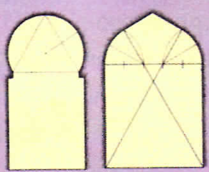
12 Angles inscrits Polygones réguliers

Si le ciel est clair et si vous avez **la patience** de photographier le ciel en choisissant un temps d'exposition de plusieurs heures, vous constaterez sur votre photo la **trajectoire circulaire** des étoiles autour du pôle Nord. Les angles formés par l'**étoile polaire** (au centre) et les extrémités de chaque trajectoire d'étoile sont égaux.

Au **rugby**, quel est le point le plus avantageux pour tirer une pénalité à partir de la ligne des 5 m ? Autrement dit, où doit-on se placer pour former **le plus grand angle** avec les poteaux du but et ainsi avoir le plus de chance de **marquer** ?

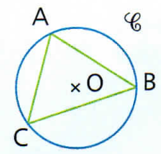
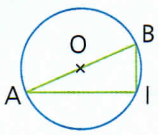
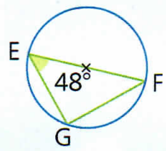
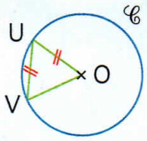
G. Mabire

À travers les siècles, les **architectes arabes** utilisèrent beaucoup les figures géométriques pour construire leurs édifices : retrouvez sur les schémas de ces deux entrées d'édifice des figures connues.



Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	 Les points A, B et C sont sur le cercle 𝒞 de centre O. Le triangle ABC est :	inscrit dans le cercle 𝒞	circonscrit au cercle 𝒞	rectangle
2	Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des :	hauteurs de ce triangle	médianes de ce triangle	médiatrices de ce triangle
3	 Le point I appartient au cercle de centre O et de diamètre [AB]. Alors le triangle ABI est :	rectangle en B	rectangle en I	quelconque
4	 Le point G appartient au cercle de diamètre [EF] et $\widehat{FEG}$ mesure 48°. Alors :	l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 42°	l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 48°	on ne peut pas calculer la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$
5	 Les points U et V appartiennent au cercle 𝒞 de centre O. Le triangle UOV est :	inscrit dans le cercle 𝒞	isocèle mais pas équilatéral	équilatéral
6	 L'angle coloré en vert est un angle :	aigu	obtus	plat

Exercice 1 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si un triangle isocèle a un angle de 60°, alors il est équilatéral.

2. Si un triangle rectangle a un angle de 45°, alors il est isocèle.

3. Un triangle isocèle a un axe de symétrie.

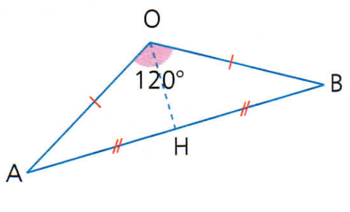
4. Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie.

5. Un triangle équilatéral a un centre de symétrie.

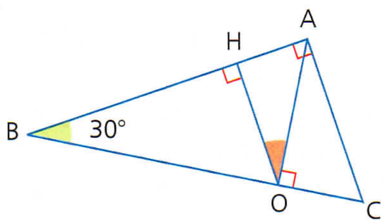
6. Un carré a quatre axes de symétrie et un centre de symétrie.

Exercice 2 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$ pour chacun des deux triangles.

a.



b.

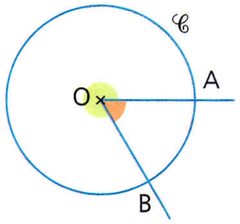


Activité 1 Cercle et angles

1 Angles au centre

A et B sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On appelle **angle au centre dans le cercle** $\mathscr{C}$ tout angle dont le sommet est le centre O du cercle.



a. Combien d'angles au centre déterminent les deux points A et B ?

b. Avec un rapporteur déterminer la mesure de l'angle saillant $\widehat{AOB}$ (en orange), puis calculer la mesure de l'angle rentrant $\overset{\smile}{AOB}$ (en vert).

