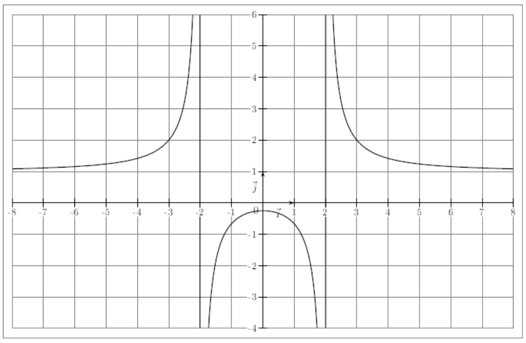
## Conjecturer une limite - correction

### Exercice 1

**1)** Réponse c.
**2)** Réponse b.
**3)** Réponses a et d.

### Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer d'après la courbe les limites de la fonction $f$ aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
La courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = 1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

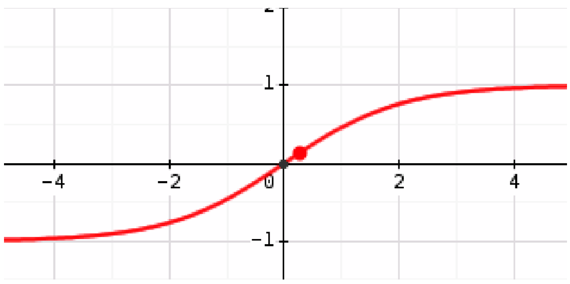
### Exercice 3

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? *(justifier votre réponse)*
"Si $f$ est une fonction strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ alors on a nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$"

L'affirmation est fausse.
Contre-exemple avec $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est bien strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ mais avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

### Exercice 4

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

**1)** 

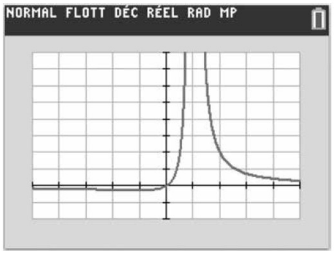

**2)** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

**3)** On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et les droites d'équations $y = 1$ en $-\infty$ et y = 1 en $+\infty$ est plus petite, par exemple, de $a = 10^3$.

**Exercice 5**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

**1)** On obtient la courbe suivante :




**2)** **(a)** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

**(b)** La courbe admet une asymptote verticale d'équation x = 1.

**Exercice 6**

On donne la représentation dune fonction f ci-contre définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**1)** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

La courbe admet deux asymptotes horizontales $y = 0$ et $y = 1$.

**2)** **(a)** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

**(b)** La courbe admet une asymptote verticale $x = 0$.

**(c)** La fonction f nadmet pas de limite en 0 car les limites en $0^-$ et $0^+$ ne sont pas égales.

## Opérations sur les limites

### Exercice 7

On donne les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$

Les bonnes réponses sont les réponses a) ; c) et d). La proposition b) est une forme indéterminée.

### Exercice 8

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x}$

**1)** Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- **Limite en $+\infty$ :**

  On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ et
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  **Par somme,** $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = +\infty$

- **Limite en $-\infty$ :**

  On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$ et
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  **Par somme,** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$

**2)** Déterminer les limites de $f$ en 0.

On n'a pas de limite en 0 mais une limite à gauche et à droite.

- **Limite en $0^-$ :**
  On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} 2x - 1 = -1$ et
  $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

  **Par somme,** $\lim\limits_{x \to 0^-} 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = +\infty$

- **Limite en $0^+$ :**
  On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x - 1 = -1$ et
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

  **Par somme,** $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$

### Exercice 9

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$f(x) = \dfrac{3x - 1}{2 - x}$ avec $a = 2$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur $a$ donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

**Etude du signe de $2 - x$ :**
$2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$
$2 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$

- **Limite en $2^-$ lorsque $x < 2$ :**

  On a : $\lim_{x \to 2^-} 3x - 1 = 5$ et $\lim_{x \to 2^-} 2 - x = 0^+$

  **Par quotient,** $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{3x-1}{2-x} = +\infty$

- **Limite en $2^+$ lorsque $x > 2$ :**

  On a : $\lim_{x \to 2^+} 3x - 1 = 5$ et $\lim_{x \to 2^+} 2 - x = 0^-$

  **Par quotient,** $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x-1}{2-x} = -\infty$

**<u>Exercice 10</u>**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ avec } a = 0$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur $a$ donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

**Etude du signe de $e^x - 1$ :**
$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

- **Limite en $0^-$ :**

  On a : $\lim_{x \to 0^-} e^x = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0^-$

