

Savoir-faire Calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan

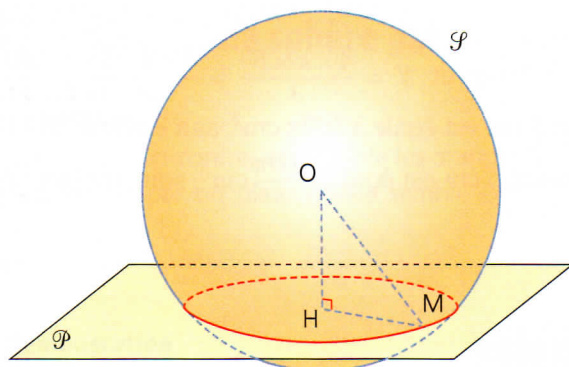
Énoncé Une sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon 3 cm est coupée par un plan situé à 2 cm du centre O .
Calculer le rayon de la section obtenue. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

Solution

Méthode Soit une sphère \mathcal{S} coupée par un plan \mathcal{P} .

Pour calculer le rayon de la section, le rayon de la sphère ou la distance du plan au centre de la sphère, on utilise le théorème de Pythagore ou la trigonométrie dans le triangle OHM , rectangle en H tel que :

- O est le centre de la sphère ;
- H est le centre de la section ;
- M est un point quelconque de la section (M appartient par conséquent à la fois à la sphère et au plan).



On commence par tracer une figure représentant la situation.

Soient M un point de la section et H le point d'intersection du plan et de la droite passant par O perpendiculairement au plan.

La section de la sphère par le plan est le cercle de centre H et de rayon HM .

La droite (OH) est perpendiculaire au plan de coupe, donc le triangle OHM est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

D'où :

$$HM^2 = OM^2 - OH^2$$

$$HM^2 = 3^2 - 2^2$$

$$HM^2 = 9 - 4 = 5$$

$$HM = \sqrt{5}$$

La section de la sphère par ce plan est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{5}$ cm, soit environ 2,2 cm.

On utilise le triangle OHM , rectangle en H , dans lequel on pourra appliquer le théorème de Pythagore.

On interprète l'énoncé :

- le rayon de la sphère est 3 cm, donc : $OM = 3$ cm ;
- le plan est situé à 2 cm de O , donc : $OH = 2$ cm.