Méthodes

Savoir-faire 1 Déterminer une médiane et les quartiles à partir d'un tableau d'effectifs

Énoncé 1 **On a relevé la pointure des élèves de troisième d'un collège.**

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42 et plus
Effectif cumulé croissant	2	23	40	59	72	76	79	80

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

Solution

L'effectif total de la série statistique est 80, un nombre pair.
On prend comme médiane la moyenne de la valeur correspondant au 40^e rang et de la valeur correspondant au 41^e rang.

L'effectif total N est un nombre pair, donc la médiane est une valeur comprise entre les valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$. On prend la moyenne de ces deux valeurs.

La 40^e valeur est égale à 37 et la 41^e valeur est égale à 38. La médiane est donc égale à : $\frac{37+38}{2} = \mathbf{37{,}5}$.

25 % des valeurs correspondent à $80 \times 0{,}25 = 20$. Donc le premier quartile est la valeur de rang 20, soit **36**.

Le premier quartile q_1 est la plus petite valeur telle que 25 % des valeurs de la série sont inférieures à q_1.

75 % des valeurs correspondent à $80 \times 0{,}75 = 60$. Donc le troisième quartile est la valeur de rang 60, soit **39**.

Le troisième quartile q_3 est la plus petite valeur telle que 75 % des valeurs de la série sont inférieures à q_3.

Énoncé 2 **Le tableau suivant donne les relevés de température à 9 h du matin un 14 juillet dans quelques grandes villes.**

Température (°C)	11	13	15	16	17	18	19	20	23
Effectif	2	2	6	5	6	7	4	4	1

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

Solution

Température (°C)	11	13	15	16	17	18	19	20	23
Effectif	2	2	6	5	6	7	4	4	1
Effectif cumulé croissant	2	4	10	15	21	28	32	36	37

On recopie le tableau et on le complète par la ligne des effectifs cumulés croissants.

L'effectif total est 37, un nombre impair, donc la médiane correspond à la valeur de la ville de rang $\frac{37+1}{2} = 19$ de la série ordonnée dans l'ordre croissant de température.
La 19^e valeur est 17 donc la médiane de cette série est **17**.

L'effectif total N est un nombre impair, donc la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$.

La médiane partage la série en deux groupes dont l'effectif est égal à 18, un nombre pair. Donc :

- le premier quartile est la moyenne des 9^e et 10^e valeurs de la série, soit $\frac{15+15}{2} = 15$.

Le premier quartile est la médiane des 18 valeurs de la première moitié de la série.

- le troisième quartile est la moyenne des 28^e et 29^e valeurs, soit $\frac{18+19}{2} = 18{,}5$.

Le troisième quartile est la médiane des 18 valeurs de la deuxième moitié de la série.

Savoir-faire 2 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles

Énoncé **Voici les notes obtenues par 80 candidats à un concours.**

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	36	18	4

1. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane et des quartiles de cette série.
3. Donner les deux valeurs entre lesquelles sont situées 50 % des notes.

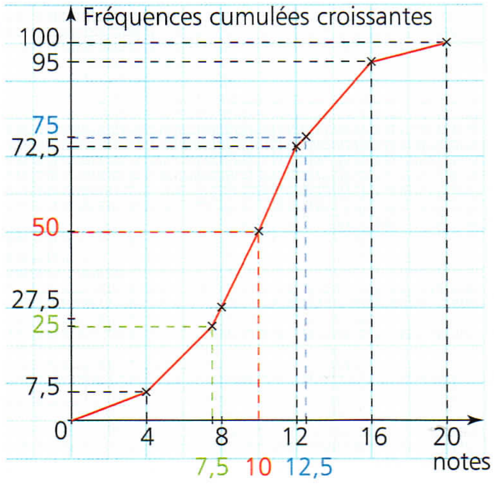
Solution

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	36	18	4
Effectif cumulé croissant	6	22	58	76	80
Fréquence cumulée croissante (en %)	7,5	27,5	72,5	95	100

On recopie le tableau et on le complète par la ligne des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

La fréquence cumulée croissante de la classe [8 ; 12[est égale à : $\frac{58}{80} \times 100$.

1.



On construit le polygone des fréquences cumulées croissantes. On admet en général qu'à l'intérieur d'une classe les valeurs sont uniformément réparties, donc on passe d'une fréquence cumulée à une autre de façon régulière et, graphiquement, cela se représente par un segment de droite.

2. D'après le polygone des fréquences cumulées croissantes, les notes qui correspondent à 25 %, 50 % et 75 % sont respectivement environ 7,5 ; 10 et 12,5.
Donc par lecture graphique, le premier quartile q_1 est 7,5, la médiane est 10 et le troisième quartile q_3 est 12,5.

