14 Sections planes de solides


Carrière de marbre en Grèce.

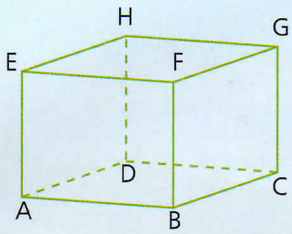
Une **carrière** est un endroit d'où sont extraits des matériaux de construction : pierres, sable ou différents minerais non métalliques ou carbonifères.
Les **blocs de pierre** extraits sont des parallélépipèdes rectangles.
Si on sectionne ces blocs, les **coupes** obtenues peuvent être **rectangulaires**.

Le mot « carrière » vient du latin **quadrus**, « carré ». Les carrières peuvent être à ciel ouvert (comme ici) ou souterraines.

Si l'on coupe un cube par un **plan perpendiculaire** à une diagonale du cube, on constate que les sections obtenues peuvent être des **triangles** ou des **hexagones**.

Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous : 	l'arête [AE] est perpendiculaire à la face CDHG	l'arête [AE] est parallèle à la face CDHG	l'arête [AE] est parallèle à l'arête [HG]
2		le triangle AEG est rectangle en E	le triangle AEG est isocèle en A	le triangle AEG est équilatéral
3		les faces ABFE et DCGH sont parallèles	les faces ABFE et DCGH sont perpendiculaires	les faces ABFE et DCGH ne sont ni parallèles ni perpendiculaires
4	Si SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de hauteur SO, alors :	le triangle SOA est isocèle en S	le triangle SOA est rectangle en S	le triangle SOA est rectangle en O
5	Le volume d'un cube d'arête 1 dm est égal à :	10 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm	100 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm	1 000 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm

Exercice 1 **1** **a.** Construire un triangle MNL tel que : MN = 9 cm, ML = 5 cm et NL = 7 cm.

b. Placer le point R du segment [MN] tel que : $MR = \frac{2}{3}MN$.

c. Tracer la droite passant par R et parallèle à (NL). Elle coupe le segment [ML] en S.

2 Calculer les longueurs MS et RS. On donnera les valeurs exactes, puis les arrondis au mm.

Exercice 2 Soit un triangle OAB isocèle en O. On appelle H le milieu de [AB].
On donne : OA = OB = 6 cm et OH = 4 cm.

1 Quelle est la nature du triangle AOH ?

2 Calculer la longueur AB. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

Exercice 3 On considère un cône de révolution de sommet S, de hauteur 5 cm et de rayon de base 4 cm.

1 Calculer la longueur d'une génératrice. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

2 Calculer le volume de ce cône. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm^3.

Exercice 4 On considère une pyramide régulière SABCD de sommet S, de hauteur 8 cm et dont la base ABCD est un carré de côté 12 cm de centre O.

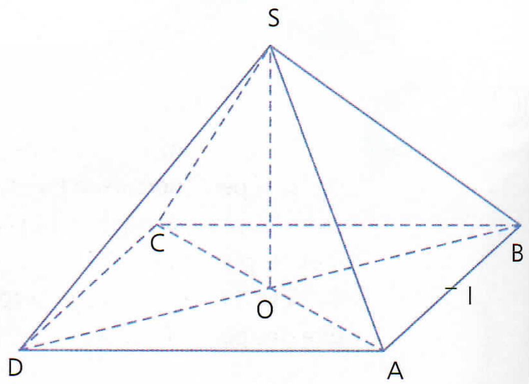
On appelle I le milieu de [AB].

1 **a.** Quelle est la nature du triangle SOI ?

b. Calculer la longueur SI.

c. En déduire l'aire de la face ASB, puis l'aire de la pyramide SABCD.

2 Calculer le volume de la pyramide SABCD.



Activités

Activité 1 Droites et plans dans l'espace

A Droite et plan

1 **a.** Tracer sur une feuille de papier deux points A et B, puis tracer la droite (AB). On considère que cette feuille représente un plan $\mathcal{P}$.
b. Tous les points de la droite (AB) appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$?
On dit que la droite (AB) est **incluse**, ou contenue, dans le plan $\mathcal{P}$.

2 **a.** Placer un point C sur la feuille qui n'appartient pas à la droite (AB), puis tracer la droite d parallèle à la droite (AB) qui passe par le point C.
b. La droite d est-elle incluse dans le plan $\mathcal{P}$?
c. Existe-t-il des droites parallèles à la droite (AB) qui ne soient pas incluses dans le plan $\mathcal{P}$?

