École Normale Supérieure
2020/2021

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 2

Exercice 1. *Familles d'applications transitives*

Soit $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une base d'ouverts de X. Pour tous $k, i \in \mathbf{N}$, l'ensemble

$$A_{i,k} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f_i^{-n}(U_k)$$

est un ouvert dense, par transitivité des f_i. Dès lors l'ensemble

$$Y = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_{i,k}$$

est dense, par le théorème de Baire, puisque X est localement compact. Tout élément $y \in Y$ vérifie $\omega_{f_i}(y) = X$.

Exercice 2. *Transformations minimales*

1. Soient U, V deux ouverts non vides, et $Y = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(V)}$. Alors Y est fermé et $f(Y) \subset Y$; ainsi $Y = X$ et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^{-n}(U) \cap V = \emptyset$.

2. Soit $\mathcal{F} = \{F \subset X, \quad F \text{ est un fermé non vide tel que } f(F) \subset F\}$. Alors $\mathcal{F}$ est partiellement ordonné pour l'inclusion. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une famille totalement ordonnée. Alors

   $$G = \bigcap_{F\in\mathcal{C}} F$$

   est non vide. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $X = \bigcup_F \complement F$ et par compacité, il existe $F_1, \ldots, F_N \in \mathcal{C}$ tels que

   $$X = \bigcup_{i=1}^{N} \complement F_i.$$

   Par suite $\bigcap_{j=1}^{N} F_j = \emptyset$, ce qui est absurde puisque la famille $\{F_1, \ldots, F_N\}$ est totalement ordonnée.

   Ainsi G est non vide et c'est un minorant pour $\mathcal{C}$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément minimal de $\mathcal{F}$, noté Y. Soit $F \subset Y$ un fermé non vide tel que $f(F) \subset F$. Alors $F = Y$ par minimalité de Y et donc $f|_Y$ est minimale.

3. Soit $f : X \to X$ continue. Alors par la questions précédente, f admet une partie fermée minimale non vide Y. Soit $y \in Y$; on considère l'orbite positive $\mathcal{O}_+(y) = \{f^n(y), \ n \in \mathbf{N}\}$. Alors $\overline{\mathcal{O}_+(y)}$ est une partie fermée non vide de Y, invariante par f. Par minimalité, $\overline{\mathcal{O}_+(y)} = Y$ et y est positivement récurrent.

Exercice 3. *Ensemble non-errant*

1. Supposons que pour tout $n > m$, $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Alors x n'est pas périodique et il existe un voisinage V de x tel que $f^j(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $j = 1, \ldots, m$. Quitte à réduire V, on peut supposer $V \subset U$. On a donc $f^k(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x \notin \Omega(f)$.

2. Soit $x \notin \Omega(f)$ et U un voisinage ouvert de x tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Alors tout $y \in U$ est errant, et donc $\Omega(f)$ est fermé. Il est invariant : si $x \in \Omega(f)$ et $y = f(x)$, on a un voisinage U de x et $n > 0$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Alors $V = f^{-1}(U)$ est un voisinage de y et vérifie $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

   Enfin, soit $x \in X$ et $y \in \omega(x)$. Soit U un voisinage ouvert de y. Alors il existe $m > n > 0$ tels que $f^m(x), f^n(x) \in U$. Il suit que $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$, donc $y \in \Omega(f)$.

3. Pour $x \in \mathrm{Per}(f)$, l'orbite $\mathcal{O}_+(x)$ est un ensemble minimal et donc $\mathrm{Per}(f) \subset M(f)$.

   Soit $F \subset X$ un sous-ensemble minimal pour f. Alors tout point de F est récurrent (cf. **Exercice 2.**) et donc $M(f) \subset R(f)$.

   Si x est récurrent, on a $x \in \omega(x) \subset \Omega(f)$. Comme $\Omega(f)$ est fermé, on a $R(f) \subset \Omega(f)$.

Exercice 4. *Entropie d'un flot*

La compacité de X et la continuité de Φ donnent

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad \mathrm{dist}(x,y) \leq \delta(\varepsilon) \implies \mathrm{d}_1^{\Phi}(x,y) \leq \varepsilon.$$

Pour $f : X \to X$, on rappelle que

$$\mathrm{d}_n^f(x,y) = \max\{\mathrm{d}(f^k(x), f^k(y)),\ k = 0, \ldots, n-1\}.$$

De plus, on peut supposer que $\delta(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, puisque $\mathrm{d}_T^{\Phi} \geq \mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 1$

$$B_{\mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}}(x, \varepsilon) \supset B_{\mathrm{d}_T^{\Phi}}(x, \varepsilon) \supset B_{\mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}}(x, \delta(\varepsilon)).$$

Ainsi, en notant pour toute application $f : X \to X$

$$M^f(n, \varepsilon) = \min\left\{m \geq 1,\ \exists x_1, \ldots, x_m \in X,\ \bigcup_{i=1}^m B_{d_n^f}(x_i, \varepsilon) = X\right\},$$

on a

$$M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \varepsilon) \leq M^{\Phi}(T, \varepsilon) \leq M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \delta(\varepsilon)),$$

où $M^{\Phi}(T, \varepsilon)$ est défini comme $M^f(n, \varepsilon)$ en remplaąnt d_n^f par d_T^{Φ}. Il suit que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \varepsilon) \leq \limsup_T \frac{1}{T} \ \log M^{\Phi}(T, \varepsilon) \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \delta(\varepsilon)),$$

ce qui conclut.

