École Normale Supérieure
2019/2020

Pour toute question :
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé DM n°1

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

Notations et préliminaires

1. Soit $f \in \mathrm{Homeo}(\mathbf{T})$. Soit $x \in \pi^{-1}(f(\hat{\frac{1}{2}}))$. Les restrictions

$$\pi|_{\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[} : \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[\to \mathbf{T}-\left\{\hat{\tfrac{1}{2}}\right\}, \qquad \pi|_{]x,x+1[} :]x,x+1[\to \mathbf{T}-\left\{f\left(\hat{\tfrac{1}{2}}\right)\right\}$$

sont des homéomorphismes. Donc $F := \pi|_{]x,x+1[}^{-1} \circ f \circ \pi|_{\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[}$ définit un homéomorphisme de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ dans $]x,x+1[$ (en particulier, il est monotone). On peut étendre F à un homéomorphisme de $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ dans un intervalle ouvert contenant $]x,x+1[$ en étendant $F|_{\left]-\frac{1}{2},0\right[}$ à $]-1,0[$ (qui est homéomorphe à $\mathbf{T}-\{\hat{0}\}$) de manière similaire (cette extension est monotone et continue, donc elle est nécessairement un homéomorphisme). De même, F s'étend à un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Soient maintenant F et G deux relevés de f, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \pi(F(x)) = f(\pi(x)) = \pi(G(x)),$$

d'où $F(x) - G(x) \in \mathbf{Z}$. Comme $\mathbf{Z}$ est complètement discontinu, l'application continue $x \mapsto F(x) - G(x)$ prend une seule valeur $k \in \mathbf{Z}$.

2. a. Comme

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)),$$

on voit que $x \mapsto F(x+1)$ est encore un relevé de f. Par la partie précédent, il existe $d \in \mathbf{Z}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad F(x+1) = F(x) + d.$$

b. On sait que F^{-1} relève f^{-1}. Il existe donc $e \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \qquad F^{-1}(y+1) = F^{-1}(y) + e.$$

Mais alors $1 = F^{-1}(F(1)) = F^{-1}(F(0)+d) = F^{-1}(F(0)) + de = de$. Il suit que $d = \pm 1$.

Le nombre de rotation de Poincaré

3. Pour $0 \leq x \leq y < 1$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x) - F(y) - x + y \geq F(x) - F(y) > F(0) - F(1) = -1.$$

De plus,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x) - F(y) - x + y \leq y - x < 1 - 0 = 1.$$

Ainsi,

$$-1 < \varphi(x) - \varphi(y) < 1 \tag{1}$$

pour $x, y \in [0, 1[$ (par symmétrie). Par périodicité de φ, (1) est vraie pour $x, y \in \mathbf{R}$.

4. Comme $F^n \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbf{T})$, (1) s'applique en remplaçant F par F^n. De plus, la fonction $F^n - \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ est continue, périodique, donc m_n et M_n sont bien définis et vérifient a fortiori l'inégalité

$$0 \leq M_n - m_n < 1. \tag{2}$$

5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$(F^n(F^{n'}(x)) - F^{n'}(x)) + (F^{n'}(x) - x) = F^{n+n'}(x) - F(x),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad m_n + m_{n'} \leq F^{n+n'}(x) - F(x) \leq M_n + M_{n'}.$$

Il suit que

$$m_n + m_{n'} \leq m_{n+n'} \leq M_{n+n'} \leq M_n + M_{n'}. \tag{3}$$

6. Un résultat basique dit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{M_n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \sup_{n\geq 1} \frac{m_n}{n}.$$

De (2), les deux valeurs ci-dessus sont égales.

7. On a $\frac{m_n}{n} \leq \rho \leq \frac{M_n}{n}$. La fonction $x \mapsto \frac{F^n(x)-x}{n}$ a pour valeurs minimale et minimale respectivement $\frac{m_n}{n}$ et $\frac{M_n}{n}$. Par continuité, il existe $z_n \in \mathbf{R}$ avec

$$\frac{F^n(z_n) - z_n}{n} = \rho.$$

8. Invoquons (1) en remplaçant F par F^n et y par z_n et nous obtenons

$$\forall n \geq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad -1 < F^n(x) - x - n\rho < 1. \tag{4}$$

