Plan du cours

Mes objectifs :

↪ Je dois comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure,

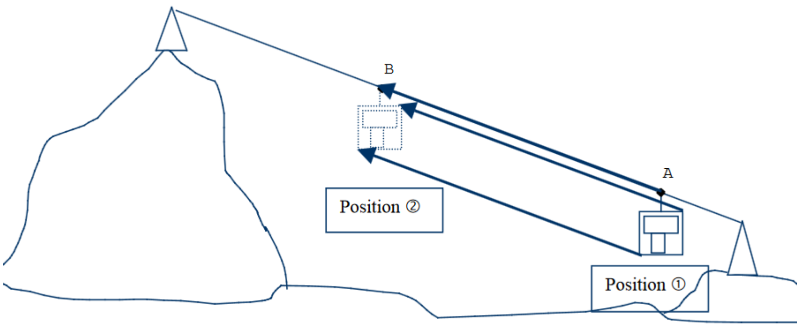
↪ Je dois savoir mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique,

↪ Je dois savoir utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie.

Activité d'introduction

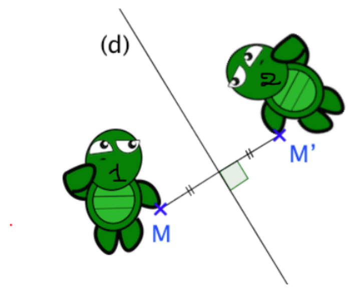
→ Quels types de transformation connaissez-vous ? Quelles sont les transformations présentes ci-dessous ?

Figure 1 : . . . .



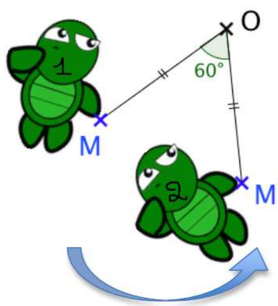
On dit que le dessin en position 2 est **l'image** du dessin en position 1 par **la translation qui transforme A en B** ou, autrement dit, par la translation de vecteur $\vec{AB}$.

Figure 2 : . . . .



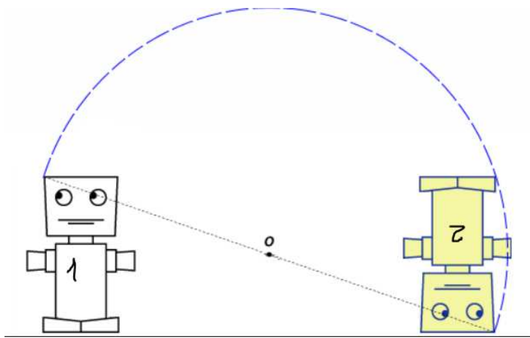
On dit que la tortue n°2 est **l'image** de la tortue n°1 par **la symétrie d'axe (d)**.

Figure 3 : . . . .



On dit que la tortue n°2 est **l'image** de la tortue n°1 par **la rotation de centre O et d'angle 60 °**.

Figure 4 : . . . .

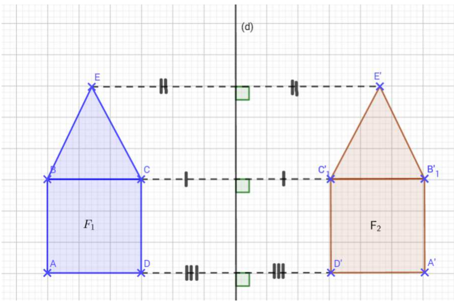


On dit que le robot n°2 est **l'image** du robot n°1 par **la symétrie de centre O**, ou encore par **la rotation de centre O et d'angle 180°**.

I. Symétries, Translations et rotations

1. La symétrie axiale

Définition :

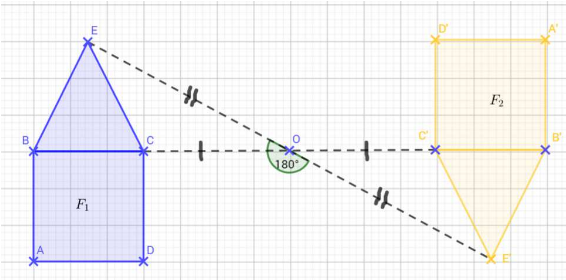


Deux points E et E' sont **symétriques par rapport à une droite (d)** si (d) est **la médiatrice de [EE']** : c'est à dire si (d) est perpendiculaire à [EE'] en son milieu.

Par symétrie axiale, une figure et son symétrique se superposent par pliage le long de l'axe de symétrie.

