

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 11

Exercice 1. *Décroissance surexponentielle des corrélations pour les applications dilatantes du cercle*

1. Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$, et écrivons

$$\varphi = \sum_k c_k e_k, \quad \psi = \sum_k d_k e_k,$$

où $e_k(\theta) = \exp(2i\pi k\theta)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Alors

$$\psi(m^n \theta) = \sum_k d_k \exp(2i\pi k m^n \theta), \quad \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \varphi(\psi \circ E_m^n) d\mu &= \sum_k c_{-km^n} d_k \\ &= c_0 d_0 + \sum_{k \neq 0} c_{km^n} d_k, \end{aligned}$$

et on a

$$\left| \sum_{k \neq 0} c_{km^n} d_k \right| \leq \left(\sum_{|j| \geq m^n} |c_j|^2 \right) \left(\sum_{j \neq 0} |d_j|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta &= \left[\psi(\theta) \frac{e^{-2i\pi k\theta}}{-2i\pi k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{-2i\pi k} \int_0^{2\pi} \psi'(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi k} \int_0^{2\pi} \psi'(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne pour tout $N \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta = \frac{1}{(2i\pi k)^N} \int_0^{2\pi} \psi^{(N)}(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta.$$

En particulier

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\theta \right| \leq \frac{\|\psi^{(N)}\|_\infty}{(2\pi)^{N-1}} \frac{1}{|k|^N}.$$

(b) On a, avec les notations de la question 1.,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq 0} |c_{-jm^n}|^2 &\leq C \sum_{j \neq 0} \frac{1}{(|j|m^n)^N} \\ &\leq \frac{C}{m^{nN}} \sum_{j \neq 0} \frac{1}{|j|^N} \\ &\leq \tilde{C} e^{-rn}, \end{aligned}$$

où $r = N \log m$.

Exercice 2. Presque tous les nombres réels sont normaux

Soit $m \geq 2$. On pose

$$\chi_{k,m} = \mathbf{1}_{[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Alors pour tout $x \in [0, 1)$ on a

$$a_j(x) = k \iff \chi_{k,m}(\{m^j x\}) = 1, \quad \{m^j x\} = m^j x - [m^j x].$$

L'application $E_m : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ est mélangeante, donc ergodique pour μ . Par le théorème ergodique, il existe $A_m \subset \mathbf{T}$ avec $\mu(A_m) = 1$ tel que pour tout $x \in A_m$ on a

$$\frac{1}{n} \# \{k, a_k(x) = j\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\chi_{j,m} \circ (E_m)^k](x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{T}} \chi_{j,m} d\mu = \frac{1}{m}$$

Ainsi si on pose $A = \bigcap_m A_m$, on a $\text{Leb}(A) = 1$ et tout $x \in A$ est normal.

Exercice 3. Équidistribution des rotations irrationnelles du cercle

1. Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $f \circ R_\alpha = f$ μ -presque partout. Notons $f(\theta) = \sum_k c_k e^{2i\pi k \cdot \theta}$. Alors l'invariance de f donne, pour μ -presque tout $\theta \in \mathbf{T}^d$,

$$\sum_k c_k e^{2i\pi k \cdot \theta} e^{2i\pi k \cdot \alpha} = \sum_k c_k e^{2i\pi k \cdot \theta}.$$

Ceci implique que

$$c_k e^{2i\pi k \cdot \alpha} = c_k, \quad k \in \mathbf{Z}^d.$$

Puisque $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est libre sur \mathbf{Q} , on obtient

$$c_k = 0, \quad k \neq 0,$$

c'est-à-dire que f est μ -presque partout égale à une constante. La transformation R_α n'est pas mélangeante : si $C = [-\varepsilon, \varepsilon]^d$, on a

$$R_\alpha^{-j}(C) = \prod_{\ell=1}^d [-\varepsilon - j\alpha_\ell, \varepsilon - j\alpha_\ell] \quad \text{mod } \mathbf{Z}^d.$$

Ainsi si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $R_\alpha^{-j}(C) \cap C = \emptyset$, ce qui conclut.

