Exercice 1

On pose $\varphi_n = \log \|A^n\|$. Il suffit de montrer que (φ_n) est sous-additive.

On a, si $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur (i.e. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$),

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+m}(x) &= \log \|A^{n+m}(x)\| \\
&= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\
&= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \right\| \\
&\qquad\qquad + \log \left\| A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\
&= \varphi_m(x) + \varphi_n(f^m(x)).
\end{aligned}$$

Le résultat pour la norme $\|\cdot\|$ est alors une conséquence du théorème ergodif sous-additif de Kingman.

Si $\|\cdot\|'$ est une autre norme, on a pour un $C > 0$

$$\frac{\log(1/C)}{n} + \frac{1}{n}\log\|A^n\| \leqslant \frac{1}{n}\log\|A^n\|' \leqslant \frac{\log C}{n} + \frac{1}{n}\log\|A^n\|,$$

ce qui conclut.

Exercice 2

1. La transformation R_α est ergodique, donc $\lambda_\pm$ est constante.

2. On a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\mathrm{e}^{2i\theta}}{2} & \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2i\theta}}{2} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta}-1}{2i} & \dfrac{1+\mathrm{e}^{2i\theta}}{2}. \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{i\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Rappel : $f : U \to \mathbb{R}$ est sous-harmonique si pour tout $z \in U$ et $r > 0$ tel que $B(z, r) \subset U$, on a

$$f(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$

On note que si $\varphi : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, alors $z \mapsto \log|\varphi(z)|$ est harmonique. En effet,

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log|\varphi(z)| = \partial_z \partial_{\bar{z}} \left(\log\varphi(z) + \log\bar{\varphi}(z)\right) = 0.$$

Chaque coefficient de $C_n(z)$ dépend de manière holomorphe de z, et donc $z \mapsto |C_n(z)_{ij}|$ est harmonique pour tous ij.

En particulier si $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$ on a que $z \mapsto \log \|C_n(z)\|$ est sous-harmonique.

4. On a

$$\lambda_+ = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int \log \|A^n(x)\| \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Mais

$$\begin{aligned} C_n\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right) &= A_\sigma \mathrm{e}^{2i\pi((n-1)\alpha+x)} R_{2\pi((n-1)\alpha+x)} \cdots A_\sigma \mathrm{e}^{2i\pi x} R_{2\pi x} \\ &= \mathrm{e}^{2i\pi\tau(x)} A^n(x), \end{aligned}$$

où

$$\tau(x) = nx + \sum_{k=0}^{n-1} k\alpha = nx + \frac{n(n-1)}{2}\alpha.$$

Par la question **3.** on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_0^1 \log \left\| C_n\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right) \right\| \, \mathrm{d}x \geqslant \lim_n \frac{1}{n} \, \log \|C_n(0)\|.$$

Or on a

$$\begin{aligned}C_n(0) &= \left(A_\sigma\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2i}\\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)^n\\ &= \frac{1}{2^n}\left(A_\sigma\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\right)^n\\ &= \frac{1}{2^n}\underbrace{\begin{pmatrix}\sigma & -i\sigma\\ i\sigma^{-1} & \sigma^{-1}\end{pmatrix}}_{B}^n.\end{aligned}$$

On a $\mathrm{sp}(B) = \{0, \sigma + \sigma^{-1}\}$. Par suite

$$\frac{1}{n}\log\|C_n(0)\| = \frac{1}{n}\log\left\|\left(\frac{B}{2}\right)^n\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \log\rho(B/2) = \log\frac{\sigma+\sigma^{-1}}{2}.$$

Exercice 3

On note $f = \sigma$ le décalage sur $\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$, et $\mu = (p_1, \dots, p_m)^{\otimes \mathbb{N}}$. On définit alors $A : \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ par

$$A(x) = A_{x_0}, \quad x = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma.$$

Alors, avec les notations de l'Exercice **1.**, on a

$$A^n(x) = A_{x_{n-1}} \cdots A_{x_0}, \quad x = (x_k) \in \Sigma.$$

Alors par l'Exercice **1.** on a

$$\frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| \to \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

avec λ une constante (car f est ergodique).

De plus $\lambda > -\infty$. En effet on a $\nu > 1$ tel que

$$\nu^{-n} \|v\| \leqslant A^n(x) \leqslant \nu^n \|v\|, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad x \in \Sigma,$$

ce qui donne $\lambda \geqslant -\log \nu > -\infty$.

