École Normale Supérieure
2020/2021

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 12

Dans la suite, si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, on fera l'identification

$$\text{algèbres finies de } \mathcal{F} \quad \longleftrightarrow \quad \text{partitions finies } \mathcal{F}-\text{mesurables de } X,$$

en identifiant une algèbre avec l'ensemble de ses atomes. On notera alors, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions finies,

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q,\ P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q}\},$$

et cette notation coïncide avec l'opération $\vee$ sur les algèbres via l'identification donnée ci dessus.

Exercice 1. *Quelques propriétés de l'entropie d'une partition*

1. On pose
$$\phi(x) = -x \log(x), \quad x \in [0,1].$$
Alors si $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, on a, avec $p_i = \mu(P_i)$,
$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_i p_i \log p_i = \sum_i \phi(p_i).$$
Par concavité de ϕ on a
$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\ H_\mu(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k} \sum_i \phi(p_i) \\ &\leqslant \phi\left(\frac{1}{k}\sum_i p_i\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= -\frac{1}{k}\log\frac{1}{k}, \end{aligned}$$
et donc $H_\mu(\mathcal{P}) \leqslant \log k = \log \mathrm{Card}(\mathcal{P})$.

2. On note $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ et $q_j = \mu(Q_j)$. Alors
$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)),$$
et donc
$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 &\iff \phi(\mu(P_i|Q_j)) = 0 \quad \forall i,j \\ &\iff \mu(P_i\ |Q_j) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i,j \\ &\iff P_i \cap Q_j = \emptyset \text{ ou } Q_j \subset P_i \mod 0 \quad \forall i,j \\ &\iff \mathcal{P} \leqslant \mathcal{Q} \mod 0. \end{aligned}$$

3. On rappelle le

   Lemme 1 (Jensen)**.** *Si $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}_+$ est strictement concave on a*
$$\phi\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n a_i \phi(x_i), \quad x_i, a_i \in [0,1], \quad \sum_i a_i = 1,$$
   avec égalité si et seulement si $x_i = x_j$ dès que $a_i, a_j \neq 0$.

   On obtient
$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_j q_j \sum_i \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &= \sum_{ij} q_j \phi(\mu(P_i|Q_j)) \\ &\leqslant \sum_i \phi\left(\sum_j q_j \mu(P_i|Q_j)\right) \\ &= \sum_i \phi\left(\sum_j \mu(P_i \cap Q_j)\right) \\ &= \sum_i \phi(\mu(P_i)) \\ &= H(\mathcal{P}), \end{aligned}$$
   avec égalité si et seulement si
$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i|Q_{j'}), \quad j, j' = 1, \ldots, \ell, \quad i = 1, \ldots, k.$$
   On note $c_i = \mu(P_i|Q_j)$ pour n'importe quel j.
   Alors $\sum_j q_j c_i = \sum_j \mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i)$ de sorte que $c_i = p_i$. On obtient donc
$$\mu(P_i|Q_j) = \mu(P_i) \quad \forall i, j,$$
   de sorte que
$$\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j) \quad \forall i, j.$$

4. On a, en notant $\tilde{p}_i = \nu(P_i)$,
$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) &= t\sum_i \phi(p_i) + (1-t)\sum_i \phi(\tilde{p}_i) \\ &\leqslant \phi\left(tp_i + (1-t)\tilde{p}_i\right) \\ &= H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Exercice 2. *Quelques propriétés de l'entropie métrique*

1. On a montré que pour toute partition $\mathcal{P}$ on a
$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leqslant H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}).$$
   On a donc pour toutes partitions $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$,
$$\begin{aligned} tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{Q}) &\leqslant tH_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\ &\leqslant H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}). \end{aligned}$$
   Puisque $\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}_f^n = (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})_f^n$ on obtient
$$th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\mu(f, \mathcal{Q}) \leqslant h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leqslant h_{t\mu+(1-t)\nu}(f).$$
   Cela conclut.

