

# Systèmes dynamiques

TD n°12

Yann Chaubet

8 décembre 2020

Dans la suite, si  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  est un espace mesuré, on fera l'identification

algèbres finies de  $\mathcal{F}$   $\longleftrightarrow$  partitions finies  $\mathcal{F}$  – mesurables de  $X$ ,

en identifiant une algèbre avec l'ensemble de ses atomes.

On not alors, si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont deux partitions finies,

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q, P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\},$$

et cette notation coïncide avec l'opération  $\vee$  sur les algèbres via l'identification donnée ci dessus.

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

Par concavité de  $\phi$  on a

$$\frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) = \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i)$$

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

Par concavité de  $\phi$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i) \\ &\leq \phi \left( \frac{1}{k} \sum_i p_i \right) \end{aligned}$$

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

Par concavité de  $\phi$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i) \\ &\leq \phi\left(\frac{1}{k} \sum_i p_i\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

Par concavité de  $\phi$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i) \\ &\leq \phi \left( \frac{1}{k} \sum_i p_i \right) \\ &= \phi \left( \frac{1}{k} \right) \\ &= -\frac{1}{k} \log \frac{1}{k}, \end{aligned}$$



# Exercice 1

1. On pose

$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors si  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , on a, avec  $p_i = \mu(P_i)$ ,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$

Par concavité de  $\phi$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i) \\ &\leq \phi \left( \frac{1}{k} \sum_i p_i \right) \\ &= \phi \left( \frac{1}{k} \right) \\ &= -\frac{1}{k} \log \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

et donc  $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log k = \log \text{Card}(\mathcal{P})$ .

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ .

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

et donc

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 \iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i, j$$

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

et donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 &\iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mu(P_i | Q_j) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

et donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 &\iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mu(P_i | Q_j) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, j \\ &\iff P_i \cap Q_j = \emptyset \text{ ou } Q_j \subset P_i \pmod{0} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

**2.** On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

et donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 &\iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mu(P_i | Q_j) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, j \\ &\iff P_i \cap Q_j = \emptyset \text{ ou } Q_j \subset P_i \quad \text{mod } 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mathcal{P} \leqslant \mathcal{Q} \quad \text{mod } 0. \end{aligned}$$

2. On note  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$  et  $q_j = \mu(Q_j)$ . Alors

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$

et donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 &\iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mu(P_i | Q_j) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, j \\ &\iff P_i \cap Q_j = \emptyset \text{ ou } Q_j \subset P_i \quad \text{mod } 0 \quad \forall i, j \\ &\iff \mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \quad \text{mod } 0. \end{aligned}$$

3. On rappelle le

### Lemme (Jensen)

Si  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est strictement concave on a

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i \phi(x_i), \quad x_i, a_i \in [0, 1], \quad \sum_i a_i = 1,$$

avec égalité si et seulement si  $x_i = x_j$  dès que  $a_i, a_j \neq 0$ .



On obtient

$$H_{\mu}(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j))$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi \left( \sum_j \mu(P_i \cap Q_j) \right) \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi \left( \sum_j \mu(P_i \cap Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi(\mu(P_i)) \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi \left( \sum_j \mu(P_i \cap Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi(\mu(P_i)) \\ &= H(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi \left( \sum_j \mu(P_i \cap Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi(\mu(P_i)) \\ &= H(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i|Q_{j'}), \quad j, j' = 1, \dots, \ell, \quad i = 1, \dots, k.$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leq \sum_i \phi \left( \sum_j q_j \mu(P_i|Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi \left( \sum_j \mu(P_i \cap Q_j) \right) \\ &= \sum_i \phi(\mu(P_i)) \\ &= H(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i|Q_{j'}), \quad j, j' = 1, \dots, \ell, \quad i = 1, \dots, k.$$

On note  $c_i = \mu(P_i|Q_j)$  pour n'importe quel  $j$ .



Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ .

Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ . On obtient donc

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$

Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ . On obtient donc

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$

de sorte que

$$\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j) \quad \forall i, j.$$

Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ . On obtient donc

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$

de sorte que

$$\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j) \quad \forall i, j.$$

4. On a, en notant  $\tilde{p}_i = \nu(P_i)$ ,

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) = t \sum_i \phi(p_i) + (1-t) \sum_i \phi(\tilde{p}_i)$$

Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ . On obtient donc

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$

de sorte que

$$\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j) \quad \forall i, j.$$

4. On a, en notant  $\tilde{p}_i = \nu(P_i)$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) &= t \sum_i \phi(p_i) + (1-t) \sum_i \phi(\tilde{p}_i) \\ &\leq \phi(tp_i + (1-t)\tilde{p}_i) \end{aligned}$$

Alors  $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$  de sorte que  $c_i = p_i$ . On obtient donc

$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$

de sorte que

$$\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j) \quad \forall i, j.$$

4. On a, en notant  $\tilde{p}_i = \nu(P_i)$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) &= t \sum_i \phi(p_i) + (1-t) \sum_i \phi(\tilde{p}_i) \\ &\leq \phi(tp_i + (1-t)\tilde{p}_i) \\ &= H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_{\mu}(\mathcal{P}) + (1 - t)H_{\nu}(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu + (1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) \leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$$



## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$  on obtient

$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$  on obtient

$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$

Cela conclut.

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$  on obtient

$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$

Cela conclut.

2. Soit  $\mathcal{P}$  une partition. On note  $\mathcal{P}_f^n = \bigvee_{j=0}^n f^{-j}(\mathcal{P})$ .

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$  on obtient

$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$

Cela conclut.

2. Soit  $\mathcal{P}$  une partition. On note  $\mathcal{P}_f^n = \bigvee_{j=0}^n f^{-j}(\mathcal{P})$ . Alors

$$\frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{P}_f^{nk}) = \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right)$$

## Exercice 2

1. On a montré que pour toute partition  $\mathcal{P}$  on a

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$

On a donc pour toutes partitions  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leq tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$  on obtient

$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$

Cela conclut.

2. Soit  $\mathcal{P}$  une partition. On note  $\mathcal{P}_f^n = \bigvee_{j=0}^n f^{-j}(\mathcal{P})$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{P}_f^{nk}) &= \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) \\ &= \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-kj}\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Mais puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_f^k$  on a

$$h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$



Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Mais puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_f^k$  on a

$$h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Il vient donc

$$h_\mu(f^k) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Mais puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_f^k$  on a

$$h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Il vient donc

$$h_\mu(f^k) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

D'autre part on a évidemment

$$\sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k) \leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}).$$

Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Mais puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_f^k$  on a

$$h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

Il vient donc

$$h_\mu(f^k) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k).$$

D'autre part on a évidemment

$$\sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k) \leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}).$$

Finalement

$$kh_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k, \mathcal{P}_f^k) = h_\mu(f^k).$$

**3.** On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

**3.** On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) = \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathfrak{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathfrak{C}A}(P))$$

3. On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) &= \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathfrak{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathfrak{C}A}(P)) \\ &= \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\mathfrak{C}A) H_{\mu_{\mathfrak{C}A}}(\mathcal{P}_f^n). \end{aligned}$$

3. On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) &= \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathbb{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathbb{C}A}(P)) \\ &= \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\mathbb{C}A) H_{\mu_{\mathbb{C}A}}(\mathcal{P}_f^n). \end{aligned}$$

Puisque  $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n = \mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}$  (car  $A$  est invariant), on obtient

$$h_\mu(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mu(A) h_{\mu_A}(f, \mathcal{P}) + \mu(\mathbb{C}A) h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f, \mathcal{P}).$$

3. On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) &= \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathbb{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathbb{C}A}(P)) \\ &= \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\mathbb{C}A) H_{\mu_{\mathbb{C}A}}(\mathcal{P}_f^n). \end{aligned}$$

Puisque  $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n = \mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}$  (car  $A$  est invariant), on obtient

$$h_\mu(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mu(A) h_{\mu_A}(f, \mathcal{P}) + \mu(\mathbb{C}A) h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f, \mathcal{P}).$$

