

Chapitre Lycée (1) :

Résolution d'inéquation

I. Inéquations

1) Définitions

→ Une **inégalité** compare deux nombres à l'aide des symboles : $<$, $>$, \leq et \geq .

Ex: $0,5 < 1$ est une inégalité dans laquelle on compare 0,5 et 1.

→ Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Ex: $3x + 12 < 3$ est une inéquation.

$3x + 12$ est le membre de gauche et 3 est le membre de droite.

→ **Résoudre une inéquation** d'inconnue x , revient à trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'inégalité.

Chacun de ces valeurs est appelés **solution de l'inéquation**.

2) Tester si un nombre est solution d'une inéquation

Une solution d'une inéquation est un nombre pour lequel l'inéquation est vraie.

Ex: - 2 est solution-il de l'inéquation $3x + 5 < -2x - 8$?

On remplace chaque membre de l'inégalité en remplaçant x par -2.

D'une part,

Pour $x = -2$,

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 3 \times (-2) + 5 \\ &= -6 + 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'autre part,

Pour $x = -2$,

$$\begin{aligned} -2x - 8 &= -2 \times (-2) - 8 \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$-1 > -4$ donc - 2 n'est pas solution de l'inéquation $3x + 5 < -2x - 8$.

3) Représenter les solutions sur une droite graduée

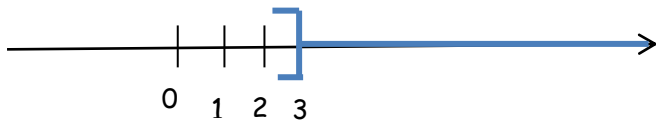
Dans la représentation des solutions sur une droite graduée,

- si un crochet est tourné **vers les solutions** alors le nombre correspondant **fait partie** des solutions
- si le crochet est tourné **vers l'extérieur** alors le nombre correspondant **ne fait pas partie** des solutions.

Exemples :

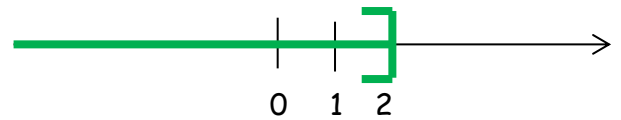
a) Sur cette droite graduée sont représentés les nombres solutions de l'inéquation $x > 3$.

On prend alors toutes les valeurs plus grandes que 3, 3 exclu.



b) Sur cette droite graduée sont représentés les nombres solutions de l'inéquation $x \leq 2$.

A vous de jouer !



Le crochet n'est pas tourné vers les solutions car le nombre 3 n'est pas une solution de l'inéquation.

Le crochet est tourné vers les solutions car 2 est une solution.

Exercice d'application :

Représenter les solutions des inéquations suivantes sur une droite graduée :

$x > 4$ <p>A horizontal number line with tick marks at 0 and 4. A green bracket is drawn at the point 4, opening to the right, indicating that the solution set starts at 4 and extends to the right, excluding 4.</p>	$x < -1$ <p>A horizontal number line with tick marks at -1. A green bracket is drawn at the point -1, opening to the left, indicating that the solution set starts at -1 and extends to the left, excluding -1.</p>
$x \leq -5$ <p>A horizontal number line with tick marks at -5 and 0. A green bracket is drawn at the point -5, opening to the left, indicating that the solution set starts at -5 and extends to the left, including -5.</p>	$x \geq -1$ <p>A horizontal number line with tick marks at -1. A green bracket is drawn at the point -1, opening to the right, indicating that the solution set starts at -1 and extends to the right, including -1.</p>

→ Exercices 35 à 38 de la feuille

II. Résolution d'inéquation du premier degré à une inconnue

1) Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $-3x - 1 > 5$ et représenter les solutions sur la droite graduée.

$-3x - 1 + 1 > 5 + 1$	On ajoute 1 dans chaque membre
$-3x > 6$	On réduit.
$\frac{-3x}{-3} < \frac{6}{-3}$	On divise par -3 chaque membre (3 étant un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité).
$x < -2$	On réduit.
Les solutions sont tous les nombres inférieurs strictement à 2.	On conclut et on représente les solutions sur une droite graduée.

2) Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $-7x - 3 \geq 2x - 1$ et représenter les solutions sur la droite graduée.

