Plan du cours

Activité d'introduction 1

1. Développer les expressions suivantes :

$(x+3)^2$ = (x + 3)(x + 3)= $x^2+3x+3x+9$

$(x+3)^2 = x^2+6x+9$

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2-2x-2x+4$

$(x-2)^2 = x^2-4x+4$

$(4x+5)^2 = (4x+5)(4x+5) = 16x^2+20x+20x+25$

$(4x+5)^2 = 16x^2+40x+25$

$(2x-9)^2 = (2x-9)(2x-9) = 4x^2-18x-18x+81$

$(2x-9)^2 = 4x^2-36x+81$

2. En déduire une formule pour développer plus rapidement qu'avec la double distributivité.

On remarque que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

I. Développer avec les identités remarquables

1. Première et deuxième identités remarquables : carré d'une somme et carré d'une différence

Propriété

Pour tous nombres a et b,

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Démonstration : Pour tous nombres a et b, on a :

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2$

$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$(a-b)^2 = a^2-ab-ba+b^2$

$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$

Exemples : Développer les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$T = (x-3)^2$
$T = x^2-2\times x\times 3+3^2$
$T = x^2-6x+9$

$U = (2x+5)^2$
$U = (2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2$
$U = 4x^2+20x+25$

$L = (9-x)^2$
$T = 9^2-2\times 9\times x+x^2$
$T = 81-18x+x^2$

Activité d'introduction 2

1. Développer les expressions suivantes :

$(x+3)(x-3) = x^2+3x-3x-9$

$(5-x)(5+x) = 25+5x-5x-x^2$

$(3x-4)(3x+4) = 9x^2+12x-12x-16$

$(x+3)(x-3) = x^2-9$

$(5-x)(5+x) = 25-x^2$

$(3x-4)(3x+4) = 9x^2-16$

2. En déduire une formule pour développer plus rapidement qu'avec la double distributivité.

On remarque que $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

2. Troisième identité remarquable

Propriété

Pour tous nombres a et b,

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Démonstration : Pour tous nombres a et b, on a :

$$(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2$$
$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

Exemples : Développer les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$J = (x+1)(x-1)$

$J = x^2-1$

$O = (2-3x)(2+3x)$
$O = 2^2-(3x)^2$
$O = 4-9x^2$

$I = (2x-7)(2x+7)$
$I = (2x)^2-7^2$
$I = 4x^2-49$

3. Développements plus difficiles

Développer puis réduire $A = (2x+6)^2 + (x+1)(x-1)$

On reconnait les identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

On obtient :

$A = (2x+6)^2 + (x+1)(x-1)$

$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2 + x^2 - 1$

$A = 4x^2 + 24x + 36 + x^2 - 1$

$A = 4x^2 + 24x + 36 + x^2 - 1$ *(Ensuite, on réduit l'expression)*

$A = 5x^2 + 24x + 35$

Exercice d'application 1

1. Développer et réduire B : $B = (x-7)(x+7) - (x-5)^2$

$B = x^2 - 7^2 - [x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2]$

$B = x^2 - 49 - [x^2 - 10x + 25]$

$B = x^2 - 49 - x^2 + 10x - 25]$ *(On change les signes pour supprimer les parenthèses)*

$B = 10x - 74$

2. Développer et réduire F puis calculer F pour x = -1 : $F = (x+4)^2 - 2(5x+1)(5x-1)$

$F = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 - 2[(5x)^2 - 1]$

$F = x^2 + 8x + 16 - 2[25x^2 - 1]$ *(On développe)*

$F = x^2 + 8x + 16 - 50x^2 + 2$ *(On réduit)*

$B = -49x^2 + 8x + 18$

3. Calculer 58^2, 21^2 et 73×67.

$58^2 = (60-2)^2 = 60^2 - 2 \times 60 \times 2 + 2^2$
$58^2 = 3600 - 240 + 4$
$58^2 = 3364$

$21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2$
$21^2 = 400 + 40 + 1$
$21^2 = 441$

$73 \times 67 = (70+3)(70-3)$
$73 \times 67 = 70^2 - 3^2$
$73 \times 67 = 4900 - 9$
$73 \times 67 = 4891$

II. Factoriser avec les identités remarquables

1. Première et deuxième identités remarquables : carré d'une somme et carré d'une différence

Propriété

Pour tous nombres a et b, on a :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$K = x^2 + 2x + 1$ $\quad H = 9x^2 + 30x + 25$ $\quad D = x^2 - 2x + 1$ $\quad Y = 4x^2 - 12x + 9$

$\rightarrow K = x^2 + 2x + 1$

Je remarque que c'est la première identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = x^2$ Donc $a = x$ $\quad b^2 = 1$ Donc $b = 1$

