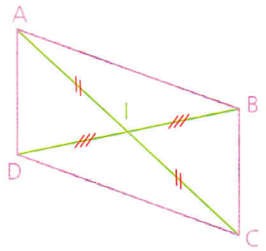
S'entraîner

Démonstrations à un pas

1 On considère le quadrilatère ABCD ci-dessous où I est le milieu des segments [AC] et [BD].



On se propose de démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

❶ À l'aide de la table des outils, citer toutes les propriétés et/ou définitions que l'on peut utiliser pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

❷ Voici le schéma de **démonstration à un pas** permettant de prouver que ABCD est un parallélogramme.

Données utiles
I est le milieu de [AC] et de [BD].

Propriété
\-

Conclusion
ABCD est un parallélogramme.

a. Recopier ce schéma, puis compléter l'encadré bleu par la propriété utilisée dans cette démonstration.
b. Rédiger cette démonstration suivant le modèle :

- On sait que ---. ← On écrit les données utiles
- Or, si ---, alors ---. ← On cite la propriété utilisée
- Donc ---. ← On écrit la conclusion

2 ❶ Construire un parallélogramme ABCD.
❷ a. Le schéma de démonstration à un pas ci-dessous permet de prouver que : AB = CD et AD = BC.

Donnée utile
ABCD est un parallélogramme.

Propriété
\-

Conclusion
AB = CD et AD = BC.

Recopier ce schéma, puis compléter l'encadré bleu par la propriété utilisée dans cette démonstration.
b. Rédiger cette démonstration.

3 Construire un losange EFGH.
Recopier et compléter le schéma de démonstration à un pas ci-dessous.

Donnée utile
\-

Propriété
\-

Conclusion
$(EG) \perp (FH)$.

4 On considère un triangle IJK.
On appelle (d) la hauteur issue de I du triangle IJK.
Recopier et compléter le schéma de démonstration à un pas ci-dessous permettant de démontrer que les droites (d) et (JK) sont perpendiculaires.

Donnée utile
\-

Définition
\-

Conclusion
$(d) \perp (JK)$.

5 ABCD est un rectangle.
Recopier et compléter le raisonnement ci-dessous qui permet de démontrer que les segments [AC] et [BD] ont la même longueur.
- On sait que ABCD est un rectangle.
- Or, si ---, alors ---.
- Donc les segments [AC] et [BD] ont la même longueur.

6 IJKL est un parallélogramme tel que IJ = JK.
Recopier et compléter le raisonnement ci-dessous qui permet de démontrer que IJKL est un losange.
- On sait que IJKL est un parallélogramme et que IJ = JK.
- Or, si ---, alors ---.
- Donc IJKL est un losange.

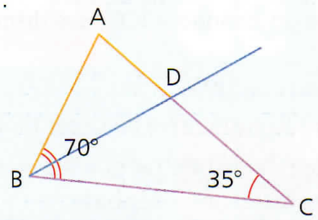
7 Recopier et compléter chacune des démonstrations à un pas ci-dessous.

❶ - On sait que la droite (d_1) est perpendiculaire à chacune des droites (d_2) et (d_3).
- Or, si ---, alors ---.
- Donc ---.

❷ - On sait que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ sont opposés par le sommet.
- Or, si ---, alors ---.
- Donc $\widehat{ABC}$ = ---.

Démonstrations à deux pas

8 On considère la figure ci-dessous dans laquelle : $\widehat{ABC} = 70°$, la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe [AC] en D et $\widehat{BCD} = 35°$.



On se propose de démontrer que le triangle BCD est isocèle.

1 **a.** À l'aide de la table des outils, citer toutes les propriétés et/ou définitions que l'on peut utiliser pour démontrer qu'un triangle est isocèle.

b. Parmi celles-ci, y en a-t-il une qui permet de prouver que le triangle BCD est isocèle avec une démonstration à un pas ?

2 Deux données de l'énoncé permettent de calculer la mesure de l'angle $\widehat{DBC}$. Lesquelles ?

3 Voici le schéma de **démonstration à deux pas** permettant de prouver que le triangle BCD est isocèle.

- **1^er^ pas de démonstration**

Données utiles

$\widehat{ABC} = 70°$.

[BD) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Définition

Conclusion

$\widehat{DBC} = \dfrac{70°}{2} = 35°$.

- **2^e^ pas de démonstration**

Données utiles

Dans le triangle BCD :

$\widehat{DBC} = 35°$ et $\widehat{BCD} = 35°$.

