

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé DM 3

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

Échauffement

1. (a) Si $f(q) \geq \frac{1}{2}$, le résultat est évident. On suppose donc que $f(q) < \frac{1}{2}$. Pour $x \in [0, 1]$, s'il existe $p \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(p)}{q} \quad (1)$$

alors $|qx - p| < f(q)$, d'où $p < qx + f(q) < q + \frac{1}{2}$, i.e. $p \leq q$. Ainsi

$$A_q = \bigcup_{p=1}^q A_{q,p}, \quad A_{q,p} := [0, 1] \cap \left(\frac{f(q)-p}{q}, \frac{f(q)+p}{q} \right).$$

Pour $p = 1, \dots, q$, $\ell(A_{q,p}) \leq \ell\left(\left(\frac{f(q)-p}{q}, \frac{f(q)+p}{q}\right)\right) = \frac{2f(q)}{q}$. Donc

$$\ell(A_q) \leq \sum_{p=1}^q \ell(A_{q,p}) \leq \sum_{p=1}^q \frac{2f(q)}{q} = 2f(q). \quad (2)$$

- (b) Pour $x \in [0, 1]$, (1) est vrai pour une infinité de couples (p, q) ssi pour tout $n \geq 1$, il existe (p, q) avec $q \geq 1$ vérifiant (1), i.e. $x \in A_q$. Il s'agit d'étudier la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{q \geq n} A_q$. Sous l'hypothèse du second point du **Théorème**, la série $\sum_{n \geq 1} \ell(A_q)$ converge. Par le lemme de Borel-Cantelli

$$\ell\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{q \geq n} A_q\right) = 0,$$

i.e. pour presque tout $x \in [0, 1]$, (1) n'est vraie pour qu'un nombre fini de couples (p, q) .

Développement en fractions continues

2. Pour $m = 1$, on a

$$[a_1(x); T^1(x)] = \frac{1}{a(x) + T(x)} = \frac{1}{[1/x] + \{1/x\}} = \frac{1}{1/x} = x.$$

Pour $m \geq 2$, on a

$$a_m(x) + T^m(x) = a(T^{m-1}(x)) + T^m(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{m-1}(x)} \right\rfloor + \left\{ \frac{1}{T^{m-1}(x)} \right\} = \frac{1}{T^{m-1}(x)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
[a_1(x), \dots, a_m(x); T^m(x)] &= \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{m-1}(x) + \frac{1}{a_m(x) + T^m(x)}}}} \\
&= \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{m-1}(x) + T^{m-1}(x)}}} \\
&= [a_1(x), \dots, a_{m-1}(x); T^{m-1}(x)],
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Le sens « si » est clair. On démontre le sens « seulement si ». Pour $x \in I$ rationnel, on écrit $x = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbf{N}_{\geq 1}^2$, $\gcd(a, b) = 1$ et $a < b$ (les cas où $x = 0$ ou $x = 1$ sont faciles). Écrivons $b = qa + c$ ($0 \leq c < a$), alors

$$T(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \left\{ \frac{qa + c}{a} \right\} = \frac{c}{a}.$$

On voit que $T(x) \in \mathbf{Q}$ et que le dénominateur de $T(x)$ (sous forme réduite) est strictement plus petit que celui de x . Ainsi, il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x)$ a dénominateur 1, i.e. $T^n(x) \in \{0, 1\}$. Donc $T^{n+1}(x) = 0$.

4. (a) Quand $n = 0$, c'est clair. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x) \\
&= p_{n-1}(x)(a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)) - (a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x))q_{n-1}(x) \\
&= - (p_{n-2}(x)q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)q_{n-2}(x)),
\end{aligned}$$

d'où le résultat suit (récurrence sur n).