Exercice 5. *Propriétés de l'entropie topologique*

On définit comme dans le cours, pour tout $f : X \to X$, tout $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$C^f(n, \varepsilon) = \min\left\{m \geq 1,\ \exists U_1, \ldots, U_m \subset X,\ \forall j,\ \mathrm{diam}_{\mathrm{d}_n^f}(U_i) \leq \varepsilon,\ X \subset \bigcup_{i=1}^m U_i\right\},$$

et

$$N^f(n, \varepsilon) = \max\left\{m \in \mathbf{N},\ \exists x_1, \ldots, x_m \in X,\ \forall i \neq j,\ \mathrm{d}_n^f(x_i, x_j) \leq \varepsilon\right\}.$$

1. On a $C^f(n,\varepsilon) \geq C^{f|_\Lambda}(n,\varepsilon)$ pour tous n, ε, ce qui conclut.

2. Par la question précédente on a $h_{\text{top}}(f_j) \leq h_{\text{top}}(f)$ pour tout j. De plus, on a que
$$C^f(n,\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{m} C^{f|_{\Lambda_i}}(n,\varepsilon).$$
Ceci implique qu'il existe $i \in \{1,\dots,m\}$ tel que
$$C^{f|_{\Lambda_i}}(n,\varepsilon) \geq \frac{1}{m} C^f(n,\varepsilon),$$
qui vérifie donc $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_i}) \geq h_{\text{top}}(f)$.

3. On a que $\mathrm{d}_n^{f^m} \leq \mathrm{d}_{mn-m+1}^f$ pour tous $m,n \geq 1$. Par suite, $M^{f^m}(n,\varepsilon) \leq M^f(mn-m+1,\varepsilon) \leq M^f(mn,\varepsilon)$.

   Par continuité de f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $B(x,\delta(\varepsilon)) \subset B_{\mathrm{d}_m^f}(x,\varepsilon)$. Alors
$$\begin{aligned} B_{\mathrm{d}_n^{f^m}}(x,\delta(\varepsilon)) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B(f^{im}(x),\delta(\varepsilon)) \\ &\subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B_{\mathrm{d}_m^f}(f^{im}(x),\varepsilon) \\ &= B_{\mathrm{d}_{mn}^f}(x,\varepsilon). \end{aligned}$$
   Ici, on a utilisé que
$$B_{\mathrm{d}_n^f}(x) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k} B(f^k(x),\varepsilon).$$
   Il suit que $M^{f^m}(n,\delta(\varepsilon)) \geq M^f(mn,\varepsilon)$, et donc
$$M^f(mn,\varepsilon) \leq M^{f^m}(n,\delta(\varepsilon)) \leq M^f(mn,\delta(\varepsilon)),$$
   ce qui donne $h_{\text{top}}(f^m) = m h_{\text{top}}(f)$.

   Si f est inversible on a $B_{\mathrm{d}_n^f}(x,\varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^{f^{-1}}}(f^{n-1}(x),\varepsilon)$ pour tous n,x,ε, ce qui conclut.

4. On a que $\mathrm{id} : (X,\mathrm{d}) \to (X,\mathrm{d}')$ est un homéomorphisme puisque d et d' engendrent la même topologie. De plus $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f$ donc les systèmes dynamiques topologiques (X,d,f) et (X,d',f) sont conjugués. Cela conclut par un théorème du cours.

5. On a que $B_{\mathrm{d}_n^{f\times g}}((x,y),\varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^f}(x,\varepsilon) \times B_{\mathrm{d}_n^g}(y,\varepsilon)$. Ceci implique que $M^{f\times g}(n,\varepsilon) \leq M^f(n,\varepsilon) M^g(n,\varepsilon)$, et donc $h_{\text{top}}(f\times g) \leq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$.

   Soient $x_1,\dots,x_m \in X$ (resp. $y_1,\dots y_p \in Y$) tels que pour tous $1 \leq i \neq i' \leq m$ (resp. $1 \leq j \neq j' \leq p$) on ait $\mathrm{d}_n^f(x_i,x_j) \geq \varepsilon$ (resp. $\mathrm{d}_n^g(y_i,y_j) \geq \varepsilon$). Alors pour tous $(i,j) \neq (i',j')$ on a
$$\mathrm{d}_n^{f\times g}((x_i,y_j),(x_{i'},y_{j'})) \geq \varepsilon.$$
   Par conséquent $N^{f\times g}(n,\varepsilon) \geq N^f(n,\varepsilon) N^g(n,\varepsilon)$, et donc $h_{\text{top}}(f\times g) \geq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$.

