Math93.com

# Arithmétique

## Troisième

## I Division euclidienne

**Définition 1** (Les entiers naturels)

Un nombre **entier naturel** est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\}$$

**Définition 2** (Division euclidienne)

Effectuer la division euclidienne d'un entier $a$ (le dividende) par un entier $b$ (le diviseur) non nul, c'est trouver deux entiers $q$ (le quotient) et $r$ (le reste) tels que :

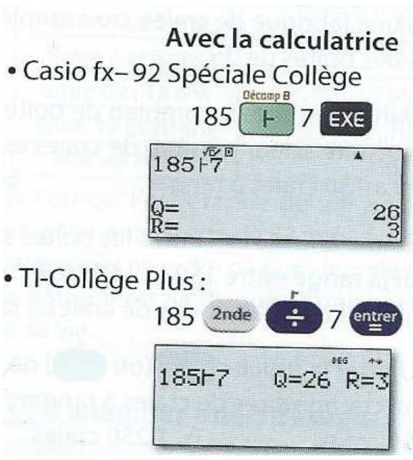
$$a = b \times q + r$$

**Exemple** : division euclidienne de 185 par 7

$$\begin{array}{r|l} 1\,8\,5 & 7 \\ \cline{2-2} 4\,5 & 2\,6 \\ 3 & \end{array}$$

Soit

$$185 = 7 \times 26 + 3$$




## II Multiples et diviseurs

**Définition 3** (Multiple et diviseur)

- Un nombre entier ***a* est un multiple** d'un nombre entier $b$ non nul lorsque le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ est 0.
- On dit que ***b* est un diviseur de *a*** ou que $a$ est divisible par $b$.
- Si l'entier $b$ divise l'entier $a$ il existe donc un entier $q$ tel que : $a = b \times q$.

**Exemple** : L'entier $a = 15$ est un multiple de $b = 3$ car $15 = 3 \times 5$. Les entiers 3 et 5 sont donc des diviseurs de 15.

**Propriété 1** (Critères de divisibilité)

- Un entier est **divisible par 2** quand il est pair donc quand son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
  Par exemple 110 est divisible par 2.
- Un entier est **divisible par 3** quand la somme de ses chiffres est divisible par 3.
  Par exemple 114 est divisible par 3 car $1 + 1 + 4 = 6$ et 6 est divisible par 3.
- Un entier est **divisible par 5** quand son chiffre des unités est 0 ou 5. Par exemple 110 est divisible par 5.
- Un entier est **divisible par 9** quand la somme de ses chiffres est divisible par 9.
  Par exemple 494 est divisible par 9 car $4 + 9 + 5 = 18$ et 18 est divisible par 93.
- Un entier est **divisible par 10** quand son chiffre des unités est 0. Par exemple 110 est divisible par 10.

## III Nombres premiers

**Définition 4** (Nombres premiers)

Un **nombre premier** est un nombre qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même.

**Exemples : Liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100.**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

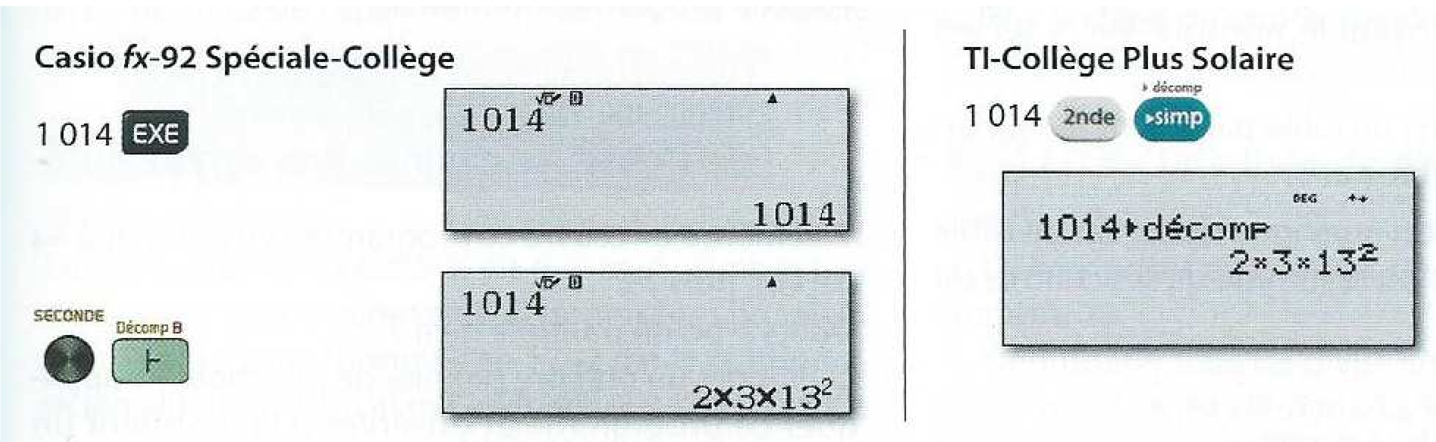
## IV Décomposition en facteurs premiers

