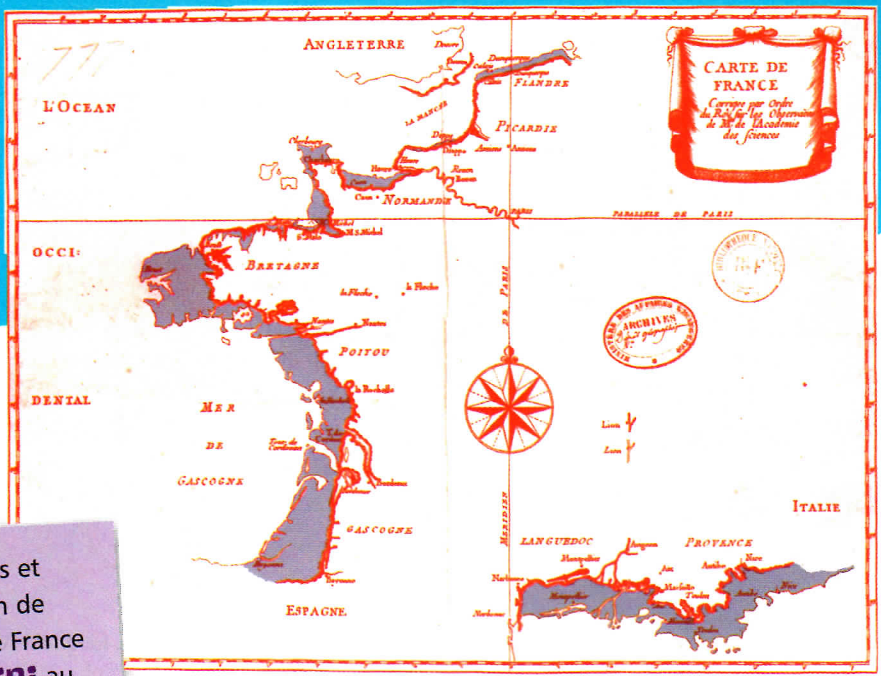
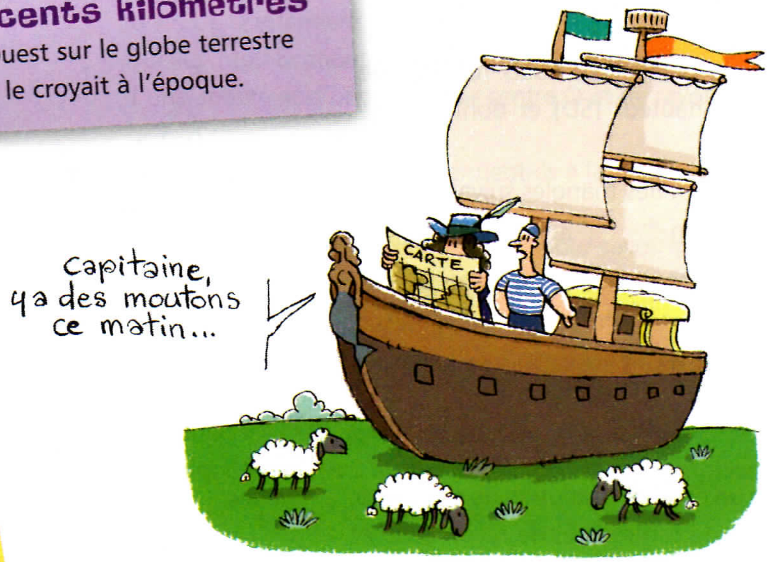
13 Sphère et boule



Carte de France corrigée en 1693

Grâce à de meilleures mesures et à une meilleure représentation de la sphère terrestre, la carte de France établie par la famille **Cassini** au XVIII^{e} siècle corrigeait une **erreur notoire** : la France était quelque **deux cents kilomètres** plus à l'Ouest sur le globe terrestre qu'on ne le croyait à l'époque.

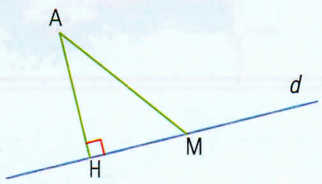


Les navigateurs avaient besoin de cartes précises pour arriver à bon port… Il leur était facile de déterminer la **latitude** (sur un **parallèle**) **en visant l'étoile polaire** et en mesurant l'angle par rapport à la verticale du point. En revanche, la **longitude** (sur un **méridien**) était autrement plus délicat à déterminer : l'écrivain Voltaire, en 1734, parle de « **l'impossible problème** des longitudes ». Pour la déterminer, des **chronomètres de précision** furent mis au point en Angleterre vers 1750 après de **multiples naufrages**.

