

# SYSTÈMES DYNAMIQUES

## Corrigé DM n°1

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

### Notations et préliminaires

1. Soit  $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T})$ . Soit  $x \in \pi^{-1}(f(\frac{\hat{1}}{2}))$ . Les restrictions

$$\pi|_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} : ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \rightarrow \mathbf{T} - \left\{\frac{\hat{1}}{2}\right\}, \quad \pi|_{]x, x+1[} : ]x, x+1[ \rightarrow \mathbf{T} - \left\{f\left(\frac{\hat{1}}{2}\right)\right\}$$

sont des homéomorphismes. Donc  $F := \pi|_{]x, x+1[}^{-1} \circ f \circ \pi|_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$  définit un homéomorphisme de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  dans  $]x, x+1[$  (en particulier, il est monotone). On peut étendre  $F$  à un homéomorphisme de  $] -1, \frac{1}{2}[$  dans un intervalle ouvert contenant  $]x, x+1[$  en étendant  $F|_{]-\frac{1}{2}, 0[}$  à  $] -1, 0[$  (qui est homéomorphe à  $\mathbf{T} - \{\hat{0}\}$ ) de manière similaire (cette extension est monotone et continue, donc elle est nécessairement un homéomorphisme). De même,  $F$  s'étend à un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

Soient maintenant  $F$  et  $G$  deux relevés de  $f$ , alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \pi(F(x)) = f(\pi(x)) = \pi(G(x)),$$

d'où  $F(x) - G(x) \in \mathbf{Z}$ . Comme  $\mathbf{Z}$  est complètement discontinu, l'application continue  $x \mapsto F(x) - G(x)$  prend une seule valeur  $k \in \mathbf{Z}$ .

2. a. Comme

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)),$$

on voit que  $x \mapsto F(x+1)$  est encore un relevé de  $f$ . Par la partie précédent, il existe  $d \in \mathbf{Z}$  satisfaisant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x+1) = F(x) + d.$$

- b. On sait que  $F^{-1}$  relève  $f^{-1}$ . Il existe donc  $e \in \mathbf{Z}$  tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad F^{-1}(y+1) = F^{-1}(y) + e.$$

Mais alors  $1 = F^{-1}(F(1)) = F^{-1}(F(0) + d) = F^{-1}(F(0)) + de = de$ . Il suit que  $d = \pm 1$ .

### Le nombre de rotation de Poincaré

3. Pour  $0 \leq x \leq y < 1$ , on a

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x) - F(y) - x + y \geq F(x) - F(y) > F(0) - F(1) = -1.$$

De plus,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x) - F(y) - x + y \leq y - x < 1 - 0 = 1.$$

Ainsi,

$$-1 < \varphi(x) - \varphi(y) < 1 \quad (1)$$

pour  $x, y \in [0, 1[$  (par symétrie). Par périodicité de  $\varphi$ , (1) est vraie pour  $x, y \in \mathbf{R}$ .

4. Comme  $F^n \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbf{T})$ , (1) s'applique en remplaçant  $F$  par  $F^n$ . De plus, la fonction  $F^n - \text{id}_{\mathbf{R}}$  est continue, périodique, donc  $m_n$  et  $M_n$  sont bien définis et vérifient a fortiori l'inégalité

$$0 \leq M_n - m_n < 1. \quad (2)$$

5. Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a

$$(F^n(F^{n'}(x)) - F^{n'}(x)) + (F^{n'}(x) - x) = F^{n+n'}(x) - F(x),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad m_n + m_{n'} \leq F^{n+n'}(x) - F(x) \leq M_n + M_{n'}.$$

Il suit que

$$m_n + m_{n'} \leq m_{n+n'} \leq M_{n+n'} \leq M_n + M_{n'}. \quad (3)$$

6. Un résultat basique dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{M_n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{m_n}{n}.$$

De (2), les deux valeurs ci-dessus sont égales.