En remplaçant x par $F^{-n}(x)$, on voit que

$$\forall n \geq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad -1 < x - F^{-n}(x) - np < 1,$$

i.e. (4) reste vraie pour $n \leq -1$. Bien sûr, elle est vraie pour $n = 0$. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho.$$

Quelques propriétés du nombre de rotation

9. Si $\rho(F) = p/q$, on prend $x = z_q$ dans la partie **7.**. Inversement, s'il existe $x \in \mathbf{R}$ avec $F^q(x) = x + p$, alors on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \qquad F^{nq}(x) = x + np.$$

Ainsi

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{nq} + \frac{p}{q} \right) = \frac{p}{q}.$$

10. On sait que $\rho(F) \neq p/q$ ssi $F^q(x) - x \neq p$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ par la partie précédente. Par connexité, on sait que ou bien $F^q(x) - x > p$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, ou bien $F^q(x) - x < p$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On considére le premier cas. Par récurrence, on a

$$\forall n \geq 1, \qquad F^{nq}(0) > np,$$

d'où

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(0)}{nq} \geq \frac{p}{q}.$$

Mais comme $\rho(F) \neq p/q$, on a $\rho(F) > p/q$. Le cas $F^q(x) - x < p$ peut être traité de manière similaire.

11. On a

$$\rho(T_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{T_\alpha^n(0)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha}{n} = \alpha.$$

12. Soit $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto F(x) + p$. Alors

$$\rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(0)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0) + np}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0)}{n} + p = \rho(F) + p.$$

Il suit que $\widehat{\rho(F)} = \widehat{\rho(G)}$. On en déduit que pour tout $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T})$, la classe $\widehat{\rho(F)}$ ne dépend pas du relevé F choisi.

13. On a

$$\rho(F^q) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^q)^n(0)}{n} = \lim_{n\to\infty} q \cdot \frac{F^{nq}(0)}{nq} = q\rho(F).$$

Dynamique des homéomorphismes de nombre de rotation rationel

14. Il suit de la partie **9.** que F admet un point fixe ssi $\rho(F) = 0$.

15. Let $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \omega_F(x)$. Il existe alors une suite strictement croisssante $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers telle que

$$\lim_{k\to\infty} F^{n_k}(x) = y.$$

Par continuité,

$$\lim_{k\to\infty} F^{n_k+1}(x) = F(y).$$

Considérons le cas où $F(x) \geq x$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $n_k + 1 \leq n_{k+1}$, d'où

$$F^{n_k}(x) \leq F^{n_k+1}(x) \leq F^{n_{k+1}}(x).$$

En prennant limite quand $n \to \infty$, on obtient $F(y) = y$. Le cas où $F(x) < x$ est traité de manière similaire. Ainsi $\omega_F(x) \subseteq \mathrm{Fix}(F)$. Finalement,

$$\alpha_F(x) = \omega_{F^{-1}}(x) \subseteq \mathrm{Fix}(F^{-1}) = \mathrm{Fix}(F).$$

16. En ajoutant un multiple de q à p si nécessaire, on peut supposer que $\rho(F) = p/q$.
Fait. *Si $\hat{x} \in \mathbf{T}$ est un point r-périodique de f, alors $q|r$.*

Démonstration. Soit $x \in \pi^{-1}(\hat{x})$. On a $F^r(x) = x + n$ pour un certain $n \in \mathbf{Z}$. De **9.**, $\frac{p}{q} = \rho(F) = \frac{n}{r}$. Ainsi, $q|qn = pr$. L'affirmation suit du fait que p et q sont premiers entre eux. □

La fonction $G : x \mapsto F^q(x) - p$ est un relevé de f^q et

$$\rho(G) = q\rho(F) - p = 0.$$

De **14.**, G admet un point fixe x, i.e. $\hat{x}$ est un point q-périodique de f. Le fait ci-dessus implique $\hat{x}$ est de période exactement q, i.e., $\gamma_f(x)$ est une orbite de période q. Supposons maintenant que $\hat{y} \in \mathbf{T}$ est un point périodique. Soit rp sa période, alors

$$G^r(y) - y = F^{rq}(y) - rp - y \in \mathbf{Z}.$$

où $y \in \pi^{-1}(\hat{y})$. Comme $\rho(G^r) = r\rho(G) = 0$, il est nécessaire que

$$G^r(y) = y.$$

Donc, $y \in \gamma_G(y) = \omega_G(y) \subseteq \mathrm{Fix}(G)$ par la partie 15, d'où $G(y) = y$ et puis $f^q(\hat{y}) = \hat{y}$. Le fait ci-dessus assure que $\hat{y}$ est de période q.

