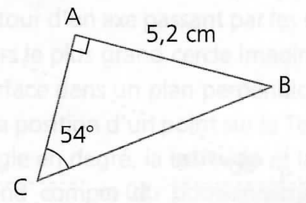
Approfondir

55 Calculer AC. On donnera l'arrondi au mm.



56 O considère un triangle TRI rectangle en T tel que :

$\widehat{TRI} = 49°$ et $TI = 10$ cm.

Calculer RT. On donnera l'arrondi au millimètre.

57 **Vu au brevet**

On considère le triangle LMN tel que :

$MN = 8$ cm, $ML = 4{,}8$ cm et $LN = 6{,}4$ cm.

❶ Faire une figure.

❷ Démontrer que LMN est un triangle rectangle.

❸ Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{LNM}$.
On donnera l'arrondi au degré.

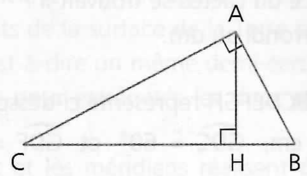
❹ **a.** Tracer la hauteur issue de L ; elle coupe [MN] en K.
b. Démontrer que les angles $\widehat{LNM}$ et $\widehat{MLK}$ ont la même mesure.

❺ Calculer LK et MK. On donnera les arrondis au mm.

❻ Placer sur [MN] le point S tel que NS = 2 cm.
La perpendiculaire à (LN) passant par S coupe le côté [LN] en R. Calculer RN et RS. On donnera les arrondis au mm.

❼ Calculer l'aire de chacun des triangles LMN, KLM et NRS.
En déduire l'aire du quadrilatère KLRS.

58 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous.



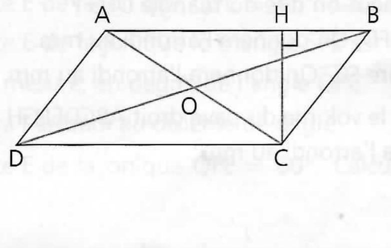
❶ **a.** Démontrer l'égalité : $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CA}{CB}$.
b. En déduire que : $CA^2 = CB \times CH$.

❷ Démontrer de même que : $BA^2 = BC \times BH$.

59 Dans la figure ci-dessous :
– ABCD est un parallélogramme tel que :

$AB = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 52°$ et $\widehat{BAC} = 38°$;

– le point H est le pied de la hauteur issue de C.



❶ Quelle est la nature du triangle ABC ?

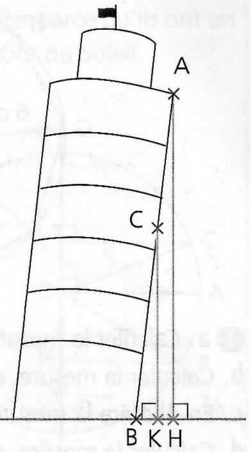
❷ Calculer BC. On donnera l'arrondi au millimètre.

❸ Calculer AC et en déduire CO.
On donnera les arrondis au millimètre.

❹ **a.** Exprimer l'aire du parallélogramme ABCD de deux manières différentes.
b. En déduire la longueur de la hauteur [CH].
On donnera l'arrondi au millimètre.

60 **La tour penchée**

La tour de Pise a huit étages.



❶ La distance entre le point B, pied de la tour, et le point A, situé au 7^{e} étage, est égale à 54,5 m, valeur arrondie au dm.
Une bille lâchée du point A tombe sur le sol, après une chute verticale, à la distance BH = 5,4 m du pied de la tour.
Calculer la mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle que fait la tour avec le sol horizontal.

❷ Un touriste, représenté par le point C sur le schéma, a gravi $\dfrac{3}{5}$ de l'escalier de la tour.
En se penchant, il lâche son appareil photo qui tombe verticalement, touchant le sol au point K.
a. De quelle hauteur est tombé l'appareil photo ?
On donnera l'arrondi au décimètre.
b. À quelle distance du pied de la tour a-t-il touché le sol ?
On donnera l'arrondi au décimètre.

LE SAVIEZ-VOUS?

