Plan du cours

Chapitre 0 : Quelques rappels . . . utiles

I. Evolutions

Dans cette partie, on considère une grandeur passant d'une valeur de départ v_0 à une valeur d'arrivée v_1.

Définition **Variation absolue**

On appelle **variation absolue** le nombre $v_1 - v_0$.
La variation absolue s'exprime dans l'unité de la grandeur étudiée.

Définition **Taux d'évolution**

On appelle **Taux d'évolution** ou encore **variation relative** le rapport $\dfrac{v_1 - v_0}{v_0}$.
Ce nombre peut s'exprimer sous la forme d'un pourcentage en le multipliant par 100.

Remarques :

- La variation relative s'exprime sans unités !
- Le pourcentage d'évolution dépend des valeurs de départ et d'arrivée, et peut donc être positif ou négatif.

Propriété

Soit t le pourcentage d'évolution de v_0 à v_1.

- Si t est positif, alors la grandeur a augmenté de v_0 à v_1, et on dit que v_0 a subit une augmentation.
- Si t est négatif, alors la grandeur a diminué de v_0 à v_1, et on dit que v_0 a subit une diminution.

Propriété

$t = \dfrac{v_1 - v_0}{v_0} \times 100$ équivaut à $v_1 = v_0 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$

Définition **Coefficient multiplicateur**

Faire évoluer de $t\%$ une quantité, c'est multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{t}{100}$.

On nomme le nombre $1 + \dfrac{t}{100}$ **coefficient multiplicateur** de l'évolution (que l'on notera généralement CM).

Propriété

- si $CM > 1$, alors l'évolution est une augmentation.
- si $CM < 1$, alors l'évolution est une diminution.

Propriété

Soit CM le coefficient multiplicateur d'une évolution de $t\%$. Alors on a :

$$t = (CM - 1) \times 100$$

II. Les suites numériques

1. Généralités

On appelle suite numérique réelle, une **liste ordonnée** de nombres réels.
Chaque élément de la suite est précisément repéré par sa position dans la liste, position pouvant être définie simplement par un entier naturel.
On note (u_n) la suite $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n,\ u_{n+1}\ ,\ \dots$

- n est l'indice.
- u_n est le terme général de la suite (u_n), le terme de rang n ou le terme d'indice n.

Il existe principalement deux modes de génération d'une suite :

- Par la donnée de l'expression de u_n en fonction de n (comme pour une fonction).
  On dit alors que l'on donne **la forme explicite** de la suite
  Dans ce cas, on sait calculer n'importe quel terme de la suite.

  Exemple 1 : La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

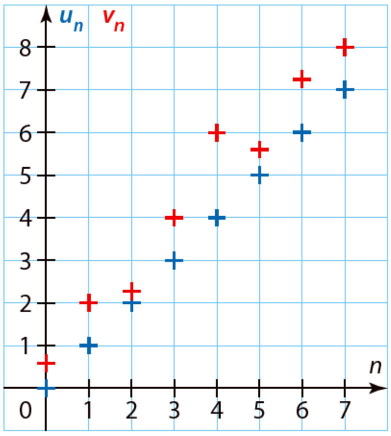
- Par la donnée d'un terme initial et d'une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent.
  La suite est alors dite **définie par récurrence**, et la relation est appelée **relation de récurrence**.

  Exemple 2 : La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Définition **Représentation graphique**

La représentation graphique d'une suite est appelée **un nuage de points**.
Ce nuage est formé des points de coordonnées $(n; u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$. On a représenté graphiquement ci-contre la suite (u_n) en bleu et la suite (v_n) en rouge.



2. Variations

Propriété

- Une suite (u_n) est **croissante** (resp. strictement croissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
- Une suite (u_n) est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
- Une suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Méthodologie : Soit (u_n) une suite. Pour étudier son sens de variation, on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}$ comparer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.

Exemples :

1) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pout tout $n \in \mathbb{N}$:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = v_n + 2$:

. . . .

