

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé 4

Exercice 1. *Exposants de Lyapunov pour les systèmes linéaires*

1. On a

$$\exp(-|t|\|A\|) \leq \|\exp(tA)\| \leq \exp(|t|\|A\|), \quad t \in \mathbf{R}.$$

En particulier si $x_0 \neq 0$ on a

$$-\|A\| + \frac{1}{|t|} \log \|x_0\| \leq \frac{1}{t} \log \|e^{tA}x_0\| \leq \|A\| + \frac{1}{|t|} \log \|x_0\|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ceci montre que $\lambda(x_0, A)$ est fini. Si $\|\cdot\|'$ est une autre norme sur \mathbf{R}^n , alors il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$\log c + \log \|e^{tA}x_0\| \leq \log \|e^{tA}x_0\|' \leq \log C + \log \|e^{tA}x_0\|, \quad t \in \mathbf{R},$$

ce qui conclut.

2. On a

$$\begin{aligned} \lambda(y_0, B) &= \limsup \frac{1}{t} \log \|e^{tB}y_0\| \\ &= \limsup \frac{1}{t} \log \|e^{tP^{-1}AP}y_0\| \\ &= \limsup \frac{1}{t} \log \|P^{-1}e^{tA}Py_0\| \\ &= \lambda(Py_0, A), \end{aligned}$$

par la question 1., puisque $\|P^{-1} \cdot\|$ est une norme sur \mathbf{R}^n .

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$; on suppose que A est un bloc de Jordan pour λ , de sorte que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Soit $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. On note $e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$; on a

$$\alpha_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^n \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} \alpha_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soit $i = \max\{j \in \{1, \dots, n\}, \alpha_j \neq 0\}$. Alors $\alpha_i(t) = e^{\lambda t} \alpha_i$ pour tout t , et donc

$$\log \|e^{tA} x_0\|_\infty \geq \lambda t + \log |\alpha_i|.$$

On a aussi, pour un certain polynôme P ,

$$\log \|e^{tA} x_0\|_\infty \leq \lambda t + \log |P(t)| + \log \|x_0\|_\infty, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On obtient bien

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\| = \lambda.$$

On suppose maintenant que $\lambda = r + i\nu$ avec $r, \nu \in \mathbf{R}$, et que A est un bloc de Jordan pour λ , i.e. $n = 2m$ est pair et

$$A = \begin{pmatrix} D & I_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ (0) & & & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} r & -\nu \\ \nu & r \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Soit $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Alors en notant $\alpha_j(t)$ et $\beta_j(t)$ les coordonnées $2j-1$ et $2j$ de $e^{tA} x_0$ ($j = 1, \dots, m$), on a, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha_j(t) &= e^{rt} \sum_{k=j}^m (\alpha_k \cos(\nu t) - \beta_k \sin(\nu t)) \frac{t^{k-j}}{(k-j)!}, \\ \beta_j(t) &= e^{rt} \sum_{k=j}^m (\alpha_k \sin(\nu t) + \beta_k \cos(\nu t)) \frac{t^{k-j}}{(k-j)!}. \end{aligned}$$

Soit $i = \max\{j \in \{1, \dots, m\}, (\alpha_j, \beta_j) \neq (0, 0)\}$. Alors

$$\alpha_i(t) = e^{rt} (\alpha_i \cos(\nu t) - \beta_i \sin(\nu t)), \quad \beta_i(t) = e^{rt} (\alpha_i \sin(\nu t) + \beta_i \cos(\nu t)), \quad t \in \mathbf{R}.$$

En particulier $\|(\alpha_i(t), \beta_i(t))\|_2 = e^{rt} \|(\alpha_i, \beta_i)\|_2$, ce qui donne

$$\log \|e^{tA} x_0\|_2 \geq rt + \log \|(\alpha_i, \beta_i)\|_2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On a par ailleurs, pour un certain polynôme P ,

$$\log \|e^{tA} x_0\|_2 \leq rt + \log |P(t)|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cela donne encore une fois

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} x_0\| = r.$$

Dans le cas où A n'est pas un bloc de Jordan, le théorème de décomposition de Jordan et la question 2. permettent de se ramener aux cas précédents.

4. Soit $v \in V_j \setminus V_{j+1}$. Alors v est de la forme $v = v' + w$ avec $v' \in L_j \setminus 0$ et $w \in V_{j+1}$. On sait par la question précédente que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA} v'\| = r_j.$$

En particulier, pour tout $r < r_j$, il existe $C > 0$ telle que

$$\|e^{tA}v'\| \geq Ce^{rt}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On fixe deux réels r, r' tels que $r_{j+1} < r' < r < r_j$. Alors il existe $C' > 0$ telle que $\|e^{tA}w\| \leq C'e^{r't}$ pour tout $t \geq 0$. En particulier on a $\|e^{tA}w\|/\|e^{tA}v'\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Ceci donne alors

$$\frac{1}{t} \log \|e^{tA}v\| = \frac{1}{t} \log \|e^{tA}v' + e^{tA}w\| \rightarrow r_j, \quad t \rightarrow +\infty.$$

La réciproque est alors immédiate puisque $\mathbf{R}^n = \bigoplus_j L_j$.

