Algèbre

Pour conduire un calcul

Méthode		
1 On respecte les priorités dans les calculs.	**Règle** Pour calculer une expression, on effectue dans l'ordre : **a.** les calculs entre parenthèses, **b.** les puissances et les racines carrées, **c.** les multiplications et les divisions, **d.** les additions et les soustractions.	$E = 9 + 4\sqrt{3+6} - \frac{13}{7-5} + (-2+7)^2$ $E = 9 + 4 \times \sqrt{9} - \frac{13}{2} + 5^2$ $E = 9 + 4 \times 3 - \frac{13}{2} + 25$ $E = 9 + 12 - 6{,}5 + 25$ $E = 21 - 6{,}5 + 25$ $E = 14{,}5 + 25$ $E = 39{,}5$

Pour calculer avec des nombres en écriture fractionnaire

Méthode		
1 Pour additionner, ou soustraire, deux nombres en écriture fractionnaire, on les réduit au même dénominateur, puis on additionne, ou on soustrait, les numérateurs.	**Propriétés** • Soient a, b et k trois nombres tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$. On a : $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} = \frac{a : k}{b : k}$. • Soient a, b et c des nombres tels que $c \neq 0$. On a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.	• $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}$ • $\frac{6}{5} - \frac{8}{35} = \frac{6 \times 7}{5 \times 7} - \frac{8}{35} = \frac{42}{35} - \frac{8}{35}$ $= \frac{42-8}{35} = \frac{34}{35}$
2 Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et on multiplie les dénominateurs entre eux.	**Propriété** Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.	• $\frac{9}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{9 \times 2}{5 \times 7} = \frac{18}{35}$
3 Pour diviser deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie le premier nombre par l'inverse du deuxième nombre.	**Propriété** Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$. On a : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.	• $\frac{9}{5} : \frac{2}{7} = \frac{9}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{63}{10}$

Pour écrire un nombre en notation scientifique

Méthode		
1 Le nombre décimal compris entre 1 et 10 s'obtient en déplaçant la virgule et en associant la puissance de 10 correspondante.	**Définition** La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est la seule écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$ et p un entier relatif.	$A = 301{,}58 = 3{,}015\,8 \times 10^2$ $B = 0{,}004\,55 = 4{,}55 \times 10^{-3}$

Pour factoriser une expression

Méthode		
1 On reconnaît un facteur commun, puis on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.	**Propriété** Quels que soient les nombres a, b, c, d et k, on a : $ka + kb = k(a+b)$ $ka - kb = k(a-b)$ $ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d)$.	• Factoriser $A = 4x^2 + 8x$ $A = 4x^2 + 8x$ $A = 4x \times x + 4x \times 2$ $A = 4x(x+2)$ • Factoriser $B = (x+3)^2 - 4(x+3)$ $B = (x+3)^2 - 4(x+3)$ $B = (x+3)(x+3) - 4(x+3)$ $B = (x+3)[(x+3) - 4]$ $B = (x+3)(x-1)$
2 On utilise les identités remarquables.	**Propriétés** • $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	• Factoriser $C = 9x^2 + 24x + 16$ $C = 9x^2 + 24x + 16$ $C = (3x+4)^2$ • Factoriser $D = (x-5)^2 - 9$ $D = (x-5)^2 - 9$ $D = [(x-5)+3][(x-5)-3]$ $D = (x-2)(x-8)$

Pour développer une expression

Méthode		
1 On utilise la distributivité.	**Propriété** Quels que soient les nombres a, b, c, d et k, on a : $k(a+b) = ka + kb$ $k(a-b) = ka - kb$ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	Développer $B = (3x+2)(8x-4)$ $B = (3x+2)(8x-4)$ $B = 3x \times 8x + 3x \times (-4) + 2 \times 8x + 2 \times (-4)$ $B = 24x^2 - 12x + 16x - 8$ $B = 24x^2 + 4x - 8$

Pour démontrer que deux expressions sont égales

Méthode		
1 On transforme l'écriture de l'une pour obtenir l'autre.		Démontrer que, pour tout nombre x : $2x^2 - x - 15 = (x-3)(2x+5)$. $(x-3)(2x+5) = 2x^2 + 5x - 6x - 15$ $= 2x^2 - x - 15$. Donc, pour tout nombre x : $2x^2 - x - 15 = (x-3)(2x+5)$.
2 On prouve que les deux expressions sont égales à une même troisième.	**Propriété** Si $A = C$ et $B = C$, alors : $A = B$.	Démontrer que, pour tout nombre x : $(x+1)^2 - (x+7) = (x+3)(x-2)$. D'une part, on a : $(x+1)^2 - (x+7) = x^2 + 2x + 1 - x - 7$ $= x^2 + x - 6$. D'autre part, on a : $(x+3)(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6$ $= x^2 + x - 6$. Donc, pour tout nombre x : $(x+1)^2 - (x+7) = (x+3)(x-2)$.

