Nantes Université, 2025
XMS2ME320

Pour toute question :
`yann.chaubet@univ-nantes.fr`

Analyse de Fourier
Devoir maison à rendre le 10 avril

On rappelle que si $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$ est à support compact, sa transformée de Fourier est holomorphe. Le but du devoir est de montrer le résultat suivant, qui donne une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions holomorphes pour être la transformée de Fourier d'une distribution à support compact.

Théorème (Paley–Wiener)**.** *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact inclus dans $[-r, r]$ si et seulement s'il existe des constantes $C, N > 0$ telles que*

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^N \exp(r|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

I. Le cas lisse

Dans cette partie on explicite la condition sur une fonction holomorphe pour être la transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact.

Proposition (Paley–Wiener, version lisse)**.** *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est la transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact inclus dans $[-r, r]$ si et seulement pour tout $N \in \mathbf{N}$ il existe $C_N > 0$ telle que*

$$|f(z)| \leqslant C_N(1 + |z|)^{-N} \exp(r|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

1. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$.

(i) Montrer que la fonction $\widehat{\varphi}$ définie par

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) e^{-izt} \mathrm{d}t, \quad z \in \mathbf{C},$$

est bien définie et que $\widehat{\varphi}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

(ii) On suppose que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-r, r]$. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ telle que

$$|\widehat{\varphi}(z)| \leqslant C_N(1 + |z|)^{-N} \exp(r|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

2. Soit maintenant $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe et $r > 0$ tels que pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ telle que

$$|f(z)| \leqslant C_N(1 + |z|)^{-N} \exp(r|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) e^{i\lambda t} \mathrm{d}\lambda.$$

(i) Montrer que φ est bien définie avec $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$.

(ii) Montrer que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\varphi(t) = \frac{e^{-\delta t}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(\lambda + i\delta) e^{i\lambda t} \mathrm{d}\lambda$$

et en déduire que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-r, r]$.

(iii) Montrer la version lisse du théorème de Paley–Wiener.

II. Le cas général

3. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$ telle que $\operatorname{supp} u \subset [-r, r]$. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ on note

$$\|\varphi\|_{\mathscr{C}^N} = \sup_{\ell=0,\dots,N} \sup_{t \in \mathbf{R}} |\varphi^{(\ell)}(t)|.$$

On note aussi $e_z(t) = \exp(-izt)$ pour tous $z \in \mathbf{C}$ et $t \in \mathbf{R}$. On fixe une fonction $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}, [0, 1])$ telle que $\chi(t) = 1$ pour $|t|$ petit et $\chi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$. On définit enfin $\chi_\delta : \mathbf{R} \to [0, 1]$ par

$$\chi_\delta(t) = \chi\left(\frac{|t| - r}{\delta}\right) \quad \text{si} \quad |t| \geqslant r \qquad \text{et} \qquad \chi_\delta(t) = 1 \quad \text{sinon.}$$

(i) Montrer que χ_δ est lisse à support dans $[-r - \delta, r + \delta]$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k > 0$ telle que

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left(\chi_\delta(t) e^{-izt} \right) \right| \leqslant C_k (1 + |z|)^k e^{(r+\delta)|\operatorname{Im} z|} \sum_{\ell=0}^{k} \delta^{-\ell} \left(1 + |z|\right)^{-\ell}, \quad z \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(ii) Montrer que pour tout $\delta > 0$ et tout $z \in \mathbf{C}$ on a $\widehat{u}(z) = \langle u, \chi_\delta \cdot e_z \rangle$.

(iii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ telles que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{C^N}, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}).$$

(iv) Déduire des trois questions précédentes le sens direct du théorème de Paley–Wiener. *Indication. Pour $z \in \mathbf{C}$ on pourra poser $\delta = (1 + |z|)^{-1}$.*

4. On se donne à présent $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe telle qu'il existe $C, r > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ vérifiant

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^N \exp(r|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ à support dans $[-1, 1]$ telle que $\int \chi(t)\mathrm{d}t = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ on pose

$$\chi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \chi(\varepsilon^{-1} t).$$

(i) Montrer que χ_ε est une approximation de l'unité.

(ii) En utilisant la partie **I.**, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $M \in \mathbf{N}$ il existe $C_{M,\varepsilon} > 0$ telle que

$$|\widehat{\chi_\varepsilon}(z)| \leqslant C_{M,\varepsilon} (1 + |z|)^{-M} \exp(\varepsilon |\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbf{C}.$$

(iii) Montrer que $f|_{\mathbf{R}} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$.

Dans la suite on note $u = \mathcal{F}^{-1}(f|_{\mathbf{R}}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$.

(iv) Montrer que le produit de convolution $\chi_\varepsilon \star u$ est bien défini pour tout $\varepsilon > 0$, qu'on a $\chi_\varepsilon \star u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, et que $\chi_\varepsilon \star u \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

(v) Montrer que $\widehat{\chi_\varepsilon \star u} = \widehat{\chi_\varepsilon}|_{\mathbf{R}} \cdot f|_{\mathbf{R}}$ et en déduire en utilisant la partie **I.** qu'on a

$$\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon \star u) \subset [-r - \varepsilon, r + \varepsilon], \quad \varepsilon > 0.$$

(vi) Montrer le sens indirect du théorème de Paley–Wiener.