

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Exemples de mesures invariantes

1. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue. On a

$$\int_0^1 (\varphi \circ f) d\mu = \int_0^{1/2} (\varphi \circ f) d\mu + \int_{1/2}^1 (\varphi \circ f) d\mu.$$

Or en effectuant le changement de variable $x = 1 - y$ on a

$$\int_{1/2}^1 \varphi \left(2\sqrt{y(1-y)} \right) \frac{dy}{2\sqrt{1-y}} = \int_0^{1/2} \varphi \left(2\sqrt{x(1-x)} \right) \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

On obtient

$$\int_0^1 (\varphi \circ f) d\mu = \int_0^{1/2} \varphi \left(2\sqrt{x(1-x)} \right) \frac{dx}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right).$$

On pose maintenant $u = 2\sqrt{x(1-x)}$, ce qui donne, en utilisant $\sqrt{1-2\sqrt{x(1-x)}} = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} \frac{du}{2\sqrt{1-u}} &= \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{1}{2\sqrt{1-2\sqrt{x(1-x)}}} \\ &= \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{1}{2(\sqrt{1-x} - \sqrt{x})} \\ &= \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}{2(1-2x)} \\ &= \frac{dx}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\int_0^1 (\varphi \circ f) d\mu = \int_0^1 \varphi(u) \frac{du}{2\sqrt{1-u}} = \int_0^1 \varphi d\mu$$

2. Pour tout $\varphi \in C^0(M)$ on a, puisque $f^n(x) = x$

$$\begin{aligned} \mu(\varphi \circ f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varphi \circ f)(f^k(x)) \\ &= \frac{1}{n} \varphi(f^n(x)) \\ &= \mu(\varphi). \end{aligned}$$

3. Soit $\varphi \in C^0([0, 1])$. On a, si λ est la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\varphi \circ f) d\lambda &= \int_0^{1/2} \varphi(2x) dx + \int_{1/2}^1 \varphi(2-2x) dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} \varphi(2x) dx \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

4. Soit $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^d)$ et $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ où $\pi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ est la projection naturelle.

Soit $A \in M_d(\mathbf{Z})$ avec $\det(A) = \pm 1$, et $f_A : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ l'automorphisme associé. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^d} (\varphi \circ f_A) d\mu &= \int_{[0,1]^d} \tilde{\varphi}(Ax) dx \\ &= \int_{A([0,1]^d)} \tilde{\varphi}(x) dx \quad \text{car } |\det(A)| = 1 \\ &= \int_{[0,1]^d} \tilde{\varphi}(x) dx \quad \text{par 1-périodicité de } \tilde{\varphi} \\ &= \int_{\mathbf{T}^d} \varphi d\mu. \end{aligned}$$

5. Il suffit de montrer que $\mu([a, b]) = \mu(f^{-1}([a, b]))$ pour tout intervalle $[a, b]$ avec $a > 0$. On a

$$f(x) \in [a, b] \iff \exists k \in \mathbf{N}_{\geq 1}, \quad \frac{1}{x} \in [a, b] + k.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \log(2) \mu(f^{-1}([a, b])) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{a+k}} \frac{1}{1+t} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{a+k} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{b+k} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log(a+k+1) - \log(a+k) \right. \\ &\quad \left. - \log(b+k+1) + \log(b+k) \right) \\ &= \log(b+1) - \log(a+1) \\ &= \log(2) \mu([a, b]). \end{aligned}$$

Exercice 2. Version topologique du théorème de récurrence de Poincaré

Soit $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une base dénombrable d'ouverts. Soit $i \in \mathbf{N}$; par le théorème de récurrence de Poincaré, il existe $V_i \subset U_i$ avec $\mu(U_i \setminus V_i) = 0$ tel que

$$\forall x \in V_i, \quad |\{n \in \mathbf{N}, f^n(x) \in U_i\}| = +\infty.$$

On définit l'ensemble $H \subset M$ par

$$H = \bigcup_i (U_i \setminus V_i).$$

Alors H est de mesure nulle. Soit $x \in \mathbb{C}H$, et $U \ni x$ un voisinage de x . Il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que $U_i \subset U$. Alors $x \in V_i$ et donc $|\{n \in \mathbf{N}, f^n(x) \in U_i\}| = +\infty$, ce qui signifie que x est récurrent.