2. Soit $\mathcal{P}$ une partition. On note $\mathcal{P}_f^n = \bigvee_{j=0}^n f^{-j}(\mathcal{P})$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{P}_f^{nk}) &= \frac{1}{n}\ H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right)\\ &= \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-kj}\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$kh_\mu(f,\mathcal{P}) = h_\mu(f^k,\mathcal{P}_f^k).$$

Mais puisque $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_f^k$ on a

$$h_\mu(f^k,\mathcal{P}) \leqslant h_\mu(f^k,\mathcal{P}_f^k).$$

Il vient donc

$$h_\mu(f^k) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k,\mathcal{P}) \leqslant \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k,\mathcal{P}_f^k).$$

D'autre part on a évidemment

$$\sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k,\mathcal{P}_f^k) \leqslant \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k,\mathcal{P}).$$

Finalement

$$kh_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f,\mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f^k,\mathcal{P}_f^k) = h_\mu(f^k).$$

3. On pose $\mathcal{Q} = \{A, X\setminus A\}$. Alors par le cours

$$H_\mu(\mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}_f^n|\mathcal{Q}).$$

On a par définition

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathcal{P}_f^n|\mathcal{Q}) &= \mu(A)\sum_{P\in\mathcal{P}_f^n}\phi(\mu_A(P)) + \mu(\complement A)\sum_{P\in\mathcal{P}_f^n}\phi(\mu_{\complement A}(P))\\ &= \mu(A)H_{\mu_A}(\mathcal{P}_f^n) + \mu(\complement A)H_{\mu_{\complement A}}(\mathcal{P}_f^n).\end{aligned}$$

Puisque $(\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})_f^n = \mathcal{P}_f^n \vee \mathcal{Q}$ (car A est invariant), on obtient

$$h_\mu(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}) = \mu(A)h_{\mu_A}(f,\mathcal{P}) + \mu(\complement A)h_{\mu_{\complement A}}(f,\mathcal{P}).$$

Dès lors, puisque $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ on a

$$\begin{aligned}h_\mu(f) &= \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f,\mathcal{P})\\ &\leqslant \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})\\ &= \sup_{\mathcal{P}}\Big(\mu(A)h_{\mu_A}(f,\mathcal{P}) + \mu(\complement A)h_{\mu_{\complement A}}(f,\mathcal{P})\Big).\end{aligned}$$

Cela implique

$$h_\mu(f) \leqslant \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\complement A)h_{\mu_{\complement A}}(f).$$

Mais par la question **1.** on a

$$\begin{aligned}h_\mu(f) &= h_{\mu(A)\mu_A+\mu(\complement A)\mu_{\complement A}}\\ &\geqslant \mu(A)h_{\mu_A}(f) + \mu(\complement A)h_{\mu_{\complement A}}(f).\end{aligned}$$

4. Puisque $(\mathcal{P}_f^n)_f^k = \mathcal{P}_f^{n+k}$ on a

$$h_\mu(f,\mathcal{P}_f^n) = \lim_k \frac{1}{k} H_\mu((\mathcal{P}_f^n)_f^k) = \lim_k \frac{n+k}{k} \frac{1}{n+k} H_\mu(\mathcal{P}_f^{n+k}) = h_\mu(f,\mathcal{P}).$$

Exercice 3. *Une autre version du théorème de Kolmogorov-Sinai*

Il s'agit de montrer que pour tout $\mathcal{P}$ on a

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) \leqslant \sup_n h_\mu(f,\mathcal{P}_n).$$

On a par le cours

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) \leqslant h_\mu(f,\mathcal{P}_n) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n).$$

Il suffit donc de montrer que $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right) = \mathcal{F}$ donc par un théorème du cours,il existe $\mathcal{C}$ une algèbre finie de $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ telle que

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Il existe donc n_0 tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_{n_0}$, et donc pour tout $n \geqslant n_0$ on a

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) \leqslant H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_{n_0}) \leqslant H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_n H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_n) = 0$, ce qui conclut.

Exercice 4. *Entropie métrique et mesures boréliennes*

1. Par l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{P}_n\right) = \mathcal{C}.$$

Soit U un ouvert et $x \in U$. Alors il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_{n(x)}(x) \subset U$. Ainsi,

$$U = \bigcup_{x\in U} \mathcal{P}_{n(x)}(x).$$

Cette union est en fait dénombrable, puisque $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ est dénombrable.

Ainsi $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ engendre tous les ouverts, et donc la tribu engendrée par $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ est la tribu des Boréliens.