La construction de la tour de Pise, commencée en 1173, dura 200 ans. Elle fut interrompue pendant de longues périodes, la première fois en 1178, lors de l'ajout du troisième étage, car la tour commençait à s'incliner vers le sud.

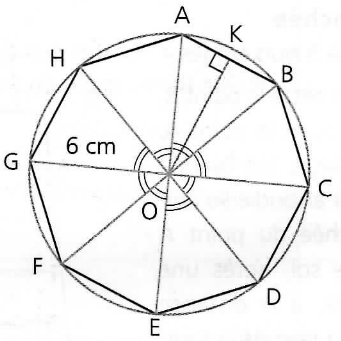
Ce « mauvais penchant » résulte d'un affaissement de ses fondations, dû au fait qu'elle a été construite sur une plaine alluviale. Elle fait depuis longtemps l'objet d'une attention particulière. De récents travaux utilisant des technologies de pointe ont permis de ralentir son inclinaison. Pour combien de temps, on ne sait pas exactement, les pronostics allant de 175 à 300 ans.

Exercices

61 Un polygone régulier

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un octogone tel que :
– les points A, B, C, D, E, F, G, H appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 6 cm (on dit que l'octogone ABCDEFGH est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$) ;
– les côtés [AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FG], [GH], [HA] ont la même longueur ;
– les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$, $\widehat{HOA}$, appelés angles au centre de l'octogone ABCDEFGH, ont la même mesure.

Le point K est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par O.



1 **a.** Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$.
b. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BOK}$.
c. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{OBK}$.
d. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ABC}$.
e. Que peut-on dire des angles de l'octogone ABCDEFGH ?

2 **a.** Calculer AK, puis en déduire AB.
On donnera les arrondis au mm.
b. Calculer OK. On donnera l'arrondi au mm.

3 **a.** Calculer le périmètre de l'octogone ABCDEFGH.
On donnera l'arrondi au mm.
b. Calculer l'aire de l'octogone ABCDEFGH.
On donnera l'arrondi au mm^2.

REMARQUE : Un polygone (du grec *polys*, nombreux, et *gônia*, angle) dont les côtés sont de même longueur et les angles de même mesure est appelé un **polygone régulier**.

62 Vu au brevet

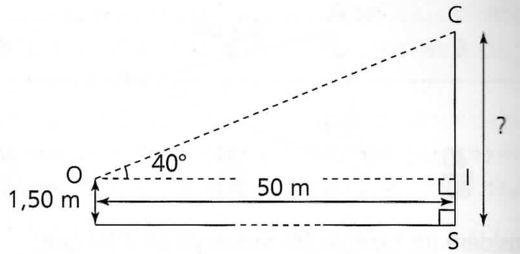
1 **a.** Construire un triangle MAI tel que :
AM = 6 cm, AI = 9,1 cm et IM = 10,9 cm.
b. Quelle est la nature du triangle MAI ? Justifier.

2 **a.** Placer le point R appartenant au côté [MI] tel que MR = 8 cm, puis tracer la droite parallèle à (AI) passant par R ; elle coupe le côté [AM] en E.
Quelle est la nature du triangle MER ? Justifier.

3 **a.** Exprimer cos $\widehat{AMI}$ de deux manières différentes.
b. En déduire ME. On donnera l'arrondi au millimètre.

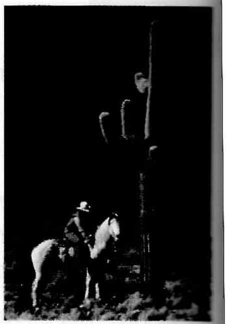
63 Pour mesurer la hauteur d'un arbre, on peut utiliser un inclinomètre (ou clinomètre), instrument servant à mesurer des angles par rapport à la ligne d'horizon ou à l'horizontale.

Un géomètre lit, sur un inclinomètre situé à 50 mètres du pied d'un arbre et à 1,50 mètre du sol, un angle de 40°.
On suppose que le sol est horizontal et que le tronc de l'arbre est perpendiculaire au sol.