• La médiane est la valeur correspondant à la fréquence cumulée égale à **50 %**.
• Le premier quartile, et le troisième quartile sont les valeurs correspondant respectivement aux fréquences cumulées **25 %** et **75 %**.

3. Environ 50 % des valeurs d'une série statistique ordonnée sont comprises entre q_1 et q_3.
Donc environ 50 % des notes sont comprises entre 7,5 et 12,5.

Savoir-faire 3 Calculer la probabilité d'un événement

Énoncé 1 **Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et cœur, de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures » : valet, dame et roi. On tire une carte au hasard dans ce jeu de 32 cartes.**
Quelle est la probabilité des événements suivants :

1. A : « La carte tirée est une dame. »

2. B : « La carte tirée est une figure rouge. »

3. C : « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

Solution

1. Il y a 4 dames dans le jeu, soit 4 possibilités, ou cas favorables, pour l'événement A. Le nombre de cas possibles est égal au nombre total de cartes, soit 32.

Dans l'énoncé, il est écrit « au hasard », cela signifie que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées.

D'où $p(\text{A}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

Les événements élémentaires sont équiprobables donc la probabilité d'un événement est donnée par la formule : $\dfrac{\text{« nombre de cas favorables »}}{\text{« nombre de cas possibles »}}$.

2. Il y a 3 figures dans chacune des deux « familles » rouges, donc il y a 6 cas favorables pour l'événement B.
Donc $p(\text{B}) = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$.

3. L'événement C est l'événement contraire de l'événement B, donc $p(\text{C}) = 1 - p(\text{B})$ et $p(\text{C}) = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{13}{16}$.

Pour A un événement et $\overline{\text{A}}$ l'événement contraire de A, on a la formule : $p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$.

Savoir-faire 4 Utiliser un arbre de probabilité

Énoncé **Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux noires « N » et trois blanches « B ». On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est noir et contient un jeton noir et trois jetons blancs, l'autre est blanc et contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. On extrait une boule de l'urne puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.**

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? Les expliciter.

2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de chacune de ces issues.

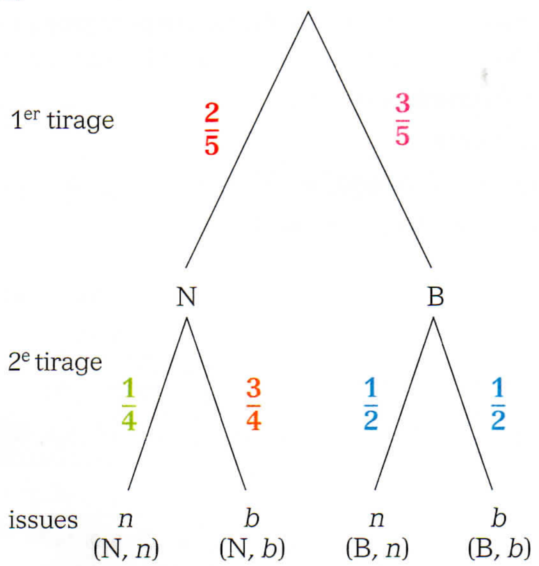
3. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la boule et le jeton extraits sont de la même couleur ».

Solution

1. Si la première boule tirée est noire, le jeton extrait peut être noir (n) ou blanc (b) et les résultats possibles sont (N, n) et (N, b).
Si la première boule tirée est blanche, on peut avoir les deux résultats (B, n) et (B, b).
Il y a donc 4 issues possibles.

> Les issues possibles lors de cette expérience aléatoire sont les résultats qui peuvent être obtenus à la suite du tirage d'une boule dans l'urne et d'un jeton dans le sac de la même couleur que la boule tirée.

2.



> Il y a cinq boules dans l'urne : deux boules sont noires et trois boules sont blanches.
> La probabilité de tirer une boule noire est donc égale à $\frac{2}{5}$ et celle de tirer une boule blanche est $\frac{3}{5}$.

> Si la boule tirée est noire, alors on tire un jeton dans le sac noir. Il contient un jeton noir et trois jetons blancs. On a donc **une chance sur quatre** d'extraire un jeton noir et **trois chances sur quatre** d'extraire un jeton blanc.
> Si la boule extraite est blanche, alors on tire un jeton dans le sac blanc qui contient deux jetons noirs et deux jetons blancs.
> La probabilité d'obtenir un jeton noir est donc égale à celle d'obtenir un jeton blanc, soit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

D'où : $p((\mathrm{N}, n)) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$p((\mathrm{N}, b)) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$p((\mathrm{B}, n)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

et $p((\mathrm{B}, b)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

> La probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur les branches.

3. L'événement A est constitué des deux événements élémentaires (N, n) et (B, b).
Donc $p(\mathrm{A}) = p((\mathrm{N}, n)) + p((\mathrm{B}, b))$,
soit $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

> La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.