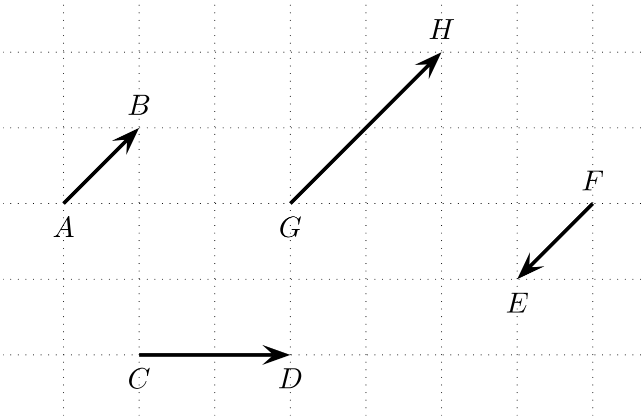
EXERCICE 1 :

Sur la figure suivante, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.

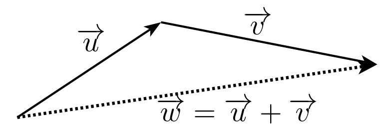
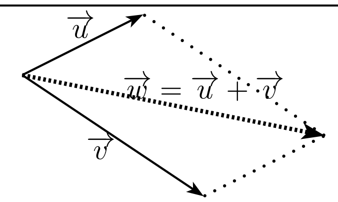


EXERCICE 2 :

Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

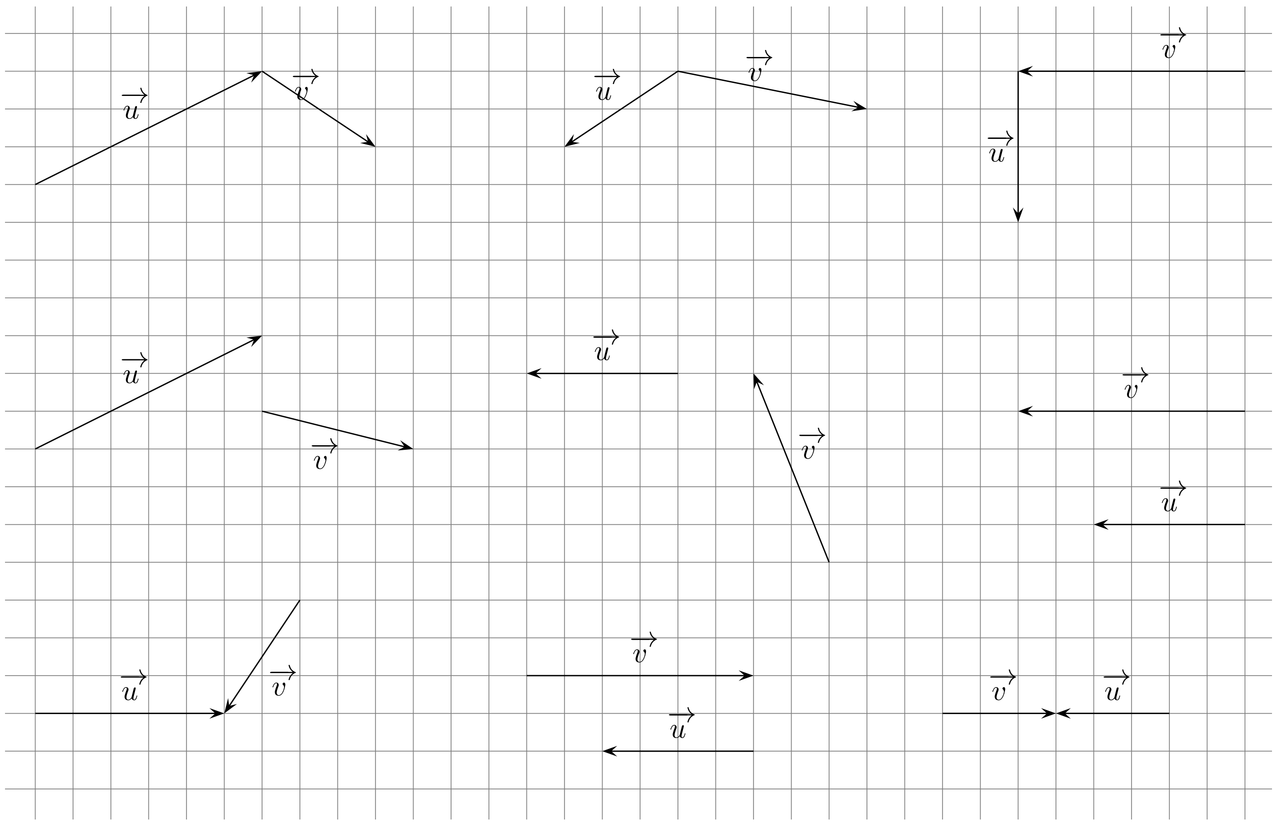
- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots} = \ldots\ldots + \overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R\ldots} + \overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE} = \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots D} + \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y} = \overrightarrow{XJ} + \ldots\ldots + \overrightarrow{R\ldots}$