. . . .

. . . .

III. Les suites arithmétiques

1. Généralités

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

- En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Propriété

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si la **variation absolue** entre deux termes consécutifs est constante égale à r. Autrement dit

$$(u_n) \text{ est arithmétique de raison } r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$$

2. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Il s'agit de calculer de la somme des n premiers entiers non nuls.

Propriété

n est un entier naturel non nul, alors on a : $1 + 2 + 3 + \quad + \quad = \dfrac{n(1+n)}{2}$

Il s'agit de calculer maintenant la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Propriété

Somme des termes consécutifs dune suite arithmétique :

$$S_n = (n+1) \times \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

Autrement dit, $\quad$ Nbre de terme $\times \dfrac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Exemples :

1) Calculer la somme suivante : $S = 33 + 36 + 39 + \ldots + 267$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.
Déterminer la somme S définie par : $S = u_{11} \ldots + u_{25}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Variation d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. alors :

- (u_n) est croissante si $r > 0$.
- (u_n) est décroissante si $r < 0$.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

Propriété

Une suite arithmétique de raison r est représentée dans le plan par des points alignés sur une droite de coefficient directeur r.

IV. Les suites géométriques

1. Généralités

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si, et seulement si, il existe un réel q non nul tel que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

La définition précédente nous donne la forme de récurrence de la suite. Or il est souvent (très souvent) bien plus utile de connaître la forme explicite de la suite. Les deux théorèmes suivant nous la fournissent.

Théorème

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Théorème

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Remarque : Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

2. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Il s'agit de calculer la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Propriété

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Il s'agit maintenant de calculer la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ est une somme de termes consécutifs de la suite (u_n), alors :

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Autrement dit, $\quad S_n = \text{premier terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nbre de terme}}}{1-q}$

Exemples :

1) Calculer la somme $S = 3+3^2+3^3+\ldots+3^{13}$

. . . .

. . . .

2) Un entrepreneur investit au départ 20 000 €. Puis, chaque mois, il investit un montant supplémentaire diminué de 30 % par rapport au mois précédent.
On note u_n le montant investi au mois n. On considère alors que $u_0 = 20\ 000$.
Calculer le montant total investi la première année (12 mois).

. . . .

. . . .

3. Variations

Propriété

La suite de terme général $u_n = q^n$ est :

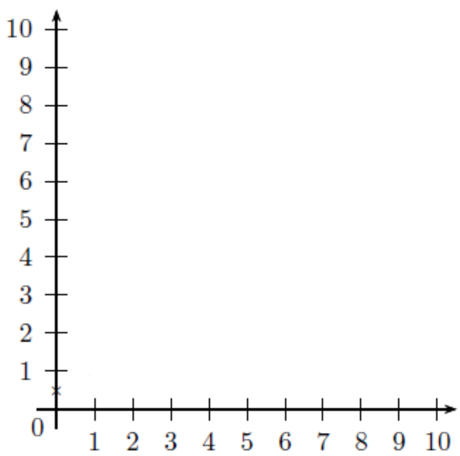
- strictement croissante si q > 1
- strictement décroissante si 0 < q < 1
- ni croissante ni décroissante si q < 0

Propriété

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors $u_n = u_0 \times q^n$:

- si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) varie dans le même sens que la suite (q^n) ;
- si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) varie dans le sens contraire de la suite (q^n) ;

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 2u_n$ et la représenter dans un repère (O ; I ; J).



Quelques petits exercices pour reprendre la main

Exercice 1

Le prix d'un objet augmente de 125 € à 150 €.
1) Déterminer la variation absolue du prix.
2) Déterminer la variation relative de ce prix et en déduire le pourcentage d'évolution de cet objet.

Exercice 2

Le prix du baril de pétrole coûte 105 dollars. Ce prix augmente de 5 %.
Déterminer le prix du baril après l'augmentation.

