Exercice d'introduction

Le 1er janvier 2012, on a placé 5 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4 %. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 4% du capital de l'année précédente).
Chaque premier janvier, on place 200 euros supplémentaires sur ce compte.
On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au premier janvier de l'année 2012 et C_n le capital disponible au 1er janvier de lannée $2012 + n$.

1) Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.

2) Justifier que pour tout entier n, $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.

3) Justifier que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4) Pour tout entier n, on pose $v_n = C_n + 5000$.
(a) Calculer v_0.
(b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
(c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis de C_n en fonction de n.

5) Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020 arrondie à l'euro près.

6) Quel nombre minimal d'années devra-t-on attendre pour que le capital disponible dépasse 10 000 euros ?

Déterminer la limite d'une suite

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 0,8u_n + 24$ et $v_n = 2 \times 0,4^n + 10$.

(a) Sur la calculatrice, représenter graphiquement la suite (u_n) puis conjecturer la limite de cette suite.
(b) Sur la calculatrice, représenter graphiquement la suite (v_n) puis conjecturer la limite de cette suite.

Exercice 2

Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) u_n définie par $u_n = 2n - 1$
(b) v_n définie par $v_n = -n^3 + 5$
(c) w_n définie par $w_n = \dfrac{-2}{7 + \sqrt{n}}$
(d) z_n définie par $z_n = -3 + \dfrac{5}{n-1}$

Exercice 3

Choisir la ou les bonnes réponses.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$ a pour limite :
a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** 2.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{5+\sqrt{n}}$ a pour limite :
a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $\dfrac{1}{5}$.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = -n + \dfrac{1}{n}$ a pour limite :
a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) u_n définie par $u_n = 7 - 3n$

(b) v_n définie par $v_n = 9 - \dfrac{2}{n+1}$

(c) w_n définie par
$$w_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{1}{n^4} - 5\right)$$

(d) z_n définie par $z_n = \dfrac{3+n}{2+e^{-n}}$

Exercice 5

Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) u_n définie par $u_n = \left(-5 + \dfrac{1}{n}\right)^2$
(b) v_n définie par $v_n = \dfrac{1}{1-2n^2}$
(c) w_n définie par $w_n = \dfrac{-6}{2+e^{-n}}$
(d) z_n définie par $z_n = (e^n + 1)(-3 + e^{-n})$

Exercice 6

Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq -e^n$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{3n+1}$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{n}$.
2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -n - sin(n)$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq -n + 1$.
2) En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 9

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $2 - \dfrac{1}{n} \leq w_n \leq 2 + \dfrac{4}{n+1}$.
Déterminer la limite de la suite (w_n) en utilisant le théorème des gendarmes.

Exercice 10

Soit (z_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $z_n = -5 + \dfrac{cos(n)}{n^2}$.
Déterminer la limite de la suite (z_n) en utilisant le théorème des gendarmes.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 4 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 12

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses.

	V	F
1. La suite géométrique de raison 10 et de premier terme -1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
2. La suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
3. La suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2 a pour limite 2.	☐	☐
4. La suite géométrique de raison 0,25 et de premier terme -1 a pour limite 0.	☐	☐

Exercice 13

Déterminer la limite des suites suivantes.
(a) u_n définie par $u_n = 4 - 3^n$
(b) v_n définie par $v_n = -2 \times 0,5^n$
(c) w_n définie par $w_n = 4 \times \left(1 + \dfrac{5}{100}\right)^n$
(d) z_n définie par $z_n = 5\sqrt{2}^n$

Exercice 14

En 2015, on estime à 3 200 le nombre de tigres sauvages dans le monde. On peut craindre que ce nombre continue dans les années à venir à diminuer de 3 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note T_n le nombre de tigres sauvages en lan 2015 + n selon ce modèle.
1) Déterminer lexpression de T_{n+1} en fonction de T_n, pour tout entier naturel n.
2) Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire lexpression de T_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3) Quelle est la limite de T_n quand n tend vers $+\infty$?
4) Que peut-on en conclure ?

Exercice 15

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $0 \leq 2 + u_n \leq 0,3^n$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 16

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 0,5a_n$.
1) Déterminer la nature de la suite (a_n).
2) Déterminer la limite de la suite (a_n).

Exercice 17

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 9$.
1) Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
2) Déterminer la limite de la somme S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

Soit (v_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -10$.
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
1) Donner l'expressions de S_n en fonction de n.
2) Déterminer la limite de la somme S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 19

Soit (w_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = 4$.
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (w_n).
1) Donner l'expressions de S_n en fonction de n.
2) Déterminer la limite de la somme S_n quand n tend vers $+\infty$.

Les suites arithmético-géométriques

Exercice 20

Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1 000 euros.
Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement.
À l'ouverture, il dépose 100 euros le premier mois et ensuite 50 euros le 1er de chaque mois.
On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1) Calculer les capitaux c_1 et c_2 du premier et deuxième mois.
2) Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3) On pose $u_n = c_n + 20\,000$.
(a) Montrer que cette suite est géométrique.
(b) En déduire u_n puis c_n en fonction de n.
(c) Déterminer la limite de la suite c_n.

Exercice 21

Tom désire financer un voyage dont le coût est de 6 000 euros.
Pour ce faire, il a placé 2 000 euros le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %.
À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 euros supplémentaires sur ce livret. On désigne par c_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de lannée $(2003 + n)$, où n est un entier naturel.
Ainsi, on a $c_0 = 2\,000$.

1) **(a)** Calculer le capital disponible le ler janvier 2004.
(b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre c_{n+1} et c_n.
2) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = c_n + 20000$.
(a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
(b) Exprimer u_n en fonction de n.
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $c_n = 22\,000 \times (1,035)^n - 20\,000$.

Exercice 22

En mars, 2019, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur.
La plante poussera alors de 30 cm au cours des douzes mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1) Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2020 avant que Max ne la taille.
2) Pour tout entier naturel n, on la note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2019 + n)$.
(a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = h_n - 120$.
Démontrer que la suite (p_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
(c) Déterminer les limites des suites (p_n) et (h_n). Interpréter la limite de la suite (h_n).