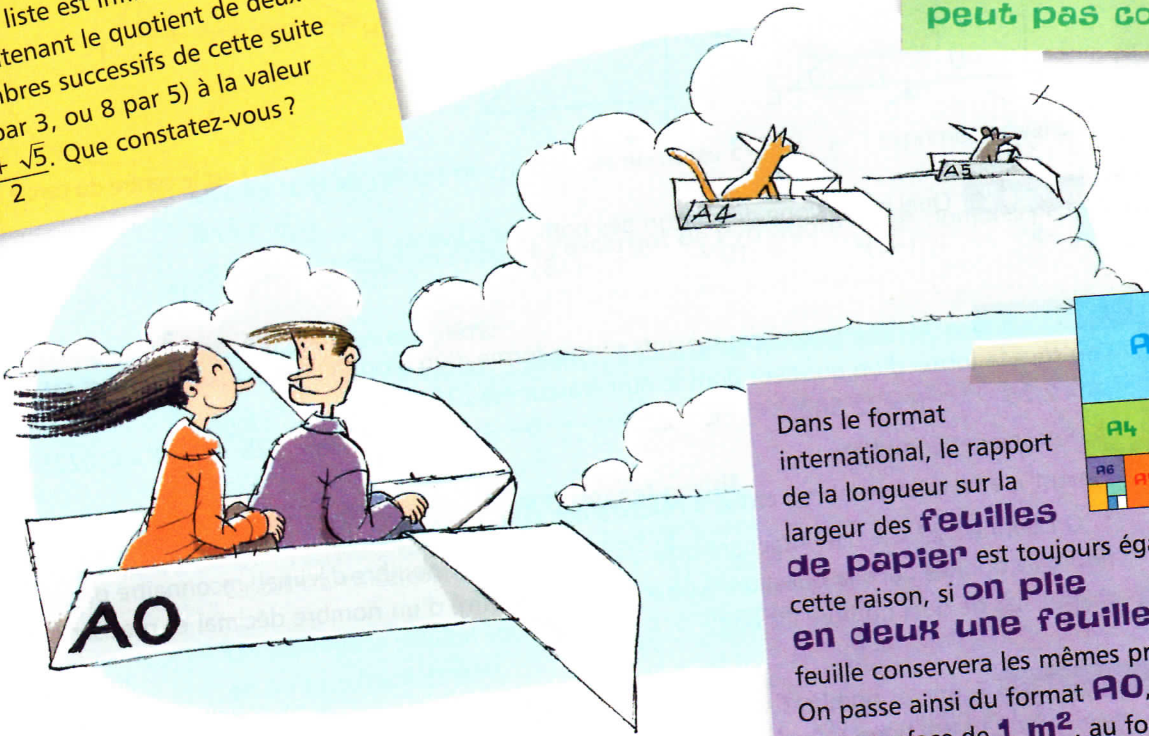
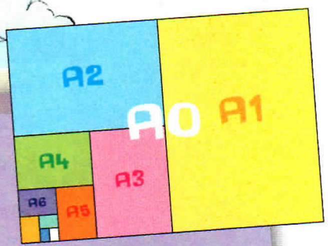
# 4 Racine carrée

Suite de Fibonacci sur la cheminée d'un bâtiment industriel de Turku en Finlande

**Fibonacci** (1170-1245), un mathématicien italien, inventa la suite de nombres suivante : **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...** On obtient le nombre suivant de la liste en **additionnant les deux nombres précédents**. Cette liste est infinie. Comparez maintenant le quotient de deux nombres successifs de cette suite (5 par 3, ou 8 par 5) à la valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Que constatez-vous ?

Les mathématiciens grecs savaient, en appliquant le théorème de Pythagore, que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 était égale à $\sqrt{2}$. Quand ils découvrirent et démontrèrent qu'**on ne pouvait exprimer exactement** cette longueur par une fraction (les seuls nombres qu'ils connaissaient jusque-là), ils furent **désespérés**. Ils nommèrent ces nombres **irrationnels**, ce qui signifie étymologiquement « que l'**on ne peut pas compter** ».