Propriété

Conclusion

Le triangle BCD est isocèle.

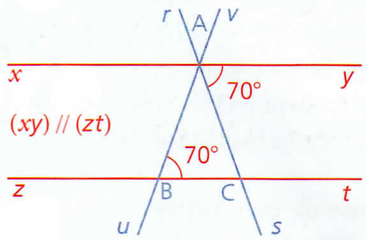
a. Recopier l'ensemble du schéma et compléter l'encadré bleu du premier pas de démonstration.

b. Quelle est la conclusion du premier pas de démonstration ? Que devient-elle dans le deuxième pas de démonstration ?

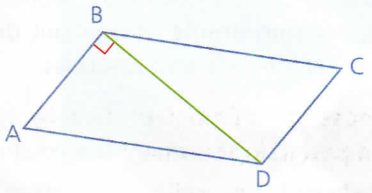
c. Compléter l'encadré bleu du deuxième pas de démonstration.

d. Rédiger cette démonstration.

9 En utilisant les informations portées sur la figure ci-dessous, démontrer que la triangle ABC est isocèle.

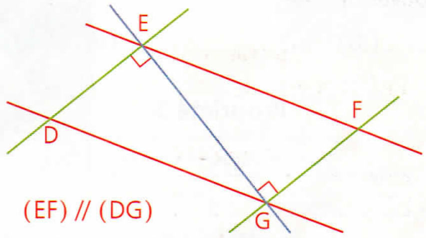


10 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.

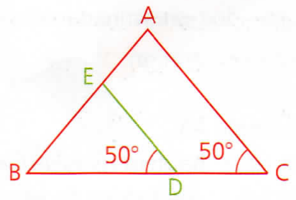


Démontrer que : (BD) ⊥ (CD).

11 En utilisant les informations portées sur la figure ci-dessous, démontrer que le quadrilatère DEFG est un parallélogramme.

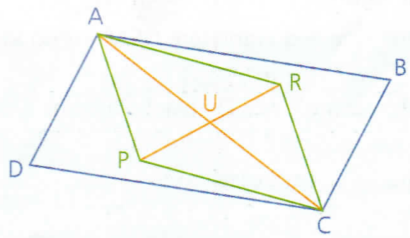


12 ABC est un triangle isocèle en A tel que : $\widehat{ACB} = 50°$.
D et E sont deux points appartenant respectivement aux côtés [BC] et [AB] tels que : $\widehat{EDB} = 50°$.



Démontrer que le triangle BED est isocèle.

13 On considère la figure ci-dessous dans laquelle :
– ABCD est un parallélogramme ;
– PARC est un parallélogramme.

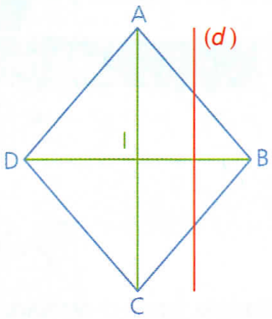


On appelle U le point d'intersection des diagonales du parallélogramme PARC.
Démontrer que le point U est le milieu du segment [BD].

Exercices

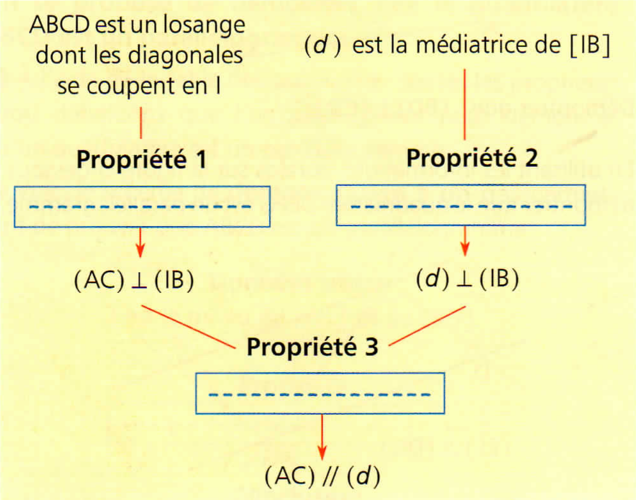
Démonstration à plus de deux pas

14 On considère la figure ci-contre dans laquelle :
– ABCD est un losange dont les diagonales se coupent en I ;
– la droite (d) est la médiatrice de [IB].



On se propose de démontrer que les droites (AC) et (d) sont parallèles.

