Plan du cours

Mes objectifs :

↪ Je dois savoir calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution, d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide d'une formule.

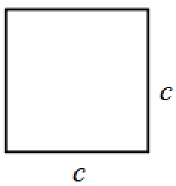
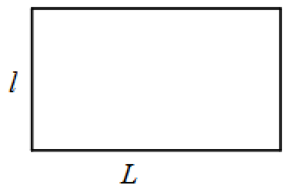
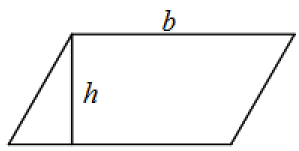
↪ Je dois savoir calculer l'aire d'une sphère de rayon donné.

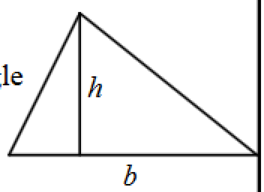
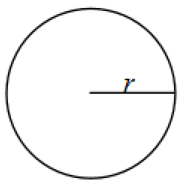
↪ Je dois savoir calculer le volume d'une boule de rayon donné.

I. Aires

Les différentes formules de calculs d'aires :

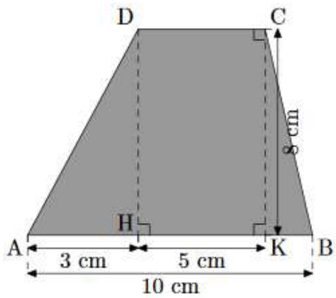
Dans chaque cas, $\mathcal{A}$ désigne l'aire de la figure

Carré	Rectangle	Parallélogramme
 c : côté du carré $\mathcal{A} = c \times c$	 l : largeur et L : longueur $\mathcal{A} = l \times L$	 b : longueur d'un côté h : hauteur associée $\mathcal{A} = b \times h$

Triangle	Disque
b : longueur d'un côté du triangle h : hauteur associée $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$ 	r : rayon du disque $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$ π désigne un nombre. $\pi \approx 3{,}141592$ 

Exercice d'application 1

1. Détermine l'aire des deux surfaces grisées (Les figures ne sont pas en vraie grandeur).



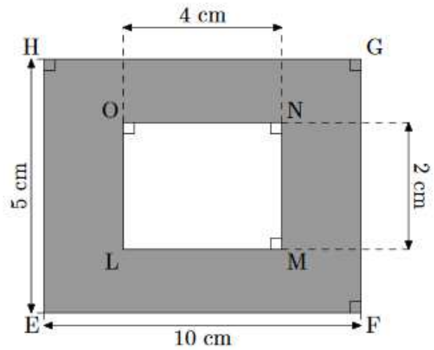


Figure 1 : On va découper cette figure en 3 figures usuelles : 2 triangles et un rectangle.

$A_{DAH} = \frac{b \times h}{2}$

$A_{DAH} = \frac{3 \times 8}{2}$

$A_{DAH} = \frac{24}{2}$

$A_{DAH} = 12cm^2$

$A_{CKB} = \frac{b \times h}{2}$

BK = 10 - 8 = 2 cm

$A_{CKB} = \frac{2 \times 8}{2}$

$A_{CKB} = \frac{16}{2}$

$A_{CKB} = 8cm^2$

$A_{DCKH} = L \times l$

$A_{DCKH} = 5 \times 8$

$A_{DCKH} = 40cm^2$

On va maintenant additionner toutes les aires :

$A_{total} = A_{DAH} + A_{CKB} + A_{DCKH} = 12 + 8 + 40 = 60cm^2$

Figure 2 : On va calculer l'aire du grand rectangle HGFE et soustraire ensuite l'aire du petit rectangle ONML.

