Systèmes dynamiques

TD n°8

Yann Chaubet

10 novembre 2020

Exercice 1

1. On considère une fonction f définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{d}f_0 = 0$, et $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ un difféomorphisme local au voisinage de 0, tel que $\varphi(0) = 0$.

On calcule

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_\ell (f \circ \varphi) &= \sum_i \partial_k \left([(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_\ell \varphi^i \right) \\ &= \sum_i [(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_k \partial_\ell \varphi^i + \sum_{j,i} [(\partial_i \partial_j f) \circ \varphi](\partial_k \varphi^i)(\partial_\ell \varphi^j).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{d}f_0 = 0$ on obtient

$$\mathrm{Hess}_{f \circ \varphi}(0) = (\mathrm{d}\varphi_0)^\top \mathrm{Hess}_f(0)(\mathrm{d}\varphi_0),$$

ce qui conclut.

2. On remarque qu'une fonction de Morse a un nombre fini de points critiques, car ils sont isolés.

De plus la condition "$\mathrm{Hess}_f(0)$ est non dégénérée" est ouverte, ce qui conclut.

3. On suppose $\varphi_\tau(x) = x$ avec $\tau > 0$. Calculons

$$\begin{aligned}\partial_t f(\varphi_t(x)) &= \mathrm{d}f_{\varphi_t(x)}(X(\varphi_t(x))) \\ &= -\mathrm{d}f_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x))) \\ &= -g_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x)), \nabla^g f(\varphi_t(x))) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque $f(\varphi_\tau(x)) = x$ avec $\tau > 0$ on obtient que pour tout $t \in [0, \tau]$, $\nabla^g f(\varphi_t(x)) = 0$.

4. C'est la même démonstration : f décroît strictement le long des lignes de flots de X qui ne sont pas réduites à un point. Ainsi si $\nabla_g f(x) \neq 0$, on a que $f(\varphi_t(x)) < f(x) - \varepsilon$ pour tout $t > \delta$ (pour certains $\delta, \varepsilon > 0$) et donc $\varphi_t(x)$ ne peut pas repasser près de x pour $t > \delta$.

5. Soit $x \in M$, et p une valeur d'adhérence de $(\varphi_t(x))_{t \geqslant 0}$. Alors de même que précédemment, on a $\nabla^g f(p) = 0$.

Comme $t \mapsto f\ (\varphi_t(x))$ décroît, on a $f(\varphi_t(x)) \geqslant f(p)$ pour tout t.

Par hypothèse, des coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$ autour de p telles que

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^{r} (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^{n} (x^i)^2,$$

et

$$-\nabla^g f = 2(-x^1, \dots, -x^r, x^{r+1}, \dots, x^n).$$

Ainsi, le fait que $f(\varphi_t(x)) \geqslant p$ pour tout t implique que si $\varphi_t(x)$ est assez proche de p, on a nécessairement $\varphi_t(x) \in \{x^{r+1} = \cdots = x^n = 0\}$, car sinon on aurait $f(\varphi_{t'}(x)) < f(p)$ pour un $t' > t$.

Ceci montre que $\varphi_t(x) \to p$ quand $t \to +\infty$. De même on montre que $\varphi_{-t}(x) \to q$ quand $t \to +\infty$ avec $q \in \mathrm{Crit}(f)$.

Exercice 2

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole, c'est-à-dire que $\emptyset \neq \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a

$$A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ une mesure sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et pour toute séquence $(E_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ on a

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right).$$

Théorème (Carathéodory)

Il existe une mesure $\mu^* : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ qui étend μ. Si μ est σ-finie, alors μ^* est unique.

2. Le théorème est le suivant.

Théorème (Classe monotone)

On suppose que Π *est un* π*-système (i.e. un sous-ensemble de parties de* E *stable par intersections finies). Alors*

$$\bigcap_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \sigma(\Pi),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des classes monotones $\mathcal{C}$ *telles que* $\Pi \subset \mathcal{C}$.

Exercice 2

1. $\mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}$ est par définition la tribu engendrée par les cylindres.

2. Si $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ avec $A_i \in \mathcal{S}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Si A s'écrit aussi $A'_1 \cup \cdots \cup A'_m$, alors

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(A'_i) = \sum_{i,j} \mu(A'_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j),$$

donc $\mu(A)$ ne dépend pas de la décomposition choisie.

On vérifie alors facilement que μ définit bien une mesure sur $\mathcal{S}$.

3. (a) On a

$$\int_A H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x) \mathrm{d}P(x)$$
$$= \int_A \sum_{n\geq 0} \left(\prod_{j>k+1} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^{k} 1_{S_i^n}(x_i) \right) 1_{S_{k+1}^n}(x) \mathrm{d}P(x) \quad =$$

3. (b) On a

$$\int_A H_0(x) \mathrm{d}P(x) = \int_A \sum_{n\geq 0} \left(\prod_{j>0} P(S_j^n) \right) 1_{S_0^n}(x) \mathrm{d}P(x) = \sum_n \mu(S^n) < 1.$$

Ainsi il existe $x_0 \in A$ tel que $H_0(x_0) < 1$.

On suppose construits $x_0, \ldots, x_k \in A$ tels que $H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1$. Alors par (a) on a

$$\int_A H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x) \mathrm{d}P(x) = H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1.$$

Ainsi il existe $x_{k+1} \in A$ tel que $H_{k+1}(x_0, \ldots, x_{k+1}) < 1$.

