École Normale Supérieure
2019/2020

Pour toute question :
chaubet@dma.ens.fr

# Systèmes dynamiques
# Corrigé DM n°2

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

## Perturbation des valeurs propres

**1.** On a

$$(A-\mu)(A-\lambda)[(A-\lambda)^{-1}-(A-\mu)^{-1}] = (A-\mu)-(A-\lambda) = (\lambda-\mu)\,\mathrm{id}_n,$$

d'où

$$(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1} = \frac{(A-\lambda)^{-1}-(A-\mu)^{-1}}{\lambda-\mu}. \tag{1}$$

**2.** Soient $\rho > \rho' > 0$ tels que $\overline{D}(\lambda,\rho)\cap \mathrm{sp}(A) = \overline{D}(\lambda,\rho')\cap \mathrm{sp}(A) = \{\lambda\}$. Alors $(z-A)^{-1}$ est bien défini, donc tous ses entrées sont holomorphes au voisinage de l'annulus $\{\rho' \leq |z-\lambda| \leq \rho\}$ (car elle sont des fonctions rationnelles). Il suit de la formule de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} (z-A)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} (z-A)^{-1}\,dz.$$

**3.** Soient $\rho > \rho' > 0$ comme dans la partie 2. On a

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} (z-A)^{-1}\,dz\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} (w-A)^{-1}\,dw\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}\times\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} (z-A)^{-1}(w-A)^{-1}\,dzdw\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}\times\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} \frac{(z-A)^{-1}-(w-A)^{-1}}{w-z}\,dzdw \qquad \text{(partie }\mathbf{1.}\text{)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} \frac{dw}{w-z}\right)(z-A)^{-1}\,dz\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} \frac{dz}{z-w}\right)(w-A)^{-1}\,dw.
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} \frac{dw}{w-z} = 0$ pour tout $z \in \mathscr{C}_{\lambda,\rho}$ et $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho'}} \frac{dz}{z-w} = 1$ pour tout $w \in \mathscr{C}_{\lambda,\rho'}$ par la formule de Cauchy. Il suit que $\Pi_\lambda^2 = \Pi_\lambda$.

**4.** On rappelle que la différentielle du déterminant en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est

$$M_n(\mathbf{C}) \ni H \mapsto \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H).$$

Ainsi, pour $d(z) = \det B(z)$, on a

$$d'(z) = \det B(z)\,\mathrm{tr}(B(z)^{-1}B'(z)) = d(z)\,\mathrm{tr}(B(z)^{-1}B'(z)).$$

**5.** Soit $B : \mathbf{C} \to M_n(\mathbf{C})$ définie par $B(z) := z - A$. Elle est holomorphe de dérivée $B'(z) = \mathrm{id}_n$. Soit $N$ l'ordre d'annulation de $d(z) := \det B(z)$ en $\lambda$, qui est la même chose que $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda,\mathbf{C}}$. On a

$$\operatorname{tr}\Pi_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} \operatorname{tr}\left((z-A)^{-1}\right)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} \operatorname{tr}\left(B(z)^{-1}B'(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} \frac{d'(z)}{d(z)}\,dz$$

(partie **4.**). Par la formule de Cauchy cette valeur est $N$. Observons que les entrées de $(z-\lambda)^N(z-A)^{-1}$ sont de la forme

$$\frac{(z-\lambda)^N}{d(z)}P(z), \qquad P \in \mathbf{C}[z].$$

Il suit que ces entrées sont holomorphes au voisinage de $\lambda$. Ainsi

$$(\lambda - A)^N(z-A)^{-1} = (\lambda - z)^N(z-A)^{-1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}(\lambda - z)^{N-k}(z-A)^{k-1}$$

a ses entrées holomorphes au voisinage de $\lambda$. En prenant $\rho$ assez petit

$$(\lambda - A)^N\Pi_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} (\lambda - A)^N(z-A)^{-1}\,dz = 0.$$

Il suit que l'image de $\Pi_\lambda$ est contenue dans $C_{\lambda,\mathbf{C}}$. De **3.**, on sait que $\Pi_\lambda$ est un projecteur. Comme $\operatorname{rang}\Pi_\lambda = \operatorname{tr}\Pi_\lambda = N$, on a $\operatorname{Im}\Pi_\lambda = C_{\lambda,\mathbf{C}}$.

**6.** De **5.**, $\Pi_\lambda$ fixe les vecteurs dans $C_{\lambda,\mathbf{C}}$. Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{sp}(A)$, $\lambda \neq \mu$ et $\rho > 0$ tels que $\overline{D}(\lambda,\rho) \cap \mathrm{sp}(A) = \{\lambda\}$, que $\overline{D}(\mu,\rho) \cap \mathrm{sp}(A) = \{\mu\}$ et que $\overline{D}(\lambda,\rho) \cap \overline{D}(\mu,\rho) = \varnothing$. On a

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda\Pi_\mu &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}} (z-A)^{-1}\,dz\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\mu,\rho}} (w-A)^{-1}\,dw\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}\times\mathscr{C}_{\mu,\rho}} (z-A)^{-1}(w-A)^{-1}\,dzdw\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}\times\mathscr{C}_{\mu,\rho}} \frac{(z-A)^{-1}-(w-A)^{-1}}{w-z}\,dzdw \qquad\qquad \text{(partie } \mathbf{1.}\text{)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\mu,\rho}}\frac{dw}{w-z}\right)(z-A)^{-1}\,dz\\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\mu,\rho}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}}\frac{dz}{z-w}\right)(w-A)^{-1}\,dw\\
&= 0
\end{aligned}$$

par la formule de Cauchy. Ainsi les $\Pi_\lambda$, $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ sont les matrices des projecteurs spectraux complexes associés à $A$.

