DÉRIVATION – Chapitre 1/3

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/uMSNlIPBFhQ

Partie 1 : Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

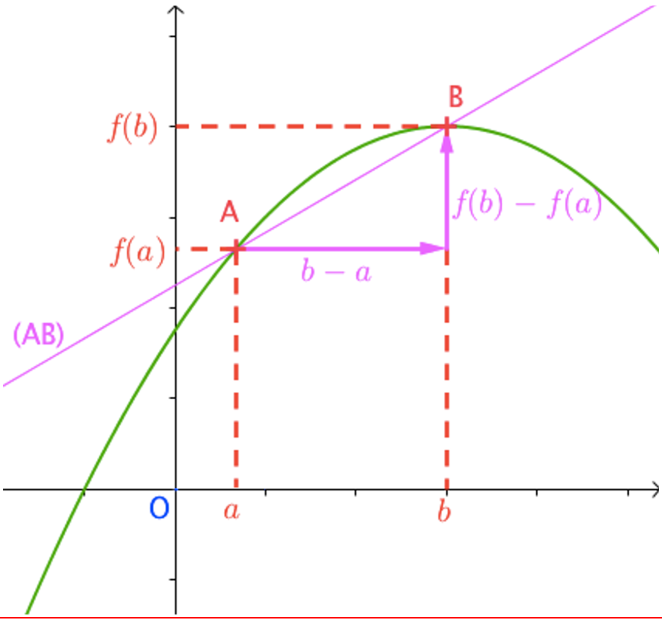
2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

Définition : On dit que f a pour **limite** L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L.

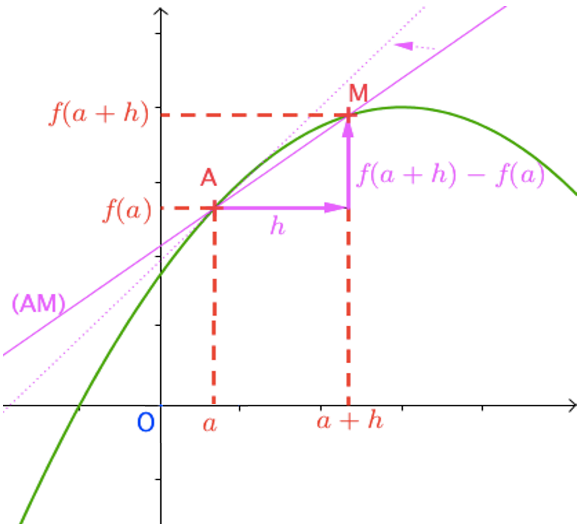
Partie 2 : Nombre dérivé

1) Pente d'une droite (rappel)

Formule du taux d'accroissement :
Sur le graphique suivant, la pente de la droite (AB) sécante à la courbe est égale à :
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



2) Fonction dérivable



Sur le graphique ci-contre, la pente de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.

Lorsque M se rapproche de A, h tend vers 0 ($h \to 0$).
La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L, tel que :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :
Dans la définition, si L n'est pas égal à un nombre, alors f n'est pas dérivable en a.
Par exemple, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}$ n'est pas un nombre. En effet, $\frac{1}{h}$ se rapproche de $+\infty$ lorsque h se rapproche de 0.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE
Vidéo https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

Correction

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times2+3}{h}$

$= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$

$= \frac{6h+h^2}{h}$

$= \frac{h(6+h)}{h}$

$= 6 + h$

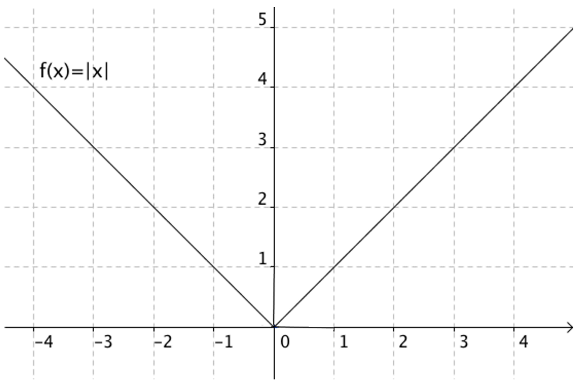
Donc : $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 6 + h = 6 + 0 = 6$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.
Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.

