Systèmes dynamiques

TD n°11

Yann Chaubet

1 décembre 2020

Exercice 1

1. Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$, et écrivons

$$\varphi = \sum_k c_k \mathrm{e}_k, \quad \psi = \sum_k d_k \mathrm{e}_k,$$

où $\mathrm{e}_k(\theta) = \exp(2i\pi k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Alors

$$\psi(m^n\theta) = \sum_k d_k \exp(2i\pi k m^n \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \varphi(\psi \circ E_m^n) \mathrm{d}\mu &= \sum_k c_{-km^n} d_k \\ &= c_0 d_0 + \sum_{k \neq 0} c_{km^n} d_k, \end{aligned}$$

et on a

$$\left| \sum_{k \neq 0} c_{km^n} d_k \right| \leqslant \left(\sum_{|j| \geqslant m^n} |c_j|^2 \right) \left(\sum_{j \neq 0} |d_j|^2 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

2. a) On a

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2ik\pi\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\psi(\theta)\frac{\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}}{-2i\pi k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{-2i\pi k}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2i\pi k}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta$$

Une récurrence immédiate donne pour tout $N \geqslant 0$

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{(2ik\pi)^N}\int_0^{2\pi} \psi^{(N)}(\theta)\mathrm{e}^{-2ik\pi\theta}\mathrm{d}\theta.$$

En particulier

$$\left|\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\left\|\psi^{(N)}\right\|_\infty}{(2\pi)^{N-1}}\frac{1}{|k|^N}.$$

2. b) On a, avec les notations de la question **1.**,

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq 0}|c_{-jm^n}|^2 &\leqslant C\sum_{j\neq 0}\frac{1}{(|j|m^n)^N}\\ &\leqslant \frac{C}{m^{nN}}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|j|^N}\\ &\leqslant \tilde{C}\mathrm{e}^{-rn},\end{aligned}$$

où $r = N\log m$.

Exercice 2

Soit $m \geqslant 2$. On pose

$$\chi_{k,m} = \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right[}, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Alors pour tout $x \in [0,1)$ on a

$$a_j(x) = k \iff \chi_{k,m}(\{m^j x\}) = 1, \quad \{m^j x\} = m^j x - [m^j x].$$

L'application $E_m : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est mélangeante, donc ergodique pour μ. Par le théorème ergodique, il existe $A_m \subset \mathbb{T}$ avec $\mu(A_m) = 1$ tel que pour tout $x \in A_m$ on a

$$\frac{1}{n} \#\{k,\ a_k(x) = j\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\chi_{j,m} \circ (E_m)^k](x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{T}} \chi_{j,m} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{m}$$

Ainsi si on pose $A = \bigcap_m A_m$, on a $\mathrm{Leb}(A) = 1$ et tout $x \in A$ est normal.

Exercice 3

1. Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $f \circ R_\alpha = f$ μ-presque partout. Notons $f(\theta) = \sum_k c_k \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta}$. Alors l'invariance de f donne, pour μ-presque tout $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$\sum_k c_k \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta} \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\alpha} = \sum_k c_k \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta}.$$

Ceci implique que

$$c_k \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\alpha} = c_k, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Puisque $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est libre sur $\mathbb{Q}$, on obtient

$$c_k = 0, \quad k \neq 0,$$

c'est-à-dire que f est μ-presque partout égale à une constante. La transformation R_α n'est pas mélangeante : si $C = [-\varepsilon, \varepsilon]^d$, on a

$$R_\alpha^{-j}(C) = \prod_{\ell=1}^{d} \left[-\varepsilon - j\alpha_\ell, \varepsilon - j\alpha_\ell\right] \qquad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^d.$$

Ainsi si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $R_\alpha^{-j}(C) \cap C = \emptyset$, ce qui conclut.

2. C'est le théorème de Birkhoff appliqué à $\mathbf{1}_C \in L^1(\mu)$.

3. On applique l'**Exercice 2** du TD n°10 : R_α est une isométrie et $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U, donc $S_n\varphi$ converge uniformément vers une fonction continue ψ. Comme R_α est ergodique pour μ, alors ψ est constante égale à $\int_{\mathbb{T}^d} \varphi \mathrm{d}\mu$.

