Chapitre 7 : Nombres en écriture fractionnaire. Division.

1 Quotient

1.1 Définition :

Définition : Soit a un nombre et b un nombre non nul.
Le qotient de a par b est le nombre par lequel il faut multiplier b pour trouver a.
Si l'on nomme q le quotient de a par b, par définition on a : $b \times q = a$.

Notation :
Le quotient de a par b se note $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$.
$\dfrac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire du quotient de a par b.

Exemple : $5 \times \dfrac{2}{5} = 2$.

1.2 Fraction :

Définition : Lorsque a et b sont deux nombres entiers, b étant différent de 0, l'écriture fractionnaire du quotient $\dfrac{a}{b}$ est appelée une fraction.

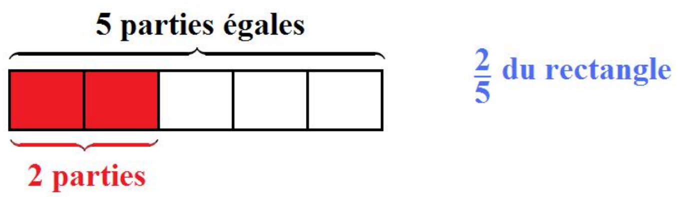
$$\frac{a}{b} \qquad \frac{\leftarrow \text{numérateur}}{\leftarrow \text{dénominateur}}$$

Exemples :
- $\dfrac{3}{7}$ est une fraction.
- $\dfrac{3,1}{7}$ est une écriture fractionnaire.

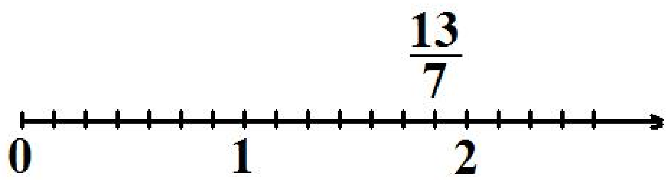
1.3 Fraction d'une quantité :

Méthode : Pour représenter la fraction $\dfrac{a}{b}$ d'une quantité, on partage cette quantité en b parties égales puis on prend a parties.

Exemple :



Exemple :
Placer le nombre $\dfrac{13}{7}$ sur une demi-droite graduée.



On partage l'unité en 7 parties égales.
On compte 13 septièmes à partir de 0.

2 Quotients et calcul

2.1 Valeur approchée d'un quotient :

Méthode : Pour déterminer une valeur approchée d'un nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ avec b différent de 0, on effectue la division du nombre a par le nombre b.

2.2 Division - technique :

On va expliquer comment effectuer la division posée d'un nombre décimal par un nombre entier.

Exemple : On souhaite diviser 41,9 par 8.

1. 4 est inférieur à 8, donc on se pose la question :
   "'En 41 combien de fois a-t-on 8 ?"'
   Réponse : 5 fois (car : $8 \times 5 = 40$ et $40 < 41$,
   alors que $8 \times 6 = 48$ et $48 > 41$.)
   On **inscrit 5** (unités) au niveau du quotient.
   40 unités (8×5) ont été distribuées, il reste donc 1 unité.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & 4 & 1 & , & 9 & 8 \\ \cline{7-7} (& - & 4 & 0 &) & & 5 \\ \cline{1-5} & & & 1 & & & \end{array}$$

2. On **abaisse** le 9
   On partage les 19 dixièmes en 8.
   "'En 19, combien de fois a-t-on 8 ?"'
   Réponse : 2 fois (car : $8 \times 2 = 16$ et $16 < 19$
   alors que $8 \times 3 = 24$ et $24 > 19$.)
   On inscrit **2** (dixièmes) au niveau du quotient.
   16 dixièmes (8×2) ont été distribués, il reste donc
   3 dixièmes.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & 4 & 1 & , & 9 & 8 \\ \cline{7-7} (& - & 4 & 0 &) & \downarrow & 5\ ,2 \\ \cline{1-5} & & & & 1 & 9 & \\ & & (& - & 1 & 6) & \\ \cline{3-6} & & & & & 3 & \end{array}$$

3. On **abaisse** un 0
   On partage les 30 centièmes en 8.
   "'En 30, combien de fois a-t-on 8 ?"'
   Réponse : 3 fois (car : $8 \times 3 = 24$ et $24 < 30$
   alors que $8 \times 4 = 32$ et $32 > 30$.)
   On inscrit **3** (centièmes) au niveau du quotient.
   24 centièmes (8×3) ont été distribués,
   il reste donc **6** centièmes.

$$\begin{array}{ccccccc|c} & & 4 & 1 & , & 9 & 0 & 8 \\ \cline{8-8} (& - & 4 & 0 &) & \downarrow & | & 5\ ,2\ \ 3 \\ \cline{1-5} & & & & 1 & 9 & | & \\ & & (& - & 1 & 6) & \downarrow & \\ \cline{3-6} & & & & & 3 & 0 & \\ & & & (& - & 2 & 4) & \\ \cline{4-7} & & & & & & 6 & \end{array}$$

   Remarque : On pourrait continuer ainsi pour obtenir un quotient avec plus de chiffres après la virgule.