3) Cas de la fonction valeur absolue

Définition : La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Exemples :
- $f(-5) = |-5| = 5$
- $f(4) = |4| = 4$



Propriété :
Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$
Si $x \leq 0$, alors $f(x) = |x| = -x$

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ sur }]-\infty\,;0] \\ x \text{ sur } [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;\,+\infty[$, la fonction valeur absolue est une fonction affine.

Méthode : Démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue

Vidéo https://youtu.be/ZKtxnTaIvvs

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Correction

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x|$.
On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, \ si\ h > 0. \\ \frac{-h}{h} = -1, \ si\ h < 0 \end{cases}$$

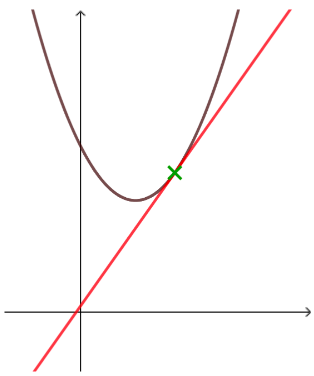
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h. La limite ne peut pas être égal à la fois à 1 et à -1.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.
En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Remarque : Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

Partie 3 : Tangente à une courbe

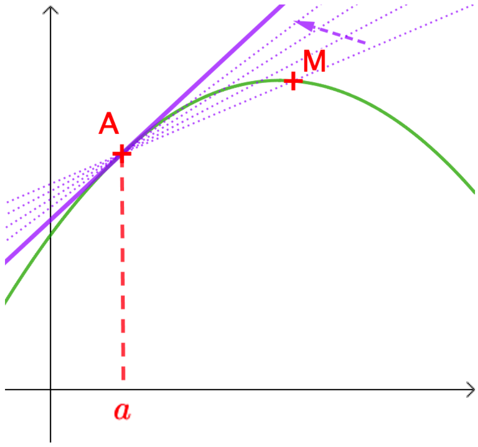
1) Pente de la tangente

Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.



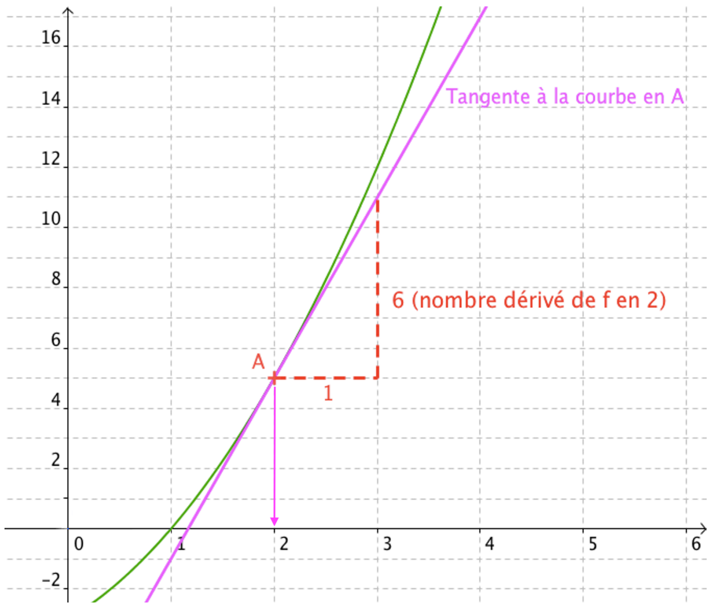
Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite sécante (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.
Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$ défini dans le paragraphe précédent.



Exemple :

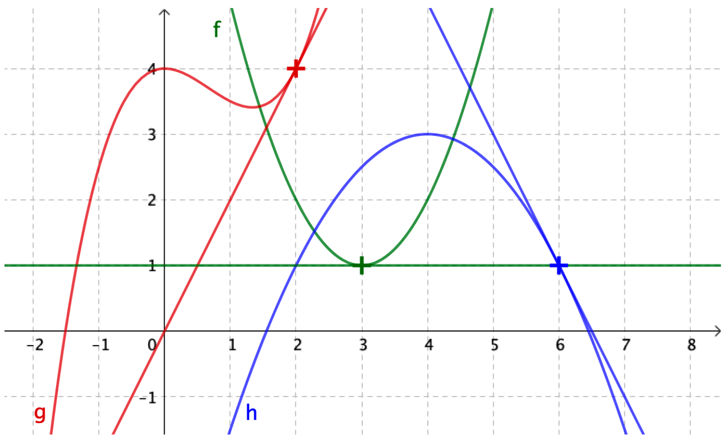
Sur le graphique ci-contre, on lit que la pente de la tangente en 2 est égale à 6.
On a donc : $f'(2) = 6$



Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé

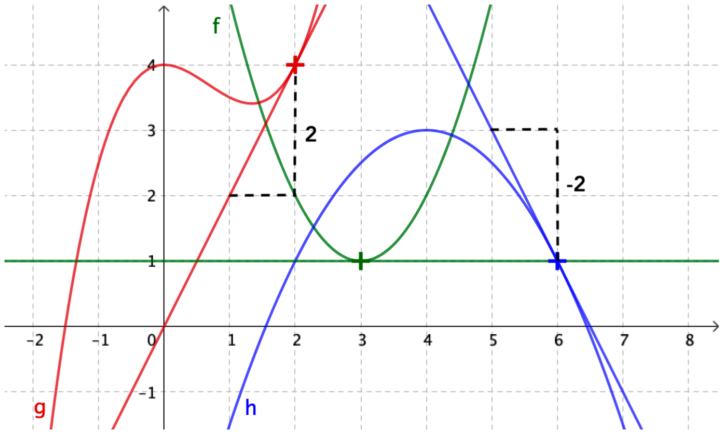
Vidéo https://youtu.be/f7AuwNAagAQ

a) On a représenté les fonctions f, g et h et trois tangentes dans un repère.
Lire graphiquement $f'(3)$, $g'(2)$ et $h'(6)$.
b) Tracer la tangente à la courbe de la fonction g en 1 tel que $g'(1) = -\frac{1}{2}$.

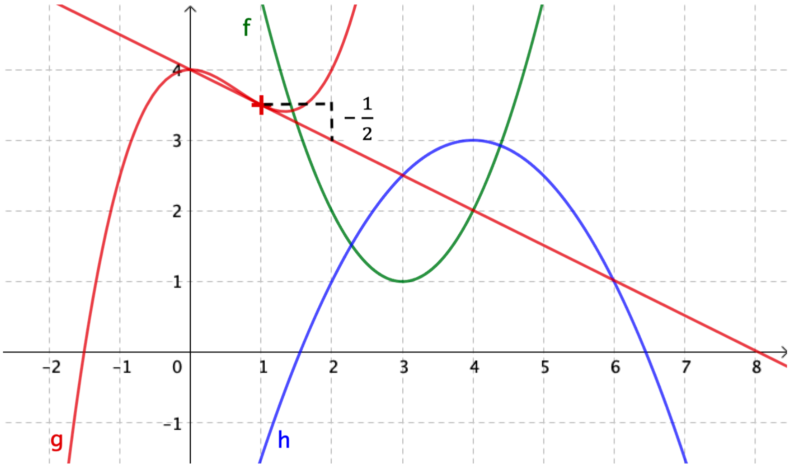


Correction

a) $f'(3) = 0$ en effet la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc sa pente est nulle.
$g'(2) = 2$
$h'(6) = -2$



b)



2) <u>Équation de la tangente</u>

<u>Propriété :</u> Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :
$y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point A$\left(a\,;f(a)\right)$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Méthode : Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo
Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse $x = 1$.

Correction

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

● On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$= \frac{(1+h)^2-5(1+h)+2-(1^2-5\times1+2)}{h}$
$= \frac{1+2h+h^2-5-5h+4}{h}$
$= \frac{-3h+h^2}{h}$
$= \frac{h(-3+h)}{h}$
$= -3+h$

Donc : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0} -3+h = -3+0 = -3$

Le nombre dérivé de f en 1 vaut -3 et on note : $f'(1) = -3$.

● On calcule $f(1)$:
$f(1) = 1^2 - 5\times1 + 2 = -2$

Une équation de la tangente en 1 est donc de la forme :
$y = -3(x-1) + (-2)$, soit :
$y = -3x + 3 - 2$
$y = -3x + 1$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1 est $y = -3x + 1$.