On procède identiquement pour la seconde équivalence.

5. Soit $M \in U_{a,b}$ et

$$d_M(z) = \frac{\chi'_M(z)}{\chi_M(z)}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \text{sp}(M).$$

où χ_M est le polynôme caractéristique de M . Alors d est méromorphe sur \mathbf{C} et a un pôle simple en λ pour tout $\lambda \in \text{sp}(M)$, avec résidu égal à $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda, \mathbf{C}}$, où

$$C_{\lambda, \mathbf{C}} = \{u \in \mathbf{C}^n, \exists N \in \mathbf{N}, (A - \lambda)^N u = 0\}.$$

En particulier, puisque pour tout $\lambda \notin \mathbf{R}$ on a $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda, \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{R}} C_{\lambda, \bar{\lambda}}$, on obtient

$$\dim L(a, b, M) = \int_{\mathcal{C}_{a,b}} d_M(z) dz,$$

où $\mathcal{C}_{a,b}$ est un chemin lisse fermé entourant dans le sens direct les valeurs propres de M qui ont une partie réelle dans $]a, b[$, et qui ne rencontre pas le spectre de M . On choisit aussi deux autres lacets $\mathcal{C}_{<a}$ et $\mathcal{C}_{>b}$ qui entourent dans le sens direct les valeurs propres de M ayant une partie réelle respectivement dans $] -\infty, a[$ et dans $]b, +\infty[$, et n'intersectant pas le spectre de M .

En particulier on a $|\chi_M| > \varepsilon$ sur $\mathcal{C}_{<a} \cup \mathcal{C}_{a,b} \cup \mathcal{C}_{>b}$ pour un $\varepsilon > 0$. Par continuité de $M' \mapsto \chi'_M$, on sait qu'il existe un voisinage connexe U de M tel que pour toute matrice $M' \in U$, on a $|\chi_{M'}| > \varepsilon/2$ sur $\mathcal{C}_{a,b}$.

En particulier, les applications

$$M' \mapsto \int_{\mathcal{C}} d_{M'}(z) dz, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{<a}, \mathcal{C}_{a,b}, \mathcal{C}_{>b},$$

sont bien définies et continues $U \rightarrow \mathbf{C}$. Comme elles sont à valeurs dans \mathbf{Z} , elles sont constantes. En particulier on a

$$n = \int_{\mathcal{C}_{<a}} d_{M'}(z) dz + \int_{\mathcal{C}_{a,b}} d_{M'}(z) dz + \int_{\mathcal{C}_{>b}} d_{M'}(z) dz,$$

puisque cette égalité est vraie pour $M' = M$ (par le lemme des noyaux). Ceci implique que toutes les valeurs propres de M' sont contenues dans les zones délimitées par $\mathcal{C}_{<a}$, $\mathcal{C}_{a,b}$ et $\mathcal{C}_{>b}$, ce qui conclut.

Exercice 2. Stabilité de 0 pour les systèmes linéaires

1. (i) \implies (iii). Supposons que 0 est un point fixe asymptotiquement stable. Soit λ une valeur propre de A . Alors tout $u \in C_{\lambda, \bar{\lambda}}$ (avec les notations de l'exercice précédent) vérifie $\frac{1}{t} \log \|e^{tA}u\| \rightarrow \Re(\lambda)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Puisque $e^{tA}u \rightarrow 0$ on a nécessairement $\Re(\lambda) \leq 0$. Supposons $\Re(\lambda) = 0$. Alors la correction de la question 3. de l'**Exercice 1.** montre qu'on peut trouver $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|e^{tA}u\| \geq \delta$ pour tout t , pour un $\delta > 0$. C'est absurde, donc $\Re(\lambda) < 0$.