7. On a  $\frac{m_n}{n} \leq \rho \leq \frac{M_n}{n}$ . La fonction  $x \mapsto \frac{F^n(x) - x}{n}$  a pour valeurs minimale et maximale respectivement  $\frac{m_n}{n}$  et  $\frac{M_n}{n}$ . Par continuité, il existe  $z_n \in \mathbf{R}$  avec

$$\frac{F^n(z_n) - z_n}{n} = \rho.$$

8. Invoquons (1) en remplaçant  $F$  par  $F^n$  et  $y$  par  $z_n$  et nous obtenons

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad -1 < F^n(x) - x - n\rho < 1. \quad (4)$$

En remplaçant  $x$  par  $F^{-n}(x)$ , on voit que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad -1 < x - F^{-n}(x) - n\rho < 1,$$

i.e. (4) reste vraie pour  $n \leq -1$ . Bien sûr, elle est vraie pour  $n = 0$ . En particulier, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho.$$

## Quelques propriétés du nombre de rotation

9. Si  $\rho(F) = p/q$ , on prend  $x = z_q$  dans la partie 7.. Inversement, s'il existe  $x \in \mathbf{R}$  avec  $F^q(x) = x + p$ , alors on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad F^{nq}(x) = x + np.$$

Ainsi

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{nq} + \frac{p}{q} \right) = \frac{p}{q}.$$

10. On sait que  $\rho(F) \neq p/q$  ssi  $F^q(x) - x \neq p$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$  par la partie précédente. Par connexité, on sait que ou bien  $F^q(x) - x > p$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , ou bien  $F^q(x) - x < p$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . On considère le premier cas. Par récurrence, on a

$$\forall n \geq 1, \quad F^{nq}(0) > np,$$

d'où

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(0)}{nq} \geq \frac{p}{q}.$$

Mais comme  $\rho(F) \neq p/q$ , on a  $\rho(F) > p/q$ . Le cas  $F^q(x) - x < p$  peut être traité de manière similaire.

11. On a

$$\rho(T_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_\alpha^n(0)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\alpha}{n} = \alpha.$$

12. Soit  $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction  $x \mapsto F(x) + p$ . Alors

$$\rho(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(0)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0) + np}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} + p = \rho(F) + p.$$

Il suit que  $\widehat{\rho(F)} = \widehat{\rho(G)}$ . On en déduit que pour tout  $f \in \text{Homeo}_+(\mathbf{T})$ , la classe  $\widehat{\rho(F)}$  ne dépend pas du relevé  $F$  choisi.

13. On a

$$\rho(F^q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^n(0)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q \cdot \frac{F^{nq}(0)}{nq} = q\rho(F).$$

## Dynamique des homéomorphismes de nombre de rotation rationnel

14. Il suit de la partie 9. que  $F$  admet un point fixe ssi  $\rho(F) = 0$ .

15. Let  $x \in \mathbf{R}$  et  $y \in \omega_F(x)$ . Il existe alors une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'entiers telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k}(x) = y.$$

Par continuité,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k+1}(x) = F(y).$$

Considérons le cas où  $F(x) \geq x$ . Pour  $k \in \mathbf{N}$ , on a  $n_k + 1 \leq n_{k+1}$ , d'où

$$F^{n_k}(x) \leq F^{n_k+1}(x) \leq F^{n_{k+1}}(x).$$

En prenant limite quand  $n \rightarrow \infty$ , on obtient  $F(y) = y$ . Le cas où  $F(x) < x$  est traité de manière similaire. Ainsi  $\omega_F(x) \subseteq \text{Fix}(F)$ . Finalement,

$$\alpha_F(x) = \omega_{F^{-1}}(x) \subseteq \text{Fix}(F^{-1}) = \text{Fix}(F).$$

