Proposition de Correction d'élément de Logique 2023

EXO 1

(1) $\exists M \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ tel que $x \leq M$

$$\boxed{\neg\, \forall M \in \mathbb{N}, \exists x \in A \text{ tel que } x > M}$$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ (dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de comparaison donc on utilise le module !)

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a > b$, $]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

EXO 2

(1) Tous les repas sont mangés par des (certains) étudiants de Maths-Infos

(2) Certains repas sont mangés par tous les étudiants

(3) Certains étudiants mangent tous les repas

Exo 2 (Relation binaire)

Sur l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 23\}$, on Considère la relation binaire suivante

$a \mathcal{R} b$ si $a^3 - b^3$ est un multiple de 6

(1)

* Reflexivité

Soit $a \in E$

$a^3 - a^3 = 0$ or 0 est un multiple de 6.

d'où $a \mathcal{R} a$. Ainsi $\mathcal{R}$ est reflexive.

* Symétrique

Soient $a, b \in E$ telque $a \mathcal{R} b$.

A-t-on $b \mathcal{R} a$?

non

$a \mathcal{R} b \Rightarrow a^3 - b^3 = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b^3 - a^3 = 6(-k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b^3 - a^3 = 6p$, $p = -k \in \mathbb{Z}$

AnyScanner

D'où $b\mathcal{R}a$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique.

* Transitivité

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tel que $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$

A-t-on $a\mathcal{R}c$?

$a\mathcal{R}b \Rightarrow a^3 - b^3 = 6p$, $p \in \mathbb{Z}$ (1)

$b\mathcal{R}c \Rightarrow b^3 - c^3 = 6q$, $q \in \mathbb{Z}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow a^3 - c^3 = 6(p+q)$

$\Rightarrow a^3 - c^3 = 6k$, avec $k = p+q \in \mathbb{Z}$

D'où $a\mathcal{R}c$

Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.

Bilan: $\mathcal{R}$ étant reflexive, symétrique et transitive

Conclusion: $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Les classes d'équivalence de 0 et 1.

AnyScanner

$* \bar{0} = \{x \in E \mid x R 0\}$

$x \in \bar{0} \Leftrightarrow x R 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 0^3 = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$ d'où 6 divise x^3.

Tableau de Congruence modulo 6

x	0	1	2	3	4	5
x^3	0	1	2	3	4	5

d'après le tableau de Congruence $6/x$.

Ainsi $x = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\bar{0} = 6\mathbb{Z} = \{0, 6, 12, 18\}$

$* \bar{1} = \{x \in E \mid x R 1\}$

$x \in \bar{1} \Leftrightarrow x^3 - 1 = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 = 1 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 = 1 [6]$

$x \in \bar{1} \Leftrightarrow \equiv 1[6]$ d'après le tableau de congruence

$\Leftrightarrow x = 1+6k,\ k \in \mathbb{Z}$

D'où $\bar{1} = 1+6\mathbb{Z} = \{1, 7, 13, 19\}$

③ Déterminons toutes les classes d'équivalences.

On a: $\bar{0} = 6\mathbb{Z} = \{0, 6, 12, 18\}$

$\bar{1} = 1+6\mathbb{Z} = \{1, 7, 13, 19\}$

$\bar{2} = \{x \in E / x \mathcal{R} 2\}$

$x \in \bar{2} \Leftrightarrow x^3 - 2^3 = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 = 8 + 6k$

$\Leftrightarrow x^3 = 2 + 6(1+k),\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x^3 = 2[6]$

$\Leftrightarrow x^3 \equiv 2[6]$ d'après la tableau de congruence

~~$\Leftrightarrow x \equiv 8[6]$~~

$x \in \bar{2} \Leftrightarrow x = 2+6p$ avec $p \in \mathbb{Z}$

$\bar{2} = 2+6\mathbb{Z} = \{2, 8, 14, 20\}$

On montre de façon analogique que :

$\bar{3} = \{3, 9, 15, 21\}$

$\bar{4} = \{4, 10, 16, 22\}$

$\bar{5} = \{5, 11, 17, 23\}$

Exo 4

① Exemple d'une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui soit injective.

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

f est bien définie et il n'y a pas ~~d'image~~ partage d'image donc f est injective.

Justification

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) = f(b)$

A-t-on $a = b$?

1er Cas : Si $a > 0$ et $b > 0$

On a $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a = 2b$

$\Rightarrow a = b$ dans ce cas, f est injective.

2e Cas : Si $a < 0$ et $b < 0$

$f(a) = f(b) \Rightarrow -2a + 1 = -2b + 1$

$\Rightarrow -2a = -2b$

$\Rightarrow -a = -b$

$\Rightarrow a = b$ dans ce cas f est injective.

Conclusion : Dans tous les cas, f est injective.

② Trouvons une application g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ qui soit surjective

Soit g cette application

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-n+1}{2} & \text{si est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{Z}$, existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(n) = b$?

1er Cas : si $b \leq 0$

$$g(n) = b \Rightarrow \frac{-n+1}{2} = b$$

$$\Rightarrow -n+1 = 2b$$

$$\Rightarrow n = -2b+1$$ dans ce cas g est surjective

2e Cas : si $b > 0$

On a $g(n) = b \Rightarrow \frac{n}{2} = b$

$$\Rightarrow n = 2b$$ donc g est surjective

Conclusion : g est donc surjective.