$-7x - 3 - 2x \geq 2x - 1 - 2x$	On soustrait $2x$ à chaque membre.
$-9x - 3 \geq -1$	On réduit.
$-9x - 3 + 3 \geq -1 + 3$	On ajoute 3 dans chaque membre.
$-9x \geq 2$	On réduit.
$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{2}{-9}$	On divise par -9 chaque membre. -9 étant un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.
$x \leq \frac{2}{-9}$	On réduit.
Les solutions sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{2}{-9}$.	On conclut et on représente les solutions sur une droite graduée.

→ Exercices 42 à 44 de la feuille

3) A vous de jouer !

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1) $x - 2 \leq 0$

2) $x + 4 > 0$

3) $2x + 7 > 0$

4) $\frac{1-3x}{4} \geq 0$

5) $3x - 3 < 1 - 2x$

6) $2(x - 3) \geq 8 - 3x$

7) $2(x + 1) < 3 + 2x$

8) $\frac{x-2}{3} - \frac{1-x}{2} \geq 0$

9) $\frac{x}{2} - \frac{4-x}{4} > 5$

Correction :

1) $x - 2 \leq 0$

$$x \leq 0 + 2$$

$$x \leq 2$$

2) $x + 4 > 0$

$$x > 0 - 4$$

$$x > -4$$

3) $2x + 7 > 0$

$$2x > 0 - 7$$

$$2x > -7$$

$$x > \frac{-7}{2}$$

4) $\frac{1-3x}{4} \geq 0$

$$1 - 3x \geq 0$$

$$-3x \geq -1$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$

5) $3x - 3 < 1 - 2x$

$$3x + 2x < 1 + 3$$

$$5x < 4$$

$$x < \frac{4}{5}$$

6) $2(x - 3) \geq 8 - 3x$

$$2x - 6 \geq 8 - 3x$$

$$2x + 3x \geq 8 + 6$$

$$5x \geq 14$$

$$x \geq \frac{14}{5}$$

7) $2(x + 1) < 3 + 2x$

$$2x + 2 < 3 + 2x$$

$$2x - 2x < 3 - 2$$

$$0x < 1$$

(aucune solution)

8)

$$\frac{x-2}{3} - \frac{1-x}{2} \geq 0$$

$$\frac{2(x-2)}{6} - \frac{3(1-x)}{6} \geq 0$$

$$\frac{2(x-2)-3(1-x)}{6} \geq 0$$

$$2(x-2) - 3(1-x) \geq 0$$

$$2x - 4 - 3 + 3x \geq 0$$

$$5x - 7 \geq 0$$

$$5x \geq 7$$

$$x \geq \frac{7}{5}$$

9) $\frac{x}{2} - \frac{4-x}{4} > 5$

$$\frac{2x}{4} - \frac{4-x}{4} - 5 > 0$$

$$\frac{2x}{4} - \frac{4-x}{4} - \frac{20}{4} > 0$$

$$\frac{2x-4-x-20}{4} > 0$$

$$2x - 4 - x - 20 > 0$$

$$x - 24 > 0$$

$$x > 24$$

4) Exemple de résolution d'un problème

Énoncé : *Un cinéma propose deux formules d'abonnement différentes :*

- Tarif A : 15 € d'abonnement puis 4 € par film ;
- Tarif B : 35 € d'abonnement puis 2 € par film.

Déterminer le nombre de films à partir duquel le tarif B est le plus intéressant.

Résolution :

- Choix de l'inconnue : On pose x : le nombre de film que l'on va voir.

- Traduction de l'énoncé par une inéquation :

$$\text{Tarif A : } 15 + 4x$$

$$\text{Tarif B : } 35 + 2x$$

On veut savoir quand le tarif B est inférieur au tarif A.

$$B < A$$

- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} B &< A \\ 35 + 2x &< 15 + 4x \\ 2x - 4x &< 15 - 35 \\ -2x &< -20 \\ \frac{-2x}{-2} &> \frac{-20}{-2} \\ x &> 10 \end{aligned}$$

- Réponse au problème posé :

Le tarif B est le plus intéressant à partir de 11 films.

- Vérifications :

Pour 11 films, le tarif B = $35 + 2 \times 11 = 35 + 22 = 57$.

Le tarif A = $15 + 4 \times 11 = 15 + 44 = 59$

Or $57 < 59$. Donc le tarif B < tarif A.