Exercice 3. Existence de mesures invariantes

1. La positivité et l'inégalité triangulaire sont claires. Il reste à montrer que $d_*(L, L') = 0 \implies L = L'$.

Si $d_*(L, L') = 0$ alors $(L - L')(f_i) = 0$ pour tout i . Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Soit i tel que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Alors

$$|(L - L')(f)| = |(L - L')(f - f_i)| \leq \|L - L'\|_* \|f - f_i\| \leq \|L - L'\|_* \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L = L'$.

Montrons que d_* engendre la topologie faible, c'est à dire que

$$L_n \rightarrow L \text{ } * \text{-faiblement} \iff d_*(L_n, L) \rightarrow 0.$$

\implies : Soit $\varepsilon > 0$, et i tel que $2^{-i} < \varepsilon$. Alors pour tout n assez grand, on a

$$\sum_{j < i} \frac{|L_n(f_j) - L(f_j)|}{2^j(1 + \|f_j\|)} \leq \varepsilon.$$

D'autre part on a

$$\sum_{j \geq i}^{+\infty} \frac{|L_n(f_j) - L(f_j)|}{2^j(1 + \|f_j\|)} \leq 2^{-i}(\|L_n\|_* + \|L\|_*) \leq \varepsilon(\|L_n\|_* + \|L\|_*).$$

Or $\|L_n\| \leq 1$ ¹, et donc $d_*(L_n, L) \leq 3\varepsilon$ si n est assez grand.

\impliedby : Supposons que $d_*(L_n, L) \rightarrow 0$. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Soit $i \in \mathbf{N}$ tel que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} |L_n(f) - L(f)| &\leq \varepsilon \|L_n - L\|_* + 2^i(1 + \|f_i\|)d_*(L_n, L) \\ &\leq 2\varepsilon + 2^i(1 + \|f_i\|)d_*(L_n, L). \end{aligned}$$

Si n est assez grand on obtient donc $|L_n(f) - L(f)| < 3\varepsilon$, ce qui conclut.

2. Notons B^* la boule unité. Puisqu'elle est métrisable, il suffit de montrer que toute suite de B^* admet une sous-suite qui converge faiblement.

Soit (L_n) une suite de B^* . On se donne $(f_i) \subset E$ une suite dense de E . Alors $(L_n(f_i))_n$ est bornée pour tout i .

Par un procédé d'extraction diagonale, il existe (n_k) telle que $L_{n_k}(f_i) \rightarrow g_i \stackrel{\text{not}}{=} L(f_i)$ pour tout i quand $k \rightarrow +\infty$.

Soit maintenant $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. On a, si $\|f - f_i\| \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} |L_{n_k}(f) - L_{n_\ell}(f)| &\leq |L_{n_k}(f) - L_{n_k}(f_i)| + |L_{n_k}(f_i) - L_{n_\ell}(f_i)| \\ &\quad + |L_{n_\ell}(f_i) - L_{n_\ell}(f)| \\ &\leq 2\varepsilon + |L_{n_k}(f_i) - L_{n_\ell}(f_i)|. \end{aligned}$$

Ainsi, si k, ℓ sont assez grands, on a, puisque $L_{n_k}(f_i) \rightarrow L(f_i)$,

$$|L_{n_k}(f) - L_{n_\ell}(f)| \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi $(L_{n_k}(f))_k$ est de Cauchy et donc converge, vers un réel noté $L(f)$.

L'application L est évidemment linéaire et elle vérifie $|L(f)| \leq \lim_k |L_{n_k}(f)| \leq \|f\|$, ce qui montre que $L \in B^*$. Ainsi B^* est compacte.

¹En fait toute suite qui converge faiblement est bornée, c'est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus, qui dit que si E, F sont deux Banach, et que (T_i) est une suite de $\mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\left(\forall x \in E, \sup_i \|T_i(x)\|_F < +\infty \right) \implies \sup_i \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty.$$

3. On note $\mathcal{P}(f)$ l'espace des probas sur M qui sont invariantes par f .

Alors pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(f)$, on a

$$t\mu + (1-t)\nu \in \mathcal{P}(f), \quad t \in [0, 1],$$

donc $\mathcal{P}(f)$ est connexe par arcs donc connexe.