16. En ajoutant un multiple de  $q$  à  $p$  si nécessaire, on peut supposer que  $\rho(F) = p/q$ .

**Fait.** Si  $\hat{x} \in \mathbf{T}$  est un point  $r$ -périodique de  $f$ , alors  $q|r$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \pi^{-1}(\hat{x})$ . On a  $F^r(x) = x + n$  pour un certain  $n \in \mathbf{Z}$ . De 9.,  $\frac{p}{q} = \rho(F) = \frac{n}{r}$ . Ainsi,  $q|qn = pr$ . L'affirmation suit du fait que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.  $\square$

La fonction  $G : x \mapsto F^q(x) - p$  est un relevé de  $f^q$  et

$$\rho(G) = q\rho(F) - p = 0.$$

De **14.**,  $G$  admet un point fixe  $x$ , i.e.  $\hat{x}$  est un point  $q$ -périodique de  $f$ . Le fait ci-dessus implique  $\hat{x}$  est de période exactement  $q$ , i.e.,  $\gamma_f(x)$  est une orbite de période  $q$ . Supposons maintenant que  $\hat{y} \in \mathbf{T}$  est un point périodique. Soit  $rp$  sa période, alors

$$G^r(y) - y = F^{rq}(y) - rp - y \in \mathbf{Z}.$$

où  $y \in \pi^{-1}(\hat{y})$ . Comme  $\rho(G^r) = r\rho(G) = 0$ , il est nécessaire que

$$G^r(y) = y.$$

Donc,  $y \in \gamma_G(y) = \omega_G(y) \subseteq \text{Fix}(G)$  par la partie 15, d'où  $G(y) = y$  et puis  $f^q(\hat{y}) = \hat{y}$ . Le fait ci-dessus assure que  $\hat{y}$  est de période  $q$ .

- 17.** Soit  $x$  le point fixe de  $G$  comme dans la partie précédente. Alors  $G$  induit un homéomorphisme de  $]x, x+1[$  dans lui-même. Bien sûr,  $\omega_f(\hat{x}) = \{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$  est une orbite périodique. Pour  $\hat{y} \in \mathbf{T} - \{\hat{x}\}$ , soit  $y$  l'unique point de  $]x, x+1[ \cap \pi^{-1}(\hat{y})$ . La suite  $(G^n(y))_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone donc converge. Soit  $z \in \mathbf{R}$  sa limite, alors

$$z \in \omega_G(y) \subseteq \text{Fix}(G).$$

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nq}(\hat{y}) = \hat{z}$ . Affirmons que

$$\omega_f(\hat{y}) = \{\hat{z}, f(\hat{z}), \dots, f^{q-1}(\hat{z})\}.$$

En effet, soit  $\hat{u} \in \omega_f(\hat{y})$ . Il existe alors une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'entiers telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(\hat{y}) = \hat{u}.$$

Quitte à choisir une sous-suite, on peut supposer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad n_k = b_k q + r$$

pour un certain  $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$  et une suite strictement croissante  $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'entiers. On a alors

$$f^{-r}(\hat{u}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{b_k q}(\hat{y}) = \hat{z},$$

d'où  $\hat{u} = f^r(\hat{z})$ . On conclut que  $\omega_f(\hat{y}) \subseteq \{\hat{z}, f(\hat{z}), \dots, f^{q-1}(\hat{z})\}$ . L'inclusion inverse est claire : pour tout  $0 \leq i \leq q-1$ , on a

$$f^i(\hat{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nq+i}(\hat{y}).$$

## Le cas irrationnel

- 18.** On se donne  $(p, q), (p', q') \in \mathbf{Z}$ . Si  $\psi(p, q) = \psi(p', q')$ , on aura

$$qp - p = q'\rho - p'.$$

Il est nécessaire que  $q = q'$  (sinon,  $\rho = \frac{p-p'}{q-q'} \in \mathbf{Q}$ ), d'où  $p = p'$ . Ainsi,  $\psi$  est injective. On suppose maintenant que  $\psi'(p, q) = \psi'(p', q')$ , i.e.,  $F^q(x) - p = F^{q'}(x) - p'$ . Si, par exemple,  $q > q'$ , on aura