17. Soit x le point fixe de G comme dans la partie précédente. Alors G induit un homéomorphisme de $]x, x+1[$ dans lui-même. Bien sûr, $\omega_f(\hat{x}) = \{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ est une orbite périodique. Pour $\hat{y} \in \mathbf{T} - \{\hat{x}\}$, soit y l'unique point de $]x, x+1[\cap \pi^{-1}(\hat{y})$. La suite $(G^n(y))_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone donc converge. Soit $z \in \mathbf{R}$ sa limite, alors

$$z \in \omega_G(y) \subseteq \mathrm{Fix}(G).$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} f^{nq}(\hat{y}) = \hat{z}$. Affirmons que

$$\omega_f(\hat{y}) = \{\hat{z}, f(\hat{z}), \ldots, f^{q-1}(\hat{z})\}.$$

En effet, soit $\hat{u} \in \omega_f(\hat{y})$. Il existe alors une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers telle que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\hat{y}) = \hat{u}.$$

Quitte à choisir une sous-suite, on peut supposer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad n_k = b_k q + r$$

pour un certain $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ et une suite strictement croissante $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers. On a alors

$$f^{-r}(\hat{u}) = \lim_{k\to\infty} f^{b_k q}(\hat{y}) = \hat{z},$$

d'où $\hat{u} = f^r(\hat{z})$. On conclut que $\omega_f(\hat{y}) \subseteq \{\hat{z}, f(\hat{z}), \ldots, f^{q-1}(\hat{z})\}$. L'inclusion inverse est claire : pour tout $0 \le i \le q-1$, on a

$$f^i(\hat{z}) = \lim_{n\to\infty} f^{nq+i}(\hat{y}).$$

Le cas irrationnel

18. On se donne $(p,q), (p',q') \in \mathbf{Z}$. Si $\psi(p,q) = \psi(p',q')$, on aura

$$q\rho - p = q'\rho - p'.$$

Il est nécessaire que $q = q'$ (sinon, $\rho = \frac{p-p'}{q-q'} \in \mathbf{Q}$), d'où $p = p'$. Ainsi, ψ est injective. On suppose maintenant que $\psi'(p,q) = \psi'(p',q')$, i.e., $F^q(x) - p = F^{q'}(x) - p'$. Si, par exemple, $q > q'$, on aura

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) = F^{q'}(x) + p - p'.$$

Il suit que $\rho = \frac{p-p'}{q-q'} \in \mathbf{Q}$. De conclure, $q = q'$ et donc $p = p'$. Autrement dit, ψ' est aussi injective. Le fait que $Z = \psi(\mathbf{Z}^2)$ est dense est un résultat bien connu. *Je ne pense pas que Z' soit dense.*

19. On considère $(p,q) \neq (p',q')$ dans $\mathbf{Z}^2$ tels que

$$\psi(p,q) > \psi(p',q').$$

a. Si $q > q'$, alors $\rho > \frac{p-p'}{q-q'}$. Il suit de la partie **10.** que

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) > F^{q'}(x) + p - p',$$

i.e., $\psi'(p,q) > \psi'(p',q')$.

b. Si $q = q'$, alors $p < p'$, d'où

$$\psi'(p,q) = F^q(x) - p > F^{q'}(x) - p' = \psi'(p',q').$$

c. Si $q < q'$, alors $\rho < \frac{p'-p}{q'-q}$. De **10.**, on a

$$F^{q'-q}(F^q(x)) < F^q(x) + p' - p,$$

i.e., $\psi'(p,q) > \psi'(p',q')$.

On conclut que

a. $\psi(p,q) = \psi(p',q') \iff \psi'(p,q) = \psi'(p',q')$.

b. $\psi(p,q) > \psi(p',q') \iff \psi'(p,q) > \psi'(p',q')$.

c. $\psi(p,q) < \psi(p',q') \iff \psi'(p,q) < \psi'(p',q')$.