MÉTHODE 1 : Construire la somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

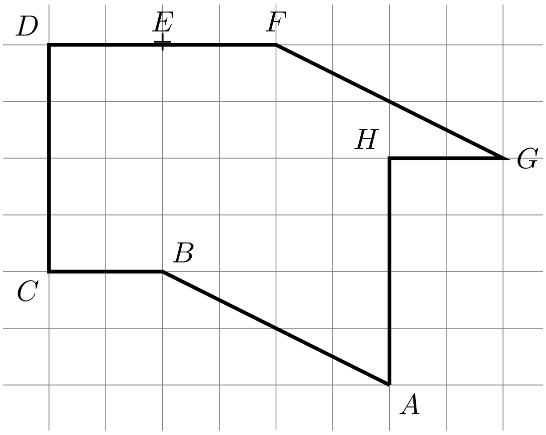
Mise bout à bout - Théorème de Chasles	Règle du parallélogramme
① Tracer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. *On place les vecteurs bout à bout, c'est-à-dire que $\overrightarrow{v}$ a comme origine l'extrémité de $\overrightarrow{u}$.* ② Tracer $\overrightarrow{w}$ *Le vecteur somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a comme origine l'origine de $\overrightarrow{u}$ et comme extrémité l'extrémité de $\overrightarrow{v}$*	① Tracer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. *On trace des représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ayant même origine.* ② Tracer $\overrightarrow{w}$ *Le vecteur somme $\overrightarrow{w}$ a pour origine et extrémité celles de la diagonale du parallélogramme ainsi créé.*
	

EXERCICE 3 :

Dans chacun des cas de la figure suivante, construire en couleur le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



EXERCICE 4 : On considère le motif représenté ci-contre.



① Citer tous les vecteurs égaux :

(a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif ;

(b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.

② En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$.