- (b) Quand $n = 1$, on a

$$\frac{p_1(x) + tp_0(x)}{q_1(x) + tq_0(x)} = \frac{1}{a_1(x) + t} = [a_1(x); t].$$

Quand $n = 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{p_2(x) + tp_1(x)}{q_2(x) + tq_1(x)} &= \frac{a_2(x) + t}{a_1(x)a_2(x) + 1 + a_1(x)t} \\
&= \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + t}} \\
&= [a_1(x), a_2(x); t].
\end{aligned}$$

On considère $n \geq 3$. Si $a_n(x) = 1$ et $t = 0$, par récurrence

$$\begin{aligned}
[a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), 1; 0] &= \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-2}(x) + \frac{1}{a_{n-1}(x) + 1}}}} \\
&= \left[a_1(x), \dots, a_{n-2}(x); \frac{1}{a_{n-1}(x) + 1} \right] \\
&= \frac{p_{n-2}(x) + \frac{p_{n-3}(x)}{a_{n-1}(x) + 1}}{q_{n-2}(x) + \frac{q_{n-3}(x)}{a_{n-1}(x) + 1}} \\
&= \frac{a_{n-1}(x)p_{n-2}(x) + p_{n-3}(x) + p_{n-2}(x)}{a_{n-1}(x)q_{n-2}(x) + q_{n-3}(x) + q_{n-2}(x)} \\
&= \frac{p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)} \\
&= \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \quad (a_n(x) = 1).
\end{aligned}$$

Si $a_n(x) > 1$ ou $t > 0$, alors $\frac{1}{a_n(x) + t} < 1$. Par récurrence

$$\begin{aligned}
[a_1(x), \dots, a_n(x); t] &= \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1}(x) + \frac{1}{a_n(x) + t}}}} \\
&= \left[a_1(x), \dots, a_{n-1}(x); \frac{1}{a_n(x) + t} \right] \\
&= \frac{p_{n-1}(x) + \frac{p_{n-2}(x)}{a_n(x) + t}}{q_{n-1}(x) + \frac{q_{n-2}(x)}{a_n(x) + t}} \\
&= \frac{a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) + tp_{n-1}(x)}{a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) + tq_{n-1}(x)} \\
&= \frac{p_n(x) + tp_{n-1}(x)}{q_n(x) + tq_{n-1}(x)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) De **1.** et (4b), on a

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| &= \left| \frac{p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x)}{q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x)} - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \\
&= \frac{T^n(x) |p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x)|}{q_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\
&= \frac{1}{q_n(x) \left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x) \right)} \quad (4a).
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que

$$q_n(x) + q_{n+1}(x) \geq \frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x) \geq q_{n+1}(x).$$

En effet, comme $a_{n+1}(x) = \left\lfloor \frac{1}{T_n(x)} \right\rfloor$, on a

$$a_{n+1}(x) \leq \frac{1}{T_n(x)} < a_{n+1}(x) + 1.$$

Il suit que

$$a_{n+1}(x)q_n(x) + q_{n-1} \leq \frac{q_n(x)}{T_n(x)} + q_{n-1}(x) < a_{n+1}(x)q_n(x) + q_n(x) + q_{n-1}(x),$$

i.e.

$$q_{n+1}(x) \leq \frac{q_n(x)}{T_n(x)} + q_{n-1}(x) < q_{n+1}(x) + q_n(x),$$

ce que nous voulions.

5. Les suites $(p_n(x))_{n \geq 1}$ et $(q_n(x))_{n \geq 1}$ sont croissantes et positives. Pour $n \geq 3$, on a

$$p_n(x) = a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \geq p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \geq 2\sqrt{p_{n-1}(x)p_{n-2}(x)}.$$

Il suit que

$$p_n(x) \cdots p_3(x) \geq 2\sqrt{p_{n-1}(x)p_{n-2}(x)} \cdots \sqrt{p_2(x)p_1(x)},$$

i.e. $p_n(x)\sqrt{p_{n-1}(x)} \geq 2^{n-2}p_2(x)\sqrt{p_1(x)} \geq 2^{n-2}$. Donc $p_n(x)^2 \geq 2^{n-2}$ et on trouve que $p_n(x) \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$. De même, $q_n(x) \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$, donc

$$p_n(x)q_n(x) \geq 2^{n-2}. \quad (3)$$

On considère deux cas.

(a) n est pair. De **2.**, (4a) et (4b), on a

$$\begin{aligned} \frac{x}{p_n(x)/q_n(x)} &= \frac{q_n(x)(p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x))}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\ &= 1 + \frac{T^n(x)(p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x))}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\ &= 1 + \frac{T^n(x)}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\ &= 1 + \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} > 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{x}{p_n(x)/q_n(x)} \right| &= \log \left(1 + \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} \right) \\ &\leq \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} \\ &\leq \frac{1}{p_n(x)q_n(x)} \quad (T^n(x) \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{2^{n-2}} \quad (\text{d'après (3)}). \end{aligned}$$

(b) n est impair. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\frac{p_n(x)/q_n(x)}{x} &= \frac{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))}{q_n(x)(p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{T^n(x)(p_n(x)q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)q_n(x))}{q_n(x)(p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{T^n(x)}{q_n(x)(p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{1}{q_n(x) \left(\frac{p_n(x)}{T^n(x)} + p_{n-1}(x) \right)} > 1,
\end{aligned}$$

et l'argument est similaire.

