École Normale Supérieure
2020/2021

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 1

Exercice 1. *Points prépériodiques*

1. Soit $X = \{0, 1\}$ et $f : X \to X$ définie par $f(0) = f(1) = 1$. Alors 0 est prépériodique pour f. Si $g : Y \to Y$ est bijective, et $g^m(y) = g^n(y)$ où $m \geq n \geq 0$, alors $g^{m-n}(y) = y$ donc y est périodque.
2. Soit $x \in X$. Alors le cardinal de l'orbite de x est fini puisque X est fini. Donc il existe $m, n \geq 0$ tels que $f^m(x) = f^n(x)$. Donc x est prépériodique ou périodique.

Exercice 2. *Lemme de prolongation*

On fixe $c \in (a, b)$ et on écrit

$$x(t) = x(c) + \int_c^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s = x(c) + \int_c^t V(x(s))\mathrm{d}s.$$

On a $x(s) \in K$ pour tout $s \in (a, b)$. En particulier $s \mapsto V(x(s))$ est bornée sur $[c, b)$ et donc intégrable. Ainsi $\lim_b x = x(c) + \int_c^b V(x(s))\mathrm{d}s$.

Exercice 3. *Automorphismes linéaires du tore de dimension 2*

1. Une condition nécessaire et suffisante est $|\det(A)| = 1$. En effet si $\det(A) = \pm 1$ on a que A^{-1} est à coefficients entiers par la formule de la comatrice. Donc $f_A \circ f_{A^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathbf{T}^2}$. La réciproque découle directement du fait suivant.

   Fait. Pour tout $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ et tout $p \in \mathbf{T}^n$ on a $\#f_A^{-1}(\{p\}) = |\det(A)|$.

   Démonstration. On note $C = [0, 1[^n$. Alors le nombre de préimages de tout point de $\mathbf{T}^n$ par f_A est le nombre de points à coordonnées entières de l'image de C par A. Puisque A est à coefficients entiers, on peut découper $A(C)$ en un nombre fini de polytopes, puis appliquer des translations entières à ces morceaux pour obtenir $[0, \det(A)[\times[0, 1[^{n-1}$. Le nombre de points entiers est préservé au cours des transformations et vaut donc $|\det(A)|$. □

2. **Cas** $\mathrm{tr}(A) = 0$. Alors les racines du polynôme caractéristique de A satisfont $\lambda\mu = 1$ et $\lambda = -\mu$, soit $\lambda = \pm i$. En particulier les valeurs propres de A sont $\pm i$ est $A^4 = I_2$. En particulier $(f_A)^4 = \mathrm{id}_{\mathbf{T}^2}$.
   Cas $\mathrm{tr}(A) = 1$. Alors les racines du polynôme caractéristique de A satisfont $\lambda\mu = 1$ et $\lambda = -\mu + 1$, soit $\mu^2 - \mu + 1 = 0$. On obtient $\mu = \pm(1/2 + i\sqrt{3}/2)$ et donc $A^6 = I_2$, soit $(f_A)^6 = \mathrm{id}_{\mathbf{T}^2}$.

3. On suppose $\mathrm{tr}(A) = 2$. Le polynôme caractéristique de A est alors donné par $X^2 - 2X + 1$, donc A admet un vecteur propre u tel que $Au = u$, qu'on peut supposer (quitte à appliquer la transformation $(x, y) \mapsto (y, x)$) de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$ (car A est à coefficients entiers). Soit $y \in [0, 1[$ et $t \in \mathbf{R}$. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et calculons

$$A\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + tu\right] = y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

On a $Au = u$ donc $a + b\alpha = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$ donc $a = 2 - d$. Par suite $d = 1 + b\alpha$ et donc si $v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$,

$$A(v + tu) = x\begin{pmatrix} b \\ 1 + b\alpha \end{pmatrix} + tu = v + (t + by)u. \tag{1}$$

Pour $x \in [0, 1[$ on note $C_y \subset \mathbf{T}^2$ l'image l'image de

$$\left\{\begin{pmatrix} t \\ y + t\alpha \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}\right\}$$

par la projection $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$. Si $\alpha = p/q$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$ premiers entre eux, on a $C_y \simeq \mathbf{R}/q\mathbf{Z}$ et sous cette identification, (1) montre que $f_A|_{C_x}$ est la rotation $[\theta] \mapsto [\theta + by]$. De plus on a la partition

$$\mathbf{T}^2 = \bigsqcup_{[y]} C_y$$

où l'union porte sur les classes d'équivalences $[y] \in [0, 1]/\sim$ où $y \sim y'$ si $C_y = C_{y'}$
Si $\mathrm{tr}(A) = -2$, on applique le raisonnement précédent à A^2.

