

# SYSTÈMES DYNAMIQUES

## Feuille d'exercices 7

### Exercice 1. Normes adaptées

On suppose que pour des constantes  $C > 0$  et  $\lambda \in (0, 1)$  on a pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|df_x v\| &\leq C\lambda^n \|v\|, & v \in E^s(x), \\ \|df_x^{-n} v\| &\leq C\lambda^n \|v\|, & v \in E^u(x). \end{aligned}$$

On pose pour tout  $x \in M$  et tout  $v \in E^s(x)$

$$\|v\|_{s,x} = \sum_{k=0}^N \|d(f^k)_x v\| \mu^k,$$

où  $1 < \mu < \lambda^{-1}$  et  $N \geq 1$ . Alors

$$\begin{aligned} \|(df)_x v\|_{s,f(x)} &= \mu^{-1} \sum_{k=1}^{N+1} \|(df^k)_x v\| \mu^k \\ &= \mu^{-1} \|v\|_{s,x} + \mu^{-1} (\mu^N \|(df^{N+1})_x v\| - \|v\|). \end{aligned}$$

Or  $\|(df^{N+1})_x v\| \leq C\lambda^{N+1} \|v\|$ , donc si  $N$  est assez grand de sorte que  $\mu^N \lambda^{N+1} C \leq 1$ , on obtient

$$\|(df)_x v\|_{s,f(x)} \leq \mu^{-1} \|v\|_{s,x}, \quad x \in M, \quad v \in E^s(x).$$

On définit de même une norme  $\|\cdot\|_{u,x}$  sur  $E^u(x)$  et on pose

$$\|v\|'_x = \|\pi_s(x)v\|_{s,x} + \|\pi_u(x)v\|_{u,x}, \quad x \in M, \quad v \in T_x M,$$

où  $\pi_{s/u}(x)$  est la projection  $T_x M \rightarrow E^{s/u}(x)$ . Puisque  $\pi_s(x)$  et  $\pi_u(x)$  dépendent continument de  $x$  (car c'est le cas pour  $E^s(x)$  et  $E^u(x)$ ), la norme  $\|\cdot\|'$  est continue. On approxime la norme  $\|\cdot\|'$  par une norme lisse  $\|\cdot\|''$  telle que

$$(1 - \varepsilon) \|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq (1 + \varepsilon) \|\cdot\|''.$$

On a alors, si  $x \in M$  et  $v \in E^s(x)$ , et  $\varepsilon > 0$  est assez petit,

$$\|(df)_x v\|'' \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \|(df)_x v\|' \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \mu^{-1} \|v\|' \leq \underbrace{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \mu^{-1}}_{\tilde{\lambda} < 1} \|v\|'',$$

ce qui conclut.

### Exercice 2. Points périodiques des difféomorphismes d'Anosov

Soit  $M$  une variété compacte connexe et  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme d'Anosov.

1. Soit  $x$  tel que  $f^n(x) = x$  ; on pose  $g = f^n$ . Alors  $A = (dg)_x : T_x M \rightarrow T_x M$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $\lambda \in \text{sp}((dg)_x)$  avec  $|\lambda| = 1$ .

Alors on sait qu'il existe  $v \in T_x M$  et  $C > 0$  tel que  $C^{-1} \leq \|A^k v\| \leq C$  pour tout  $k$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme donnée dans la définition du difféomorphisme d'Anosov.

Alors on a (pour différentes constantes) aussi  $C^{-1} \leq \|\pi_s(x)A^k v\| + \|\pi_u(x)A^k v\| \leq C$  pour tout  $k$ .

Or  $A$  préserve  $E^s(x)$  et  $E^u(x)$  donc  $\pi_s(x)$  et  $\pi_u(x)$  commutent avec  $A$  de sorte que si  $v_s = \pi_s(x)v \in E^s(x)$  et  $v_u = \pi_u(x)v \in E^u(x)$  on a  $\pi_{s/u}(x)A^k v = A^k v_{s/u}$ .

Puisque  $v \neq 0$ , on a (puisque  $A$  est hyperbolique)

$$\limsup_{|k| \rightarrow +\infty} (\|A^k v_s\| + \|A^k v_u\|) = +\infty,$$

ce qui est absurde.

