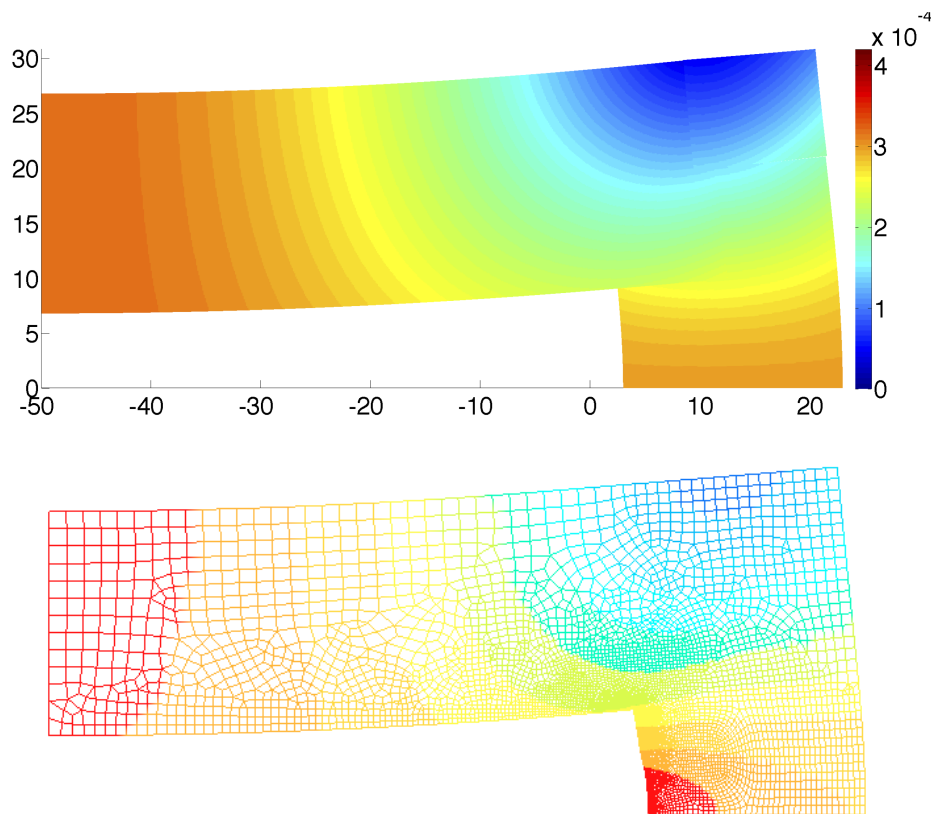


FIGURE 3.4 : Comparaison des déplacements par la résistance des matériaux et les éléments finis pour  $P_s = 100$  [N], même échelle de couleur, déplacements en [mm].

On observe des déformées similaires. Toutefois, les déplacements maximum calculés sont plus importants avec la méthode des éléments finis. On remarque également que la section inférieure est comprimée sous l'effet de  $P_s$ , ce phénomène ne pouvait pas être retrouvé à partir de la théorie des poutres puisque les contraintes normales des facettes parallèles à l'axe neutre de la poutre sont négligées et l'effet Poisson n'est pas considéré. Mis à part ces différences, l'ensemble se déforme de la même façon et avec des amplitudes similaires. Les hypothèses que l'on avait introduites dans la section 1.4.7 semblent donc satisfaisantes.

### 3.3 Détermination de la géométrie optimale.

#### 3.3.1 Description et justification de la forme choisie.

Comme on l'a vu sur la géométrie rectangulaire, il est peu utile de conserver la matière du coin extérieur. C'est pourquoi la géométrie courbe du design initial doit être conservée. De même, l'angle rentrant introduit dans la géométrie rectangulaire doit être évité.

Les résultats obtenus à l'aide du logiciel SAMCEF Field mettent en évidence de plus faibles contraintes au centre de la zone circulaire (Fig. 2.32). Une largeur importante de 20 [mm] au niveau de la zone d'application de la force n'est donc pas nécessaire. De plus, on observe des contraintes beaucoup plus élevées là où la force s'applique qu'à l'extrémité droite du maillon. Une réduction de la largeur de l'extrémité du maillon permet, comme on le verra plus loin, d'améliorer la distribution de contraintes dans cette zone. C'est pourquoi les éléments de courbe dont il est question au paragraphe précédent ne sont pas choisis circulaires comme dans la géométrie initiale mais elliptiques. Des quarts d'ellipse sont utilisés pour dessiner l'extrémité du maillon.