4. Soit $\varepsilon > 0$ et C un produit d'intervalles. On se donne deux fonctions lisses $\chi_\varepsilon^\pm : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ telles que

$$\chi_\varepsilon^- \leqslant \mathbf{1}_C \leqslant \chi_\varepsilon^+ \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}^d} |\chi_\varepsilon^\pm - \mathbf{1}_C| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{T}^d$ on a

$$S_n \chi_\varepsilon^-(x) \leqslant S_n \mathbf{1}_C(x) \leqslant S_n \chi_\varepsilon(x),$$

et donc

$$\int \chi_\varepsilon^- \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leqslant \limsup_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leqslant \int \chi_\varepsilon^+ \mathrm{d}\mu.$$

On obtient donc

$$\mu(C) - \varepsilon \leqslant \liminf_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leqslant \limsup_n S_n \mathbf{1}_C(x) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $S_n\varphi(x) \to \mu(C)$ quand $n \to +\infty$.

5. Le premier chiffre de 2^n est $j \neq 0$ si et seulement si, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a

$$10^k j \leqslant 2^n < 10^k(j+1),$$

ce qui équivaut à

$$\log_{10}(j) + k \leqslant n \log_{10}(2) < \log_{10}(j+1) + k.$$

Ainsi, en notant $\alpha = \log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$, on a que le premier chiffre de 2^n est j si et seulement si

$$R_\alpha^n(0) \in [\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[\qquad \mod \mathbb{Z}.$$

La fréquence d'apparition asymptotique de 7 est donc donnée par

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum \mathbf{1}_{[\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[}(R_\alpha^n(0)) = \log_{10}(8/7) \approx 5,8\%.$$

Exercice 4

On pose $E = \left\{ \sum_{|k| \leqslant K} c_k e_k,\ c_k \in \mathbb{C},\ K \in \mathbb{N} \right\}$. Alors E est dense dans $L^2(\mu)$.

Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$ et $\varepsilon > 0$, et $\varphi', \psi' \in E$ tels que $\|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$ et $\|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$.

Pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mu)$ on notera $C_n(\varphi_1, \varphi_2) = \int (\varphi_1 \circ f^n) \varphi_2 \mathrm{d}\mu$.

Alors

$$\begin{aligned}
|C_n(\varphi, \psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| &\leqslant C_n(|\varphi|, |\psi - \psi'|) + C_n(|\varphi - \varphi'|, |\psi'|) \\
&\quad + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| + |\mu(\varphi')\mu(\psi' - \psi)| \\
&\quad + |\mu(\varphi' - \varphi)\mu(\psi)| \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mu)} \|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi'\|_{L^2(\mu)} \|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} \\
&\quad + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| \\
&\quad + \varepsilon \left(\|\varphi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi\|_{L^2(\mu)} \right) \\
&\leqslant C\varepsilon + |C_n(\varphi', \psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| .
\end{aligned}$$

On obtient donc, avec une constante C dépendant uniquement de φ, ψ, que pour tout $n \gg 1$,

$$|C_n(\varphi, \psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| \leqslant (C+1)\varepsilon$$

Ceci conclut.

Exercice 5

$\underline{(ii) \implies (i)}$ Vu en cours.

$\underline{(i) \implies (iii)}$ On suppose $1 \in \mathrm{sp}(A^r)$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que

$$\left(A^\top\right)^r(k) = k.$$

On définit

$$\varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{e}^{2i\pi k \cdot A^j \theta}, \quad \theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d.$$

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(A\theta) &= \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{e}^{2i\pi k \cdot A^{j+1}\theta} \\ &= \varphi(\theta),\end{aligned}$$

où on a utilisé $k \cdot A^r \theta = \left(A^\top\right)^r k \cdot \theta = k \cdot \theta$.

$\underline{(iii) \implies (ii)}$ On suppose que $1 \notin \mathrm{sp}(A^r)$ pour tout r. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}^d$; on a

$$\int (\mathrm{e}_k \circ A^n)\mathrm{e}_\ell \mathrm{d}\mu = 0$$

si n est assez grand. En effet on a

$$(\mathrm{e}_k \circ A^n)(\theta) = \exp(2i\pi k \cdot A^n\theta) = \mathrm{e}_{(A^\top)^n k}(\theta),$$

et le fait que $1 \notin \mathrm{sp}(A^r)$ pour tout r implique que l'application

$$\mathbb{Z} \ni n \longmapsto \left(A^\top\right)^n k$$

est injective. En particulier $\left(A^\top\right)^n k \neq \ell$ pour tout $|n|$ assez grand.