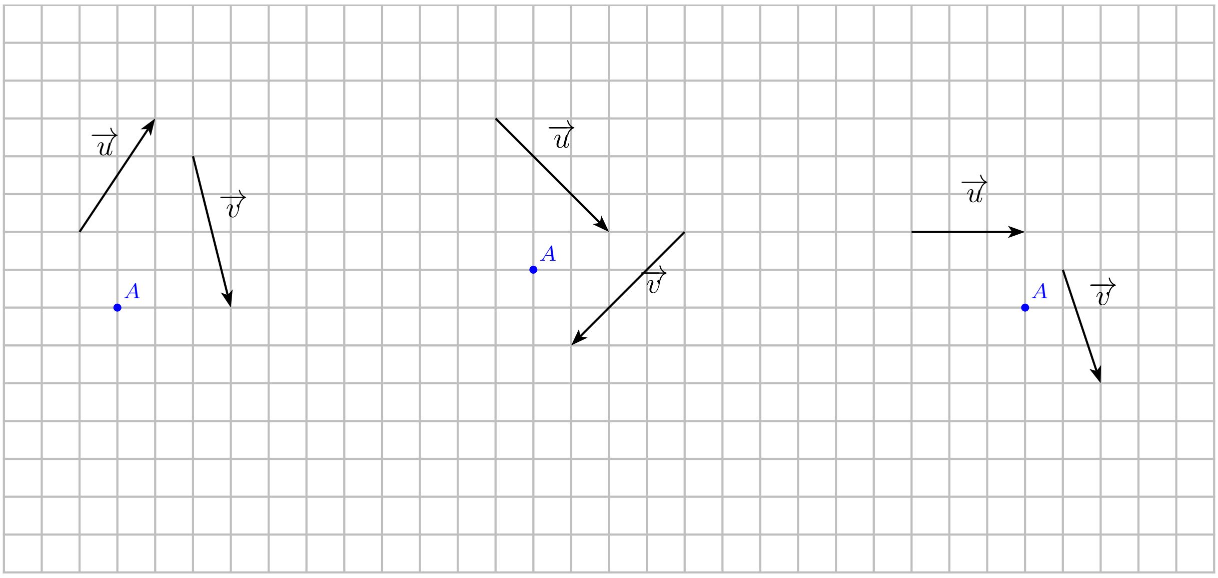
③ En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ (d) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF}$

(b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

(c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ (e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB}$

EXERCICE 5 : Dans chacun des cas de la figure suivante, construire en couleur les vecteur $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{z}$ d'origine A tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.



EXERCICE 6 : Dans chacun des cas suivants, construisez sur votre cahier un représentant des vecteurs :

- $\overrightarrow{w}$ d'origine A tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- $\overrightarrow{z}$ d'origine B tel que $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

① $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $A(2;5)$ $B(-1;0)$

② $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $A(-2;3)$ $B(3;-2)$

③ $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $A(3;4)$ $B(2;-1)$

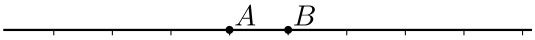
MÉTHODE 2 : Produit d'un vecteur par un réel $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$

① selon le signe de λ, on détermine si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens ou de sens contraire.

② l'égalité de vecteur induit une égalité de normes : $||\overrightarrow{v}|| = |\lambda| \times ||\overrightarrow{u}||$
où $|\lambda|$ est la **valeur absolue** du réel λ, c'est la valeur de la distance à zéro du nombre λ.
Ex : $|-3| = 3$; $|1.5| = 1.5$; $|-10| = 10$ ...

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivant, représenter le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que :

① $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

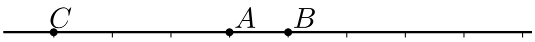


⋆ $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, $-3 < 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont deux vecteurs de **sens opposés**.
Le point C est donc du côté opposé à B par rapport à A sur (AB).

⋆ on sait également que $||\overrightarrow{AC}|| = |-3| \times ||\overrightarrow{AB}||$ donc :

$$AC = 3 \times AB$$

.



② $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

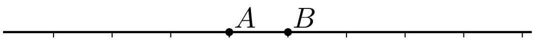
⋆ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{3} > 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont deux vecteurs de **même sens**.
Le point C est donc du même côté que B par rapport à A sur (AB).

⋆ on sait également que $||\overrightarrow{AC}|| = |\frac{1}{3}| \times ||\overrightarrow{AB}||$ donc :

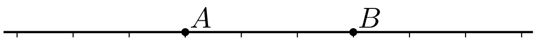
$$AC = \frac{1}{3} \times AB$$

Exercice 8 : Dans chacun des cas suivant, représenter le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que :

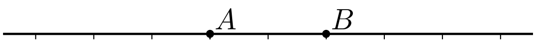
① $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$



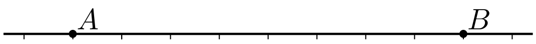
② $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$