**Propriété 2** (Admis)

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

**Exemple :**

$$1\,014 = 2 \times 507$$
$$1\,014 = 2 \times (3 \times 169)$$
$$1\,014 = 2 \times 3 \times (13 \times 13)$$
$$\boxed{1\,014 = 2 \times 3 \times 13^2}$$




## V Fractions irréductibles

**Définition 5** (Fractions irréductibles)

Une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

**Exemples**

$$\begin{aligned}\frac{1\,014}{84} &= \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3 \times 7}\\ &= \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2 \times 2 \times 3 \times 7}\\ &= \frac{13^2}{2 \times 7}\\ \frac{1\,014}{84} &= \frac{169}{14}\end{aligned}$$

# VI Applications de la décomposition

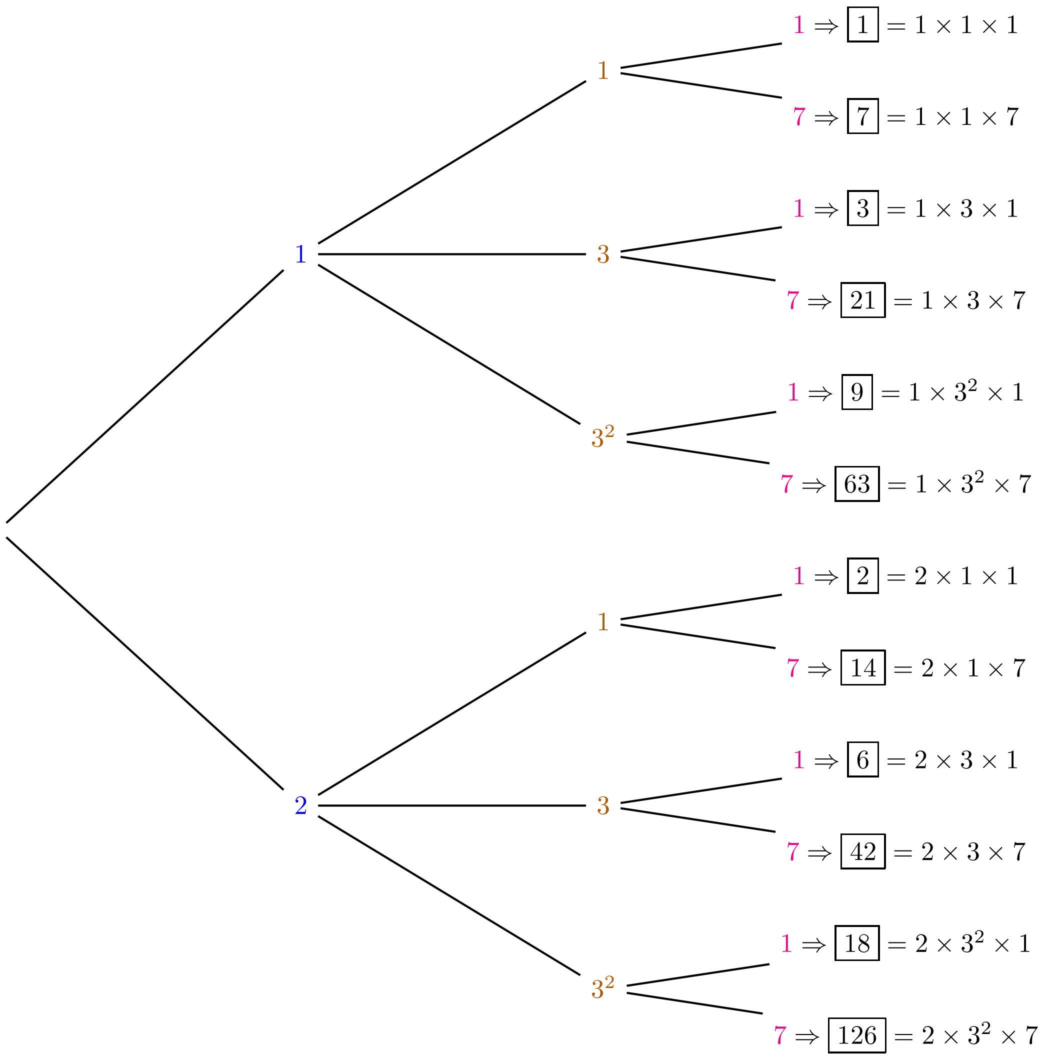
## VI.1 Lister tous les diviseurs d'un entier