**7.** Les coefficients de $(z-A)^{-1}$ sont holomorphes au voisinages de $U \setminus \bigcup_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)\cap U}\overline{D}(\lambda,\rho)$ pour $\rho$ assez petit. Par la formule de Cauchy

$$\Pi_U := \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)\cap U}\Pi_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)\cap U}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{\lambda,\rho}}(z-A)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}(z-A)^{-1}\,dz.$$

Comme $U$ est compact, il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de $A$ dans $M_n(\mathbf{C})$ tel que $\det(z-M)$ ne s'annule par sur $\partial U$ pour tout $M \in \mathscr{U}$. Ainsi

$$\Pi_U(M) = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(M)\cap U}\Pi_\lambda(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}(z-M)^{-1}\,dz$$

définit une fonction à entrées holomorphes.

**8.** Pour $u \in C_{\lambda,\mathbf{R}}$, on a $\Pi_\lambda u = u$ (on peut voir $u$ comme un vecteur dans $\mathbf{C}^n$, alors $u \in C_{\lambda,\mathbf{C}}$). De même, si $\mu \in \operatorname{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ est différente de $\lambda$, on a $\Pi_\lambda u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu,\mathbf{R}}$. Finalement si $\mu \in \operatorname{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$ et $u \in C_{\mu,\overline{\mu}}$, il existera $v \in \mathbf{C}^n$ tel que $u + iv \in C_{\mu,\mathbf{C}}$ et $u - iv \in C_{\overline{\mu},\mathbf{C}}$. Ainsi $\Pi_\lambda(u+iv) = \Pi_\lambda(u-iv) = 0$, d'où $\Pi_\lambda u = 0$. On a montré que les vecteurs propres réels généralisés de $A$ sont envoyés sur les vecteurs réels. Ainsi l'image de $\mathbf{R}^n$ par $\Pi_\lambda$ est contenu dans $\mathbf{R}^n$, donc les entrées de $\Pi_\lambda$ sont réelles.

**9.** Dans **6.**, on a montré que $\Pi_\lambda \Pi_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$. Comme $\lambda \neq \overline{\lambda}$, on a

$$\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}}^2 = (\Pi_\lambda + \Pi_{\overline{\lambda}})^2 = \Pi_\lambda^2 + \Pi_{\overline{\lambda}}^2 = \Pi_\lambda + \Pi_{\overline{\lambda}} = \Pi_{\lambda,\overline{\lambda}}.$$

Soit $u \in C_{\lambda,\overline{\lambda}}$. Soit $v \in \mathbf{R}^n$ tel que $u + iv \in C_{\lambda,\mathbf{C}}$ et $u - iv \in C_{\overline{\lambda},\mathbf{C}}$. On a

$$\begin{aligned}\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}} u &= \Pi_\lambda u + \Pi_{\overline{\lambda}} u \\ &= \frac{1}{2}\Pi_\lambda(u+iv) + \frac{1}{2}\Pi_\lambda(u-iv) + \frac{1}{2}\Pi_{\overline{\lambda}}(u+iv) + \frac{1}{2}\Pi_{\overline{\lambda}}(u-iv) \\ &= \frac{1}{2}(u+iv) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}(u-iv) \\ &= u.\end{aligned}$$

De même, si $\mu \in \operatorname{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$ différente de $\lambda$ et de $\overline{\lambda}$, on aura $\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}} u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu,\overline{\mu}}$. Si $\mu \in \operatorname{sp}(A) \cap \mathbf{R}$, on aura $\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}} u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu,\mathbf{R}}$. Avec le même argument comme celui dans **8.**, on voit que les entrées de $\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}}$ sont réelles.

**10.** De **9.**, pour $\lambda \in \operatorname{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$, $\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}}$ est un projecteur d'image $C_{\lambda,\overline{\lambda}}$. Il suffit de montrer que le produit de deux matrices distinctes, choisies arbitrairement dans les matrices données, est 0.

**a.** Si $\lambda, \mu \in \operatorname{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ et $\lambda \neq \mu$, on a bien $\Pi_\lambda \Pi_\mu = 0$ (**6.**).

**b.** Si $\lambda \in \operatorname{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ et $\mu \in \operatorname{sp}(A)$ avec $\Im \mu > 0$, on a

$$\Pi_\lambda \Pi_{\mu,\overline{\mu}} = \Pi_\lambda \Pi_\mu + \Pi_\lambda \Pi_{\overline{\mu}} = 0.$$

**c.** Si $\lambda, \mu \in\in \operatorname{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ avec $\Im \lambda > 0$ et $\Im \mu > 0$, on a

$$\Pi_{\lambda,\overline{\lambda}} \Pi_{\mu,\overline{\mu}} = \Pi_\lambda \Pi_\mu + \Pi_\lambda \Pi_{\overline{\mu}} + +\Pi_{\overline{\lambda}} \Pi_\mu + \Pi_{\overline{\lambda}} \Pi_{\overline{\mu}} = 0.$$

On en déduit le résultat.