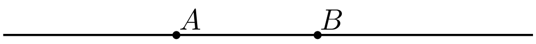
③ $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



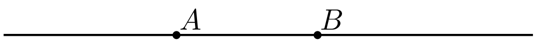
④ $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB}$



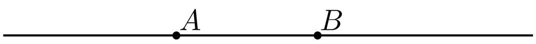
⑤ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



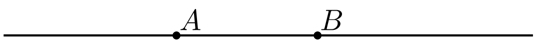
⑥ $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



⑦ $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

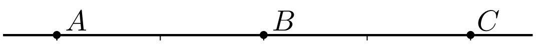


⑧ $\overrightarrow{AC} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$

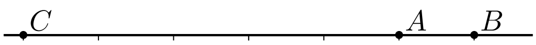


Exercice 9 : Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans chacun des cas suivant :

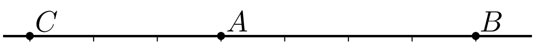
①



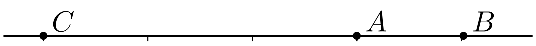
②



③



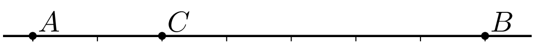
④



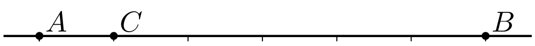
⑤

⑥

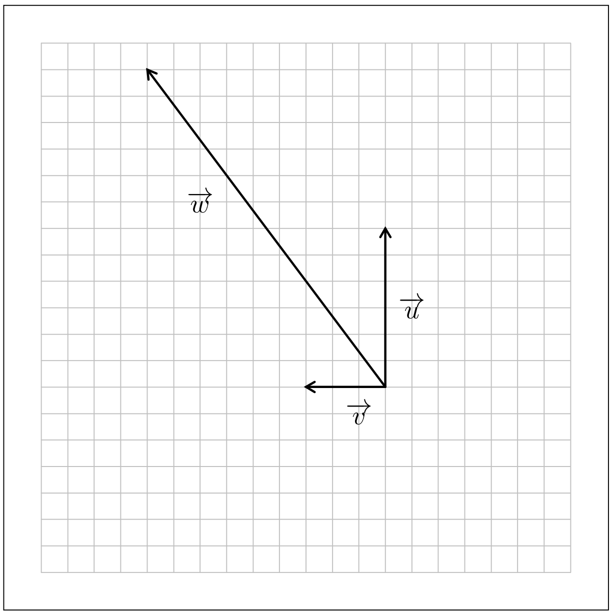
⑦

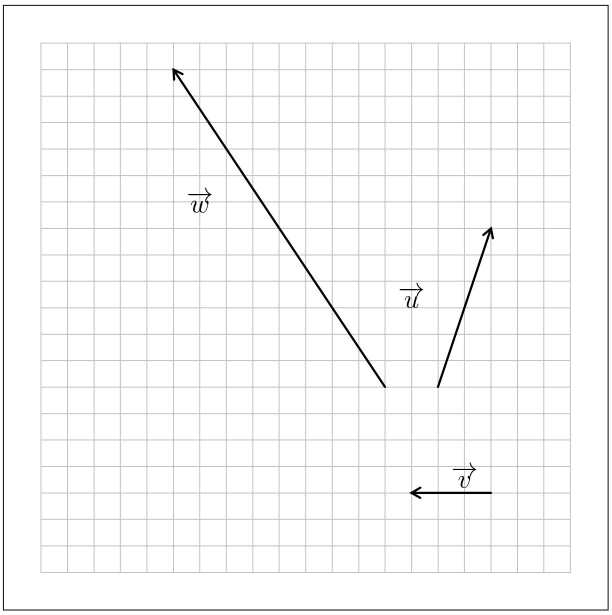


⑧



EXERCICE 10 : Dans chaque cas, exprimer $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, puis exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$:





MÉTHODE 3 : Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

① on identifie à l'aide d'un schéma ou du dessin dans un repère les deux vecteurs qui doivent être égaux. ⚠ à l'ordre des points

② si on ne les connaît pas, on calcule les coordonnées des vecteurs qui nous intéressent.