Exercice 6. *Entropie des transformations Lipschitziennes*

1. Soit $n \geq 1$. Il existe $c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$c^{-1}\varepsilon^{-n} \leq M([0,1]^n, \varepsilon) \leq c\varepsilon^{-n}.$$
Par suite
$$\frac{-c + n\log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{\log M([0,1]^n, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{n\log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon},$$
ce qui conclut.

2. Soit $L > \max(1, L(f))$. Alors $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq L\mathrm{d}(x,y)$ pour tous $x, y \in X$. Cela implique que
$$f^m\left(B(x, \varepsilon/L^n)\right) \subset B(f^m(x), \varepsilon), \quad 0 \leq m \leq n,$$
et donc
$$B(x, \varepsilon/L^n) \subset \bigcap_{m=0}^{n-1} f^{-m}B(f^m(x), \varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^f}(x, \varepsilon), \quad \forall x, \varepsilon.$$
Ainsi on obtient
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log M^f(n,\varepsilon) &\leq \frac{1}{n}\log M(X, \varepsilon/L^n)\\ &= \frac{\log(L^n/\varepsilon)}{n}\frac{\log M(X, \varepsilon/L^n)}{\log(L^n/\varepsilon)}\\ &= \left(\log L - \frac{\log\varepsilon}{n}\right)\frac{\log M(X, \varepsilon/L^n)}{\log(L^n/\varepsilon)}.\end{aligned}$$
Puisque $\log L > 0$ on obtient
$$\limsup_n \frac{1}{n}M^f(n,\varepsilon) \leq \log(L)\mathrm{bdim}(X),$$
et donc $h_{\mathrm{top}}(f) \leq \log(L)\mathrm{bdim}(X)$.

3. Par le cours, l'application doublante $E_2 : [x] \mapsto [2x]$ sur $X = S^1$ satisfait cette égalité, puisque $\mathrm{bdim}(S^1) = 1$, et $h_{\mathrm{top}}(E_2) = \log 2$.

Exercice 7. *Entropie algébrique*

1. Soit $i \in \{1, \dots, s\}$. et $m, n \geq 0$. Alors $F^n(\gamma_i)$ peut s'écrire
$$F^n(\gamma_i) = \lambda_1 \cdots \lambda_{L(n,\Gamma)}, \quad \lambda_j \in \Gamma.$$
On a donc
$$F^{m+n}(\gamma_i) = F^m(\lambda_1)\cdots F^m(\lambda_{L(n,\Gamma)}).$$
Chaque $F^m(\lambda_j)$ peut s'écrire comme un produit d'éléments Γ de $L(m,\Gamma)$ termes. Ceci montre que
$$L_{n+m}(F,\Gamma) \leq L_n(F,\Gamma)L_m(F,\Gamma).$$
Ainsi la suite $(\log L_n(F,\Gamma))_n$ est sous-additive, ce qui conclut.

2. Soit $\Gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_r\}$ est un autre système de générateurs. Soient
$$k = \max_{1\leq j\leq r} L(\gamma'_j, \Gamma), \quad k' = \max_{1\leq i\leq s} L(\gamma_i, \Gamma').$$
Alors pour tout $g \in G$ on a
$$L(g,\Gamma) \leq k'L(g,\Gamma') \leq kk'L(g,\Gamma).$$
En particulier $L_n(F,\Gamma) \leq k'L_n(F,\Gamma') \leq kk'L_n(F,\Gamma)$, ce qui conclut.

3. Soit Γ un système de générateurs de G. Alors on a

$$L_n(I_{\gamma_0}F,\Gamma) - 2c \leq L_n(F,\Gamma) \leq L_n(I_{\gamma_0}F,\Gamma) + 2c$$

où $c = \max(L(\gamma_0,\Gamma), L(\gamma_0^{-1},\Gamma))$. Cela conclut.

4. Soit $x'_\star \in X$ un autre point base et α' un chemin joignant $x'_\star$ à $f(x'_\star)$. Soit $G' = \pi_1(M, x'_\star)$. Soit β un chemin joignant $x_\star$ à $x'_\star$ Alors l'application $\psi : G \to G'$ définie par $\psi(\gamma) = \beta^{-1}\gamma\beta$ est un isomorphisme de groupes. On a

$$\begin{aligned} F_{x_\star,\alpha}(\gamma) &= \alpha^{-1}(f\circ\gamma)\alpha \\ &= \alpha^{-1}(f\circ\beta)^{-1}(f\circ\beta)(f\circ\gamma)(f\circ\beta)^{-1}(f\circ\beta)\alpha \\ &= \alpha^{-1}(f\circ\beta)^{-1}\alpha'\alpha'^{-1}(f\circ(\beta\gamma\beta^{-1}))\alpha'\alpha'^{-1}(f\circ\beta)\alpha, \end{aligned}$$

ce qui montre que $F_{x_\star,\alpha} = \phi^{-1}F_{x'_\star,\alpha'}\psi$ où $\phi : G \to G'$ est un isomorphisme de la forme $\gamma \mapsto \beta'^{-1}\gamma\beta'$ où β' est un chemin joignant $x_\star$ à $x'_\star$. En procédant comme à la question précédente, on conclut.