2. (a) Il suffit de remplacer  $x_k$  et  $y_k$  par  $f^{n(k)}(x_k)$  et  $f^{n(k)}(y_k)$  où

$$d(f^{n(k)}(x_k), f^{n(k)}(y_k)) \geq \frac{1}{2} \sup_{n \in \mathbf{Z}} d(f^n(x_k), f^n(y_k)).$$

(b) C'est immédiat par compacité de  $M$ .

(c) C'est immédiat par compacité de  $M$ .

(d) Soient  $U_+$  et  $U_-$  des cartes autour de  $z_+$  et  $z_-$ . On suppose que  $j$  est assez grand de sorte que  $f^{\pm n_j^\pm}(z)$  soit contenu dans  $U_\pm$ .

Alors pour tout  $k$  assez grand,  $f^{\pm n_j^\pm}(x_k)$  et  $f^{\pm n_j^\pm}(y_k)$  sont contenus dans  $U_\pm$ , et (ici  $n_j = n_j^+$  ou  $n_j^-$ )

$$f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k) = (df^{\pm n_j^\pm})_{x_k}(y_k - x_k) + o_j(\|x_k - y_k\|).$$

Ainsi,

$$\frac{f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k)}{\|x_k - y_k\|} = (df^{\pm n_j^\pm})_{x_k} \left( \frac{y_k - x_k}{\|y_k - x_k\|} \right) + o_j(1). \quad (*)$$

On a  $C > 0$  telle que pour tout  $k$

$$\left\| \frac{f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k)}{\|x_k - y_k\|} \right\| \leq \frac{Cd(f^{\pm n_j^\pm}(x_k), f^{\pm n_j^\pm}(y_k))}{C^{-1}d(x_k, y_k)} \leq 2C,$$

par (a), puisque pour tous  $x', y'$  dans un support de carte, on a  $C^{-1}d(x', y') \leq \|x' - y'\| \leq Cd(x', y')$  pour un certain  $C$  (exercice).

On obtient finalement, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  dans (\*),

$$\|(df^{\pm n_j^\pm})_z v\| \leq 2C, \quad j \gg 1.$$

Ceci est impossible car pour tout  $(x, v) \in TM$  avec  $v \neq 0$  on a

$$\liminf_{|n| \rightarrow +\infty} \|(df^n)_x v\| = +\infty,$$

puisque  $f$  est d'Anosov.

3. C'est une application directe de l'**Exercice 2** du TD 3, qui donne

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(1 + p_n(f)) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Ceci implique que si  $\varepsilon > 0$ , on a que pour tout  $n > n_0$  assez grand

$$p_n(f) \leq \exp((n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f)).$$

Si  $C = \sup_{n \leq n_0} p_n(f) \exp(-(n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f))$ , on obtient

$$p_n(f) \leq C \exp((n + \varepsilon)h_{\text{top}}(f)), \quad n \geq 1.$$

### Exercice 3. Hyperbolicité et transversalité

On écrit

$$T_{(p,p)}\text{Gr}(f) = \{((df)_p v, v), v \in T_p M\} \subset T_{(p,p)}(M \times M),$$

et

$$T_{(p,p)}\Delta(M) = \{(v, v), v \in T_p M\}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de  $T_{(p,p)}(M \times M)$  de dimension  $\dim(M)$ . En particulier on a

$$\begin{aligned} \Delta(M) \cap_{(p,p)} \text{Gr}(f) &\iff T_{(p,p)}\text{Gr}(f) \cap T_{(p,p)}\Delta(M) = \{0\} \\ &\iff \forall v \in T_p M, \quad (df_p - \text{id})v = 0 \implies v = 0 \\ &\iff 1 \notin \text{sp}(df_p). \end{aligned}$$

### Exercice 4. Pistage et stabilité structurelle

Soit  $f : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  un difféomorphisme d'Anosov.

1. Soit  $p = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . On écrit

$$F(p + (k, \ell)) = F(p) + (r_p(k, \ell), s_p(k, \ell)), \quad (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2,$$

où  $r_p, s_p : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$ .