Il suit directement que $H := \psi \circ \psi' : Z' \to Z$ est croissante. Affirmons que pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$\sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\} = \inf\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) > y\}.$$

Bien sûr, le côté à gauche est majoré par celui à droite. Si l'inégalité est stricte, le fait que Z est dense nous permet de trouver $(p_0, q_0) \in \mathbf{Z}^2$ avec

$$\sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\} < \psi(p_0,q_0) < \inf\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) > y\}.$$

a. Si $y < \psi'(p_0,q_0)$, soit $(p_1,q_1) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $y < \psi'(p_1,q_1) < \psi'(p_0,q_0)$. Mais alors $\psi(p_1,q_1) < \psi(p_0,q_0)$ et à la fois

$$\psi(p_1,q_1) \geq \inf\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) > y\} > \psi(p_0,q_0).$$

b. De même, on ne peut pas avoir $y > \psi'(p_0,q_0)$.

c. Finalement, si $y = \psi'(p_0,q_0)$, trouvons $(p_1,q_1) \in \mathbf{Z}^2$ de sorte que

$$\sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\} < \psi(p_1,q_1) < \psi(p_0,q_0).$$

On a $\psi'(p_1,q_1) < \psi'(p_0,q_0) = y$, qui implique que

$$\psi(p_1,q_1) \leq \sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\},$$

c'est contradictoire.

La fonction H s'étendre alors à une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en posant

$$\forall y \in \mathbf{R}, \qquad H(y) := \sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\} = \inf\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) > y\}.$$

Montrons que H est surjective. Étant donné $z \in \mathbf{R}$, on peut trouver une suite $((p_n,q_n))_{n\in\mathbf{N}}$ délément de $\mathbf{Z}^2$ telle que $\psi(p_n,q_n) \uparrow z$. De plus, on peut trouver un certain $(p',q') \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $\psi(p',q') \geq z$. La suite $(\psi'(p_n,q_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est alors croissante est a une borne supérieure $\psi'(p',q')$. Soit $y \in \mathbf{R}$ sa limite. Montrons que $H(y) = z$.

Pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\psi'(p,q) < y$, il existe $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $\psi'(p,q) < \psi'(p_n,q_n) \leq y$. On a donc $\psi(p,q) < \psi(p_n,q_n) \leq z$. Il suit que

$$H(y) = \sup\{\psi(p,q)|\psi'(p,q) < y\} \leq z.$$

De même, pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\psi'(p, q) > y$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \psi'(p, q) > y \geq \psi'(p_n, q_n),$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \psi(p, q) > \psi(p_n, q_n).$$

On obtient alors $\psi(p, q) \geq z$. Il suit que

$$H(y) = \inf\{\psi(p, q) | \psi'(p, q) > y\} \geq z.$$

Ainsi, $H(y) = z$. La surjectivité de H est démontrée. Bien sûr, H est croissante, donc est continue. Finalement, pour $y \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} H(y+1) &= \sup\{q\rho - p | F^q(x) - p < y + 1\} \\ &= \sup\{q\rho - (p-1) | F^q(x) - p < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p | F^q(x) - p < y\} + 1 \\ &= H(y) + 1. \end{aligned}$$

20. La composition $\pi \circ H : \mathbf{R} \to \mathbf{T}$ satisfait $\pi(H(y+1)) = \pi(H(y)+1) = \pi(H(y))$ pour tout $y \in \mathbf{R}$, donc elle se factorise par $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{T}$. Autrement dit, il existe une surjective continue $h : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ telle que H soit un relevé de h. Montrons que

$$h \circ f = R_\rho \circ h.$$

En effet, pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} H(F(y)) &= \sup\{q\rho - p | F^q(x) - p < F(y)\} \\ &= \sup\{q\rho - p | F^q(x - p) < F(y)\} \\ &= \sup\{q\rho - p | F^{q-1}(x - p) < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p | F^{q-1}(x) - p < y\} \\ &= \sup\{(q+1)\rho - p | F^q(x) - p < y\} \\ &= \sup\{q\rho - p | F^q(x) - p < y\} + \rho \\ &= H(y) + \rho. \end{aligned}$$

