École Normale Supérieure
2020/2021

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 10

Exercice 1. *Moyennes de Birkhoff pour les permutations*

On a pour tout $x \in X$ tel que $\sigma^d(x) = x$ avec $d > 0$ minimal, en notant $n = d\ell_n + r_n$ avec $r_n < d$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\sigma^k(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\ell_n}\left(\sum_{y\in\mathcal{O}(x)} f(y)\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=d\ell_n+1}^{n} f(\sigma^k(x)) \\ &= \frac{\ell_n}{n}\left(\sum_{y\in\mathcal{O}(x)} f(y)\right) + o(1/n) \\ &= \frac{1}{d}\left(\sum_{y\in\mathcal{O}(x)} f(y)\right) + o(1).\end{aligned}$$

Exercice 2. *Théorème ergodique et isométries*

On sait que l'on a $S_n\varphi \to \psi$, μ-presque partout pour une certaine fonction $\psi \in L^1(\mu)$. On note G l'ensemble des points de X telle que $\lim_n S_n\varphi(x)$ existe.
Si $x, x' \in X$ on a, puisque φ est uniformément continue,

$$|S_n\varphi(x) - S_n\varphi(x')| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(x'))| \leqslant C\varepsilon\left(\mathrm{d}(x, x')\right)$$

où $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Comme G est dense dans X (car $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U), on peut définir ψ partout par $\psi(x) = \lim_k \psi(x_k)$ où $x_k \in G$ et $x_k \to x$.
Ainsi $S_n\varphi \to \psi$ partout, avec ψ continue. Montrons que la convergence est uniforme.
Soit $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_N \in X$ tels que $\inf_{i=1,\ldots,N} \mathrm{d}(x, x_i) < \delta$ pour tout $x \in X$, où $\delta > 0$ est choisi de sorte que

$$\forall x, x' \in X, \quad \mathrm{d}(x, x') < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \varepsilon.$$

Soit n_0 assez grand tel que $|S_n\varphi(x_i) - \psi(x_i)| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$ et tout $i = 1, \ldots, N$.
Soit $x \in X$ et i tel que $\mathrm{d}(x, x_i) < \delta$. Alors

$$\begin{aligned}|S_n\varphi(x) - \psi(x)| &\leqslant |S_n\varphi(x) - S_n\varphi(x_i)| + |S_n\varphi(x_i) - \psi(x_i)| \\ &\qquad + |\psi(x_i) - \psi(x)| \\ &\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Exercice 3. *Théorème ergodique sur les espaces métriques compacts*

Soit (φ_j) une suite de $C^0(X)$ qui est dense dans $C^0(X)$. Pour tout j, il existe $G_j \subset X$ de mesure totale telle que la limite $\lim_n S_n\varphi_j(x)$ existe pour tout $x \in G_j$. On définit G l'ensemble de mesure totale par

$$G = \bigcap_j G_j.$$

Soit maintenant $\varphi \in C^0(X)$, et $x \in G$. Soit $\varepsilon > 0$. On prend j tel que $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour tous m, n,

$$\begin{aligned}|S_n\varphi(x) - S_m\varphi(x)| &\leqslant |S_n\ \varphi(x) - S_n\varphi_j(x)|\ + |S_n\varphi_j(x) - S_m\varphi_j(x)| \\ &\qquad + |S_m\varphi_j(x) - S_m\varphi(x)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |S_n\varphi_j(x) - S_m\varphi_j(x)|.\end{aligned}$$

Si m, n sont assez grands alors $|S_n\varphi_j(x) - S_m\varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon$ puisque $(S_n\varphi_j(x))_n$ converge car $x \in G \subset G_j$. Ainsi, $S_n\varphi(x)$ converge quand $n \to +\infty$ par le critère de Cauchy.

Exercice 4. *Unique ergodicité et densité des orbites*

Soit $x \in X$. On considère

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{f^k(x)}, \quad n \geqslant 1.$$

Alors par le TD 9, il existe une suite n_k et une mesure de probabilités f-invariante μ' telle que

$$\mu_{n_k}(\varphi) \to \mu'(\varphi), \quad \varphi \in C^0(X).$$

Alors $\mu' = \mu$ par unicique ergodicité de f, et μ' est de support total. Par conséquent, on a pour tout ouvert non vide $A \subset X$

$$\#\{n \in \mathbf{N},\ f^n(x) \in A\} = +\infty.$$

Exercice 5. *Le théorème de Von Neumann via le théorème de Birkhoff*

1. Pour tout n on a
$$\int_X |S_n\varphi|^2 \mathrm{d}\mu = \int_X |\varphi|^2 \mathrm{d}\mu.$$
Par conséquent on a $\int_X |\bar\varphi|^2\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |\varphi|^2\mathrm{d}\mu$ par le lemme de Fatou, et donc $\bar\varphi \in L^2(\mu)$.