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) = F^{q'}(x) + p - p'.$$

Il suit que  $\rho = \frac{p-p'}{q-q'} \in \mathbf{Q}$ . De conclure,  $q = q'$  et donc  $p = p'$ . Autrement dit,  $\psi'$  est aussi injective. Le fait que  $Z = \psi(\mathbf{Z}^2)$  est dense est un résultat bien connu. *Je ne pense pas que  $Z'$  soit dense.*

- 19.** On considère  $(p, q) \neq (p', q')$  dans  $\mathbf{Z}^2$  tels que

$$\psi(p, q) > \psi(p', q').$$

a. Si  $q > q'$ , alors  $\rho > \frac{p-p'}{q-q'}$ . Il suit de la partie **10.** que

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) > F^{q'}(x) + p - p',$$

i.e.,  $\psi'(p, q) > \psi'(p', q')$ .

b. Si  $q = q'$ , alors  $p < p'$ , d'où

$$\psi'(p, q) = F^q(x) - p > F^{q'}(x) - p' = \psi'(p', q').$$

c. Si  $q < q'$ , alors  $\rho < \frac{p'-p}{q'-q}$ . De **10.**, on a

$$F^{q'-q}(F^q(x)) < F^q(x) + p' - p,$$

i.e.,  $\psi'(p, q) > \psi'(p', q')$ .

On conclut que

a.  $\psi(p, q) = \psi(p', q') \iff \psi'(p, q) = \psi'(p', q')$ .

b.  $\psi(p, q) > \psi(p', q') \iff \psi'(p, q) > \psi'(p', q')$ .

c.  $\psi(p, q) < \psi(p', q') \iff \psi'(p, q) < \psi'(p', q')$ .

Il suit directement que  $H := \psi \circ \psi' : Z' \rightarrow Z$  est croissante. Affirmons que pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$\sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\} = \inf\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) > y\}.$$

Bien sûr, le côté à gauche est majoré par celui à droite. Si l'inégalité est stricte, le fait que  $Z$  est dense nous permet de trouver  $(p_0, q_0) \in \mathbf{Z}^2$  avec

$$\sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\} < \psi(p_0, q_0) < \inf\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) > y\}.$$

a. Si  $y < \psi'(p_0, q_0)$ , soit  $(p_1, q_1) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $y < \psi'(p_1, q_1) < \psi'(p_0, q_0)$ . Mais alors  $\psi(p_1, q_1) < \psi(p_0, q_0)$  et à la fois

$$\psi(p_1, q_1) \geq \inf\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) > y\} > \psi(p_0, q_0).$$

b. De même, on ne peut pas avoir  $y > \psi'(p_0, q_0)$ .

c. Finalement, si  $y = \psi'(p_0, q_0)$ , trouvons  $(p_1, q_1) \in \mathbf{Z}^2$  de sorte que

$$\sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\} < \psi(p_1, q_1) < \psi(p_0, q_0).$$

On a  $\psi'(p_1, q_1) < \psi'(p_0, q_0) = y$ , qui implique que

$$\psi(p_1, q_1) \leq \sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\},$$

c'est contradictoire.

La fonction  $H$  s'étend alors à une fonction  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  en posant

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad H(y) := \sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\} = \inf\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) > y\}.$$

Montrons que  $H$  est surjective. Étant donné  $z \in \mathbf{R}$ , on peut trouver une suite  $((p_n, q_n))_{n \in \mathbf{N}}$  délément de  $\mathbf{Z}^2$  telle que  $\psi(p_n, q_n) \uparrow z$ . De plus, on peut trouver un certain  $(p', q') \in \mathbf{Z}^2$  vérifiant  $\psi(p', q') \geq z$ . La suite  $(\psi'(p_n, q_n))_{n \in \mathbf{N}}$  est alors croissante et a une borne supérieure  $\psi'(p', q')$ . Soit  $y \in \mathbf{R}$  sa limite. Montrons que  $H(y) = z$ .