La mesure de Gauss

6. On écrit $(0, 1] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$. Pour $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, on a $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, d'où

$$T(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - n.$$

Ainsi, pour toute fonction continue $f : I \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_I f d(T_*\mu) \\
&= \int_I f \circ T d\mu \\
&= \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(T(x)) dx}{1+x} \\
&= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{f\left(\frac{1}{x} - n\right) dx}{1+x} && \text{(convergence monotone)} \\
&= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^0 \frac{f(y)}{1 + \frac{1}{y+n}} \cdot \left(-\frac{dy}{(y+n)^2} \right) && (y = \frac{1}{x} - n) \\
&= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{f(y) dy}{(y+n)(y+n+1)} \\
&= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{y+n} - \frac{1}{y+n+1} \right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(y) dy}{y+1} && \text{(convergence monotone)} \\
&= \int_I f d\mu.
\end{aligned}$$

Donc $T_*\mu = \mu$.

7. (a) Soit $t \in [0, 1)$ et $x = \psi_{a_1, \dots, a_m}(t) = [a_1, \dots, a_m; t]$. On va montrer que $a_j(x) = a_j$ pour tout $j = 1, \dots, m$ par récurrence sur m (d'où on a $x \in I_{a_1, \dots, a_m}$). Quand $m = 1$, on a $x = \frac{1}{a_1+t}$, donc $\frac{1}{a_1+1} < x \leq \frac{1}{a_1}$, d'où $a_1 \leq \frac{1}{x} < a_1 + 1$. Mais alors $a_1(x) = a(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1$. On considère $m \geq 2$. De 2., on sait que

$$x = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x); T^m(x)] = \frac{1}{a_1(x) + [a_2(x), \dots, a_m(x); t]}.$$

Il suit que

$$a_1 + [a_2, \dots, a_m; t] = \frac{1}{x} = a_1(x) + [a_2(x), \dots, a_m(x); T^m(x)]. \quad (4)$$

Si $m = 2$ et $t = 0$, alors $x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_1; \frac{1}{a_2}]$. Il suit du cas où $m = 1$ que $a_1(x) = a_1$. Si $m \geq 3$ où $t > 0$, on aura

$$a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_m + t}}} > 1,$$

donc $0 \leq [a_2, \dots, a_m; t] < 1$. En particulier $x \notin \mathbf{Z}$. De (4), $[a_2(x), \dots, a_m(x); T^m(x)] \notin \mathbf{Z}$, donc $[a_2(x), \dots, a_m(x); T^m(x)] < 1$. Il suit que $a_1 = a_1(x)$. Dans tous cas, on a $a_1(x) = a_1$ et puis $[a_2, \dots, a_m; t] = [a_2(x), \dots, a_m(x); T^m(x)]$. Par l'hypothèse de récurrence, $a_j(x) = a_j$ pour tout $2 \leq j \leq m$.

Reciproquement, pour tout $x \in I_{a_1, \dots, a_m}$, on a $a_j(x) = a_j$ pour $1 \leq j \leq m$. De 2.

$$x = [a_1, \dots, a_m; T^m(x)] = \psi_{a_1, \dots, a_m}(T^m(x)).$$

- (b) Soit $x = \psi_{a_1, \dots, a_m}(t)$. Il suit du partie précédent que $x \in I_{a_1, \dots, a_m}$, i.e. $a_j(x) = a_j$ pour $j = 1, \dots, m$. Par récurrence, on a $p_j(x) = p_j$ et $q_j(x) = q_j$ pour tout $j = 1, \dots, m$. En outre, de (4b), on a

$$\psi_{a_1, \dots, a_m}(t) = [a_1(x), \dots, a_m(x); t] = \frac{p_m(x) + tp_{m-1}(x)}{q_m(x) + tq_{m-1}(x)} = \frac{p_m + tp_{m-1}}{q_m + tq_{m-1}}.$$