4. On suppose que $|\mathrm{tr}\, A| > 2$.
   (a) Le polynôme caractéristique $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + 1$ a deux racines réelles puisque $\mathrm{tr}(A)^2 - 4 > 0$. De plus $\mathrm{tr}(A)^2 - 4$ n'est pas un carré parfait car $\mathrm{tr}(A) \in \mathbf{Z}$ avec $|\mathrm{tr}(A)| > 2$ (en effet l'équation $p^2 - 4 = q^2$ avec $p, q \in \mathbf{Z}$ n'admet que les solutions $p = \pm 2$ et $q = 0$). Les valeurs propres de A sont donc irrationnelles, et les vecteurs propres associés ont une pente irrationnelle.
   (b) On note u et v les vecteurs propres associés à λ et λ^{-1} avec $|\lambda| > 1$. Pour tout $y \in [0, 1[$ on note $z_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Alors les images F^u_y et F^s_y des droites affines

   $$\{z_y + tu,\ t \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{z_y + tv,\ t \in \mathbf{R}\}$$

   par la projection naturelle $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ forment des partitions

   $$\mathbf{T}^2 = \bigsqcup_{[y]} F^u_y = \bigsqcup_{[y]} F^s_y,$$

   où l'union porte sur les classe d'équivalences $[y] \in [0, 1]/\sim$, où $y \sim y'$ si $F^u_y = F^u_{y'}$ (pour la première) ou $F^s_y = F^s_{y'}$ (pour la deuxième). Les propriétés de contraction et de dilatation sont claires.

Exercice 4. *Persistance des orbites périodiques non dégénérées pour les flots*

1. Soit Σ un hyperplan affine avec $x_0 \in \Sigma$ et tel que $x_0 + V(x_0) \notin \Sigma$. Soit $\sigma \in \mathbf{R}^n$ un vecteur normal à Σ. Soit $\psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par
$$\psi(t,x) = \langle \varphi(t,x) - x_0,\ \sigma\rangle.$$
Alors $\psi(\tau_0, x_0) = 0$. De plus, puisque $V(x_0)$ est transverse à Σ,
$$\partial_t \psi(t,x) = \langle V(\varphi(t,x)),\ \sigma\rangle \neq 0;$$
le théorème des fonctions implicites permet alors de conclure, puisque pour tout $z \in \mathbf{R}^n$ on a
$$z \in \Sigma \iff \langle z - x_0,\ \sigma\rangle = 0.$$
2. En appliquant la même construction qu'à la question précédente en remplaçant τ_0 par 0, on obtient (quitte à réduire U) une application lisse $\tilde\tau : U \to \mathbf{R}$, avec $\tilde\tau(x_0) = 0$ et telle que
$$\varphi(\tilde\tau(x), x) \in \Sigma, \quad x \in U.$$
Soit Σ' une autre hypersurface affine passant par x_0 et transverse à $V(x_0)$. On obtient de même que précédemment deux applications $\tau', \tilde\tau' : U \to \mathbf{R}$ telles que $\tau'(x_0) = \tau_0$, $\tilde\tau'(x_0) = 0$ et
$$\varphi(\tau'(x), x) \in \Sigma', \quad \varphi(\tilde\tau'(x), x) \in \Sigma', \quad x \in U.$$
Soit $P_{\Sigma,\Sigma'} : U \cap \Sigma \to U \cap \Sigma'$ donnée par $P_{\Sigma,\Sigma'}(x) = \varphi(\tilde\tau'(x), x)$. Alors $P_{\Sigma,\Sigma'}$ est inversible d'inverse $x \mapsto P_{\Sigma',\Sigma}(x) = \varphi(\tilde\tau(x), x)$. On vérifie alors que pour tout x assez proche de x_0,
$$P_\Sigma(x) = \left(P_{\Sigma,\Sigma'} \circ P_{\Sigma'} \circ (P_{\Sigma,\Sigma'})^{-1}\right)(x),$$
et donc $(\mathrm{d}P_\Sigma)_{x_0}$ est conjuguée à $(\mathrm{d}P'_\Sigma)_{x_0}$, ce qui conclut.
3. On considère $\Psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par
$$\Psi(s,t,x) = \langle \varphi_s(t,x) - x_0, \sigma\rangle.$$
Alors
$$\partial_t \Psi(s,t,x) = \langle V(\varphi_s(t,x)), \sigma\rangle,$$
et donc $\partial_t \Psi(0, \tau_0, x_0) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe une application lisse $T : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbf{R}$ avec $T(0, x_0) = \tau_0$ et
$$\varphi_s(T(s,x), x) \in \Sigma, \quad s \in (-\varepsilon,\varepsilon), \quad x \in U.$$
On définit alors $\Phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times (U \cap \Sigma) \to \Sigma$ par
$$\Phi(s,x) = \varphi_s(T(s,x), x) - x.$$
On a $\Phi(0, x_0) = 0$ et
$$\partial_x \Phi(0, x_0) = \mathrm{d}(P_\Sigma)_{x_0} - \mathrm{Id}_{T_{x_0}\Sigma}$$
puisque $T(0,x) = \tau(x)$ pour tout $x \in U \cap \Sigma$. Ainsi $\partial_x \Phi(0, x_0) : T_{x_0}\Sigma \to T_{x_0}\Sigma$ est inversible et le théorème des fonctions implicites donne une application lisse $s \mapsto x_s$ définie près de $s = 0$ telle que $\Phi(s, x_s) = 0$, ce qui équivaut à
$$\varphi_s(T(x_s, s), x_s) = x_s.$$
On pose alors $\tau_s = T(s, x_s)$. Les applications $s \mapsto x_s$ et $s \mapsto \tau_s$ vérifient les conditions demandées.