## Classification topologique des flots contractants

**11.** On fixe $A \in M_n^-(\mathbf{R})$. Soient $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{C}$ les racines de

$$P(z) := \det(z - A) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. On fixe $\varepsilon > 0$ tels que les disques $\overline{D}(z_j, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, k$ soient deux à deux disjoints et n'intersectent pas l'axe imaginaire. Alors pour $j = 1, \ldots, k$, $P$ ne s'annule pas sur $\partial D(z_j, \varepsilon)$. On pose

$$\delta := \min_{1 \le j \le k} \min_{z \in \partial D(z_j,\varepsilon)} \frac{|P(z)|}{1 + \cdots + |z|^{n-1}} > 0.$$

Soit $\mathscr{U}$ un voisinage de $A$ dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $B \in \mathscr{U}$, le polynôme caractéristique de $B$ a pour la forme

$$\det(z - B) = Q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n, \qquad \forall 1 \le \ell \le n,\ |b_\ell - a_\ell| < \delta.$$

Par conséquent, pour tous $1 \leq j \leq k$ et $z \in \partial D(z_j, \varepsilon)$

$$|Q(z) - P(z)| \leq \sum_{\ell=1}^{n} |b_\ell - a_\ell||z|^{n-\ell} < \delta(|z|^{n-1} + \cdots + 1) \leq |P(z)|.$$

Il suit du théorème de Rouché que $Q$ a $m_j$ racines dans $D(z_j, \varepsilon)$ (compté avec multiplicité) pour chaque $j = 1, \ldots, k$. Ce sont toutes les racines de $Q$ en raison de degré. Ainsi, si $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$, il existera $1 \leq j \leq k$ tels que $|\Re\lambda - \Re z_j| \leq |\lambda - z_j| < \varepsilon$. Il suit que $\Re\lambda < \Re z_j + \varepsilon \leq -\alpha(A) + \varepsilon$. Donc

$$-\alpha(B) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(B)} \Re\lambda < -\alpha(A) + \varepsilon < 0,$$

i.e. $\alpha(B) > \alpha(A) - \varepsilon$. De plus, supposons sans perde de généralité que que $\Re z_1 = \max_{1 \leq j \leq k} \Re z_j = -\alpha(A)$. Soit $\lambda_1 \in D(z_1, \varepsilon) \cap \mathrm{sp}(B)$, alors $|\Re\lambda_1 - \Re z_1| \leq |\lambda_1 - z_1| < \varepsilon$. Il suit que

$$-\alpha(B) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(B)} \Re\lambda \geq \Re\lambda_1 > \Re z_1 - \varepsilon = -\alpha(A) - \varepsilon,$$

i.e. $\alpha(B) < \alpha(A) + \varepsilon$. On conclut que $\mathscr{U} \subseteq M_n^-(\mathbf{R})$ et que pour tout $B \in \mathscr{U}$, $|\alpha(B) - \alpha(A)| < \varepsilon$. Ainsi, $M_n^-(\mathbf{R})$ est une partie ouverte de $M_n(\mathbf{R})$ et l'application $\alpha : M_n^-(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}_{>0}$ est continue.

**12.** Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. Pour $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, on définit

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad \|x\|_A := \sqrt{\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \left\|e^{sA}x\right\|^2 \, ds}, \tag{2}$$

qui est bien défini. En effet, soient $d \in ]\beta(A), \alpha(A)[$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall s \geq 0, \qquad \left\|e^{sA}x\right\| \leq Ce^{-ds} \|x\|.$$

Alors

$$\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \left\|e^{sA}x\right\|^2 \, ds \leq C^2 \|x\|^2 \int_0^\infty e^{2s(\beta(A)-d)} \, ds = \frac{C^2 \|x\|^2}{2(d - \beta(A))} < +\infty.$$

De plus, (2) définit une norme. En effet, cette norme est induite par un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ défini par

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \qquad \langle x, y \rangle_A = \int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \left\langle e^{sA}x, e^{sA}y \right\rangle \, ds.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA}x\right\|_A &= \sqrt{\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \left\|e^{(t+s)A}x\right\|^2 \, ds} \\
&= \sqrt{\int_t^\infty e^{2(u-t)\beta(A)} \left\|e^{uA}x\right\|^2 \, du} \\
&\leq \sqrt{e^{-2t\beta(A)} \int_0^\infty e^{2u\beta(A)} \left\|e^{uA}x\right\|^2 \, du} \\
&= e^{-t\beta(A)} \|x\|_A .
\end{aligned}$$

Montrons finalement que l'application

$$M_n^-(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}, \qquad (A, x) \mapsto \|x\|_A^2$$

est continue. Fixons $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Contrôlons tout d'abord le terme

$$\int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB}y\right\|^2 \, ds$$

pour $M$ assez grand et $(B, y)$ assez proche de $(A, x)$.
La matrice $e^A$ est hyperbolique, à valeur propres ayant module au plus $e^{-\alpha(A)}$. D'après le cours, on sait (en utilisant la forme normale de Jordan) qu'il existe une norme adaptée $\|\cdot\|'$ sur $\mathbf{R}^n$ tel que $\left|\!\left|\!\left|e^A\right|\!\right|\!\right|' < e^{-d}$ (rappelons que $\alpha(A) > d > \beta(A)$). Si $B$ est assez proche de $A$, on aura $\left|\!\left|\!\left|e^B\right|\!\right|\!\right|' < e^{-d}$. Posons

$$C_1 := \max_{\substack{0 \le \gamma \le 1 \\ \|y\|'=1}} e^{\gamma d} \|e^{\gamma} y\|' > 0.$$

Pour $s \ge 0$, écrivons $s = m + \gamma$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in [0, 1[$. On a, pour tout $y$ tel que $\|y\|' = 1$ et tout $B \in M_n(\mathbf{R})$ assez proche de $A$

$$\left\|e^{sB} y\right\|' \le \left(\left|\!\left|\!\left|e^B\right|\!\right|\!\right|'\right)^m \|e^{\gamma} y\|' < e^{-md} C_1 e^{-\gamma d} = C_1 e^{-sd}.$$