Je peux donc factoriser : $\boxed{K = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow H = 9x^2 + 30x + 25$

Je remarque que c'est la première identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 9x^2$ Donc $a = 3x$ $\quad b^2 = 25$ Donc $b = 5$

Je peux donc factoriser : $\boxed{H = 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow D = x^2 - 2x + 1$

Je remarque que c'est la deuxième identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = x^2$ Donc $a = x$ $\quad b^2 = 1$ Donc $b = 1$

Je peux donc factoriser : $\boxed{D = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow Y = 4x^2 - 12x + 9$

Je remarque que c'est la deuxième identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 4x^2$ Donc $a = 2x$ $\quad b^2 = 9$ Donc $b = 3$

Je peux donc factoriser : $\boxed{Y = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

2. Troisième identité remarquable

Propriété

Pour tous nombres a et b, on a :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$M = x^2 - 4$ $\quad B = 25x^2 - 49$ $\quad G = 81 - 121x^2$

$\rightarrow M = x^2 - 4$

Je remarque que c'est la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = x^2$ Donc $a = x$ $\qquad$ $b^2 = 4$ Donc $b = 2$

Je peux donc factoriser : $\boxed{M = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow B = 25x^2 - 49$

Je remarque que c'est la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 25x^2$ Donc $a = 5x$ $\qquad$ $b^2 = 49$ Donc $b = 7$

Je peux donc factoriser : $\boxed{B = 25x^2 - 49 = (5x+7)(5x-7)}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow G = 81 - 121x^2$

Je remarque que c'est la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 81$ Donc $a = 9$ $\qquad$ $b^2 = 121x^2$ Donc $b = 11x$

Je peux donc factoriser : $\boxed{G = 81 - 121x^2 = (9+11x)(9-11x)}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

3. Factorisations plus difficiles

Factoriser et réduire l'expression suivante : $H = (2x+1)^2 - (4x+2)^2$

SOLUTION

On souhaite factoriser, donc dans ce cas là, nous allons utiliser la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
(Si on avait voulu développé, on aurait utilisé la 1ère et la 2ème.)

$H = \underbrace{(2x+1)^2}_{a^2} - \underbrace{(4x+2)^2}_{b^2}$

On peut maintenant identifier les valeurs de a et de b :

$a^2 = (2x+1)^2$ Donc $a = 2x+1$ $\qquad$ $b^2 = (4x+2)^2$ Donc $b = 4x+2$

On peut donc factoriser : $H = (2x+1)^2 - (4x+2)^2 = [\underbrace{(2x+1)}_{a} + \underbrace{(4x+2)}_{b}][\underbrace{(2x+1)}_{a} - \underbrace{(4x+2)}_{b}]$

On simplifie ensuite entre les crochets : $H = [2x+1+4x+2][2x+1 \underbrace{-4x-2}_{\text{on pense à changer les signes}}]$

$\boxed{H = (6x+3)(-2x-1)}$

Exercice d'application 2

1. Factoriser et réduire l'expression suivante : $I = (x-4)^2 - (5-x)^2$

On utilise la même méthode que précédemment.
$a = x - 4$ et $b = 5 - x$

On peut donc factoriser : $I = (x-4)^2 - (5-x)^2 = [\underbrace{(x-4)}_{a} + \underbrace{(5-x)}_{b}][\underbrace{(x-4)}_{a} - \underbrace{(5-x)}_{b}]$

On simplifie : $I = (x-4+5-x)(x-4-5+x)$ *On oublie pas de changer les signes dans le 2ème crochet*

$\boxed{I = 1(2x-9) = 2x-9}$

2. Factoriser et réduire l'expression suivante : $G = 81 - (11x-7)^2$

On utilise la même méthode que précédemment.
$a^2 = 81$ Donc $a = 9$ et $b = 11x - 7$

On peut donc factoriser : $G = 81 - (11x-7)^2 = [\underbrace{9}_{a} + \underbrace{(11x-7)}_{b}][\underbrace{9}_{a} - \underbrace{(11x-7)}_{b}]$

On simplifie : $G = (9+11x-7)(9-11x+7)$ *On oublie pas de changer les signes dans le 2ème crochet*

$\boxed{G = (2+11x)(16-11x)}$

3. Factoriser et réduire l'expression suivante : $M = 49 + 121s^2 + 154s$

On reconnaît ici la première identité remarquable mais dans le désordre.

$M = 49 + 121s^2 + 154s = 121s^2 + 154s + 49$

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 121s^2$ Donc $a = 11s$ $\qquad$ $b^2 = 49$ Donc $b = 7$

Je peux donc factoriser : $\boxed{M = 121s^2 + 154s + 49 = (11s+7)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)