Dès lors, puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  on a

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P})$$



3. On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) &= \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathbb{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathbb{C}A}(P)) \\ &= \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\mathbb{C}A) H_{\mu_{\mathbb{C}A}}(\mathcal{P}_f^n). \end{aligned}$$

Puisque  $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n = \mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}$  (car  $A$  est invariant), on obtient

$$h_\mu(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mu(A) h_{\mu_A}(f, \mathcal{P}) + \mu(\mathbb{C}A) h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f, \mathcal{P}).$$

Dès lors, puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  on a

$$\begin{aligned} h_\mu(f) &= \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}) \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

3. On pose  $\mathcal{Q} = \{A, X \setminus A\}$ . Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_f^n | \mathcal{Q}) &= \mu(A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_A(P)) + \mu(\mathbb{C}A) \sum_{P \in \mathcal{P}_f^n} \phi(\mu_{\mathbb{C}A}(P)) \\ &= \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\mathbb{C}A) H_{\mu_{\mathbb{C}A}}(\mathcal{P}_f^n). \end{aligned}$$

Puisque  $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n = \mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}$  (car  $A$  est invariant), on obtient

$$h_\mu(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mu(A) h_{\mu_A}(f, \mathcal{P}) + \mu(\mathbb{C}A) h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f, \mathcal{P}).$$

Dès lors, puisque  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  on a

$$\begin{aligned} h_\mu(f) &= \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}) \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &= \sup_{\mathcal{P}} (\mu(A) h_{\mu_A}(f, \mathcal{P}) + \mu(\mathbb{C}A) h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f, \mathcal{P})). \end{aligned}$$

Cela implique

$$h_{\mu}(f) \leq \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\mathbb{C}A)h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f).$$

Cela implique

$$h_{\mu}(f) \leq \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\mathbb{C}A)h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f).$$

Mais par la question **1.** on a

$$h_{\mu}(f) = h_{\mu(A)\mu_A + \mu(\mathbb{C}A)\mu_{\mathbb{C}A}}$$

Cela implique

$$h_{\mu}(f) \leq \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\mathbb{C}A)h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f).$$

Mais par la question **1.** on a

$$\begin{aligned} h_{\mu}(f) &= h_{\mu(A)\mu_A + \mu(\mathbb{C}A)\mu_{\mathbb{C}A}} \\ &\geq \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\mathbb{C}A)h_{\mu_{\mathbb{C}A}}(f). \end{aligned}$$

**4.** Puisque  $(\mathcal{P}_f^n)_f^k = \mathcal{P}_f^{n+k}$  on a

$$h_{\mu}(f, \mathcal{P}_f^n) = \lim_k \frac{1}{k} H_{\mu}((\mathcal{P}_f^n)_f^k) = \lim_k \frac{n+k}{k} \frac{1}{n+k} H_{\mu}(\mathcal{P}_f^{n+k}) = h_{\mu}(f, \mathcal{P}).$$

## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

Il suffit donc de montrer que  $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .



## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

Il suffit donc de montrer que  $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a  $\sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n) = \mathcal{F}$  donc par un théorème du cours, il existe  $\mathcal{C}$  une algèbre finie de  $\bigcup_n \mathcal{A}_n$  telle que

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

Il suffit donc de montrer que  $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a  $\sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n) = \mathcal{F}$  donc par un théorème du cours, il existe  $\mathcal{C}$  une algèbre finie de  $\bigcup_n \mathcal{A}_n$  telle que

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Il existe donc  $n_0$  tel que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_{n_0}$ , et donc pour tout  $n \geq n_0$  on a

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \leq H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_{n_0}) \leq H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

## Exercice 3

Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{P}$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

Il suffit donc de montrer que  $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a  $\sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n) = \mathcal{F}$  donc par un théorème du cours, il existe  $\mathcal{C}$  une algèbre finie de  $\bigcup_n \mathcal{A}_n$  telle que

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Il existe donc  $n_0$  tel que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_{n_0}$ , et donc pour tout  $n \geq n_0$  on a

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \leq H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_{n_0}) \leq H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Ainsi  $\lim_n H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) = 0$ , ce qui conclut.

