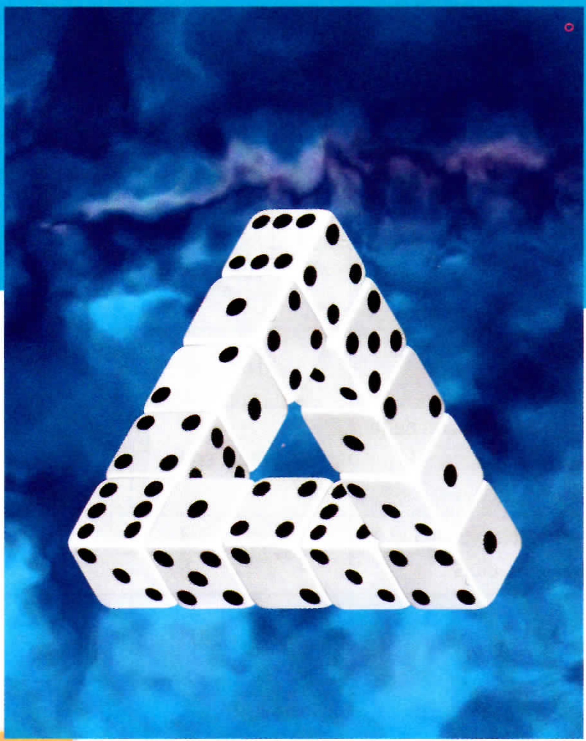
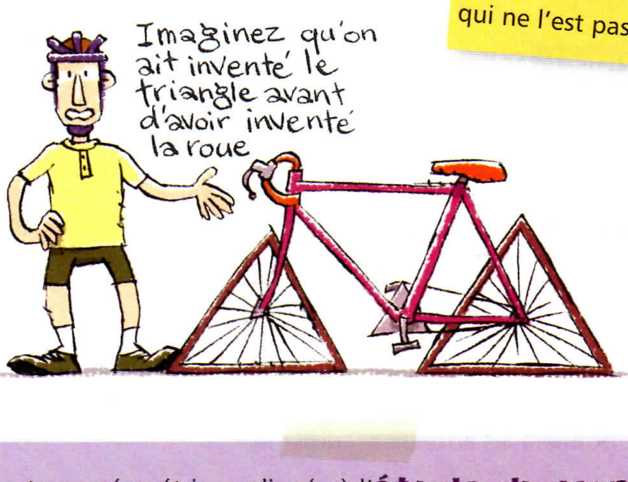
11 Triangle rectangle et relations trigonométriques

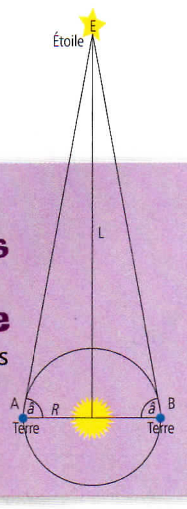


Ce triangle composé de dés semble **parfaitement normal…** jusqu'à ce que vous essayiez de le construire. Chaque côté contient le même nombre de dés : c'est donc un **triangle équilatéral**, mais les trois angles ont l'air de mesurer **90 degrés !** **La construction est une illusion…** Chaque sommet, pris indépendamment est possible, c'est l'ensemble qui ne l'est pas.

Le mot « **trigonométrie** » vient du grec « *trigone* » (triangle) et « *metron* » (mesure). Dans l'*Encyclopédie* (1751), la trigonométrie est définie comme « l'**art de trouver les parties inconnues** d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ».

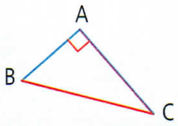
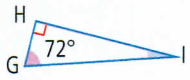


La trigonométrie est une géométrie appliquée à l'**étude du monde** et de l'Univers, elle est donc fortement liée à l'**avancée des progrès** en astronomie. Les astronomes babyloniens l'utilisèrent pour déterminer la distance entre les étoiles, les planètes… La **distance L d'une étoile** à la Terre peut être déterminée en visant cette étoile de la Terre à deux moments séparés de six mois, c'est-à-dire quand la Terre a effectué une demi-révolution sur elle-même. On **mesure les angles** $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EBA}$ égaux à $\hat{a}$, et la formule $L = R \times \tan \hat{a}$ donne la longueur L.



Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

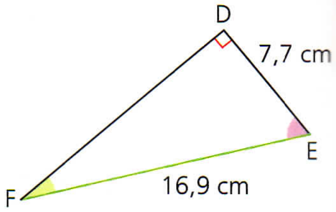
		A	B	C
1	Dans le triangle ABC rectangle en A, le côté [AB] est appelé : 	l'hypoténuse	le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$	le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$
2	Le triangle ABC est rectangle en A tel que : AB = 51 cm et AC = 68 cm. Alors :	BC = 45 cm	BC = 119 cm	BC = 85 cm
3	DEF est un triangle tel que : DE = 6,3 cm, EF = 8,4 cm et FD = 10,5 cm. Alors :	le triangle DEF est rectangle en D	le triangle DEF est rectangle en E	le triangle DEF n'est pas rectangle
4	Dans le triangle GHI, l'angle $\widehat{GIH}$ mesure : 	108°	18°	90°
5	La somme des mesures de deux angles complémentaires est égale à :	180°	100°	90°
6	Le triangle LMN est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [MN]. Le triangle LMN est :	rectangle en L	rectangle en M	rectangle en N
7	Si le triangle RST est rectangle en S et si RS = 3, RT = 5 et ST = 4, alors :	$\cos \widehat{STR} = \frac{3}{5}$	$\cos \widehat{STR} = \frac{5}{4}$	$\cos \widehat{STR} = \frac{4}{5}$
8	Si $\cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$, alors :	$\widehat{ABC} = 30°$	$\widehat{ABC} = 45°$	$\widehat{ABC} = 60°$
9	Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors :	$\cos \widehat{ABC} > 1$	$0 < \cos \widehat{ABC} < 1$	$\cos \widehat{ABC}$ est négatif
10	Si $\cos \widehat{ANG} = 0{,}425$, alors :	$\widehat{ANG} = 64°$	$\widehat{ANG} = 64{,}8°$	$\widehat{ANG} \approx 64{,}8°$

Exercice 1 Soit x un nombre non nul. Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x}{5} = 17$ **b.** $\frac{x}{7} = \frac{6}{9}$ **c.** $\frac{4}{x} = 15$ **d.** $\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$

Exercice 2 **a.** Construire un triangle ABC rectangle en A tel que : AC = 6,7 cm et BC = 10 cm.
b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. On donnera l'arrondi à l'unité.

Exercice 3 On considère le triangle DEF ci-contre.
Calculer la mesure, en degré, de chacun des angles du triangle DEF.
On donnera les arrondis au dixième.



Exercice 4 Soit un triangle KLM rectangle en K tel que : $\widehat{KML} = 28°$ et ML = 13,6 cm.
Calculer la longueur MK. On donnera l'arrondi à l'unité.

Exercice 5 Soit un triangle GHI rectangle en H tel que : $\widehat{IGH} = 57°$ et GH = 5,5 cm.
Calculer la longueur GI. On donnera l'arrondi au dixième.

Activité 1 Sinus d'un angle aigu

A Conjecturer

1 Tracer un angle aigu $\widehat{xOy}$ de sommet O.

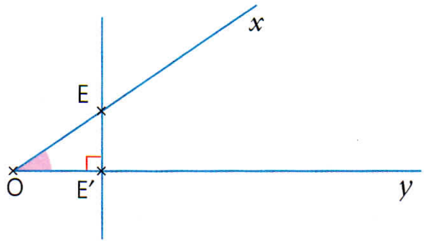
2 **a.** Placer un point E sur la demi-droite [Ox), puis tracer la droite perpendiculaire à [Oy) passant par E ; elle coupe [Oy) en E′.
b. Mesurer les longueurs OE et EE′.
c. Calculer l'arrondi au dixième du quotient $\frac{EE'}{OE}$.

3 **a.** Placer un point F, distinct de E, sur la demi-droite [Ox).
Tracer la droite perpendiculaire à [Oy) passant par F ; elle coupe [Oy) en F′.
b. Mesurer les longueurs OF et FF′.
c. Calculer l'arrondi au dixième du quotient $\frac{FF'}{OF}$.

4 Comparer les quotients $\frac{EE'}{OE}$ et $\frac{FF'}{OF}$. Que constate-t-on ?

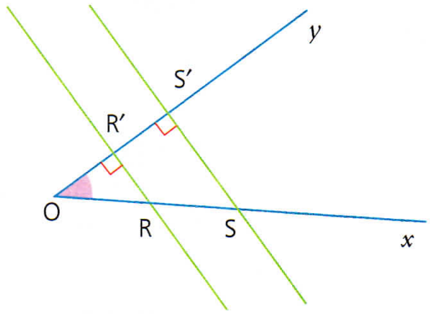
5 Reprendre les questions **1** à **4** en modifiant la mesure de l'angle $\widehat{xOy}$.

6 Recopier et compléter la conjecture suivante :
Soit un point E sur la demi-droite [Ox) et soit E′ le point d'intersection de la demi-droite [Oy) et de la droite --- à [Oy) passant par E.
Quelle que soit la position du point E sur la demi-droite [Ox), le quotient $\frac{EE'}{OE}$ est --- .
On appelle ce quotient le **sinus** de l'angle $\widehat{xOy}$. On le note $\sin \widehat{xOy}$.



B Démontrer

Sur la figure ci-contre,
- $\widehat{xOy}$ est un angle aigu,
- R et S sont deux points de la demi-droite [Ox),
- R′ et S′ sont deux points de la demi-droite [Oy),
- les droites (RR′) et (SS′) sont perpendiculaires à [Oy).