- (c) Il suit de (7b) que la fonction ψ_{a_1, \dots, a_m} est continue est monotone. En particulier $I_{a_1, \dots, a_m} = \psi_{a_1, \dots, a_m}([0, 1])$ est un intervalle dont les extrémités sont $\frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}$ et $\frac{p_m}{q_m}$. Ainsi

$$\ell(I_{a_1, \dots, a_m}) = \left| \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| = \frac{|p_{m-1}q_m - p_m q_{m-1}|}{q_m(q_m + q_{m-1})} = \frac{1}{q_m(q_m + q_{m-1})}$$

(en effet, pour n'importe quel $x \in I_{a_1, \dots, a_m}$, on a $p_{m-1}q_m - p_m q_{m-1} = p_{m-1}(x)q_m(x) - p_m(x)q_{m-1}(x) = (-1)^m$ par (4b)).

- (d) On a vu dans (7c) que les I_{a_1, \dots, a_m} sont des intervalles, donc un sens est trivial. Pour le sens reciproque, il faut montrer que les boréliens sont dans la tribu \mathcal{F} engendrée par les intervalles de cette forme (et I). On divise la preuve en plusieurs étapes.

(i) On a

$$\forall n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}, \quad I_n = \psi_n([0, 1]) = \left\{ \frac{1}{n+t} \mid t \in [0, 1] \right\} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right].$$

Ainsi les intervalles $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ sont \mathcal{F} -mesurables. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$

$$(0, \frac{1}{n}] = \bigcup_{k \geq n} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \in \mathcal{F}.$$

(ii) Pour tous $n, k \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$, on a

$$I_{n,k} = \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{k+t}} \mid t \in [0, 1] \right\} = \left[\frac{k}{nk+1}, \frac{k+1}{n(k+1)+1} \right).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$

$$\mathcal{F} \ni \bigcup_{k \geq 1} \left[\frac{k}{nk+1}, \frac{k+1}{n(k+1)+1} \right) = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$

Ainsi

$$(0, \frac{1}{n}) = \bigcup_{k \geq n} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right) \in \mathcal{F}.$$

En particulier, le singletons $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$ sont \mathcal{F} -mesurables.

- (iii) Pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, la fonction ψ_k est \mathcal{F} -mesurable. En effet ψ_k est évidemment injective d'image I_k . De plus, $\psi_k([0, 1)) \cap \psi_{k'}([0, 1)) = \emptyset$ si $k \neq k'$.

On considère un intervalle I_{a_1, \dots, a_m} . Par récurrence triviale, on a $\psi_{a_1, \dots, a_m} = \psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_m}$. En particulier

$$I_{a_1, \dots, a_m} = \psi_{a_1, \dots, a_m}([0, 1)) \subseteq \psi_{a_1}([0, 1)) = I_{a_1}.$$

Il suit que $\psi_k^{-1}(I_{a_1, \dots, a_m}) = \emptyset$ quand $a_1 \neq k$. Si $a_1 = k$, on aura

$$\psi_k^{-1}(I_{a_1, \dots, a_m}) = \psi_k^{-1}(\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_m})([0, 1)) = \begin{cases} I_{a_2, \dots, a_m} & \text{si } m \geq 2 \\ [0, 1) & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Dans tous cas, $\psi_k^{-1}(I_{a_1, \dots, a_m}) \in \mathcal{F}$ ($[0, 1) \in \mathcal{F}$ car $\{1\} \in \mathcal{F}$). La collection $\{A \in \mathcal{F} | \psi_k^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu contenant les intervalles I_{a_1, \dots, a_m} , donc égal à \mathcal{F} .

- (iv) Les intervalles $(0, \frac{k}{n}]$ et $(0, \frac{k}{n})$ (où $1 \leq k \leq n$) sont \mathcal{F} -mesurables. On le démontre par récurrence sur n . Quand $n = k$ (en particulier quand $n = 1$), c'est traité. Pour $n \geq 2$ et $k < n$, écrivons

$$n = km + r, \quad m \geq 1, \quad 0 \leq r < k.$$

Si $r = 0$, alors $(0, \frac{k}{n}] = (0, \frac{1}{m}] \in \mathcal{F}$ (cas (i)) et $(0, \frac{k}{n}) = (0, \frac{1}{m}) \in \mathcal{F}$ (cas (ii)). On suppose alors que $r > 0$. Sans peine, on voit que

$$(0, \frac{k}{n}] = \psi_m^{-1}([\frac{r}{k}, 1]) \in \mathcal{F}, \quad (0, \frac{k}{n}) = \psi_m^{-1}((\frac{r}{k}, 1]) \in \mathcal{F}$$

car $(0, 1] \in \mathcal{F}$ et $(0, \frac{r}{k}), (0, \frac{r}{k}) \in \mathcal{F}$ par l'hypothèse de récurrence.