2. La symétrie centrale

Définition :

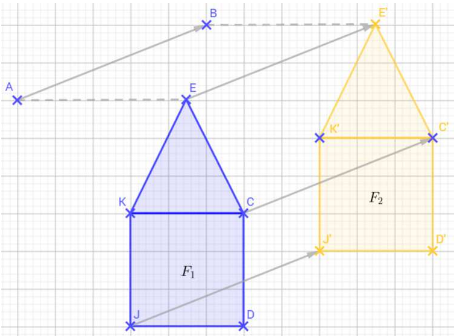


Une symétrie centrale est une transformation du plan par rapport à un point. L'image d'un point E **dans une symétrie de centre O** est le point E' tel que **O est le milieu du segment [EE']**.
On dit que E' est le symétrique de E par rapport à O.

Deux figures symétriques par symétrie centrale se superposent par un demi-tour autour du centre de symétrie.

3. La translation

Définition :

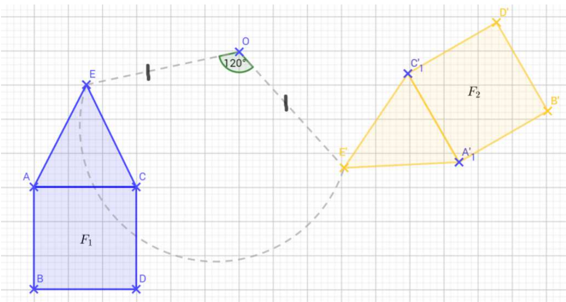


L'image d'un point E par **la translation qui transforme A en B**, autrement dit **la translation de vecteur** $\vec{AB}$, est le point E' tel que **ABE'E est un parallélogramme**.
On dit que E' est le translaté de E.

Par translation, une figure et sa translatée se superposent en glissant le long de la direction.

4. La rotation

Définition :



L'image d'un point E par **la rotation de centre O et d'angle** α est le point E' tel que :

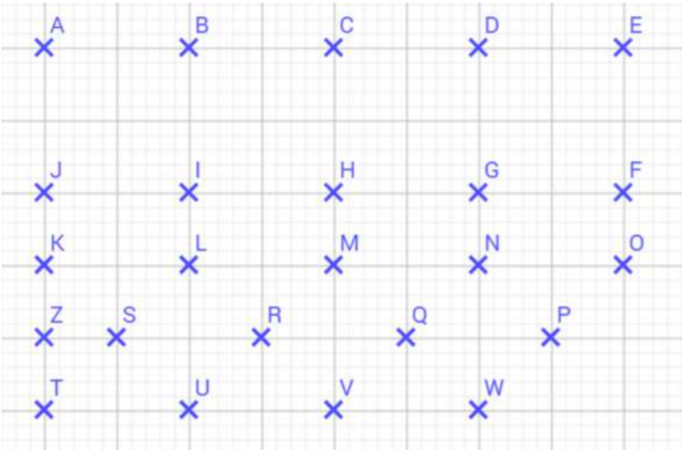
- $OE' = OE$
- $\widehat{EOE'} = \alpha$

Ci-contre, la figure F_1 et la figure F_2, que l'on obtient après une rotation de centre O et d'angle 120 ° dans le sens direct, **sont superposables**.

Par convention, le « **sens direct** » en mathématique signifie « **sens inverse des aiguilles d'une montre** ».
Remarque : Une **symétrie centrale** est une **rotation** particulière pour laquelle l'angle est **180 °** .

Activités sur les transformations

Exercice 1 Vrai ou faux.



(a) Le symétrique de N par rapport à Q est V.

(b) Le symétrique de L par rapport à (MR) est Q.

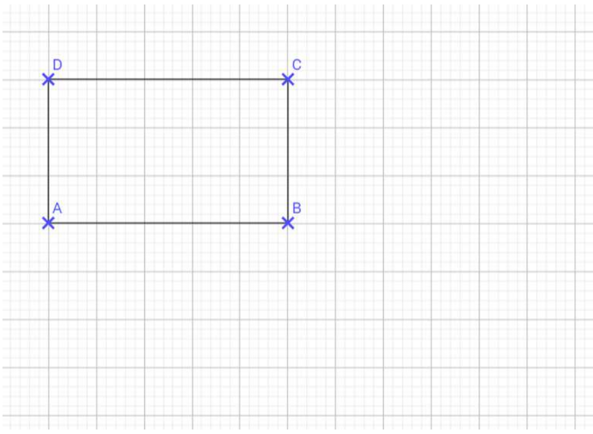
(c) L'image de H par la rotation de centre I et d'angle 45 ° dans le sens anti-horaire est C.

(d) L'image de M par la translation qui transforme Q en P est L.

