Puissances

I. Notation puissance

1) Puissances à exposant positif

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel non nul.
L'écriture a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n\ facteurs}$$

On lit : « *a puissance n* ». Et « n » s'appelle **l'exposant** de a^n.

Convention : Pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$

Remarque : Pour tout nombre relatif a, $a^1 = a$.

Exemples : $4^3 =$ ………………= …… $(-8)^2 =$ ………………= ……

2) Puissances à exposant négatif

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel non nul. L'écriture a^{-n} désigne l'inverse de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n\ facteurs}}$$

Remarque : $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire que a^{-1} est l'inverse de a.

Exemples : $2^{-3} = \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$ $(-13)^{-2} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

3) Priorités opératoires

Dans un enchainement de calculs, les priorités sont :
1) Parenthèses
2) Puissances
3) Multiplications, divisions
4) Additions, soustractions

Exemples : Calculer en respectant les priorités opératoires

$A = 12 - 2^3 \times 5$ $B = 18 + (7 - 11)^2$ $C = 2 \times \left[7 \div 10^2 - (-2)^3\right]$

……

……

……

……

……

Pièges à éviter :

a) $5^3 \neq 5 \times 3$ car $5^3 = 5\times5\times5$ et $5\times3 = 5+5+5$

b) $-2^6 \neq (-2)^6$ car -2^6 est négatif

c) $3 \times 7^4 \neq (3 \times 7)^4$

d) $5 + 3^2 \neq (5 + 3)^2$

II- Puissances de 10

Exercice : Compléter les égalités suivantes avec une puissance de 10 :

$$34{,}125 = 0{,}034125 \times 10^{\cdots} \quad ; \quad 6{,}2836 = 628{,}36 \times 10^{\cdots}$$

$$0{,}00017 = 170 \times 10^{\cdots} \quad ; 27{,}18 = 271800 \times 10^{\cdots}$$

a) Ecriture scientifique

Définition : Tout nombre décimal non nul admet une **écriture scientifique**, écriture sous la forme : $a \times 10^n$ où a est un nombre dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieur à 10.
Le nombre a s'appelle **la mantisse**.

Exemples : L'écriture scientifique de - 4235 est - 4,235 $\times 10^3$;
L'écriture scientifique de 0,0124 est 1,24 $\times 10^{-2}$

b) Préfixes à retenir

Préfixe	giga	méga	kilo	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	c	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Ecritures décimales	*1 000 000 000*	*1 000 000*	*1 000*	*0,01*	*0,001*	*0,000 001*	*0,000 000 001*

Exemples : Un gigaoctet, noté Go, correspond à une quantité de données numériques de 10^9 octets, soit un milliard d'octet.
Un microgramme, noté μg, correspond à une masse de 10^{-6} grammes, soit un millionième de gramme.

Exercice : Compléter le tableau suivant

Ecriture décimale		Ecriture scientifique	Ecriture décimale		Ecriture scientifique
253	=	$2{,}53 \times 10^{2}$	0,053	=	$5{,}3 \times 10^{-2}$
56	=	$5{,}6 \times 10^{\cdots}$	0,056	=	$5{,}6 \times 10^{\cdots}$
1 237	=	$1{,}237 \times 10^{\cdots}$	0,375	=	$3{,}75 \times 10^{\cdots}$
1 563	=	.... $\times 10^{\cdots}$	0,005	=	.... $\times 10^{\cdots}$
580	=	.... $\times 10^{\cdots}$	0,00017	=	.... $\times 10^{\cdots}$

c) Calculer avec des puissances de 10

On considère n et m deux nombres **entiers** non nuls.

PRODUIT	INVERSE	QUOTIENT	PUISSANCE DE PUISSANCE
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$	$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$(10^m)^n = 10^{m\times n}$
Exemple :	***Exemple :***	***Exemple :***	***Exemple :***
$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$	$\frac{1}{10^7} = 10^{-7}$	$\frac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$	$(10^{-5})^2 = 10^{-5\times 2} = 10^{-10}$

Exercice : Ecrire le résultat sous la forme d'une puissance de 10

$10^4 \times 10^3 =$ $\quad$ $10^2 \times 10^{-2} =$ $\quad$ $10^5 \times 10^1 \times 10^6 =$ $\quad$ $\frac{10^{10}}{10^3} =$ $\quad$ $\frac{10^5}{10^{-3}} =$ $\quad$ $\frac{10^{-2}}{10^{-3}} =$

$\frac{10^4}{10^3} \times \frac{10^9}{10^3} =$ $\quad$ $10 \times \frac{10^{-1}}{10^4} \times 10^2 =$ $\quad$ $(10^2)^3 =$ $\quad$ $(10^{-1})^5 =$ $\quad$ $(10^{-2})^{-7} =$

$(10^3)^4 \times 10^{-2} =$ $\quad$ $\frac{10^4}{10^3} \times (10^4)^3 =$ $\quad$ $\frac{(10^2)^3 \times 10^{-4}}{(10^4)^{-3} \times 10^2} =$

II- Généralités sur les puissances

A retenir : (pour a non nul car 0^0 n'est pas défini)

Par convention : $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- Pour n et p entiers relatifs : $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $(a^n)^p = a^{n \times p}$; $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- Pour a et b des nombres, b non nul et n entier relatif : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Applications : Calculer en respectant les priorités et en utilisant les formules sur les puissances. Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