2. Si $|\varphi| \in L^\infty(\mu)$ on a $\int_X |S_n\varphi - \bar\varphi|^2\mathrm{d}\mu \to 0$ par le théorème de convergence dominée.
Posons $\varphi_k = \varphi \cdot 1_{\{|\varphi| \leqslant k\}}$. Alors
$$\int_X |\varphi|^2\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X |\varphi - \varphi_k|^2 \mathrm{d}\mu \geqslant k^2\mu(\{|\varphi| > k),$$
de sorte que
$$\mu(\{|\varphi| > k\}) \leqslant \frac{\|\varphi\|^2_{L^2(\mu)}}{k^2}, \quad k > 0.$$
Il suit que $\varphi_k \to \varphi$ μ-presque partout et donc $\varphi_k \to \varphi$ dans $L^2(\mu)$ par convergence dominée.
Soit $\varepsilon > 0$ et k assez grand de sorte que $\|\varphi - \varphi_k\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$. On a
$$\|S_n\varphi - S_m\varphi\|_2 \leqslant \|S_n\varphi - S_n\varphi_k\|_2 + \|S_n\varphi_k - S_m\varphi_k\|_2 + \|S_m\varphi_k - S_m\varphi\|_2.$$

On a pour tout ℓ

$$\|S_\ell\varphi - S_\ell\varphi_k\|_2 \leqslant \frac{1}{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\|(\varphi-\varphi_k)\circ f^j\|_2 \leqslant \|\varphi-\varphi_k\| < \varepsilon.$$

D'autre part, comme φ_k est bornée on sait que $S_n\varphi_k$ converge dans $L^2(\mu)$; on obtient que si m, n sont assez grands,

$$\|S_n\varphi - S_m\varphi\|_2 < 3\varepsilon.$$

Ainsi $(S_n\varphi)$ converge dans $L^2(\mu)$, vers $\bar{\varphi}$.

Exercice 6. *Explosion des sommes de Birkhoff et positivité de la moyenne*

1. Soit $\bar{\varphi} \in L^1(\mu)$ la fonction limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f^k$ donnée par le théorème de Birkhoff. Alors on a
$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \int \bar{\varphi}\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$
2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=1$ on a $T_n\varphi(x) = \varphi(x) \geqslant \varepsilon\chi_{A_\varepsilon}(x)$.

   On suppose que $T_n\varphi(x) \geqslant \varepsilon\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{A_\varepsilon}(f^k(x))$. On a $\varphi(f^n(x)) \geqslant \varepsilon\chi_{A_\varepsilon}(f^n(x))$ par ce qui précède. Ainsi
$$\begin{aligned} T_{n+1}\varphi(x) &= T_n\varphi(x) + \varphi(f^n(x)) \\ &\geqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\chi_{A_\varepsilon}(f^k(x)). \end{aligned}$$
3. La question précédente donne
$$\bar{\varphi} \geqslant \varepsilon\bar{\chi}_{A_\varepsilon} \quad \mu\text{-presque partout sur } A_\varepsilon$$

   où $\bar{\varphi}$ et $\bar{\chi}_{A_\varepsilon}$ sont les fonctions associées à φ et χ_{A_ε} données par le théorème ergodique.

   Puisque $\bar{\varphi}\circ f = \bar{\varphi}$ $\mu-$presque partout, l'inégalité précédente est vraie $\mu-$pp sur B_ε.

   Par définition pour tout $x \in \complement B_\varepsilon$, on a $\chi_{A_\varepsilon}(f^k(x)) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Il suit que $\chi_{A_\varepsilon} = 0$ sur $\complement B_\varepsilon$.

   D'autre part on a $\bar{\varphi}$ par hypothèse puisque $T_n\varphi(x) \to +\infty$ pour $\mu-$presque tout x. Ainsi
$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon) &= \int_X \chi_{A_\varepsilon}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \bar{\chi}_{A_\varepsilon}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{B_\varepsilon} \bar{\chi}_{A_\varepsilon} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}\bar{\varphi}\ \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_X \bar{\varphi}\ \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

   On obtient $\mu(A_\varepsilon) = 0$ et donc $\mu(B_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_k f^{-k}(A_\varepsilon)\right) = 0$ puisque f préserve μ.

4. On a le

Lemme 1. *Soit* (a_n) *une suite réelle telle que* $\sum_{n=0}^N a_n \to +\infty$ *quand* $N \to +\infty$*. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $N_0 > 0$ *tels que*

$$\sum_{n=N_0}^{N} a_n \geqslant \varepsilon, \quad N \geqslant N_0.$$

Admettant le lemme, on obtient que pour tout $x \in X$ tel que $T_N\varphi(x) \to +\infty$ quand $N \to +\infty$, il existe $\varepsilon(x), N_0(x) > 0$ tels que

$$\sum_{n=N_0(x)}^{N} \varphi(f^n(x)) \geqslant \varepsilon, \quad N \geqslant N_0(x).$$

Autrement dit, on a $x \in f^{-N_0(x)}(A_\varepsilon(x)) \subset B_{\varepsilon(x)}$.

Ceci implique que l'ensemble $\bigcup\limits_{k>0} B_{1/k}$ est de mesure totale, puisque presque tout x vérifie $T_N\varphi(x) \to +\infty$.

Ainsi, par la question **2.**, il existe k tel que $B_{1/k}$ est de mesure strictement positive, et donc $\int_\varphi \mathrm{d}\mu > 0$.

Il reste à montrer le lemme ; soit (a_n) une suite réelle telle que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \to +\infty, \quad N \to +\infty.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \geqslant 0$, il existe $N' \geqslant N$ tel que

$$\sum_{n=N}^{N'} a_n < \varepsilon.$$

Posons $N_0 = 0$ et $\varepsilon_0 = 1$. Alors il existe $N' \geqslant 0$ tel que,

$$\sum_{n=N_0}^{N'} a_n < 1.$$

On pose $N_1 = N' + 1$. Alors il existe $N' \geqslant N_1$ tel que

$$\sum_{n=N_1+1}^{N'} a_n < \frac{1}{4}.$$

En itérant ce processus, on construit une suite $N_0 < N_1 < \cdots$ telle que

$$\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n < \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k \geqslant 0.$$

On obtient que

$$\limsup_k \sum_{n=0}^{N_k-1} a_n < +\infty,$$

ce qui est absurde.