Méthodes

Savoir-faire 1 Recherche d'un PGCD à l'aide de l'algorithme des différences

Énoncé **Calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117 à l'aide de l'algorithme des différences.**

Solution

Méthode Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents avec l'algorithme des différences, on suit les étapes suivantes :
Étape 1 : on soustrait le plus petit nombre du plus grand nombre.
Étape 2 : on compare le résultat de cette soustraction au plus petit des deux nombres :
– s'ils sont égaux, alors le PGCD est égal au plus petit des nombres ;
– sinon on recommence l'étape 1 avec le résultat de la soustraction et le plus petit nombre.

On utilise la propriété :
PGCD(a ; b) = PGCD(b ; $a-b$)

• 182 – 117 = 65	PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65)
• 117 – 65 = 52	PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52)
• 65 – 52 = 13	PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13)
• 52 – 13 = 39	PGCD(52 ; 13) = PGCD(13 ; 39)
• 39 – 13 = 26	PGCD(13 ; 39) = PGCD(13 ; 26)
• 26 – 13 = 13	PGCD(26 ; 13) = PGCD(13 ; 13) L'algorithme s'arrête lorsque : $a-b=b$. On obtient alors : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; b) = b. Ici, PGCD(13 ; 13) = 13.

Donc : PGCD(182 ; 117) = 13

Remarque : Si on continuait l'algorithme, la différence suivante serait nulle. Le PGCD cherché est donc la dernière différence non nulle.

Savoir-faire 2 Recherche d'un PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide

Énoncé **Calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.**

Solution

Méthode Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents non nuls avec l'algorithme d'Euclide, on suit les étapes suivantes :
Étape 1 : on effectue la division euclidienne du plus grand de ces nombres par le plus petit.
Étape 2 : on examine le reste de cette division :
– si ce reste est égal à zéro, alors le PGCD est le diviseur de cette division euclidienne ;
– si ce reste n'est pas égal à 0, on recommence l'étape 1 avec le diviseur et le reste de cette division.

182 | 117 / 65 | 1	

On utilise la propriété :
PGCD$(a\,;b)$ = PGCD$(b\,;r)$,
r étant le reste de la division euclidienne de a par b.

- $182 = 117 \times 1 + 65$
65 est le reste de la division euclidienne de 182 par 117.

PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65)

- $117 = 65 \times 1 + 52$
52 est le reste de la division euclidienne de 117 par 65.

PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52)

- $65 = 52 \times 1 + 13$
13 est le reste de la division euclidienne de 65 par 52.

PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13)

- $52 = 13 \times 4 + 0$
0 est le reste de la division euclidienne de 52 par 13.

L'algorithme s'arrête lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, ce qui signifie que b est un diviseur de a.
On obtient alors : PGCD$(a\,;b) = b$.
Ici, PGCD(52 ; 13) = 13.

Donc : PGCD(182 ; 117) = 13

Remarque : Le PGCD cherché est donc le **dernier reste non nul** des divisions euclidiennes successives.

Savoir-faire 3 Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Énoncé **1.** **Écrire $\frac{117}{182}$ sous la forme d'une fraction irréductible.**

2. En déduire la fraction égale à $\frac{117}{182}$ dont le numérateur est 45.

Solution

Savoir-faire 1 ou 2

1. On calcule le PGCD de 182 et 117 :
PGCD(182 ; 117) = 13

$$\frac{117}{182} = \frac{117 : 13}{182 : 13} = \frac{9}{14}$$

La fraction irréductible égale à $\frac{117}{182}$ s'obtient en divisant 117 et 182 par leur PGCD.

$\frac{9}{14}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{117}{182}$.

2. D'après la question **1**, on a : $\frac{117}{182} = \frac{9}{14}$.

Or $\frac{9}{14} = \frac{9 \times 5}{14 \times 5} = \frac{45}{70}$

donc $\frac{117}{182} = \frac{45}{70}$.

Pour déterminer une fraction égale à $\frac{117}{182}$, on utilise la fraction irréductible $\frac{9}{14}$.

La fraction égale à $\frac{117}{182}$ de numérateur 45 est $\frac{45}{70}$.

Savoir-faire 4 Résoudre un problème de partage équitable

Énoncé **Vu au brevet**

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut utiliser toutes ses billes pour confectionner des paquets identiques ayant chacun un même nombre de billes rouges et un même nombre de billes noires.

1. Quel nombre maximal de paquets Marc pourra-t-il réaliser ?

2. Quelle sera alors la composition de chaque paquet ?

Solution

1. Interprétation de l'énoncé

On appelle n le nombre maximal de paquets identiques que Marc pourra réaliser en utilisant toutes ses billes.

> On choisit de désigner le nombre de paquets cherché par n.

Les n paquets doivent tous contenir le même nombre de billes rouges et le même nombre de billes noires, donc :

– le quotient de la division euclidienne de 108 par n correspond au nombre de billes rouges dans un paquet ;

– le quotient de la division euclidienne de 135 par n correspond au nombre de billes noires dans un paquet.

> On traduit la donnée de l'énoncé : « des paquets identiques ».

De plus, Marc doit utiliser toutes ses billes. Les restes des divisions euclidiennes de 108 par n et de 135 par n doivent donc être nuls.

> On traduit la donnée de l'énoncé : « il veut utiliser toutes ses billes ».

Par conséquent, n doit diviser 108 et 135. Comme Marc veut réaliser le plus grand nombre de paquets, **n est le plus grand diviseur commun à 108 et 135.**

> On traduit la donnée de l'énoncé : « nombre maximal de paquets ».

Calcul du PGCD de 108 et 135

> On calcule PGCD (135 ; 108).
> Ici, on utilise l'algorithme d'Euclide mais on aurait pu utiliser l'algorithme des différences.

135	108
27	1

108	27
0	4

$135 = 108 \times 1 + 27$

Donc : PGCD(135 ; 108) = PGCD(108 ; 27)

$108 = 27 \times 4 + 0$

Donc 27 est un diviseur de 108 et PGCD(108 ; 27) = 27.

D'où PGCD(135 ; 108) = 27.

Marc pourra réaliser au maximum 27 paquets identiques en utilisant toutes les billes.

2. Le nombre de billes rouges par paquet est le quotient de 108 par 27, soit 4.

Le nombre de billes noires par paquet est le quotient de 135 par 27, soit 5.

Chaque paquet sera composé de 4 billes rouges et de 5 billes noires.

> On détermine la composition de chaque paquet en calculant le nombre de billes rouges et le nombre de billes noires par paquet.