Plan du cours

Mes objectifs :

↪ Je dois savoir si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.

↪ Je dois savoir reconnaître un nombre premier,

↪ Je dois connaître et savoir utiliser les critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5, 4, 9 ou 10),

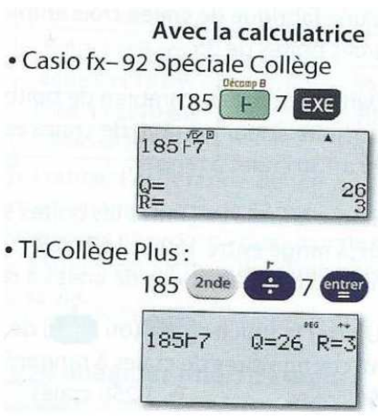
I. Division euclidienne

Propriété

Effectuer la division euclidienne d'un entier **a (le dividende)** par un entier **b (le diviseur)** non nul, c'est trouver deux entiers **q (le quotient)** et **r (le reste)** tels que :

$$a = b \times q + r$$

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 185 par 7.



II. Multiples, diviseurs

1. Multiples et diviseurs

Définition

Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Définition

Dire que l'entier naturel a est **un multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que b est **un diviseur** de a et a est **divisible** par b.

Exemple : $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un multiple de 5
- 15 est un multiple de 3.
- 5 et 3 sont des diviseurs de 15.

Remarques :

- Tout nombre est multiple de 1 donc 1 est un diviseur de tout nombre entier naturel.
- Tout nombre est multiple de lui-même donc tout nombre est divisible par lui-même.

2. Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si il est pair, donc si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
  Exemple : 326 est divisible par 2 mais pas 987.

- Un nombre est divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.
  Exemple : 125 est divisible par 5 mais pas 431.

- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
  Exemple : 43 281 est divisible par 3, car 4 + 3 + 2 + 8 + 1 = 18 et 18 est un multiple de 3.

  DÉMONSTRATION : On va essayer de justifier cette règle de manière générale.
  Tout nombre entier peut être décomposé en somme de ses différents ordres. Un exemple :

  $43281 = 40000 + 3000 + 200 + 80 + 1$

  Or, $40000 = 4 \times 10000 = 4 \times (9999 + 1) = 4 \times 9999 + 4$
  De même, $3000 = 3 \times 1000 = 3 \times (999 + 1) = 3 \times 999 + 3$
  $200 = 2 \times 100 = 2 \times (99 + 1) = 2 \times 99 + 2$
  $80 = 8 \times 10 = 8 \times (9 + 1) = 8 \times 9 + 8$

  $43281 = (4 \times 9999 + 4) + (3 \times 999 + 3) + (2 \times 99 + 2) + (8 \times 9 + 8) + 1$
  $43281 = \underbrace{(4 \times 9999 + 3 \times 999 + 2 \times 99 + 8 \times 9)}_{\text{Multiple de 9 donc de 3}} + \underbrace{(4 + 3 + 2 + 8 + 1)}_{\text{Multiple de 3 ?}}$

  La question de savoir si 43 281 est multiple de 3 revient donc à savoir si $(4 + 3 + 2 + 8 + 1)$ est multiple de 3.

- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
  Exemple : 738 est divisible par 9, car 7 + 3 + 8 = 18 et 18 est un multiple de 9.

- Un nombre est divisible par 10 si il se termine par 0.
  Exemple : 350 est divisible par 10.

III. Nombres premiers

Activité n°1 : Jouer au jeu de Juniper Green

1. Définition

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Attention, 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Activité n°2 : Le crible d'Erathostène

Cette activité met en œuvre un algorithme appelé "le crible d'Erathostène" permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. (a) Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier puis le barrer dans la grille.

(b) Le nombre 2 ne possède aucun diviseur autre que 1 et lui-même. 2 est donc un nombre premier. Entourer le nombre 2.

(c) Barrer tous les multiples de 2, qui ne sont donc pas des nombres premiers.

2. (a) Entourer le plus petit nombre non barré et barrer tous ses multiples.

(b) Poursuivre de la même façon jusqu'à ce que le plus petit nombre non barré soit supérieur à 10.
Tous les nombres non barrés dans la liste, sont les nombres qui n'ont pas d'autre diviseur que 1 ou eux-mêmes. **On obtient tous les nombres premiers inférieur à 100.**

3. Écrire tous les nombres premiers inférieur à 100.

→ **Liste des nombres premiers inférieur à 100 :** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97

2. Diviseurs communs

Définition

Dire que d est **un diviseur commun** de deux nombres a et b signifie que a et b sont divisibles par d.

Exemples :

1. 2. Écrire la liste des diviseurs de 12 puis celle de 18.

$D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

3. Quels sont les diviseurs communs de 12 et de 18 ?

Les diviseurs communs de 12 et de 18 sont : 1, 2, 3 et 6.

Exercice d'application 1

1. (a) Donner la liste des diviseurs de 48.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(b) Donner la liste des diviseurs de 112.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(c) Quels sont les diviseurs communs de 48 et 112 ?

. . . .

2. Quels sont les diviseurs communs de 110 et 63 ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition

Dire que deux nombres entiers naturels sont **premiers entre eux** signifie que leur seul diviseur commun est 1.

Exemple :

Montrer que 12 et 35 sont premiers entre eux.

$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{35} = \{1; 5; 7; 35\}$
Le seul diviseur commun de 12 et 35 est 1 donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

Exercice d'application 2

Les couples de nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?

(a) 21 et 45 ? (b) 6 et 725 ? (c) 11 et 4 ? (d) 14 et 190 ?

....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....