Il suit que, pour tout $B$ assez proche de $A$

$$\forall y \in \mathbf{R}^n, \qquad \left\|e^{sB} y\right\|' \le C_1 e^{-sd} \|y\|' .$$

Finalement, soit $C_2 > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}^n, \qquad \|y\| \le C_2 \|y\|' .$$

Pour tout $B$ assez proche de $A$ est tout $y \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB} y\right\|^2 ds &\le C_2^2 \int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \left(\left\|e^{sB} y\right\|'\right)^2 ds \\
&\le C_1^2 C_2^2 \int_M^\infty e^{2s(\beta(B)-d)} \|y\|' \, ds \\
&= \frac{C_1^2 C_2^2 (\|y\|')^2}{2(d - \beta(B))} e^{2M(\beta(B)-d)}.
\end{aligned}$$

(car $\beta(B) < d$). Soit $\mathscr{U}$ un voisinage de $A$ dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que $d - \beta(B) \ge \rho$ pour tout $B \in \mathscr{U}$ et un certain $\rho > 0$ ne dépendant pas de $B$. Soit $U$ un voisinage de $x$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\|y\|' < 2\|x\|'$ pour tout $y \in U$. On a

$$\forall M > 0, \forall (B, y) \in \mathscr{U} \times U, \quad \int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB} y\right\|^2 ds \le \frac{2C_1^2 C_2^2 (\|x\|')^2}{\rho} e^{-2M\rho}.$$

On choisit $M_0 > 0$ tel que

$$\frac{2C_1^2 C_2^2 (\|x\|')^2}{\rho} e^{-2M_0\rho} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $(B, y) \in \mathscr{U} \times U$, on a

$$\left| \int_{M_0}^\infty e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB} y\right\|^2 ds - \int_{M_0}^\infty e^{2s\beta(A)} \left\|e^{sA} x\right\|^2 ds \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Quitte à choisir $\mathscr{U}$ et $U$ plus petit, on peut supposer que

$$\forall (s, B, y) \in [0, M_0] \times \mathscr{U} \times U, \quad \left| e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB} y\right\|^2 - e^{2s\beta(A)} \left\|e^{sA} x\right\|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{3M_0}.$$

Donc, pour $(B, y)$ assez proche de $(A, x)$

$$\left| \int_0^{M_0} e^{2s\beta(B)} \left\|e^{sB} y\right\|^2 ds - \int_0^{M_0} e^{2s\beta(A)} \left\|e^{sA} x\right\|^2 ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On conclut alors que $\left| \|y\|_B^2 - \|x\|_A^2 \right| < \varepsilon$ si $(B, y)$ est assez proche de $(A, x)$. Autrement dit, l'application $(A, x) \mapsto \|x\|_A$ est continue.

**13.** Soit $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, on a $\alpha(A) > 0$ et $\beta(A) > 0$. Il suit que pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et tous $t > s \in \mathbf{R}$, on a

$$\left\|e^{tA}x\right\|_A = \left\|e^{(t-s)A}e^{sA}x\right\|_A \leq e^{(s-t)\beta(A)} \left\|e^{sA}x\right\|_A < \left\|e^{sA}x\right\|_A,$$

i.e. la fonction $t \mapsto \left\|e^{tA}x\right\|_A$ est décroissante et continue. De **12.**, on a

$$\forall t \geq 0, \qquad \left\|e^{tA}x\right\|_A \leq e^{-t\beta(A)} \left\|x\right\|_A, \qquad \left\|e^{-tA}x\right\|_A \geq e^{t\beta(A)} \left\|x\right\|_A.$$

Ainsi

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}x\right\|_A = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} \left\|e^{tA}x\right\|_A = +\infty.$$

Il exite un unique $\tau_A(x) \in \mathbf{R}$ tel que $\left\|e^{\tau_A(x)}x\right\|_A = 1$, i.e. $e^{\tau_A(x)}x \in S_A$.

**14.** Montrons que l'application $(A, x) \mapsto \tau_A(x)$ est continue de $M_n^-(\mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ dans $\mathbf{R}$. Soit $A_n \to A$ et $x_n \to x$. On pose $t_n := \tau_{A_n}(x_n)$. Pour tout $n$, si $\|x_n\|_{A_n} \geq 1$, alors $t_n \geq 0$, donc $1 = \left\|e^{t_nA_n}x_n\right\|_{A_n} \leq e^{-t_n\beta(A_n)} \|x_n\|_{A_n}$. Il suit que $t_n \leq \frac{\ln\|x_n\|_{A_n}}{\beta(A_n)}$. Si $0 < \|x_n\|_{A_n} < 1$, alors $t_n < 0$, donc $1 = \left\|e^{t_nA_n}x_n\right\|_{A_n} \geq e^{-t_n\beta(A_n)} \|x_n\|_{A_n}$. Il suit que $t_n \geq \frac{\ln\|x_n\|_{A_n}}{\beta(A_n)}$. Dans tous cas, on a

$$\forall n, \qquad |t_n| \leq \frac{\left|\ln\|x_n\|_{A_n}\right|}{\beta(A_n)},$$

(valable même si $x_n = 0$), qui converge vers $\frac{\left|\ln\|x\|_A\right|}{\beta(A)}$ (en particulier, il est borné). Donc la suite $(t_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence. Soit $t$ une telle valeur. Alors $\left\|e^{tAx}x\right\| = 1$. Par unicité de $\tau_A(x)$, on a nécessairement $t = \tau_A(x)$. Donc $\tau_A(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite $(t_n)_n$. Ainsi $\tau_{A_n}(x_n) \to \tau_A(x)$ comme désiré.
La même preuve donne $\tau_{A_n}(x_n) \to -\infty$ si $x = 0$. Ainsi $(A, x) \mapsto \varphi(A)(x)$ est continue $M_n^-(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