On peut alors appliquer l'**Exercice 4** pour conclure, puisque $(\mathrm{e}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Exercice 5

1. On applique le théorème de Kac :

$$\int_A \tau \mathrm{d}\mu = \mu(X) - \mu(A_0^*), \quad A_0^* = \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(\complement A).$$

Or A_0^* est invariant par f : en effet, on a

$$f^{-1}(A_0^*) = \bigcap_{n\geqslant 1} f^{-n}(\complement A),$$

ce qui donne $A_0^* \subset f^{-1}(A_0^*)$. D'autre part on a

$$f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^* = \{x \in A,\ f^n(x) \notin A,\ n \geqslant 1\}.$$

Par le théorème de Récurrence de Poincaré, on a donc $\mu(f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^*) = 0$ et donc A_0^* est invariant.

Par ergodicité de f, on obtient $\mu(A_0^*) = 0$ ou 1.

Mais $\mu(A_0^*) = 1$ implique en particulier que $\mu(\complement A) = 1$ ce qui est impossible car $\mu(A) > 0$.

On a bien $\int_A \tau \mathrm{d}\mu = \mu(X) = 1$.

Il s'agit de montrer que g est ergodique pour $\mu_A = \mu(A \cap \cdot)/\mu(A)$.

Soit $B \subset A$ un ensemble g-invariant de mesure non nulle. On note $\tau' : B \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ le temps de retour associé à B, qui est défini μ-presque partout sur B, et g' l'application de premier retour.

Puisque B est g-invariant, on a $g(x) \in B$ pour presque tout $x \in B$, ce qui donne

$$g|_B = g' \qquad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

En utilisant $\tau' \geqslant \tau$, on obtient que

$$\tau|_B = \tau' \qquad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

Par la question **1.**, on a donc

$$1 = \int_B \tau' \mathrm{d}\mu = \int_B \tau \mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_A \tau \mathrm{d}\mu}_{=1} - \int_{A \setminus B} \tau \mathrm{d}\mu,$$

ce qui donne

$$0 = \int_{A \setminus B} \tau \mathrm{d}\mu \geqslant \mu(A \setminus B) \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) = \mu(A).$$

Ainsi g est ergodique pour μ_A, et donc, pour μ-presque tout x de A,

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau\left(g^k(x)\right) = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Exercice 6

1. Supposons que $\lim_n \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a_k| = 0$. Pour tout $J \subset \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\alpha_J(n) = \#\big(\{0,\ldots,n-1\} \cap J\big).$$

Pour tout $j \geqslant 1$, l'ensemble

$$I_j = \left\{ n \geqslant 0,\ |a_n| \geqslant \frac{1}{j} \right\}$$

est de densité 0. En effet, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| \ \geqslant \frac{1}{j}\frac{\alpha_{I_j}(n)}{n}.$$

Soit $n_j > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_j$ on a

$$\frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leqslant \frac{1}{j}.$$

On peut supposer (n_j) strictement croissante.

On pose
$$E = \bigcup_{j \geqslant 1} \big(I_j \cap [n_j, n_{j+1}[\big).$$
C'est un ensemble de densité 0 car si $n \in [n_j, n_{j+1}[$ on a $E \cap [0, n[\subset I_j \cap [0, n[$ et donc
$$\frac{\alpha_E(n)}{n} \leqslant \frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leqslant \frac{1}{j}.$$
D'autre part, si $n \notin E$ avec $n \in [n_j, n_{j+1}[$, on a $|a_n| < \dfrac{1}{j}$, et donc
$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \notin E}} |a_n| = 0. \tag{1}$$
Réciproquement on suppose que (1) est satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geqslant$ tel que
$$\alpha_E(n) \leqslant \varepsilon n, \quad n \geqslant n_0,$$
et
$$|a_n| \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant n_0, \quad n \notin E.$$

On obtient donc, si $K = \sup_n |a_n|$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| = \frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{k<n\\ k\notin E}}|a_k| + \sum_{\substack{k<n_0\\ k\notin E}}|a_k| + \sum_{\substack{k>n_0\\ k\notin E}}|a_k|\right)$$
$$\leqslant \frac{K\alpha_E(n)}{n} + \frac{Kn_0}{n} + \varepsilon,$$

et donc pour tout n assez grand,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| < (2K+1)\varepsilon,$$

ce qui conclut.

2. C'est direct par la question précédente.