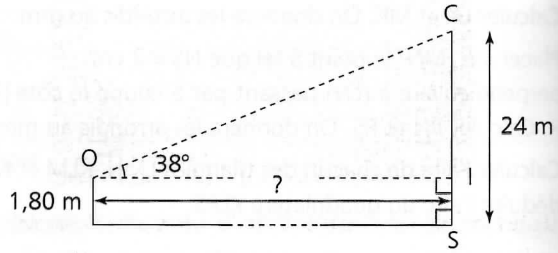


Quelle est la hauteur de l'arbre ? On donnera l'arrondi au dm.

64 À la fin de chaque histoire, Lucky Luke, sur fond de soleil couchant, s'éloigne entre deux cactus candélabres : ainsi, grâce à Lucky Luke, tout le monde connaît les cactus saguaro, que l'on rencontre principalement dans le désert de Sanaro, en Arizona, au sud-est de la Californie.



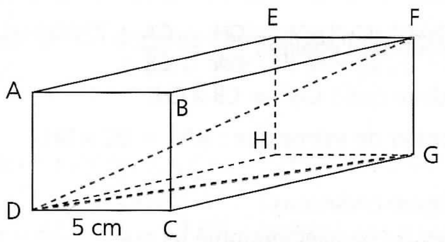
Un touriste a photographié un cactus saguaro. Ses yeux étaient à 1,80 m du sol et il l'observait sous un angle de 38° comme l'explique le schéma ci-dessous.



À quelle distance du cactus se trouvait-il ?
On donnera l'arrondi au dm.

65 Le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous est tel que :

$CD = 5\text{ cm}$, $\widehat{GDC} = 60°$ et $\widehat{GDF} = 21°$.



1 **a.** Que peut-on dire du triangle GDC ?
b. Calculer DG puis CG. On donnera l'arrondi au mm de CG.

2 **a.** Que peut-on dire du triangle DFG ?
b. Calculer FD. On donnera l'arrondi au mm.
c. En déduire FG. On donnera l'arrondi au mm.

3 Calculer le volume du pavé droit ABCDEFGH.
On donnera l'arrondi au mm^3.

66 **Thème de convergence**

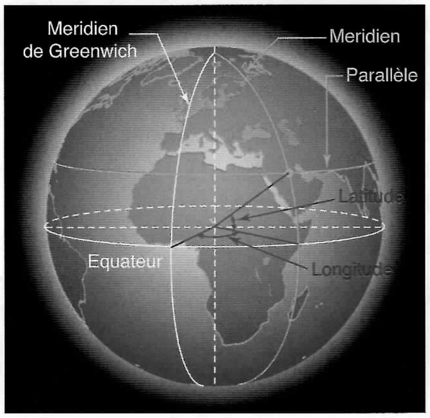
Parallèles et méridiens

La Terre peut être assimilée à une sphère de rayon 6 370 km qui tourne autour d'un axe passant par les deux pôles, l'équateur étant alors le plus grand cercle imaginaire que l'on peut tracer à sa surface dans un plan perpendiculaire à cet axe.

Pour repérer la position d'un point sur la Terre, on utilise deux mesures d'angle en degré, la **latitude** et la **longitude**.

La latitude rend compte du positionnement nord-sud d'un point par rapport à l'équateur. Elle est comprise entre 0° et 90° dans l'hémisphère nord, de l'équateur vers le pôle Nord, et entre 0° et 90° dans l'hémisphère sud, de l'équateur vers le pôle Sud.

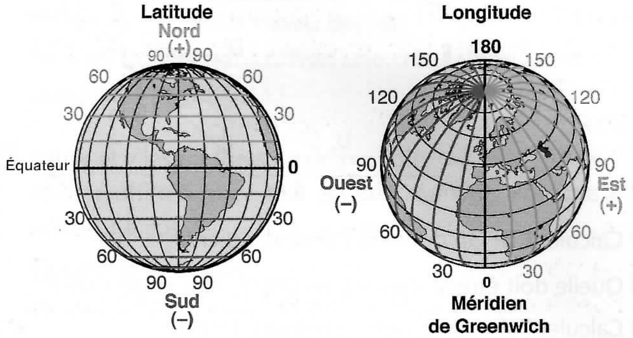
La longitude rend compte du positionnement est-ouest d'un point par rapport à un demi-cercle imaginaire de référence, dont le diamètre a pour extrémités les deux pôles, le méridien de Greenwich. Elle est comprise entre 0° et 180° vers l'est et entre 0° et 180° vers l'ouest.