- (v) Il suit du cas précédent que tous les intervalles $(u, v] = (0, v] \setminus (0, u]$ avec $u, v \in \mathbf{Q}$ sont \mathcal{F} -mesurables. Ils engendrent la tribu borélienne sur I , donc \mathcal{F} coïncide avec cette tribu.

8. C'est vrai pour n'importe quel borélien J .

Observons tout d'abord que pour tous $x \in [0, 1)$ et $k \in \mathbf{N}_{\ell \geq 1}$

$$T(\psi_k(x)) = T\left(\frac{1}{x+k}\right) = \{x+k\} = x.$$

Il suit que $T^m \circ \psi_{a_1, \dots, a_m} = \text{id}_{[0, 1)}$. Or, par l'injectivité de ψ_{a_1, \dots, a_m}

$$\begin{aligned} \ell(T^{-m}(J) \cap I_{a_1, \dots, a_m}) &= \int_{I_{a_1, \dots, a_m}} \mathbf{1}_{T^{-m}(J)} d\ell \\ &= \int_I (\mathbf{1}_{T^{-m}(J)} \circ \psi_{a_1, \dots, a_m}) d(\psi_{a_1, \dots, a_m})_* \ell \\ &= \int_I \mathbf{1}_J |\psi'_{a_1, \dots, a_m}| d\ell \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_J(x) \frac{|p_{m-1}q_m - p_mq_{m-1}|}{(q_m + xq_{m-1})^2} dx \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_J(x) \frac{dx}{(q_m + xq_{m-1})^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$, on a $(q_m + xq_{m-1})^2 \leq (q_m + q_{m-1})^2 \leq 2q_m(q_m + q_{m-1})$ (car $(q_m)_{m \geq 1}$ est croissante). De même

$$(q_m + xq_{m-1})^2 \geq q_m^2 \geq q_m \cdot \frac{q_m + q_{m-1}}{2}.$$

Ainsi, par (7b)

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{1}_J(x) dx}{(q_m + xq_{m-1})^2} \geq \frac{1}{2q_m(q_m + q_{m-1})} \int_0^1 \mathbf{1}_J(x) dx = \frac{1}{2} \ell(I_{a_1, \dots, a_m}) \ell(J)$$

et

$$\int_0^1 \frac{\mathbb{1}_J(x) dx}{(q_m + xq_{m-1})^2} \leq \frac{2}{q_m(q_m + q_{m-1})} \int_0^1 \mathbb{1}_J(x) dx = 2\ell(I_{a_1, \dots, a_m})\ell(J).$$

On conclut que

$$\frac{1}{2}\ell(I_{a_1, \dots, a_m}) \leq \frac{\ell(T^{-m}(J) \cap I_{a_1, \dots, a_m})}{\ell(J)} \leq 2\ell(I_{a_1, \dots, a_m}).$$

9. Soit $J \subseteq I$ un borélien tel que $T^{-1}(J) = J$. En particulier, pour tout intervalle I_{a_1, \dots, a_m} , on a (de 8.)

$$\ell(J)\ell(I_{a_1, \dots, a_m}) \leq 2\ell(J \cap I_{a_1, \dots, a_m}).$$

On va montrer que soit $\ell(J) = 0$ soit $\ell(J^c) = 0$ (d'où soit $\mu(J) = 0$ soit $\mu(J) = 1$ car $\mu \ll \ell$). Fixons $\varepsilon > 0$. Par la construction de ℓ comme mesure extérieure, il existe un borélien $J' \supseteq J^c$, qui est une réunion disjointe d'intervalles de la forme I_{a_1, \dots, a_m} , tel que $0 \leq \ell(J' \setminus J^c) < \varepsilon$. Ainsi, $\ell(J)\ell(J^c) \leq \ell(J)\ell(J') \leq 2\ell(J \cap J') = 2\ell(J' \setminus J^c) < 2\varepsilon$. C'est vrai pour tout ε , donc $\ell(J)\ell(J^c) = 0$, d'où le résultat.

