École Normale Supérieure
2020/2021
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 5

Exercice 1.

1. Soient deux flots continus $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ et $(\phi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ sur $\mathbf{R}^d$ qui sont topologiquement conjugués : il existe un homéomorphisme $h : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ tel que $h \circ \varphi_t = \phi_t \circ h$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Montrer que h transporte les points périodiques.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, l'orbite $\mathcal{O}_\varphi(x) = \{\varphi_t(x),\ t \in \mathbf{R}\}$ est fermée si et seulement si l'orbite $\mathcal{O}_\phi(h(x))$ (définie identiquement) est fermée.
   (c) Montrer que h transporte aussi les ensembles ω-limites.
2. Soient A, B les matrices définies par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer les flots associés à A et B.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique $t \in \mathbf{R}$ tel que $\|\mathrm{e}^{tA}x\| = 1$.
   (c) Construire une conjugaison entre les flots associés à A et B.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le flot associé à C n'est pas conjugué à celui associé à B. Montrer que e^C n'est pas conjuguée (au sens topologique) à e^B.

Exercice 2.

On note $\mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$) l'espace des endomorphismes hyperboliques (resp. endomorphismes inversibles et endomorphismes) de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$) est un ouvert dense de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$).

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $\|A - B\| \leq \delta$, alors A et B sont topologiquement conjuguées.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$ telle que la norme d'opérateur associée de A soit strictement inférieure à $\rho(A) + \varepsilon$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ un point fixe hyperbolique de f. Montrer que la période de tout point périodique assez proche de x (et différent de x) a une période strictement strictement plus grande que n.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $A \in \mathcal{H}(E)$. On note $E = E^s \oplus E^u$ la décomposition en espaces stable et instable de A, et π_s, π_u les projecteurs associés. Pour tout $\gamma > 0$ on définit les cônes
$$C_\gamma^s = \{x \in E : \|\pi_u(x)\| \leq \gamma \|\pi_s(x)\|\}, \quad C_\gamma^u = \{x \in E : \|\pi_s(x)\| \leq \gamma \|\pi_u(x)\|\}.$$

1. Montrer que

$$E^s = \bigcup_{\gamma>0} \bigcap_{n\geq 0} A^{-n}(C^s_\gamma), \quad E^u = \bigcup_{\gamma>0} \bigcap_{n\geq 0} A^{n}(C^u_\gamma).$$

2. Montrer que

$$E^s = \left\{ x \in \mathbf{R}^n,\ \sup_{n\geqslant 0} \|A^n x\| < +\infty \right\}, \quad E^u = \left\{ x \in \mathbf{R}^n,\ \sup_{n\geqslant 0} \|A^{-n} x\| < +\infty \right\}.$$

Exercice 7.

Soit $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\rho(x) = 0$ si $x \leq 0$ et

$$\rho(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x > 0.$$

1. Montrer que ρ est lisse.

On définit le champ de vecteur X sur $\mathbf{R}^2$ par

$$X(x,y) = \big(y + \rho(r^2)x, \ -x + \rho(r^2)y\big), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

2. Montrer que X est un champ de vecteurs lisse et calculer $\mathrm{d}X(0)$.

Soit K un compact de $\mathbf{R}_+$ contenant 0.

3. Construire une fonction $\rho_K : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ qui est lisse et telle que

$$\rho(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin K.$$

On définit le champ de vecteur X_K comme X en remplaąnt ρ par ρ_K.

4. Montrer que pour tous $\varepsilon, r > 0$, on peut choisir ρ_K tel que

$$\|X_K(x,y) - (y, -x)\| < \varepsilon, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \|(x,y)\| \leq r.$$

5. Montrer que si $r^2 \in K$, alors le cercle de rayon r centré en 0 est une orbite de X_K.
6. Soient $a < b$ tels que $a^2, b^2 \in K$ et tels que $]a^2, b^2[\cap K = \emptyset$. Que dire des trajectoires des points (x,y) tels que $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$?
7. Montrer que si K et K' ne sont pas homéomorphes, alors les flots de X_K et de $X_{K'}$ ne sont pas conjugués.