La fonction  $p \mapsto F(p + (k, \ell)) - F(p)$  est continue, et à valeurs dans  $\mathbf{Z}^2$ , donc  $r_p(k, \ell)$  et  $s_p(k, \ell)$  ne dépendent pas de  $p$  ; on les note  $r(k, \ell)$  et  $s(k, \ell)$ .

On montre que  $r$  et  $s$  sont additifs. D'un côté on a

$$F(p + (k, \ell) + (k', \ell')) = F(p) + (r(k) + r(k'), s(\ell) + s(\ell')),$$

et de l'autre

$$F(p + (k, \ell) + (k', \ell')) = F(p + (k + k', \ell + \ell')) = F(p) + (r(k + k'), s(\ell + \ell')),$$

de sorte que

$$r(k + k') = r(k) + r(k'), \quad s(\ell + \ell') = s(\ell) + s(\ell'), \quad k, k', \ell, \ell' \in \mathbf{Z}.$$

On note alors  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  où  $(a, c) = (r, s)(1, 0)$  et  $(b, d) = (r, s)(0, 1)$ . Alors  $A$  convient.

On note  $f_\star = f_A : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ .

2. Montrons d'abord que  $F$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $G : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  qui relève  $f^{-1}$ . Alors on vérifie que  $(x, y) \mapsto (G \circ F)(x, y) - (x, y)$  est à valeurs dans  $\mathbf{Z}^2$ , donc constante, disons égale à  $(k, \ell)$ .

Si  $\tilde{G} = G - (k, \ell)$  on a donc  $\tilde{G} \circ F = \text{Id}_{\mathbf{R}^2}$  et donc  $F$  est un difféomorphisme d'inverse  $\tilde{G}$ .

Notons  $F^{-1}(p + (k, \ell)) = F^{-1}(p) + B(k, \ell)$  où  $B \in M_2(\mathbf{Z})$ . Alors

$$p + (k, \ell) = p + AB(k, \ell), \quad (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2.$$

Ceci montre que  $A$  est inversible d'inverse  $B$  (par densité de  $\mathbf{Q}^2$  dans  $\mathbf{R}^2$  par exemple). Ainsi  $|\det(A)| = 1$ .

3. L'homotopie  $F_t = tF + (1 - t)A$  passe au quotient.  
4. On pose  $p_n = a_nv + b_nw$  où  $Av = \lambda v$  et  $Aw = \lambda^{-1}w$  où  $|\lambda| > 1$ .

Alors  $|\lambda a_n - a_{n+1}| \leq r$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , et donc

$$\begin{aligned} |a_n - \lambda^{-k} a_{n+k}| &\leq |a_n - \lambda^{-1} a_{n+1} + \dots + \lambda^{-(k-1)} a_{n+k-1} - \lambda^{-k} a_{n+k}| \\ &\leq r(1 + |\lambda|^{-1} + \dots + |\lambda|^{-(k-1)}) \\ &\leq \frac{r|\lambda|}{|\lambda| - 1}. \end{aligned}$$

On obtient pour tout  $k \in \mathbf{N}$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,

$$|\lambda^{-n} a_n - \lambda^{-(n+k)} a_{n+k}| \leq \frac{|\lambda|^{-n+1} r}{|\lambda| - 1}, \quad (*)$$

et donc  $\lambda^{-n} a_n \rightarrow a$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour un  $a \in \mathbf{R}$ .

De même on a  $\lambda^n b_n \rightarrow b$  quand  $n \rightarrow -\infty$  pour un  $b \in \mathbf{R}$ .

On pose  $q = av + bw$ . Alors  $A^n q = \lambda^n av + \lambda^{-n} bw$ .

Par (\*) (en faisant  $k \rightarrow +\infty$ ) on a

$$|\lambda^n a - a_n| \leq \frac{|\lambda| r}{|\lambda| - 1}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

et la même inégalité est vraie pour  $|\lambda^{-n} b - b_n|$ .

On conclut que  $\|A^n q - p_n\| \leq C \frac{|\lambda| r}{|\lambda| - 1} = \delta(r)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

L'unicité est claire puisque  $\|A^n(q - q')\| \leq 2\delta$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  implique  $y = y'$ .