  **Par quotient,** $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$

- **Limite en $0^+$ :**

  On a : $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$

  **Par quotient,** $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$

**<u>Exercice 11</u>**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = \dfrac{x-2}{1-e^x}$ avec $a = 0$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur $a$ donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

**Etude du signe de $1 - e^x$ :**
$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -1 \Leftrightarrow x < 0$
$1 - e^x < 0 \Leftrightarrow -e^x < -1 \Leftrightarrow x > 0$

- **Limite en $0^-$ :**
  On a : $\lim_{x \to 0^-} x - 2 = -2$ et
  $\lim_{x \to 0^-} 1 - e^x = 0^+$
  **Par quotient,** $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{1-e^x} = -\infty$

- **Limite en $0^+$ :**
  On a : $\lim_{x \to 0^+} x - 2 = -2$ et
  $\lim_{x \to 0^+} 1 - e^x = 0^-$
  **Par quotient,** $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{1-e^x} = +\infty$

## Exercice 12

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :
$f(x) = \dfrac{2x^2-1}{-x-1}$ avec $a=-1$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur $a$ donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

**Etude du signe de $-x-1$ :**
$-x-1>0 \Leftrightarrow -x>1 \Leftrightarrow x<-1$
$-x-1<0 \Leftrightarrow -x<1 \Leftrightarrow x>-1$

- **Limite en $-1^-$ :**

  On a : $\lim\limits_{x\to-1^-} 2x^2-1 = 1$ et
  $\lim\limits_{x\to-1^-} -x-1 = 0^+$
  **Par quotient,** $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2x^2-1}{-x-1} = +\infty$

- **Limite en $-1^+$ :**

  On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} 2x^2-1 = 1$ et
  $\lim\limits_{x\to-1^+} -x-1 = 0^-$
  **Par quotient,** $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x^2-1}{-x-1} = -\infty$

## Exercice 13

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ dans les cas suivants :
*(On précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$)*
**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$

**(a) Etude de la limite en** $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$ :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ **Par somme,** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty$
Pas d'asymptote horizontale.

**(b) Etude de la limite en** $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$ :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0^+$

**Par somme,** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} - 2 = -2$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ en $+\infty$.

## Exercice 14

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $f$ dans les cas suivants :
*(On précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$)*

**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - 2}$

**(a) Etude de la limite en** $-\infty$ de $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$ :

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ **Par somme,** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} - x = +\infty$

Pas d'asymptote horizontale.

**(b) Etude de la limite en** $-\infty$ de $f(x) = \dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - 2}$ :

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = -2$

**Par quotient,** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - 2} = +\infty$

Pas d'asymptote horizontale.

## Exercice 15

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$

**(b)** $f(x) = 2x\sqrt{x} + 1$

**(c)** $f(x) = \dfrac{-2}{1 - \sqrt{x}}$

**(d)** $f(x) = e^x + x - 4$

**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^x = +\infty$

Donc par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^x} = 0$

**(b)** $f(x) = 2x\sqrt{x} + 1$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x\sqrt{x} + 1 = +\infty$

**(c)** $f(x) = \dfrac{-2}{1 - \sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \sqrt{x} = -\infty$

Donc par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{1 - \sqrt{x}} = 0$

**(d)** $f(x) = e^x + x - 4$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + x - 4 = +\infty$

**Etude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{-5}{x+1} + 2$.

**1)** Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
**2)** Etudier les limites en $-1$. Interpréter graphiquement ces limites.
**3)** Calculer $f'(x)$.
**4)** Etudier le signe de $f'$ et dresser le tableau de variation de $f$.

**1)** Etude des limites en $+\infty$ et $-\infty$ :

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc **par quotient**, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{x+1} = 0$

  Ainsi, **par somme,** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{x+1} + 2 = 2$

- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ donc **par quotient**, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x+1} = 0$

  Ainsi, **par somme,** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x+1} + 2 = 2$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**2)** Etude des limites en $-1$ :

**Etude du signe de $x - 1$ :**
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

- **Limite en $-1^-$ :**

  On a : $\lim\limits_{x\to-1^-} x+1 = 0^-$ donc

  **par quotient**, $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-5}{x+1} = +\infty$

  Ainsi, **par somme,**
  $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-5}{x+1} + 2 = +\infty$

- **Limite en $-1^+$ :**

  On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+$ donc

  **par quotient**, $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{-5}{x+1} = -\infty$

  Ainsi, **par somme,**
  $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{-5}{x+1} + 2 = -\infty$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

**3)** Calcul de $f'$ :

On pose $u(x) = -5$ d'où $u'(x) = 0$
$v(x) = x + 1$ d'où $v'(x) = 1$

D'où, $\quad f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{-(-5)}{(x+1)^2}$

Donc, $\quad f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

**4) Etude du signe de $f'$ :**

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(x+1)^2 > 0$

Donc, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | |

**Tableau de variation de $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ |

## Théorème des valeurs intermédiaires

### Exercice 16

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-2$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**1)** Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

- **Dans l'intervalle** $]-\infty;1[$ **:**
  Sur $]-\infty;1[$ on a $f(x) > -2$.
  L'équation $f(x) = -3$ ne possède donc pas de solution sur $]-\infty;1[$.

