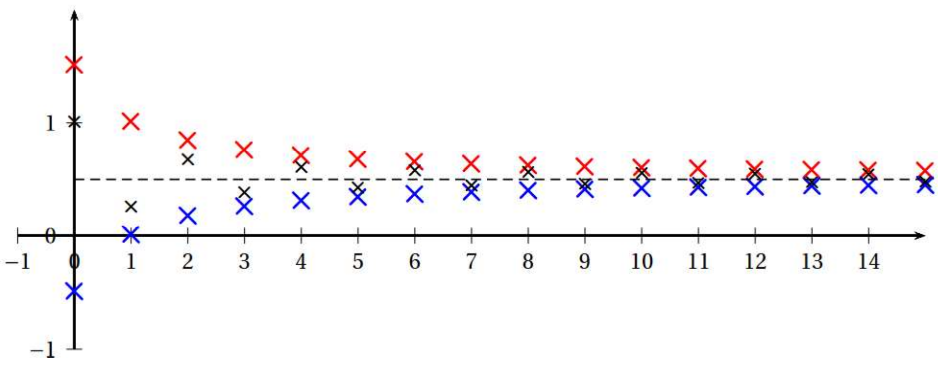
Théorème **Théorème des gendarmes**

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$



Exemple : Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{1}{n} \leq 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n} + 3$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} + 3 = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 3$

3. Comportement des suites géométriques

Revenons un instant sur les suites géométriques.

Théorème

Soit la suite de terme général q^n, où q est un réel positif.

- Si $q > 1$ alors la suite a pour limite $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et on dit que la suite est divergente.
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. On dit, dans ce cas, que la suite converge vers 0.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = 0$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = +\infty$ si $a > 0$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = -\infty$ si $a < 0$.

Exemples :

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = -3$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis la limite de (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = -3 \times 0,5^n$

On a $u_0 < 0$ et $q = 0,5$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$.
Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
Exprimer S_n, la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite puis la limite de cette somme .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$S_n = 5 \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{10}{2 - \sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On a $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{10}{2 - \sqrt{2}}$