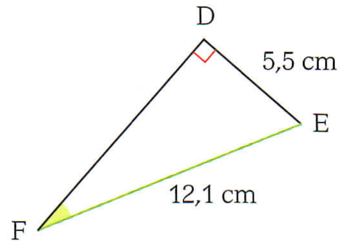
Méthodes

Savoir-faire 1 Calculer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle

Énoncé 1 **Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ du triangle rectangle DEF représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au centième de degré.**



Solution

Le triangle DEF est rectangle en D, donc on peut écrire :

$$\sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{EF}.$$

> Le triangle DEF est rectangle en D et on connaît :
> – la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{DFE}$,
> – la longueur de l'hypoténuse.
> On peut donc utiliser la définition de $\sin \widehat{DFE}$.

Or, d'après la figure de l'énoncé, on sait que :
DE = 5,5 cm et EF = 12,1 cm.

Donc $\sin \widehat{DFE} = \frac{5,5}{12,1}$

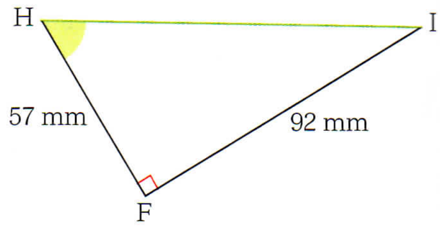
d'où : $\widehat{DFE} \approx 27,04°$.

> En utilisant la touche $\sin^{-1}$ ou Asn de la calculatrice, on obtient :
>
> ```
> sin⁻¹(5.5÷12.1)
>         27.03569179
> ```

L'arrondi au centième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ est 27,04°.

> On conclut.

Énoncé 2 **Calculer la mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ du triangle rectangle HIF représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au dixième de degré.**



Solution

Le triangle HIF est rectangle en F, donc on peut écrire :

$$\tan \widehat{FHI} = \frac{IF}{FH}.$$

> Le triangle HIF est rectangle en F et on connaît :
> – la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{FHI}$,
> – la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{FHI}$.
> Donc on peut utiliser la définition de $\tan \widehat{FHI}$.

Or, d'après la figure de l'énoncé, on sait que :
IF = 92 mm et FH = 57 mm.

Donc $\tan \widehat{FHI} = \frac{92}{57}$

d'où : $\widehat{FHI} \approx 58,2°$.

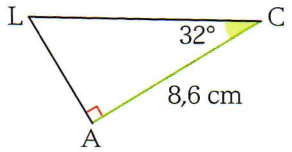
> En utilisant la touche $\tan^{-1}$ ou Atn de la calculatrice, on obtient :
>
> ```
> tan⁻¹(92÷57)
>         58.21908491
> ```

L'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ est 58,2°.

> On conclut.

Savoir-faire 2 Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Énoncé 1 **Calculer la longueur du côté [AL] du triangle rectangle LAC représenté ci-contre.**
On donnera l'arrondi au millimètre.



Solution

Le triangle LAC est rectangle en A, donc on peut écrire :

$$\tan \widehat{LCA} = \frac{AL}{AC}.$$

Le triangle LAC est rectangle en A.
On connaît la mesure de l'angle $\widehat{LCA}$ et la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{LCA}$. On peut donc utiliser la définition de $\tan \widehat{LCA}$ pour calculer la longueur AL.

On en déduit que :

$$AL = AC \times \tan \widehat{LCA}.$$

On utilise la propriété : si $a = \frac{b}{c}$, alors $b = a \times c$.

Or, d'après l'énoncé, on sait que :

$\widehat{LCA} = 32°$ et $AC = 8{,}6$ cm.

Donc $AL = 8{,}6 \times \tan 32°$

d'où $AL \approx 5{,}4$.

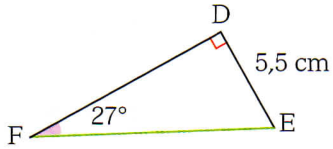
Avec la calculatrice, on obtient :

```
8.6×tan(32)
5.373876426
```

L'arrondi de AL au millimètre est 5,4 cm.

On conclut.

Énoncé 2 **Calculer la longueur du côté [EF] du triangle rectangle DEF représenté ci-contre.**
On donnera l'arrondi au millimètre.



Solution

Le triangle DEF est rectangle en D, donc on peut écrire :

$$\sin \widehat{DFE} = \frac{ED}{EF}.$$

Le triangle DEF est rectangle en D.
On connaît la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ et la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{DFE}$. On peut donc utiliser la définition de $\sin \widehat{DFE}$ pour calculer la longueur EF.

On en déduit que :

$$\sin \widehat{DFE} \times EF = ED.$$

Donc on a : $EF = \dfrac{ED}{\sin \widehat{DFE}}$.

On utilise la propriété : si $a = \frac{b}{c}$, alors $a \times c = b$.
Donc : $c = \frac{b}{a}$.

Or, d'après l'énoncé, on sait que :

$\widehat{DFE} = 27°$ et $ED = 5{,}5$ cm.

Donc $EF = \dfrac{5{,}5}{\sin 27°}$.

D'où $EF \approx 12{,}1$.

Avec la calculatrice, on obtient :

```
5.5÷sin(27)
12.11479096
```

L'arrondi de EF au millimètre est 12,1 cm.

On conclut.

Savoir-faire 3 Utiliser les propriétés $\sin^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = 1$ et $\tan\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$

Énoncé 1 **Soit $\widehat{B}$ un angle aigu tel que $\cos\widehat{B} = \frac{3}{5}$.**

a. **Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.**

b. **En déduire la valeur exacte de $\tan\widehat{B}$.**

Solution

a. $\sin^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1$

d'où $\sin^2\widehat{B} = 1 - \cos^2\widehat{B}$.

> On connaît $\cos\widehat{B}$ et on cherche $\sin\widehat{B}$. On utilise donc la propriété :
> $\sin^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1$.

Or $\cos\widehat{B} = \frac{3}{5}$, donc : $\sin^2\widehat{B} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\sin^2\widehat{B} = 1 - \frac{9}{25}$

$\sin^2\widehat{B} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

D'où $\sin\widehat{B} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

> Une équation du type $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
> Ici, $\sin^2\widehat{B} = \frac{16}{25}$ est une équation de cette forme.
> Or le sinus d'un angle aigu est toujours un nombre positif, l'équation $\sin^2\widehat{B} = \frac{16}{25}$ n'admet donc que la solution positive $\sqrt{\frac{16}{25}}$.

La valeur exacte de $\sin\widehat{B}$ est $\frac{4}{5}$.

> On conclut.

b. On sait que $\tan\widehat{B} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$.

> On utilise la propriété : $\tan\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$.

Or $\sin\widehat{B} = \frac{4}{5}$ et $\cos\widehat{B} = \frac{3}{5}$,

donc $\tan\widehat{B} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

La valeur exacte de $\tan\widehat{B}$ est $\frac{4}{3}$.

> On conclut.

Énoncé 2 **Soit $\widehat{A}$ un angle aigu. Démontrer que : $1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{A}}$.**

Solution

$1 + \tan^2 A = 1 + \left(\dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}\right)^2 = 1 + \dfrac{\sin^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}}$

> On utilise la propriété : $\tan\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$.

$1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{\cos^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}} + \dfrac{\sin^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}}$

$1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}}$

> On met les deux termes de la somme au même dénominateur.
> Pour cela, on utilise : $1 = \dfrac{\cos^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}}$.

$1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{A}}$

> On utilise la propriété :
> $\sin^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = 1$.

On a démontré que : $1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{A}}$.

> On conclut.