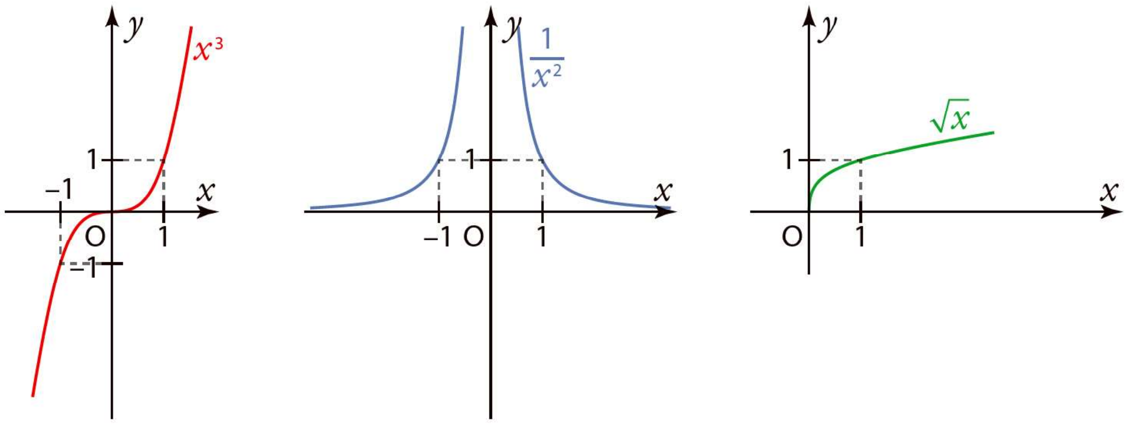
Plan du cours

Activité d'introduction 1 : Notion de limites, notion d'asymptote

On donne les représentations des fonctions cube $x \mapsto x^3$, inverse au carré $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.



1) En lisant les courbes, donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

2) **(a)** Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

(b) Comment se comporte la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des abscisses ?
On dit alors que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

3) **(a)** Donner la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

(b) Comment se comporte la courbe en 0 de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des ordonnées ?
On dit alors que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

4) Donner la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$.

Activité d'introduction 2 : Faire des opérations sur les limites

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1) Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 3$. Pourquoi peut-on affirmer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 3$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

3) Vérifier que pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$. Donner la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$.
Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

I. Limites de fonctions

1) Limite en l'infini

(a) Limite finie et asymptote horizontale

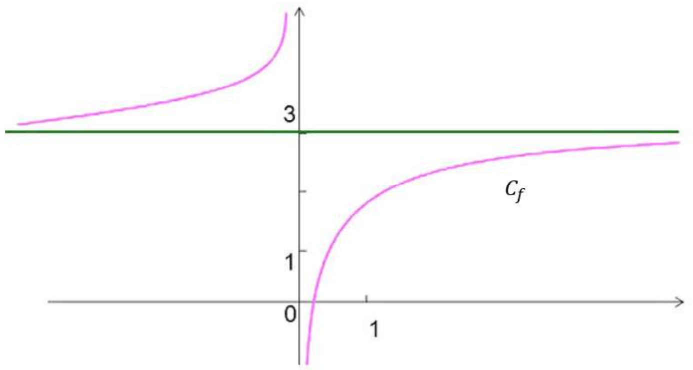
Définition **Asymptote horizontale**

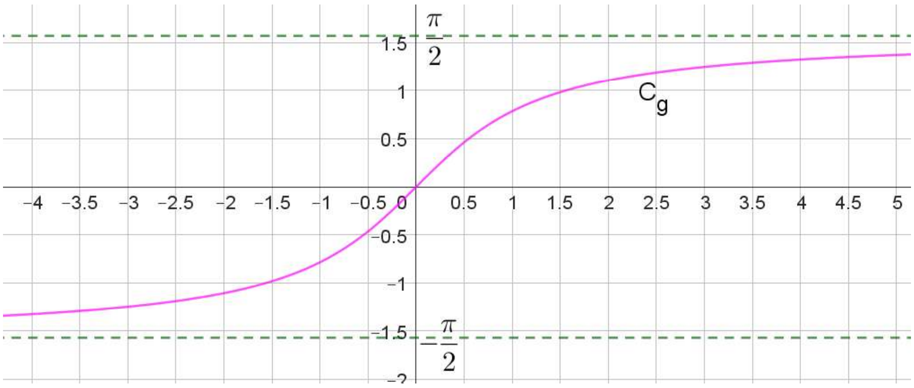
Soit a un réel.
Dire que $f(x)$ tend vers a quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de a, pour x suffisamment grand (ou petit).

On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

On dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Exemples : Soient $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g(x) = tan^{-1}(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:





(b) Limite infinie

Définition

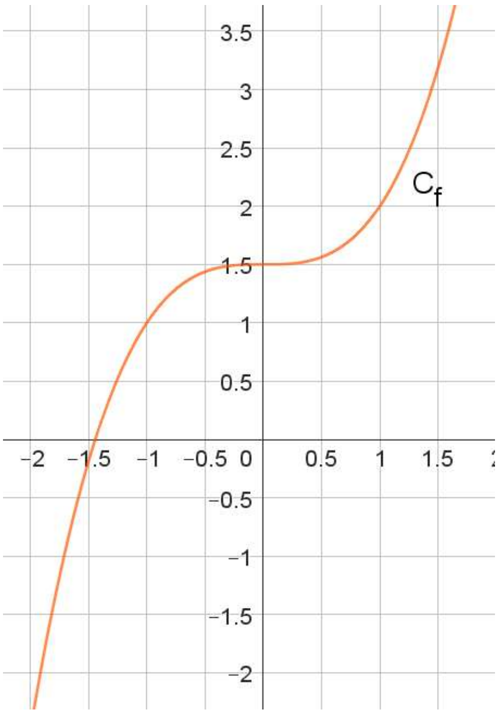
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

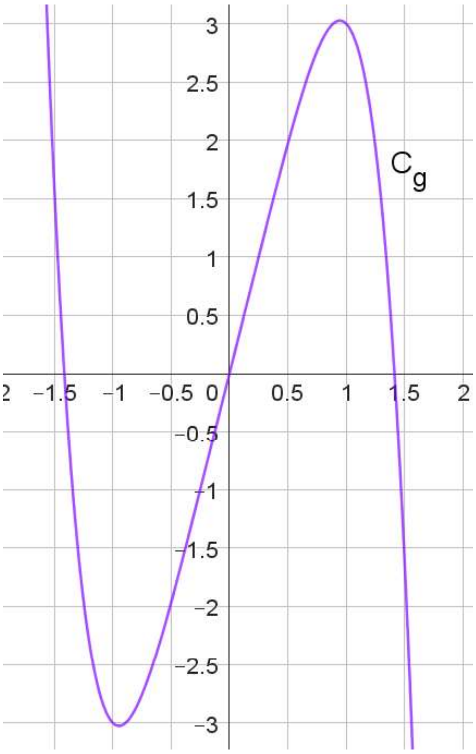
On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : On définit de façon analogue :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemples : Soient $f(x) = -0,5x^3 + 1,5$ et $g(x) = -x^5 + 4x$ définies sur $\mathbb{R}$:





Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite en l'infini. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

(c) Limite des fonctions de références

$f(x) =$	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	e^{ax}
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$	non définie	0 si $a > 0$ $-\infty$ si $a < 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $a > 0$ 0 si $a < 0$