Ensuite, l'introduction d'une surface plane pour l'application de la force a donné des résultats satisfaisants dans le cas du maillon rectangulaire. L'idée est donc conservée ici. Les arcs d'ellipse se terminent par des segments de droite.

Une fois que la géométrie générale est fixée (Fig. 3.5), il convient de trouver les dimensions des différents éléments qui permettent de maximiser la force maximale applicable, ou de manière équivalente, de minimiser la contrainte maximale dans le maillon pour une force appliquée donnée.

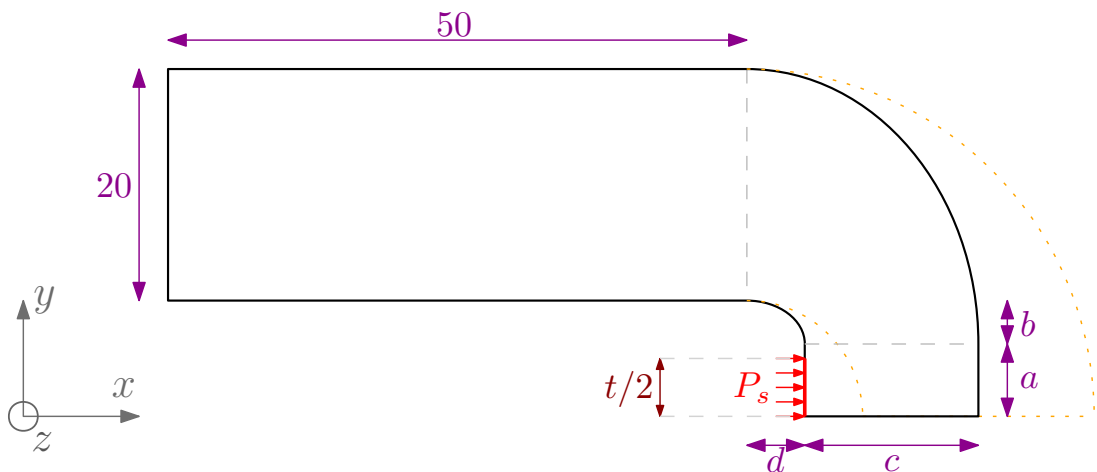


FIGURE 3.5 : Famille de géométries proposée (dimensions en [mm]).

On peut jouer sur plusieurs paramètres. Tout d'abord, la longueur  $a$  de la partie rectiligne de l'extrémité peut varier. Le demi-petit axe  $b$  de l'ellipse intérieure est un second choix à faire. Ensuite, la largeur  $c$  de la pièce au niveau de la zone d'application de la force peut varier. Finalement, le demi-grand axe de l'ellipse intérieure  $d$  permet d'avoir une courbure de la pièce

plus ou moins importante.

Comme précisé précédemment, on souhaite appliquer la force sur une surface plane. Celle-ci doit donc avoir une longueur suffisamment grande (égale à la moitié de l'épaisseur du maillon). Les optimisations réalisées se limitant à une augmentation de l'épaisseur  $t$  du maillon de 2 [mm] (passant donc de 10 [mm] à 12 [mm]), la valeur du paramètre  $a$  est fixée à 6 [mm]. C'est la modification la plus importante affectant la charge maximale.

Ensuite, une valeur de  $b$  trop petite induit une géométrie trop proche de celle de l'angle rentrant présent dans le maillon rectangulaire décrit précédemment et est par conséquent à éviter. Une valeur trop élevée conduit inutilement à un gaspillage de matière. Le paramètre  $b$  est ainsi fixé à 4 [mm].

Les calculs réalisés pour différentes combinaisons des paramètres  $c$  et  $d$  montrent que ces paramètres influencent indépendamment l'un de l'autre la contrainte maximale observée dans la pièce. Ils sont donc optimisés séparément, les valeurs testées sont reprises dans le tableau 3.1.

$d = 5$ [mm]		$c = 15$ [mm]	
$c$ [mm]	$\sigma_{max}$ [MPa]	$d$ [mm]	$\sigma_{max}$ [MPa]
12	3.50	4.0	3.07
13	3.35	5.0	3.04
14	3.14	5.5	3.10
15	3.04	6.0	3.17
16	3.10		

TABLEAU 3.1 : Optimisation des paramètres  $c$  et  $d$ , valeurs pour  $P_s = 100$  [N].