③ on conclut à l'aide du théorème du cours

EXERCICE 11 : Soient $A(-3;1)$, $B(2;3)$, $C(1;-1)$, $D(-4;-3)$.

① Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

② Soient E et F deux points tels que $DCFE$ soit un parallélogramme.
Montrer que $ABFE$ est un parallélogramme.

EXERCICE 12 : Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points :

$$\text{E}(-3\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(2\ ;\ 0)\ ;\ \text{T}(0\ ;\ 4)\ \text{et}\ \text{U}(5\ ;\ 4).$$

① Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{UE}$ et $\overrightarrow{BU}$.

② (a) Calculer la longueur ET, puis la longueur EB.

(b) Quelle est la nature du quadrilatère $TUBE$? Justifier.

EXERCICE 13 : On donne $A(-3;5)$, $B(6;1)$ et $C(2;-4)$.

① Déterminer les coordonnées du point D telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

② Déterminer les coordonnées du point E telles que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.

Correction :

① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées.
En posant $D(x;y)$, on obtient :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} 9 = x - 2 \\ -4 = y + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9 + 2 \\ y = -4 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11 \\ y = -8 \end{cases}.$$

On obtient $D(11; -8)$.

② On a les coordonnées de vecteurs suivantes :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$.
De plus, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 9 + 2 \times 5 \\ -4 + 2 \times (-9) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 19 \\ -22 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 6 - x \\ 1 - y \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ si et seulement si le systéme suivant est vérifié :

$$\begin{cases} 19 = 6 - x \\ -22 = 1 - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 - 19 \\ y = 1 + 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -13 \\ y = 23 \end{cases}.$$

On obtient $E(-13; 23)$.

EXERCICE 14 : On donne $A(1; 6)$, $B(-6; 3)$ et $C(-4; 2)$.

① Déterminer les coordonnées du point D telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

② Déterminer les coordonnées du point E telles que $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.

MÉTHODE 4 : Calculer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme

① on identifie à l'aide d'un schéma ou du dessin dans un repére les deux vecteurs qui doivent être égaux.

② on calcule les coordonnées du vecteur dont on connaît l'origine et l'extrémité.

③ on se ramène à une égalité de coordonnées de vecteurs

④ on résout les équations.

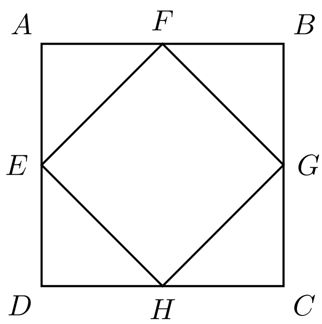
EXERCICE 15 : Soient $A(-3; 1)$, $B(2; 3)$, $C(6; -3)$.
Calculer les coordonnées de D tel que $ACDB$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 16 : Soient $A(-1; 0)$, $B(2; 1)$ et $C(3; -2)$.

① Déterminer la nature du triangle ABC. On justifiera.

② Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

EXERCICE 17 : On s'intéresse à la figure ci-dessous, composée d'un carré $ABCD$ de côté 2 unités et du carré formé par les milieux de ses côtés.



① Déterminer les normes des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FH}$.

② Trouver et nommer deux vecteurs opposés à chacun des vecteurs précédents.

③ Dans chacun des cas suivants, préciser si les deux vecteurs sont colinéaires ou non. S'ils le sont, écrire les deux égalités qui les unit. Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et vérifient $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$;
- $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FE}$;
- $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EH}$;
- $3\overrightarrow{FG}$ et $2\overrightarrow{EH}$;
- $-\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG}$.

EXERCICE 18 :

En utilisant la proposition du cours, déterminer parmi les paires de vecteurs ci-dessous celles qui sont composées de vecteurs colinéaires.