3. (c) Par la question **2.**, l'application μ s'étend uniquement en une mesure additive sur l'ensemble des unions de cylindres. On veut appliquer le théorème de Carathédory.

Pour cela, on aimerait montrer que μ est σ-additive (il suffit de le montrer sur les cylindres). Soit (S^n) une suite de cylindres deux-à-deux disjoints telle que $X = \cup_n S^n$. On suppose par l'absurde que $\sum_n \mu(S^n) < 1$.

Par (b), il existe une suite $\mathbf{x} = (x_n)$ telle que $H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1$ pour tout k. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in S^m$, et $i_m \in \mathbb{N}$ tel que $S_i^m = A$ pour tout $j > i_m$.

Alors on a

$$\left(\prod_{j>i_m} P(S_i^m)\right)\left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i)\right) = 1,$$

et donc

$$H_{i_m}(x_0,\dots x_{i_m}) \geqslant \left(\prod_{j>i_m} P(S_i^m)\right)\left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i)\right) = 1,$$

ce qui est absurde.

Montrons maintenant que μ est invariante par le décalage $\sigma : X \to X$. défini par

$$\sigma : (x_n) \mapsto (x_{n+1}).$$

Soit $S = S_0 \times S_1 \times \cdots$ un cylindre. Alors

$$\sigma^{-1}(S) = A \times S_0 \times S_1 \times \cdots,$$

et donc $\mu(\sigma^{-1}(S)) = \mu(S)$.

Cette égalité est donc aussi vraie pour tout $S \in \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}$.

4. La seule difficulté est la σ-additivité. On se donne une suite de cylindres (S^n) comme précédemment.

On pose

$$F_N = \complement \left(\bigcup_{n \leqslant N} S^n \right).$$

Alors F_N est une suite décroissante de compacts, telle que l'intersection $\bigcap_N F_N$ est vide.

Ceci implique que $F_N = \emptyset$ si N est assez grand, et donc $\cup_{n \geqslant N} S^n = A^{\mathbb{N}}$. En particulier $\mu(\cup_{n \leqslant N} S^n) = 1$.

5. P_M est additive car si $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_p) \in A^{p+1}$ on a d'un côté

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_{n,i\mathbf{w}}\right) = \mu(C_{n+1,\mathbf{w}}) = v_{w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}},$$

et de l'autre, puisque $v = Mv$,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(C_{n,i\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^{m} v_i m_{i,w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}} = \left(\prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}}\right) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i m_{i,w_0}}_{v_{w_0}}.$$

L'existence et l'unicité de P_M sont alors claires par le même raisonnement qu'aux questions précédentes. Il suffit donc de montrer que P_M est une mesure de probabilités invariante par le décalage. C'est une mesure de probabilités :

$$P_M(X) = \sum_{w \in A} \mu(C_{0,w}) = \sum_{i=1}^{m} v_i = 1.$$

De plus P_M est σ-invariante car $\sigma^{-1}(C_{n,\mathbf{w}}) = C_{n+1,\mathbf{w}}$.

6. On se donne un mot $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_p)$. Alors

$$P^{\otimes \mathbb{N}}(C_{n,\mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^{p} P(\{w_j\}) = P(\{w_0\}) \prod_{j=0}^{p-1} M(P)_{w_j, w_{j+1}},$$

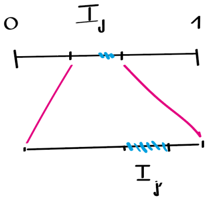
ce qui conclut car si $v = (P(\{1\}), \cdots, P(\{m\}))$ on a $vM(P) = v$.

7. Soit $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_p) \in A^{p+1}$. Alors $x \in H(C_{n,\mathbf{w}})$ si et seulement si

$$\forall j = 0, \ldots, p, \quad m^{n+j} x \in \left[\frac{w_j - 1}{m}, \frac{w_j}{m}\right[\mod \mathbb{Z}.$$

Par suite on a, puisque $x \mapsto m^n x$ préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Leb}(H(C_{n,\mathbf{w}})) = \mathrm{Leb}\left(\bigcap_{j=0}^{p} \left\{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ m^j x \in I_j\right\}\right) = \frac{1}{m^{p+1}}$$



Or

$$\mu_m^{\otimes \mathbb{N}}(C_{n,\mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^{p} P(\{w_j\}) = \frac{1}{m^{p+1}}.$$

8. L'ensemble $\complement Z$ des points m-adiques est dénombrable, notons le $\{y_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$. On a alors

$$\operatorname{Leb}\left(\complement Z\right) = \sum_k \mu(\{y_k\}) = 0.$$

9. Si $\mathbf{x} \in H^{-1}(Z)$, alors $\mathbf{x}$ ne stationne pas à 1 ni m à partir d'un certain rang.

On a

$$\begin{aligned} H(\sigma(\mathbf{x})) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1} - 1}{m^k} \mod \mathbb{Z} \\ &= mH(\mathbf{x}) \mod \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Il est clair que $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui n'est pas m-adique admet exactement un antécédent par H, en regardant les nombres $x_k \in \{1, \ldots, m\}$ $(k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1})$ tels que

$$x_k - 1 = \lfloor m^k x \rfloor \mod m,$$

qui ne stationnent jamais à 1 où m.