D'une part, en faisant varier la largeur de la pièce  $c$  entre 20 [mm] (la largeur du maillon initial) et 12 [mm], on observe que, jusqu'à une largeur de 15 [mm], la contrainte maximale diminue et que la contrainte équivalente de Von Mises se répartit de mieux en mieux dans la pièce. Après 15 [mm], la pièce est trop étroite et les contraintes maximales réaugmentent rapidement.

D'autre part, en faisant varier le demi-axe  $d$  entre 6 [mm] et 4 [mm], le même comportement est observé. La contrainte maximale diminue jusqu'à 5 [mm] puis réaugmente.

### 3.3.2 Géométrie optimale.

Compte tenu des remarques précédentes, la géométrie optimale est présentée à la figure 3.6.

Elle se compose de deux quarts d'ellipse terminés par des segments de droite de longueur  $a = 6$  [mm]. L'ellipse extérieure à des demi-axes de  $20 + b = 24$  [mm] et  $c + d = 20$  [mm]. L'ellipse intérieure à des demi-axes de  $b = 4$  [mm] et  $d = 5$  [mm]. La largeur de la pièce au niveau de l'application de la force est ainsi de  $c = 15$  [mm].

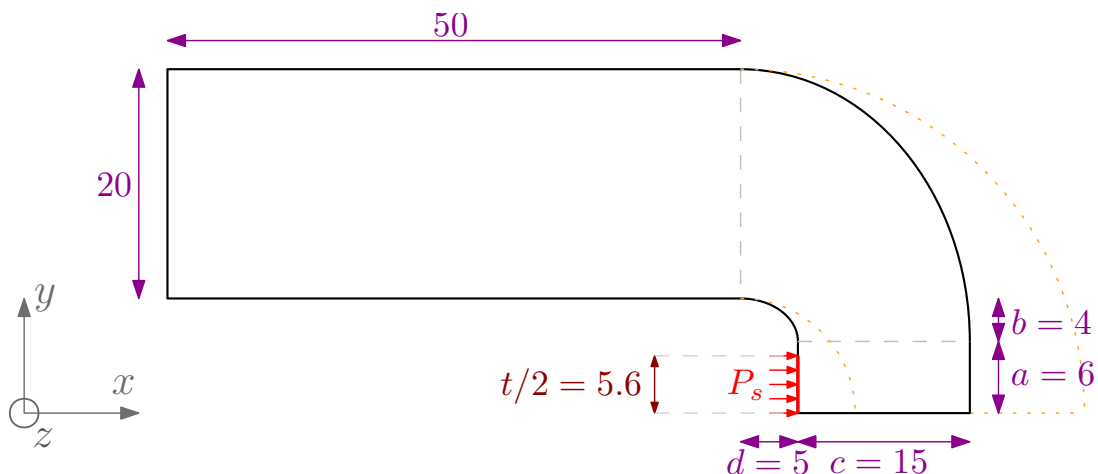


FIGURE 3.6 : Géométrie du maillon optimal (dimensions en [mm]).

La surface du maillon vaut de cette façon 5535.1 [mm<sup>2</sup>]. Cette diminution de l'aire permet d'augmenter l'épaisseur du maillon de 10 [mm] à 11.21 [mm], et donc aussi d'augmenter la longueur d'application de la force qui vaut désormais  $11.21/2 = 5.6$  [mm].

### 3.3.3 Maillage et type d'éléments.

La géométrie choisie n'étant pas fondamentalement différente de celle étudiée précédemment, l'élément  $Q_4$  est une nouvelle fois utilisé pour la maillage. Les justifications de ce choix sont les mêmes que celles qui nous avaient mené à le choisir dans le cas de base.

Les sous-domaines utilisés pour ce maillage sont par contre légèrement modifiés pour mieux tenir compte de la distribution des contraintes attendues au sein de ce maillon (Fig. 3.7). En particulier, un sous-domaine rectangulaire est créé au niveau de la zone d'application de la force. Les maillages sont repris aux figures 3.8 et 3.9.