① $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$ ③ $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix}$ ⑤ $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$

② $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ ④ $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-18\end{pmatrix}$ ⑥ $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$

MÉTHODE 5 : Démontrer que trois points A,B et C sont alignés

① on va chercher à montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

② on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs

③ on calcule de déterminant des deux vecteurs

④ on conclut avec le théorème du cours

EXERCICE 19 : Soit le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les points suivants sont-ils alignés ?

① $A(2;-3)$, $B(6;-1)$ et $C(8;0)$ ② $C(1;0)$, $D(0;-2)$ et $E(-3;-8)$ ③ $K(4;1)$, $F(-3;-8)$ et $Z(2;-\frac{2}{3})$

MÉTHODE 6 :

Montrer que deux droites (AB) et (CD)sont parallèles

① on va chercher à montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

② on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs

③ on calcule de déterminant des deux vecteurs

④ on conclut avec le théorème du cours

EXERCICE 20 : Soient $A(-3;-1)$, $B(1:1)$, $C(-3;-3)$ et $D(3;0)$.

Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction :

⋆ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-3)\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-3)\\0-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

⋆ on vérifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\begin{vmatrix}4&6\\2&3\end{vmatrix}=4\times3-2\times6=12-12=0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que (AB) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 21 :

Soient $A(-7;4)$, $B(-4;10)$, $C(10;13)$ et $D(6;5)$ des points dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

(b) En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

② Soient I le point tel que $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{AD}$, J et K les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

(a) Déterminer les coordonnées de I.

(b) Déterminer les coordonnées de J et K.

(c) Démontrer que les points I,J et K sont alignés.

Exercice 22 : Soient $A(-4;2)$, $B(5;-2)$ et $C(2,-4)$.

① $F(-1;y)$. Déterminer x pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ soient colinéaires.

② $F(x;-2)$. Déterminer x pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ soient colinéaires.

Correction du ① $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$ et, comme $F(-1;y)$, on a également $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}x_F-x_C\\y_F-y_C\end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-3\\y+4\end{pmatrix}$.

Or, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$.

Ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires si et seulement si

$$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CF})=\begin{vmatrix}9 & -3\\-4 & y+4\end{vmatrix}=9(y+4)-(-4)(-3)=0 \iff 9y+36-12=0$$
$$\iff 9y=12-36$$
$$\iff 9y=-24$$
$$\iff y=-\frac{24}{9}=-\frac{8}{3}$$

On obtient $F(-1;-\frac{8}{3})$.

Méthode 7 : Réduire une somme de vecteurs à l'aide de la Relation de Chasles

① il faut écrire les termes de façon à pouvoir utiliser la relation de Chasles, c'est à dire avoir des paires de vecteurs dont une extrémité et une origine sont communes. On pensera à :
- ⋆ transformer les différences en sommes avec par exemple : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$...
- ⋆ changer l'ordre des termes : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$....

② on applique la relation de Chasles pour réduire les écritures

Exercice 23 : Simplifier les sommes :

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$$

Correction :
- ⋆ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$
- ⋆ $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$

Exercice 24 :

① Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.
(a) $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$
(b) $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
(c) $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

② Démontrer que pour tous points O, A, B et C : $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

③ $ABCD$ est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$

Exercice 25 (Sur feuille blanche) :

① A, B et C étant trois points du plan, placer les points M, N tels que : $\overrightarrow{CM}=-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=-\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$

② A, B et C étant trois points du plan, placer le points P tel que : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Exercice 26 (Sur feuille blanche) :

Soit $ABCD$ un parallélogramme non applati. Placer les points P, Q, R, S tels que que :

$$\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB} \qquad \overrightarrow{QB} = 3\overrightarrow{QC} \qquad \overrightarrow{RC} = 3\overrightarrow{RD} \qquad \overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SA}$$

Exercice 27 (Sur feuille blanche) :

A et B étant deux points distincts du plan.