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ .

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ . Ainsi,

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ . Ainsi,

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

Cette union est en fait dénombrable, puisque  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est dénombrable.

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ . Ainsi,

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

Cette union est en fait dénombrable, puisque  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est dénombrable.

Ainsi  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  engendre tous les ouverts, et donc la tribu engendrée par  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est la tribu des Boréliens.



## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ . Ainsi,

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

Cette union est en fait dénombrable, puisque  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est dénombrable.

Ainsi  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  engendre tous les ouverts, et donc la tribu engendrée par  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est la tribu des Boréliens.

2. On découpe le cercle en une union d'intervalles  $S^1 = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$  avec  $\text{diam}(I_j) < 1/n$ .

## Exercice 4

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) = \mathcal{B}.$$

Soit  $U$  un ouvert et  $x \in U$ . Alors il existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$ . Ainsi,

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

Cette union est en fait dénombrable, puisque  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est dénombrable.

Ainsi  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  engendre tous les ouverts, et donc la tribu engendrée par  $\bigcup_n \mathcal{P}_n$  est la tribu des Boréliens.

2. On découpe le cercle en une union d'intervalles  $S^1 = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$  avec  $\text{diam}(I_j) < 1/n$ .

On note alors  $\mathcal{P}_n = \{I_1, \dots, I_n\}$ , et  $x_1, \dots, x_n$  les extrémités des intervalles.

Alors  $f^{-k}(\mathcal{P}_n)$  est une partition composée d'intervalles d'extrémités  $f^{-k}(x_j)$ , de sorte que

$$\text{Card} \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \leqslant n\ell.$$

Alors  $f^{-k}(\mathcal{P}_n)$  est une partition composée d'intervalles d'extrémités  $f^{-k}(x_j)$ , de sorte que

$$\text{Card} \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \leq n\ell.$$

On a donc par l'**Exercice 1.**,

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{\ell} \frac{1}{\ell} H_\mu \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right)$$

Alors  $f^{-k}(\mathcal{P}_n)$  est une partition composée d'intervalles d'extrémités  $f^{-k}(x_j)$ , de sorte que

$$\text{Card} \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \leq n\ell.$$

On a donc par l'**Exercice 1.**,

$$\begin{aligned} h_\mu(f, \mathcal{P}_n) &= \lim_{\ell} \frac{1}{\ell} H_\mu \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \\ &\leq \lim_{\ell} \frac{\log(n\ell)}{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Alors  $f^{-k}(\mathcal{P}_n)$  est une partition composée d'intervalles d'extrémités  $f^{-k}(x_j)$ , de sorte que

$$\text{Card} \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \leq n\ell.$$

On a donc par l'**Exercice 1.**,

$$\begin{aligned} h_\mu(f, \mathcal{P}_n) &= \lim_{\ell} \frac{1}{\ell} H_\mu \left( \bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n) \right) \\ &\leq \lim_{\ell} \frac{\log(n\ell)}{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Par la question **1.**, on a puisque  $\text{diam} \mathcal{P}_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x$ ,

$$h_\mu(f) = \lim h_\mu(f, \mathcal{P}_n) = 0.$$

Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$



Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$

Or pour tout  $n \geq 1$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

par l'**Exercice 2**. Ainsi (1) implique  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ .

Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$

Or pour tout  $n \geq 1$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

par l'**Exercice 2**. Ainsi (1) implique  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ .

Puisque  $\mathcal{P}_f^k \leq \mathcal{P}_f^\ell$  pour tous  $k \leq \ell$ , on a que  $(\text{diam } \mathcal{P}_f^n)_n$  décroît.

Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$

Or pour tout  $n \geq 1$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

par l'**Exercice 2**. Ainsi (1) implique  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ .

Puisque  $\mathcal{P}_f^k \leq \mathcal{P}_f^\ell$  pour tous  $k \leq \ell$ , on a que  $(\text{diam } \mathcal{P}_f^n)_n$  décroît.

Supposons que  $\lim_n \text{diam } \mathcal{P}_f^n = \varepsilon > 0$ . Alors pour tout  $n$  on a  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ .

Il suffit de montrer que  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où

$$\text{diam } \mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \text{diam } P. \quad (1)$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$

Or pour tout  $n \geq 1$  on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

par l'**Exercice 2**. Ainsi (1) implique  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ .

Puisque  $\mathcal{P}_f^k \leq \mathcal{P}_f^\ell$  pour tous  $k \leq \ell$ , on a que  $(\text{diam } \mathcal{P}_f^n)_n$  décroît.

Supposons que  $\lim_n \text{diam } \mathcal{P}_f^n = \varepsilon > 0$ . Alors pour tout  $n$  on a  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ .

Notons  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$ . Alors les éléments de  $\mathcal{P}_f^n$  sont de la forme

$$P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(P_{i_{n-1}}), \quad i_j \in \{1, \dots, r\}.$$

Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Ceci donne  $N_{0,n}, N_{1,n}, \dots, N_{n-1,n} \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Ceci donne  $N_{0,n}, N_{1,n}, \dots, N_{n-1,n} \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

En particulier on a

$$\text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Ceci donne  $N_{0,n}, N_{1,n}, \dots, N_{n-1,n} \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

En particulier on a

$$\text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Quitte à extraire, on peut supposer  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ . Alors  $\text{dist}(x, y) \geq \varepsilon/2$  et donc  $x \neq y$ .



Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Ceci donne  $N_{0,n}, N_{1,n}, \dots, N_{n-1,n} \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

En particulier on a

$$\text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Quitte à extraire, on peut supposer  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ . Alors  $\text{dist}(x, y) \geq \varepsilon/2$  et donc  $x \neq y$ .

D'autre part, on a pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) = \lim_n \text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}.$$

Puisque  $\text{diam } \mathcal{P}_f^n \geq \varepsilon$ , on peut trouver  $x_n, y_n \in X$  et  $P \in \mathcal{P}_f^n$  tels que  $\text{dist}(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$  et  $x_n, y_n \in P$ .

Ceci donne  $N_{0,n}, N_{1,n}, \dots, N_{n-1,n} \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

En particulier on a

$$\text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Quitte à extraire, on peut supposer  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ . Alors  $\text{dist}(x, y) \geq \varepsilon/2$  et donc  $x \neq y$ .

D'autre part, on a pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) = \lim_n \text{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \text{diam } \mathcal{P}.$$

Or  $x \neq y$  donc par expansivité on obtient  $\text{diam } \mathcal{P} \geq \delta$ , ce qui conclut.

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ .

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) = H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R})$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \end{aligned}$$



## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}). \end{aligned}$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + D(\mathcal{Q}, \mathcal{R}).$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + D(\mathcal{Q}, \mathcal{R}).$$

D'autre part par l'exercice 1. on a

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 = H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})$$

## Exercice 6

1. On a  $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$  pour tous  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\quad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &\geq H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\ &= H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + D(\mathcal{Q}, \mathcal{R}).$$

D'autre part par l'exercice 1. on a

$$\begin{aligned} D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0 &\iff H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 = H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) \\ &\iff \mathcal{P} = \mathcal{Q} \mod 0. \end{aligned}$$

Enfin  $D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = D(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$  et donc  $D$  est une distance.

Enfin  $D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = D(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$  et donc  $D$  est une distance.

**2.** On a par le cours

$$h_{\mu}(f, \mathcal{P}) \leq h_{\mu}(f, \mathcal{Q}) + H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}).$$

Enfin  $D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = D(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$  et donc  $D$  est une distance.

**2.** On a par le cours

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{Q}) + H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |h_\mu(f, \mathcal{P}) - h_\mu(f, \mathcal{Q})| &\leq \max(H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}), H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})) \\ &\leq D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}). \end{aligned}$$