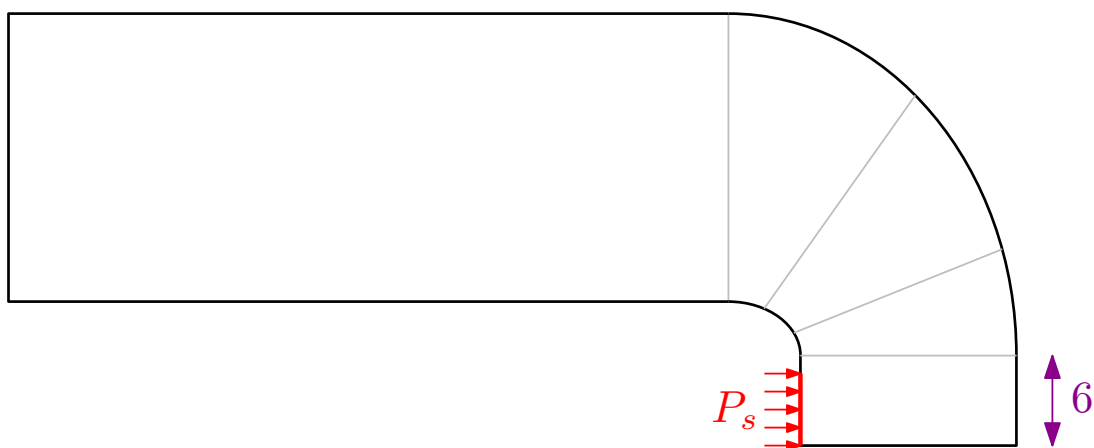


FIGURE 3.7 : Sous-domaines de la pièce optimisée.

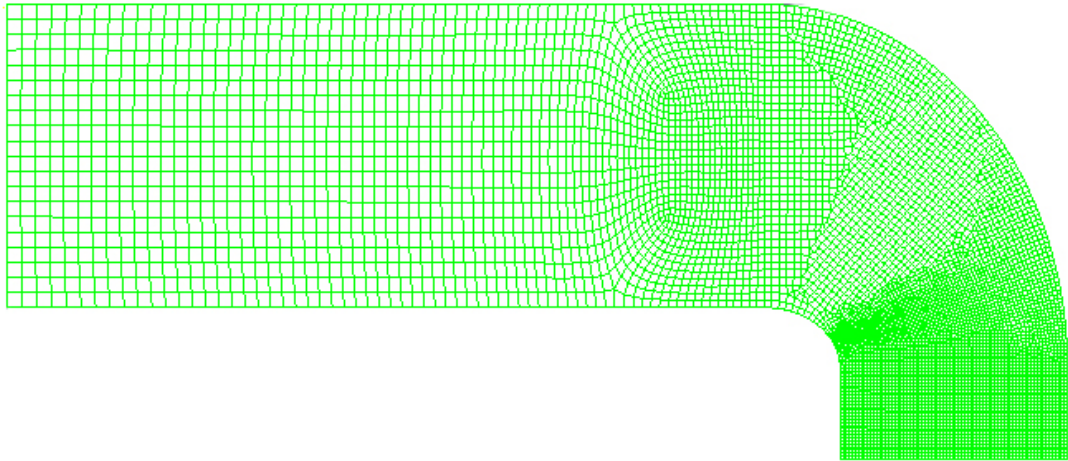


FIGURE 3.8 : Maillage de la pièce optimisée.

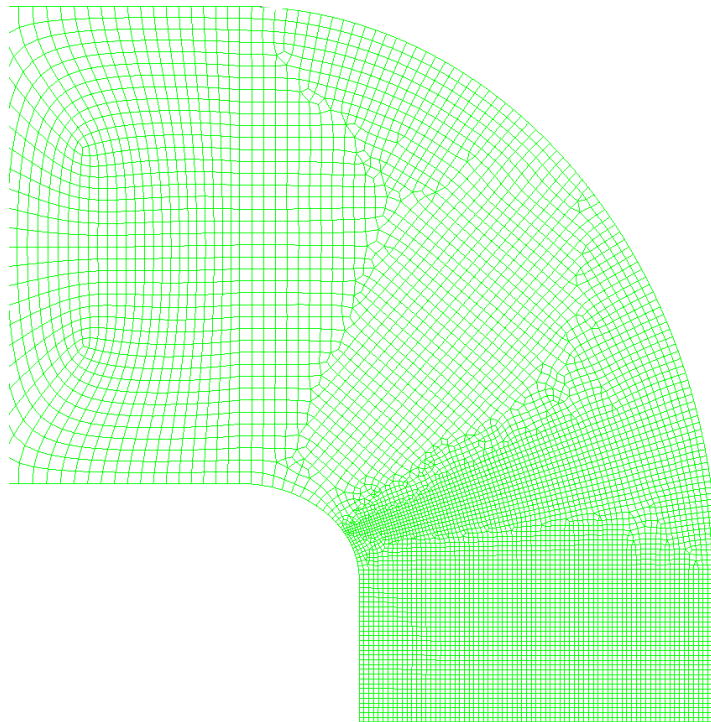


FIGURE 3.9 : Zoom du maillage de la pièce optimisée.

