Plan du cours

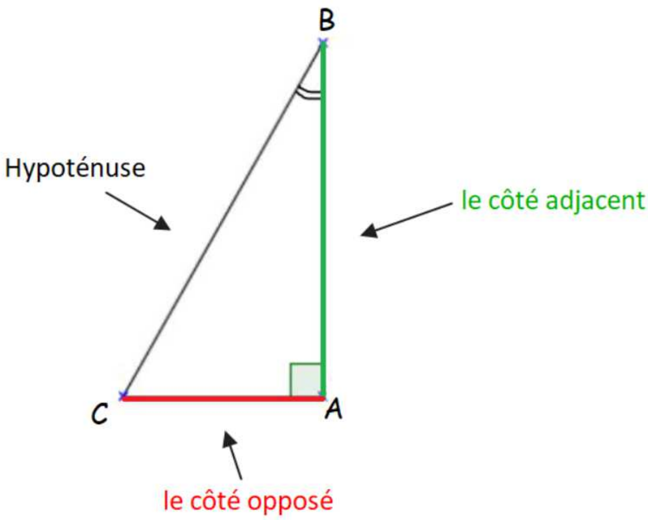
CHAPITRE : La trigonométrie

I. Vocabulaire

Soit ABC un triangle rectangle en A. **L'hypoténuse** est [BC].

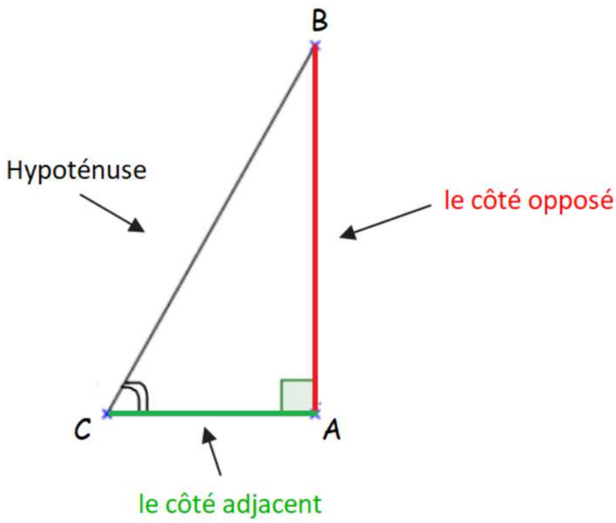
Les mots de vocabulaire suivant vont dépendre de l'angle que l'on choisi.

⇒ Si on regarde l'angle $\widehat{ABC}$:



Le **côté opposé** à l'angle $\widehat{ABC}$ est [AC].
Le **côté adjacent** à l'ange $\widehat{ABC}$ est [AB].

⇒ Si on regarde l'angle $\widehat{ACB}$:



Le **côté opposé** à l'angle $\widehat{ACB}$ est [AB].
Le **côté adjacent** à l'ange $\widehat{ACB}$ est [AC].

II. Définition de cosinus, sinus et tangente

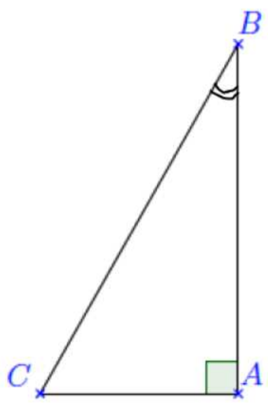
Définition

Soit ABC un triangle rectangle en A.