**Méthode 1**

1. On écrit la décomposition de l'entier en facteurs premiers.
2. On complète un arbre présentant toutes les puissances des facteurs premiers.
3. On effectue le produit de chaque branche.

**Exemples : Calcul des diviseurs de 126**.

$$\boxed{126 = 2 \times 3^2 \times 7}$$




Les diviseurs de 126 sont donc : $1, 7, 3, 21, 9, 63, 2, 14, 6, 42, 18$ et $126$

## VI.2 Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

**Méthode 2** (PGCD)

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On recherche les facteurs communs des deux entiers .
3. On calcule alors ce facteur commun.

Pour résumer, le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b.

**Exemple : Calcul du Plus Grand commun Diviseur de 126 et 180**.

$$\begin{cases} 180 &= 2 \times 2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 &= 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 &= \underbrace{\left(2 \times 3^2\right)}_{18} \times 2 \times 5 \\ 126 &= \underbrace{\left(2 \times 3^2\right)}_{18} \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 &= \boxed{18} \times 10 \\ 126 &= \boxed{18} \times 7 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 180 et 127 est donc 18.

## VI.3 Calculer le Plus Petit Multiple Commun de deux entiers (PPCM)

**Méthode 3** (PPCM)

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On met en évidence les facteurs communs (donc le PGCD) et on complète les décompositions par les facteurs qui manquent pour obtenir des produit égaux.
3. On calcule alors ce multiple commun.

Pour résumer, le PPCM de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b.
Le PPCM est le produit du PGCD par le reste des facteurs non communs.

**Exemple : Calcul du Plus Petit Multiple Commun de 126 et 180**.

On va exhiber les entiers $N$ et $P$ tels que :

$$180 \times N = 126 \times P = \text{PPCM de } 126 \text{ et } 180$$

$$\begin{cases} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 &= 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 &= \left(2 \times 3^2\right) \times 10 \\ 126 &= \left(2 \times 3^2\right) \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 \times 7 &= \underbrace{\left(\left(2 \times 3^2\right) \times 10\right)}_{180} \times 7 \\ 126 \times 2 \times 5 &= \underbrace{\left(\left(2 \times 3^2\right) \times 7\right)}_{126} \times 10 \end{cases}$$