Avant de présenter les résultats, la qualité du maillage peut être discutée. Les éléments  $Q_4$  s'adaptent particulièrement bien au sous-domaine rectangulaire créé. Cette partie du maillon est ainsi parfaitement maillée avec des éléments carrés qui présentent les caractéristiques optimales pour chacun des critères de qualité. C'est une bonne chose étant donné que cette zone est précisément celle qui nous intéresse. La figure 3.10 reprend la distribution du *Jacobian Ratio*.



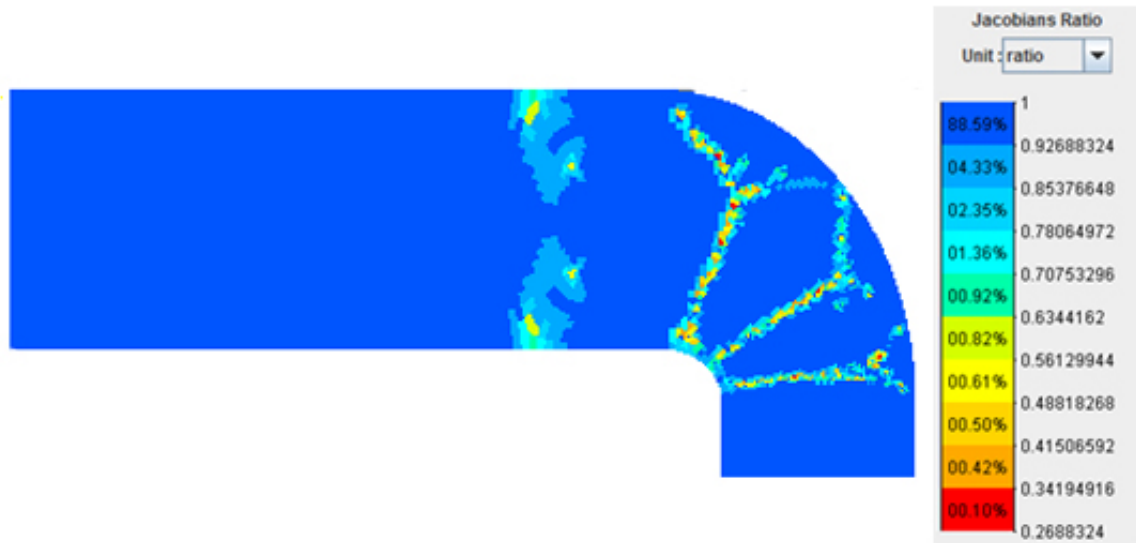


FIGURE 3.10 : Distribution du *Jacobian Ratio* dans la pièce optimisée.

### 3.3.4 Résultats.

La distribution de la contrainte équivalente de Von Mises dans la pièce est représentée à la figure 3.11.

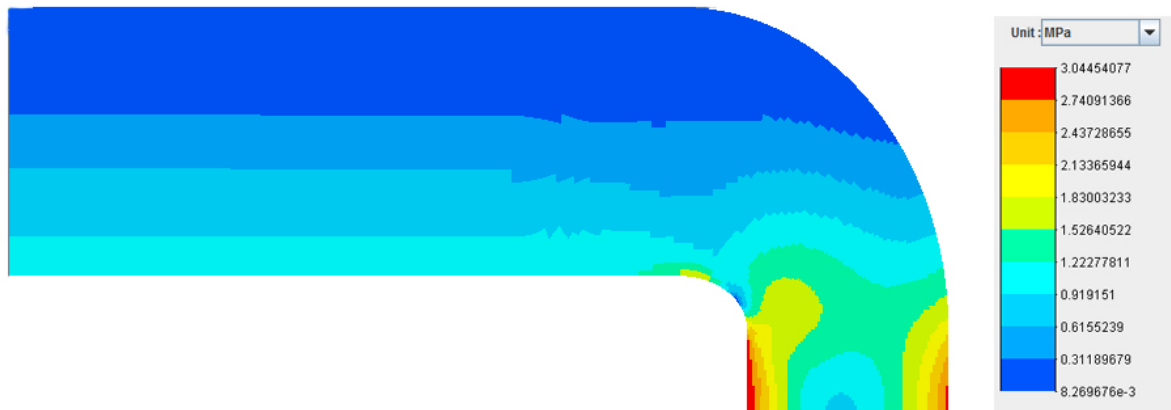


FIGURE 3.11 : Contraintes de Von Mises dans la pièce optimisée.

