

Plan du cours

I.	Limites de suites	1
1.	Limite d'une suite	1
2.	Limites et comparaison	3
3.	Comportement des suites géométriques	4
II.	Recherche d'un seuil	5
III.	Suites arithmético-géométriques	6

Activité d'introduction 1

PARTIE A

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique de France. En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme. Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

- 1) Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
- 2) On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en 2020 + n .
 - (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Calculer ensuite les valeurs u_{40} et u_{50} à l'aide de la calculatrice.
 - (b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter.

PARTIE B

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singe dans une réserve naturelle. En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

- 1) Déterminer le nombre de singes en 2021 et en 2022.
- 2) On note v_n le nombre de singes en 2020 + n .
 - (a) Exprimer v_n en fonction de n . Calculer ensuite les valeurs v_{40} et v_{50}
 - (b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter. Que peut-on penser de cette évolution ?

I. Limites de suites

Étudier la limite d'une suite (u_n) c'est chercher ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :

- Les nombres u_n finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

1. Limite d'une suite

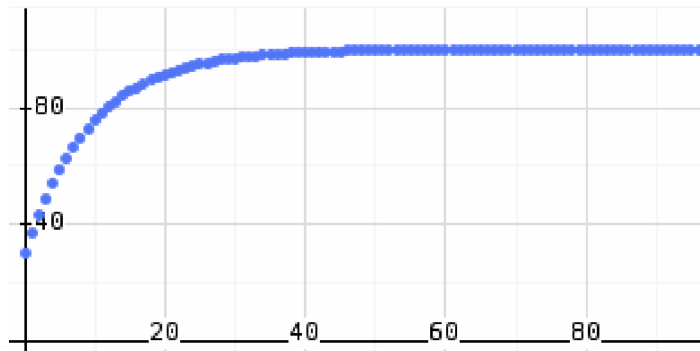
Définition

Les suites convergentes

Une suite u converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

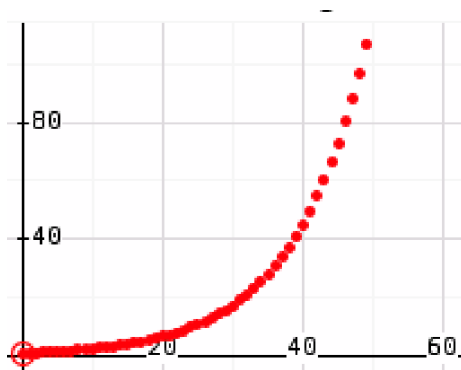


Définition

Les suites divergentes

Une suite u diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout réel $A > 0$ (respectivement $B < 0$), il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A (respectivement B).

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$)



Exemples :

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{n}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

.....
.....
.....

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^n} + n^2\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

.....
.....
.....

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - e^n}{1 + e^{-n}} \right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

.....

.....

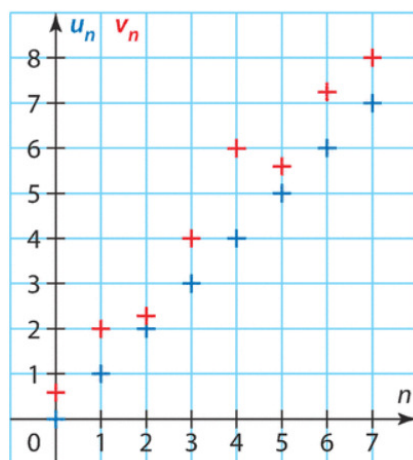
.....

2. Limites et comparaison

Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



Exemples :

- Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = (-1)^n + 3n$

.....

.....

.....

- Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n + 2\sin(n)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

.....

.....

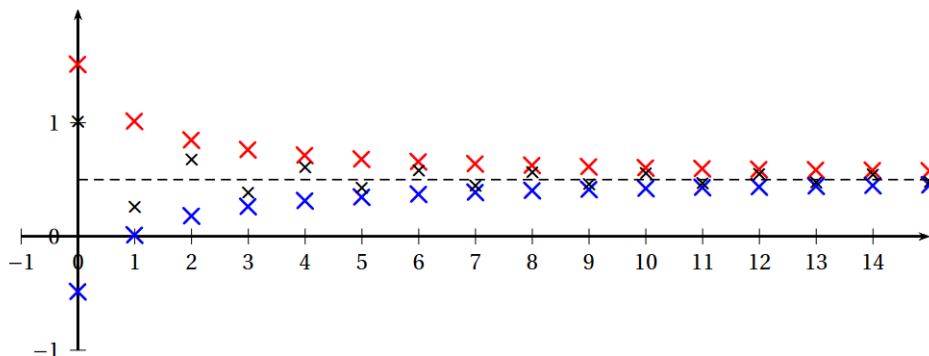
Théorème

Théorème des gendarmes

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$



Exemple : Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

3. Comportement des suites géométriques

Revenons un instant sur les suites géométriques.