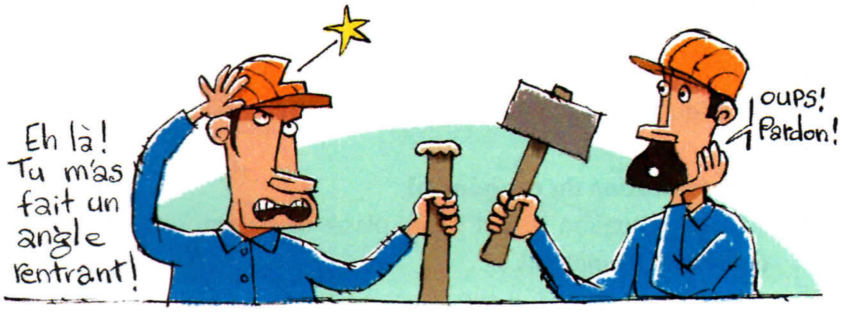
Un **angle saillant** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 180°.
Un **angle rentrant** est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360°.

c. Combien d'arcs du cercle $\mathscr{C}$ déterminent les deux points A et B ?

L'angle au centre $\widehat{AOB}$, qui contient le petit arc $\overset{\frown}{AB}$, est appelé l'**angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$**.

L'angle au centre $\overset{\smile}{AOB}$, qui contient le grand arc $\overset{\smile}{AB}$, est appelé l'**angle au centre interceptant l'arc $\overset{\smile}{AB}$**.

d. Comment faudrait-il placer un point D sur le cercle $\mathscr{C}$ pour que l'angle au centre $\widehat{AOD}$ intercepte un demi-cercle ? Que peut-on dire alors de l'angle $\widehat{AOD}$?

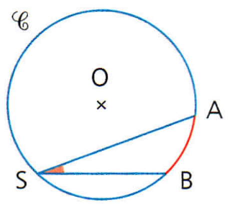


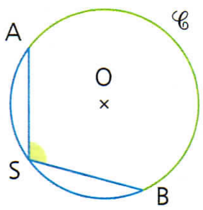
2 Angles inscrits

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.

On appelle **angle inscrit dans le cercle** $\mathscr{C}$ un angle dont le sommet est un point du cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés coupent le cercle $\mathscr{C}$.

L'angle inscrit $\widehat{ASB}$ intercepte le petit arc $\overset{\frown}{AB}$.





L'angle inscrit $\widehat{ASB}$ intercepte le grand arc $\overset{\smile}{AB}$.

a. Tracer un cercle $\mathscr{C}$, puis placer sur $\mathscr{C}$ deux points E et F non diamétralement opposés.

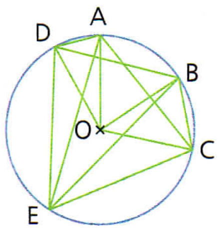
b. Colorer un des deux arcs délimités par E et F, puis tracer l'angle au centre interceptant cet arc.

c. Tracer trois angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ qui interceptent l'arc choisi.

d. Reprendre la question **c** pour l'autre arc limité par E et F.

e. Sur la figure ci-contre, où O est le centre du cercle :

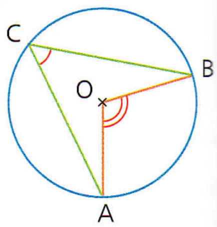
- Citer l'angle au centre et les angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.
- Citer l'angle au centre et les angles inscrits qui interceptent le même grand arc $\overset{\smile}{CD}$ ne contenant pas le point A.



Activités

Activité 2 Angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc

A Conjecturer avec un logiciel de géométrie



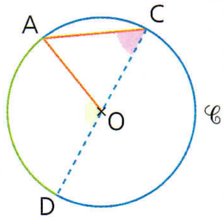
1. **a.** Créer un cercle de centre O, puis créer trois points A, B et C sur ce cercle.
b. Afficher la mesure de l'angle inscrit $\widehat{ACB}$, puis la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptant le même arc que $\widehat{ACB}$. Comparer leurs mesures.