La contrainte maximale est de 3.04 [MPa] pour une force  $P_s$  de 100 [N]. La force maximale qui peut être appliquée au maillon complet sans sortir du domaine élastique est donc, par application de la formule (1.23), de 39.47 [kN], soit une augmentation de 24% par rapport à celle obtenue avec la géométrie circulaire.

Rappelons que l'optimisation a été réalisée en considérant un volume de matière constant. Si on avait conservé une épaisseur de maillon de 10 [mm], on aurait également trouvé une force maximale plus élevée que dans le cas circulaire. On observe en effet dans ce cas une

augmentation de  $P^{max}$  de 13% et une diminution de volume de 11% par rapport au cas de base.

L'optimisation décrite respecte les contraintes imposées, seules les zones circulaires du maillon pouvaient être modifiées et le volume ne pouvait augmenter.

Les résultats obtenus aussi bien avec les méthodes de résistance des matériaux qu'avec la méthode des éléments finis mettent cependant en évidence que les zones externes des parties droite du maillon sont soumises à des contraintes très faibles. Dès lors, le volume du maillon pourrait certainement être diminué fortement, et ce sans réduire la résistance de la pièce, en réduisant la largeur des parties droites.

# Conclusion.

L'étude qui nous a occupés dans ce projet est celle du design d'un maillon de chaîne en acier soumis à deux forces concentrées.

La géométrie du problème a permis de se limiter à l'étude d'un quart de ce maillon.

Dans un premier temps, le problème du maillon de chaîne a été étudié analytiquement grâce à la théorie de l'élasticité linéaire. Au prix de quelques simplifications, des estimations préliminaires des contraintes et déplacements ont ainsi pu être obtenues.

Ensuite, le même problème a été traité avec la méthode des éléments finis implémentée dans le logiciel SAMCEF Field. La singularité causée par la force concentrée a été éliminée en répartissant la force sur une longueur équivalente à la largeur du maillon, ce qui correspond à la réalité. L'étude de différents maillages utilisant différents types d'éléments finis a permis de mettre en évidence les avantages et inconvénients de chacun. Les convergences locale du champ des contraintes et globale de l'énergie potentielle totale ont été distinguées et c'est finalement l'élément  $Q_4$  qui a été retenu pour la suite de l'étude.

Les résultats obtenus et les ordres de grandeur sont cohérents avec les solutions des équations continues, ce qui permet de vérifier la discrétisation réalisée par SAMCEF Field. L'approche analytique permet de comprendre les aspects principaux de la distribution des contraintes et d'obtenir une valeur approchée réaliste de l'énergie de déformation mais pas les détails locaux qui conditionnent la valeur de la charge maximale. L'approche numérique permet par contre d'obtenir une valeur bien plus fiable de la charge maximale.

Finalement, la géométrie de la pièce a été modifiée dans le but d'augmenter la charge maximale admissible. Cette géométrie optimisée a permis d'augmenter la force maximale de 24%. Cette partie du projet met en évidence la puissance de la méthode des éléments finis qui permet, sans surcroît excessif de travail, de modifier la géométrie de la pièce étudiée ou les sollicitations auxquelles elle est soumise.

Il convient cependant de noter que, à aucun moment, le modèle n'a été validé. Les hypothèses réalisées, comme celle d'état plan de contrainte, bien que justifiées, limitent les résultats obtenus. La validation consisterait à confirmer expérimentalement les résultats obtenus avec une véritable chaîne.

