

# SYSTÈMES DYNAMIQUES

## Feuille d'exercices 6

Dans toute la suite, si  $p$  est un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme  $f$  d'une variété  $M$ , on note  $W^u(f, p)$  et  $W^s(f, p)$  (resp.  $W_{\text{loc}}^u(f, p)$  et  $W_{\text{loc}}^s(f, p)$ ) les variétés instables et stables globales (resp. locales) de  $p$ .

### Exercice 1. Variété stable locale

Soit  $M$  une variété compacte,  $f : M \rightarrow M$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $p \in M$  un point fixe hyperbolique de  $f$ .

1. Rappeler le théorème de la variété stable (la version perturbation Lipschitz d'un isomorphisme hyperbolique).
2. Montrer que l'espace tangent à la variété stable de  $p$  est l'espace stable associé à  $df_p$ .
3. Montrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et des coordonnées locales  $\varphi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow V \subset \mathbf{R}^n$  centrées en  $p$  telles que, si  $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , on a (près de 0)

$$W_{\text{loc}}^s(\tilde{f}, 0) = \mathbf{R}^r \oplus \{0\}, \quad W_{\text{loc}}^u(\tilde{f}, 0) = \{0\} \oplus \mathbf{R}^{n-r}.$$

4. Montrer qu'il existe  $c > 0$  et  $\delta \in (0, 1)$  tels pour tous  $\tilde{x}_s, \tilde{y}_s \in \mathbf{R}^r \oplus \{0\}$  assez proche de 0,

$$\|\tilde{f}^n(\tilde{x}_s) - \tilde{f}^n(\tilde{y}_s)\| \leq c\delta^n \|\tilde{x}_s - \tilde{y}_s\|.$$

### Exercice 2. Intérieur de la variété stable

Soit  $M$  une variété compacte,  $f : M \rightarrow M$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $p \in M$  un point fixe hyperbolique de  $f$ . On suppose que la variété stable  $W^s(p)$  de  $p$  vérifie  $\dim W^s(p) < \dim M$ . Montrer que  $W^s(p)$  est d'intérieur vide.

### Exercice 3. Points périodiques hyperboliques

Soit  $M$  une variété compacte,  $f : M \rightarrow M$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. On suppose que tous les points périodiques de  $f$  sont hyperboliques. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\#\{x \in M, f^n(x) = x\} < \infty.$$

### Exercice 4. Calculs de variétés stables

Montrer, dans les cas suivants, que  $0 \in \mathbf{R}^n$  est un point fixe hyperbolique du système  $\dot{x} = f(x)$  et calculer ses variétés stables et instables.

1.  $n = 2$  et  $f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2 - 5\varepsilon x_1^2)$  où  $\varepsilon > 0$  est assez petit.
2.  $n = 3$  et  $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2 + x_1^2, x_3 + x_1^2)$ .

### Exercice 5. Variété stable de l'application du chat

On considère  $f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  l'application associée à la matrice hyperbolique  $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $[0] \in \mathbf{T}^2$  est un point fixe hyperbolique de  $f_L$  et que sa variété stable est dense dans  $\mathbf{T}^2$ .

**Exercice 6. *Le lemme de Morse***

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ . On suppose dans la suite que  $f(0) = 0$ ,  $df_0 = 0$  et que la Hessienne de  $f$  en 0,

$$\text{Hess}_f(0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

est non dégénérée. On note  $S_n(\mathbf{R})$  l'espace des matrices symétriques réelles.

1. Montrer que pour toute matrice  $S_0 \in S_n(\mathbf{R}) \cap \text{GL}(n, \mathbf{R})$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $S_0$  dans  $S_n(\mathbf{R})$  et une application lisse  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbf{R})$  telle que

$$S = \varphi(S)^\top S_0 \varphi(S), \quad S \in \mathcal{U}.$$

2. Montrer que

$$f(x) = x^\top Q(x)x, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

où  $x \mapsto Q(x)$  est une application lisse  $\mathbf{R}^n \rightarrow S_n(\mathbf{R})$ .

3. En déduire qu'il existe  $r \in \{0, \dots, n\}$  et des voisinages  $U, V$  de 0 dans  $\mathbf{R}^n$  et un difféomorphisme  $\nu : U \rightarrow V$  lisse tel que

$$(f \circ \nu)(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^r y_j^2 - \sum_{j=r+1}^n y_j^2.$$

4. On pose  $g = f \circ \nu$ . Montrer que 0 est un point fixe hyperbolique du système  $\dot{y} = \nabla g(y)$  et calculer ses variétés stables et instables locales.

**Exercice 7. *Linéarisation du pendule***

On considère la fonction  $H : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \cos(\theta)$  et on considère le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial \omega}(\theta, \omega), \\ \dot{\omega} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta, \omega). \end{aligned}$$

Montrer que toute trajectoire associée à des petites conditions initiales est l'image d'un cercle par un difféomorphisme local  $\varphi$  défini au voisinage de 0, tel que  $\varphi(0) = 0$  et  $d\varphi_0 = \text{id}$ .

Le système du pendule est-il localement conjugué au système linéarisé, donné par  $\dot{\theta} = \omega$  et  $\dot{\omega} = -\theta$  ?

**Exercice 8. *Linéarisation des séries formelles***

Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$  tel que  $\lambda^n \neq 1$  pour tout  $n \neq 0$  et  $f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ .

1. Montrer qu'il existe une série formelle  $h(z)$  telle que  $(h \circ f)(z) = \lambda h(z)$ .
2. On suppose que  $f$  a un rayon de convergence non nul. Montrer que si  $|\lambda|$  est assez grand alors  $h$  a un rayon de convergence non nul.