Plan du cours

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

1. Multiples et diviseurs

Définition

Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

Définition

Dire que l'entier naturel a est **un multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que b est **un diviseur** de a et a est **divisible** par b.

Exemple : $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un multiple de 5 et 15 est un multiple de 3.
Autrement dit, 5 est un diviseur de 15.

Remarque :

- Tout nombre est multiple de 1 donc 1 est un diviseur de tout nombre entier naturel.

- Tout nombre est multiple de lui-même donc tout nombre est divisible par lui-même.

2. Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si il est pair, donc si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

  Exemple : 326 est divisible par 2 mais pas 987.

- Un nombre est divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.

  Exemple : 125 est divisible par 5 mais pas 431.

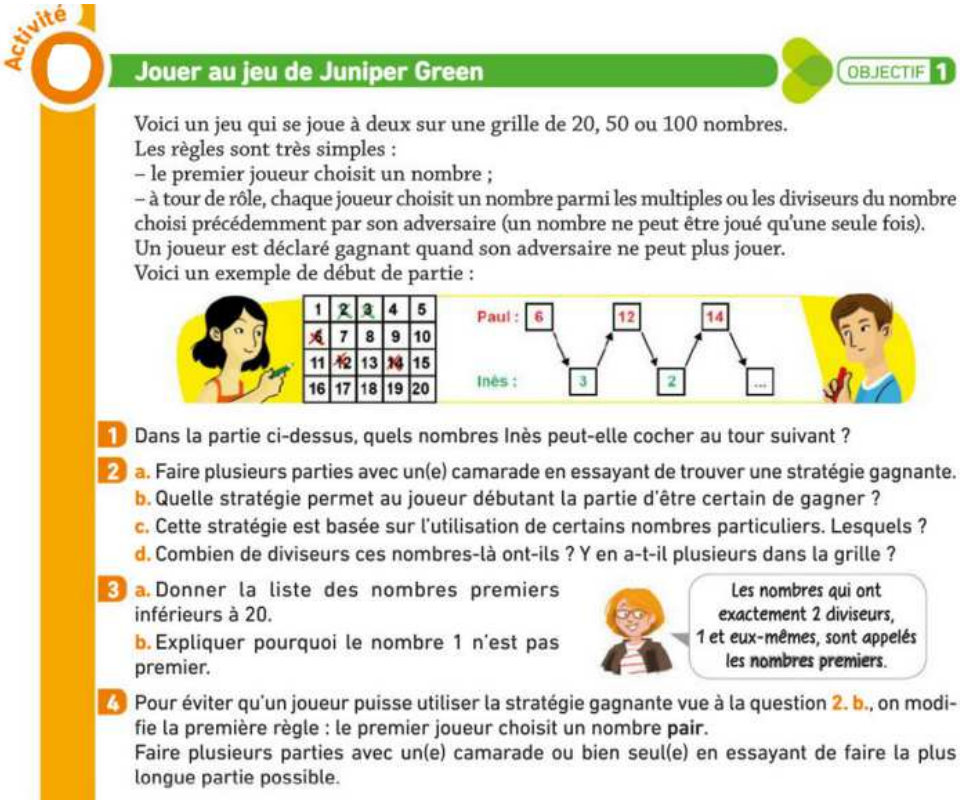
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

  Exemple : 177 est divisible par 3, car 1 + 7 + 7 = 15 et 15 est un multiple de 3.

- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

  Exemple : 738 est divisible par 9, car 7 + 3 + 8 = 18 et 18 est un multiple de 9.

Activité n°1



Activité

Jouer au jeu de Juniper Green OBJECTIF 1

Voici un jeu qui se joue à deux sur une grille de 20, 50 ou 100 nombres.
Les règles sont très simples :
– le premier joueur choisit un nombre ;
– à tour de rôle, chaque joueur choisit un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire (un nombre ne peut être joué qu'une seule fois).
Un joueur est déclaré gagnant quand son adversaire ne peut plus jouer.
Voici un exemple de début de partie :

1	~~2~~	~~3~~	4	5
~~6~~	7	8	9	10
11	~~12~~	13	~~14~~	15
16	17	18	19	20

1 Dans la partie ci-dessus, quels nombres Inès peut-elle cocher au tour suivant ?

2 a. Faire plusieurs parties avec un(e) camarade en essayant de trouver une stratégie gagnante.
b. Quelle stratégie permet au joueur débutant la partie d'être certain de gagner ?
c. Cette stratégie est basée sur l'utilisation de certains nombres particuliers. Lesquels ?
d. Combien de diviseurs ces nombres-là ont-ils ? Y en a-t-il plusieurs dans la grille ?

3 a. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 20.
b. Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier.

4 Pour éviter qu'un joueur puisse utiliser la stratégie gagnante vue à la question 2. b., on modifie la première règle : le premier joueur choisit un nombre **pair**.
Faire plusieurs parties avec un(e) camarade ou bien seul(e) en essayant de faire la plus longue partie possible.

