École Normale Supérieure
2020/2021

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 2

Exercice 1. *Familles d'applications transitives*

Soit X un espace topologique séparable, localement compact et sans points isolés. Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille d'applications continues et topologiquement transitives. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega_{f_i}(x) = X$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. *Transformations minimales*

Soit X un espace topologique séparé. On dira qu'une transformation continue $f : X \to X$ est *minimale* si pour tout fermé non vide $Y \subset X$ on a

$$f(Y) \subset Y \implies Y = X.$$

On dira qu'une partie fermée invariante $Y \subset X$ est *minimale* pour f si $f|_Y : Y \to Y$ est minimale.

1. Montrer que si X est compact, toute transformation minimale de X est topologiquement transitive.
2. En utilisant l'axiome du choix, montrer que si X est compact, alors toute transformation continue de X admet une partie fermée minimale non vide.
3. En déduire que si X est compact, alors toute application continue de X a un point positivement récurrent.

Exercice 3. *Ensemble non-errant*

Soit X un espace topologique séparé et $f : X \to X$ une transformation continue. On dira que $x \in X$ est *non errant* si pour tout voisinage U de x, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. On note $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants.

1. Montrer que si $x \in X$ est non errant et U un voisinage de x, alors pour tout $m \in \mathbf{N}$ il existe $n > m$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
2. Montrer que $\Omega(f)$ est un fermé invariant et qu'il contient tous les ensembles ω-limites (et α-limites si f est inversible) de tous les points.
3. Montrer que l'on a
$$\mathrm{Per}(f) \subset M(f) \subset R(f) \subset \Omega(f),$$
où $\mathrm{Per}(f)$ est l'ensemble des points périodiques de f, $M(f)$ est la fermeture de l'union de toutes les parties minimales pour f et $R(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points récurrents pour f.

Exercice 4. *Entropie d'un flot*

Soit (X, d) un espace métrique compact et $\Phi = \{\varphi^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ un flot continu sur X. On définit l'entropie $h_{\mathrm{top}}(\Phi)$ du flot Φ de la même manière que dans le cas discret, en considérant les distances

$$\mathrm{d}_T(x, y) = \max_{0\leq t\leq T-1} \mathrm{d}\left(\varphi^t(x), \varphi^t(y)\right).$$

Montrer que

$$h_{\mathrm{top}}(\Phi) = h_{\mathrm{top}}(\varphi^1).$$

Exercice 5. *Propriétés de l'entropie topologique*

Soient $(X, \mathrm{d}_X), (Y, \mathrm{d}_Y)$ des espaces métriques compacts et des transformations continues $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$.

1. Soit $\Lambda \subset X$ un fermé f-invariant. Montrer que $h_{\text{top}}(f|_\Lambda) \leq h_{\text{top}}(f)$.
2. Soient $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ des fermés f-invariants de X tels que $X = \bigcup_{j=1}^m \Lambda_j$. Montrer que $h_{\text{top}}(f) = \max_{1\leq j\leq m} h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_j})$.
3. Montrer que $h_{\text{top}}(f^k) = |k| h_{\text{top}}(f)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ ($k \in \mathbf{N}$ si f n'est pas inversible).
4. Montrer que si d'_X est une autre métrique sur X engendrant la même topologie que d_X, alors $h_{\text{top}}^{\mathrm{d}_X}(f) = h_{\text{top}}^{\mathrm{d}'_X}(f)$.
5. Montrer que $h_{\text{top}}(f\times g) = h_{\text{top}}(f)+h_{\text{top}}(g)$ où $f\times g : X\times Y \to X\times Y$ est donnée par $(f\times g)(x,y) = (f(x), f(y))$ et où $X \times Y$ est muni de la distance $\mathrm{d}_{X\times Y}\left((x,y),(x',y')\right) = \max\left(\mathrm{d}_X(x,x'), \mathrm{d}_Y(y,y')\right)$.

Exercice 6. *Entropie des transformations Lipschitziennes*

Soit (X, d) un espace métrique compact. On définit

$$\mathrm{bdim}(X) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log M(X,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$$

où $M(X,\varepsilon)$ est le nombre minimal de ε-boules (pour la distance d) qu'il faut pour recouvrir X.

1. Montrer que $\mathrm{bdim}\left([0,1]^n\right) = n$.

Soit $f : X \to X$ une application Lipschitzienne et

$$L(f) = \sup_{x\neq y} \frac{\mathrm{d}(f(x), f(y))}{\mathrm{d}(x,y)}$$

sa constante de Lipschitz.

2. Montrer que
$$h_{\text{top}}(f) \leq \mathrm{bdim}(X) \max(0, \log L(f)). \tag{1}$$
3. Donner un exemple d'application f telle que (**??**) soit une égalité.

Exercice 7. *Entropie algébrique*

Soit G un groupe finiment engendré et $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ un système de générateur. Pour $\gamma \in G$ on définit

$$L(\gamma,\Gamma) = \min\left\{ \sum_{j=1}^{ks} |i_j| \;\middle|\; \gamma = \gamma_1^{i_1}\cdots\gamma_s^{i_s}\gamma_1^{i_{s+1}}\cdots\gamma_s^{i_{2s}}\cdots\gamma_s^{i_{ks}},\ i_j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Si $F \in \mathrm{Hom}(G,G)$ est un morphisme de groupe on note

$$L_n(F,\Gamma) = \max_{1\leq i\leq s} L(F^n\gamma_i, \Gamma), \quad n \in \mathbf{N}.$$

1. Montrer que la limite
$$h(F,\Gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log L_n(F,\Gamma)$$
existe.
2. Montrer que si Γ' est un autre système de générateurs, alors $h(F,\Gamma) = h(F,\Gamma')$.

On définit l'*entropie algébrique* $h_{\text{alg}}(f)$ de f par $h_{\text{alg}}(F) = h(F,\Gamma)$ pour n'importe quel système de générateur Γ.

3. Montrer que $h_{\text{alg}}(I_{\gamma_0}F) = h_{\text{alg}}(F)$ pour tout $\gamma_0 \in G$ où $I_{\gamma_0} \in \mathrm{Hom}(G,G)$ est défini par $I_{\gamma_0}(\gamma) = \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0$.

Soit M une variété connexe compacte, $x_\star \in M$ et $G = \pi_1(M, x_\star)$. Soit α un chemin dans M joignant $x_\star$ à $f(x_\star)$. Soit f une transformation continue de M ; on définit $F_{x_\star,\alpha} \in \mathrm{Hom}(G,G)$ par

$$F_{x_\star,\alpha}\gamma = \alpha^{-1}(f\circ\gamma)\alpha.$$

4. On admet que G est finiment engendré. Montrer que $h_{\text{alg}}(F_{x_\star,\alpha})$ ne dépend pas des choix de $x_\star$ et de α.

Le nombre $h_{\text{alg}}(f)$ défini par $h_{\text{alg}}(f) = h_{\text{alg}}(F_{x_\star,\alpha})$ pour n'importe quel choix de $x_\star, \alpha$ est appelé *entropie algébrique* de f. On peut montrer que

$$h_{\text{alg}}(f) \leq h_{\text{top}}(f).$$