

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 8

Exercice 2 *Théorèmes d'extension : rappels*

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole, c'est-à-dire que $\emptyset \neq \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a

$$A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ une mesure sur \mathcal{A} , c'est-à-dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et pour toute séquence $(E_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ on a

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{A} \quad \implies \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right).$$

Théorème (Carathéodory). *Il existe une mesure $\mu^* : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$ qui étend μ . Si μ est σ -finie, alors μ^* est unique.*

2. Le théorème est le suivant.

Théorème (Classe monotone). *On suppose que Π est un π -système (i.e. un sous-ensemble de parties de E stable par intersections finies). Alors*

$$\bigcap_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \sigma(\Pi),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des classes monotones \mathcal{C} telles que $\Pi \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3. *Tribu produit*

1. $\mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}$ est par définition la tribu engendrée par les cylindres.
2. Si $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ avec $A_i \in \mathcal{S}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Si A s'écrit aussi $A'_1 \cup \dots \cup A'_m$, alors

$$\sum_{j=1}^m \mu(A'_j) = \sum_{i,j} \mu(A'_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j),$$

donc $\mu(A)$ ne dépend pas de la décomposition choisie.

On vérifie alors facilement que μ définit bien une mesure sur \mathcal{S} .

3. On se donne P une mesure de probabilité sur A et on note \mathcal{S} l'ensemble des cylindres. On définit $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ par $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu(C_{n,\mathbf{A}}) = \prod_{j=1}^n P(A_j), \quad \mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}^n. \quad (1)$$

On se donne des cylindres $S^n = S_0^n \times S_1^n \times \dots \in \mathcal{S}$, ($n \in \mathbb{N}$) tels que $X = \bigcup_n S^n$; pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère $H_k : A^{k+1} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$H_k(x_0, \dots, x_k) = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j > k} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^k 1_{S_i^n}(x_i) \right).$$

(a) On a

$$\begin{aligned} \int_A H_{k+1}(x_0, \dots, x_k, x) dP(x) \\ &= \int_A \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j > k+1} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^k 1_{S_i^n}(x_i) \right) 1_{S_{k+1}^n}(x) dP(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j > k+1} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^k 1_{S_i^n}(x_i) \right) P(S_{k+1}^n) \\ &= H_k(x_0, \dots, x_k). \end{aligned}$$

(b) On a

$$\int_A H_0(x) dP(x) = \int_A \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j > 0} P(S_j^n) \right) 1_{S_0^n}(x) dP(x) = \sum_n \mu(S^n) < 1.$$

Ainsi il existe $x_0 \in A$ tel que $H_0(x_0) < 1$. On suppose construits $x_0, \dots, x_k \in A$ tels que $H_k(x_0, \dots, x_k) < 1$. Alors par (a) on a

$$\int_A H_{k+1}(x_0, \dots, x_k, x) dP(x) = H_k(x_0, \dots, x_k) < 1.$$

Ainsi il existe $x_{k+1} \in A$ tel que $H_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}) < 1$.

- (c) Par la question 2., l'application μ s'étend uniquement en une mesure additive sur l'ensemble des unions de cylindres. On veut appliquer le théorème de Carathéodory. Pour cela, on aimerait montrer que μ est σ -additive (il suffit de le montrer sur les cylindres). Soit (S^n) une suite de cylindres deux-à-deux disjoints telle que $X = \bigcup_n S^n$. On suppose par l'absurde que $\sum_n \mu(S^n) < 1$. Par (b), il existe une suite $\mathbf{x} = (x_n)$ telle que $H_k(x_0, \dots, x_k) < 1$ pour tout k . Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in S^m$, et $i_m \in \mathbb{N}$ tel que $S_{i_m}^m = A$ pour tout $j > i_m$. Alors on a

$$\left(\prod_{j > i_m} P(S_j^m) \right) \left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i) \right) = 1,$$

et donc

$$H_{i_m}(x_0, \dots, x_{i_m}) \geq \left(\prod_{j > i_m} P(S_j^m) \right) \left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i) \right) = 1,$$

ce qui est absurde.

Montrons maintenant que μ est invariante par le décalage $\sigma : X \rightarrow X$. défini par

$$\sigma : (x_n) \mapsto (x_{n+1}).$$

Soit $S = S_0 \times S_1 \times \cdots$ un cylindre. Alors

$$\sigma^{-1}(S) = A \times S_0 \times S_1 \times \cdots ,$$

et donc $\mu(\sigma^{-1}(S)) = \mu(S)$. Cette égalité est donc aussi vraie pour tout $S \in \mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}}$.