1 **a.** Montrer que les droites (RR′) et (SS′) sont parallèles.
b. Quelle propriété permet d'obtenir les égalités :
$\frac{OR}{OS} = \frac{RR'}{SS'} = \frac{OR'}{OS'}$?

2 Que peut-on dire des produits $OR \times SS'$ et $RR' \times OS$?
En déduire l'égalité $\frac{SS'}{OS} = \frac{RR'}{OR}$. Conclure.

Activité 2 Tangente d'un angle aigu

A Conjecturer avec un logiciel de géométrie

1 a. Créer trois points A, O et B tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit aigu.
b. Créer les demi-droites [OA) et [OB).
c. Créer un point E sur la demi-droite [OA) distinct de O.
d. Créer la droite perpendiculaire à la demi-droite [OB) passant par E, puis créer le point d'intersection E′ de cette droite et de la demi-droite [OB).
e. Afficher la longueur des segments [EE′] et [OE′].

2 a. À l'aide des fonctions Calculatrice ou Table du logiciel, afficher la valeur du quotient $\frac{EE'}{OE'}$.

b. Déplacer le point E sur la demi-droite [OA) et comparer les valeurs du quotient $\frac{EE'}{OE'}$ selon la position du point E. Que remarque-t-on ?

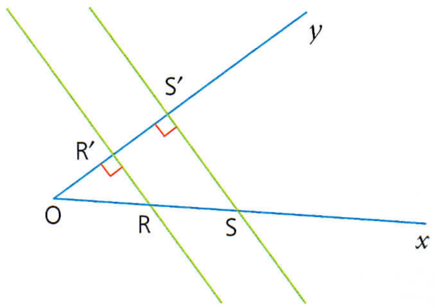
3 Déplacer les points A et B, puis déplacer de nouveau le point E sur la demi-droite [OA).
Comparer les valeurs du quotient $\frac{EE'}{OE'}$ selon la position du point E.

4 Quelle conjecture peut-on émettre ?

Le quotient $\frac{EE'}{OE'}$ s'appelle la tangente de l'angle $\widehat{AOB}$. On le note tan $\widehat{AOB}$.

B Démontrer

Sur la figure ci-contre,
- $\widehat{xOy}$ est un angle aigu,
- R et S sont deux points de la demi-droite [Ox),
- R′ et S′ sont deux points de la demi-droite [Oy),
- les droites (RR′) et (SS′) sont perpendiculaires à [Oy).



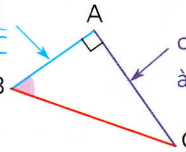
1 Démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{OR}{OS} = \frac{RR'}{SS'} = \frac{OR'}{OS'}.$$

2 Que peut-on dire des produits $OR' \times SS'$ et $RR' \times OS'$?
En déduire l'égalité $\frac{SS'}{OS'} = \frac{RR'}{OR'}$ puis conclure.

Activité 3 Dans un triangle rectangle

1 Dans le triangle ABC rectangle en A, [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ et [AC] est le **côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$**.



a. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$?

b. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$?

2 a. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

b. Recopier et compléter :

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal à :

$$\frac{\text{longueur du côté ... à cet angle}}{\text{longueur de ...}}.$$

3 a. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

b. Comparer le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

c. Comparer le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$ et le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$

d. Recopier et compléter :

Le sinus d'un angle est ...... au cosinus de son angle ....

4 a. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ et la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.

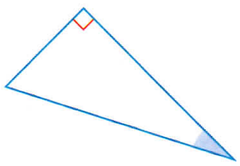
b. Recopier et compléter :

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale à :

$$\frac{\text{longueur du côté ... à cet angle}}{\text{longueur du côté ... à cet angle}}.$$

Activité 4 Propriétés liant le sinus et le cosinus d'un même angle

Soit un triangle ABC rectangle en C.
On note $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$.



1 a. En utilisant les longueurs des côtés du triangle ABC, exprimer $\sin \widehat{A}$ puis $\cos \widehat{A}$.

En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$.

b. En utilisant les longueurs des côtés du triangle ABC, exprimer $\tan \widehat{A}$.

c. Quelle égalité peut-on en déduire ?

2 a. Exprimer $(\sin \widehat{A})^2$ et $(\cos \widehat{A})^2$ en fonction de AC^2, BC^2 et AB^2.

b. Vérifier que : $(\sin \widehat{A})^2 + (\cos \widehat{A})^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$.

c. Quelle propriété permet d'écrire $BC^2 + AC^2 = AB^2$?

d. Justifier l'égalité : $(\sin \widehat{A})^2 + (\cos \widehat{A})^2 = 1$.

$(\sin \widehat{A})^2$ peut aussi s'écrire $\sin^2 \widehat{A}$ et $(\cos \widehat{A})^2$ peut aussi s'écrire $\cos^2 \widehat{A}$.