Applications aux approximations diophantiennes

10. Montrons par récurrence sur $m = 1, \dots, n$ que

$$\prod_{k=1}^m [a_k(x), \dots, a_n(x)] = \frac{1}{q_{m-2}(x) + \frac{q_{m-1}(x)}{[a_m(x), \dots, a_n(x)]}}.$$

Quand $m = 1$, les deux côtés sont égaux car $q_{-1}(x) = 0$ et $q_0(x) = 1$. Soit $m \geq 2$. Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m [a_k(x), \dots, a_n(x)] &= \frac{[a_m(x), \dots, a_n(x)]}{q_{m-3}(x) + \frac{q_{m-2}(x)}{[a_{m-1}(x), \dots, a_n(x)]}} \\ &= \frac{[a_m(x), \dots, a_n(x)]}{q_{m-3}(x) + (a_{m-1}(x) + [a_m(x), \dots, a_n(x)])q_{m-2}(x)} \\ &= \frac{[a_m(x), \dots, a_n(x)]}{q_{m-1}(x) + [a_m(x), \dots, a_n(x)]q_{m-2}(x)} \\ &= \frac{1}{q_{m-2}(x) + \frac{q_{m-1}(x)}{[a_m(x), \dots, a_n(x)]}}. \end{aligned}$$

D'où l'affirmation. En particulier, quand $n = 1$

$$\prod_{k=1}^n [a_k(x), \dots, a_n(x)] = \frac{1}{q_{n-2}(x) + a_n(x)q_{n-1}(x)} = \frac{1}{q_n(x)}.$$

11. Pour tous $k > k' \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, on a

$$a_k = a \circ T^{k-1} = (a \circ T^{k-k'-1}) \circ T^{k'} = a_{k-k'} \circ T^{\ell}.$$

Donc, de (4b), on a

$$[a_k(x), \dots, a_n(x)] = [a_1(T^{k-1}(x)), \dots, a_{n-k+1}(T^{k-1}(x))] = \frac{p_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}{q_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}.$$

En outre, il suit de (4c) que

$$|\log T^{k-1}(x) - [a_k(x), \dots, a_n(x)]| \leq \frac{1}{2^{n-k+1}}.$$

En sommant par rapport à $k = 1, \dots, n$, on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^n \log T^{k-1}(x) - \log \prod_{k=1}^n [a_k(x), \dots, a_n(x)] \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

i.e. (par **10.**)

$$\left| \sum_{k=1}^n \log T^{k-1}(x) - \log \frac{1}{q_n(x)} \right| \leq 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Il suit que

$$\left| \frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log T^{k-1}(x) \right| = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

12. Puisque μ est ergodique pour T , il suit du théorème ergodique de Birkhoff et **11.** que pour presque tout $x \in I \setminus \mathbf{Q}$ ($\mu(\mathbf{Q}) = 0$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log T^{k-1}(x) = \int_I \log d\mu = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1+x}.$$

Pour tout $x \in (0, 1)$, on a

$$\frac{\log x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \log x.$$

On a, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\int_0^1 x^k \log x \, dx = \left. \frac{x^{k+1} \log x}{k+1} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{dx}{x} = - \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} \, dx = - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

De plus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |x^k \log x| \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^k \log x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty.$$

Par convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} \, dx &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(- \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= - \frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &= - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} = - \frac{\pi^2}{12 \log 2}$ pour presque tout $x \in I \setminus \mathbf{Q}$. Finalement, pour tel x , il suit de (4c) que

$$\frac{1}{2q_n(x)q_{n+1}(x)} \leq \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\log \frac{1}{q_n(x)} + \log \frac{1}{q_{n+1}(x)} - \log 2 \right) &\leq \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\log \frac{1}{q_n(x)} + \log \frac{1}{q_{n+1}(x)} \right). \end{aligned}$$

Il suit que $\frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \rightarrow -\frac{\pi^2}{6 \log 2}$ quand $n \rightarrow \infty$.

