

## SYSTÈMES DYNAMIQUES

### Feuille d'exercices 10

#### Exercice 1. Moyennes de Birkhoff pour les permutations

Soit  $\sigma$  une permutation de  $X = \{1, \dots, p\}$ . Montrer que pour toute fonction  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{C}$  et tout  $x \in X$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k(x)) = \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} \sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \varphi(y),$$

où  $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbf{N}\}$  est l'orbite de  $x$ .

#### Exercice 2. Théorème ergodique et isométries

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact,  $f : X \rightarrow X$  une isométrie (i.e.  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ ) et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilités invariante par  $f$  telle que  $\mu(U) > 0$  pour tout ouvert  $U$  non vide. Soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction continue et

$$S_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k.$$

Montrer que  $S_n \varphi$  converge uniformément sur  $X$  vers une fonction continue.

#### Exercice 3. Théorème ergodique sur les espaces métriques compacts

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une transformation mesurable préservant une mesure borélienne de probabilités  $\mu$ . Montrer qu'il existe un ensemble mesurable  $G \subset X$  de mesure totale tel que pour tout fonction continue  $\varphi$  et tout  $x \in G$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ f^k)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}(x),$$

où  $\bar{\varphi}$  est la fonction limite des moyennes de Birkhoff de  $\varphi$  donnée par le théorème ergodique.

#### Exercice 4. Unique ergodicité et densité des orbites

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une transformation continue. On suppose qu'il existe une unique mesure borélienne de probabilités invariante  $\mu$  et que  $\mu(A) > 0$  pour tout ouvert non vide  $A$ . Montrer que toutes les orbites de  $f$  sont denses dans  $X$ .

#### Exercice 5. Le théorème de Von Neumann via le théorème de Birkhoff

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé,  $\varphi \in L^2(\mu)$  et  $\bar{\varphi} \in L^1(\mu)$  sa fonction associée dans le théorème de Birkhoff.

On note aussi  $S_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$ . On cherche à retrouver le théorème de Von Neumann.

1. Montrer que  $\bar{\varphi} \in L^2(\mu)$  et que  $\|\bar{\varphi}\|_{L^2(\mu)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mu)}$ .
2. Montrer que  $S_n \varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  dans  $L^2(\mu)$ .

**Exercice 6.** *Explosion des sommes de Birkhoff et positivité de la moyenne*

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de probabilités et  $f : X \rightarrow X$  une application mesurable préservant  $\mu$ . Soit  $\varphi \in L^1(\mu)$ . On suppose que pour  $\mu$  presque tout  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \varphi(f^j(x)) = +\infty.$$

On cherche à montrer que  $\int_X \varphi \, d\mu > 0$ .

On note  $T_n \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$A_\varepsilon = \bigcap_{n \geq 1} \{T_n \varphi \geq \varepsilon\}, \quad B_\varepsilon = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(A_\varepsilon).$$

1. Montrer que  $\int_X \varphi \, d\mu \geq 0$ .
2. Soit  $x \in A_\varepsilon$ . Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$T_n \varphi(x) \geq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_\varepsilon}(f^k(x)).$$

3. Montrer que si  $\int_X \varphi \, d\mu = 0$  alors  $\mu(B_\varepsilon) = 0$ .
4. Conclure.

**Exercice 7.** *Applications uniformément quasi-périodiques sur  $\mathbf{N}$* 

Une application  $\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  sera dite *uniformément quasi-périodique* si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L(\varepsilon) \in \mathbf{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \exists \tau \in \{n+1, \dots, n+L(\varepsilon)\}, \forall k \in \mathbf{Z}, \quad |\varphi(k+\tau) - \varphi(k)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si  $\varphi$  est uniformément quasi-périodique, elle est bornée.
2. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\rho \geq 1$  tel que

$$\frac{1}{\rho} \left| \sum_{j=n\rho}^{n(\rho+1)} \varphi(j) - \sum_{j=1}^{\rho} \varphi(j) \right| < 2\varepsilon, \quad n \geq 1.$$

3. Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(j)$  converge quand  $n \rightarrow +\infty$ .
4. Montrer plus généralement que la limite

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(x+j)$$

existe pour tout  $x \in \mathbf{Z}$  et est indépendante de  $x$ .