Tous les points de la surface de la Terre situés sur un même parallèle, c'est-à-dire un même cercle imaginaire situé dans un plan parallèle à celui de l'équateur, ont la même latitude.

Tous les points de la surface de la Terre situés sur un même méridien, c'est-à-dire un même demi-cercle imaginaire dont le diamètre a pour extrémités les deux pôles, ont la même longitude.

Les parallèles et les méridiens réalisent donc une sorte de « quadrillage » qui permet de repérer n'importe quel point de la surface de la Terre de façon unique.



A Recherche

Cinq parallèles portent un nom particulier parce qu'ils ont un rapport avec la rotation de la Terre autour du Soleil.

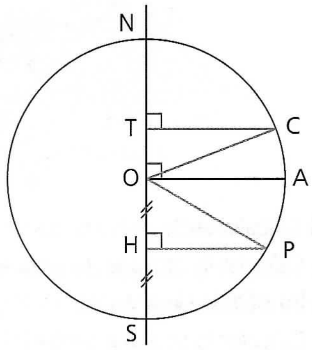
Quels sont-ils ?

B La figure ci-contre représente une coupe de la Terre selon un plan méridien.

Le point O représente le centre de la Terre.

Les points N et S représentent respectivement le pôle Nord et le pôle Sud.

Le point A appartient à l'équateur.



1 Le point C appartient au tropique du Cancer, dont tous les points ont pour latitude 23,46° N, le N signifiant qu'il se trouve dans l'hémisphère nord.

a. Justifier que la mesure de l'angle $\widehat{OCT}$ est égale à 23,46°.

b. Calculer TC. On donnera l'arrondi au km.

c. Calculer la longueur du tropique du Cancer.

On donnera l'arrondi au km.

2 Le point P appartient à un parallèle dont le centre H est le milieu de [OS].

a. Calculer cos $\widehat{HOP}$.

b. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{HOP}$.

c. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{OPH}$.

d. En déduire PH. On donnera l'arrondi au km.

e. Calculer la longueur du parallèle passant par P.

On donnera l'arrondi au km.

67 Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre et on donnera les arrondis au mm des longueurs.

Soit un rectangle PQRS tel que : QP = 3 et QR = 5.

E désigne un point du segment [QR].

On fera une figure représentant chaque situation.

1 On place E de façon que $\widehat{QPE} = 45°$. Calculer PE.

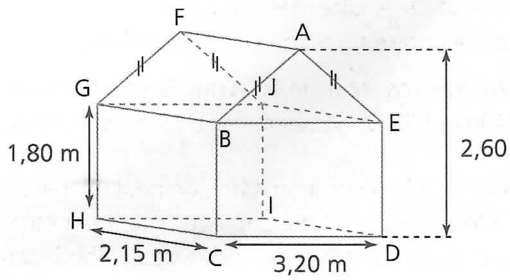
2 On place E de façon que le triangle SPE est isocèle en P.

Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{QPE}$.

On donnera l'arrondi au dixième de degré.

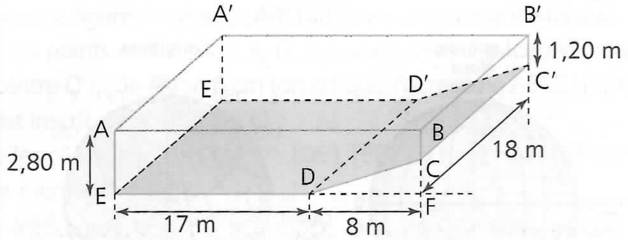
3 On place E de façon que $\widehat{QPE} = 60°$. Calculer QE.

68 Quelle doit être la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ABE}$ pour que l'abri de jardin représenté ci-dessous ait les dimensions données ? On donnera l'arrondi au dixième.