- **Dans l'intervalle** $]1;+\infty[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et f(1)=1.
  Or, $-3 \in ]-\infty;1[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

- On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = -3$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

**2)** Dénombrer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

- **Dans l'intervalle** $]-\infty;1[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty;1[$.
  On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et f(1)=1.
  Or, $0 \in ]-2;1[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty;1[$.

- **Dans l'intervalle** $]1;+\infty[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et f(1)=1.
  Or, $0 \in ]-\infty;1[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

- On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ possède donc deux solutions sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 17

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$
dont les variations sont données par le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**1)** Justifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ est un polynôme donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**2)** Dénombrer les solutions de l'équation f(x) = 2.

- **Dans l'intervalle** $]-\infty; -3[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -3[$.
  On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et f(-3)=3.
  Or, $2 \in ]-\infty; 3[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $]-\infty; -3[$.

- **Dans l'intervalle** $]-3; -1[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]-3; -1[$.
  On a f(-3)=3 et f(-1)=-1.
  Or, $2 \in ]-1; 3[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $]-3; -1[$.

- **Dans l'intervalle** $]-1; +\infty[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.
  On a f(-1)=-1 et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
  Or, $2 \in ]-1; +\infty[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $]-1; +\infty[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = 2$ possède donc trois solutions sur $\mathbb{R}$.**

**3)** **(a)** Justifier que l'équation f(x) = 4 admet une unique solution $\alpha$.

- **Dans l'intervalle** $]-\infty; -3[$ **:**
  Sur $]-\infty; -3[$ on a $f(x) < 3$.
  L'équation $f(x) = 4$ ne possède donc pas de solution sur $]-\infty; -3[$.

- **Dans l'intervalle** $]-3; -1[$ **:**
  Sur $]-3; -1[$ on a $f(x) < 3$.
  L'équation $f(x) = 4$ ne possède donc pas de solution sur $]-\infty; -3[$.

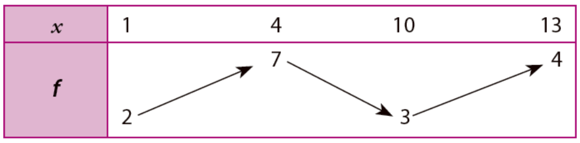
- **Dans l'intervalle** $]-1;+\infty[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
On a f(-1)=-1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Or, $4 \in ]-1;+\infty[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution dans $]-1;+\infty[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation** $f(x)=4$ **possède une unique solution sur** $\mathbb{R}$**.**

**(b)** Déterminer un encadrement de $\alpha$ à l'unité près.
$\alpha \approx 0$ à l'unité près.

**Exercice 18**

Une fonction $f$ définie et dérivable sur $[1;13]$ a pour tableau de variations le tableau suivant.




**1)** Justifier la continuité de la fonction f est continue sur [1 ; 13].
D'après la lecture du tableau de variations, la fonction f est continue sur [1 ; 13].

**2)** Dénombrer les solutions de l'équation f(x)=5. Justifier.

- **Dans l'intervalle** $]1;4[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]1;4[$.
On a f(1)=2 et f(4)=7.
Or, $5 \in ]2;7[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution dans $]1;4[$.

- **Dans l'intervalle** $]4;10[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]4;10[$.
On a f(4)=7 et f(10)=3.
Or, $5 \in ]3;7[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution dans $]4;10[$.

- **Dans l'intervalle** $]10;13[$ **:**
Sur $]10;13[$ on a $f(x)<4$.
L'équation $f(x)=5$ ne possède donc pas de solution sur $]10;13[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation** $f(x)=5$ **possède deux solutions sur [1 ; 13].**

**3)** Justifier que l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ admet une unique solution $\alpha$.

- **Dans l'intervalle** $]1;4[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]1;4[$.
  On a f(1)=2 et f(4)=7.
  Or, $\frac{5}{2} \in ]2;7[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ admet une unique solution dans $]1;4[$.