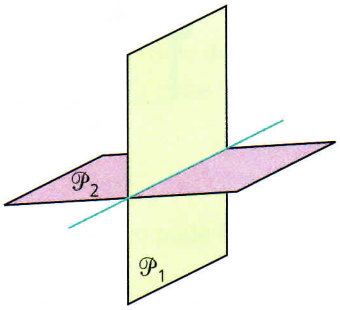
Par trois points A, B, C non alignés ne passe qu'**un seul plan**. On dit que ces trois points définissent un plan $\mathcal{P}$, noté (ABC).

Lorsqu'une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, on dit qu'elle est **parallèle à ce plan**. Elle peut être incluse ou non dans ce plan.
d. Existe-t-il des droites passant par le point C et qui ne sont pas parallèles au plan $\mathcal{P}$?
On dit que ces droites sont **sécantes en C au plan $\mathcal{P}$**.

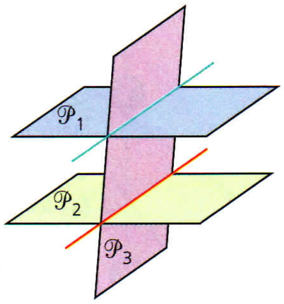
B Plans parallèles et plans sécants

…n dit que deux …ns sont **parallèles** …s sont confondus ou …s n'ont aucun point en commun.
…x plans qui ne sont …s parallèles sont …pelés des plans **sécants**.

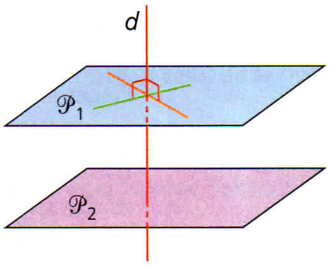
1 La figure ci-contre représente deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui ne sont pas parallèles. Quelle semble être la nature de leur intersection ?



2 La figure ci-contre représente deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ coupés par un plan $\mathcal{P}_3$. Que peut-on dire des intersections du plan $\mathcal{P}_3$ avec les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?



3 La figure ci-contre représente deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ coupés par une droite d perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_1$.
a. Si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, que peut-on dire de la droite d et du plan $\mathcal{P}_2$?
b. Si la droite d est aussi perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_2$, que peut-on dire des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?



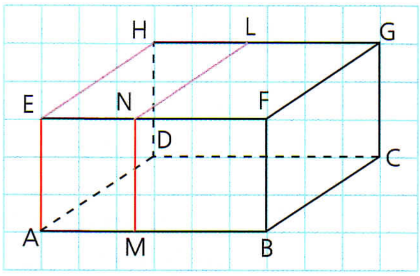
Activité 2 Section d'un parallélépipède rectangle par un plan

A Le plan est parallèle à une face

1 Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre, on a placé les points M, N et L tels que : M ∈ [AB], N ∈ [EF], L ∈ [HG], (MN) // (AE) et (NL) // (EH).

a. À quelles faces du parallélépipède le plan (MNL) est-il parallèle ?

b. Reproduire la figure et la compléter en traçant la section MNLR du parallélépipède par le plan (MNL).



2 Quelle semble être la nature et les dimensions de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ?

B Le plan est parallèle à une arête

1 Construire un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et placer les points M, N et L tels que : M ∈ [AB], N ∈ [EF], L ∈ [HG], (MN) // (AE) et (NL) non parallèle à (EH).

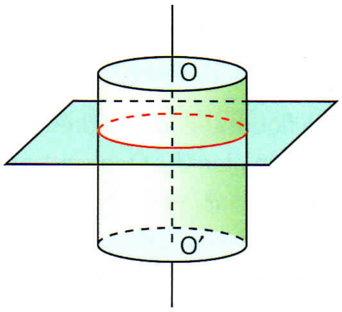
a. À quelles arêtes le plan (MNL) est-il parallèle ?

b. Compléter la figure en traçant la section MNLR du parallélépipède par le plan (MNL).

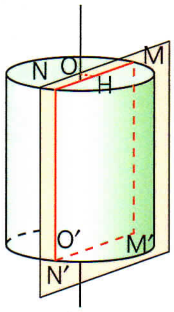
2 Quelle semble être la nature de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête ?

Activité 3 Section d'un cylindre de révolution

Les figures ci-contre représentent des cylindres de révolution coupés par un plan.