Exercices

69 On donne ci-dessous les plans d'une piscine.

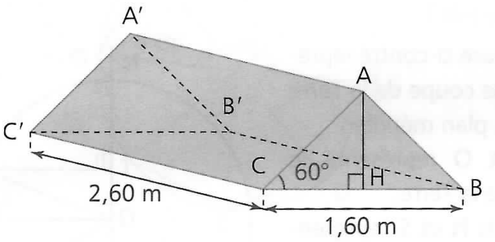


❶ Calculer CD. On donnera l'arrondi au cm.

❷ Quelle doit être la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{CDF}$?

❸ Calculer l'aire de la surface coloriée en bleu.

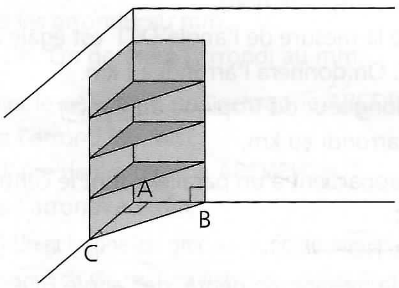
70 Samia veut fabriquer une tente dont une représentation est proposée ci-dessous.



❶ Calculer AC.

❷ Calculer la surface de toile nécessaire pour réaliser cette tente sans le tapis de sol.

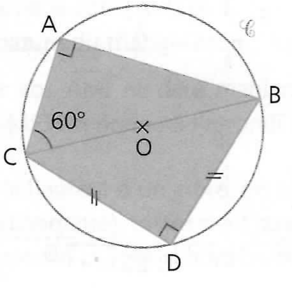
71 Le père de Mirko construit une bibliothèque dans un coin de la chambre de son fils.



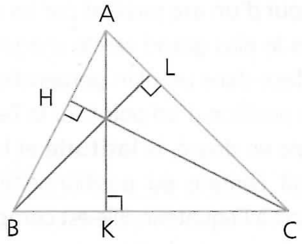
❶ Quelles seront les dimensions des étagères si AC = 80 cm et l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 40° ? On donnera les arrondis au cm.

❷ Quelle surface de bois sera nécessaire à la réalisation de trois étagères ?

72 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4 cm. Calculer l'aire de la surface coloriée. On donnera l'arrondi au mm^2.



73 On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. Le point K est le pied de la hauteur issue de A et le point H est le pied de la hauteur issue de C.
On pose : AB = c, AC = b et BC = a.



L'objet de cet exercice est de démontrer que :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}.$$

❶ Exprimer $\cos\widehat{ABC}$ de deux façons :
a. – en utilisant le triangle ABK ;
– en utilisant le triangle BHC ;
b. En déduire l'expression de BK en fonction de BH, a et c.

❷ Exprimer $\cos\widehat{BAC}$ de deux façons :
a. – en utilisant le triangle AHC ;
– en utilisant le triangle ALB ;
b. En déduire l'expression de AL en fonction de AH, b et c.

❸ Exprimer $\cos\widehat{ACB}$ de deux façons :
a. – en utilisant le triangle AKC ;
– en utilisant le triangle BLC ;
b. En déduire que : $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{a - BK}{b} = \dfrac{b - AL}{a}$.

❹ **a.** Déduire des questions précédentes que :

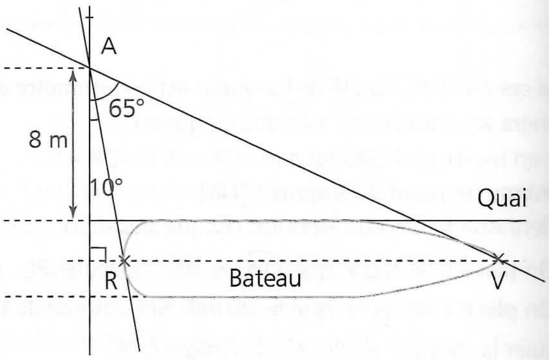
$$\cos\widehat{ACB} = \frac{a^2 - cBH}{ab} \quad \text{et} \quad \cos\widehat{ACB} = \frac{b^2 - cAH}{ab}.$$

b. En déduire que : $2\cos\widehat{ACB} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$.