4. La seule difficulté est la σ -additivité. On se donne une suite de cylindres (S^n) comme précédemment.

On pose

$$F_N = \mathcal{C} \left(\bigcup_{n \leq N} S^n \right).$$

Alors F_N est une suite décroissante de compacts, telle que l'intersection $\bigcap_N F_N$ est vide.

Ceci implique que $F_N = \emptyset$ si N est assez grand, et donc $\bigcup_{n \geq N} S^n = A^{\mathbf{N}}$. En particulier $\mu(\bigcup_{n \leq N} S^n) = 1$.

5. P_M est additive car si $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_p) \in A^{p+1}$ on a d'un côté

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^m C_{n, i\mathbf{w}} \right) = \mu(C_{n+1, \mathbf{w}}) = v_{w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}},$$

et de l'autre, puisque $v = Mv$,

$$\sum_{i=1}^m \mu(C_{n, i\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^m v_i m_{i, w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}} = \left(\prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}} \right) \underbrace{\sum_{i=1}^m v_i m_{i, w_0}}_{v_{w_0}}.$$

L'existence et l'unicité de P_M sont alors claires par le même raisonnement qu'aux questions précédentes. Il suffit donc de montrer que P_M est une mesure de probabilités invariante par le décalage.

C'est une mesure de probabilités :

$$P_M(X) = \sum_{w \in A} \mu(C_{0, w}) = \sum_{i=1}^m v_i = 1.$$

De plus P_M est σ -invariante car $\sigma^{-1}(C_{n, \mathbf{w}}) = C_{n+1, \mathbf{w}}$.

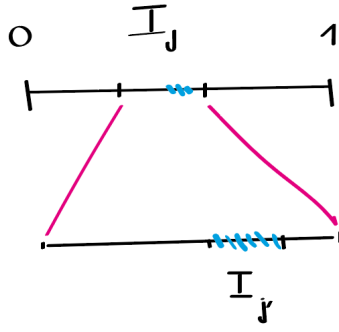
6. On se donne un mot $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_p)$. Alors

$$P^{\otimes \mathbf{N}}(C_{n, \mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^p P(\{w_j\}) = P(\{w_0\}) \prod_{j=0}^{p-1} M(P)_{w_j, w_{j+1}},$$

ce qui conclut car si $v = (P(\{1\}), \dots, P(\{m\}))$ on a $vM(P) = v$.

7. Soit $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_p) \in A^{p+1}$. Alors $x \in H(C_{n, \mathbf{w}})$ si et seulement si

$$\forall j = 0, \dots, p, \quad m^{n+j}x \in \left[\frac{w_j - 1}{m}, \frac{w_j}{m} \right[\pmod{\mathbf{Z}}.$$



Par suite on a, puisque $x \mapsto m^n x$ préserve la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} ,

$$\text{Leb}(H(C_{n,\mathbf{w}})) = \text{Leb} \left(\bigcap_{j=0}^p \left\{ x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, m^j x \in I_j \right\} \right) = \frac{1}{m^{p+1}}$$

Or

$$\mu_m^{\otimes \mathbf{N}}(C_{n,\mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^p P(\{w_j\}) = \frac{1}{m^{p+1}}.$$

8. L'ensemble $\mathbb{C}Z$ des points m -adiques est dénombrable, notons le $\{y_k, k \in \mathbf{N}\}$. On a alors

$$\text{Leb}(\mathbb{C}Z) = \sum_k \mu(\{y_k\}) = 0.$$

9. Si $\mathbf{x} \in H^{-1}(Z)$, alors \mathbf{x} ne stationne pas à 1 ni m à partir d'un certain rang.

On a

$$\begin{aligned} H(\sigma(\mathbf{x})) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1} - 1}{m^k} \mod \mathbf{Z} \\ &= mH(\mathbf{x}) \mod \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Il est clair que $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui n'est pas m -adique admet exactement un antécédent par H , en regardant les nombres $x_k \in \{1, \dots, m\}$ ($k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$) tels que

$$x_k - 1 = \lfloor m^k x \rfloor \mod m,$$

qui ne stationnent jamais à 1 ou m .