2. C'est le théorème de Birkhoff appliqué à $\mathbf{1}_C \in L^1(\mu)$.

3. On applique l'**Exercice 2** du TD 10 : R_α est une isométrie et $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U , donc $S_n \varphi$ converge uniformément vers une fonction continue ψ . Comme R_α est ergodique pour μ , alors ψ est constante égale à $\int_{\mathbf{T}^d} \varphi d\mu$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et C un produit d'intervalles. On se donne deux fonctions lisses $\chi_\varepsilon^\pm : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\chi_\varepsilon^- \leq \mathbf{1}_C \leq \chi_\varepsilon^+ \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{T}^d} |\chi_\varepsilon^\pm - \mathbf{1}_C| d\mu < \varepsilon.$$

Alors pour tout $x \in \mathbf{T}^d$ on a

$$S_n \chi_\varepsilon^-(x) \leq S_n \mathbf{1}_C(x) \leq S_n \chi_\varepsilon^+(x),$$

et donc

$$\int \chi_\varepsilon^- d\mu \leq \liminf_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leq \limsup_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leq \int \chi_\varepsilon^+ d\mu.$$

On obtient donc

$$\mu(C) - \varepsilon \leq \liminf_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leq \limsup_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $S_n \varphi(x) \rightarrow \mu(C)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

5. Le premier chiffre de 2^n est $j \neq 0$ si et seulement si, pour un certain $k \in \mathbf{N}$, on a

$$10^k j \leq 2^n < 10^k(j+1),$$

ce qui équivaut à

$$\log_{10}(j) + k \leq n \log_{10}(2) < \log_{10}(j+1) + k.$$

Ainsi, en notant $\alpha = \log_{10}(2) \notin \mathbf{Q}$, on a que le premier chiffre de 2^n est j si et seulement si

$$R_\alpha^n(0) \in [\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[\quad \text{mod } \mathbf{Z}.$$

La fréquence d'apparition asymptotique de 7 est donc donnée par

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum \mathbf{1}_{[\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[} (R_\alpha^n(0)) = \log_{10}(8/7) \approx 5,8\%.$$

Exercice 4. Mélange pour une famille dense de L^2

On pose

$$E = \left\{ \sum_{|k| \leq K} c_k e_k, \quad c_k \in \mathbf{C}, \quad K \in \mathbf{N} \right\}.$$

Alors E est dense dans $L^2(\mu)$; soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$ et $\varepsilon > 0$, et $\varphi', \psi' \in E$ tels que $\|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$ et $\|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$. Pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mu)$ on notera

$$C_n(\varphi_1, \varphi_2) = \int (\varphi_1 \circ f^n) \varphi_2 d\mu.$$

Alors

$$\begin{aligned} |C_n(\varphi, \psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| &\leq C_n(|\varphi|, |\psi - \psi'|) + C_n(|\varphi - \varphi'|, |\psi'|) \\ &\quad + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| + |\mu(\varphi')\mu(\psi' - \psi)| \\ &\quad + |\mu(\varphi' - \varphi)\mu(\psi)| \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mu)} \|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi'\|_{L^2(\mu)} \|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} \\ &\quad + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| \\ &\quad + \varepsilon \left(\|\varphi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi\|_{L^2(\mu)} \right) \\ &\leq C\varepsilon + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')|. \end{aligned}$$

On obtient donc, avec une constante C dépendant uniquement de φ, ψ , que pour tout $n \gg 1$,

$$|C_n(\varphi, \psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| \leq (C + 1)\varepsilon$$

Cela conclut.

Exercice 5. Automorphismes ergodiques du tore

(ii) \implies (i) Vu en cours.

(i) \implies (iii) On suppose $1 \in \text{sp}(A^r)$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}^d$ tel que

$$\left(A^\top\right)^r(k) = k.$$

On définit

$$\varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{r-1} e^{2i\pi k \cdot A^j \theta}, \quad \theta \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d.$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(A\theta) &= \sum_{j=0}^{r-1} e^{2i\pi k \cdot A^{j+1} \theta} \\ &= \varphi(\theta), \end{aligned}$$

où on a utilisé $k \cdot A^r \theta = \left(A^\top\right)^r k \cdot \theta = k \cdot \theta$.

(iii) \implies (ii) On suppose que $1 \notin \text{sp}(A^r)$ pour tout r . Soient $k, \ell \in \mathbf{Z}^d$; on a

$$\int (e_k \circ A^n) e_\ell d\mu = 0$$

si n est assez grand. En effet on a

$$(e_k \circ A^n)(\theta) = \exp(2i\pi k \cdot A^n \theta) = e_{(A^\top)^n k}(\theta),$$

et le fait que $1 \notin \text{sp}(A^r)$ pour tout r implique que l'application

$$\mathbf{Z} \ni n \longmapsto \left(A^\top\right)^n k$$

est injective. En particulier $\left(A^\top\right)^n k \neq \ell$ pour tout $|n|$ assez grand. On peut alors appliquer l'**Exercice 4** pour conclure, puisque $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbf{T}^d)$.