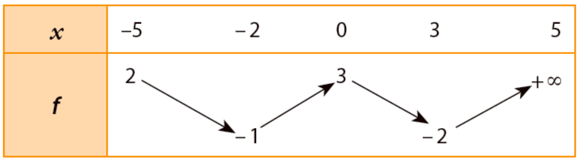
- **Dans l'intervalle** $]4;10[$ **:**
  Sur $]4;10[$ on a $f(x) > 3$.
  L'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ ne possède donc pas de solution sur $]4;10[$.

- **Dans l'intervalle** $]10;13[$ **:**
  Sur $]10;13[$ on a $f(x) > 3$.
  L'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ ne possède donc pas de solution sur $]10;13[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation** $f(x) = \frac{5}{2}$ **possède une unique solution sur [1 ; 13].**

## Exercice 19

Une fonction $f$ définie et dérivable sur [-5 ; 5[ a pour tableau de variations le tableau suivant.




**1)** Justifier la continuité de la fonction $f$ sur I = [-5 ; 5[.
D'après la lecture du tableau de variations, la fonction f est continue sur [1 ; 13].

**2)** Dénombrer les solutions de l'équation f(x)=0. Justifier.

- **Dans l'intervalle** $]-5;-2[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]-5;-2[$.
  On a f(-5)=2 et f(-2)=-1.
  Or, $0 \in ]-1;2[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-5;-2[$.

- **Dans l'intervalle** $]-2;0[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-2;0[$.
  On a f(-2)=-1 et f(0)=3.
  Or, $0 \in ]-1;3[$

Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2; 0[$.

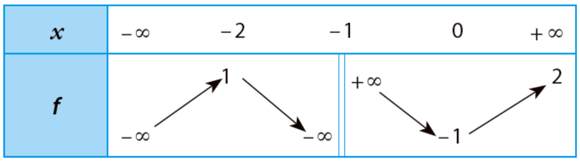
- **Dans l'intervalle** $]0; 3[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0; 3[$.
  On a f(0)=3 et f(3)=-2.
  Or, $0 \in ]-2; 3[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; 3[$.

- **Dans l'intervalle** $]3; 5[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]3; 5[$.
  On a f(3)=-2 et $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$.
  Or, $0 \in ]-2; +\infty[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]3; 5[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ possède quatre solutions sur $[-5; 5]$.**

## Exercice 20

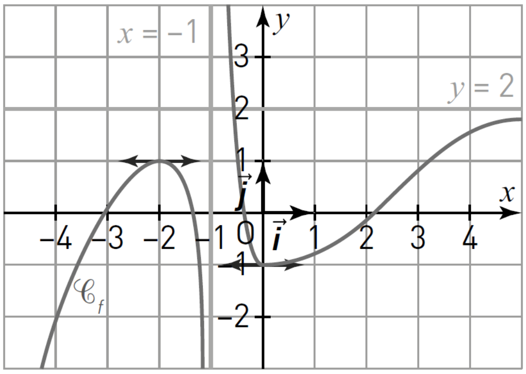
On donne le tableau de variations d'une fonction $f$.




**1)** Donner les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter.
D'après le tableau de variation, on lit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
La courbe $C_f$ admet une asymptote horizontale déquation y = 2.

**2)** La fonction $f$ admet-elle une limite en -1 ? Pourquoi ?
D'après le tableau de variation, on lit $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. La fonction $f$ nadmet pas de limite en -1 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.
On en déduit que la courbe $C_f$ admet une asymptote verticale déquation x = -1.

**3)** Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.
On fera figurer les éléments caractéristiques du tableau de variations sur la courbe.
Courbe possible :




## Exercice 21

On donne le tableau de variations d'une fonction $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

**1)** Déterminer les asymptotes de la courbe $C_f$ .

D'après le tableau de variation, on lit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
La courbe $C_f$ admet deux asymptotes horizontales déquation y = 0 y = 1.

D'après le tableau de variation, on lit $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$.
Et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.
La courbe $C_f$ admet deux asymptotes verticales déquation x = -2 et x = 1.

**2)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

- **Dans l'intervalle** $]-\infty; -2[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -2[$.
  On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$.
  Or, $0 \notin ]0; +\infty$
  L'équation $f(x) = 0$ ne possède donc pas de solution sur $]-\infty; -2[$.

- **Dans l'intervalle** $]-2; 1[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-2; 1[$.
  On a $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
  Or, $0 \in ]-\infty; +\infty[$
  Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2; 1[$.

- **Dans l'intervalle** $]1; +\infty[$ **:**
  D'après le tableau de variations, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur

$]1;+\infty[$.
On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Or, $0 \in ]-\infty;1[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

- **On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions sur $\mathbb{R}$.**

**3)** Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction $f$. On fera figurer les asymtotes à la courbe.

Courbe possible :