Exercice 5. *Classes de conjugaison des applications expansives du cercle*

1. On choisit $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $[y] = f([0])$. On pose alors $F(0) = y_0$. La fonction f étant continue $\mathbf{T} \to \mathbf{T}$, elle l'est uniformément, et il existe $1/2 > \varepsilon > 0$ tel que
$$\operatorname{dist}([y'], [y]) < \varepsilon \implies \operatorname{dist}(f([y']), f([y])) < 1/4. \tag{2}$$
Soit $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{T}$ la projection naturelle. Alors $\pi|_{]y_0-1/4, y_0+1/4[}$ réalise un homémorphisme sur son image et on pose
$$F(y') = (\pi|_{]y_0-1/4,y_0+1/4[})^{-1}(f([y'])), \quad y' \in \ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[.$$
On a donc construit F sur $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ telle que $[F(y')] = f([y'])$ pour tous $y' \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$. On itère alors cette construction en remplaçant y_0 par $y_0 \pm \varepsilon/2$ pour étendre F à $]y_0 - 3\varepsilon/2, y_0 + 3\varepsilon/2[$. En itérant ce processus, on obtient bien $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\pi \circ F = f \circ \pi$. De plus F est continue car π est un homéomorphisme local.
Si F' est un autre relevé de f, on a $[F(y)] = [F'(y)]$ pour tout $y \in \mathbf{R}$, et donc $F - F'$ prends ses valeurs dans $\mathbf{Z}$. Comme elle est continue, elle est constante et $F' = F + k$ pour un $k \in \mathbf{Z}$.
2. Si F est un relevé de f, alors $x \mapsto F(x+1)$ est aussi un relevé de f. Par la question précédente, il existe p tel que $F(x+1) = F(x) + p$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Soit F' est un autre relevé et $k \in \mathbf{Z}$ tel que $F' = F + k$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$F'(x+1) = F(x+1) + k = F(x) + p + k = F'(x) + p,$$
ce qui conclut.
3. Supposons $p \geq 1$. Soit F un relevé de f et $G : x \mapsto F(x) - x$. On a que $G(1) = F(1) - 1 = F(0) + p - 1 = G(0) + p - 1$. Ainsi $[G(0), G(0) + p - 1[\subset G([0,1[)$ par le théorème des valeurs intermédiaires, et donc
$$\#(\mathbf{Z} \cap G([0,1[)) = p - 1.$$
Ainsi on peut trouver $0 \leq x_1 < \cdots < x_{p-1} < 1$ tels que $G(x_j) \in \mathbf{Z}$ pour tout j. Ceci implique $f([x_j]) = [x_j]$ pour tout j, et donc $\#\mathrm{Fix}(f) \geq p - 1$.
4. On a que $\deg(f^n) = p^n$. En effet, si F est un relevé de f alors F^n est un relevé de f^n, puisque
$$[F^n(x)] = [F(F^{n-1})(x)] = f([F^{n-1}(x)]) = \cdots = f^n([x]).$$
De plus, pour $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} F^n(x+1) &= F^{n-1}(F(x+1)) \\ &= F^{n-1}(F(x) + p) \\ &= F^{n-1}(F(x) + p - 1) + \deg(f^{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= F^n(x) + p \deg f^{n-1}. \end{aligned}$$
Par suite $\deg(f^n) = p \deg(f^{n-1})$ et donc $\deg(f^n) = p^n$. Ainsi $\#\mathrm{Fix}(f^n) \geq \deg(f^n) - 1 = p^n - 1$ par la question précédente. Par suite,
$$\liminf_n \frac{\log \#\mathrm{Fix}(f^n)}{n} \geq \liminf_n \frac{\log(p^n - 1)}{n} = \log p.$$