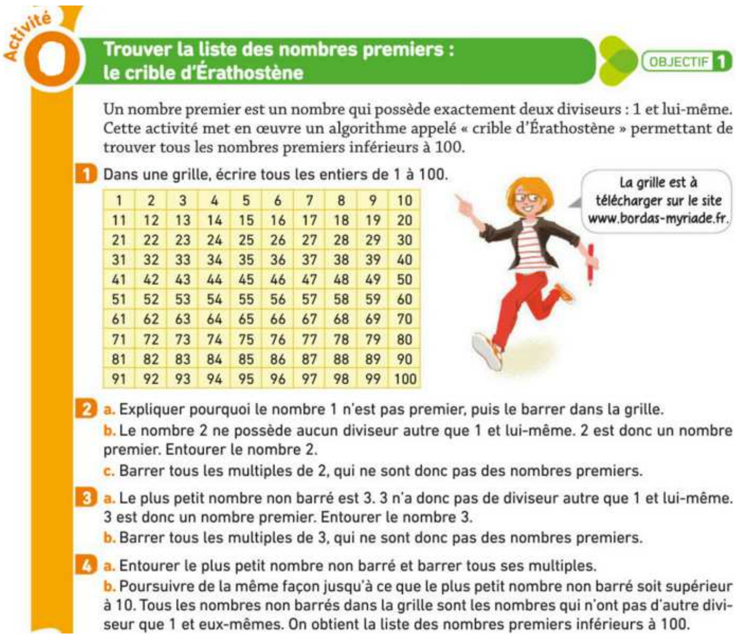
3. Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Attention, 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Exemple : Début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... (Pour une liste plus détaillée voir l'activité sur le crible d'Erathostène)



Activité 0

Trouver la liste des nombres premiers : le crible d'Érathostène

OBJECTIF 1

Un nombre premier est un nombre qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Cette activité met en œuvre un algorithme appelé « crible d'Érathostène » permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100.

1 Dans une grille, écrire tous les entiers de 1 à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La grille est à télécharger sur le site www.bordas-myriade.fr.

2 a. Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier, puis le barrer dans la grille.
b. Le nombre 2 ne possède aucun diviseur autre que 1 et lui-même. 2 est donc un nombre premier. Entourer le nombre 2.
c. Barrer tous les multiples de 2, qui ne sont donc pas des nombres premiers.

3 a. Le plus petit nombre non barré est 3. 3 n'a donc pas de diviseur autre que 1 et lui-même. 3 est donc un nombre premier. Entourer le nombre 3.
b. Barrer tous les multiples de 3, qui ne sont donc pas des nombres premiers.

4 a. Entourer le plus petit nombre non barré et barrer tous ses multiples.
b. Poursuivre de la même façon jusqu'à ce que le plus petit nombre non barré soit supérieur à 10. Tous les nombres non barrés dans la grille sont les nombres qui n'ont pas d'autre diviseur que 1 et eux-mêmes. On obtient la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

4. Diviseurs communs

Définition

Dire que d est **un diviseur commun** de deux nombres a et b signifie que a et b sont divisibles par d.

Exemple : Quels sont les diviseurs communs de 12 et 18 ?

$D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
Les diviseurs communs de 12 et de 18 sont : 1, 2, 3 et 6.

Définition

Dire que deux nombres entiers naturels sont **premiers entre eux** signifie que leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : Montrer que 12 et 35 sont premiers entre eux.

$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{35} = \{1; 5; 7; 35\}$
Le seul diviseur commun de 12 et 35 est 1 donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

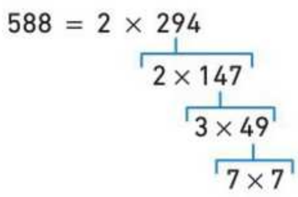
II. Applications

1. Décomposition et fractions irréductibles

Propriété

On peut toujours décomposer un nombre non premier en produits de facteurs premiers.

Exemple : Décomposons 588 :



Donc $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

Exercice d'application 1

Définition

Soient a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : $\frac{5}{7}$ est une fraction irréductible car 5 et 7 sont premiers entre eux.

Remarque : On peut simplifier facilement une fraction et la rendre irréductible en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple : On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$:

On sait que $120 = 12 \times 10 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$
et $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

Donc $\frac{120}{84} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

Exercices 27, 34 et 33 du livres

2. Notion de PGCD

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. Leur plus grand diviseur commun est noté PGCD(a ; b).

Exemple : Donner le PGCD de 35 et 60 ainsi que le PGCD de 144 et 48.

Exercice d'application 2

On a 12 croissants et 18 pains au chocolat que l'on veut répartir dans des corbeilles ayant toutes le même contenu.

Combien de corbeilles faut-il prévoir ? (Chercher toutes les possibilités)

....

....

....