$A_{HGFE} = L \times l$

$A_{HGFE} = 10 \times 5$

$A_{HGFE} = 50cm^2$

$A_{ONML} = L \times l$

$A_{ONML} = 4 \times 2$

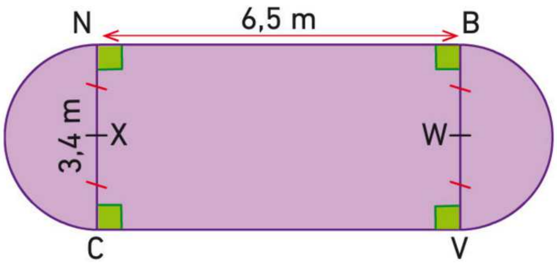
$A_{ONML} = 8cm^2$

$A_{total} = A_{HGFE} - A_{ONML}$

$A_{total} = 50 - 8$

$A_{total} = 42cm^2$

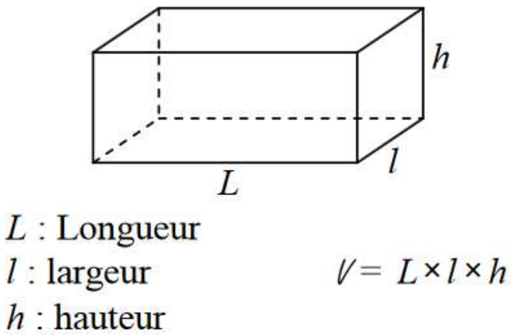
2. Calculer l'aire violette.



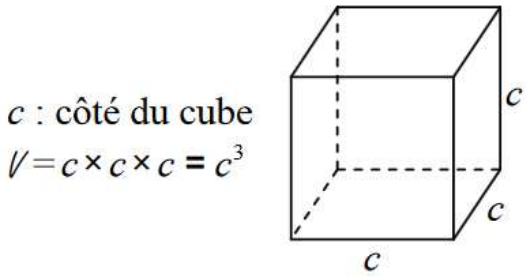
II. Volumes de solide

1. Le pavé droit et le cube

Le pavé droit :



Un pavé droit particulier, le cube :



Exercice d'application 2

1. Quel est le volume d'un pavé de droit de longueur 1 dm, de largeur 5 cm et de hauteur 30 mm ?

On commence par convertir les longueurs dans une même unité. 1 dm = 10 cm et 30 mm = 3 cm.

J'applique la formule : $V = L \times l \times h$
$V = 10 \times 5 \times 3$
$V = 150cm^3$

2. Quel est le volume d'un cube de côté 3 m ?

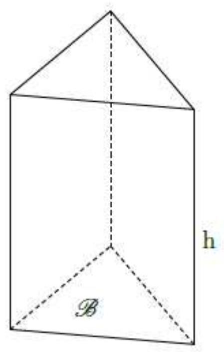
J'applique la formule : $V = c^3$
$V = 3^3$
$V = 27m^3$

2. Le prisme droit

Définition

Un prisme droit est un solide dont :
- Deux faces sont des polygones superposables et parallèles ; on les appelle **les bases** ;
- Les autres faces sont des rectangles ; on les appelle **les faces latérales**.

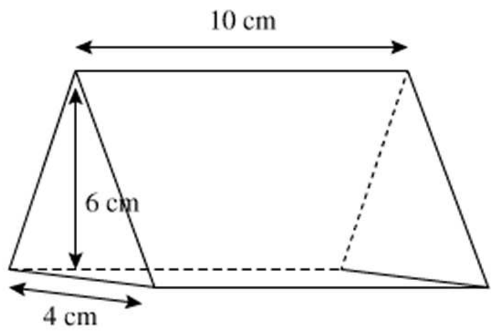
Exemple : Un prisme droit à base triangulaire.



Propriété

Le volume d'un prisme droit est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur : $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h$

Exercice d'application 3



Calculer le volume du prisme ci-contre.

On commence par calculer l'aire de la base (ici un triangle).