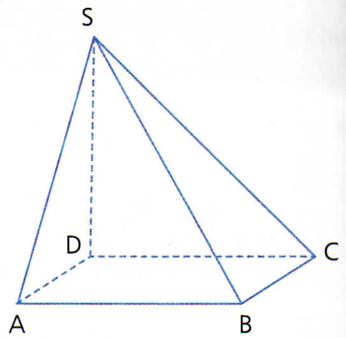
Archimède (287-212 av J.-C.), ingénieur et mathématicien, a démontré de nombreuses **formules sur les volumes** dont la plus célèbre est celle liant les volumes d'un **cylindre** et d'une **sphère** inscrite dans le cylindre : « le volume du cylindre circonscrit à la sphère vaut **une fois et demie** le volume de la sphère. »

Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	Si A appartient au cercle de centre O et de rayon 3 cm, alors :	OA = 6 cm	OA = 3 cm	OA = 1,5 cm
2	Si M appartient au disque de centre O et de rayon 5 cm, alors :	$OM \leqslant 5$ cm	OM = 5 cm	$OM > 5$ cm
3	Si [AB] est un diamètre d'un cercle de centre O, alors :	OA = AB	OAB est un triangle rectangle en O	O est le milieu de [AB]
4	La longueur d'un cercle de rayon 10 cm est égale à :	20π cm	100π cm	10π cm
5	L'aire d'un disque de rayon 8 cm est égale à :	16π cm^2	8π cm^2	64π cm^2
6	78,5 cm^3 =	785 mm^3	7,85 mm^3	78 500 mm^3
7	1 L =	1 dm^3	1 m^3	1 cm^3
8	Si MNP est un triangle rectangle en N, alors :	$MN^2 = MP^2 + PN^2$	$MP^2 = MN^2 + PN^2$	$PN^2 = MN^2 + PM^2$
9	La distance du point A à la droite *d* est : 	la longueur AM	la longueur AH	la longueur HM

Exercice 1 On considère la pyramide SABCD représentée ci-contre de sommet S, de hauteur [SD] et dont la base ABCD est rectangulaire.



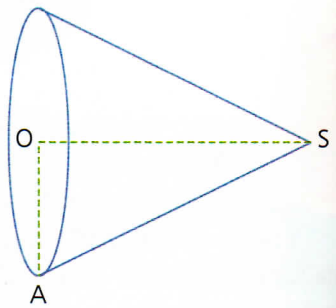
1 Indiquer la nature de chacun des triangles suivants :

a. SDC **b.** SDA **c.** SDB **d.** ADC **e.** DCB

2 Comparer la distance SD à chacune des distances SA, SB et SC.

3 Calculer le volume de cette pyramide sachant que : SD = 5 cm, AB = 4 cm et BC = 3 cm.

Exercice 2 On considère un cône de révolution de sommet S, dont la base est un disque de centre O et de rayon 3 cm et dont les génératrices mesurent 7 cm.



1 Soit A un point du cercle de centre O et de rayon 3 cm. Indiquer les mesures des longueurs OA et SA.

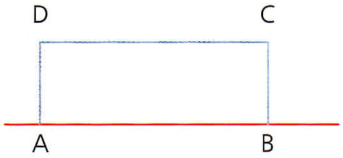
2 Calculer la hauteur SO de ce cône. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

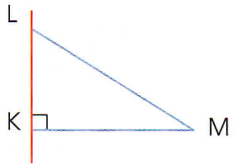
3 Calculer le volume de ce cône. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm^3.

Activités

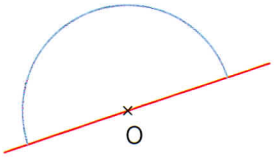
Activité 1 Sphère et boule

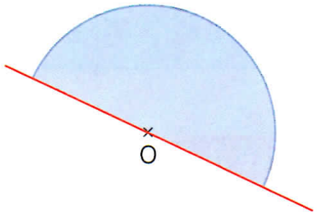
1 a. Décrire l'objet obtenu quand on fait tourner :
- un rectangle ABCD autour de la droite (AB).
- un triangle KLM rectangle en K autour de la droite (KL).





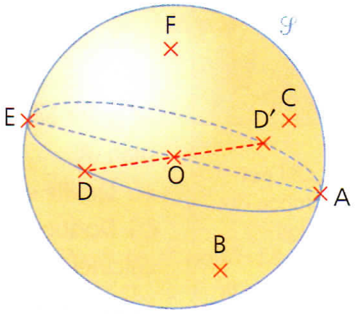
b. Recopier et compléter les phrases suivantes par « sphère » ou « boule » :
La surface obtenue lorsqu'on fait tourner un demi-cercle autour d'un de ses diamètres est appelée une ... .
Le solide obtenu lorsqu'on fait tourner un demi-disque autour d'un de ses diamètres est appelé une ... .