**15.** *En effet,* $\varphi(A)(x) = e^{\tau_A(x)}e^{\tau_A(x)A}x$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$*, car* $e^{\tau_A(x)A}x$ *est déjà dans* $S_A$. Soit $\psi(A) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ donnée par $\psi(A)(0) = 0$ et $\psi(A)(y) = e^{-(\ln\|y\|_A)A}h_A(y)$. Bien sûr, $\psi(A)$ est continue en tout point de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. De plus, pour $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|y\|_A < 1$, on a $-\ln\|y\|_A > 0$, donc

$$\|\psi(A)(y)\|_A \leq e^{\ln\|y\|_A\beta(A)} \|h_A(y)\|_A = \|y\|_A^{\beta(A)} \to 0$$

quand $y \to 0$. D'où la continuité de $\psi(A)$ en 0.
Soit $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\|\varphi(A)(x)\|_A = e^{\tau_A(x)} \left\|e^{\tau_A(x)A}\right\|_A = e^{\tau_A(x)}$, donc

$$\begin{aligned}
\psi(A)(\varphi(A)(x)) &= e^{-(\ln\|\varphi_A(x)\|_A)A}h_A(\varphi_A(x)) \\
&= e^{-\tau_A(x)A}\left(\frac{\varphi_A(x)}{e^{\tau_A(x)}}\right) \\
&= e^{-\tau_A(x)A}\left(\frac{e^{\tau_A(x)}e^{\tau_A(x)A}x}{e^{\tau_A(x)}}\right) \\
&= x.
\end{aligned}$$

De même, pour tout $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, on voit facilement que

$$\left\|e^{(\ln\|y\|_A)A}\psi(A)(y)\right\|_A = \|h_A(y)\|_A = 1,$$

donc $\tau_A\left(\psi(A)(y)\right) = \ln\|y\|_A$. Il suit que

$$\begin{aligned}
\varphi(A)(\psi(A)(y)) &= e^{\ln\|y\|_A}e^{(\ln\|y\|_A)A}\psi(A)(y) \\
&= \|y\|_A\, h_A(y) \\
&= y.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(A)$ est un homémorphisme. De plus, pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbf{R}$

$$\left\| e^{(\tau_A(x)-t)A} e^{tAx} \right\|_A = 1,$$

donc $\tau_A(e^{tA}x) = \tau_A(x) - t$. Il suit que

$$\varphi(A)(e^{tA}x) = e^{\tau_A(x)-t} e^{(\tau_A(x)-t)A} e^{tA} x = e^{-t} e^{\tau_A(x)} e^{\tau_A(x)A} x = e^{-t} \varphi(A)(x).$$

Ainsi, $e^{-t}\varphi(A) = \varphi(A) \circ e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

**16.** Il suit de **15.** que $\varphi(A)$ est une conjugaison entre les flots $e^{tA}$ et $e^{-t\,\mathrm{id}_n}$.

## Stabilité structurelle des flots linéaires hyperboliques

**17.** On pose

$$\tilde{E}^s(A) := \left( \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(A) \cap \mathbf{R}_{>0}} C_{\lambda,\mathbf{R}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \mathbf{R} \\ \Re\lambda > 0, \\ \Im\lambda > 0}} C_{\lambda,\bar{\lambda}} \right)$$

et

$$\tilde{E}^u(A) := \left( \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(A) \cap \mathbf{R}_{<0}} C_{\lambda,\mathbf{R}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \mathbf{R} \\ \Re\lambda < 0, \\ \Im\lambda > 0}} C_{\lambda,\bar{\lambda}} \right).$$

Alors $\mathbf{R}^n = \tilde{E}^s(A) \oplus \tilde{E}^u(A)$. Posons $A_s := A|_{\tilde{E}^s(A)}$ et $A_u := A|_{\tilde{E}^u(A)}$. On obtient $A_s \in M^-_{m(A)}(\mathbf{R})$ et $-A_u \in M^-_{n-m(A)}(\mathbf{R})$. De **12.**, on a $\tilde{E}^s(A) \subseteq E^s(A)$ et $\tilde{E}^u(A) \subseteq E^u(A)$, donc $\mathbf{R}^n = E^s(A) + E^u(A)$. De plus, si $x \in E^s(A) \cap E^u(A)$, on peut écrit $x = x_s + x_u$ avec $x_s \in \tilde{E}^s(A)$ et $x_u \in \tilde{E}^u(A)$. Il suit que

$$e^{tA_u} x_u = e^{tA} x_u = e^{tA} x - e^{tA} x_s \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Or $\|x_u\|_{-A_u} \leq e^{-t\beta(-A_u)} \left\| e^{tA_u} x_u \right\|_{-A_u} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $\|x_u\|_{-A_u} = 0$, i.e. $x_u = 0$. De même, $x_s = 0$ et on conclut que $x = 0$. Il suit que $E^s(A) \cap E^u(A) = \{0\}$ et on a une somme directe

$$\mathbf{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A).$$

En particulier, $E^s(A) = \tilde{E}^s(A)$ et $E^u(A) = \tilde{E}^u(A)$.