5. Soit  $p \in \mathbf{R}^2$ . On note  $G_p : x \mapsto g(-x) - p$ .

Alors  $\|G_p(x)\| \leq \|g\|_\infty + \|p\|$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^2$ . En particulier on a

$$G(\overline{B}(0, \delta + \|p\|)) \subset \overline{B}(0, \delta + \|p\|).$$

Le théorème de Brouwer donne alors  $z$  tel que  $G_p(z) = z$ , ce qui équivaut à  $g(-z) - z = p$ , i.e.  $(\text{Id} + g)(-z) = p$ .

6. Soit  $p \in \mathbf{R}^2$ . On note  $p_n = F^n(p)$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  on a

$$\|Ap_n - p_{n+1}\| = \|AF^n(p) - F^{n+1}(p)\| \leq \|F - A\|_\infty.$$

Puisque  $F(p' + (k, \ell)) = F(p') + A(k, \ell)$  pour tout  $p'$  et tous  $k, \ell$  on a  $r = \|F - A\|_\infty < \infty$ .

Par la question 4. il existe un unique  $H(p) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $\|A^n H(p) - F^n(p)\| \leq \delta(r)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

Ceci s'écrit aussi  $\|A^{n-1}(AH(p)) - F^{n-1}(F(p))\| \leq \delta(r)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et donc  $AH(p) = H(F(p))$  par unicité.

On vérifie aisément que  $H : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  passe au quotient en une application  $h : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ , qui vérifie la propriété de semi-conjugaison demandée.

Montrons que  $H$  est continue. Soit  $(p_k)$  une suite qui tend vers  $p$ . Alors la suite  $(H(p_k))$  est bornée car  $\|H(p) - p\| \leq \delta(r)$ . Soit  $q$  une valeur d'adhérence de cette suite.

Soit  $n \in \mathbf{Z}$  ; on a  $\|A^n H(p_k) - F^n(p_k)\| \leq \delta(r)$  et donc en faisant  $k \rightarrow +\infty$  on obtient  $\|A^n q - F^n(p)\| \leq \delta(r)$ .

Ceci implique que  $q = H(p)$  par unicité du pistage. Ainsi  $H(p)$  est l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(H(p_k))$  et donc  $H(p_k) \rightarrow H(p)$ .

$H$  est donc continue et  $H - \text{Id}$  est bornée, on peut donc appliquer la question 5. pour obtenir que  $H = \text{Id} + (H - \text{Id})$  est surjective.

7. Soit  $A \in M_2(\mathbf{Z})$  de déterminant  $\pm 1$ . On note  $f_A : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  l'automorphisme associé. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $f : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  tel que  $\|f - f_A\|_\infty < \varepsilon$ . Alors il existe un relevé  $F$  de  $f$  tel que  $\|A - F\|_\infty < \varepsilon$ .

Par ce qui précède, il existe une semiconjugaison  $h : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  telle que  $h \circ f = f_A \circ h$ , qui vérifie de plus que  $\|h - \text{Id}\|_\infty < \delta(\varepsilon)$ .

Montrons que  $h$  est injective : si  $p, p' \in \mathbf{T}^2$  vérifient  $h(p) = h(p')$  alors  $h(f^n(p)) = h(f^n(p'))$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . En particulier

$$d(f^n(p), f^n(p')) < 2\delta(\varepsilon), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

**Lemme 1.** Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme d'Anosov. Alors il existe  $\delta > 0$  tel que tout difféomorphisme assez proche de  $f$  en norme  $C^1$  est expansif de constante d'expansivité  $\delta$ .

En admettant le lemme, on obtient que  $p = p'$  si  $\delta(\varepsilon) < \delta$ , ce qui sera vérifié si  $\varepsilon > 0$  est assez petit. Ainsi  $h$  est injective, et donc continue bijective. Par compacité de  $\mathbf{T}^2$ , c'est un homéomorphisme.

*Preuve du lemme.* On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite de fonctions  $(f_k)$  qui tend vers  $f$  dans  $C^1(M, M)$ , et des points  $x_k \neq y_k$  tels que  $d(f_k^n(x_k), f_k^n(y_k)) < 1/k$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et tout  $k$ .

