École Normale Supérieure chaubet@dma.ens.fr
2020/2021

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 9

Exercice 1. *Exemples de mesures invariantes*

Montrer que la mesure μ est conservée par la transformation $f : X \to X$ (définie μ-pp) dans les cas suivants.

1. $X = [0,1]$, $\mathrm{d}\mu(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x}}$ et $f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$.
2. X est une variété, $f : X \to X$ est un difféomorphisme, x est un point périodique de période n pour f et $\mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{f^k(x)}$.
3. $X = [0,1]$, μ est la mesure de Lebesgue et $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 2-2x & \text{si} \quad 1/2 < x \le 1. \end{cases}$
4. $X = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ est le tore de dimension d, μ est la mesure de Haar sur X et f est un automorphisme de X.
5. $X = [0,1]$, $\mathrm{d}\mu(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\log 2(1+x)}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$, où $[y]$ est la partie entière d'un réel y.

Exercice 2. *Version topologique du théorème de récurrence de Poincaré*

Soit M un espace topologique à base dénombrable et $f : M \to M$ une transformation continue. On dira que $x \in M$ est récurrent pouf f si pour tout voisinage U de x, il existe $n > 0$ tel que $f^n(x) \in U$. Soit μ une mesure borélienne finie sur M invariante par f. Montrer que μ-presque tout point de M est récurrent pouf f.

Exercice 3. *Existence de mesures invariantes*

Soit (X, d) un espace métrique compact. On note $E = \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X muni de la norme

$$\|f\| = \sup_X |f|,$$

et E^* l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|L\|_* = \sup_{\|f\| \le 1} |L(f)|.$$

On dira qu'une suite (L_n) de E^* converge $*$-faiblement vers $L \in E^*$ si pour tout $f \in E$ on a $L_n(f) \to L(f)$.

1. Soit $(f_i) \subset E$ une suite dense dans E. On note $\mathrm{d}_*(L, L') = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|L(f_i) - L'(f_i)|}{2^i(1 + \|f_i\|)}$. Montrer que d_* est une distance sur la boule unité de E^* et que la topologie engendrée coïncide avec la topologie $*$-faible.
2. En déduire que la boule unité de E^* est compacte pour la topologie $*$-faible.
3. Soit $f : X \to X$ une transformation continue. Montrer que l'ensemble des mesures de probabilités sur X invariantes par f est non vide, connexe, et fermé dans l'ensemble des mesures de probabilités sur X (pour la topologie faible-$*$).

Exercice 4. *Fonctions harmoniques sur une variété fermée*

Soit M une variété connexe compacte sans bord, et g une métrique sur M, c'est-à-dire la donnée d'un produit scalaire g_x sur T_xM en tout point $x \in M$ et dépendant de manière lisse de x. La mesure de volume vol_g est donnée en cordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ par
$$\sqrt{|g|}\ \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n,$$
où $|g|(x) = \det\big(g_{ij}(x)\big)$; ici $(g_{ij}(x))$ est la matrice représentant g au point x dans la base $\partial_1, \ldots, \partial_n$, où $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$.
Si X est un champ de vecteurs sur M, on définit sa divergence $\mathrm{div}_g X \in \mathcal{C}^\infty(M)$ localement par
$$\mathrm{div}_g(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(\sqrt{|g|} X^j\right), \quad X = \sum_{j=1}^{n} X^j \partial_j.$$
On admet que ces définitions ne dépendent pas du système de coordonnées choisi.

1. Montrer que le flot de X préserve vol_g si et seulement si $\mathrm{div}_g(X) = 0$.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on note $\nabla^g \varphi$ le gradient le φ, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur M défini par
$$\mathrm{d}_x\varphi \cdot v = g(\nabla^g \varphi(x), v), \quad x \in M, \quad v \in T_xM.$$
On définit aussi l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_g = \mathrm{div}_g \nabla^g$ et on dira que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est harmonique si $\Delta_g \varphi = 0$.

2. Montrer que toute fonction harmonique sur M est constante.

Exercice 5. *Transformation du billard*

On considère le cercle $S^1 = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\big\} \subset \mathbf{R}^2$, et on note $M = S^1 \times \,]-\pi/2, \pi/2[$. On considère une particule qui se déplace dans le disque à vitesse constante et qui rebondit de manière parfaite sur le bord. Un état initial $(q_0, \theta_0) \in M$ détermine entièrement les rebonds $(q_n, \theta_n) \in M$ pour $n \in \mathbf{N}$ (cf. Figure **??**).

1. Exprimer (q_n, θ_n) en fonction de (q_0, θ_0). Montrer que la trajectoire (q_n, θ_n) est périodique si et seulement si $\theta_0 \in \pi\mathbf{Q}$. Calculer le nombre t de tours et le nombre r de rebonds effectués en fonction de $p, q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux où $\theta_0 = \pi p/q$.
2. Montrer que la transformation $T : M \to M$ définie par $T(q_0, \theta_0) = (q_1, \theta_1)$ préserve la mesure $\ell \otimes (\cos\theta\ \mathrm{d}\theta)$ sur M, où ℓ est la mesure de Lebesgue sur S^1.

On considère maintenant une courbe lisse simple (pas d'autointersection) $\gamma : S^1 \to \mathbf{R}^2$ paramétrée par longueur d'arc et délimitant un ouvert Ω strictement convexe et borné, et on considère $M_\gamma = \gamma(S^1) \times \,]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la dynamique de billard $T_\gamma : M_\gamma \to M_\gamma$ comme dans le cas du cercle (cf. Figure **??**).

3. Montrer que T_γ préserve la mesure $\gamma_* \ell \otimes (\cos\theta\ \mathrm{d}\theta)$.

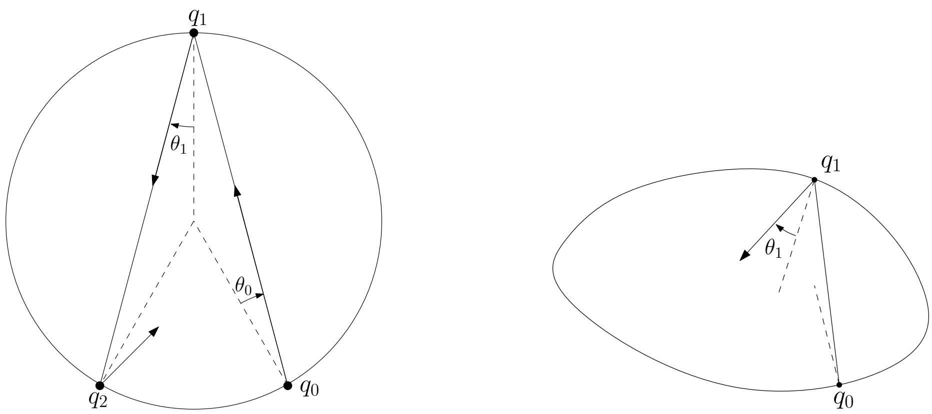

Figure 1: Évolution d'une particule dans un billard

Exercice 6. *Application de retour d'une rotation sur le cercle*

Soit $I = [a, b] \subset [0, 1]$ un intervalle. On dit qu'une transformation $T : I \to I$ est un échange de trois intervalles s'il existe $a \le c \le d \le b$ tels que
$$T\big([a, c)\big) = [d, b), \quad T\big([c, d)\big) = [c, d), \quad T\big([d, b)\big) = [a, c),$$
et tels que T est affine et croissante sur chacun des intervalles précédents. Montrer que l'application de retour sur un intervalle associée à une rotation du cercle est un échange de trois intervalles.