Exercice 4

1. Si $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ on a $\|A^{-1}\|^{-1} = \|A\|^{-1}$, et donc

$$-\lambda_+(x) = \lim \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|^{-1} = \lim \frac{1}{n} \log \|A^{-n}(x)\|^{-1} = \lambda_-(x).$$

2. On a

$$\begin{aligned} \|A^n(x)\|^{-1}\|v\| &= \|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\| \\ &\leqslant \|A^n(x)v\| \\ &\leqslant \|A^n(x)\|\|v\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{n} \log \left(\|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\|\right) \ \geqslant \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leqslant \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| \ \|v\|.$$

Cela donne

$$\lambda_-(x) \leqslant \liminf_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leqslant \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leqslant \lambda_+(x)$$

3. Fait : pour tout $B \in \mathrm{SL}(2)$, il existe $u, v \in \mathbb{R}^2$ tels que $u \perp v$ et

$$\|u\| = \|v\| = 1, \quad \|Bv\| = \|B\|^{-1}, \quad \|Bu\| = \|B\|, \quad \langle Bu, Bv \rangle = 0.$$

En effet, on prend (u, v) qui diagonalise $B^\top B$ avec $B^\top Bu = \lambda u$ et $B^\top Bv = \lambda^{-1}$ avec $\lambda \geqslant \lambda^{-1}$. On a alors $\lambda = \|B\|$, ce qui conclut.

4. α_n est défini par

$$s_n(x) = \sin(\alpha_n) u_{n+1}(x) + \cos(\alpha_n) s_{n+1}(x).$$

On a

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}(x) s_n(x)\| &\geqslant \| \sin(\alpha_n) A^{n+1}(x) u_{n+1}(x)\| \\ &= |\sin(\alpha_n)| \|A^{n+1}(x)\|. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}(x) s_n(x)\| &\leqslant \|A(f^n(x))\| \|A^n(x) s_n(x)\| \\ &= \|A(f^n(x))\| \|A^n(x)\|^{-1} \end{aligned}$$

Il suit que

$$|\sin(\alpha_n)| \leqslant \frac{\|A(f^n(x))\|}{\|A^{n+1}(x)\| \|A^n(x)\|}.$$

On a

$$\frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| = \frac{1}{n}\log\|A(x)\| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{\|A(f^{k+1}(x))\|}{\|A(f^k(x))\|}$$
$$= \frac{1}{n}\log\|A(x)\| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(f^k(x)),$$

où $\psi(x) = \log\|A(f(x))\| - \log\|A(x)\|$. Alors $\psi \in L^1(\mu)$ et donc le théorème ergodique de Birkhoff implique que la limite

$$\lim_n \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\|$$

existe pour $\mu-$presque tout x.

D'autre part puisque $\log\|A\| \in L^1$ on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\left\{x \ : \ \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| > \varepsilon\right\}\right) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

En conséquence $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\| \to 0$ en probabilités quand $n \to +\infty$.

Comme $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\|$ converge aussi μ–pp quand $n \to +\infty$, on a que $\frac{1}{n}\log\|A(f^n(\cdot))\| \to 0$ μ–pp.

Par conséquent

$$\frac{1}{n}\log|\sin(\alpha_n)| \leqslant \frac{1}{n}\log\|A(f^n(x))\| - \frac{1}{n}\log\|A^{n+1}(x)\| - \frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|,$$

et donc

$$\limsup_n \frac{1}{n}|\sin(\alpha_n)| \ \leqslant -2\lambda_+(x).$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\beta = 2\lambda_+(x) - \varepsilon > 0$. On a pour tout n assez grand

$$|\sin(\alpha_n)| \ \leqslant \exp\left(-\beta n\right).$$

Ceci implique pour tous $m \geqslant n \geqslant 0$

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{R}P^1}(s_n(x), s_m(x)) \leqslant C\sum_{k=n}^{m-1} \mathrm{e}^{-\beta k} \leqslant \frac{C\mathrm{e}^{-\beta n}}{1-\mathrm{e}^{-\beta}},$$

ce qui conclut. Ici on a utilisé $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}P^1}(u,v) \leqslant C\sin(\mathrm{angle}(u,v))$.