# Annexe A

## Code MATLAB pour la partie résistance des matériaux.

```
A = 20*10; % [mm^2]
I = 20^3*10/12; % [mm^4]
a = 20; % [mm]
l = 50; % [mm]

E = 210000; % [MPa]
nu = 0.3; % [-]
G = E / (2*(1+nu)); % [MPa]
A_p = 5/6 * A;

k_p = 17.2; % Coef de prop entre P (= P_reelle/2) et M en theta = 0

P = 100; % [N]

%% ----- Partie courbe -----
%% Definition du domaine - POLAIRE
rho_c = (10:0.1:30)';
theta_max = pi/2;
theta_step = theta_max/100;
theta_l = 0:theta_step:theta_max;

% Coord polaire RHO
rho = ones(length(rho_c), length(theta_l));

for j=1:length(theta_l)
    rho(:,j) = rho_c .* rho(:,j);
end

% Coord polaire THETA
theta = ones(length(rho_c), length(theta_l));

for i=1:length(rho_c)
    theta(i,:) = theta_l .* theta(i,:);
end

%% Contraintes
sigma_N = P * sin(theta) / A;
```

```

sigma_M = P * (a*sin(theta) - k_p) .* (20-rho) / I;

sigma_tot = sigma_N + sigma_M;

tau_tot = -7.5e-5 * P * cos(theta) .* (30-rho) .* (rho-10);

sigma_VM = (sigma_tot.^2 + 3* tau_tot.^2).^(1/2);
%sigma_VM = abs(sigma_tot);

%% Premier partie du graphique
[X,Y] = pol2cart(theta, rho);

figure;
hold on
pcolor(X,Y,sigma_VM);
shading flat;

%% ----- Partie droite -----
%% Definition du domaine
X_dr_c = -50:2:0;
Y_dr_l = (10:0.5:30)';

X_dr = ones(length(Y_dr_l),length(X_dr_c));
for i=1:length(Y_dr_l)
    X_dr(i,:) = X_dr_c .* X_dr(i,:);
end

Y_dr = ones(length(Y_dr_l),length(X_dr_c));
for j=1:length(X_dr_c)
    Y_dr(:,j) = Y_dr_l .* Y_dr(:,j);
end

%% Contraintes
k = a - k_p;
sigma_dr = P * (1/A + k/I * (20-Y_dr));
sigma_VM_dr = abs(sigma_dr);

%% Deuxieme partie du graphique
pcolor(X_dr, Y_dr, sigma_VM_dr);
shading flat;
axis equal tight

%% ----- TPE -----
N1 = P;
T1 = 0;
M1 = k*P;
%% U
% Partie droite
dU1 = 0.5*(N1^2/(E*A) + T1^2/(G*A_p) + M1^2/(E*I));
% Partie courbe
dU2 = @(theta) 0.5*a*((P*sin(theta)).^2/(E*A) + ...
    (-P*cos(theta)).^2/(G*A_p) + (-P*sin(theta)*a+k_p*P).^2/(E*I));
% Energie interne totale
U_int = (50*dU1 + integral(dU2, 0, pi/2)) * 0.001; % on repasse en joule

%% P
% Travail des forces exterieures

```

```

% Calcul du déplacement du point d'application de P -> Engesser
delta1 = P*l*(1/(E*A) + k*a/(E*I));
dDelta2N = @(theta) a*(P*(sin(theta)).^2 / (E*A));
dDelta2T = @(theta) a*(P*(cos(theta)).^2 / (G*A_p));
dDelta2M = @(theta) -a*(a*P*sin(theta).*(k_p-a*sin(theta))/(E*I));

delta = delta1 + integral(dDelta2N, 0, pi/2); % [mm]
delta = delta + integral(dDelta2T, 0, pi/2) + integral(dDelta2M, 0, pi/2);

% Travail de la force exterieure
P_ext = P*delta*0.001;

% Affichage des resultats
fprintf('Energie interne : %d J\n', U_int);
fprintf('Energie externe : %d J\n', P_ext);

%% ----- Deplacements -----
%% Nouvelle geometrie
%b = 1.3466;
b = 20;

k_p_new = a*(a/2 + l + b) / (a + l + b); %[mm]

x = -l:0.1:b;
y = 0:0.1:a;

% Deplacement de la fibre moyenne
u_h = P/(E*A) * (l+x);
v_h = (a-k_p_new)*P / (2*E*I) * ((l+x).^2 - (l+b)^2);

u_v = + y.^3*P / (6*E*I) - k_p_new*P * y.^2 / (2*E*I);
corr_term = - u_v(length(y)) + u_h(length(x));
u_v = u_v + corr_term;
v_v = 0 * y;

factor = 10000;
% Position apres deformation
u_h_norm = u_h * factor;
u_v_norm = u_v * factor;
v_h_norm = v_h * factor;

figure;
hold on
plot(u_h_norm + x, v_h_norm + a, 'r'); %abscisse deformee
plot(u_v_norm + b, y, 'r');
axis equal tight
plot(x, a*ones(length(x),1));
plot(b*ones(length(y),1), y);

%% Champ complet de deformation
%% Deplacement partie horizontale
t = 20; %largeur
X_h_c = -50:0.1:b;
Y_h_l = (20-t/2:0.1:20+t/2)';

X_h = ones(length(Y_h_l),length(X_h_c));

