**Université de Nantes** Année 2024-2025
**X31M020 - Algèbre linéaire et bilinéaire 2**

---

# Devoir maison : pour la semaine de la rentrée

---

**Nota Bene.** Si vous le souhaitez (c'est encouragé), vous pouvez travailler en groupe. Un groupe peut contenir jusqu'à trois élèves.

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$ un entier. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, on note

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

Ici la norme $\|\cdot\|$ choisie sur l'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ des vecteurs colonnes est la norme euclidienne,

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \quad \text{pour tout vecteur colonne} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}).$$

## I — Préliminaires

**1.** Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

**2.** Montrer que c'est une norme d'algèbre, dans le sens où

$$|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||, \quad A, B \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}).$$

**3.** En déduire que pour toute matrice $A$, la suite $(A_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$A_N = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{A^\ell}{\ell!}$$

est une suite de Cauchy dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Dans toute la suite, on notera $\exp A$ ou encore $e^A$ la matrice limite

$$\exp A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell}{\ell!} = \lim_{N \to \infty} A_N.$$

## II — Propriétés de l'exponentielle de matrice

**4.** Montrer que si $A$ et $B$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

**5.** En déduire que pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, la matrice $\exp A$ est inversible et calculer son inverse.

**6.** Montrer que pour si $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ alors

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P. \quad \chi \quad X$$

**7.** Montrer que pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ on a

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A.$$

*Indication. On pourra le montrer pour les matrices complexes triangulaires supérieures et en déduire le cas général.*

On dit qu'une application $\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, $t \mapsto A(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le coefficient $A(t)_{ij}$ en place $(i,j)$ de $A(t)$ dépend de manière $\mathscr{C}^1$ de $t$.

**8.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Montrer que l'application

$$\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \quad t \mapsto \exp(tA)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

**9.** Montrer que pour tous $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $X_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$, le système

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}))$ qui est donnée par

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## III — Méthode pour calculer l'exponentielle d'une matrice

**10.** Montrer que si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale, avec $\lambda_j \in \mathrm{K}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, alors

$$\exp A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

**11.** Soit $\mathrm{Q}_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{X^\ell}{\ell!} \in \mathrm{K}[X]$. Montrer que pour toute matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ on a

$$\exp N = \mathrm{Q}_n(N).$$

**12.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que son polynôme caractéristique $\chi_A$ soit scindé. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\Delta$, une matrice nilpotente $N$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telles que

$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(t\Delta) P \, \mathrm{Q}_n(tN), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Indication. On pourra utiliser la décomposition de Dunford $A = D + N$ de $A$ et écrire $D = P^{-1}\Delta P$ avec $\Delta$ diagonale.*

## IV — Application

**13.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant les questions **9** et **12**, déterminer les solutions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ au système

$$x'(t) = x(t) - y(t), \quad y'(t) = x(t) - z(t), \quad z'(t) = -x(t) + 2z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $x(0) = a,\ y(0) = b$ et $z(0) = c$.