4. **Vérification :** $41,9 = (8 \times 5,23) + 0,06$.
   5,23 est une **valeur approchée par défaut au centième.**
   (il reste **6** centièmes) du quotient de 41,9 par 8.
   On dit aussi que 5,23 est la **troncature au centième** du quotient de 41,9 par 8.

On va expliquer comment effectuer la division posée d'un nombre décimal par un nombre décimal.
Méthode :
Pour effectuer la division posée d'un nombre décimal par un nombre décimal, il suffit de multiplier chacun des deux nombres par 10 (ou par 100, ou par 1 000,...) pour obtenir un **diviseur entier**, et on revient au cas précédent.

Exemple : Pour diviser 67,85 par 2,3, on multiplie 67,85 et 2,3 par 10 pour obtenir un diviseur entier :
$67,85 \times 10 = 678,5$ et $2,3 \times 10 = 23$.
Le quotient de 67,85 par 2,3 est égal au quotient de 678,5 par 23.

2.3 Problème :

Enoncé :
Avec 1,6 Litre de parfum, on remplit 32 flacons identiques.
Quelle est la contenance d'un flacon ?

Résolution :

On effectue la division décimale de 1,6 par 32

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr}
 & 1 & , & 6 & & & 3 & 2 & \\ \cline{6-9}
 & 1 & & 6 & & 0 & , & 0 & 5 \\
 & 1 & & 6 & 0 & & & & \\
- & 1 & & 6 & 0 & & & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

Chaque flacon contient 0,05 L de parfum soit 5 cL.

2.4 Multiplier un nombre par une fraction :

Définition : Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par cette fraction.
b étant un nombre différent de 0, $\frac{a}{b}$ **de** c **est égal à** $\frac{a}{b} \times c$.

Exemple : Les trois quarts de 6 sont égaux à $\frac{3}{4} \times 6$.

Propriété : Soient a, b et c des nombres entiers b étant un nombre différent de 0.

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Exemples : • $\frac{3}{4} \times 6 = \frac{3 \times 6}{4} = 3 \times \frac{6}{4}$
• $\frac{3}{4} \times 6 = (3 \div 4) \times 6 = 0,75 \times 6 = 4,5$
• $\frac{3 \times 6}{4} = \frac{18}{4} = 18 \div 4 = 4,5$
• $3 \times \frac{6}{4} = 3 \times (6 \div 4) = 3 \times 1,5 = 4,5$

3 Quotients égaux

3.1 Propriété :

Propriété : Un quotient ne change pas lorsque l'on multiplie (ou lorsque l'on divise) son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemple :

$\underset{\text{x 3}}{\overset{\text{x 3}}{\frac{8}{5} = \frac{24}{15}}}$; $\underset{\text{x 100}}{\overset{\text{x 100}}{\frac{7,52}{0,17} = \frac{752}{17}}}$; $\underset{:\ 10}{\overset{:\ 10}{\frac{50}{260} = \frac{5}{26}}}$

Remarque : Il y a une infinité de façon d'écrire le même quotient :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{20}{30} = \ldots\ldots$$

3.2 Comment prouver que deux fractions représentent le même nombre, sans calculer ce nombre ?

Exemple : **Enoncé :**

Montrer que les fractions $\frac{5}{3}$ et $\frac{35}{21}$ représentent le même nombre.

Résolution :

$$\frac{5}{3} \underset{\times 7}{\overset{\times 7}{=}} \frac{35}{21}$$

On obtient $\frac{35}{21}$
en multipliant le numérateur et
le dénominateur de $\frac{5}{3}$
par le même nombre 7.

3.3 Simplifier une fraction :

Définition : Simplifier une fraction c'est trouver une fraction égale à cette fraction et dont le numérateur et le dénominateur sont plus petits.

Méthode :
Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par un même nombre entier, lorsque c'est possible.
Pour déterminer un tel nombre, on utilise les critères de divisibilité.

Exemples : Simplifier $\frac{16}{42}$ et $\frac{45}{39}$

$$\frac{16}{42} \underset{: 2}{\overset{: 2}{=}} \frac{8}{21} \qquad \frac{45}{39} \underset{: 3}{\overset{: 3}{=}} \frac{15}{13}$$

4 Multiplier par 0,1 ; 0,01 ...

Définition : Multiplier un nombre décimal par 0,1 ; 0,01.... revient à diviser ce nombre par 10 ; 100....

Exemple : $47,8 \times 0,01 = \frac{47,8}{100} = 0,478$
On déplace la virgule de deux rangs vers la gauche.