```

```

for i=1:length(Y_h_l)
    X_h(i,:) = X_h_c .* X_h(i,:);
end

Y_h = ones(length(Y_h_l),length(X_h_c));
for j=1:length(X_h_c)
    Y_h(:,j) = Y_h_l .* Y_h(:,j);
end

depl_h = ones(length(Y_h_l), length(X_h_c), 2);

depl_h(:,:,1) = P/(E*A) * (1+X_h) - (a-k_p_new)*P / (E*I) ...
    * (1+X_h) .* (Y_h - a);
depl_h(:,:,2) = (a-k_p_new)*P / (2*E*I) .* ((1+X_h).^2 - (1+b)^2);

pos_X_h_vis = X_h + factor*depl_h(:,:,1); % vis for visible
pos_Y_h_vis = Y_h + factor*depl_h(:,:,2);

depl_h_amp = sqrt(depl_h(:,:,1).^2 + depl_h(:,:,2).^2);

%% Deplacement partie verticale
X_v_c = (b-t/2):0.1:(b+t/2);
Y_v_l = (0:0.1:20)';

X_v = ones(length(Y_v_l),length(X_v_c));
for i=1:length(Y_v_l)
    X_v(i,:) = X_v_c .* X_v(i,:);
end

Y_v = ones(length(Y_v_l),length(X_v_c));
for j=1:length(X_v_c)
    Y_v(:,j) = Y_v_l .* Y_v(:,j);
end

depl_v = ones(length(Y_v_l), length(X_v_c), 2);

depl_v(:,:,1) = Y_v.^3*P ./ (6*E*I) ...
    - k_p_new*P * Y_v.^2 / (2*E*I) + corr_term;
depl_v(:,:,2) = -(P/(2*E*I) * Y_v.^2 ...
    - k_p_new * P/(E*I) * Y_v) .* (X_v-b);

pos_X_v_vis = X_v + factor*depl_v(:,:,1);
pos_Y_v_vis = Y_v + factor*depl_v(:,:,2);

depl_v_amp = sqrt(depl_v(:,:,1).^2 + depl_v(:,:,2).^2);

%% Petit rectangle
X_rec_c = b-t/10:0.1:(b+t/2);
Y_rec_l = (20:0.1:30)';

X_rec = ones(length(Y_rec_l),length(X_rec_c));
for i=1:length(Y_rec_l)
    X_rec(i,:) = X_rec_c .* X_rec(i,:);
end

Y_rec = ones(length(Y_rec_l),length(X_rec_c));
for j=1:length(X_rec_c)

```

```

    Y_rec(:,j) = Y_rec_l .* Y_rec(:,j);
end

depl_rec = ones(length(Y_rec_l), length(X_rec_c), 2);

depl_rec(:, :, 1) = 0.5*(Y_rec.^3*P ./ (6*E*I) ...
    - k_p_new*P * Y_rec.^2 / (2*E*I) + corr_term)....
    + 0.5*(P/(E*A) * (1+X_rec) ...
    - (a-k_p_new)*P / (E*I) * (1+X_rec) .* (Y_rec - a));
depl_rec(:, :, 2) = -0.5*(P/(2*E*I) * Y_rec.^2 ...
    - k_p_new * P/(E*I) * Y_rec) .* (X_rec-b))...
    + 0.5*((a-k_p_new)*P / (2*E*I) .* ((1+X_rec).^2 - (1+b)^2));

pos_X_rec_vis = X_rec + factor*depl_rec(:, :, 1);
pos_Y_rec_vis = Y_rec + factor*depl_rec(:, :, 2);

depl_rec_amp = sqrt(depl_rec(:, :, 1).^2 + depl_rec(:, :, 2).^2);

%% Affichage des resultats
figure;
hold on
pcolor(pos_X_v_vis, pos_Y_v_vis, depl_v_amp);
pcolor(pos_X_h_vis, pos_Y_h_vis, depl_h_amp);
pcolor(pos_X_rec_vis, pos_Y_rec_vis, depl_rec_amp);
shading flat
axis equal tight

```



# Références.

- [1] MASSONNET Ch., CESCOTTO S., 1986. *Mécanique des matériaux*. H. Dessain, Liège. 393 pages.
- [2] CESCOTTO S., *Mécanique du solide*. Centrale des Cours de l'AEES, Liège.
- [3] WAUTELET G., 2016. *Présentation des projets*, Liège.
- [4] GOKHALE N., 2008. *Practical Finite Element Analysis*.
- [5] ZIENKIEWICS O., TAYLOR R., 2000. *The Finite Element Method. The basis*. Butterworth-Heinemann. 689 pages.
- [6] PONTHOT J.-P., 2016. *MECA0036 : Finite Element Method. Slides*.