① Le point M est défini par la relation : $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

- (a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
- (b) Construire le point M

② Le point P est défini par la relation : $\overrightarrow{PA} - 5\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{0}$

- (a) Exprimer $\overrightarrow{PA}$ **seulement** en fonction de $\overrightarrow{AB}$. On pourra à cet effet penser à décomposer le vecteur $\overrightarrow{BP}$ à l'aide de la relation de Chasles.
- (b) Construire le point P.

Exercice 28 : Soit un triangle ABC.

On considére les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice 29 : Soit $ABCD$ un parallélogramme.

On appelle I le milieu du segment $[DC]$.

① Construire les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$

② (a) Démontrer que $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

- (b) En déduire que les droites (MN) et (BI) sont paralléles.

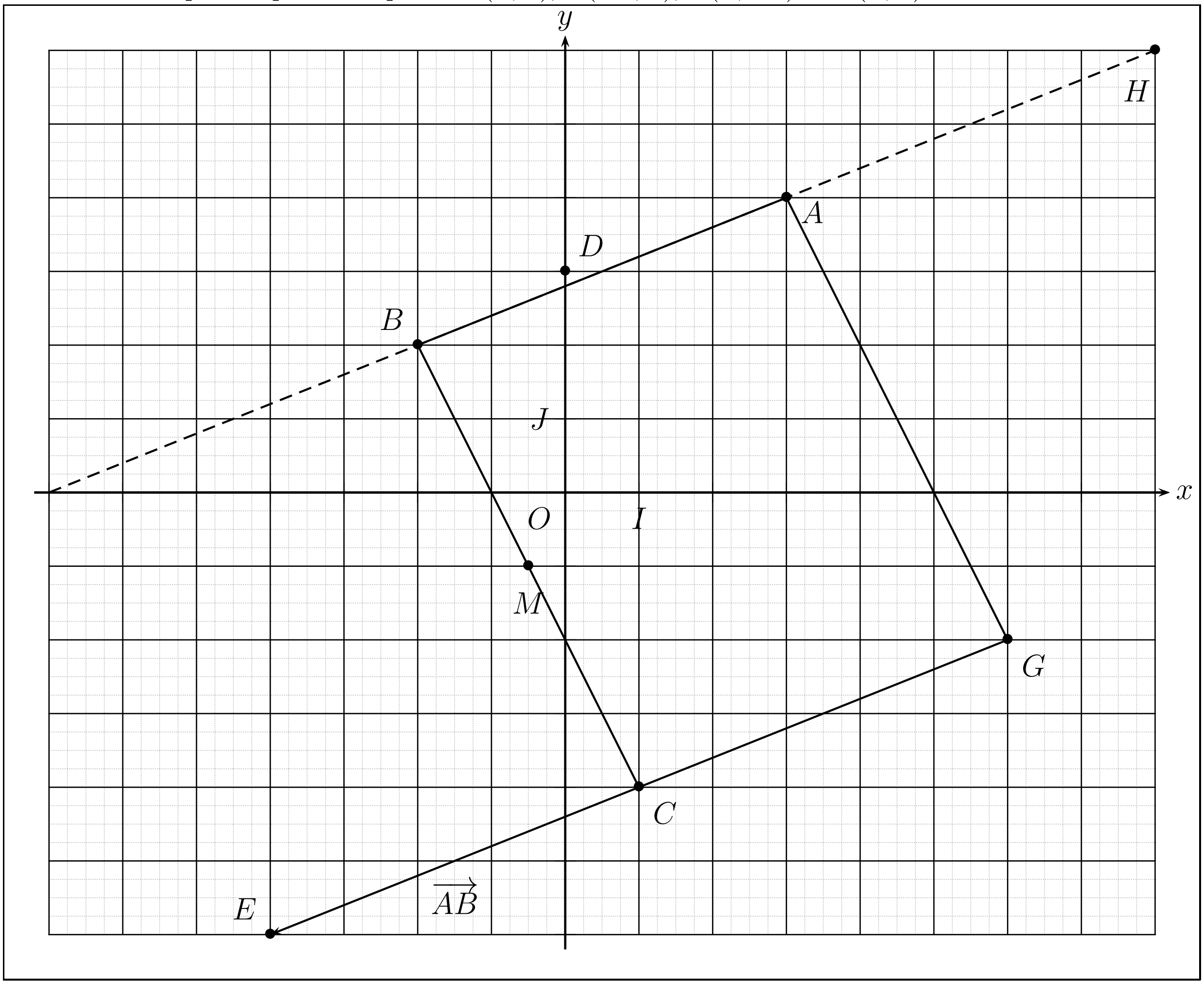
③ (a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