❺ Conclure.

INDICATION : ❹ b On écrira $2\cos\widehat{ACB} = \cos\widehat{ACB} + \cos\widehat{ACB}$.

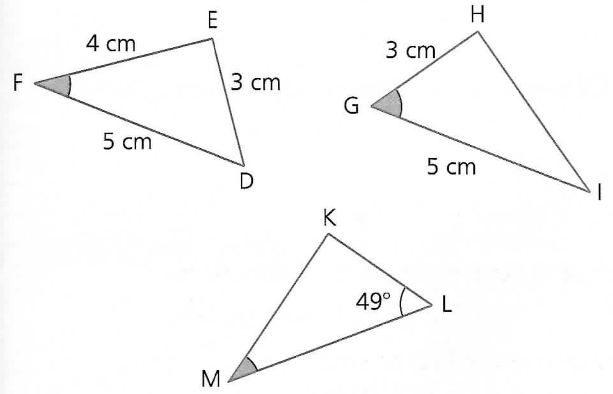
74 Un bateau de largeur 4 mètres est amarré à un quai comme le montre la figure ci-dessous (on considère qu'il touche le quai).
Le point d'amarrage A est à 8 mètres du quai.
Les amarres sont fixées sur le bateau en R et V, le point R étant situé au milieu et à l'arrière du bateau, le point V étant situé au milieu et à l'avant du bateau.



Calculer la longueur du bateau.
On donnera l'arrondi au dm.

Argumenter et débattre

75 Dans chacun des triangles ci-dessous, peut-on calculer la mesure de l'angle colorié ?



76 ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AC = 10 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} = 60°.$$

On désigne par M le milieu de [AB].
Peut-on trouver, sans utiliser une calculatrice, la mesure en degré, de l'angle $\widehat{ACM}$?

77 Soit x et y les mesures de deux angles aigus.
Jérôme affirme que : si x est inférieur à y, alors cos x est inférieur à cos y.

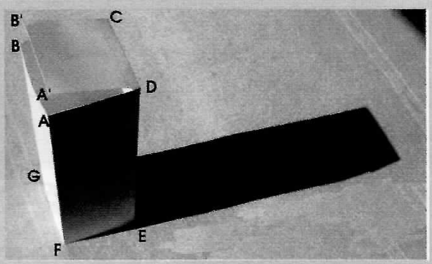
❶ Comparer cos 30° et cos 60°.

❷ Jérôme a-t-il raison ?

78 Est-il vrai que le cosinus d'un angle est proportionnel à sa mesure ?

POUR LES CURIEUX

Une boîte à lumière



On admet que les rayons du Soleil arrivent sur la Terre pratiquement parallèles.

❶ Construisez en carton le parallélépipède ci-contre, laissant ouverte la face EFGH, la face A'B'CD restant articulée uniquement par l'arête [CD] en prenant AB = AD = 7 cm et AF = 22 cm.
Fermez la face EFGH par du papier calque.
Quelle est l'aire de cette face EFGH ?

❷ Par un jour de soleil, maintenez complètement ouverte la face ABCD et orientez l'arête [AF] dans la direction du Soleil.
La lumière qui entre par l'ouverture ABCD illumine complètement la face EFGH.
Rentrez ensuite la face A'B'CD dans l'ouverture de la boîte, maintenez-la inclinée (ruban adhésif ou épingles…) de telle sorte que l'angle $\widehat{A'DE}$ mesure 40°.

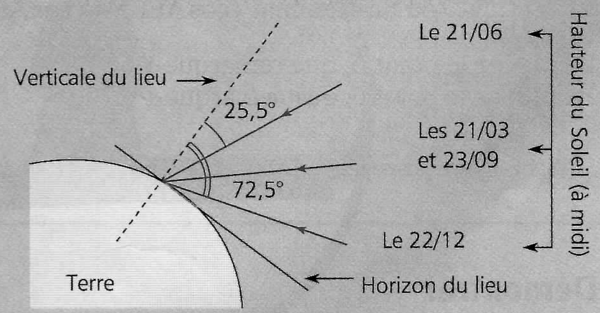
Orientez de nouveau [AF] dans la direction du Soleil.

a. Vérifiez que l'aire de la face EFGH qui est illuminée est égale à 49(1 – cos 50°).

b. Quel pourcentage de la lumière entrant dans la boîte vient alors illuminer la face A'B'CD ?

