

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 4

Exercice 1. *Exposants de Lyapunov pour les systèmes linéaires*

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n . Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul, on note

$$\lambda(x_0, A) = \limsup_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\|.$$

Le nombre $\lambda(x_0, A)$ est appelé *exposant de Lyapunov* de la trajectoire $t \mapsto e^{tA} x_0$.

1. Montrer que $\lambda(x_0, A)$ est fini pour tout $x_0 \neq 0$ et ne dépend pas de la norme $\|\cdot\|$ choisie.
2. Montrer que si $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors pour tout $y_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\lambda(y_0, B) = \lambda(Py_0, A).$$

On note $r_1 > \dots > r_\ell$ les parties réelles ordonnées des valeurs propres de A , et

$$L_j = \bigoplus C_{\lambda, \bar{\lambda}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

où la somme directe porte sur les $\lambda \in \text{sp}(A)$ tels que $\Re(\lambda) = r_j$ et $\Im(\lambda) \geq 0$, et où

$$C_{\lambda, \bar{\lambda}} = \left\{ u \in \mathbf{R}^n : \exists N \in \mathbf{N}, (A - \lambda)^N (A - \bar{\lambda})^N u = 0 \right\}$$

est l'espace propre généralisé réel associé à λ et $\bar{\lambda}$ (si $\lambda \in \mathbf{R}$, $C_{\lambda, \bar{\lambda}} = C_\lambda$ est l'espace propre généralisé associé à λ). L'espace L_j est appelé espace de Lyapunov associé à r_j .

3. On suppose que $x_0 \in L(r_j)$ pour un certain $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\| = r_j.$$

On note pour tout $j \in \{1, \dots, \ell\}$

$$V_j = L_\ell \oplus \dots \oplus L_j, \quad W_j = L_j \oplus \dots \oplus L_1.$$

4. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul, $\lambda(x_0, A) \in \{r_1, \dots, r_\ell\}$ et que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\| &= r_j \text{ si, et seulement si, } x_0 \in V_j \setminus V_{j+1}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\| &= r_j \text{ si, et seulement si, } x_0 \in W_j \setminus W_{j-1}. \end{aligned}$$

Pour toute matrice M on note $\text{Lyap}(M) = \Re(\text{sp}(M))$ l'ensemble de ses exposants de Lyapunov, et $L(r, M)$ l'espace de Lyapunov associé à $r \in \text{Lyap}(M)$. Soient $a < b$ des réels. On note $U_{a,b}$ l'ensemble des matrices telles que $\{a, b\} \cap \text{Lyap}(M) = \emptyset$ et pour tout $M \in U_{a,b}$ on note

$$L(a, b, M) = \bigoplus_{a < r < b} L(r, M).$$

5. Montrer que $U_{a,b}$ est ouvert et que l'application $M \mapsto \dim L(a, b, M)$ est localement constante sur $U_{a,b}$.

Exercice 2. Stabilité de 0 pour les systèmes linéaires

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n . Alors 0 est un point fixe de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$. On dira qu'il est

- stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \delta$, on a

$$\|e^{tA}x\| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0;$$

- asymptotiquement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \delta$, on a $e^{tA}x \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$;
- exponentiellement stable s'il existe $C \geq 1$ et $\beta, \eta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \eta$, on a

$$\|e^{tA}x\| \leq C\|x\|e^{-t\beta}, \quad t \geq 0.$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) 0 est un point fixe asymptotiquement stable ;
- (ii) 0 est un point fixe exponentiellement stable ;
- (iii) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.
- (iv) Il existe une norme adaptée pour A , c'est à dire une norme $\|\cdot\|_A$ sur \mathbf{R}^n telle que pour un certain $\beta > 0$,

$$\|e^{tA}x\|_A \leq e^{-\beta t}\|x\|_A, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Une matrice vérifiant les conditions précédentes sera appelée *contraction linéaire*.

2. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative ou nulle. Montrer que 0 est un point fixe stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A de parties réelles nulles sont semi-simples (i.e. les blocs de Jordan complexes sont de taille 1).

Exercice 3. Systèmes linéaires topologiquement conjugués

On se donne A et B deux contractions linéaires et $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_B$ des normes adaptées à A et B (cf. exercice précédent). On note

$$S_A = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\|_A = 1\}, \quad S_B = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\|_B = 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe une application continue $\tau : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$e^{\tau(x)A}x \in S_A, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

2. Soit φ un homéomorphisme $S_A \rightarrow S_B$ et $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'application définie par $\Phi(0) = 0$ et

$$\Phi(x) = e^{-\tau(x)B}\varphi\left(e^{\tau(x)A}x\right), \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Montrer que Φ est un homéomorphisme de \mathbf{R}^n dans lui-même et qu'on a

$$\Phi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \Phi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dans la suite on ne suppose plus que A et B sont des contractions mais qu'elles induisent des flots hyperboliques, i.e. toutes les valeurs propres de A et de B ont une partie réelle non nulle. On suppose qu'il existe une famille continue de matrices A_t , $t \in [0, 1]$ telle que $A_0 = A$, $A_1 = B$ et

$$0 \notin \Re(\text{sp}(A_t)), \quad t \in [0, 1].$$

3. En utilisant la question 1.5., montrer que les flots induits par A et B sont conjugués.

Exercice 4. Systèmes linéaires avec second membre

Soit A une matrice carrée d'ordre n , et $z : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t). \tag{1}$$

2. On suppose que A est une contraction linéaire et que $z(t) \rightarrow z_\infty \in \mathbf{R}^n$ quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que toute solution de (??) converge en grand temps vers une limite à déterminer.