Théorème

Soit la suite de terme général q^n , où q est un réel positif.

- Si $q > 1$ alors la suite a pour limite $+\infty$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ et on dit que la suite est divergente.
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. On dit, dans ce cas, que la suite converge vers 0.

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} aq^n = 0$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} aq^n = +\infty$ si $a > 0$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} aq^n = -\infty$ si $a < 0$.

Exemples :

- 1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = -3$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n , puis la limite de (u_n) .

.....
.....
.....
.....
.....

- 2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

Exprimer S_n , la somme des $n + 1$ premiers termes de cette suite puis la limite de cette somme .

.....
.....
.....
.....
.....

II. Recherche d'un seuil

La recherche d'un seuil consiste à déterminer l'entier n_0 partir duquel la suite est plus petite qu'une valeur donnée (cas des suites convergentes) ou plus grande qu'une valeur donnée (cas des suites ayant pour limite $+\infty$).

Considérons comme exemple la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
Cette suite est décroissante car sa raison est inférieure à 1 et converge vers 0.

On se propose de déterminer un seuil partir duquel u_n est plus petit que 10^{-40} , c'est-à-dire trouver le plus petit entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.

On labore pour cela un algorithme permettant la recherche de ce seuil

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

1 est le premier terme de la suite

K désigne n_0 cherché.

Tant que $u_K > 10^{-40}$, on effectue ce qui suit :

- chaque boucle, on incrémente l'indice de 1 ;

- on calcule u_K

La boucle s'arrête lorsque $u_K < 10^{-40}$

La valeur affichée après la mise en œuvre de cet algorithme fournit le seuil n_0 cherché. Dans cet exemple on obtient $n_0 = 321$. Ainsi, si n est supérieur ou égal à 321, alors $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.

Cet algorithme se programme sur la calculatrice Texas Instrument de cette manière :

Dans le cas des suites qui tendent vers $+\infty$, on remplacera la condition dans la boucle *tant que* par une condition du type $A < 10^{40}$.

Application :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 10$.

Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $u_n < 10^{-90}$. Programmer cet algorithme à l'aide de la calculatrice et en déduire la valeur de n_0 .

Correction :

III. Suites arithmético-géométriques

Définition

On appelle suite arithmético-géométrique une suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n , par une relation de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels donnés}$$

Remarque : si $a = 1$ alors la suite est arithmétique ; si $b = 0$ alors la suite est géométrique. Vous comprendrez donc le nom donné à ces suites !

L'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite auxiliaire géométrique. Cette suite est « toujours » donnée par l'nonc.

Petite activité préparatoire : un couple dépose au premier janvier 2011 une somme de 10 000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 4 %. Par la suite, ce couple possède une capacité annuelle de 3 000 euros, qu'il verse tous les premiers janvier sur le compte précédent. Les intérêts sont capitalisés au 31 décembre de chaque année. Pour tout entier naturel n , on note S_n la somme dont le couple dispose au 1^{er} janvier de l'année (2011+ n).

- (1). (a) Calculer les valeurs S_0 , S_1 , S_2 et S_3 .
(b) La suite (S_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

9

- (2). (a) Montrer que l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n est donnée par la relation :

$$S_{n+1} = (1,04)S_n + 3000$$

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

- (b) l'aide de la calculatrice, obtenir le tableau de valeurs de S_n pour n variant de 0 à 20.
- (c) Au 1^{er} janvier de quelle année le couple possèdera-t-il une épargne supérieure à 50 000 euros ?

Une entreprise du secteur du BTP doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

On note r_n la quantité, en tonnes, des déchets rejetés pour l'année $(2007+n)$.

- (1). Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$.
- (2). Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4 000$.
 - (a) Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 0,95. Donner son premier terme.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n .
 - (b) Prouver que, pour tout entier naturel n , on a $r_n = 36 000 \times 0,95^n + 4 000$.
 - (c) Le contexte restant le même, à partir de quelle année l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?