Les saisons ? une affaire de cosinus…

La Terre n'est pas « droite » sur son orbite. Il en résulte que l'inclinaison des rayons du Soleil par rapport au sol varie d'environ 47° entre l'hiver et l'été.
Pour prendre un exemple, en été, à midi à Paris, les rayons du Soleil font un angle de 25,5° avec la verticale. En hiver, cet angle mesure 72,5°.



Par un calcul identique à celui de l'expérience que vous avez réalisée, on peut montrer que le sol reçoit en été trois fois plus de lumière qu'en hiver, alors que le Soleil est en réalité un peu plus distant !

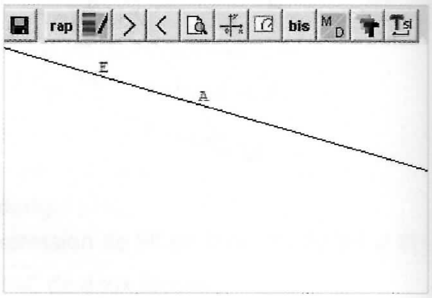
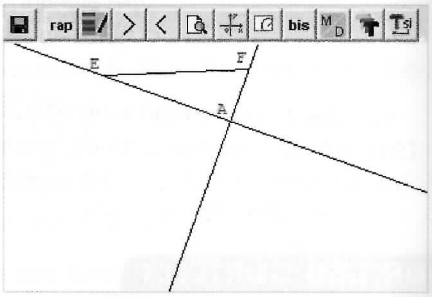
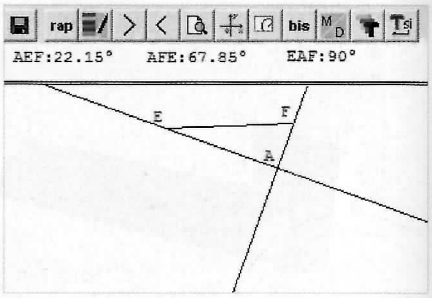
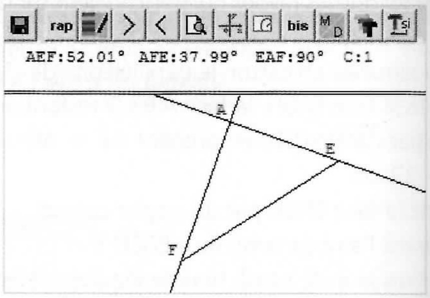
Une égalité importante

AEF est un triangle rectangle en A.

On considère l'expression : $C = (\cos \widehat{AEF})^2 + (\cos \widehat{AFE})^2$.

On se propose de répondre à la question suivante : la valeur de l'expression C dépend-elle du triangle AEF ?

❶ Observer et conjecturer

1. Créer une **droite** (AE).	
2. a. Créer la **droite perpendiculaire** à (AE) passant par A, puis créer un **point** F **sur** cette perpendiculaire. **b.** Créer le **segment** [EF].	
3. Afficher la **mesure** de chacun des angles $\widehat{AEF}$, $\widehat{AFE}$ et $\widehat{EAF}$.	
4. a. À l'aide de la **fonction calculatrice**, afficher la valeur de C. Selon le logiciel utilisé, on pourra obtenir la valeur de C en calculant $\left(\frac{AE}{EF}\right)^2 + \left(\frac{AF}{EF}\right)^2$ ou directement $(\cos \widehat{AEF})^2 + (\cos \widehat{AFE})^2$. **b.** **Déplacer** le point E, que remarque-t-on ? **c.** **Déplacer** le point F, que remarque-t-on ?	

❷ Démontrer

1. Exprimer $\widehat{AEF}$ et $\widehat{AFE}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

2. Conclure.

Modes d'emploi pages 300 à 303