**18.** Soit $U$ un ouvert borné de $\{z \in \mathbf{C},\ \Re z < 0\}$ qui contient $\mathrm{sp}(A) \cap \{z \in \mathbf{C},\ \Re z < 0\}$. En utilisant les notations comme celles dans **7.**, on a $\pi_s(A) = \Pi_U(A)$. Le même argument avec le théorème de Rouché comme celui dans **11.** nous donne un voisinage $\mathscr{V}$ de $A$ dans $M_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $B \in \mathscr{V}$, on a $B \in \mathrm{Hyp}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{sp}(B) \cap \{z \in \mathbf{C},\ \Re z < 0\} \subseteq U$. Soit $\mathscr{U}$ un voisinage de $A$ dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que toute matrice $B \in \mathscr{U}$ appartienne aussi à $\mathscr{V}$. Alors $\Pi_U(B) = \pi_s(B) \in M_n(\mathbf{R})$ pour $B \in \mathscr{U}$, et $\Pi_U : \mathscr{U} \to M_n(\mathbf{R})$ définit une fonction continue, car elle est la restriction d'une fonction holomorphe. On en déduit que l'application $A \mapsto \pi_s(A)$ est continue de $\mathrm{Hyp}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)^2$. Même argument pour $A \mapsto \pi_u(A)$.

**19.** Soit $\mathscr{U}$ comme dans **18.**. Puisque $\dim E^s(M) = \mathrm{tr}\,\pi_s(M) \in \mathbf{N}$ et que $M \mapsto \pi_s(M)$ est continue, on a que $M \mapsto \dim E^s(M)$ est localement constante. Soit $v_1, \ldots, v_r$ une base de $E^s(A)$. Alors pour tout $M$ assez proche de $A$, on a que la famille $(\pi_s(M)v_i)_{i=1,\ldots,r}$ est libre (cette famille dépend continûment de $M$ et vaut $(v_i)_{i=1,\ldots,r}$ pour $M = A$). Puisque $\dim E^s(M) = \dim E^s(A)$ pour $M$ assez proche de $A$, on a le résultat.

**20.** On fixe $(u_1, \dots, u_r)$ une base de $E^s(A)$, que l'on complète en une base $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Alors pour tout $M$ proche de $A$, la famille

$$\beta(M) = (\pi_s(M)u_1, \dots, \pi_s(M)u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

reste libre, ainsi que la famille

$$\tilde{\beta}(M) = (M\pi_s(M)u_1, \dots, M\pi_s(M)u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

puisque $M$ préserve $E^s(M)$ et est inversible. On note $P(M)$ la matrice de $\beta(M)$ dans la base $\tilde{\beta}(M)$. Notons

$$P(M) = \begin{pmatrix} Q(M) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Alors par définition, la matrice de $q_s(M)M\pi_s(M)|_{E^s(A)}$ dans la base $(u_1, \dots, u_r)$ est donnée par $Q(M)$. Il suffit donc de montrer que $M \mapsto Q(M)$ est continue. Ceci sera vrai si $M \mapsto P(M)$ l'est. Or on a (en identifiant les bases $\beta(M), \tilde{\beta}(M)$ avec les matrices les représentant dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$)

$$P(M) = \beta(M)\tilde{\beta}(M)^{-1},$$

ce qui conclut puisque les applications $M \mapsto \beta(M), \tilde{\beta}(M)$ sont continues, et l'inversion est continue $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$.

**21.** Pour $M \in \mathscr{U}$, les valeurs propres de $M|_{E^s(M)}$ ont parties réelles négatives, celles de $\widetilde{M}$ aussi. On définit $\widetilde{\Phi}_s : \mathscr{U} \times E^s(A) \to E^s(A)$ par

$$\forall (M, x_s) \in E^s(A), \qquad \widetilde{\Phi}_s(M, x_s) := \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\widetilde{M})(x_s)$$

où l'homéomorphisme $\varphi(B) : E^s(A) \to E^s(A)$ est défini dans **15.** pour chaque $B \in \mathscr{L}(E^s(A))$ ayant seulement les valeurs propres de partie réelle négative. Alors $\widetilde{\Phi}_s(M, \cdot) = \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\widetilde{M})$ est un homéomorphisme (en particulier, $\widetilde{\Phi}_s(A, \cdot) = \mathrm{id}_{E^s(A)}$). Soient $M \in \mathscr{U}$, $t \in \mathbf{R}$ et $x_s \in E^s(A)$. On a

$$\varphi(A)(e^{tA}\widetilde{\Phi}_s(M, x_s)) = e^{-t}\varphi(A)(\widetilde{\Phi}_s(M, s)) = e^{-t}\varphi(\widetilde{M})(x_s) = \varphi(\widetilde{M})(e^{t\widetilde{M}}x_s).$$

Il suit que

$$e^{tA}\widetilde{\Phi}_s(M, x_s) = \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\widetilde{M})(e^{t\widetilde{M}}x_s) = \widetilde{\Phi}_s(M, e^{t\widetilde{M}}x_s).$$

**22.** En remplaçant $A$ par $-A$ dans **21.** (et choisissant $\mathscr{U}$ plus petit si nécessaire), on peut supposer que pour chaque $M \in \mathscr{U}$, $\pi_u(M)|_{E^u(A)} : E^u(A) \to E^u(M)$ soit un isomorphisme d'inverse $q_u(M)$ et qu'il existe un application continue $\widetilde{\Phi}_u : \mathscr{U} \times E^u(A) \to E^u(A)$ vérifiant

$$\forall (M, t, x_u) \in \mathscr{U} \times \mathbf{R} \times E^u(A), \qquad e^{tA}\widetilde{\Phi}_u(M, x_u) = \widetilde{\Phi}_u(M, e^{t\widehat{M}}x_u)$$

où $\widehat{M} = q_u(M)M\pi_u(M)|_{E^u(A)}$, telle que $\widetilde{\Phi}_u(M, \cdot) : E^u(A) \to E^u(A)$ soit un homéomorphisme pour tout $M \in \mathscr{U}$ et que $\widetilde{\Phi}_u(A, \cdot) = \mathrm{id}_{E^u(A)}$. On définit alors

$$\Phi_s : \mathscr{U} \times \mathbf{R}^n \to E^s(A), \qquad (M, x) \mapsto \widetilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)x)$$

$$\Phi_u : \mathscr{U} \times \mathbf{R}^n \to E^u(A), \qquad (M, x) \mapsto \widetilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)x)$$

et

$$\Phi : \mathscr{U} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad (M, x) \mapsto \Phi_s(M, x) + \Phi_u(M, x).$$