13. (a) Pour tous $x \in I$ et $n, k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, On a équivalence

$$a_n(x) = k \Leftrightarrow a(T^{n-1}(x)) = k \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{T^{n-1}(x)} < k+1 \Leftrightarrow T^{n-1}(x) \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right].$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu\{x \in I : a_n(x) = k\} &= \mu \left(T^{n-1} \left(\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \right) \right) \\ &= \mu \left(\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \right) \quad (T \text{ est } \mu\text{-invariant}) \\ &= \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{1+x} \\ &= \log(1+x) \Big|_{1/(k+1)}^{1/k} \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Il suit que

$$\mu\{x \in I : a_n(x) \geq k\} = \sum_{\ell=k}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{\ell} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{\ell+1} \right) \right) = \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{k}.$$

Pour une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs, on note

$$E_n(\mathbf{a}) := \{x \in I : a_n(x) > a_n\} = \{x \in I : a_n(x) \geq \lfloor a_n \rfloor + 1\}$$

Alors

$$A(\mathbf{a})^c = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} E_m(\mathbf{a}).$$

On a

$$\sum_{n \geq 1} \mu(E_n(\mathbf{a})) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1} < \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n} < \infty$$

Donc $\mu(A(\mathbf{a})^c) = 0$ (par le lemme de Borel-Cantelli), i.e. $\mu(A(\mathbf{a})) = 1$.

(b) On a

$$A(\mathbf{a}) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} E_m(\mathbf{a})^c.$$

Il faut donc démontrer que pour tout $n \geq 1$

$$\mu \left(\bigcap_{m \geq n} E_m(\mathbf{a})^c \right) = 0.$$

Commençons par le cas où $n = 1$. Comme $\mu \ll \ell$, il suffira de démontrer que $\ell \left(\bigcap_{m \geq 1} E_m(\mathbf{a})^c \right) = 0$. Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^m E_k(\mathbf{a})^c &= \{x \in I : \forall k = 1, \dots, m, a_k(x) \leq \lfloor a_k \rfloor\} \\ &= \bigsqcup_{b_1 \leq \lfloor a_1 \rfloor, \dots, b_m \leq \lfloor a_m \rfloor} I_{b_1, \dots, b_m}. \end{aligned}$$

Pour tous $m, b_1, \dots, b_{m+1} \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x \in I_{b_1, \dots, b_m}$, on a équivalence

$$T^m(x) \in I_{b_{m+1}} \Leftrightarrow a(T^m(x)) = b_{m+1} \Leftrightarrow a_{m+1}(x) = b_{m+1} \Leftrightarrow x \in I_{b_1, \dots, b_{m+1}}$$

i.e. $T^{-m}(I_{b_{m+1}}) \cap I_{b_1, \dots, b_m} = I_{b_1, \dots, b_{m+1}}$. En appliquant **8.**, on a

$$\ell(E_{m+1}(\mathbf{a}) \cap I_{b_1, \dots, b_m}) \leq 2\ell(I_{b_1, \dots, b_m})\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})),$$

de sorte que

$$\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})^c \cap I_{b_1, \dots, b_m}) \leq \ell(I_{b_1, \dots, b_m}) (1 - 2\ell(E_{m+1}(\mathbf{a}))) \leq \ell(I_{b_1, \dots, b_m}) \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right),$$

où C est une constante qui ne dépend de rien puisque $\ell(E_{m+1}(\mathbf{a}))$ est de l'ordre de $1/(a_{m+1} + 1)$ (en effet $\mu(\{x \in I, a_{m+1}(x) = k\}) = \mu(\{x \in I, a_1(x) = k\}) = 1/k - 1/(k+1)$ par **6.**, donc $\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})) \geq C' \mu(E_{m+1}(\mathbf{a})) \geq \frac{C}{a_{m+1} + 1}$). Par suite,

$$\begin{aligned} \ell \left(\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k(\mathbf{a})^c \right) &= \ell \left(\bigsqcup_{b_1 \leq a_1, \dots, b_m \leq a_m} I_{b_1, \dots, b_m} \cap E_{m+1}(\mathbf{a})^c \right) \\ &\leq \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right) \sum_{b_1 \leq a_1, \dots, b_m \leq a_m} \ell(I_{b_1, \dots, b_m}) \\ &= \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right) \ell \left(\bigcap_{k=1}^m E_k(\mathbf{a})^c \right). \end{aligned}$$

On obtient pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 1}$

$$\log \ell \left(\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k(\mathbf{a})^c \right) \leq \log \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right) + \log \ell \left(\bigcap_{k=1}^m E_k(\mathbf{a})^c \right).$$