Le plan est parallèle aux bases



Le plan est parallèle à l'axe

1 Quelle semble être la nature de la section d'un cylindre de révolution par un plan :

a. lorsque le plan est parallèle aux bases ?

b. lorsque le plan est parallèle à l'axe ?

2 On considère un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm coupé par un plan parallèle à l'axe tel que la distance du plan à l'axe du cylindre est égale à 2 cm.

a. Dessiner en vraie grandeur la base de centre O.
Placer le point H tel que OH soit la distance de l'axe du cylindre au plan, puis les points M et N tels que [MN] soit l'intersection de la base de centre O du cylindre et du plan.

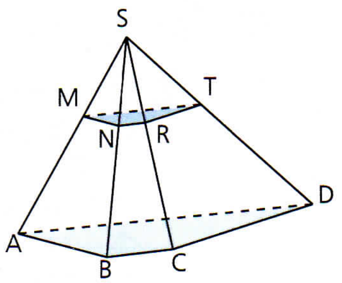
b. Calculer la longueur MN. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

c. Dessiner la section en vraie grandeur.

d. Que peut-on dire de la section si OH = 0 cm ? Si OH = 3 cm ?

Activité 4 Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

La figure ci-contre représente une pyramide SABCD coupée par un plan (MNR) parallèle à la base. Les points M, N, R et T appartiennent respectivement aux segments [SA], [SB], [SC] et [SD].



1 Le plan (MNR) étant parallèle à la base, que peut-on dire des droites (MN) et (AB) ? (NR) et (BC) ? (RT) et (CD) ? (MT) et (AD) ?

2 Écrire les égalités de quotients obtenues en appliquant le théorème de Thalès aux triangles ASB, BSC, CSD et ASD.

3 En déduire que la section MNRT est une réduction de la base ABCD.

4 Montrer que les faces latérales de la pyramide SMNRT sont aussi des réductions de même cœfficient des faces latérales de la pyramide SABCD.

On obtient un résultat similaire pour la **section d'un cône** de révolution par un plan parallèle à la base.

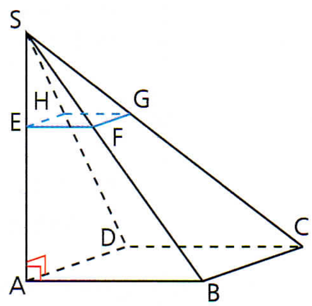
Activité 5 Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes

ir le chapitre 10 r se rappeler les ffets d'un agrandissement ou d'une éduction sur l'aire d'une figure.

1 **a.** Calculer le volume d'un cube $\mathscr{C}_1$ d'arête 2 cm et d'un cube $\mathscr{C}_2$ d'arête 6 cm.
b. Par quel nombre faut-il multiplier la longueur de l'arête du cube $\mathscr{C}_1$ pour obtenir celle du cube $\mathscr{C}_2$?
c. Par quel nombre faut-il multiplier le volume du cube $\mathscr{C}_1$ pour obtenir celui du cube $\mathscr{C}_2$?

2 **a.** On considère un parallélépipède rectangle $\mathscr{P}$ de dimensions a, b et c.
Exprimer son volume en fonction de a, b et c.
b. On considère l'agrandissement $\mathscr{P}'$ (ou la réduction) de facteur k du parallélépipède $\mathscr{P}$.
Exprimer les dimensions du parallélépipède $\mathscr{P}'$ en fonction de k, a, b et c.
c. Exprimer le volume $\mathscr{V}'$ du parallélépipède $\mathscr{P}'$ en fonction du volume $\mathscr{V}$ du parallélépipède $\mathscr{P}$.

3 On considère la pyramide SABCD ci-contre de sommet S, de hauteur SA et de base rectangulaire ABCD coupée par le plan (EFG) parallèle à la base.
On donne :
SA = 8 cm, SE = 3 cm, AB = 5 cm et BC = 4 cm.



a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.
b. Expliquer pourquoi EFGH est une réduction de ABCD.
Calculer le facteur de réduction k.
c. Calculer les longueurs EF et FG.
d. Quelle est la hauteur de la pyramide SEFGH ?
Calculer son volume.
e. Par quel nombre faut-il multiplier le volume de la pyramide SABCD pour obtenir celui de la pyramide SEFGH ? Vérifier que ce nombre est égal à k^3.

4 *De manière générale, soient $\mathscr{P}$ un solide et $\mathscr{P}'$ son agrandissement ou sa réduction de facteur k. Par quel nombre faut-il multiplier le volume de $\mathscr{P}$ pour obtenir celui de $\mathscr{P}'$?*