E.1 ♠ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\frac{x+1}{2{\cdot}x-1}$$

(1) Établir l'identité ci-dessous, pour tout $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$:
$$\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\frac{3}{5{\cdot}(2{\cdot}x-1)}$$

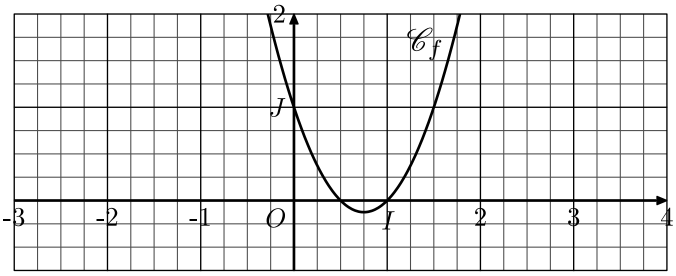
(2) En déduire la valeur du nombre dérivée en -2 de la fonction f.

E.2 ♣ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2+3{\cdot}x+1$$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1.

E.3 ♣ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous



(1) Établir que : $f'(1)=1$

(2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

E.4

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^3-5x^2+7x-2$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

(3) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.5

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^3+4x^2+5x+2$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

(3) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.6

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-x^3-3x^2-2x+4$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

(3) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.7 ♡

Proposition : ci-dessous les dérivées de la fonction inverse et de la fonction racine carrée.

Formule générale : $f(x)=\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	
$g(x)=\dfrac{5}{x} \rightsquigarrow g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}$	$h(x)=-\dfrac{7}{3x} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{7}{3x^2}$
Formule générale : $f(x)=\sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$g(x)=3\sqrt{x} \rightsquigarrow g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$h(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=3x^2$ (2) $g(x)=\dfrac{1}{12}{\cdot}x^6$ (3) $h(x)=4\sqrt{x}$

(4) $j(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ (5) $k(x)=\dfrac{1}{2x}$ (6) $l(x)=-\dfrac{2}{x}$

E.8 ♣ Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

(1) $f\colon x\longmapsto x-\dfrac{1}{x}$ (2) $g\colon x\longmapsto 2{\cdot}\sqrt{x}$

(3) $h\colon x\longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$ (4) $j\colon x\longmapsto 2{\cdot}x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

E.9 ♣ Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f\colon x\longmapsto x^5{\cdot}\big(x^2-1\big)$ (2) $g\colon x\longmapsto \big(2{\cdot}x^2-5x+1\big)\big(1-x^2\big)$

E.10 ♠ Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f\colon x\longmapsto (3-x){\cdot}\dfrac{1}{x}$ (2) $g : x\longmapsto x{\cdot}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.11 ♣ Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous :
$$g\colon x\longmapsto \big(x^2-3\big){\cdot}\sqrt{x}$$

On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.12 ♠ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x)=\big(2x+2\big){\cdot}\sqrt{x}$$

(1) Établir que : $f'(4) = \dfrac{13}{2}$

(2) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

E.13 ♣ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.14 ♣ On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{4}{x^2-2x+3}$$
Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

E.15 ♢ On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\frac{4\cdot x^2+x-3}{3\cdot x^2+2\cdot x-1}$$
Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5}{\left(3\cdot x-1\right)^2}$

E.16 ♠ On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :
$$f(x) = \left(x^2-3\cdot x\right)\cdot\sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$
Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

E.17 ♣ On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation : $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{2x^2-2x+3}$

(1) Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

(2) Établir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-6x+3}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$

(3) (a) Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

(4) En déduire les extrémums de la fonction f.

E.18 ♡ Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :
$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x\in\left[100\,;+\infty\right[.$$
Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :
$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$
Dans ce cas, le supermarché devra payer $300\times1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Étude du prix P proposé par le fournisseur.

(1) Montrer que : $P'(x)=\dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $\left[100\,;+\infty\right[$.

(2) Donner le sens de variations de la fonction P sur $\left[100\,;+\infty\right[$.

Partie B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché.

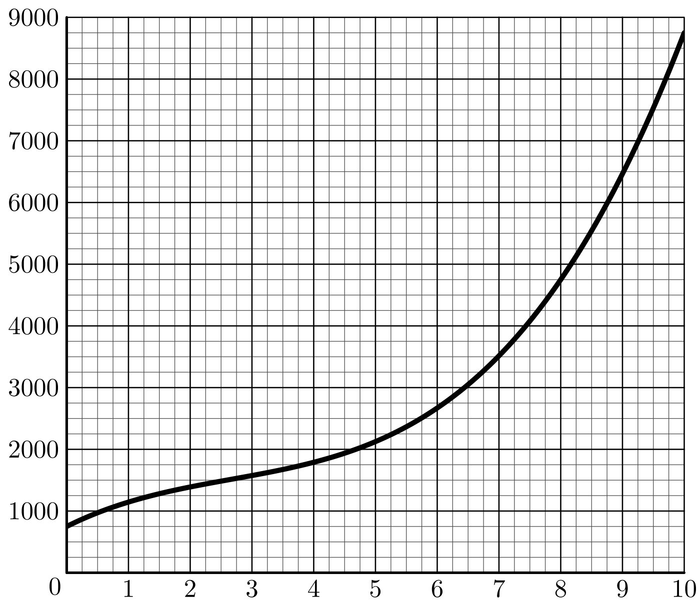
On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme)*.
Cette somme est donc égale à :
$$S(x)=x\cdot P(x) \quad \text{pour } x\in\left[100\,;+\infty\right[.$$

(1) Montrer que pour tout x appartenant à $\left[100\,;+\infty\right[$:
$$S'(x) = \frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

(2) Montrer que pour tout x appartenant à $\left[100\,;+\infty\right[$:
$$S(x) = x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}$$

E.19 ♣ L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$$C(x) = 15x^3-120x^2+500x+750.$$
Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p\cdot x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
   $y = 400{\cdot}x$.
   Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

   a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
   $y = 680{\cdot}x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

   b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right[$ par :
   $B(x) = 680{\cdot}x - C(x)$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, on a :
   $B'(x) = -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180$

   c. Étudier les variations de la fonction B sur $\left[0\,;10\right]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $\left]0\,;10\right]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;10\right]$, on a : $C'_M(x) = \dfrac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;10\right]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $\left]0\,;10\right]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?