Dans le format international, le rapport de la longueur sur la largeur des **feuilles de papier** est toujours égal à $\sqrt{2}$. Pour cette raison, si **on plie en deux une feuille**, la nouvelle feuille conservera les mêmes proportions. On passe ainsi du format **A0**, dont la feuille a une surface de **1 m²**, au format **A1**, puis **A2**, **A3**, **A4**...

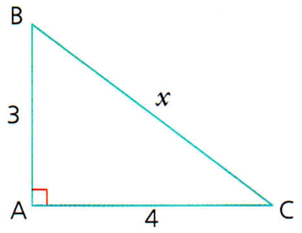
# Pour bien commencer

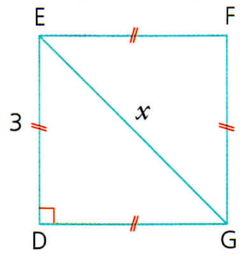
**QCM** **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

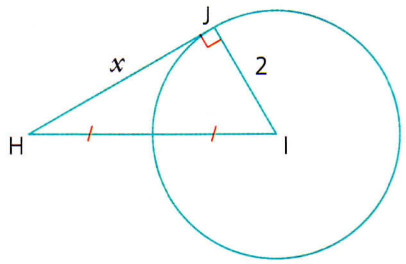
| | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le carré de 5 est égal à : | $5 \times 5$ | $2 \times 5$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ |
| 2 | Le carré de 5 se note : | $2^5$ | $5^2$ | $2 \times 5$ |
| 3 | $0^2 =$ | 0 | 1 | 2 |
| 4 | $-10^2 =$ | 100 | $-100$ | 0,01 |
| 5 | Les carrés de $-7$ et 7 sont égaux à : | $-49$ | 49 | $-49$ pour l'un, 49 pour l'autre |
| 6 | 64 est le carré de : | 8 | 32 | 128 |
| 7 | 25 est le carré de : | 5 et $-5$ | 5 uniquement | $-5$ uniquement |
| 8 | 0,36 est le carré de : | 0,06 | 0,6 | 0,18 |
| 9 | $10^6$ est le carré de : | $10^3$ | $10^4$ | $10^{-3}$ |
| 10 | Quand on tape $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{7}$ sur la calculatrice, on peut lire à l'écran : 1,428571429 | 1,43 est une valeur approchée par défaut de $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{7}$ | 1,43 est une valeur approchée par excès de $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{7}$ | Ce résultat est la valeur exacte de $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{7}$ |

**Exercice 1** **a.** Énoncer le théorème de Pythagore.

**b.** À l'aide du théorème de Pythagore, calculer la valeur exacte de la longueur $x$ dans chacun des cas suivants (l'unité choisie est le centimètre) :




I est le centre du cercle

**Exercice 2** Quel est le signe de chacun des nombres suivants ?

**a.** $-5^2$ **b.** $(-2)^2$ **c.** $10^{-2}$ **d.** $-(-3)^2$ **e.** $(-10)^{-2}$ **f.** $(-5)^4$ **g.** $-10^{-4}$

**Exercice 3** **a.** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est 225 ou sous la forme d'un quotient dont le numérateur est 225.

A = 2,25 B = 22 500 C = 22,5 D = 2 250 E = 0,225 F = 0,0225

**b.** Recopier et compléter :

*Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers relatifs non nuls. On a : $a^2 \times b^2 = (\_\_\_)^2$ et $\frac{a^2}{b^2} = (\_\_\_)^2$.*

**c.** On donne : $225 = 15^2$. Sachant que $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre décimal, reconnaître parmi les nombres donnés dans la question **a** ceux qui sont le carré d'un nombre décimal et préciser dans chaque cas de quel nombre il s'agit.

**Exercice 4** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit dont au moins un des facteurs est un carré (autre que 1). Donner toutes les solutions possibles.