(e) L'image de H par la rotation de centre B et d'angle 90 ° dans le sens horaire est J.

(f) La translation qui transforme M en D transforme L en C.

Exercice 2



1. Construire en vert l'image du rectangle ABCD par la symétrie d'axe (AC).
2. Construire en noir l'image du rectangle ABCD par la symétrie de centre B.

Exercice 3

1. Tracer un triangle ABC.

2. Par la translation qui transforme A en B, placer le point D, image de B.
3. Par la translation qui transforme A en B, placer le point E qui a pour image A.

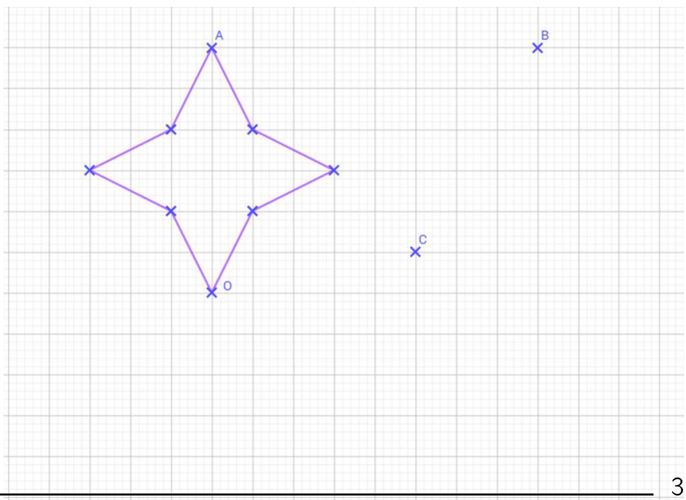
4. Placer le points F tel que C soit le milieu du segment [BF].

5. Placer le point G, image de A par la symétrie de centre C.

6. Quelle est l'image de F par la translation qui transforme A en B ? Justifier.
Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (GF) ?

7. Démontrer que les droites (BF) et (DG) sont parallèles.

Exercice 4



1. Tracer en rouge l'image de cette figure par la translation qui transforme A en B.

2. Tracer en bleu l'image de la figure par la rotation de centre O et d'angle 45 ° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Propriété

Dans toutes ces transformations l'image d'une figure est superposable à la figure initiale. On sait donc que :
- Les longueurs sont conservées
- Les angles sont conservés
- Les aires sont conservées.

II. Homothétie

Définition

Soit un point O.
Transformer une figure par **une homothétie de centre O**, c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser ses points le long de droites passant par O.
Une homothétie est définie par :
- un centre,
- un rapport k avec k un nombre relatif non nul.

Définition

Une figure et son image par une homothétie ont la même forme.
L'homothétie conserve, l'alignement des points, la notion de milieu et la mesure des angles.

1. Avec un rapport k positif

- **Image d'un point par une homothétie de rapport positif**

Définition

L'image d'un point M par une homothétie de centre O et de **rapport k positif** est le point M' tel que :

- M' appartient à la demi-droite [OM) ;
- $OM' = k \times OM$.

Exemple : Construire M' l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k = 2,5 puis M" l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k = 0,2.

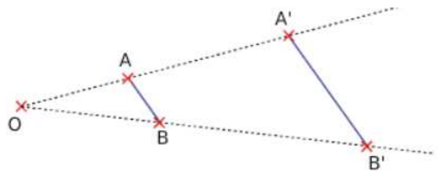
- **Image d'un segment par une homothétie de rapport positif**

Propriété

On considère A,B et O trois points du plan et k un nombre positif. Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport k alors

$(A'B') \mathbin{/\!/} (AB)$,
et $A'B' = k \times AB$.

Démonstration :



- Comme A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k positif, d'après la définition, on a : $OA' = k \times OA$ ou encore $\dfrac{OA'}{OA} = k$.
  De même B' est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport k, donc $OB' = k \times OB$ ou encore $\dfrac{OB'}{OB} = k$.

  On a $\dfrac{OA'}{OA} = k$ et $\dfrac{OB'}{OB} = k$ donc $k = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$

  Comme $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès on peut affirmer que $\boxed{(A'B') \mathbin{/\!/} (AB)}$.

- On sait que $(A'B') \mathbin{/\!/} (AB)$ et que les points O, A, A' sont alignés dans le même ordre que les points O, B, B'.

