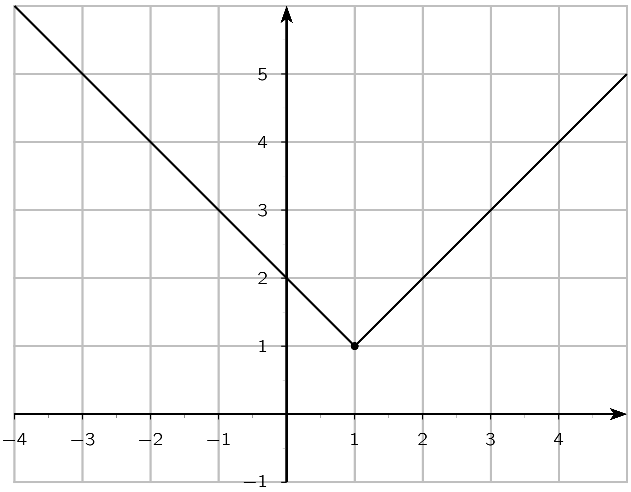
La notion de continuité d'une fonction f est très importante, car elle permet,entre autre, de déterminer l'existence de solution(s) pour des équations du type $f(x) = k$.

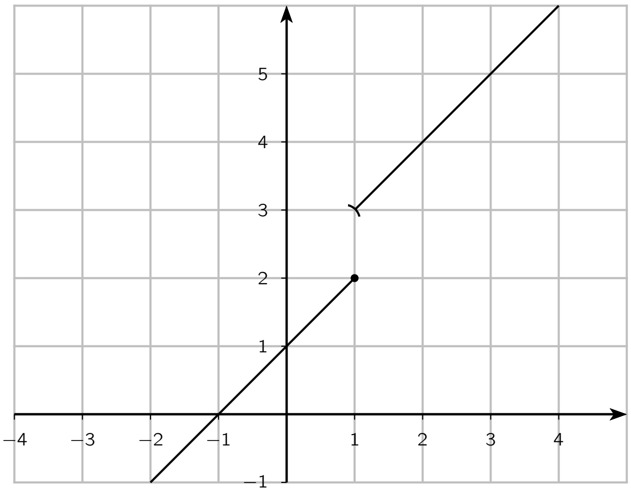
Continuité d'une fonction et valeurs intermédiaires

Définition

Une fonction f est dite **continue** sur un intervalle si on peut la représenter « sans lever le crayon » (c'est à dire tracer d'une seul tenant).



Fonction f continue en $x = 1$



Fonction f non continue en $x = 1$

Ici, on a, par lecture graphique $f(1) = 2$ (c'est le point). Or si x se rapproche de 1 par la droite, on voit que $f(x)$ se rapproche de 3 et non de 2.
Il y a « discontinuité » en 1.

Nous admettrons un certains nombre de résultats sur le fonctions que nous connaissons, à savoir :

Propriété **Continuité des fonctions de référence**

1. Les fonctions affines, la fonction carré et la fonction cube sont continue sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions polynômes de degré 2 sont continues sur $\mathbb{R}$
3. La fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur continue sur $]0; +\infty[$.
4. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$

Propriété **Continuité et dérivabilité**

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Convention :
Nous savons qu'une flèche oblique dans un tableau de variations traduit la stricte monotonie, nous admettrons également la convention suivante : « **une flèche oblique dans un tableau de variations traduit la continuité sur l'intervalle** ».

Applications

Comme nous l'avons dit en introduction, la continuité a une application très importante : la détermination de l'existence de solutions à pour des équations du type $f(x) = k$:

Théorème **des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet *au moins* une solution sur l'intervalle $[a; b]$

Ce théorème possède un résultat plus fort si l'on suppose que la fonction est monotone.

Théorème **des valeurs intermédiaires appliqué au fonction strictement monotones**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une *unique* solution sur l'intervalle $[a; b]$

Le théorème précédent est très souvent utilisé pour résoudre les équations du type $f(x) = 0$. On peut d'ailleurs formulé le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique* solution sur l'intervalle $[a; b]$