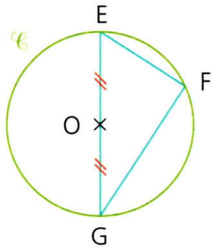
Savoir-faire 1 Comment démontrer qu'un triangle est rectangle

Énoncé **On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon quelconque, et [EF] une corde de $\mathscr{C}$ ne formant pas un diamètre.**
On note G le symétrique de E par rapport à O.
Démontrer que le triangle EFG est rectangle en F.

Solution



On réalise d'abord une figure codée.

On sait que G est le symétrique de E par rapport à O, donc O est le milieu de [EG], ce qui prouve que[EG] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

On utilise des données utiles de l'énoncé pour désigner un diamètre de $\mathscr{C}$.

On sait aussi que [EF] est une corde de $\mathscr{C}$, donc le point F appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [EG].

Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont deux points du cercle.

Le triangle EFG est donc inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [EG].

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est ce côté.
Donc le triangle EFG est rectangle et son hypoténuse est le côté [EG].

On cite la propriété utilisée pour démontrer que le triangle EFG est rectangle.

Ainsi, le triangle EFG est rectangle en F.

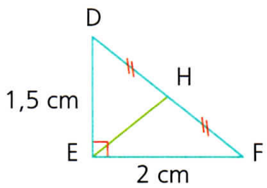
On conclut.

Savoir-faire 2 Comment calculer la longueur d'un segment

Énoncé **DEF est un triangle rectangle en E tel que :**

ED = 1,5 cm et EF = 2 cm.

On note H le milieu de [DF]. Calculer EH.



Solution

Le segment [EH] a pour extrémités le sommet E du triangle DEF et le milieu H de l'hypoténuse [DF];
[EH] est donc la médiane relative à l'hypoténuse [DF] du triangle DEF.

On justifie que le segment [EH] est une médiane du triangle DEF.

Le triangle DEF est rectangle en E.

Or, si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse de ce triangle a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse.

On cite la propriété utilisée pour exprimer la longueur de la médiane [EH].

Donc : $EH = \frac{1}{2}DF$.

Le triangle DEF étant rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$DF^2 = DE^2 + EF^2$
$DF^2 = 1{,}5^2 + 2^2$
$DF^2 = 6{,}25$.

On connaît les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle DEF ; le théorème de Pythagore permet alors de calculer la longueur de l'hypoténuse [DF].

Or, DF est une longueur ; donc : $DF \geqslant 0$.
Par conséquent : $DF = 2{,}5$ cm.
Ainsi : $EH = \frac{1}{2}DF$ et $DF = 2{,}5$ cm ;
donc : $EH = \frac{1}{2} \times 2{,}5 = 1{,}25$,

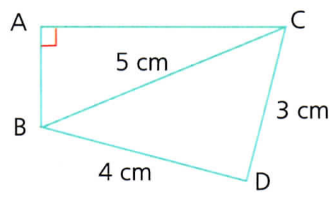
Pour obtenir la valeur de DF, on utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ d'une calculatrice.

soit $EH = 1{,}25$ cm.

On conclut.

Savoir-faire 3 Comment démontrer que des points appartiennent à un même cercle

Énoncé **Démontrer que les points A, B, C et D de la figure ci-contre appartiennent à un même cercle dont on précisera le diamètre et le centre.**



Solution

On sait, d'après le codage de la figure, que le triangle ABC est rectangle en A ; son hypoténuse est donc [BC].
Or si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.
Donc A appartient au cercle de diamètre [BC].

On cite la propriété utilisée pour déterminer le cercle circonscrit au triangle ABC.

Le plus grand côté du triangle BCD mesure 5 cm.
D'une part : $BC^2 = 5^2 = 25$.
D'autre part : $DB^2 + DC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.
D'où : $BC^2 = DB^2 + DC^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCD est rectangle en D, et son hypoténuse est [BC].

On démontre que le triangle BCD est rectangle en D. Pour cela, on utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

Or, si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.
Donc D appartient au cercle de diamètre [BC].

On cite la propriété utilisée pour déterminer le cercle circonscrit au triangle BCD.

Les points A, B, C et D appartiennent donc au cercle de diamètre [BC], dont le centre est le milieu de [BC].

On conclut.