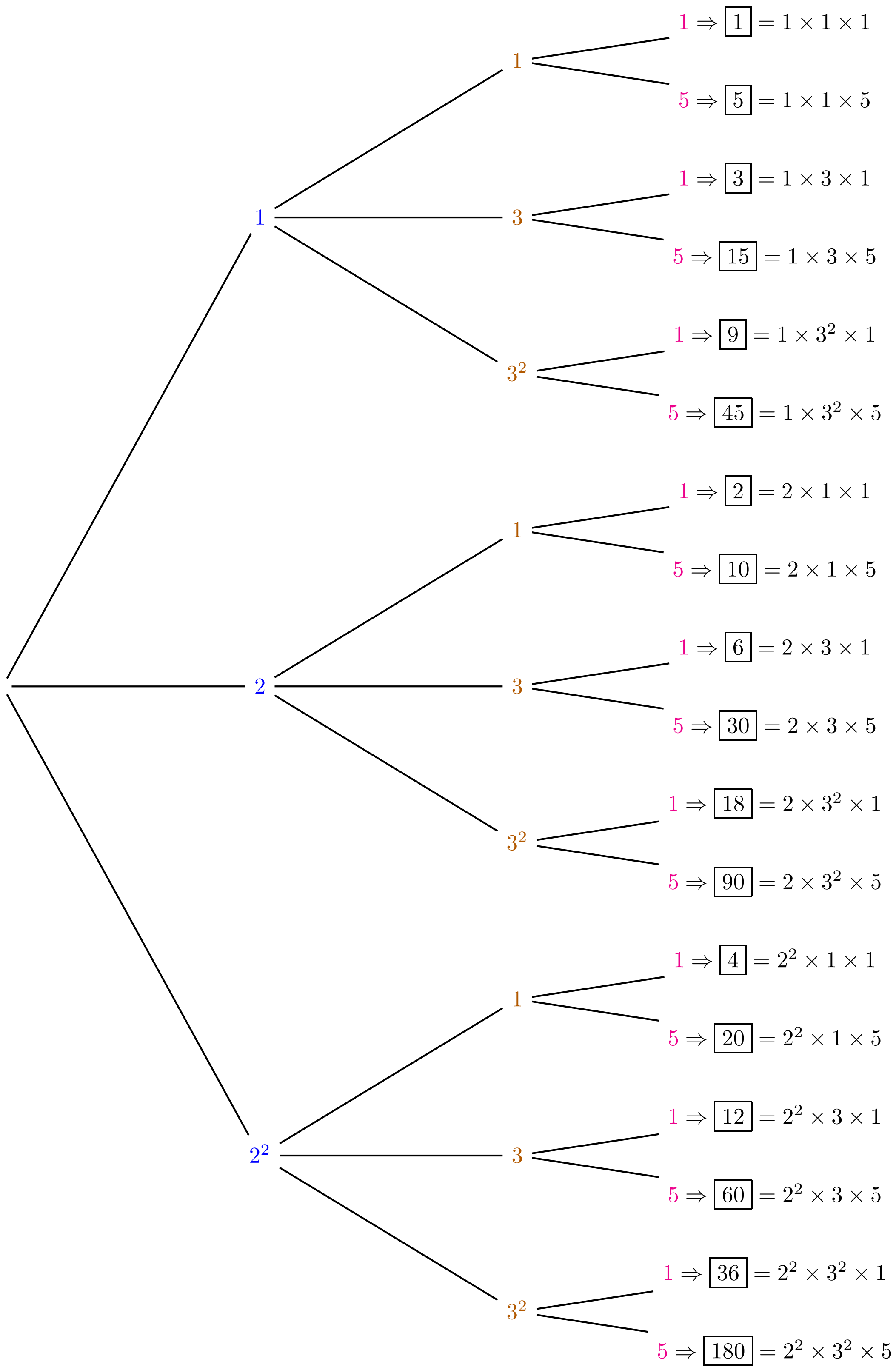
$$\boxed{PPCM = \underbrace{\left(2 \times 3^2\right)}_{PGCD} \times 10 \times 7 = 1\,260}$$

$$\boxed{180 \times 7 = 1\,260 = 126 \times 10}$$

Le **Plus Petit Multiple Commun** des entiers 180 et 127 est donc 1 260.

# ANNEXE : Liste des diviseurs de 180

$$\boxed{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$$




Les diviseurs de 180 sont donc : $1, 5, 3, 15, 9, 45, 2, 10, 6, 30, 18, 90, 4, 20, 12, 60, 36$ et $180$