Exercice 6. Moyenne temporelle des temps de retour

1. On applique le théorème de Kac :

$$\int_A \tau d\mu = \mu(X) - \mu(A_0^*), \quad A_0^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathbb{C}A).$$

Or A_0^* est invariant par f : en effet, on a

$$f^{-1}(A_0^*) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-n}(\mathbb{C}A),$$

ce qui donne $A_0^* \subset f^{-1}(A_0^*)$. D'autre part on a

$$f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^* = \{x \in A, f^n(x) \notin A, n \geq 1\}.$$

Par le théorème de Récurrence de Poincaré, on a donc $\mu(f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^*) = 0$ et donc A_0^* est invariant.

Par ergodicité de f , on obtient $\mu(A_0^*) = 0$ ou 1 .

Mais $\mu(A_0^*) = 1$ implique en particulier que $\mu(\mathbb{C}A) = 1$ ce qui est impossible car $\mu(A) > 0$.

On a bien $\int_A \tau d\mu = \mu(X) = 1$.

2. Il s'agit de montrer que g est ergodique pour $\mu_A = \mu(A \cap \cdot) / \mu(A)$.

Soit $B \subset A$ un ensemble g -invariant de mesure non nulle. On note $\tau' : B \rightarrow \mathbf{N}_{\geq 1}$ le temps de retour associé à B , qui est défini μ -presque partout sur B , et g' l'application de premier retour.

Puisque B est g -invariant, on a $g(x) \in B$ pour presque tout $x \in B$, ce qui donne

$$g|_B = g' \quad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

En utilisant $\tau' \geq \tau$, on obtient que

$$\tau|_B = \tau' \quad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

Par la question 1., on a donc

$$1 = \int_B \tau' d\mu = \int_B \tau d\mu = \underbrace{\int_A \tau d\mu}_{=1} - \int_{A \setminus B} \tau d\mu,$$

ce qui donne

$$0 = \int_{A \setminus B} \tau d\mu \geq \mu(A \setminus B) \implies \mu(B) = \mu(A).$$

Ainsi g est ergodique pour μ_A , et donc, pour μ -presque tout x de A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(g^k(x)) = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Exercice 7. Un critère pour le mélange faible

1. Supposons que $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0$. Pour tout $J \subset \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ on note

$$\alpha_J(n) = \#(\{0, \dots, n-1\} \cap J).$$

Pour tout $j \geq 1$, l'ensemble

$$I_j = \left\{ n \geq 0, |a_n| \geq \frac{1}{j} \right\}$$

est de densité 0. En effet, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geq \frac{1}{j} \frac{\alpha_{I_j}(n)}{n}.$$

Soit $n_j > 0$ tel que pour tout $n \geq n_j$ on a

$$\frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leq \frac{1}{j}.$$

On peut supposer (n_j) strictement croissante.

On pose

$$E = \bigcup_{j \geq 1} (I_j \cap [n_j, n_{j+1}[).$$

C'est un ensemble de densité 0 car si $n \in [n_j, n_{j+1}[$ on a $E \cap [0, n[\subset I_j \cap [0, n[$ et donc

$$\frac{\alpha_E(n)}{n} \leq \frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leq \frac{1}{j}.$$

D'autre part, si $n \notin E$ avec $n \in [n_j, n_{j+1}[$, on a $|a_n| < \frac{1}{j}$, et donc

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \notin E}} |a_n| = 0. \quad (1)$$

Réciproquement on suppose que (1) est satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geq$ tel que

$$\alpha_E(n) \leq \varepsilon n, \quad n \geq n_0,$$

et

$$|a_n| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad n \notin E.$$

On obtient donc, si $K = \sup_n |a_n|$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k < n \\ k \notin E}} |a_k| + \sum_{\substack{k < n_0 \\ k \notin E}} |a_k| + \sum_{\substack{k > n_0 \\ k \notin E}} |a_k| \right) \\ &\leq \frac{K \alpha_E(n)}{n} + \frac{K n_0}{n} + \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc pour tout n assez grand,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < (2K + 1)\varepsilon,$$

ce qui conclut.

2. C'est direct par la question précédente.