C'est un fermé de B^* car si $\mu_n \rightarrow \mu$ faiblement, on a pour tout $\varphi \in C^0(M)$,

$$\begin{aligned} \int_M (\varphi \circ f) d\mu &= \lim_n \int_M (\varphi \circ f) d\mu_n \\ &= \lim_n \int_M \varphi d\mu_n \quad \text{car } \mu_n \text{ est } f\text{-invariante} \\ &= \int_M \varphi d\mu, \end{aligned}$$

et donc $\mu \in \mathcal{P}(f)$.

Enfin, $\mathcal{P}(f)$ est non vide. En effet, soit $x \in X$; on pose

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}, \quad n \in \mathbf{N}_{\geq 1}.$$

Alors $\mu_n \in B^*$ et donc il existe $\mu \in B^*$ et une extraction (n_k) telle que $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Montrons que $\mu \in \mathcal{P}(f)$. Soit $\varphi \in C^0(M)$. Alors

$$\begin{aligned} \mu_{n_k}(\varphi \circ f) &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (\varphi \circ f)(f^j(x)) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{\varphi(f^{n_k}(x)) - \varphi(x)}{n_k} \\ &= \mu_{n_k}(f) + o(1). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\mu \in \mathcal{P}(f)$ puisque

$$\mu(\varphi \circ f) = \lim_k \mu_{n_k}(\varphi \circ f) = \lim_k \mu_{n_k}(\varphi) = \mu(\varphi).$$

Exercice 4. Fonctions harmoniques sur une variété fermée

1. On se ramène au cas \mathbf{R}^n avec une partition de l'unité. On note ϕ_t le flot de X . Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. On a, si λ est la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int (\varphi \circ \phi_t) d\text{vol}_g &= \sum_j \int X^j (\partial_j \varphi) d\text{vol}_g \\ &= \sum_j \int X^j (\partial_j \varphi) \sqrt{|g|} d\lambda \\ &= - \sum_j \int \varphi \partial_j \left(X^j \sqrt{|g|} \right) d\lambda \\ &= - \int \varphi \sqrt{|g|} \text{div}_g(X) d\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi, si la mesure vol_g est préservée par ϕ_t on a nécessairement $\text{div}_g(X) = 0$.

Réciproquement, supposons $\text{div}_g(X) = 0$ et prenons $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Soit $t \in \mathbf{R}$; posons $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi_t$.

On a par ce qui précède

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int (\tilde{\varphi} \circ \phi_s) d\text{vol}_g \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int (\varphi \circ \phi_t \circ \phi_s) d\text{vol}_g \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int (\varphi \circ \phi_{t+s}) d\text{vol}_g \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \int (\varphi \circ \phi_s) d\text{vol}_g . \end{aligned}$$

Par suite l'application $t \mapsto \int (\varphi \circ \phi_t) d\text{vol}_g$ est constante pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Si $\varphi \in C_c^0(\mathbf{R}^n)$, on utilise un argument d'approximation pour obtenir $\int (\varphi \circ \phi_t) d\text{vol}_g = \int \varphi d\text{vol}_g$ pour tout t .

2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(M)$ une fonction harmonique. Posons $X = \nabla^g \varphi$; alors $\text{div}_g(X) = 0$.

En particulier, la mesure vol_g est préservée par le flot de X , noté ϕ_t .

Par l'**Exercice 2**, on sait que vol_g -presque tout point est récurrent par l'application $f = \phi_1 : M \rightarrow M$.

Par l'**Exercice 1** du TD n°8, on sait que pour tout x , $t \mapsto \varphi \circ \phi_t(x)$ est strictement décroissante au voisinage de $t = 0$ si $\nabla^g \varphi(x) \neq 0$.

Si tel est le cas, alors $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$. Posons $\delta = \varphi(x) - \varphi(f(x))$, et $U = \{y \in M, \varphi(y) > \varphi(x) - \delta/2\}$.

Alors U est un voisinage de x et comme $t \mapsto \varphi \circ \phi_t(x)$ décroît, on a $f^k(x) \notin U$ pour tout $k \geq 1$, donc x n'est pas récurrent.

Ainsi, puisque vol_g -presque tout point est récurrent, on a

$$\nabla^g \varphi = 0 \quad \text{vol}_g\text{-presque partout.}$$

Mais $\nabla^g \varphi$ est lisse et dans les cartes on a $\text{vol}_g = \sqrt{|g|} d\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue, ce qui implique que $\nabla^g \varphi = 0$, et donc φ est constante.