Pour chaque $M \in \mathscr{U}$, on note $\widetilde{\Psi}_s(M, \cdot) : E^s(A) \to E^s(A)$ (resp. $\widetilde{\Psi}_u(M, \cdot) : E^u(A) \to E^u(A)$) l'inverse de $\widetilde{\Phi}_s(M, \cdot)$ (resp. de $\widetilde{\Phi}_u(M, \cdot)$). Définissons

$$\Psi : \mathscr{U} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad (M, x) \mapsto \pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M, x_s) + \pi_u(M)\widetilde{\Psi}_u(M, x_u)$$

où $x_s = \pi_s(A)x$ et $x_u = \pi_u(A)x$, qui est continue. De plus

$$\begin{aligned}\Psi(M, \Phi(M,x)) &= \Psi(M, \Phi_s(M,x) + \Phi_u(M,x)) \\ &= \pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M, \Phi_s(M,x)) + \pi_u(M)\widetilde{\Psi}_u(M, \Phi_u(M,x)) \\ &= \pi_s(M)q_s(M)\pi_s(M)x + \pi_u(M)q_u(M)\pi_u(M)x \\ &= \pi_s(M)x + \pi_u(M)x \\ &= x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\Phi(M, \Psi(M,x)) \\ &= \Phi_s(M, \Psi(M,x)) + \Phi_u(M, \Psi(M,x)) \\ &= \widetilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)\Psi(M,x)) + \widetilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)\Psi(M,x)) \\ &= \widetilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M,x_s)) + \widetilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)\widetilde{\Psi}(M,x_u)) \\ &= \widetilde{\Phi}_s(M, \widetilde{\Psi}_s(M,x_s)) + \widetilde{\Phi}_u(M, \widetilde{\Psi}(M,x_u)) \\ &= x_s + x_u \\ &= x.\end{aligned}$$

On conclut que $\Phi(M,\cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un homéomorphisme pour tout $M \in \mathscr{U}$, et qu'on a une application continue $\mathscr{U} \to \mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n)$, $M \mapsto \Phi(M,\cdot)$ (la topologie sur $\mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n)$ est la topologie compacte-ouverte), car $\mathscr{U}$ et $\mathbf{R}^n$ sont localement compacts. De plus, $\Phi(A,\cdot) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$.
Finalement, soit $t \in \mathbf{R}$. On rappelle que

$$\widetilde{\Psi}_s(M, e^{tA}x_s) = e^{t\widetilde{M}}\widetilde{\Psi}_s(M,x_s), \qquad \widetilde{\Psi}_u(M, e^{tA}x_u) = e^{t\widehat{M}}\widetilde{\Psi}_u(M,x_u).$$

Pour tout $M \in \mathscr{U}$, les espaces $E^s(M)$ et $E^u(M)$ sont $M$-invariants, donc $M$ commute avec les projecteurs $\pi_s(M)$ et $\pi_u(M)$. Il suit que

$$\begin{aligned}&\Psi(M, e^{tA}x) \\ &= \pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M, \pi_s(A)e^{tA}x) + \pi_s(M)\widetilde{\Psi}_u(M, \pi_u(A)e^{tA}x) \\ &= \pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M, e^{tA}x_s) + \pi_u(M)\widetilde{\Psi}_u(M, e^{tA}x_u) \\ &= \pi_s(M)e^{t\widetilde{M}}\widetilde{\Psi}_s(M,x_s) + \pi_u(M)e^{t\widehat{M}}\widetilde{\Psi}_u(M,x_u) \\ &= \pi_s(M)q_s(M)e^{tM}\pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M,x_s) + \pi_u(M)q_u(M)e^{tM}\pi_u(M)\widetilde{\Psi}_u(M,x_u) \\ &= e^{tM}\pi_s(M)\widetilde{\Psi}_s(M,x_s) + e^{tM}\pi_u(M)\widetilde{\Psi}_u(M,x_u) \\ &= e^{tM}\Psi(M,x).\end{aligned}$$

Ainsi $e^{tA}\Phi(M,x) = \Phi(M, e^{tM}x)$, i.e. on a donc une conjugaison $\Phi(M,\cdot)$ entre les flots $e^{tA}$ et $e^{tM}$, qui varie continuement en $M \in \mathscr{U}$ et $\Phi(A,\cdot) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$. En autres termes, le flot $e^{tA}$ est structurellement stable.

# Applications : conjugaisons en famille

**23.** On a discuté l'ouverture des $\mathscr{U}_j$, $j = 0, \ldots, n$ dans **11.**. Il reste à montrer leur connexité. Soit $I_j \in \mathscr{U}_j$ la matrice $\mathrm{diag}[1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1]$ ($j$ entrées sont 1). Toute matrice $M \in \mathscr{U}_j$ s'écrit $M = PHP^{-1}$, où $H = \mathrm{diag}[A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s, C_1 \ldots, C_u, D_1, \ldots, D_v]$ telle que

**a.** Les $A_k$ ($1 \leq k \leq r$) sont les blocs de Jordan réels associés aux valeurs propres positives de $M$.

**b.** Les $B_k$ ($1 \leq k \leq s$) sont les blocs de Jordan complexes associés aux valeurs propres de partie réelle positive de $M$.