(iii) \implies (ii). Pour tout $\lambda \in \text{sp}(A)$ et $u \in C_{\lambda, \bar{\lambda}}$ on a pour un certain polynôme P

$$\|e^{tA}u\| \leq Ce^{\Re(\lambda)t}|P(t)|, \quad t \geq 0.$$

Puisque $\mathbf{R}^n = \bigoplus_{\lambda} C_{\lambda, \bar{\lambda}}$, on a que pour tout $0 > a > \sup_{\lambda \in \text{sp}(A)} \Re \lambda$, il existe $c > 0$ tel que

$$\|e^{tA}x\| \leq ce^{-at}\|x\|, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

(ii) \implies (iv). Par linéarité de e^{tA} , il existe $c, a > 0$ tels que (3) est vérifiée. On pose alors

$$\|x\|_A = \int_0^\tau e^{bt} \|e^{tA}x\| dt, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

où $b, \tau > 0$ satisfont

$$ce^{-(a-b)\tau} < 1.$$

On peut supposer $c \geq 1$, sinon la norme $\|\cdot\|$ convient. Ceci implique $a \geq b$. Alors

$$\begin{aligned} \|e^{TA}x\|_A &= \int_0^\tau e^{bt} \|e^{(t+T)A}x\| dt \\ &= \int_T^{T+\tau} e^{b(t-T)} \|e^{tA}x\| dt \\ &= e^{-bT} \int_T^{T+\tau} e^{bt} \|e^{tA}x\| dt \\ &= e^{-bT} \left(\int_T^0 e^{bt} \|e^{tA}x\| dt + \int_0^\tau e^{bt} \|e^{tA}x\| dt + \int_\tau^{T+\tau} e^{bt} \|e^{tA}x\| dt \right) \\ &= e^{-bT} \|x\|_A + e^{-bT} \left(\int_\tau^{T+\tau} e^{bt} \|e^{tA}x\| dt - \int_0^T e^{bt} \|e^{tA}x\| dt \right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\tau^{T+\tau} e^{bt} \|e^{tA}x\| dt &\leq c \int_\tau^{T+\tau} e^{bt} e^{-at} \|x\| dt \\ &\leq ce^{-(a-b)\tau} \frac{(1 - e^{-(a-b)T})}{a-b} \|x\| \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_0^T e^{bt} \|e^{tA}x\| dt \geq \int_0^T e^{bt} e^{-t\|A\|} \|x\| dt \geq \frac{1 - e^{-T(\|A\| - b)}}{\|A\| - b} \|x\|.$$

On a

$$ce^{-(a-b)\tau} \frac{1 - e^{-(a-b)T}}{a-b} - \frac{1 - e^{-T(\|A\| - b)}}{\|A\| - b} = (ce^{-(a-b)\tau} - 1)T + \mathcal{O}(T^2), \quad T \rightarrow 0.$$

En particulier cette quantité est négative pour $T > 0$ assez petit. On a donc obtenu $\delta > 0$ tel que pour $T \leq \delta$ on a

$$\|e^{TA}x\|_A \leq e^{-bT} \|x\|_A, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Soit $T' > 0$. On écrit $T' = n\delta + T$ avec $0 \leq T < \delta$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|e^{T'A}x\|_A \leq \|e^{\delta A} \cdots e^{\delta A} e^{TA}x\|_A \leq e^{-bn\delta} e^{-bT} \|x\|_A \leq e^{-bT'} \|x\|_A,$$

ce qui conclut.

(iv) \implies (i). évident.

- Supposons que $\lambda = r + i\nu \in \text{sp}(A)$ avec $\nu \in \mathbf{R}$ et $r \geq 0$. On suppose que A est un bloc de Jordan associé à λ , qui est non trivial (i.e. de la forme (1) et de taille > 1 ou de la forme (2) et de taille > 2 selon que ν soit nul ou non). Alors si $x = (0, \dots, 0, 1)^\perp$, on vérifie aisément que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA}x\| = +\infty$.

Réciproquement, supposons que les valeurs propres de A ont toutes des parties réelles négatives ou nulles, et que les valeurs propres ayant une partie réelle nulle vérifient la condition de semi-simplicité. Alors on vérifie aisément que $\sup_{t \in \mathbf{R}} \|e^{tA}\| < +\infty$ (en regardant la décomposition de Jordan), ce qui conclut.

Exercice 3. Systèmes linaires topologiquement conjugués

- Soit $x \in \mathbf{R}^n$ non nul. Alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \log \|e^{tA}x\|_A = \mp\infty$; de plus $t \mapsto \log \|e^{tA}x\|_A$ est strictement décroissante sur \mathbf{R} puisque

$$\|e^{tA}y\|_A \leq e^{-at} \|y\|_A, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbf{R}^n,$$

pour un certain $a > 0$, ce qui implique aussi

$$\|e^{-tA}y\|_A \geq e^{at} \|y\|_A, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbf{R}^n.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\tau(x) \in \mathbf{R}$ tel que $e^{\tau(x)A}x \in S_A$.