Il suit que

$$h(f(\hat{y})) = h(\hat{y}) + \hat{\rho} = R_\rho(h(\hat{y})).$$

-

Le théorème de Denjoy

21. On suppose que $\hat{y}, \hat{z}$ sont deux points différents dans $\mathbf{T}$ qui sont envoyés par h sur $\hat{x}$. Soit $x \in \pi^{-1}(\hat{x}), y \in \pi^{-1}(\hat{y})$ et $z \in$ tels que $H(y) = x$ et que $y < z < y + 1$. Alors $H(z) - H(y) \in \mathbf{Z}$ et

$$x = H(y) \leq H(z) \leq H(y+1) = H(y) + 1 = x + 1.$$

Donc $H(z) \in \{x, x+1\}$. Considérons le cas où $H(z) = x$. Comme H est croissante, on a $H(u) = x$ pour tout $y \leq u \leq z$. L'intervalle

$$I := \{\hat{u} | y < u < z\}$$

de $\mathbf{T}$ est errant. En effet, $h(I) = \{\hat{x}\}$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\forall \hat{u} \in I, \qquad h(f^n(\hat{u})) = h(\hat{u}) + n\hat{\rho} = \hat{x} + n\hat{\rho}.$$

Il suit que $h(f^n(I)) = \{\hat{x} + n\hat{\rho}\}$. Comme ρ est irrationnel, on sait que $h(f^n(I)) \cap h(I) = \varnothing$. Dans le cas où $H(z) = x + 1$, l'intervalle

$$\{\hat{u} | z < u < y + 1\}$$

est errant. On en déduit que si f n'a pas d'intervalle errant, alors h est injective, donc bijective. Comme $\mathbf{T}$ est compact et séparé, h est un homéomorphisme, i.e., f est conjugué à R_ρ.

22. Comme f est un homéomorphisme, les intervalles $f^n(I)$ et $f^m(I)$ sont disjoints pour tous $n, m \in \mathbf{Z}$ satisfaisant $n \neq m$. Par σ-additivité,

$$1 = \ell(\mathbf{T}) \geq \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ell(f^n(I)),$$

qui implique que $\ell(f^n(I)) + \ell(f^{-n}(I)) \to 0$ quand $n \to \infty$.

23. Soit d une distance sur $\mathbf{T}$ qui induit sa topologie. On va montrer qu'il existe une infinité d'indices $q_n \in \mathbf{N}$ tels qu'il existe un intervalle fermé J_n joignant $\hat{0}$ et $q_n\hat{\rho}$ vérifiant la propriété que $k\hat{\rho}$ ne soit pas dans J_n pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $0 < |k| < q_n$. Pour ce faire, posons

$$\forall n \geq 1, \qquad A_n := \{k\hat{\rho} \,|\, 0 < |k| < n\}.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe $k_n \in \mathbf{Z}$ avec $0 < |k_n| < n$ tel que l'une des inégalités suivante

$$0 < \beta_n < \alpha_n \leq \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{2} < \alpha_n < \beta_n < 0,$$

où $\beta_n \in \pi^{-1}(k_n\hat{\rho})$ et $\alpha_n \in \pi^{-1}(n\hat{\rho})$. Dans les deux cas, $d(\hat{0}, k_n\hat{\rho}) < d(\hat{0}, n\hat{\rho})$ et $d(\hat{0}, -k_n\hat{\rho}) < d(\hat{0}, -n\hat{\rho})$. Il suit que $d(\hat{0}, A_n) = d(\hat{0}, A_{n+1})$. Ainsi

$$\lim_{n \to \infty} d(\hat{0}, A_n) = d(\hat{0}, A_N) > 0,$$

qui contradit le fait que $\{k\hat{\rho} \,|\, k > 0\}$ est dense dans $\mathbf{T}$. On conclut.

Soit $\hat{x} \in \mathbf{T}$. Soit I_n une composante connexe de $h^{-1}(h(\hat{x}) + J_n))$, qui est un intervalle fermé joignant $\hat{x}$ et $f^{q_n}(\hat{x})$. En effet,

$$h(\hat{x}) \qquad \text{et} \qquad h(f^{q_n}(\hat{x})) = h(\hat{x}) + q_n\hat{\rho}$$

sont les deux extrémités de J_n. Comme h est continue est croissante, $\hat{x}$ et $f^{q_n}(\hat{x})$ sont les deux extrémités de I_n. Affirmons que les intervalles $f^k(I_n)$, $k = 0, \ldots, q_n - 1$ sont disjoints deux à deux. Supposons par l'absurde qu'il existe $0 \leq k < k' < q_n$ et un point $\hat{y} \in I_n$ tels que $f^k(\hat{y}) \in f^{k'}(I_n)$. Mais alors

$$h(\hat{y}) + k\hat{\rho} = h(f^k(\hat{y})) \in h(f^{k'}(I_n)) = k'\hat{\rho} + h(I_n) = h(\hat{x}) + k'\hat{\rho} + J_n.$$

