École Normale Supérieure
2020/2021

chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
DM n°1

Pour le 06/10/20

Soit $G_n = \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ que l'on munit de la topologie naturelle, et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Une action unitaire ρ de G_n sur $\mathcal{H}$ est un morphisme $\rho : G_n \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$, où $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ désigne l'espace des isométries de $\mathcal{H}$. On dira qu'une telle action est fortement continue si l'application

$$\begin{aligned} G_n \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (g, v) &\longmapsto \rho(g) \cdot v \end{aligned}$$

est continue.

Préliminaires

On note $K = \mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$ et

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_N \end{pmatrix},\ t_1 \geq \ldots \geq t_n > 0,\ \prod_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $g \in G_n$, il existe $k_1, k_2 \in K$ et $a \in A_+$ tels que $g = k_1 a k_2$.

Pour tous $1 \leq i, j \leq n$ on note $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R})$ la matrice dont les coefficients sont nuls sauf le coefficient en place (i, j) qui vaut 1, et

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \{\mathrm{Id} + \tau E_{ij},\ \tau \in \mathbf{R}\}, \\ A_{ij} &= \{\mathrm{Id} + (t-1)E_{ii} + (t^{-1} - 1)E_{jj},\ t > 0\}, \\ S_{ij} &= \{\mathrm{Id} + (a-1)E_{ii} + bE_{ij} + cE_{ji} + (d-1)E_{jj},\ ad - bc = 1\}. \end{aligned}$$

2. Montrer que le sous-groupe S_{ij} de G_n est isomorphe à G_2.

3. Montrer que G_n est engendré par les sous-groupes A_{ij} et U_{ij} avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

Vecteurs G_2-invariants

Pour tout $t > 0$ et $\tau \in \mathbf{R}$ on note

$$a_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad u_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $(\mathcal{H}, \rho)$ une représentation unitaire et fortement continue de G_2. Pour tout $v \in \mathcal{H}$, on note $G_v = \{g \in G_2,\ \rho(g)v = v\}$.

4. Montrer que G_v est un sous-groupe fermé de G et que pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$g \in G_v \iff \langle \rho(g)v, v\rangle = \|v\|^2.$$

5. Soit $g \in G_2$ tel qu'il existe des suites (g_m) dans G et $(s_m), (s'_m)$ dans G_v avec

$$\lim_m g_m = g, \quad \lim_m s_m g_m s'_m = 1.$$

Montrer que $g \in G_v$.

Pour $g \in G_2$, on dira que $v \in \mathcal{H}$ est g-invariant si $\rho(g)v = v$.

6. Soit $v \in \mathcal{H}$ et $t \neq 1$. Montrer que si v est a_t-invariant, alors pour tout $\tau \in \mathbf{R}$, v est u_τ-invariant et s_τ-invariant.

7. Soit $v \in \mathcal{H}$ et $\tau \neq 0$. Montrer que si v est u_τ-invariant ou s_τ-invariant, alors pour tout $t > 0$, v est a_t-invariant.

8. En déduire que si $v \in \mathcal{H}$ est invariant par a_t pour un $t \neq 1$ (ou par u_τ, ou par s_τ, pour $\tau \neq 0$), alors $G_v = G$.

Théorème de Howe–Moore

Soit $\rho : G_n \to \mathcal{H}$ une représentation unitaire fortement continue telle que

$$\{v \in \mathcal{H},\ \ \forall g \in G_n,\ \rho(g)v = v\} = \{0\}.$$

Le but est de montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\|g\| \to \infty} \langle \rho(g)u, v\rangle = 0.$$

Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, $v, w \in \mathcal{H}$ et une suite (g_m) de G_n tels que $\|g_m\| \to \infty$ et

$$|\langle \rho(g_m)v, w\rangle| > \varepsilon, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on se donne $k_m, k'_m \in K$ et $a_m \in A_+$ tels que $g_m = k_m a_m k'_m$.

On dit qu'une suite (v_m) de $\mathcal{H}$ converge faiblement vers $v \in \mathcal{H}$, ce qu'on notera $v_m \rightharpoonup v$, si pour tout $w \in \mathcal{H}$ on a quand $m \to \infty$,

$$\langle v_m, w\rangle \to \langle v, w\rangle.$$

9. Montrer que toute suite bornée de $\mathcal{H}$ admet une sous-suite qui converge faiblement.

10. Montrer que quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $v_0 \in \mathcal{H}$ et $k, k' \in K$ tels que, quand $m \to \infty$,

(i) $k_m \to k$ et $k'_m \to k'$,

(ii) $\rho(a_m k')v \rightharpoonup v_0$,

(iii) $\rho(g_m)v \rightharpoonup \rho(k)v_0$.

11. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k < j \leq n$, on a

$$\rho(g)v_0 = v_0, \quad g \in U_{ij}.$$

Indication : on pourra montrer l'existence d'un $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *tel que* $\lim_m t_m^{(k)}/t_m^{(k+1)} = \infty$ *où* $t_m^{(j)}$ *désigne le coefficient en place* (j,j) *de la matrice* a_m.

12. Conclure.

Application au mélange

Pour tout borélien $A \subset G_n$, on note

$$\nu(A) = \mathrm{Leb}\left(\left\{x \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{R}),\ 1 \leq \det(x) \leq 2,\ \det(x)^{-1/n}x \in A\right\}\right),$$

où Leb désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ des matrices $n \times n$. On note

$$R_g(x) = xg^{-1}, \quad L_g(x) = gx, \quad g, x \in G_n.$$

13. Montrer que ν définit une mesure borélienne sur G_n telle que $(R_g)_*\nu = (L_g)_*\nu = \nu$.

Soit $\Gamma \subset G_n$ un sous-groupe discret. La mesure ν étant G_n-invariante, elle induit une mesure μ sur $X = \Gamma\backslash G_n$. On suppose que Γ est un réseau, c'est-à-dire que $\mu(\Gamma\backslash G_n) < +\infty$.

14. Montrer que pour tout $g \in G_n$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|g^k\| = +\infty$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi(x)\psi(xg^k)\mathrm{d}\mu(x) = \left(\int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_X \psi \ \mathrm{d}\mu\right), \quad \varphi, \psi \in L^2(X, \mu).$$