Par continuité des mesures, on obtient

$$\log \ell \left(\bigcap_{m \geq 1} E_m(\mathbf{a})^c \right) \leq \sum_{m \geq 1} \log \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right) + \log \ell(E_1(\mathbf{a})^c).$$

La série $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{a_{m+1}}$ diverge (si elle converge, on aura $\frac{1}{a_{m+1}} \rightarrow 0$, donc $a_m \rightarrow \infty$; en particulier, $\frac{1}{a_m} \leq \frac{2}{a_{m+1}}$ pour m assez grand, qui implique que $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{a_m}$ converge, c'est absurde). Il suit que

$$\sum_{m \geq 1} \log \left(1 - \frac{C}{a_{m+1} + 1}\right) \leq - \sum_{m \geq 1} \frac{1}{a_{m+1} + 1} = -\infty,$$

En conséquence, $\ell \left(\bigcap_{m \geq 1} E_m(\mathbf{a})^c \right) = 0$, d'où $\mu \left(\bigcap_{m \geq 1} E_m(\mathbf{a})^c \right) = 0$.

Considérons maintenant $n \geq 1$ quelconque. Soit $\mathbf{a}' := (a'_k)_{k \geq 1}$, où $a'_k = a_{k+n-1}$. Pour tout $x \in I$ et tout $m \geq n$, on a équivalence

$$\begin{aligned} x \in E_m(\mathbf{a}) &\Leftrightarrow a_m(x) > a_m \Leftrightarrow a(T^{m-1}(x)) > a_m \Leftrightarrow a(T^{m-n}(T^{n-1}(x))) > a_m \\ &\Leftrightarrow a_{m-n+1}(T^{n-1}(x)) > a'_{m-n+1} \Leftrightarrow T^{n-1}(x) \in E_{m-n+1}(\mathbf{a}'). \end{aligned}$$

Donc $E_m(\mathbf{a}) = T^{-n+1}(E_{m-n+1}(\mathbf{a}'))$. Par la μ -invariance de T , on a

$$\mu \left(\bigcap_{m \geq n} E_m(\mathbf{a})^c \right) = \mu \left(\bigcap_{m \geq n} E_{m-n+1}(\mathbf{a}')^c \right) = \mu \left(\bigcap_{m \geq 1} E_m(\mathbf{a}')^c \right) = 0.$$

La dernière égalité vient du fait que la série $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{a'_m} = \sum_{m \geq n} \frac{1}{a_m}$ diverge, et qu'on a traité le cas où $n = 1$.

14. (a) Pour presque tout $x \in I$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} < \log 4$ (Partie 12.), donc il existe $N(x) \in \mathbb{N}_{n \geq 1}$ tel que

$$\forall n \geq N(x), \quad q_n(x) < 4^n.$$

La suite $(qf(q))_q$ est décroissante, donc

$$\varphi(n) = 4^n f(4^n) \leq q_n(x) f(q_n(x))$$

pour tout $n \geq N(x)$.

- (b) On a nécessairement $f(q) > 0$ pour tout q (s'il existe q_0 tel que $f(q_0) = 0$, comme $(qf(q))_q$ est décroissante, on aura $f(q) = 0$ pour tout $q \geq q_0$, qui contredit le fait que $\sum_q f(q)$ diverge). Montrons que la série $\sum_n \varphi(n)$ diverge. En effet, la suite $(f(q))_q$ est décroissante car $f(q+1) \leq \frac{qf(q)}{q+1} < f(q)$, donc

$$\sum_{q \geq 1} f(q) = \sum_{n \geq 0} \sum_{q=4^n}^{4^{n+1}-1} f(q) < \sum_{n \geq 0} 3 \cdot 4^n f(4^n) = 3 \sum_{n \geq 0} \varphi(n).$$

Il suit de 12. que pour presque tout x , $a_{n+1}(x) > \frac{1}{\varphi(n)}$ infiniment souvent. Pour tel x et n , par (4c)

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)} \leq \frac{1}{a_{n+1}(x)q_n(x)^2} < \frac{\varphi(n)}{q_n(x)^2}.$$

De (14a), on a

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| < \frac{f(q_n(x))}{q_n(x)}$$

infiniment souvent. Mais la suite $(q_n(x))_{n \geq 1}$ est strictement croissante, d'où la preuve de la première partie du **Théorème**.