De plus, $h(\hat{y}) \in h(I_n) = h(\hat{x}) + J_n$, donc

$$h(\hat{y}) - h(\hat{x}) \in J_n \cap ((k' - k)\hat{\rho} + J_n).$$

Il suit que l'un des extrémités de J_n (à savoir $\hat{0}$ et $q_n\hat{\rho}$) appartient à $(k' - k)\hat{\rho} + J_n$. Si $\hat{0} \in (k' - k)\hat{\rho} + J_n$, $(k - k')\hat{\rho} \in J_n$ (qui est contradictoire comme $-q_n < k - k' < 0$). Si $q_n\hat{\rho} \in (k' - k)\hat{\rho} + J_n$, $(q_n + k - k')\hat{\rho} \in J_n$ (impossible car $0 < q_n + k - k' < q_n$).

24. On note par $\mathrm{Var}(g)$ la variation d'une fonction $g : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$. On observe que pour $0 < u < v$,

$$0 < \ln v - \ln u = \ln\left(1 + \frac{v - u}{u}\right) \leq \frac{v - u}{u}. \tag{5}$$

$\mathbf{T}$ étant compact, soit $\varepsilon := \min\limits_{x \in [0,1]} f'(\hat{x}) > 0$. Pour tout $q \geq 1$ et toute séquence $0 \leq x_{q+1} = x_1 < \cdots < x_q < 1$, en appliquant (5), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{q} |\ln f'(\hat{x}_{i+1}) - \ln f'(\hat{x}_i)| &= \sum_{i=1}^{q} \left|\ln\left(1 + \frac{f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)}{f'(\hat{x}_i)}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \frac{|f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)|}{\min\{f'(\hat{x}_{i+1}), f'(\hat{x}_i)\}} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{q} |f'(\hat{x}_{i+1}) - f'(\hat{x}_i)| \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(f')}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Var}(\ln f') \leq \frac{\mathrm{Var}(f')}{\varepsilon} < +\infty$. Pour tout $\hat{x} \in \mathbf{T}$ et $n \geq 1$, soit I_n l'intervalle comme dans la partie précédente. Comme les intervalles $f^k(I_n)$, $k = 0, \ldots, q_n - 1$ sont deux à deux disjoints,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\ln f') &\geq \sum_{k=0}^{q_n - 1} |\ln f'(f^k(f^{q_n}(\hat{x}))) - \ln f'(f^k(\hat{x}))| \\
&\geq \left|\ln \prod_{k=0}^{q_n - 1} (f' \circ f^k)(f^{q_n}(\hat{x})) - \ln \prod_{k=0}^{q_n - 1} (f' \circ f^k)(\hat{x})\right| \\
&= \left|\ln(f^{q_n})'(f^{q_n}(\hat{x})) - \ln(f^{q_n})'(\hat{x})\right|.
\end{aligned}$$

En remplçant $\hat{x}$ par $f^{-q_n}(\hat{x})$ et utilisant le théorème de la dérivée de la fonction inverse,

$$|\ln(f^{q_n})'(\hat{x}) + \ln(f^{-q_n})'(\hat{x})| \leq \mathrm{Var}(\ln f').$$

Il suit que

$$\frac{1}{C} \leq (f^{q_n})'(\hat{x})(f^{-q_n})'(\hat{x}) \leq C,$$

où $C = e^{\mathrm{Var}(\ln f')}$.

25. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\ell(f^{q_n}(I)) + \ell(f^{-q_n}(I)) &= \int_I (f^{q_n})'(\hat{x}) d\ell(\hat{x}) + \int_I (f^{-q_n})'(\hat{x}) d\ell(\hat{x}) \\
&\geq 2 \int_I \sqrt{(f^{q_n})'(\hat{x})(f^{-q_n})'(\hat{x})} d\ell(\hat{x}) \\
&= \frac{2\ell(I)}{\sqrt{C}} > 0,
\end{aligned}$$

qui contradit le fait que $\ell(f^{q_n}(I)) + \ell(f^{-q_n}(I)) \to 0$ quand $n \to \infty$. On en déduit que f n'a pas d'intervalle errant, donc il est conjugué à R_ρ.