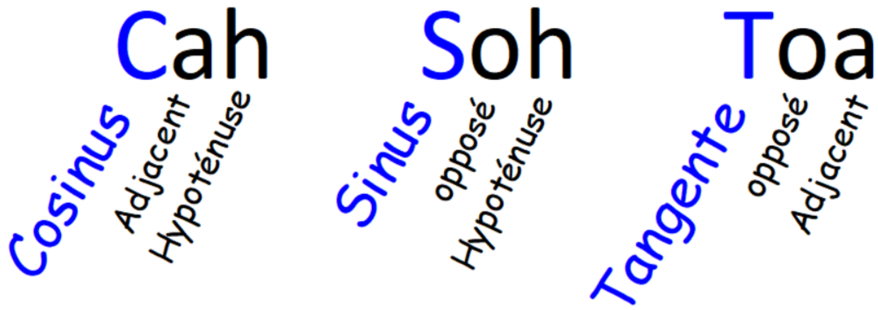
- $cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

- $sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

- $tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$



Moyen mnémotechnique de se souvenir de ces formules :



III. Quelques propriétés

Activité 1 : A l'aide de votre calculatrice, compléter les tableaux ci-dessous.

x (en degré)	5	30	45	60	90
$cosx$					

x (en degré)	5	30	45	60	90
$sinx$					

QUESTION : Que remarquez-vous sur les valeurs trouvées pour les cosinus et les sinus ?

Propriété

Dans un triangle rectangle, pour tout angle x, le cosinus et le sinus sont **toujours compris entre 0 et 1**.

$$0 < cosx < 1 \quad \text{et} \quad 0 < sinx < 1$$

Activité 2 :

x (en degré)	5	30	45	60	90
$(cosx)^2$					

x (en degré)	5	30	45	60	90
$(sinx)^2$					

QUESTION : Si vous n'avez rien remarqué, essayez d'additionner la valeur de $(cosx)^2$ avec la valeur de $(sinx)^2$ qui lui correspond. Que remarquez-vous ?

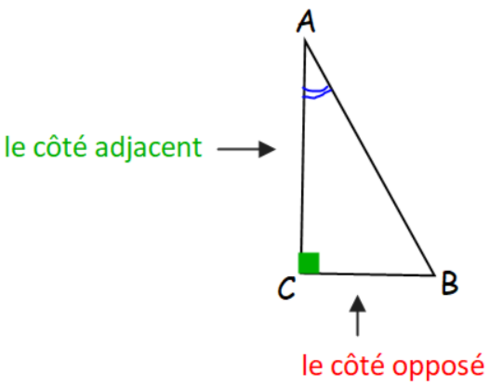
Propriété

Dans un triangle rectangle, pour tout angle aigu de mesure x,

$$(cosx)^2 + (sinx)^2 = 1$$

Démonstration :

Prenons un triangle ABC rectangle en C et considérons l'angle $\widehat{BAC}$.



- Exprimons le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

$$cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} \qquad sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

On remplace alors dans le calcul :

$$\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$

$$\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2}$$

$$\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}$$

Intéressons nous maintenant au numérateur de la fraction : $AC^2 + BC^2$

Nous sommes dans un triangle rectangle ici en C, le théorème de Pythagore s'applique donc.

On peut écrire : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

On revient alors à la fraction : $\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}$

On remplace : $\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AB^2}$

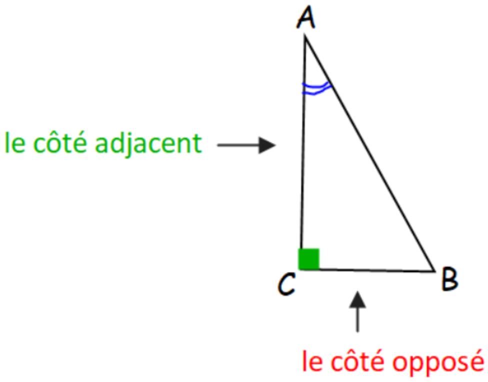
Ainsi, $\left(cos\widehat{BAC}\right)^2 + \left(sin\widehat{BAC}\right)^2 = 1$ **CQFD.**

Propriété

Dans un triangle rectangle, pour tout angle aigu de mesure x,

$$tanx = \frac{sinx}{cosx}$$

Démonstration :
Prenons un triangle ABC rectangle en C et considérons l'angle $\widehat{BAC}$.



