

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 11

Exercice 1. *Décroissance surexponentielle des corrélations pour les applications dilatantes du cercle*

Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ on note E_m la multiplication par m sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} .

1. Montrer que E_m est fortement mélangeante pour la mesure de Haar μ sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} .
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$.
 - (a) Montrer que pour tout $N > 0$, il existe $C > 0$ telle que

$$\left| \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi(\theta) e^{-2i\pi k\theta} d\mu(\theta) \right| \leq \frac{C}{|k|^N}, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

- (b) En déduire que pour tout $r > 0$, il existe $C > 0$ telle que

$$\left| \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi(\psi \circ E_m^j) d\mu - \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi d\mu \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi d\mu \right| \leq C e^{-rj}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Exercice 2. *Presque tous les nombres réels sont normaux*

On dit qu'un nombre $x \in [0, 1)$ est normal si pour tout $m \geq 2$, son développement en base m

$$x = 0, a_1 a_2 \dots,$$

(qui est unique si on demande que pour tout k , il existe $k' \geq k$ tel que $a_{k'} \neq m-1$) satisfait

$$\frac{1}{n} \# \left\{ k \in \{1, \dots, n\}, a_k = j \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Montrer que presque tout $x \in [0, 1)$ est normal pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 3. *Équidistribution des rotations irrationnelles du cercle*

Soit $\alpha \in \mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ et $R_\alpha : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ donnée par $R_\alpha(x) = x + \alpha$. On suppose que la famille $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est linéairement indépendante sur \mathbf{Q} , où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

1. Montrer que R_α est ergodique pour la mesure de Haar sur \mathbf{T}^d . Est-elle mélangeante ?
2. Soit $C \subset \mathbf{T}^d$ un produit d'intervalles. Montrer que pour μ presque tout $x \in \mathbf{T}^d$,

$$\frac{1}{n} \# \left\{ k \in \{1, \dots, n\}, x + k\alpha \in C \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(C). \quad (1)$$

3. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{T}^d, \mathbf{C})$, la suite de fonctions $S_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ R_\alpha^k$ converge uniformément vers $\int_{\mathbf{T}^d} \varphi d\mu$.
4. Montrer que la convergence (??) a lieu pour tout $x \in \mathbf{T}^d$.
5. On considère la suite des premiers chiffres des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 1... Montrer que la fréquence d'apparition du chiffre 7 dans cette suite est à peu près 5.8%.

Exercice 4. *Mélange pour une famille dense de L^2*

Soit (X, μ) un espace de probabilités et $f : X \rightarrow X$ une transformation mesurable. On suppose qu'il existe une base $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de $L^2(X, \mu)$ telle que

$$\lim_n \int_X e_k (e_\ell \circ f^n) d\mu = \int_X e_k d\mu \int_X e_\ell d\mu, \quad k, \ell \in \mathbf{Z}.$$

Montrer que f est fortement mélangeante.

Exercice 5. *Automorphismes ergodiques du tore*

Soit $A \in \text{GL}(d, \mathbf{Z})$ et $f_A : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ l'automorphisme de \mathbf{T}^d associé. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) La transformation f_A est ergodique pour la mesure de Haar.
- (ii) La transformation f_A est mélangeante pour la mesure de Haar.
- (iii) Aucune valeur propre de A n'est racine de l'unité.

Exercice 6. *Moyenne temporelle des temps de retour*

Soit (X, μ) un espace de probabilités et $f : X \rightarrow X$ une transformation ergodique pour μ . Soit $A \subset X$ un ensemble mesurable de mesure non nulle, $\tau : A \rightarrow \mathbf{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ le temps de premier retour dans A , et $g : x \mapsto f^{\tau(x)}(x)$ l'application de premier retour associée (définie presque partout sur A).

1. Montrer que $\int_A \tau d\mu = 1$.
2. En déduire que pour μ presque tout x de A ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau(g^k(x)) = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Exercice 7. *Un critère pour le mélange faible*

On dira qu'un ensemble $E \subset \mathbf{N}$ est de densité nulle si

$$\lim_n \frac{1}{n} \#(\{1, \dots, n\} \cap E) = 0.$$

On dira qu'une suite strictement croissante d'entiers (n_j) est de densité 1 si $\mathbb{C}\{n_j, j \in \mathbf{N}\}$ est de densité nulle.

1. Soit (a_n) une suite de nombre complexes bornés. Montrer que $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0$ si et seulement si, il existe un ensemble de densité nulle E tel que $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \notin E}} a_n = 0$.

Soit f une transformation mesurable d'un espace probabilisé (X, \mathcal{A}, μ) . On suppose que (\mathcal{A}, μ) admet une base dénombrable. On dit que f est faiblement mélangeante si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(f^{-k}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

2. Montrer que f est faiblement mélangeante si et seulement si il existe une suite d'entiers (n_j) de densité 1 telle que

$$\lim_j \mu(f^{-n_j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B), \quad A, B \in \mathcal{A},$$

ou encore si et seulement si

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mu(f^{-k}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right)^2 = 0, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$