5. Soit F un relevé de f. On a $F' > 1$ et donc l'application $G : x \mapsto F(x) - x$ est strictement croissante. Ainsi (voir question 3), on a que $G|_{[0,1[}$ réalise un homéomorphisme de $[0,1[$ sur $[G(0), G(0)+p-1[$. Pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$f([x]) = [x] \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(x) \in \mathbf{Z}.$$

Puisque $\#([G(0), G(0)+p-1[\cap \mathbf{Z}) = p-1$, on a que $\#\mathrm{Fix}(f) = p-1$.
Enfin, puisque $\deg(f^n) = \deg(f)^n$, on a $\#\mathrm{Fix}(f^n) = p^n - 1$.

6. Pour tout $H \in \mathcal{E}$, on a que $\Phi(H)$ est continue et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Phi(H)(x+1) = \frac{1}{p}H(F(x+1)) = \frac{1}{p}H(F(x)+p) = \frac{1}{p}(H(F(x))+p) = \Phi(H)(x)+1$. Donc Φ préserve $\mathcal{E}$.
On a que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble fermé de l'espace $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ des fonctions continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ muni de la norme infinie. Ainsi $\mathcal{E}$ est complet pour d. On a de plus

$$d(\Phi(G), \Phi(H)) = \frac{1}{p}\sup_{\mathbf{R}} |G \circ F - H \circ F| = \frac{1}{p} d(G,H).$$

Puisque $f' > 1$, on a $F' > 1$ et donc $p > 1$. Ainsi Φ est strictement contractante sur $(\mathcal{E}, d)$. Le théorème du point fixe affirme alors qu'il existe un unique point fixe H_0, qui vérifie

$$H_0(x) = \frac{1}{p} H_0(F(x)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

7. On pose $h_0([x]) = [H_0(x)]$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (c'est bien défini puisque $H_0(x+p) = H_0(x)+p$), et on a que H_0 relève h_0. De plus $H_0(x+1) = H_0(x)+1$ pour tout x implique que $\deg(h_0) = 1$. De plus, on a que $E_p(h_0([x])) = [pH_0(x)] = [H_0(F(x))] = h_0([F(x)]) = h_0(f([x]))$.

8. On peut déjà remarquer que

$$F^{-1}(y+p) = F^{-1}(y) + 1, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Ceci implique

$$F^{-1}(H(p(x+1))) = F^{-1}(H(px)+p) = F^{-1}(H(px)) + 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ainsi Ψ préserve $\mathcal{E}$. De plus puisque $F' > 1$ et $F(x+1) = F(x)+p$ on a $(F^{-1})'(y) \leq \nu$ pour tout $y \in \mathbf{R}$, avec $0 < \nu < 1$. Par suite, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tous $H, G \in \mathcal{E}$,

$$|F^{-1}(H(px)) - F^{-1}(G(px))| \ \leq \nu |H(px) - G(px)| \ \leq \nu \|H - G\|_\infty.$$

Par suite Ψ est strictement contractante sur $(\mathcal{E}, d)$ et donc elle admet un unique point fixe H_1, qui vérifie

$$H_1(y) = F^{-1}(H_1(py)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Soit $G = H_0 \circ H_1$. Alors

$$G(px) = H_0(F(H_1(x))) = pG(x).$$

Ceci implique que $G(0) = 0$; de plus pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $G(k) = k$. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, il s'en suit que

$$G(k/p^m) = \frac{p^m}{p^m} G(k/p^m) = \frac{1}{p^m} G(k) = k/p^m.$$

Puisque $\{k/p^m,\ k \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il vient que $G = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ par continuité. Par suite H_1 est bijective (car surjective, car $H(\cdot + 1) = H(\cdot) + 1$), et d'inverse $H_1^{-1} = H_0$ continu. Soit $h_1 : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ l'application induite par H_1. Alors h_1 est bijective, d'inverse h_0, ce qui conclut.