Exercice 3

Dans une entreprise, le nombre d'employés passe de 400 à 350 en un an.
Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre d'employés sur l'année.

Exercice 4

Si la population d'une ville augmente de 20 %, alors cette population a été multipliée par . . . .

Exercice 5

Si une population augmente de 20 % puis de 15 %, alors cette population augmente de . . . %.

Exercice 6

(u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n$ et $v_n = n^2 + 2n$.
1) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}.
2) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_{10}.
3) Exprimer v_{n+1} en fonction de n.

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 8

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{6}{n+2}$.
Placer dans un repère les cinq premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n).

Exercice 9

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 1$.
Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 10

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 4$.
Montrer que la suite est décroissante.

Exercice 11

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 8$.
Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 12

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_{50}.

Exercice 13

(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1{,}5$.
1) Calculer u_{32}
2) Calculer u_0.

Suite arithmétique ou suite géométrique ?

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2014.
Elle a le choix entre deux formules de contrat.
Dans les deux cas, le loyer annuel en 2014 est de 7200 euros et le locataire s'engage à occuper la maison pendant huit années complètes.

<u>Contrat 1</u>

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer de l'année précédente.
On note $u_1 = 7200$.

1) Calculer le loyer u_2 payé lors de la 2ème année.
2) On note u_n le loyer lors de la n-ième année. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Exprimer (u_n) en fonction de n.
3) Calculer le loyer u_8 payé lors de la 8ème année.
4) Calculer la somme totale payée à l'issue des huit années de contrat.

<u>Contrat 2</u>

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 400 euros du loyer de l'année précédente.
On note v_1=7200.

1) Calculer le loyer v_2 payé lors de la 2ème année.
2) On note v_n le loyer lors de la n-ième année. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
Exprimer v_n en fonction de n.
3) Calculer le loyer v_8 payé lors de la 8ème année.
4) Calculer la somme totale payée à l'issue des huit années de contrat.

Exercices - Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 14

Pour prendre le train, Sofia achète un abonnement mensuel qui coûte 400 €. Avec cet abonnement, chaque billet de train qu'elle achète est au prix de 2 €.

1) Combien Sofia paiera-t-elle au total si elle achète 10 billets de train ?

2) On note u_n le prix que paye Sofia par mois pour l'abonnement et n billets de train.

(a) Exprimer u_n en fonction de n.

(b) Sofia a payé 434 €. Combien de billets de train a-t-elle achetés ?

Exercice 15

Un téléphone est en vente à 400 en 2019. Chaque année, son prix baisse de 10 % par rapport à l'année précédente.

On note u_n le prix du téléphone en $2019 + n$.

1) Donner la valeur de u_0 et u_1.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de (u_n). En déduire la nature de la suite (u_n).

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 16

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$.

Déterminer la valeur de r.

Exercice 17

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$.

Déterminer la valeur de q.

Exercice 18

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite définie par :

(a) $u_n = n^2$

(b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

(c) $u_n = 2n^2 - 1$

(d) $u_n = \dfrac{5^n}{n}$

Exercice 19

1) Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 = 18$ et de raison $q = 2,2$. Etudier le sens de variation de (u_n)

2) Soit (v_n) une suite géométrique définie par $v_0 = -5500$ et $v_{n+1} = 0,9v_n$. Etudier le sens de variation de (v_n)

3) Soit (w_n) une suite géométrique définie par $w_0 = 400$ et $w_{n+1} = 1,5w_n - 0,6w_n$.Etudier le sens de variation de (w_n)

Exercice 20

Soit (v_n) la suite définie pour tout n entier naturel par : $v_n = 4 \times 2^n$

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

(b) Quelles sont les variations de la suite (v_n).

Exercice 21

Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 1,05.

Exercice 22

Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

Premier contrat : un loyer de 200 €pour le premier mois, puis une augmentation de 5 €par mois jusqu'à la fin du bail ;

Second contrat : un loyer de 200 €pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?