Pour tout  $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $\psi'(p, q) < y$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  vérifiant  $\psi'(p, q) < \psi'(p_n, q_n) \leq y$ . On a donc  $\psi(p, q) < \psi(p_n, q_n) \leq z$ . Il suit que

$$H(y) = \sup\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) < y\} \leq z.$$

De même, pour tout  $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $\psi'(p, q) > y$ , on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \psi'(p, q) > y \geq \psi'(p_n, q_n),$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \psi(p, q) > \psi(p_n, q_n).$$

On obtient alors  $\psi(p, q) \geq z$ . Il suit que

$$H(y) = \inf\{\psi(p, q) \mid \psi'(p, q) > y\} \geq z.$$

Ainsi,  $H(y) = z$ . La surjectivité de  $H$  est démontrée. Bien sûr,  $H$  est croissante, donc est continue. Finalement, pour  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} H(y+1) &= \sup\{q\rho - p \mid F^q(x) - p < y+1\} \\ &= \sup\{q\rho - (p-1) \mid F^q(x) - p < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p \mid F^q(x) - p < y\} + 1 \\ &= H(y) + 1. \end{aligned}$$

- 20.** La composition  $\pi \circ H : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$  satisfait  $\pi(H(y+1)) = \pi(H(y) + 1) = \pi(H(y))$  pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , donc elle se factorise par  $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$ . Autrement dit, il existe une surjective continue  $h : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  telle que  $H$  soit un relevé de  $h$ . Montrons que

$$h \circ f = R_\rho \circ h.$$

En effet, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned} H(F(y)) &= \sup\{q\rho - p \mid F^q(x) - p < F(y)\} \\ &= \sup\{q\rho - p \mid F^q(x - p) < F(y)\} \\ &= \sup\{q\rho - p \mid F^{q-1}(x - p) < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p \mid F^{q-1}(x) - p < y\} \\ &= \sup\{(q+1)\rho - p \mid F^q(x) - p < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p \mid F^q(x) - p < y\} + \rho \\ &= H(y) + \rho. \end{aligned}$$

Il suit que

$$h(f(\hat{y})) = h(\hat{y}) + \hat{\rho} = R_\rho(h(\hat{y})).$$

-

## Le théorème de Denjoy

- 21.** On suppose que  $\hat{y}, \hat{z}$  sont deux points différents dans  $\mathbf{T}$  qui sont envoyés par  $h$  sur  $\hat{x}$ . Soit  $x \in \pi^{-1}(\hat{x})$ ,  $y \in \pi^{-1}(\hat{y})$  et  $z \in \pi^{-1}(\hat{z})$  tels que  $H(y) = x$  et que  $y < z < y+1$ . Alors  $H(z) - H(y) \in \mathbf{Z}$  et

$$x = H(y) \leq H(z) \leq H(y+1) = H(y) + 1 = x + 1.$$

Donc  $H(z) \in \{x, x+1\}$ . Considérons le cas où  $H(z) = x$ . Comme  $H$  est croissante, on a  $H(u) = x$  pour tout  $y \leq u \leq z$ . L'intervalle

$$I := \{\hat{u} \mid y < u < z\}$$

de  $\mathbf{T}$  est errant. En effet,  $h(I) = \{\hat{x}\}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\forall \hat{u} \in I, \quad h(f^n(\hat{u})) = h(\hat{u}) + n\hat{\rho} = \hat{x} + n\hat{\rho}.$$

Il suit que  $h(f^n(I)) = \{\hat{x} + n\hat{\rho}\}$ . Comme  $\rho$  est irrationnel, on sait que  $h(f^n(I)) \cap h(I) = \emptyset$ . Dans le cas où  $H(z) = x + 1$ , l'intervalle

$$\{\hat{u}|z < u < y + 1\}$$

est errant. On en déduit que si  $f$  n'a pas d'intervalle errant, alors  $h$  est injective, donc bijective. Comme  $\mathbf{T}$  est compact et séparé,  $h$  est un homéomorphisme, i.e.,  $f$  est conjugué à  $R_\rho$ .