Voici un schéma de démonstration, appelé **déductogramme** ou **organigramme**, permettant de démontrer que les droites (AC) et (d) sont parallèles.



❶ Sur ce schéma, où sont placées les données de l'énoncé ? Où est la conclusion ?

❷ Quel est le nombre de pas de cette démonstration ?

❸ Quelles propriétés doit-on écrire dans les encadrés bleus ?

❹ Rédiger cette démonstration.

15 ❶ **a.** Tracer un triangle ABC.
b. Tracer la droite (d_1), hauteur issue de C du triangle ABC.
c. Tracer la droite (d_2), médiatrice du segment [AB].

❷ Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

16 Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un point A de ce cercle. La médiatrice de [OA] coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points E et F.

❶ Faire une figure.

❷ Démontrer que le quadrilatère OEAF est un losange.

17 ❶ Tracer un rectangle ABCD ; placer le point E, symétrique du point D par rapport à la droite (BC).

❷ Démontrer que : AC = BE.

18 ❶ Construire un parallélogramme CDEF, puis placer le point U tel que CDUE est un parallélogramme.

❷ Démontrer que les points F, E et U sont alignés.

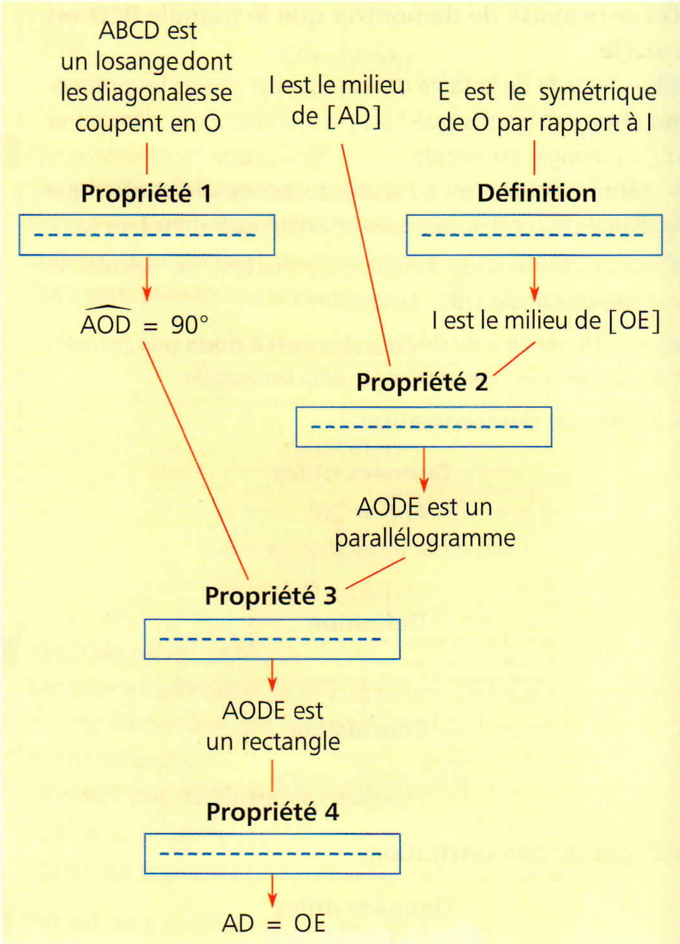
19 Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres respectifs O et O′ ont le même rayon et se coupent en deux points A et B.

❶ Faire une figure.

❷ Démontrer que le quadrilatère OAO′B est un losange.

20 ❶ **a.** Construire un losange ABCD ; ses diagonales se coupent en O.
b. Placer le milieu I de [AD].
c. Placer le point E, symétrique de O par rapport à I.

❷ On se propose de démontrer que AD = OE à l'aide du schéma de démonstration ci-dessous.



a. Quel est le nombre de pas de cette démonstration ?
b. Quelle définition doit-on écrire ?
c. Quelles propriétés doit-on écrire ?
d. Rédiger cette démonstration.

21 ❶ Construire un parallélogramme ABCD tel que :
AB = 6 cm et AD = 3 cm.
Placer le point I milieu de [AB].

❷ **a.** Comparer les angles $\widehat{ADI}$ et $\widehat{AID}$.
b. Comparer les angles $\widehat{AID}$ et $\widehat{IDC}$.
c. En déduire que [DI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

❸ Démontrer de même que [CI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

❹ Démontrer que le triangle CDI est rectangle.