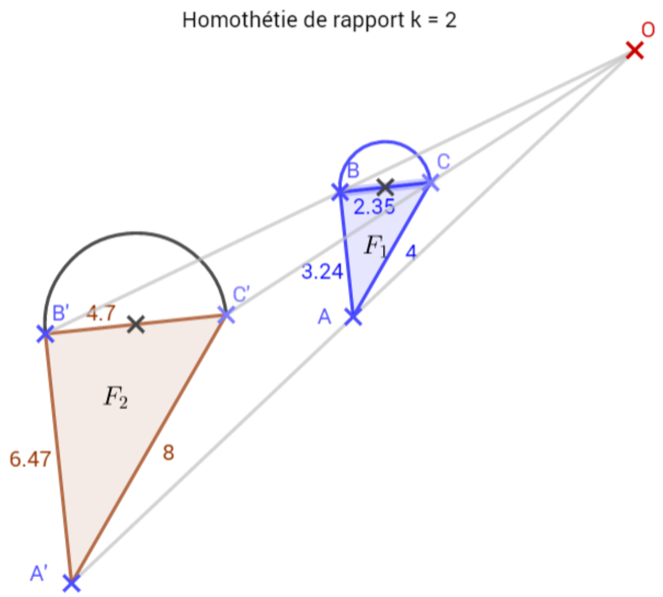
  D'après le théorème de Thalès, on a :

  $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$ et ainsi $\dfrac{A'B'}{AB} = k$ ou encore $\boxed{A'B' = k \times AB}$

- **Image d'une figure par une homothétie de rapport positif**

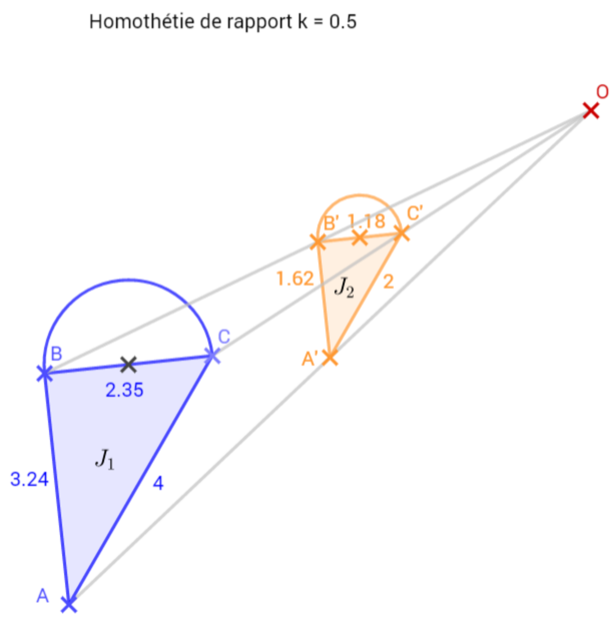
Exemple 1 : $k > 1$

On veut transformer la figure F_1 par l'homothétie de rapport $k = 2$.



Exemple 2 : $0 < k < 1$

On veut transformer la figure J_1 par l'homothétie de rapport $k = 0.5$.



Propriété

On considère la figure F_2 qui est l'image de la figure F_1 par une homothétie de centre O et de rapport k.

Si $k > 1$, alors F_2 est un agrandissement de F_1 par cette homothétie ;
Si $0 < k < 1$, alors F_2 est une réduction de F_1 par cette homothétie.

Exercice d'application 1

1. Tracer un triangle équilatéral ABC de côté 11 cm. Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport k = 0.5.

2. Tracer un carré ABCD de côté 3 cm.
Tracer l'image du carré ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport k = 2.
Calculer l'aire de ABCD et l'aire de A'B'C'D' et comparer-les.

Propriété

Dans une homothétie de rapport k positif :

- les longueurs sont multipliées par k ;
- les aires sont multipliées par k^2.

Exercice d'application 2

LEON est un carré de côté 5 cm. MARC est l'image de LEON par une homothétie de rapport $k = 4$.

1. Quelle est la nature de MARC ?

....

....

2. Quel est le périmètre de MARC ?

....

....

3. Quelle est l'aire de MARC ?

....

....

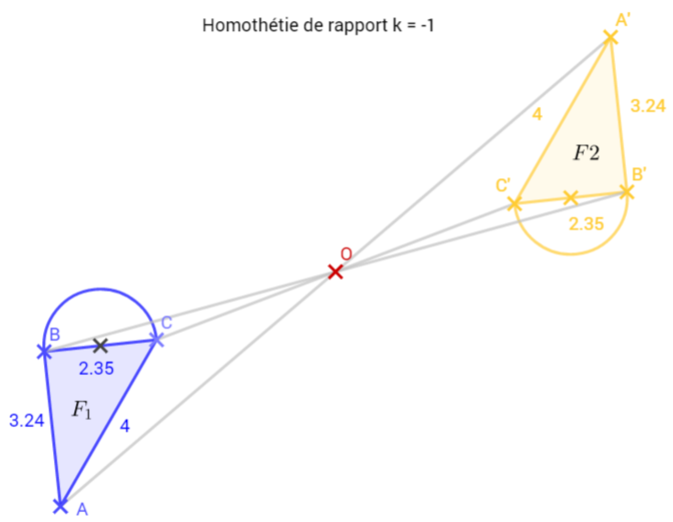
2. Avec un rapport k négatif

On peut aussi effectuer une homothétie avec un rapport k négatif (c'est-à-dire $k < 0$). L'image de la figure sera alors de l'autre côté du centre.