On peut alors adapter la démonstration faite à la question 2. de l'Exercice 2 pour obtenir une contradiction, en écrivant notamment

$$\begin{aligned} f_k^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f_k^{\pm n_j^\pm}(x_k) &= \int_0^1 \left( df_k^{\pm n_j^\pm} \right)_{(1-t)x_k + ty_k} (y_k - x_k) dt \\ &\quad + \int_0^1 \left( df_k^{\pm n_j^\pm} - df_k^{\pm n_j^\pm} \right)_{(1-t)x_k + ty_k} (y_k - x_k) dt. \end{aligned}$$

□

## Exercice 5. Gradients de fonctions de Morse

1. On considère une fonction  $f$  définie au voisinage de  $0 \in \mathbf{R}^n$  telle que  $df_0 = 0$ , et  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  un difféomorphisme local au voisinage de 0, tel que  $\varphi(0) = 0$ .

On calcule

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_\ell (f \circ \varphi) &= \sum_i \partial_k \left( [(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_\ell \varphi^i \right) \\ &= \sum_i [(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_k \partial_\ell \varphi^i + \sum_{j,i} [(\partial_i \partial_j f) \circ \varphi] (\partial_k \varphi^i) (\partial_\ell \varphi^j).\end{aligned}$$

Puisque  $df_0 = 0$  on obtient

$$\text{Hess}_{f \circ \varphi}(0) = (d\varphi_0)^\top \text{Hess}_f(0) (d\varphi_0),$$

ce qui conclut.

2. On remarque qu'une fonction de Morse a un nombre fini de points critiques, car ils sont isolés.

De plus la condition " $\text{Hess}_f(0)$  est non dégénérée" est ouverte, ce qui conclut.

3. On suppose  $\varphi_\tau(x) = x$  avec  $\tau > 0$ . Calculons

$$\begin{aligned}\partial_t f(\varphi_t(x)) &= df_{\varphi_t(x)}(X(\varphi_t(x))) \\ &= -df_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x))) \\ &= -g_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x)), \nabla^g f(\varphi_t(x))) \leq 0.\end{aligned}$$

Puisque  $f(\varphi_\tau(x)) = f(x)$  avec  $\tau > 0$  on obtient que pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $\nabla^g f(\varphi_t(x)) = 0$ .

4. C'est la même démonstration :  $f$  décroît strictement le long des lignes de flots de  $X$  qui ne sont pas réduites à un point. Ainsi si  $\nabla_g f(x) \neq 0$ , on a que  $f(\varphi_t(x)) < f(x) - \varepsilon$  pour tout  $t > \delta$  (pour certains  $\delta, \varepsilon > 0$ ) et donc  $\varphi_t(x)$  ne peut pas repasser près de  $x$  pour  $t > \delta$ .
5. Soit  $x \in M$ , et  $p$  une valeur d'adhérence de  $(\varphi_t(x))_{t \geq 0}$ . Alors de même que précédemment, on a  $\nabla^g f(p) = 0$ .

Comme  $t \mapsto f(\varphi_t(x))$  décroît, on a  $f(\varphi_t(x)) \geq f(p)$  pour tout  $t$ .

Par hypothèse, des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  autour de  $p$  telles que

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^r (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^n (x^i)^2,$$

et

$$-\nabla^g f = 2(-x^1, \dots, -x^r, x^{r+1}, \dots, x^n).$$

Ainsi, le fait que  $f(\varphi_t(x)) \geq f(p)$  pour tout  $t$  implique que si  $\varphi_t(x)$  est assez proche de  $p$ , on a nécessairement  $\varphi_t(x) \in \{x^{r+1} = \dots = x^n = 0\}$ , car sinon on aurait  $f(\varphi_{t'}(x)) < f(p)$  pour un  $t' > t$ .

Ceci montre que  $\varphi_t(x) \rightarrow p$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . De même on montre que  $\varphi_{-t}(x) \rightarrow q$  quand  $t \rightarrow +\infty$  avec  $q \in \text{Crit}(f)$ .