- (b) En déduire que les points C, M, et N sont alignés.

Exercice 30 (Extrait d'un devoir commun, Lycée Ronceray, Bezons) :

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\,I\,,J)$ tel que $OI = OJ = 1cm$

① Construire ce repère et placer les points $A(3\,;\,4)$, $B(-2\,;\,2)$, $C(1\,;\,-4)$ et $D(0\,;\,3)$.



② Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -4-4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -4-2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} x_D - x_O \\ y_D - y_O \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$

③ Construire le point E, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le point E image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $E(-4\,;\,-6)$

④ Calculer les coordonnées du point $M(x_M\,;\,y_M)$ milieu du segment $[BC]$.

Pour répondre à cette question on utilise la formule des coordonnées du milieu :

- $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}$
- $x_M = \dfrac{-2+1}{2}$
- $x_M = \dfrac{-1}{2}$
- $x_M = -\dfrac{1}{2}$
- $x_M = -0,5$

- $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}$
- $y_M = \dfrac{2+(-4)}{2}$
- $y_M = \dfrac{2-4}{2}$
- $y_M = \dfrac{-2}{2}$
- $y_M = -1$

Les coordonnées du point M sont :

$\boxed{M(-0,5\,;\,-1)}$

⑤ G est le point de coordonnées $(6\,; -2)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$? **Justifier**.

Graphiquement le quadrilatère $ABCG$ semble être un parallélogramme.
Nous allons démontrer cette conjecture en utilisant la propriété suivante :

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC} \text{ si et seulement si } ABCG \text{ est un parallélogramme.}}$

Remarque : Nous aurions pu aussi utiliser la méthode des milieux...

➥ Commençons par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \end{pmatrix}$	➥ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-3 \\ 2-4 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} (1-6 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$	D'après la propriété citée ci-dessus,
$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}}$	$\boxed{\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}}$	on en déduit que le quadrilatère $ABCG$ est un parallélogramme.

⑥ Soit $H(x_H\,; 6)$. Trouver l'abscisse de H telle que les points A, B et H soient alignés.

Pour que les points A, B et H soient alignés, il faut -par exemple- que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient colinéaires.

➥ Commençons par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$, en fonction de l'inconnue x_H :

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_H - 3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

➥ Pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient colinéaires il faut que leur déterminant soit nul, d'où :

$$\begin{aligned}
det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = 0 \quad &\iff \quad \begin{vmatrix} -5 & x_H - 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \quad -5 \times 2 - (-2) \times x_H - 3) = 0 \\
&\iff \quad -10 - (-2x_H + 6) = 0 \\
&\iff \quad -10 + 2x_H - 6 = 0 \\
&\iff \quad -16 + 2x_H = 0 \\
&\iff \quad -\cancel{16} + 2x_H + \cancel{16} = 0 + 16 \\
&\iff \quad 2x_H = 16 \\
&\iff \quad \frac{\cancel{2}x_H}{\cancel{2}} = \frac{16}{2} \\
&\iff \quad x_H = 8
\end{aligned}$$

➥ Pour que les points A, B et H soient alignés, il faut donc que l'abscisse du point H soit 8.

⑦ Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Pour que les points A, B et D soient alignés, il faut par exemple que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient colinéaires.

➥ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

➥ Vérifions maintenant si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires :

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \times (-1) - (-2) \times (-3) = 5 - 6 = -1 \neq 0$

➥ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés.