

Systemes dynamiques

TD n°7

Yann Chaubet

3 novembre 2020

Exercice 1

On suppose que pour des constantes $C > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$ on a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\|df_x v\| &\leq C\lambda^n \|v\|, & v \in E^s(x), \\ \|df_x^{-n} v\| &\leq C\lambda^n \|v\|, & v \in E^u(x).\end{aligned}$$

On pose pour tout $x \in M$ et tout $v \in E^s(x)$

$$\|v\|_{s,x} = \sum_{k=0}^N \|d(f^k)_x v\| \mu^k,$$

où $1 < \mu < \lambda^{-1}$ et $N \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}\|(df)_x v\|_{s,f(x)} &= \mu^{-1} \sum_{k=1}^{N+1} \|(df^k)_x v\| \mu^k \\ &= \mu^{-1} \|v\|_{s,x} + \mu^{-1} (\mu^N \|(df^{N+1})_x v\| - \|v\|)\end{aligned}$$

Or $\|(df)^{N+1}_x v\| \leq C\lambda^{N+1}\|v\|$, donc si N est assez grand de sorte que $\mu^N \lambda^{N+1} C \leq 1$, on obtient

$$\|(df)_x v\|_{s,f(x)} \leq \mu^{-1}\|v\|_{s,x}, \quad x \in M, \quad v \in E^s(x).$$

On définit de même une norme $\|\cdot\|_{u,x}$ sur $E^u(x)$ et on pose

$$\|v\|'_x = \|\pi_s(x)v\|_{s,x} + \|\pi_u(x)v\|_{u,x}, \quad x \in M, \quad v \in T_x M,$$

où $\pi_{s/u}(x)$ est la projection $T_x M \rightarrow E^{s/u}(x)$.

Puisque $\pi_s(x)$ et $\pi_u(x)$ dépendent continument de x (car $E^s(x)$ et $E^u(x)$ dépendent continument de x), la norme $\|\cdot\|'$ est continue.

On approche la norme $\|\cdot\|'$ par une norme lisse $\|\cdot\|''$ telle que $(1 - \varepsilon)\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq (1 + \varepsilon)\|\cdot\|''$.

On a alors, si $x \in M$ et $v \in E^s(x)$, et $\varepsilon > 0$ est assez petit,

$$\|(df)_x v\|'' \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \|(df)_x v\|' \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \mu^{-1} \|v\|' \leq \underbrace{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \mu^{-1}}_{\tilde{\lambda} < 1} \|v\|''.$$

Exercice 2

1. Soit x tel que $f^n(x) = x$; on pose $g = f^n$. Alors $A = (dg)_x : T_x M \rightarrow T_x M$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in \text{sp}((dg)_x)$ avec $|\lambda| = 1$.

Alors on sait qu'il existe $v \in T_x M$ et $C > 0$ tel que $C^{-1} \leq \|A^k v\| \leq C$ pour tout k , où $\|\cdot\|$ est la norme donnée dans la définition du difféomorphisme d'Anosov.

Alors on a (pour différentes constantes) aussi $C^{-1} \leq \|\pi_s(x)A^k v\| + \|\pi_u(x)A^k v\| \leq C$ pour tout k .

Or A préserve $E^s(x)$ et $E^u(x)$ donc $\pi_s(x)$ et $\pi_u(x)$ commutent avec A de sorte que si $v_s = \pi_s(x)v \in E^s(x)$ et $v_u = \pi_u(x)v \in E^u(x)$ on a $\pi_{s/u}(x)A^k v = A^k v_{s/u}$.

Puisque $v \neq 0$, on a (puisque A est hyperbolique)

$$\limsup_{|k| \rightarrow +\infty} (\|A^k v_s\| + \|A^k v_u\|) = +\infty,$$

ce qui est absurde.

2. (a) Il suffit de remplacer x_k et y_k par $f^{n(k)}(x_k)$ et $f^{n(k)}(y_k)$ où

$$d\left(f^{n(k)}(x_k), f^{n(k)}(y_k)\right) \geq \frac{1}{2} \sup_{n \in \mathbb{Z}} d(f^n(x_k), f^n(y_k)).$$

(b) et (c) Par compacité.

(d) Soient U_+ et U_- des cartes autour de z_+ et z_- . On suppose que j est assez grand de sorte que $f^{\pm n_j^\pm}(z)$ soit contenu dans U_\pm .

Alors pour tout k assez grand, $f^{\pm n_j^\pm}(x_k)$ et $f^{\pm n_j^\pm}(y_k)$ sont contenus dans U_\pm , et (ici $n_j = n_j^+$ ou n_j^-)

$$f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k) = \left(df^{\pm n_j^\pm}\right)_{x_k} (y_k - x_k) + o_j(\|x_k - y_k\|).$$

Ainsi,

$$\frac{f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k)}{\|x_k - y_k\|} = \left(df^{\pm n_j^\pm}\right)_{x_k} \left(\frac{y_k - x_k}{\|y_k - x_k\|}\right) + o_j(1). \quad (*)$$

On a $C > 0$ telle que pour tout k

$$\left\| \frac{f^{\pm n_j^{\pm}}(y_k) - f^{\pm n_j^{\pm}}(x_k)}{\|x_k - y_k\|} \right\| \leq \frac{Cd\left(f^{\pm n_j^{\pm}}(x_k), f^{\pm n_j^{\pm}}(y_k)\right)}{C^{-1}d(x_k, y_k)} \leq 2C,$$

par (a), puisque pour tous x', y' dans un support de carte, on a $C^{-1}d(x', y') \leq \|x' - y'\| \leq Cd(x', y')$ pour un certain C (exercice).

On obtient finalement, en faisant tendre k vers $+\infty$ dans (*),

$$\left\| \left(df^{\pm n_j^{\pm}} \right)_z v \right\| \leq 2C, \quad j \gg 1.$$

Ceci est impossible car pour tout $(x, v) \in TM$ avec $v \neq 0$ on a

$$\liminf_{|n| \rightarrow +\infty} \|(df^n)_x v\| = +\infty,$$

puisque f est d'Anosov.

3. C'est une application directe de l'**Exercice 2** du TD n°3, qui donne

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(1 + p_n(f)) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Ceci implique que si $\varepsilon > 0$, on a que pour tout $n > n_0$ assez grand

$$p_n(f) \leq \exp((n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f)).$$

Si $C = \sup_{n \leq n_0} p_n(f) \exp(-(n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f))$, on obtient

$$p_n(f) \leq C \exp((n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f)), \quad n \geq 1.$$

Exercice 3

On écrit

$$T_{(p,p)}\mathrm{Gr}(f) = \{((df)_p v, v), v \in T_p M\} \subset T_{(p,p)}(M \times M),$$

et

$$T_{(p,p)}\Delta(M) = \{(v, v), v \in T_p M\}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $T_{(p,p)}(M \times M)$ de dimension $\dim(M)$. En particulier on a

$$\begin{aligned}\Delta(M) \cap_{(p,p)} \mathrm{Gr}(f) &\iff T_{(p,p)}\mathrm{Gr}(f) \cap T_{(p,p)}\Delta(M) = \{0\} \\ &\iff \forall v \in T_p M, \quad (df_p - \mathrm{id})v = 0 \implies v = 0 \\ &\iff 1 \notin \mathrm{sp}(df_p).\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Soit $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On écrit

$$F(p + (k, \ell)) = F(p) + (r_p(k, \ell), s_p(k, \ell)), \quad (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2,$$

où $r_p, s_p : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$.

La fonction $p \mapsto F(p + (k, \ell)) - F(p)$ est continue, et à valeurs dans \mathbb{Z}^2 , donc $r_p(k, \ell)$ et $s_p(k, \ell)$ ne dépendent pas de p ; on les note $r(k, \ell)$ et $s(k, \ell)$.

On montre que r et s sont additifs. D'un côté on a

$$F(p + (k, \ell) + (k', \ell')) = F(p) + (r(k) + r(k'), s(\ell) + s(\ell')),$$

et de l'autre

$$F(p + (k, \ell) + (k', \ell')) = F(p + (k + k', \ell + \ell')) = F(p) + (r(k + k'), s(\ell + \ell')),$$

de sorte que

$$r(k + k') = r(k) + r(k'), \quad s(\ell + \ell') = s(\ell) + s(\ell'), \quad k, k', \ell, \ell' \in \mathbb{Z}.$$

On note alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a, c) = (r, s)(1, 0)$ et $(b, d) = (r, s)(0, 1)$.

Alors A convient.

2. Montrons d'abord que F est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . Soit $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui relève f^{-1} . Alors on vérifie que $(x, y) \mapsto (G \circ F)(x, y) - (x, y)$ est à valeurs dans \mathbb{Z}^2 , donc constante, disons égale à (k, ℓ) .

Si $\tilde{G} = G - (k, \ell)$ on a donc $\tilde{G} \circ F = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et donc F est un difféomorphisme d'inverse \tilde{G} .

Notons $F^{-1}(p + (k, \ell)) = F^{-1}(p) + B(k, \ell)$ où $B \in M_2(\mathbb{Z})$. Alors

$$p + (k, \ell) = p + AB(k, \ell), \quad (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ceci montre que A est inversible d'inverse B (par densité de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{R}^2 par exemple). Ainsi $|\det(A)| = 1$.

3. L'homotopie $F_t = tF + (1-t)A$ passe au quotient.

4. On pose $p_n = a_nv + b_nw$ où $Av = \lambda v$ et $Aw = \lambda^{-1}w$ où $|\lambda| > 1$.

Alors $|\lambda a_n - a_{n+1}| \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc

$$\begin{aligned} |a_n - \lambda^{-k} a_{n+k}| &\leq \left| a_n - \lambda^{-1} a_{n+1} + \dots + \lambda^{-(k-1)} a_{n+k-1} - \lambda^{-k} a_{n+k} \right| \\ &\leq r \left(1 + |\lambda|^{-1} + \dots + |\lambda|^{-(k-1)} \right) \\ &\leq \frac{r|\lambda|}{|\lambda| - 1}. \end{aligned}$$

On obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \lambda^{-n} a_n - \lambda^{-(n+k)} a_{n+k} \right| \leq \frac{|\lambda|^{-n+1} r}{|\lambda| - 1}, \quad (*)$$

et donc $\lambda^{-n} a_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour un $a \in \mathbb{R}$.

De même on a $\lambda^n b_n \rightarrow b$ quand $n \rightarrow -\infty$ pour un $b \in \mathbb{R}$.

On pose $q = av + bw$. Alors $A^n q = \lambda^n av + \lambda^{-n} bw$.

Par $(*)$ (en faisant $k \rightarrow +\infty$) on a

$$|\lambda^n a - a_n| \leq \frac{|\lambda|r}{|\lambda| - 1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et la même inégalité est vraie pour $|\lambda^{-n} b - b_n|$.

On conclut que $\|A^n q - p_n\| \leq C \frac{|\lambda|r}{|\lambda| - 1} = \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

L'unicité est claire puisque $\|A^n(q - q')\| \leq 2\delta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique $y = y'$.

5. Soit $p \in \mathbb{R}^2$. On note $G_p : x \mapsto g(-x) - p$.

Alors $\|G_p(x)\| \leq \|g\|_\infty + \|p\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

$$G(\overline{B}(0, \delta + \|p\|)) \subset \overline{B}(0, \delta + \|p\|).$$

Le théorème de Brouwer donne alors z tel que $G_p(z) = z$, ce qui équivaut à $g(-z) - z = p$, i.e. $(\text{Id} + g)(-z) = p$.

6. Soit $p \in \mathbb{R}^2$. On note $p_n = F^n(p)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\|Ap_n - p_{n+1}\| = \|AF^n(p) - F^{n+1}(p)\| \leq \|F - A\|_\infty.$$

Puisque $F(p' + (k, \ell)) = F(p') + A(k, \ell)$ pour tout p' et tous k, ℓ on a $r = \|F - A\|_\infty < \infty$.

Par la question **4.** il existe un unique $H(p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|A^n H(p) - F^n(p)\| \leq \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ceci s'écrit aussi $\|A^{n-1}(AH(p)) - F^{n-1}(F(p))\| \leq \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc $AH(p) = H(F(p))$ par unicité.

On vérifie aisément que $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ passe au quotient en une application $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, qui vérifie la propriété de semi-conjugaison demandée.

Montrons que H est continue. Soit (p_k) une suite qui tend vers p . Alors la suite $(H(p_k))$ est bornée car $\|H(p) - p\| \leq \delta(r)$. Soit q une valeur d'adhérence de cette suite.

Soit $n \in \mathbb{Z}$; on a $\|A^n H(p_k) - F^n(p_k)\| \leq \delta(r)$ et donc en faisant $k \rightarrow +\infty$ on obtient $\|A^n q - F^n(p)\| \leq \delta(r)$.

Ceci implique que $q = H(p)$ par unicité du pistage. Ainsi $H(p)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(H(p_k))$ et donc $H(p_k) \rightarrow H(p)$.

H est donc continue et $H - \text{Id}$ est bornée, on peut donc appliquer la question 5. pour obtenir que $H = \text{Id} + (H - \text{Id})$ est surjective.

7. Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 . On note $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ l'automorphisme associé. Soit $\varepsilon > 0$ et $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tel que $\|f - f_A\|_\infty < \varepsilon$. Alors il existe un relevé F de f tel que $\|A - F\|_\infty < \varepsilon$.

Par ce qui précède, il existe une semiconjugaison $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ telle que $h \circ f = f_A \circ h$, qui vérifie de plus que $\|h - \text{Id}\|_\infty < \delta(\varepsilon)$.

Montrons que h est injective : si $p, p' \in \mathbb{T}^2$ vérifient $h(p) = h(p')$ alors $h(f^n(p)) = h(f^n(p'))$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier

$$d(f^n(p), f^n(p')) < 2\delta(\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lemme

Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme d'Anosov. Alors il existe $\delta > 0$ tel que tout difféomorphisme assez proche de f en norme C^1 est expansif de constante d'expansivité δ .

En admettant le lemme, on obtient que $p = p'$ si $\delta(\varepsilon) < \delta$, ce qui sera vérifié si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Ainsi h est injective, et donc continue bijective. Par compacité de \mathbb{T}^2 , c'est un homéomorphisme.

Preuve du lemme.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite de fonctions (f_k) qui tend vers f dans $C^1(M, M)$, et des points $x_k \neq y_k$ tels que $d(f_k^n(x_k), f_k^n(y_k)) < 1/k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout k .

On peut alors adapter la démonstration faite à la question **2.** de l'**Exercice 2** pour obtenir une contradiction, en écrivant notamment

$$\begin{aligned} f_k^{\pm n_j^{\pm}}(y_k) - f_k^{\pm n_j^{\pm}}(x_k) &= \int_0^1 \left(df^{\pm n_j^{\pm}} \right)_{(1-t)x_k + ty_k} (y_k - x_k) dt \\ &\quad + \int_0^1 \left(df_k^{\pm n_j^{\pm}} - df^{\pm n_j^{\pm}} \right)_{(1-t)x_k + ty_k} (y_k - x_k) dt. \end{aligned}$$

Exercice 5

1. On considère une fonction f définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $df_0 = 0$, et $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ un difféomorphisme local au voisinage de 0 , tel que $\varphi(0) = 0$.

On calcule

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_\ell (f \circ \varphi) &= \sum_i \partial_k ([(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_\ell \varphi^i) \\ &= \sum_i [(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_k \partial_\ell \varphi^i + \sum_{j,i} [(\partial_i \partial_j f) \circ \varphi] (\partial_k \varphi^i) (\partial_\ell \varphi^j).\end{aligned}$$

Puisque $df_0 = 0$ on obtient

$$\text{Hess}_{f \circ \varphi}(0) = (d\varphi_0)^\top \text{Hess}_f(0) (d\varphi_0),$$

ce qui conclut.

2. On remarque qu'une fonction de Morse a un nombre fini de points critiques, car ils sont isolés.

De plus la condition "Hess $_f(0)$ est non dégénérée" est ouverte, ce qui conclut.

3. On suppose $\varphi_\tau(x) = x$ avec $\tau > 0$. Calculons

$$\begin{aligned}\partial_t f(\varphi_t(x)) &= df_{\varphi_t(x)}(X(\varphi_t(x))) \\ &= -df_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x))) \\ &= -g_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x)), \nabla^g f(\varphi_t(x))) \leq 0.\end{aligned}$$

Puisque $f(\varphi_\tau(x)) = f(x)$ avec $\tau > 0$ on obtient que pour tout $t \in [0, \tau]$, $\nabla^g f(\varphi_t(x)) = 0$.

4. C'est la même démonstration : f décroît strictement le long des lignes de flots de X qui ne sont pas réduites à un point. Ainsi si $\nabla_g f(x) \neq 0$, on a que $f(\varphi_t(x)) < f(x) - \varepsilon$ pour tout $t > \delta$ (pour certains $\delta, \varepsilon > 0$) et donc $\varphi_t(x)$ ne peut pas repasser près de x pour $t > \delta$.

5. Soit $x \in M$, et p une valeur d'adhérence de $(\varphi_t(x))_{t \geq 0}$. Alors de même que précédemment, on a $\nabla^g f(p) = 0$.

Comme $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ décroît, on a $f(\varphi_t(x)) \geq f(p)$ pour tout t .

Par hypothèse, des coordonnées (x^1, \dots, x^n) autour de p telles que

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^r (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^n (x^i)^2,$$

et

$$-\nabla^g f = 2(-x^1, \dots, -x^r, x^{r+1}, \dots, x^n).$$

Ainsi, le fait que $f(\varphi_t(x)) \geq p$ pour tout t implique que si $\varphi_t(x)$ est assez proche de p , on a nécessairement $\varphi_t(x) \in \{x^{r+1} = \dots = x^n = 0\}$, car sinon on aurait $f(\varphi_{t'}(x)) < f(p)$ pour un $t' > t$.

Ceci montre que $\varphi_t(x) \rightarrow p$ quand $t \rightarrow +\infty$. De même on montre que $\varphi_{-t}(x) \rightarrow q$ quand $t \rightarrow +\infty$ avec $q \in \text{Crit}(f)$.