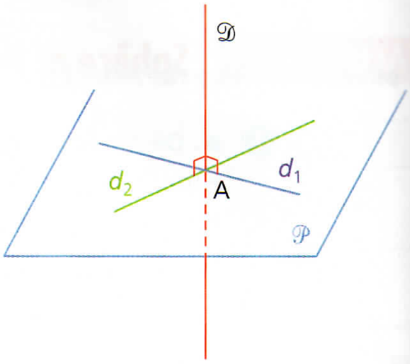


2 On rappelle les définitions suivantes :
« Le cercle de centre O et de rayon 3 cm est constitué de tous les points du plan situés à 3 cm de O. »
« Le disque de centre O et de rayon 3 cm est constitué de tous les points du plan situés à une distance de O inférieure ou égale à 3 cm. »
Quelles modifications doit-on apporter aux définitions précédentes pour obtenir les définitions d'une sphère et d'une boule de centre O et de rayon 3 cm ?

3 a. Les points A, D, E appartiennent-ils à la sphère $\mathcal{S}$ de centre O représentée ci-contre ? Justifier.
b. A-t-on les indications nécessaires pour savoir si les points B, C et F appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$?
c. Que devrait-on préciser pour pouvoir affirmer que ces points appartiennent ou n'appartiennent pas à la sphère $\mathcal{S}$?
d. Sur la droite (OD), on considère le point D′ symétrique de D par rapport à O. D′ est-il un point de $\mathcal{S}$?
On dit que les points D et D′ sont **diamétralement opposés** sur $\mathcal{S}$.



Activité 2 Droite perpendiculaire à un plan



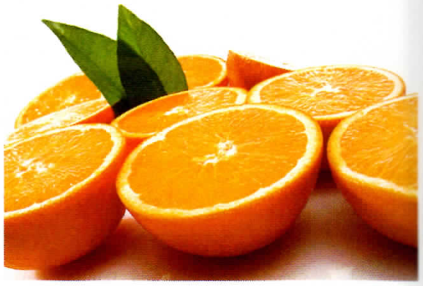
1 **a.** Prendre une feuille de papier, placer un point A sur cette feuille et tracer deux droites d_1 et d_2 passant par A.
b. À l'aide d'une équerre, vérifier qu'il n'existe qu'une seule droite $\mathcal{D}$ passant par A qui soit perpendiculaire à d_1 et à d_2.
On dit que la droite $\mathcal{D}$ est **la droite perpendiculaire en A au plan** $\mathcal{P}$ représenté par la feuille.
c. Soient d_3 et d_4 deux autres droites du plan sécantes en A. Que peut-on dire de $\mathcal{D}$ par rapport aux deux droites d_3 et d_4 ?

2 On considère un point O quelconque dans l'espace et la droite $\mathcal{D}'$ passant par O parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et qui coupe le plan $\mathcal{P}$ en H. Que peut-on dire de cette droite $\mathcal{D}'$ par rapport au plan $\mathcal{P}$?

• Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.
• Si une droite est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ en un point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par A.

Activité 3 Section d'une sphère par un plan

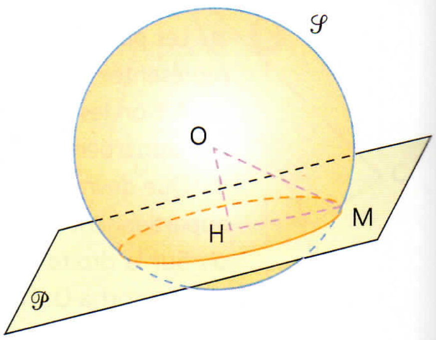
1 **Conjecture**



Sur la photo ci-contre, on assimile les oranges à des sphères sectionnées par un plan. Quelle semble être la nature de cette section ?

2 **Démonstation**

La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 4 cm représentée ci-contre a été coupée par un plan $\mathcal{P}$.
La droite passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ coupe ce plan en un point H tel que OH = 3 cm.
Le point M est un point de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$.



La distance OH est appelée la distance du point O au plan $\mathcal{P}$.

a. Quelle est la nature du triangle OHM ? Justifier.
b. Donner les mesures des segments [OM] et [OH], puis calculer la longueur exacte HM.
c. Soit N un autre point de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$, que peut-on dire de la longueur HN ?
d. Expliquer pourquoi tous les points de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
e. Expliquer pourquoi tout point de ce cercle est un point de la sphère $\mathcal{S}$.

3 **a.** On considère le cas où le plan $\mathcal{P}$ passe par le centre O de la sphère. Quelle est la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$? Une telle section est appelée un **grand cercle** de la sphère $\mathcal{S}$.
b. On considère maintenant le cas où la distance OH est 4 cm. Quelle est alors la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$? On dit alors que le plan $\mathcal{P}$ est **tangent** à la sphère $\mathcal{S}$.