- Exprimons le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

$$cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} \qquad sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

On remplace alors dans le calcul :

$$\frac{sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}}$$
$$\frac{sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = \frac{BC}{\cancel{AB}} \times \frac{\cancel{AB}}{AC}$$
$$\frac{sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = \frac{BC}{AC}$$
$$\frac{sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = tan\widehat{BAC}$$

CQFD.

IV. Applications

1. Calcul d'une longueur

(a) Soit IJK un triangle rectangle en K tel que IJ = 8 cm et $\widehat{KIJ}$ = 50°. Calculer KJ.

Le triangle EJK est rectangle en K.
Je connais l'angle $\widehat{KIJ}$ et l'hypoténuse du triangle [IJ] et je cherche la longueur du côté opposé([KJ])

J'utilise donc la formule du sinus :

$$sin\widehat{KIJ} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$
$$sin\widehat{KIJ} = \frac{KJ}{IJ}$$
$$sin 50° = \frac{KJ}{8}$$

D'après le produit en croix : $KJ = 8 \times sin 50°$

$$\boxed{KJ \approx 6,1cm}$$

(b) Soit DFE un triangle rectangle en E tel que DE = 7 cm et $\widehat{DFE}$ = 56°. Calculer FE.

Le triangle DFE est rectangle en E.
Je connais l'angle $\widehat{DFE}$ et son côté opposé [DE] et je cherche la longueur du côté adjacent([FE])

J'utilise donc la formule de la tangente :

$$tan\widehat{DFE} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$
$$tan\widehat{DFE} = \frac{DE}{FE}$$
$$tan 56° = \frac{7}{FE}$$

D'après le produit en croix : $FE = \frac{7 \times 1}{tan 56}$

$$\boxed{FE \approx 4,7cm}$$

2. Calcul d'un angle

(a) Soit LMN rectangle en N tel que LN = 6,5 cm et NM = 3 cm. Calculer $\widehat{LMN}$ puis en déduire la mesure de l'angle $\widehat{MLN}$.

<u>Calcul de l'angle $\widehat{LMN}$</u> :

Le triangle LMN est rectangle en N.
Je connais [MN] le côté adjacent de $\widehat{LMN}$ et [NL] le côté opposé de $\widehat{LMN}$ et je cherche l'angle $\widehat{LMN}$.

J'utilise donc la formule de la tangente :

$$tan\widehat{LMN} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$tan\widehat{LMN} = \frac{NL}{MN}$$

$$tan\widehat{LMN} = \frac{6,5}{3}$$

A l'aide de la calculatrice, je trouve :
$\widehat{LMN} = arctan(\frac{6,5}{3})$

Donc $\boxed{\widehat{LMN} \approx 65,2°}$

<u>Calcul de l'angle $\widehat{MLN}$</u> :

On sait que le triangle MLN est rectangle en N, donc la somme de ses angles aigus vaut 90°.

Donc $\widehat{MLN}$ = 90 - $\widehat{LMN}$

$\widehat{MLN}$ = 90 - 65,2

$\widehat{MLN}$ = 24,8 °

(b) Soit OPQ un triangle rectangle en O tel que OP = 5 cm et QP = 7 cm. Calculer $\widehat{OQP}$.

Le triangle OPQ est rectangle en O.
Je connais [OP] le côté opposé de $\widehat{OQP}$ et [QP] l'hypoténuse et je cherche l'angle $\widehat{OQP}$.

J'utilise donc la formule du sinus :

$$sin\widehat{OQP} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$sin\widehat{OQP} = \frac{OP}{QP}$$

$$sin\widehat{OQP} = \frac{5}{7}$$

A l'aide de la calculatrice, je trouve :
$\widehat{OQP} = arcsin(\frac{5}{7})$

Donc $\boxed{\widehat{OQP} \approx 45,6°}$