École Normale Supérieure
2020/2021
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 4

Exercice 1. *Exposants de Lyapunov pour les systèmes linéaires*
Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n. Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul, on note

$$\lambda(x_0, A) = \limsup_{|t| \to +\infty} \frac{1}{t} \log \left\| \mathrm{e}^{tA} x_0 \right\| .$$

Le nombre $\lambda(x_0, A)$ est appelé *exposant de Lyapunov* de la trajectoire $t \mapsto \mathrm{e}^{tA} x_0$.

1. Montrer que $\lambda(x_0, A)$ est fini pour tout $x_0 \neq 0$ et ne dépend pas de la norme $\| \cdot \|$ choisie.
2. Montrer que si $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors pour tout $y_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\lambda(y_0, B) = \lambda(Py_0, A).$$

On note $r_1 > \cdots > r_\ell$ les parties réelles ordonnées des valeurs propres de A, et

$$L_j = \bigoplus C_{\lambda, \bar{\lambda}}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

où la somme directe porte sur les $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ tels que $\Re(\lambda) = r_j$ et $\Im(\lambda) \geq 0$, et où

$$C_{\lambda, \bar{\lambda}} = \left\{ u \in \mathbf{R}^n \ : \ \exists N \in \mathbf{N}, \ (A - \lambda)^N (A - \bar{\lambda})^N u = 0 \right\}$$

est l'espace propre généralisé réel associé à λ et $\bar{\lambda}$ (si $\lambda \in \mathbf{R}$, $C_{\lambda, \bar{\lambda}} = C_\lambda$ est l'espace propre généralisé associé à λ). L'espace L_j est appelé espace de Lyapunov associé à r_j.

3. On suppose que $x_0 \in L(r_j)$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Montrer que

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \log \left\| \mathrm{e}^{tA} x_0 \right\| = r_j.$$

On note pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$

$$V_j = L_\ell \oplus \ldots \oplus L_j, \quad W_j = L_j \oplus \ldots \oplus L_1.$$

4. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ non nul, $\lambda(x_0, A) \in \{r_1, \ldots, r_\ell\}$ et que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \left\| \mathrm{e}^{tA} x_0 \right\| = r_j \text{ si, et seulement si, } x_0 \in V_j \setminus V_{j+1},$$
$$\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} \log \left\| \mathrm{e}^{tA} x_0 \right\| = r_j \text{ si, et seulement si, } x_0 \in W_j \setminus W_{j-1}.$$

Pour toute matrice M on note $\mathrm{Lyap}(M) = \Re\big(\mathrm{sp}(M)\big)$ l'ensemble de ses exposants de Lyapunov, et $L(r, M)$ l'espace de Lyapunov associé à $r \in \mathrm{Lyap}(M)$. Soient $a < b$ des réels. On note $U_{a,b}$ l'ensemble des matrices telles que $\{a, b\} \cap \mathrm{Lyap}(M) = \emptyset$ et pour tout $M \in U_{a,b}$ on note

$$L(a, b, M) = \bigoplus_{a < r < b} L(r, M).$$

5. Montrer que $U_{a,b}$ est ouvert et que l'application $M \mapsto \dim L(a, b, M)$ est localement constante sur $U_{a,b}$.

Exercice 2. *Stabilité de* 0 *pour les systèmes linéaires*

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n. Alors 0 est un point fixe de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$. On dira qu'il est

- stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \delta$, on a
$$\left\|\mathrm{e}^{tA}x\right\| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0 \ ;$$
- asymptotiquement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \delta$, on a $\mathrm{e}^{tA}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
- exponentiellement stable s'il existe $C \geq 1$ et $\beta, \eta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \eta$, on a
$$\left\|\mathrm{e}^{tA}x\right\| \leq C\|x\|\mathrm{e}^{-t\beta}, \quad t \geq 0.$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) 0 est un point fixe asymptotiquement stable ;
   (ii) 0 est un point fixe exponentiellement stable ;
   (iii) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.
   (iv) Il existe une norme adaptée pour A, c'est à dire une norme $\|\cdot\|_A$ sur $\mathbf{R}^n$ telle que pour un certain $\beta > 0$,
$$\left\|\mathrm{e}^{tA}x\right\|_A \leq \mathrm{e}^{-\beta t}\|x\|_A, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Une matrice vérifiant les conditions précédentes sera appelée *contraction linéaire*.

2. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative ou nulle. Montrer que 0 est un point fixe stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A de parties réelles nulles sont semi-simples (i.e. les blocs de Jordan complexes sont de taille 1).

Exercice 3. *Systèmes linaires topologiquement conjugués*

On se donne A et B deux contractions linéaires et $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_B$ des normes adaptées à A et B (cf. exercice précédent). On note
$$S_A = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\|_A = 1\}, \quad S_B = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\|_B = 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe une application continue $\tau : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ telle que
$$\mathrm{e}^{\tau(x)A}x \in S_A, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$
2. Soit φ un homéomorphisme $S_A \to S_B$ et $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par $\Phi(0) = 0$ et
$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{-\tau(x)B}\varphi\left(\mathrm{e}^{\tau(x)A}x\right), \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$
   Montrer que Φ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même et qu'on a
$$\Phi \circ \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tB} \circ \Phi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dans la suite on ne suppose plus que A et B sont des contractions mais qu'elles induisent des flots hyperboliques, i.e. toutes les valeurs propres de A et de B ont une partie réelle non nulle. On suppose qu'il existe une famille continue de matrices $A_t,\ t \in [0,1]$ telle que $A_0 = A$, $A_1 = B$ et
$$0 \notin \Re\big(\mathrm{sp}(A_t)\big), \quad t \in [0,1].$$

3. En utilisant la question **1**.5., montrer que les flots induits par A et B sont conjugués.

Exercice 4. *Systèmes linéaires avec second membre*

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et $z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ une application continue.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t). \tag{1}$$
2. On suppose que A est une contraction linéaire et que $z(t) \to z_\infty \in \mathbf{R}^n$ quand $t \to +\infty$. Montrer que toute solution de (1) converge en grand temps vers une limite à déterminer.