Montrons que τ est continue. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|e^{\tau(x_0)A}x_0 - e^{\tau(x_0)A}x\|_A \leq C\|x - x_0\|_A.$$

Soit $\varepsilon > 0$; si $\|x - x_0\|_A \leq \varepsilon$ on a

$$1 - C\varepsilon \leq \|e^{\tau(x_0)A}x\| \leq 1 + C\varepsilon.$$

Posons

$$t_\pm = \pm \frac{1}{a} \log(1 \pm C\varepsilon).$$

Alors

$$\|e^{t_+A}e^{\tau(x_0)A}x\|_A \leq e^{-at_+}(1 + C\varepsilon) = 1$$

et de même

$$\|e^{-t_-A}e^{\tau(x_0)A}x\| \geq 1$$

En particulier, on a que $|\tau(x) - \tau(x_0)| \leq \max(t_+, t_-)$, avec $t_\pm \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et donc τ est continue.

- On a que $\tau(e^{tA}x) = \tau(x) - t$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul et tout $t \in \mathbf{R}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} e^{-\tau(e^{tA}x)B} \varphi(e^{\tau(e^{tA}x)A} e^{tA}x) &= e^{-(\tau(x)-t)B} \varphi(e^{(\tau(x)-t)A} e^{tA}x) \\ &= e^{tB} e^{-\tau(x)B} \varphi(e^{\tau(x)A}x). \end{aligned}$$

On a bien $\Phi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \Phi$. De plus Φ est continue sur $\mathbf{R}^n \setminus 0$ par continuité de τ et de φ . Elle est continue en 0 car $\tau(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0$, et donc pour un $b > 0$ on a

$$\|\Phi(x)\|_B \leq e^{-\tau(x)b} \|\varphi(e^{\tau(x)A}x)\|_B \leq Ce^{-\tau(x)b} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Enfin, si $\Psi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est définie comme Φ en interchangeant les rôles de A et de B , on obtient $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$, ce qui conclut.

3. On pose pour $M = A, B$, avec les notations de l'**Exercice 1.**,

$$E^s(M) = \bigoplus_{\Re(\lambda) < 0} C_{\lambda, \bar{\lambda}}(M), \quad E^u(M) = \bigoplus_{\Re(\lambda) > 0} C_{\lambda, \bar{\lambda}}(M).$$

Par la question 1.5., on a que $\dim E^s(A_t) = \dim E^s(A)$ pour tout t et donc $\dim E^s(A) = \dim E^s(B)$. En particulier, par la question précédente, il existe des isomorphismes $\Phi^\bullet : E^\bullet(A) \rightarrow E^\bullet(B)$, $\bullet = s, u$ qui conjuguent $\exp(tA|_{E^\bullet(A)})$ à $\exp(tB|_{E^\bullet(B)})$, pour $\bullet = s, u$. On note

$$\pi_\bullet : \mathbf{R}^n \rightarrow E^\bullet(A), \quad \bullet = s, u,$$

les projecteurs spectraux associés à la décomposition $\mathbf{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A)$. On pose

$$\Phi = \Phi^u \circ \pi_u + \Phi^s \circ \pi_s : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Alors on vérifie aisément que Φ conjugue e^{tA} à e^{tB} .

Exercice 4. Systèmes linéaires avec second membre

1. En cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto e^{tA}c(t)$, on trouve que les solutions sont de la forme

$$x(t) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-sA} z(s) ds \right), \quad t \in \mathbf{R}^n,$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Soit $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $\|z(t) - z_\infty\|_A \leq \varepsilon$, où $\|\cdot\|_A$ est une norme adaptée à A . Alors

$$\int_0^t e^{(t-s)A} z(s) ds = \int_0^T e^{(t-s)A} z(s) ds + \int_T^t e^{(t-s)A} z(s) ds.$$

On a

$$\int_T^t e^{(t-s)A} z(s) ds = \int_T^t e^{(t-s)A} (z(s) - z_\infty) ds + \left(\int_T^t e^{(t-s)A} ds \right) z_\infty.$$

Or pour tout $t \geq T$ on a

$$\left\| \int_T^t e^{(t-s)A} (z(s) - z_\infty) ds \right\|_A \leq \varepsilon \int_T^t e^{-a(t-s)} ds \leq \frac{\varepsilon}{a}.$$

D'autre part,

$$\int_T^t e^{(t-s)A} ds = e^{tA} \left[-A^{-1} e^{-sA} \right]_{s=T}^{s=t} = -A^{-1} + A^{-1} e^{(t-T)A}.$$

En particulier puisque A est une contraction on a

$$\left(\int_T^t e^{(t-s)A} ds \right) z_\infty \rightarrow -A^{-1} z_\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

On a aussi que $e^{tA} \int_0^T e^{-s} z(s) ds + e^{tA} x_0 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Tout ce qui précède montre que pour t assez grand on a (pour une constante C dépendant seulement de a)

$$\|x(t) + A^{-1}z_\infty\| \leq C\varepsilon.$$

On a obtenu que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -A^{-1}z_\infty.$$