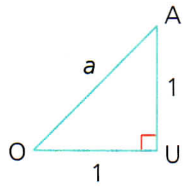
**a.** 18 **b.** 48 **c.** 80 **d.** 72 **e.** 28 **f.** 1 000 **g.** 360 **h.** 108

# Activités

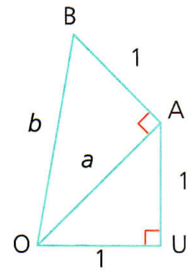
## Activité 1 Racine carrée d'un nombre positif

### 1 Racine carrée d'un nombre entier

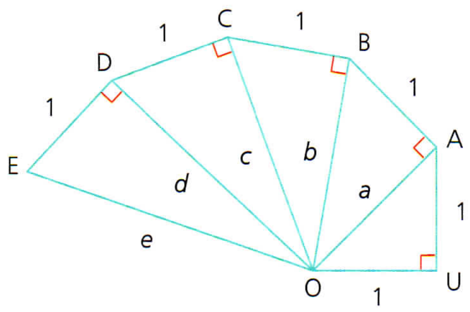
**a.** On considère le triangle OUA rectangle et isocèle en U représenté ci-contre.
On choisit pour unité de longueur la longueur OU.
Les côtés de l'angle droit ont donc pour longueur 1 et on appelle $a$ la longueur de son hypoténuse.
Calculer $a^2$. Peut-on déterminer la valeur numérique de $a$ sans calculatrice ?
Que doit vérifier cette valeur ? On utilise le symbole $\sqrt{\ }$ pour exprimer la valeur exacte de $a$.




**b.** À partir du triangle précédent, on construit un nouveau triangle OAB rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $a$ et 1. On appelle $b$ la longueur de son hypoténuse.
Calculer $b^2$. Exprimer la valeur exacte de $b$.




**c.** On poursuit de manière analogue la construction : l'hypoténuse du dernier triangle construit forme un côté de l'angle droit du nouveau triangle, l'autre côté de l'angle droit étant de longueur 1.
On appelle les longueurs des hypoténuses des triangles rectangles successifs $c$, $d$, $e$, etc.




Quelles sont les valeurs de chacun des nombres $c^2$, $d^2$, $e^2$ ? Exprimer les valeurs exactes des nombres $c$, $d$, $e$.

**d.** Cette construction s'appelle l'**escargot de Pythagore**. Quels nombres permet-il de construire ?

**e.** *Recopier et compléter :*
*Pour tout nombre entier $a$ positif, il existe un nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que son --- est égal à ---.*

### 2 Racine carrée d'un nombre rationnel positif

Calculer sans calculatrice le nombre $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$.

On donnera le résultat sous la forme d'un nombre en écriture fractionnaire.
Peut-on en déduire qu'il existe un nombre $a$ tel que $a^2 = \dfrac{2}{3}$ ?

## Activité 2 Solutions de l'équation $x^2 = a$

**1** **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

| $x$ | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | | | | | | | | | | |

On admet que l'équation $x^2 = a$ a au plus deux solutions

**b.** Quels nombres ont pour carré :
- 25
- 16
- 9
- 4
- 1

**c.** Calculer $(\sqrt{2})^2$ et $(-\sqrt{2})^2$, puis calculer $(\sqrt{3})^2$ et $(-\sqrt{3})^2$.

**d.** Quels sont les nombres qui ont pour carré 2 ? Quels sont les nombres qui sont solutions de l'équation $x^2 = 2$ ?

**e.** Quels sont les nombres qui ont pour carré 3 ? Quels sont les nombres qui sont solutions de l'équation $x^2 = 3$ ?

**f.** *À partir de ces exemples, quelles semblent être les solutions de l'équation $x^2 = a$ lorsque $a$ est un nombre strictement positif ?*