3 On prouve que la différence des deux expressions est nulle.

Propriété Si $A - B = 0$, alors : $A = B$.

Démontrer que, pour tout nombre x tel que $x \neq -1$ et $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 - (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 - (x^2 + 2x - x - 2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 - x^2 - 2x + x + 2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{0}{(x-1)(x+1)}$$

$$= 0$$

Donc, pour tout nombre x différent de -1 ou de 1 : $\dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Pour résoudre une équation du premier degré d'inconnue x

Méthode

1 On se ramène à une équation de la forme $ax = b$, en isolant les termes en « x » dans un même membre. Lorsque $a \neq 0$, la solution de l'équation $ax = b$ obtenue est $\dfrac{b}{a}$.

Propriétés : Soient a, b et c trois nombres.
Si $a = b$, alors $a + c = b + c$
Si $a = b$, alors $a - c = b - c$
Si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$
Si $c \neq 0$ et $a = b$, alors $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$.

Résoudre l'équation $5x - 7 = 2x + 3$

$$5x - 7 = 2x + 3$$
$$5x - 2x = 3 + 7$$
$$3x = 10$$
$$x = \frac{10}{3}$$

$\dfrac{10}{3}$ est la solution de cette équation.

Pour résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Méthode

1 On applique une des propriétés ci-contre selon le signe de a.

Propriété Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0.
Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

L'équation $x^2 = 5$ a deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$
L'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution.

Pour résoudre une équation produit nul

Méthode

1 On applique la règle du produit nul.

Définition Une équation produit nul est une équation dont l'un des membres est un produit et dont l'autre membre est zéro.
Règle du produit nul Dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.

Résolution de l'équation $(2x - 5)(3x - 4) = 0$.
D'après la règle du produit nul :

$2x - 5 = 0$	ou	$3x - 4 = 0$
$2x = 5$		$3x = 4$
$x = \dfrac{5}{2}$		$x = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{4}{3}$ sont les solutions de l'équation.

Statistiques

Pour construire un diagramme en bâtons ou en tuyaux d'orgue

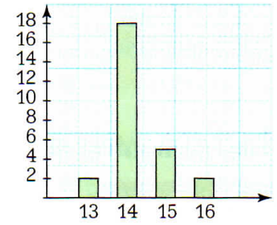
Méthode

1 On utilise un diagramme en bâtons pour représenter l'étude statistique d'un caractère qualitatif (pays, marque, couleur) ou d'un caractère quantitatif dont les valeurs sont séparées et peu nombreuses.

Propriété Les hauteurs des barres sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences correspondants.

Représentation de la répartition des âges des élèves d'une classe de troisième.

Âge	Effectif
13	2
14	18
15	5
16	2



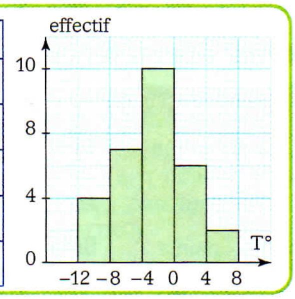
Pour construire un histogramme

Méthode

1 L'histogramme est utilisé pour représenter une série statistique d'un caractère quantitatif dont les valeurs sont regroupées en classes.

Propriété Un histogramme est composé de rectangles accolés dont les bases, en abscisses, sont les intervalles de valeurs. Lorsque les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences correspondants.

Classe	Effectif
]– 12 ; – 8]	4
]– 8 ; – 4]	7
]– 4 ; 0]	10
]0 ; 4]	6
]4 ; 8]	2



Pour calculer une moyenne

Méthode

1 On utilise la définition ci-contre.

Définition La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme des valeurs de la série par l'effectif total des valeurs.

La moyenne des notes 7, 12 et 14 est :

$$M = \frac{7+12+14}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

Pour calculer une moyenne pondérée

Méthode

1 Lorsque chaque valeur de la série statistique a un coefficient, on calcule une moyenne pondérée.

Définition La moyenne pondérée est le quotient de la somme des produits des valeurs par leur effectif, par la somme des effectifs (l'effectif total).

Valeur	13	14	15	16
Effectif	2	18	5	2

La moyenne pondérée du tableau d'effectifs ci-dessus est :

$$M = \frac{2\times 13 + 18\times 14 + 5\times 15 + 2\times 16}{2+18+5+2} = \frac{380}{27} \text{ et } M \approx 14$$

2 Lorsque les valeurs sont regroupées en classes, on obtient une valeur approchée de la moyenne.

Propriété La moyenne d'une série dont les valeurs sont regroupées par classe est égale à la moyenne pondérée des centres des classes.

Classe	]–12 ; –8]	]–8 ; – 4]	]– 4 ; 0]	]0 ; 4]	]4 ; 8]
Effectif	4	7	12	6	2
Centre	–10	–6	–2	2	6

$$M = \frac{4\times(-10)+7\times(-6)+12\times(-2)+6\times 2+2}{4+7+12+6+2} = \frac{-82}{31}$$

$M \approx -2{,}6$