$A = (3 \times 5)^2$	$B = 3 \times 5^2$
$C = 3^2 \times 5$	$D = 3^2 \times 5^2$
$E = (2 \times 4)^3$	$F = 2 \times 4^3$
$G = 2^3 \times 4$	$H = 2^3 \times 4^3$
$E = \frac{4^4 \times 3^4}{2^4 \times 12^4} \times 6^4$	$F = \frac{7^{-3} \times 10^3 \times 14^3 \times 2^{-3}}{3^3 \times 5^3 \times 6^{-3}}$

$A = 2 \times 3^2 + 4$	$B = 2 + 3^2 \times 4$
$C = 2 \times 3 + 4^2$	$D = 2 + 3 \times 4^2$
$E = 2^2 \times 3 + 4$	$F = 2^2 + 3 \times 4$
$G = 2 \times 3^2 + 4 \times 5$	$H = 2 \times 3 + 4^2 \times 5$
$I = (2 \times 3)^2 + 4 \times 5$	$J = 2 \times (3 + 4)^2 \times 5$

Une technique à retenir :

$A = 3 \times 10^4 \times 5 \times 10^3$

$A = 3 \times 5 \times 10^4 \times 10^3$ **On change l'ordre des facteurs… « Les puissances de 10 derrière »**

$A = 15 \times 10^7$ On « calcule » les deux « petits » produits (Calculatrice)

$A = 1,5 \times 10^8$ On donne l'écriture scientifique

$B = \frac{18 \times 10^{-4} \times 2,5 \times 10^9}{15 \times 10^7}$

$B = \frac{18 \times 2,5 \times 10^{-4} \times 10^9}{15 \times 10^7}$ **On change l'ordre des facteurs… « Les puissances de 10 derrière »**

$B = \frac{18 \times 2,5}{15} \times \frac{10^{-4} \times 10^9}{10^7}$ **On sépare en deux quotients**

$B = 3 \times \frac{10^5}{10^7}$ On calcule le premier quotient (calculatrice) et on simplifie le 2e ces quotients à l'aide des propriétés de calculs avec les puissances de 10.

$B = 3 \times 10^{5-7}$

$B = 3 \times 10^{-2}$ On donne l'écriture scientifique

Entrainement **Puissances**

Exercice 1 :

1) Donner les résultats des calculs suivants sous la forme a^n :

$I = (10^{-2})^{-5}$; $J = 7 \times 7^5 \times 7^{-3}$; $K = \dfrac{5^{-11} \times 5^{-3}}{5^4 \times (5^{-2})^{-5}}$

2) Donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique des résultats des calculs suivants :

$A = \dfrac{4 \times 10^5 \times 6,4 \times 10^{-3}}{0,16 \times 10^4}$ $B = \dfrac{4 \times 10^2 + 3 \times 10}{4 \times 10 + 3}$ $C = 15 \times 10^{-3} + 340 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-2}$

Exercice 2 :

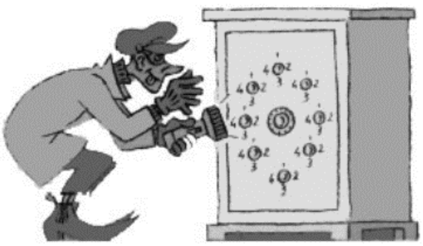
Pour un sondage on utilise un questionnaire comportant dix questions. À chaque question, on peut répondre par « oui », « non » ou « sans opinion ».
Combien y a-t-il de façons différentes de répondre à ce questionnaire ?

Exercice 3 : Dans la peau d'un voleur !

Jo Laflèche jubile ! Il a en face de lui un coffre-fort d'un vieux modèle : il n'y a que quatre chiffres sur chacun des huit boutons.

a) Combien de combinaisons différentes peuvent être affichées sur ce coffre ?

b) Jo met dix secondes pour afficher une combinaison. Combien de temps lui faut-il pour les essayer toutes ? Le pourra-t-il en une nuit de huit heures ?



Exercice 4 :

1) Il y a $2,025 \times 10^{13}$ globules rouges dans 5,5 litres de sang du corps humain.
Combien y a t-il de globules rouges dans 200 ml de sang contenu dans une poche de prélèvement ?

2) Dans 10 ml de sang, il y a environ 70000 globules blancs et 2 500 000 plaquettes.
Un homme adulte a 5,5 litres de sang circulant dans son corps.

a) Calculer le nombre de globules blancs dans le corps humain (vous donnerez les détails des calculs puis le résultat en écriture scientifique).

b) Calculer le nombre de plaquettes dans le corps humain (vous donnerez les détails des calculs puis le résultat en écriture scientifique).

Exercice 5 : La bactérie Escherichia Coli présente dans notre intestin permet le bon fonctionnement de la flore intestinale. Sauf que dans certains cas ces bactéries peuvent être pathogènes et provoquer la gastro-entérite. Cette bactérie double en nombre toutes les 20 minutes.

a) Au départ il y a une bactérie. Combien de bactéries existent-ils au bout de 40 minutes ? (Ecrire le détail de vos calculs)

b) Combien de bactéries existent-ils au bout d'une heure ? (Ecrire le détail de vos calculs)

c) Dans le tableau ci-contre quelle formule informatique va-t-on écrire dans B3 pour étirer ensuite ?

	A	B
1	Nombre de périodes de 20 minutes passées	Nombre de bactéries
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

d) La masse d'une bactérie est d'environ $7 \times 10^{-13} g$. Quelle est la masse totale de bactérie formée au bout de 4 heures ?