**2** Quel(s) nombre(s) ont pour carré 0 ? Quelle(s) solution(s) l'équation $x^2 = 0$ a-t-elle ?

**3** – 9 peut-il être le carré d'un nombre ? Un nombre négatif peut-il être un carré ?

**4** Résoudre les équations suivantes :

**a.** $x^2 = 11$ **b.** $x^2 = 81$ **c.** $x^2 = 0{,}01$ **d.** $x^2 - 4 = 0$

## Activité 3 Racine carrée et calculatrice

**1** **a.** À l'aide de la calculatrice, calculer la racine carrée de 2. Qu'affiche l'écran de la calculatrice ?

**b.** Sans retaper le résultat obtenu, élever au carré le nombre affiché. Que constate-t-on ?

**c.** Calculer $1{,}414\,213\,562^2$ à la calculatrice. Qu'affiche l'écran ?

**d.** Peut-on en conclure que le nombre 1,414 213 562 est la valeur exacte de $\sqrt{2}$ ?

**2** **a.** De la même manière, à l'aide de la calculatrice, calculer la racine carrée du nombre 29,920 9.

**b.** Le nombre 5,47 est-il la valeur exacte de $\sqrt{29{,}920\,9}$ ?

**3** Comment savoir si le résultat affiché est une valeur arrondie ou une valeur exacte ?

**4** On regardant uniquement le dernier chiffre du résultat affiché sur la calculatrice, comment pourrait-on savoir si ce résultat est une valeur arrondie de la racine carrée ?

## Activité 4 Racine carrée et opérations

### A Multiplication

**1** **a.** Comparer les nombres suivants en s'aidant, si nécessaire, de la calculatrice. Que constate-t-on ?

- $\sqrt{36}$ et $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$
- $\sqrt{400}$ et $\sqrt{50} \times \sqrt{8}$
- $\sqrt{2\,601}$ et $\sqrt{17} \times \sqrt{153}$
- $\sqrt{289}$ et $\sqrt{2{,}89} \times \sqrt{100}$
- $\sqrt{0{,}81}$ et $\sqrt{4{,}5} \times \sqrt{0{,}18}$

**b.** Si $a$ et $b$ sont deux nombres positifs, que peut-on conjecturer concernant les nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ?

**2** **a.** Démontrons la conjecture établie dans la question **1** b.
Soient $a$ et $b$ deux nombres positifs.
On admet la propriété suivante : $m$ et $n$ étant deux nombres positifs, si $m^2 = n^2$, alors $m = n$.
**b.** • Quel est le signe de $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ?
• Calculer $(\sqrt{ab})^2$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$.
• En déduire en utilisant la propriété admise ci-dessus que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

### B Quotient

**1** **a.** Comparer les nombres suivants en s'aidant, si nécessaire, de la calculatrice. Que constate-t-on ?

- $\sqrt{\frac{25}{4}}$ et $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$
- $\sqrt{\frac{45}{20}}$ et $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$
- $\sqrt{\frac{1{,}44}{0{,}01}}$ et $\frac{\sqrt{1{,}44}}{\sqrt{0{,}01}}$

**b.** Si $a$ est un nombre positif et $b$ un nombre strictement positif, que peut-on conjecturer concernant les nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ?

**2** Démontrons la conjecture établie dans la question **1** b.
Soient $a$ un nombre positif et $b$ un nombre strictement positif.
Montrer, en suivant le même raisonnement que dans la question A**2**, que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

### C Addition et soustraction

**1** Comparer les nombres suivants :

- $\sqrt{9+16}$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
- $\sqrt{100-36}$ et $\sqrt{100} - \sqrt{36}$
- $\sqrt{9^2+18^2}$ et $9 + 18$

Semble-t-il possible de citer une propriété sur la racine carrée d'une somme ou d'une différence ?

**2** Recopier et compléter :
Si $a$ et $b$ sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{ab}$ = ... .
Si $a$ est un nombre positif et $b$ un nombre strictement positif, alors $\sqrt{\frac{a}{b}}$ = ... .
En général, la racine carrée d'une ... (ou d'une ... ) n'est pas ... à la ... (ou à la ... ) des racines carrées des deux termes de la ... (ou de la ... ).