**c.** Les $C_k$ $(1 \leq k \leq u)$ sont les blocs de Jordan réels associés aux valeurs propres négatives de $M$.

**d.** Les $D_k$ $(1 \leq k \leq v)$ sont les blocs de Jordan complexes associés aux valeurs propres de partie réelle négative de $M$.

**e.** La somme des tailles des $A_k$ et $B_k$ est $m(A)$.

**f.** $\det(P) > 0$ (on peut remplacer $P$ par $-P$ si nécessaire).

L'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ des matrices de déterminant positif est connexe par arcs, donc on peut trouver un chemin $p(t) : [0,1] \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ tel que $p(0) = P$ et $p(1) = \mathrm{id}_n$. Trouvons maintenant un chemin dans $\mathscr{U}_j$ reliant $H$ à $I_j$.

**a.** Soit $1 \leq k \leq r$ et $A_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$. Le chemin

$$\forall t \in [0,1] \qquad a_k(t) := \begin{bmatrix} (1-t)\lambda + t & 1-t & \\ & \ddots & \\ & & (1-t)\lambda + t \end{bmatrix}$$

relie $a_k(0) = A_k$ à $a_k(1) = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1]$. De plus, les valeurs propres de $a_k(t)$ (qui sont $(1-t)\lambda + t$) sont positives pour tout $t \in [0,1]$.

**b.** Soit $1 \leq k \leq s$ et $B_k = \begin{bmatrix} Q & \mathrm{id}_2 & \\ & \ddots & \\ & & Q \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a > 0$, $b \neq 0$. Le chemin $q(t) := \begin{bmatrix} (1-t)a + t & -b(1-t) \\ b(1-t) & (1-t)a + t \end{bmatrix}$ relie $q(0) = Q$ à $q(1) = \mathrm{id}_2$. Ainsi, le chemin

$$\forall t \in [0,1] \qquad b_k(t) := \begin{bmatrix} q(t) & (1-t)\,\mathrm{id}_2 & \\ & \ddots & \\ & & q(t) \end{bmatrix}$$

relie $b_k(0) = B_k$ à $b_k(1) = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1]$. De plus, les valeurs propres de $b_k(t)$ (qui sont $(1-t)a + t \pm ib(1-t)$) sont de partie réelle positive pour tout $t \in [0,1]$.

**c.** De même, on peut trouver les chemins $c_k$ reliant $C_k$ à $\mathrm{diag}[-1, \ldots, -1]$ $(1 \leq k \leq u)$ tel que les valeurs propres de $c_k(t)$ sont négatives pour tout $t \in [0,1]$ ; et les chemins $d_k$ reliant $D_k$ à $\mathrm{diag}[-1, \ldots, -1]$ $(1 \leq k \leq v)$ tel que les valeurs propres de $d_k(t)$ sont de partie réelle négative pour tout $t \in [0,1]$.

Ainsi, on a un chemin

$$h := \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_u, d_1, \ldots, d_v] : [0,1] \to \mathscr{U}_j$$

reliant $h(0) = H$ à $h(1) = I_j$. En conséquence, on a une chemin

$$\forall t \in [0,1], \qquad m(t) := p(t)h(t)p(t)^{-1} \in \mathscr{U}_j$$

reliant $m(0) = PHP^{-1} = M$ à $m(1) = I_j$ dans $\mathscr{U}_j$. Donc $\mathscr{U}_j$ est connexe par arcs.

**24.** De **22.**, pour tout $s \in [0,1]$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_s \subseteq \mathscr{U}_j$ de $M(s)$ et une application continue $\Phi_s : \mathscr{V}_s \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ telle que pour tout $s' \in [0,1]$ avec $M(s) \in \mathscr{V}_s$, on ait une conjugaison $\Phi_s(s', \cdot)$ entre les flots $e^{tM(s)}$ et $e^{tM(s')}$ ; et que $\Phi_s(s, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$.

Soient $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ tels que pour chaque $1 \leq k \leq m$, $M([s_{k-1}, s_k]) \subseteq \mathscr{V}_k := \mathscr{V}_{s_{k-1}}$ (par compacité et connexité). On note $\Phi_k := \Phi_{s_{k-1}}$ pour $1 \leq k \leq m$. On définit une application continue

$$F_k : [s_{k-1}, s_k] \to \mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n), \quad s \mapsto \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ \Phi_k(s, \cdot).$$

pour chaque $1 \leq k \leq m$. Pour tout $(s,t) \in [s_{k-1}, s_k] \times \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
F_k(s) \circ e^{tM(s)} &= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ \Phi_k(s, \cdot) \circ e^{tM(s)} \\
&= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ e^{tM(s_{k-1})} \circ \Phi_k(s, \cdot) \\
&\vdots \\
&= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ e^{tM(s_1)} \circ \cdots \circ \Phi_k(s, \cdot) \\
&= e^{tM(s_0)} \circ \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \Phi_1(s_1, \cdot) \\
&= e^{tA} \circ F_k(s).
\end{aligned}$$

Or, pour $1 \leq k \leq m-1$, on a $\Phi_{k+1}(s_k) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}^n$, donc $F_k(s_k) = F_{k+1}(s_k)$. On peut définir donc une application continue $\Psi : [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ en posant $\Psi(s,x) := F_k(s)(x)$ lorsque $s_{k-1} \leq s \leq s_k$. De plus,

$$e^{tA}\Psi(s,x) = e^{tA}F_k(s)(x) = F_k(s)(e^{tM(s)}x) = \Psi(s, e^{tM(s)}x).$$