École Normale Supérieure
2019/2020

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 13

Exercice 1. *Théorème de Furstenberg-Kesten*

On pose $\varphi_n = \log \|A^n\|$. Il suffit de montrer que (φ_n) est sous-additive. On a, si $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur (i.e. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$),

$$\begin{aligned}\varphi_{n+m}(x) &= \log \|A^{n+m}(x)\| \\ &= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\ &= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \right\| \\ &\qquad + \log \left\| A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\ &= \varphi_m(x) + \varphi_n(f^m(x)).\end{aligned}$$

Le résultat pour la norme $\|\cdot\|$ est alors une conséquence du théorème ergodif sous-additif de Kingman. Si $\|\cdot\|'$ est une autre norme, on a pour un $C > 0$

$$\frac{\log(1/C)}{n} + \frac{1}{n} \log \|A^n\| \leqslant \frac{1}{n} \log \|A^n\|' \leqslant \frac{\log C}{n} + \frac{1}{n} \log \|A^n\|,$$

ce qui conclut.

Exercice 2. *Formule d'Herman*

1. La transformation R_α est ergodique, donc $\lambda_\pm$ est constante.

2. On a
$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\mathrm{e}^{2i\theta}}{2} & \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2i\theta}}{2} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta}-1}{2i} & \dfrac{1+\mathrm{e}^{2i\theta}}{2}. \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Rappel : $f : U \to \mathbf{R}$ est sous-harmonique si pour tout $z \in U$ et $r > 0$ tel que $B(z,r) \subset U$, on a
$$f(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$

   On note que si $\varphi : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, alors $z \mapsto \log|\varphi(z)|$ est harmonique. En effet,
$$\partial_z \partial_{\bar z} \log|\varphi(z)| = \partial_z \partial_{\bar z} \left(\log \varphi(z) + \log \bar\varphi(z)\right) = 0.$$

   Chaque coefficient de $C_n(z)$ dépend de manière holomorphe de z, et donc $z \mapsto |C_n(z)_{ij}|$ est harmonique pour tous ij.

   En particulier si $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$ on a que $z \mapsto \log\|C_n(z)\|$ est sous-harmonique.

4. On a
$$\lambda_+ = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int \log \|A^n(x)\| \; \mathrm{d}\mu(x).$$
Mais
$$\begin{aligned} C_n\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right) &= A_\sigma \mathrm{e}^{2i\pi((n-1)\alpha+x)} R_{2\pi((n-1)\alpha+x)} \cdots A_\sigma \mathrm{e}^{2i\pi x} R_{2\pi x} \\ &= \mathrm{e}^{2i\pi\tau(x)} A^n(x), \end{aligned}$$
où
$$\tau(x) = nx + \sum_{k=0}^{n-1} k\alpha = nx + \frac{n(n-1)}{2}\alpha.$$
Par la question **3.** on a
$$\lim_n \frac{1}{n}\int_0^1 \log \left\|C_n\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right)\right\| \; \mathrm{d}x \geqslant \lim_n \frac{1}{n} \; \log \|C_n(0)\|.$$
Or on a
$$\begin{aligned} C_n(0) &= \left(A_\sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\left(A_\sigma \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma & -i\sigma \\ i\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{pmatrix}}_{B}^n. \end{aligned}$$
On a $\mathrm{sp}(B) = \{0, \sigma+\sigma^{-1}\}$. Par suite
$$\frac{1}{n}\log\|C_n(0)\| = \frac{1}{n}\log\left\|\left(\frac{B}{2}\right)^n\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \log\rho(B/2) = \log\frac{\sigma+\sigma^{-1}}{2}.$$