2. On découpe le cercle en une union d'intervalles $S^1 = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$ avec $\operatorname{diam}(I_j) < 1/n$.

On note alors $\mathcal{P}_n = \{I_1, \ldots, I_n\}$, et $x_1, \ldots x_n$ les extrémités des intervalles.

Alors $f^{-k}(\mathcal{P}_n)$ est une partition composée d'intervalles d'extrémités $f^{-k}(x_j)$, de sorte que

$$\operatorname{Card}\left(\bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n)\right) \leqslant n\ell.$$

On a donc par l'**Exercice 1.**,

$$\begin{aligned} h_\mu(f,\mathcal{P}_n) &= \lim_\ell \frac{1}{\ell} H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{\ell-1} f^{-k}(\mathcal{P}_n)\right) \\ &\leqslant \lim_\ell \frac{\log(n\ell)}{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Par la question **1.**, on a puisque $\operatorname{diam}\mathcal{P}_n(x) \to 0$ pour tout x,

$$h_\mu(f) = \lim h_\mu(f,\mathcal{P}_n) = 0.$$

Exercice 5. *Entropie métrique pour les applications expansives*

Il suffit de montrer que $\operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, où

$$\operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n = \max_{P \in \mathcal{P}_f^n} \operatorname{diam} P. \tag{1}$$

En effet, cela impliquerait par l'exercice précédent que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n).$$

Or pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_f^n) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

par l'**Exercice 2**. Ainsi (1) implique $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$. Puisque $\mathcal{P}_f^k \leqslant \mathcal{P}_f^\ell$ pour tous $k \leqslant \ell$, on a que $(\operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n)_n$ décroît.

Raisonnons par contraposition et supposons que $\lim_n \operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n = \varepsilon > 0$, de sorte que pour tout n on a $\operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n \geqslant \varepsilon$. Notons $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Alors les éléments de $\mathcal{P}_f^n$ sont de la forme

$$P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(P_{i_{n-1}}), \quad i_j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Puisque $\operatorname{diam}\mathcal{P}_f^n \geqslant \varepsilon$, on peut trouver $x_n, y_n \in X$ et $P \in \mathcal{P}_f^n$ tels que $\operatorname{dist}(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon/2$ et $x_n, y_n \in P$. Ceci donne $N_{0,n}, N_{1,n}, \ldots, N_{n-1,n} \in \{1, \ldots, r\}$ tels que

$$f^j(x_n), f^j(y_n) \in P_{N_{j,n}}, \quad j = 0, \ldots, n-1, \quad n \geqslant 1.$$

En particulier on a

$$\operatorname{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leqslant \operatorname{diam}\mathcal{P}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Quitte a extraire, on peut supposer $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Alors $\operatorname{dist}(x, y) \geqslant \varepsilon/2$ et donc $x \neq y$. D'autre part, on a pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\operatorname{dist}(f^j(x), f^j(y)) = \lim_n \operatorname{dist}(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leqslant \operatorname{diam}\mathcal{P}.$$

Or $x \neq y$ donc par expansivité on obtient $\operatorname{diam}\mathcal{P} \geqslant \delta$, ce qui conclut.

Exercice 6. *Inégalité de Rokhlin*

1. On a $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ pour tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Donc

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) &= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\
&= H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\
&= H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\
&\qquad + H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\
&\geqslant H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\
&\geqslant H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) - H_\mu(\mathcal{R}) \\
&= H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}).
\end{aligned}$$

   Ainsi on a obtenu

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \leqslant D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + D(\mathcal{Q}, \mathcal{R}).$$

   D'autre part par l'exercice **1.** on a

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0 = H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{P} = \mathcal{Q} \mod 0.
\end{aligned}$$

   Enfin $D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = D(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ et donc D est une distance.

2. On a par le cours
$$h_\mu(f,\mathcal{P}) \leqslant h_\mu(f,\mathcal{Q}) + H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}).$$

Ainsi
$$\begin{aligned} |h_\mu(f,\mathcal{P}) - h_\mu(f,\mathcal{Q})| &\leqslant \max(H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}), H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})) \\ &\leqslant D(\mathcal{P},\mathcal{Q}). \end{aligned}$$