$A_{triangle} = \dfrac{b \times h}{2}$

$A_{triangle} = \dfrac{4 \times 6}{2}$

$A_{triangle} = 12cm^2$

J'applique la formule : $V = \mathscr{B} \times h$

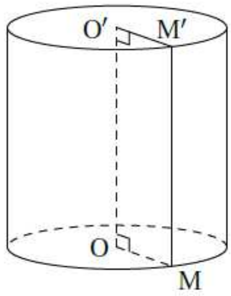
$V = 12 \times 10$

$\boxed{V = 120cm^3}$

3. Le cylindre

Définition

Un cylindre de révolution est un solide qui possède :
- **deux bases** sont deux disques superposables et parallèles,
- **une face latérale** qui s'enroule autour des bases et qui est perpendiculaire aux bases.



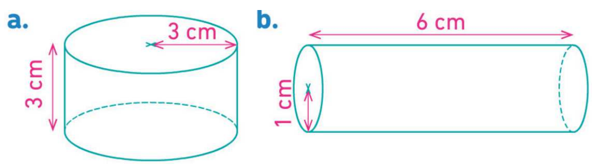
$$R = OM$$

$$h = OO'$$

Propriété

Le volume du cylindre est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur : $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h = \pi r^2 \times h$

Exercice d'application 4



(a) Calculer le volume du cylindre ci-contre.
On commence par calculer l'aire de la base (ici un disque de rayon 3cm).
$A_{disque} = \pi \times r^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 3^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 9$
$A_{disque} \approx 28,26 cm^2$

J'applique la formule : $V = \mathscr{B} \times h$
$V = 28,26 \times 3$
$\boxed{V = 84,78 cm^3}$

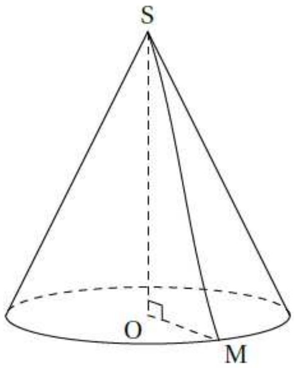
(b) Calculer le volume du cylindre ci-dessus.
On commence par calculer l'aire de la base (ici un disque de rayon 1cm).
$A_{disque} = \pi \times r^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 1^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 1$
$A_{disque} \approx 3,14 cm^2$

J'applique la formule : $V = \mathscr{B} \times h$
$V = 3,14 \times 6$
$\boxed{V = 18,84 cm^3}$

4. Le cône de révolution

Définition

Un cône de révolution est un solide formé :
- d'un disque appelé **base** ;
- d'une surface courbe appelé **face latérale** ;
- d'un point appelé **sommet du cône**.

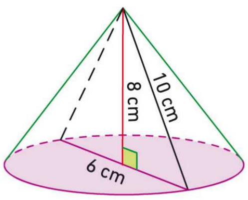


Propriété

Le volume d'un cône de révolution est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur :

$$\mathscr{V} = \frac{\mathscr{B} \times h}{3} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

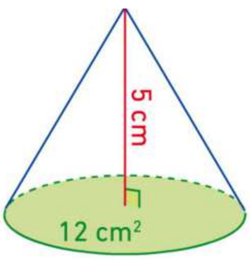
Exercice d'application 5



(a) Calculer le volume du cône de révolution ci-contre.
On commence par calculer l'aire de la base (ici un disque de diamètre 6cm, donc de rayon 3cm).
$A_{disque} = \pi \times r^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 3^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 9$

$A_{disque} \approx 28,26 cm^2$

J'applique la formule : $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$
$V = \dfrac{28,26 \times 8}{3}$
$\boxed{V = 75,36 cm^3}$



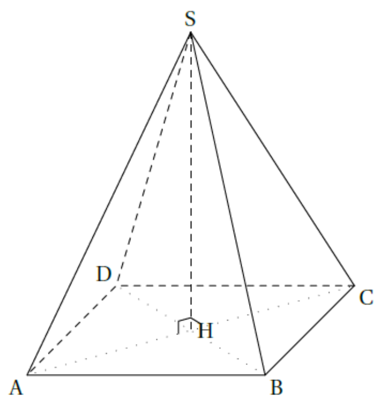
(b) Calculer le volume du cône de révolution ci-contre.
On connaît déjà l'aire la base, ici $12 cm^2$.