Exercice 3. *Produits de matrices aléatoires*

On note $f = \sigma$ le décalage sur $\Sigma = \{1,\dots,m\}^{\mathbf{N}}$, et $\mu = (p_1,\dots,p_m)^{\otimes\mathbf{N}}$. On définit alors $A : \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbf{R})$ par
$$A(x) = A_{x_0}, \quad x = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma.$$
Alors, avec les notations de l'Exercice **1.**, on a
$$A^n(x) = A_{x_{n-1}} \cdots A_{x_0}, \quad x = (x_k) \in \Sigma.$$
Alors par l'Exercice **1.** on a
$$\frac{1}{n}\log\|A^n(x)\| \to \lambda \in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$$
avec λ une constante (car f est ergodique). De plus $\lambda > -\infty$. En effet on a $\nu > 1$ tel que
$$\nu^{-n}\|v\| \leqslant A^n(x) \leqslant \nu^n\|v\|, \quad v\in\mathbf{R}^d, \quad x\in\Sigma,$$
ce qui donne $\lambda \geqslant -\log\nu > -\infty$.

Exercice 4. *Théorème d'Osedelets en dimension 2*

1. Si $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ on a $\|A^{-1}\|^{-1} = \|A\|^{-1}$, et donc
$$-\lambda_+(x) = \lim \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|^{-1} = \lim\frac{1}{n}\log\|A^{-n}(x)\|^{-1} = \lambda_-(x).$$

2. On a
$$\begin{aligned}\|A^n(x)\|^{-1}\|v\| = \|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\| &\leqslant \|A^n(x)v\| \\ &\leqslant \|A^n(x)\|\|v\|.\end{aligned}$$
Donc
$$\frac{1}{n}\log\left(\|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\|\right) \geqslant \frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \leqslant \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|\ \|v\|.$$
Cela donne
$$\lambda_-(x) \leqslant \liminf_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \leqslant \limsup_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \leqslant \lambda_+(x).$$

3. Fait : pour tout $B \in \mathrm{SL}(2)$, il existe $u, v \in \mathbf{R}^2$ tels que $u \perp v$ et
$$\|u\| = \|v\| = 1, \quad \|Bv\| = \|B\|^{-1}, \quad \|Bu\| = \|B\|, \quad \langle Bu, Bv\rangle = 0.$$
En effet, on prend (u, v) qui diagonalise $B^\top B$ avec $B^\top Bu = \lambda u$ et $B^\top Bv = \lambda^{-1}$ avec $\lambda \geqslant \lambda^{-1}$. On a alors $\lambda = \|B\|$, ce qui conclut.

4. Le nombre α_n est défini par
$$s_n(x) = \sin(\alpha_n)u_{n+1}(x) + \cos(\alpha_n)s_{n+1}(x).$$
On a
$$\begin{aligned}\|A^{n+1}(x)s_n(x)\| &\geqslant \|\sin(\alpha_n)A^{n+1}(x)u_{n+1}(x)\| \\ &= |\sin(\alpha_n)|\|A^{n+1}(x)\|.\end{aligned}$$
D'autre part
$$\begin{aligned}\|A^{n+1}(x)s_n(x)\| &\leqslant \|A(f^n(x))\|\|A^n(x)s_n(x)\| \\ &= \|A(f^n(x))\|\|A^n(x)\|^{-1}\end{aligned}$$
Il suit que
$$|\sin(\alpha_n)| \leqslant \frac{\|A(f^n(x))\|}{\|A^{n+1}(x)\|\|A^n(x)\|}.$$
On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| &= \frac{1}{n}\log\|A(x)\| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{\|A(f^{k+1}(x))\|}{\|A(f^k(x))\|} \\ &= \frac{1}{n}\log\|A(x)\| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(f^k(x)),\end{aligned}$$
où $\psi(x) = \log\|A(f(x))\| - \log\|A(x)\|$. Alors $\psi \in L^1(\mu)$ et donc le théorème ergodique de Birkhoff implique que la limite
$$\lim_n \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\|$$
existe pour $\mu-$presque tout x.

D'autre part puisque $\log\|A\| \in L^1$ on a, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mu\left(\left\{x\ :\ \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| > \varepsilon\right\}\right) \to 0, \quad n \to +\infty.$$
En conséquence $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\| \to 0$ en probabilités quand $n \to +\infty$. Comme $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\|$ converge aussi μ–pp quand $n \to +\infty$, on a que $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\| \to 0$ μ–pp.

Par conséquent

$$\frac{1}{n}\log|\sin(\alpha_n)| \leqslant \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| - \frac{1}{n}\log\|A^{n+1}(x)\| - \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|,$$

et donc

$$\limsup_n \frac{1}{n}|\sin(\alpha_n)| \ \leqslant -2\lambda_+(x).$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\beta = 2\lambda_+(x) - \varepsilon > 0$. On a pour tout n assez grand

$$|\sin(\alpha_n)| \ \leqslant \exp\left(-\beta n\right).$$

Ceci implique pour tous $m \geqslant n \geqslant 0$

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{R}P^1}(s_n(x), s_m(x)) \leqslant C\sum_{k=n}^{m-1} \mathrm{e}^{-\beta k} \leqslant \frac{C\mathrm{e}^{-\beta n}}{1-\mathrm{e}^{-\beta}},$$

ce qui conclut. Ici on a utilisé $\mathrm{dist}_{\mathbf{R}P^1}(u,v) \leqslant C\sin(\mathrm{angle}(u,v))$.

6. Soit β_n l'angle entre $s(x)$ et $s_n(x)$. Alors $s(x) = \cos\beta_n s_n(x) + \sin\beta_n u_n(x)$ et donc

$$\|A^n(x)s(x)\| \ \leqslant |\cos\beta_n| \ \|A^n(x)s_n(x)\| + |\sin\beta_n|\|A^n(x)u_n(x)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)s(x)\| \\
&\qquad \leq \max\left\{\limsup_n \frac{1}{n}\left|\cos\beta_n\right|\left\|A^n(x)s_n(x)\right\|, \limsup_n \frac{1}{n}\left|\sin\beta_n\right|\left\|A^n(x)u_n(x)\right\|\right\} \\
&\qquad \leq \max\left\{\limsup_n \frac{1}{n}\log\left\|A^n(x)\right\|^{-1},\right. \\
&\qquad\qquad \left.\limsup_n \frac{1}{n}\log\left|\sin\beta_n\right| + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\|A^n(x)u_n(x)\right\|\right\} \\
&\qquad \leq \max\{-\lambda_+(x), -2\lambda_+(x) + \lambda_+(x)\} = -\lambda_+(x).
\end{aligned}$$

Ceci conclut.

7. Soit γ_n l'angle entre v et $s_n(x)$. Alors $v = \cos\gamma_n s_n(x) + \sin\gamma_n u_n(x)$ et donc

$$\|A^n(x)v\| \ \geqslant |\sin\gamma_n| \ \|A^n(x)u_n(x)\| - |\cos\gamma_n| \ \|A^n(x)s_n(x)\|$$

par la question **3.**. Puisque $|\sin\gamma_n| \ \geqslant c$ pour un $c > 0$ pour n grand (puisque $v \neq s(x)$ et $s_n(x) \to s(x)$) on a

$$\|A^n(x)v\| \ \geqslant c\|A^n(x)\| \ - \|A^n(x)\|^{-1}.$$

Ceci implique $\liminf_n \frac{1}{n} \ \log\|A^n(x)v\| \ \geqslant \lambda_+(x)$ (car $\limsup_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|^{-1} = -\lambda_+(x)$). Pour l'autre inégalité on remarque que

$$\limsup_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \ \leqslant \limsup_n \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\| = \lambda_+(x).$$

8. La question **6.** donne

$$\lim_n \frac{1}{n} \ \log\|A^n(f(x))A(x)s(x)\| = \lim_n \frac{1}{n+1} \ \|A^{n+1}(x)s(x)\| \ = -\lambda_+(x).$$

D'autre part la question **7.** donne

$$\lim_n \frac{1}{n}\|A^n(f(x))v\| \ = \lambda_+(x)$$

pour tout v qui n'est pas colinéaire à $s(f(x))$. On obtient que $A(x)s(x)$ est colinéaire à $s(f(x))$.

On suppose maintenant f inversible.

9. Si $\lambda_+(x) > 0$ on définit $E_s(x) = \mathbf{R}s(x)$ et $E_u(x) = \mathbf{R}u(x)$. Alors, par les questions qui précèdent, cette décomposition vérifie les propriétés demandées.