- 22.** Comme  $f$  est un homéomorphisme, les intervalles  $f^n(I)$  et  $f^m(I)$  sont disjoints pour tous  $n, m \in \mathbf{Z}$  satisfaisant  $n \neq m$ . Par  $\sigma$ -additivité,

$$1 = \ell(\mathbf{T}) \geq \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ell(f^n(I)),$$

qui implique que  $\ell(f^n(I)) + \ell(f^{-n}(I)) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

- 23.** Soit  $d$  une distance sur  $\mathbf{T}$  qui induit sa topologie. On va montrer qu'il existe une infinité d'indices  $q_n \in \mathbf{N}$  tels qu'il existe un intervalle fermé  $J_n$  joignant  $\hat{0}$  et  $q_n\hat{\rho}$  vérifiant la propriété que  $k\hat{\rho}$  ne soit pas dans  $J_n$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  tel que  $0 < |k| < q_n$ . Pour ce faire, posons

$$\forall n \geq 1, \quad A_n := \{k\hat{\rho} \mid 0 < |k| < n\}.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , il existe  $k_n \in \mathbf{Z}$  avec  $0 < |k_n| < n$  tel que l'une des inégalités suivante

$$0 < \beta_n < \alpha_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} < \alpha_n < \beta_n < 0,$$

où  $\beta_n \in \pi^{-1}(k_n\hat{\rho})$  et  $\alpha_n \in \pi^{-1}(n\hat{\rho})$ . Dans les deux cas,  $d(\hat{0}, k_n\hat{\rho}) < d(\hat{0}, n\hat{\rho})$  et  $d(\hat{0}, -k_n\hat{\rho}) < d(\hat{0}, -n\hat{\rho})$ . Il suit que  $d(\hat{0}, A_n) = d(\hat{0}, A_{n+1})$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\hat{0}, A_n) = d(\hat{0}, A_N) > 0,$$

qui contredit le fait que  $\{k\hat{\rho} \mid k > 0\}$  est dense dans  $\mathbf{T}$ . On conclut.

Soit  $\hat{x} \in \mathbf{T}$ . Soit  $I_n$  une composante connexe de  $h^{-1}(h(\hat{x}) + J_n)$ , qui est un intervalle fermé joignant  $\hat{x}$  et  $f^{q_n}(\hat{x})$ . En effet,

$$h(\hat{x}) \quad \text{et} \quad h(f^{q_n}(\hat{x})) = h(\hat{x}) + q_n\hat{\rho}$$

sont les deux extrémités de  $J_n$ . Comme  $h$  est continue et croissante,  $\hat{x}$  et  $f^{q_n}(\hat{x})$  sont les deux extrémités de  $I_n$ . Affirmons que les intervalles  $f^k(I_n)$ ,  $k = 0, \dots, q_n - 1$  sont disjoints deux à deux. Supposons par l'absurde qu'il existe  $0 \leq k < k' < q_n$  et un point  $\hat{y} \in I_n$  tels que  $f^k(\hat{y}) \in f^{k'}(I_n)$ . Mais alors

$$h(\hat{y}) + k\hat{\rho} = h(f^k(\hat{y})) \in h(f^{k'}(I_n)) = k'\hat{\rho} + h(I_n) = h(\hat{x}) + k'\hat{\rho} + J_n.$$