J'applique la formule : $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$
$V = \dfrac{12 \times 5}{3}$
$\boxed{V = 20 cm^3}$

5. La pyramide

Définition

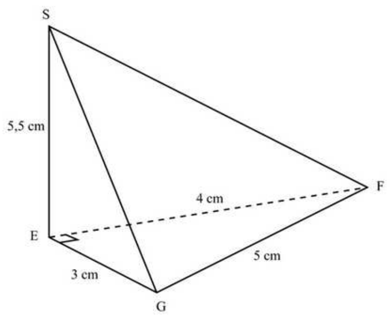
Une pyramide est un solide dont :
- toutes les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun appelé **sommet de la pyramide** ,
- l'autre face est un polygone quelconque appelé **base de la pyramide**.



Propriété

Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur : $\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$

Exercice d'application 6



(a) Calculer le volume de la pyramide ci-contre.
On commence par calculer l'aire de la base (ici le triangle EFG).

$A_{triangle} = \dfrac{b \times h}{2}$

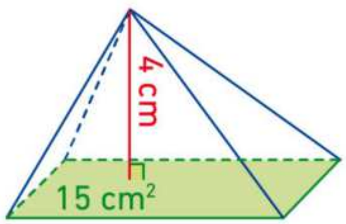
$A_{triangle} = \dfrac{3 \times 4}{2}$

$A_{triangle} = 6cm^2$

J'applique la formule : $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$

$V = \dfrac{6 \times 5,5}{3}$

$\boxed{V = 11cm^3}$



(b) Calculer le volume de la pyramide ci-contre.
On connaît déjà l'aire de la base (ici 15 cm^2).

J'applique la formule : $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$

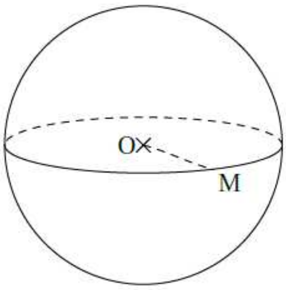
$V = \dfrac{15 \times 4}{3}$

$\boxed{V = 20cm^3}$

6. Une boule

Définition

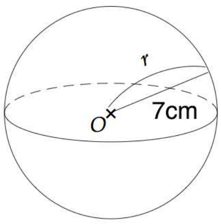
La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est inférieure ou égale à R.

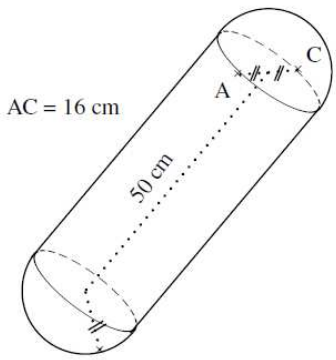


Propriété

Le volume d'une boule de rayon R est : $\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Exercice d'application 7





(a) Calculer le volume de la boule ci-contre.
On connaît le rayon de la boule qui est 7 cm.
J'applique la formule : $\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
$\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi \times 7^3$
$\boxed{\mathscr{V} = 1436,76 cm^3}$

(b) Calculer le volume de la figure ci-contre.
Nous allons calculer le volume d'une boule de rayon 8 cm et le volume d'un cylindre.

Volume de la boule :
J'applique la formule : $\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
$\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi \times 8^3$
$\boxed{\mathscr{V} = 2144,7 cm^3}$

Volume du cylindre : $A_{disque} = \pi \times r^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 8^2$
$A_{disque} \approx 3,14 \times 64$
$A_{disque} \approx 201 cm^2$

J'applique la formule : $Vc = \mathscr{B} \times h$
$Vc = 201 \times 50$
$\boxed{Vc = 10050 cm^3}$

Volume total : $Vc + Vb = 2144,7 + 10050 = 12194,7 cm^3$

III. Aires latérales de solide

Attention à bien différencier l'aire totale d'un solide et l'aire latérale d'un solide.