Remarque : Une homothétie de rapport $k = -1$ correspond à une symétrie centrale.

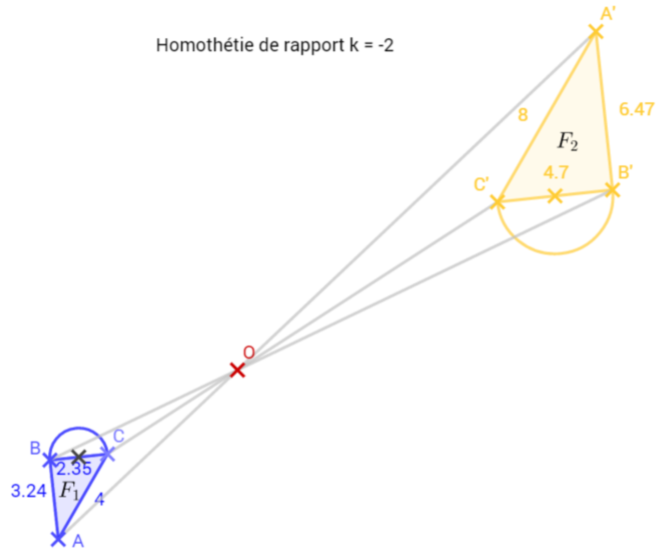
Exemple 1 : $k=-1$

On veut transformer la figure F_1 par l'homothétie de rapport $k=-1$.



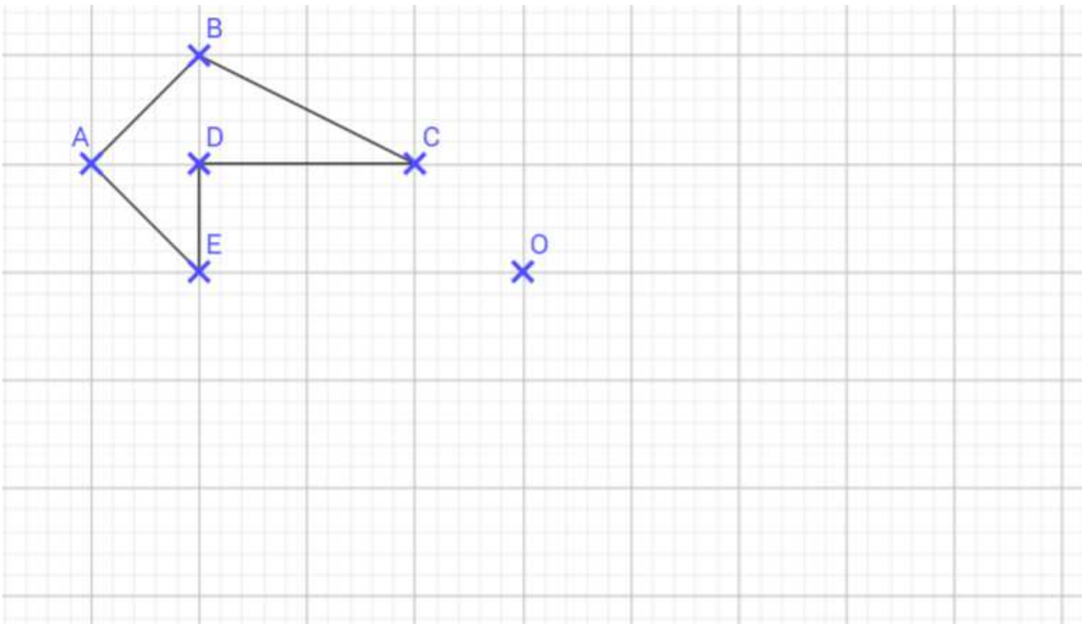
Exemple 2 : $k<0$

On veut transformer la figure J_1 par l'homothétie de rapport $k=-2$.



Exercice d'application 3

1. Tracer l'image du polygone ci-dessous par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1$.



2. Tracer l'image d'un rectangle ABCD de longueur 5 cm et de largeur 3 cm par une homothétie de centre E et de rapport $k = -2$.

III. Pavages du plan