2. Reprendre la question 1 en déplaçant les points A, B et C sur le cercle.

3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

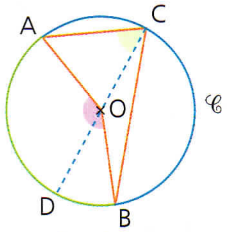
B Démontrer

1. **Démonstration d'un cas particulier**

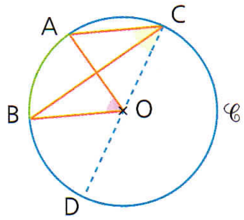


Soit A un point du cercle 𝒞 de centre O et de diamètre [CD].
a. Citer l'angle inscrit et l'angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AD}$.
b. Montrer que : $\widehat{AOC} = 180° - 2 \times \widehat{ACD}$.
c. Montrer que : $\widehat{AOD} = 180° - \widehat{AOC}$.
d. Déduire des questions b et c une relation entre les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{AOD}$.

2. **Démonstration du cas général**



situation 1



situation 2

- Dans la situation 1, A et B sont placés de part et d'autre du diamètre [CD].
- Dans la situation 2, B appartient à l'arc $\overset{\frown}{AD}$.

Pour chacune des situations 1 et 2 :
a. Citer l'angle inscrit et l'angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.
b. En utilisant la question 1, exprimer l'angle $\widehat{ACD}$ en fonction de l'angle $\widehat{AOD}$, puis l'angle $\widehat{DCB}$ en fonction de l'angle $\widehat{DOB}$.
c. En déduire une relation entre les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$.

d. *Recopier et compléter la propriété suivante :*
Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale --------- de la mesure de l'angle au centre.

C Retrouver une propriété bien connue

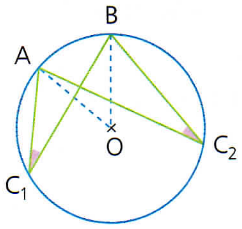
1. Tracer un cercle 𝒞 de centre O et de diamètre [AB], puis placer sur 𝒞 un point C distinct de A et de B.

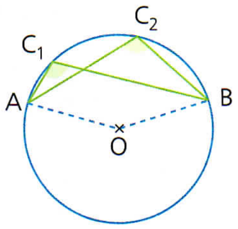
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$? À l'aide de la propriété étudiée en **B**, calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

3. Quelle propriété bien connue retrouve-t-on ainsi ?

Activité 3 Angles inscrits interceptant le même arc

1 Sur chacune des deux figures ci-contre, les angles inscrits $\widehat{AC_1B}$ et $\widehat{AC_2B}$ interceptent le même arc.
Démontrer que : $\widehat{AC_1B} = \widehat{AC_2B}$.



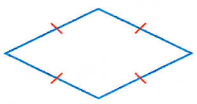


2 Recopier et compléter la propriété suivante :
Si, dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont ......

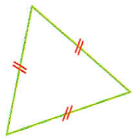
Activité 4 Polygones réguliers

1 **Régulier ou non ?**
Un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles « intérieurs » ont la même mesure est appelé **polygone régulier**.
Parmi les polygones ci-dessous, lesquels sont réguliers ?

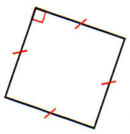
a.



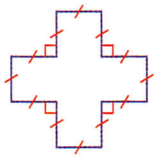
b.



c.



d.



2 **Triangle équilatéral**
a. Tracer un triangle équilatéral ABC, puis construire son cercle circonscrit de centre O.
b. Démontrer que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \dfrac{360°}{3}$.
c. Tracer un cercle de centre O, puis construire un triangle équilatéral DEF inscrit dans ce cercle.

3 **Carré**
a. Tracer un carré ABCD, puis construire son cercle circonscrit de centre O.
b. Démontrer que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = \dfrac{360°}{4}$.
c. Tracer un cercle de centre O, puis construire un carré EFGH inscrit dans ce cercle.

4 **Hexagone régulier**
a. Tracer un cercle de centre O, puis partager le disque de centre O en six secteurs de même angle.
b. Démontrer que ce partage permet d'obtenir six triangles équilatéraux que l'on nommera AOB, BOC, COD, DOE, EOF et FOA.
c. Démontrer que ABCDEF est un hexagone régulier.
d. Tracer un cercle de centre O, puis construire à la règle et au compas un hexagone régulier IJKLMN inscrit dans ce cercle.