De plus,  $h(\hat{y}) \in h(I_n) = h(\hat{x}) + J_n$ , donc

$$h(\hat{y}) - h(\hat{x}) \in J_n \cap ((k' - k)\hat{\rho} + J_n).$$

Il suit que l'un des extrémités de  $J_n$  (à savoir  $\hat{0}$  et  $q_n\hat{\rho}$ ) appartient à  $(k' - k)\hat{\rho} + J_n$ . Si  $\hat{0} \in (k' - k)\hat{\rho} + J_n$ ,  $(k - k')\hat{\rho} \in J_n$  (qui est contradictoire comme  $-q_n < k - k' < 0$ ). Si  $q_n\hat{\rho} \in (k' - k)\hat{\rho} + J_n$ ,  $(q_n + k - k')\hat{\rho} \in J_n$  (impossible car  $0 < q_n + k - k' < q_n$ ).

- 24.** On note par  $\text{Var}(g)$  la variation d'une fonction  $g : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ . On observe que pour  $0 < u < v$ ,

$$0 < \ln v - \ln u = \ln \left( 1 + \frac{v - u}{u} \right) \leq \frac{v - u}{u}. \quad (5)$$

$\mathbf{T}$  étant compact, soit  $\varepsilon := \min_{x \in [0,1]} f'(\hat{x}) > 0$ . Pour tout  $q \geq 1$  et toute séquence  $0 \leq x_{q+1} = x_1 < \dots < x_q < 1$ , en appliquant (5), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q |\ln f'(\hat{x}_{i+1}) - \ln f'(\hat{x}_i)| &= \sum_{i=1}^q \left| \ln \left( 1 + \frac{f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)}{f'(\hat{x}_i)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^q \frac{|f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)|}{\min\{f'(\hat{x}_{i+1}), f'(\hat{x}_i)\}} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^q |f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)| \\ &\leq \frac{\text{Var}(f')}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Var}(\ln f') \leq \frac{\text{Var}(f')}{\varepsilon} < +\infty$ . Pour tout  $\hat{x} \in \mathbf{T}$  et  $n \geq 1$ , soit  $I_n$  l'intervalle comme dans la partie précédente. Comme les intervalles  $f^k(I_n)$ ,  $k = 0, \dots, q_n - 1$  sont deux à deux disjoints,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\ln f') &\geq \sum_{k=0}^{q_n-1} |\ln f'(f^k(f^{q_n}(\hat{x}))) - \ln f'(f^k(\hat{x}))| \\ &\geq \left| \ln \prod_{k=0}^{q_n-1} (f' \circ f^k)(f^{q_n}(\hat{x})) - \ln \prod_{k=0}^{q_n-1} (f' \circ f^k)(\hat{x}) \right| \\ &= |\ln(f^{q_n})'(f^{q_n}(\hat{x})) - \ln(f^{q_n})'(\hat{x})|. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\hat{x}$  par  $f^{-q_n}(\hat{x})$  et utilisant le théorème de la dérivée de la fonction inverse,

$$|\ln(f^{q_n})'(\hat{x}) + \ln(f^{-q_n})'(\hat{x})| \leq \text{Var}(\ln f').$$

Il suit que

$$\frac{1}{C} \leq (f^{q_n})'(\hat{x})(f^{-q_n})'(\hat{x}) \leq C,$$

où  $C = e^{\text{Var}(\ln f')}$ .

**25.** Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \ell(f^{q_n}(I)) + \ell(f^{-q_n}(I)) &= \int_I (f^{q_n})'(\hat{x}) d\ell(\hat{x}) + \int_I (f^{-q_n})'(\hat{x}) d\ell(\hat{x}) \\ &\geq 2 \int_I \sqrt{(f^{q_n})'(\hat{x})(f^{-q_n})'(\hat{x})} d\ell(\hat{x}) \\ &= \frac{2\ell(I)}{\sqrt{C}} > 0, \end{aligned}$$

qui contredit le fait que  $\ell(f^{q_n}(I)) + \ell(f^{-q_n}(I)) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On en déduit que  $f$  n'a pas d'intervalle errant, donc il est conjugué à  $R_\rho$ .