Définition

Une aire latérale (d'un cylindre, d'une pyramide etc) est la surface délimitant ce solide privée de sa (ou ses) base(s).

Exercice d'application 8

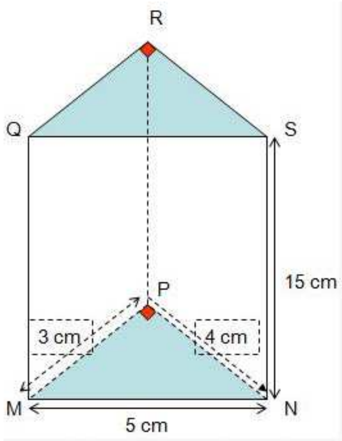
1. (a) Calculer l'aire latérale du prisme droit ci-contre :

....

....

....

....



(b) Calculer l'aire totale de ce solide :

....

....

....

....

Définition

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est égale à R.

Propriété

L'aire d'une sphère de rayon r est égale à $4\pi r^2$.

Exemples :

1. Calculer l'aire d'une sphère de diamètre 200 cm.

....

....

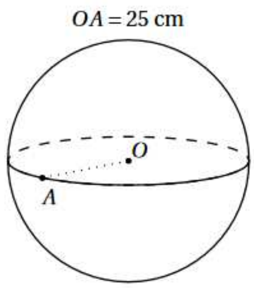
....

....

....

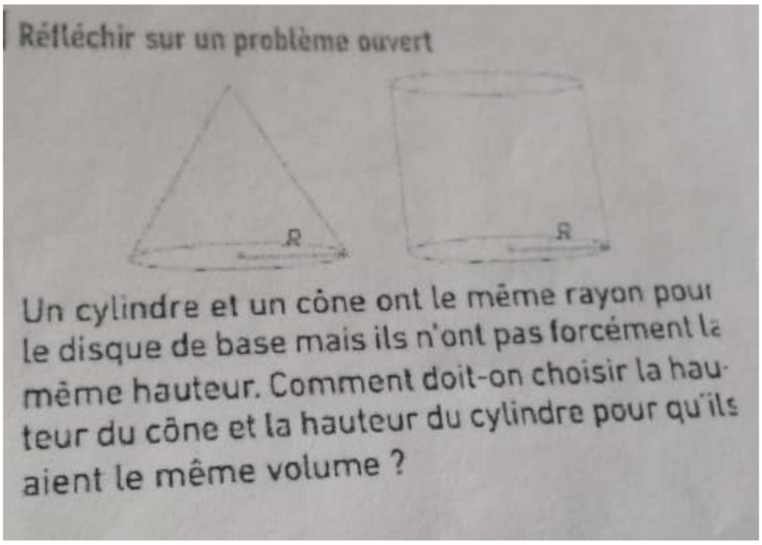
....

2. Calculer l'aire de la sphère ci-contre :



IV. Volume et équations

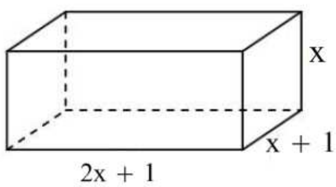
Problème 1 :


Réfléchir sur un problème ouvert

Un cylindre et un cône ont le même rayon pour le disque de base mais ils n'ont pas forcément la même hauteur. Comment doit-on choisir la hauteur du cône et la hauteur du cylindre pour qu'ils aient le même volume ?

Problème 2 : Calculer le rayon d'une boule dont le volume est égal à $36cm^3$.

Problème 3 : On considère le pavé droit ci-dessous, avec x un nombre positif :



1. Exprimer en fonction de x le volume de ce pavé droit sous forme développée.

2. Exprimer en fonction de x l'aire totale de ce pavé droit sous forme développée.

Problème 3 bis : Quel est le rayon d'une sphère dont l'aire est égale à 200 $cm2$?