École Normale Supérieure
2020/2021

chaubet@dma.ens.fr

Syst èmes dynamiques
Feuille d'exercices 8

Exercice 1. *Gradients de fonctions de Morse*

Soit M une variété compacte et $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction lisse. On dit que f est une fonction de Morse si pour tout point $p \in M$ tel que $\mathrm{d}f_p = 0$, la matrice Hessienne de f en p (dans une carte locale) est non dégénérée.

1. Montrer que la condition précédente ne dépend pas de la carte choisie.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de Morse est ouvert dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbf{R})$.

Soit $f : M \to M$ une fonction de Morse. On se donne une métrique Riemannienne g sur M et on définit $\nabla^g f \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ le g-gradient de f par

$$\mathrm{d}f_p(v) = g_p(\nabla^g f, v), \quad p \in M, \quad v \in T_pM.$$

On suppose que pour tout point critique $p \in \mathrm{Crit}(f)$, il existe des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ centrées en p telles que

$$g = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x^i)^2,$$

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^{r} (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^{n} (x^i)^2.$$

On note $\varphi_t : M \to M$ le flot de $X = -\nabla^g f$.

3. On suppose $\varphi_t(x) = x$. Montrer que $t = 0$ ou $\nabla^g f(x) = 0$.
4. Soit $x \in M$ un point non-errant. Montrer que $\nabla^g f(x) = 0$.
5. Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe $p, q \in \mathrm{Crit}(f)$ tels que si $t \to +\infty$

$$\varphi_t(x) \to p, \quad \varphi_{-t}(x) \to q.$$

Exercice 2 *Théor èmes d'extension : rappels*

1. Énoncer le théor ème d'extension de Carathéodory.
2. Énoncer le lemme de classe monotone.

Exercice 3. *Tribu produit*

Soit $(A, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $X = A^{\mathbf{N}}$ l'espace des suites sur A. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{F}^p$, on note

$$C_{n,\mathbf{A}} = \Big\{ \mathbf{x} = (x_k) \in A^{\mathbf{N}},\ x_{n-1+j} \in A_j,\ j = 1, \ldots, p \Big\}.$$

On note aussi $C_{n,\mathbf{w}} = C_{n,\mathbf{A}}$ o ù $\mathbf{A} = (\{\omega_0\}, \ldots, \{\omega_{p-1}\})$ pour tout mot $\mathbf{w} = (\omega_0, \ldots, \omega_{p-1}) \in A^p$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Définir la tribu produit sur $A^{\mathbf{N}}$. On la note $\mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}}$.
2. Soit E un ensemble. On se donne $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ une semi-alg èbre, i.e. $\emptyset \in \mathcal{S}$ et

$$A \cap B \in \mathcal{S}', \quad \text{et} \quad A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{q} A_i, \quad A_i \in \mathcal{S}.$$

Montrer que toute mesure sur $\mathcal{S}$ (i.e. une application σ-additive $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$) s'étend uniquement en une mesure sur

$$\mathcal{S}' = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n,\ A_i \in \mathcal{S},\ n \in \mathbf{N}\}.$$

3. On se donne P une mesure de probabilité sur A et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des cylindres. On définit $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ par $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu\left(C_{n,\mathbf{A}}\right) = \prod_{j=1}^{p} P(A_j), \quad \mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{F}^p. \tag{1}$$

On se donne des cylindres $S^n = S_0^n \times S_1^n \times \cdots \in \mathcal{S}$, $(n \in \mathbf{N})$ tels que $X = \bigcup_n S^n$; pour tout $k \in \mathbf{N}$ on consid ère $H_k : A^{k+1} \to [0, 1]$ définie par

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j > k} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^{k} 1_{S_i^n}(x_i) \right).$$

(a) Montrer que l'on a pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tous $x_0, \ldots, x_k \in A$

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) = \int_A H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x) \mathrm{d}P(x).$$

(b) On suppose que $\sum_n \mu(S^n) < 1$. Construire par récurrence une suite $\mathbf{x} = (x_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1, \quad k \in \mathbf{N}.$$

(c) En déduire qu'il existe une unique mesure de probabilités μ sur $(X, \mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}})$ invariante par le décalage (i.e. $\mu(\sigma^{-1}(C)) = C$ pour tout $C \in \mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}}$ o ù σ est le décalage), telle que l'équation (**??**) est satisfaite. On la note $P^{\otimes \mathbf{N}}$.

4. Donner une preuve simple du fait précédent dans le cas o ù A est fini et o ù $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$.

On suppose dans la suite que $A = \{1, \ldots, m\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$.

5. Soit $M = (m_{ij})$ est une matrice $m \times m$ à coefficients strictement positifs telle que

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

On suppose qu'il existe $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbf{R}_+^m$ tel que $vM = v$ et $\sum_i v_i = 1$ (en fait il existe toujours un unique vecteur vérifiant cette propriété : c'est le théor ème de Perron-Frobenius). Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilités P_M sur X telle que pour tout $\mathbf{w} = (\omega_0, \ldots, \omega_{p-1}) \in A^p$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P_M\left(C_{n,\mathbf{w}}\right) = v_{\omega_0} \prod_{j=0}^{p-2} m_{\omega_j \omega_{j+1}}.$$

Montrer que σ préserve P_M.

6. Soit P une probabilité sur A telle que $P(\{i\}) \neq 0$ pour tout i. Montrer que $P^{\otimes \mathbf{N}} = P_{M(P)}$, o ù $M(P) \in \mathrm{Mat}_{m \times m}(\mathbf{R}_+^*)$ est la matrice de coefficients $M(P)_{ij} = P(\{j\})$ pour tous i, j.

7. On consid ère l'application

$$\begin{aligned} H : \{1, \ldots, m\}^{\mathbf{N}} &\to \mathbf{T}^1 \\ \mathbf{x} = (x_k) &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k - 1}{m^k} + \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Soit μ_m la mesure de probabilité équidistribuée sur $\{1, \ldots, m\}$. Montrer que

$$\mathrm{Leb}(H(C_{n,\mathbf{w}})) = \mu_m^{\otimes \mathbf{N}}(C_{n,\mathbf{w}}), \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{w} \in \{1, \ldots, m\}^p.$$

8. Montrer que le complémentaire $Z \subset \mathbf{T}^1$ des points m-adiques est de mesure de Lebesgue totale.

9. Montrer que $H(\sigma(\mathbf{x})) = mH(\mathbf{x})$, o ù σ est le décalage sur X, et que $H : H^{-1}(Z) \to Z$ est une bijection.