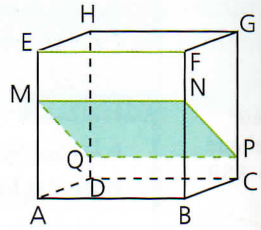
Savoir-faire 1 Construire en vraie grandeur la section d'un parallélépipède par un plan

Énoncé Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre est coupé par le plan (MNP) parallèle à l'arête [EF].
On donne : BF = 3 cm, BC = 2 cm, EF = 4 cm, FN = 1 cm et CP = 0,5 cm.
Dessiner en vraie grandeur la section MNPQ :
a. en n'utilisant que les outils de géométrie.
b. en commençant par calculer NP.

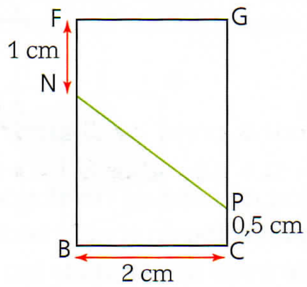


Solution

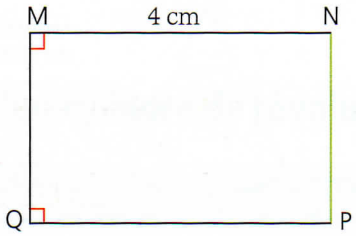
Le plan (MNP) est parallèle à l'arête [EF], donc la section MNPQ est un rectangle tel que : MN = EF = 4 cm.

> La seule donnée qu'il manque pour dessiner la section MNPQ en vraie grandeur est la longueur NP.

a. Détermination graphique de NP



> On trace la face rectangulaire BFGC telle que : BC = 2 cm et BF = 3 cm.
> Puis on place le point N du segment [BF] tel que : FN = 1 cm et le point P du segment [CG] tel que CP = 0,5 cm.

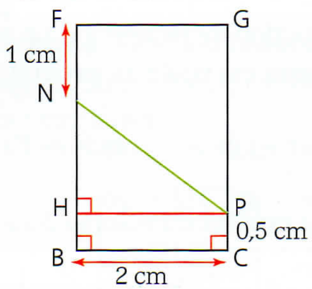


> On trace la section MNPQ sachant que c'est un rectangle de longueur MN = 4 cm et de largeur NP que l'on reporte au compas à partir de la figure précédente.

b. Calcul de NP

Soit H le point du segment [BF] tel que (PH) soit perpendiculaire à (BF).

> Pour calculer NP, on travaille avec la face BCGF.
> On trace un point supplémentaire H permettant de faire apparaître un triangle rectangle d'hypoténuse [NP].



Le quadrilatère BCPH a trois angles droits donc BCPH est un rectangle et par conséquent : HP = BC = 2 cm et BH = CP = 0,5 cm.

> On calcule la longueur HP en constatant que le quadrilatère BCPH est un rectangle.

Les points B, H, N, F étant alignés dans cet ordre, on obtient : HN = BF – NF – HB
soit : HN = 3 – 1 – 0,5.
D'où : HN = 1,5 cm.

> On calcule la longueur HN en utilisant l'alignement des points B, H, N, F.

Le triangle NHP est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$NP^2 = HN^2 + HP^2$

$NP^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 6{,}25$

$NP = \sqrt{6{,}25}$

$NP = 2{,}5$ cm.

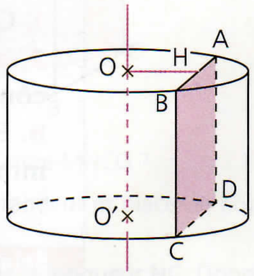
> On connaît les longueurs NH et HP donc on peut calculer NP en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle NHP rectangle en H.

La section MNPQ est donc un rectangle tel que : MN = 4 cm et NP = 2,5 cm.

> On peut maintenant tracer la section MNPQ.

Savoir-faire 2 Calculer les dimensions de la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe

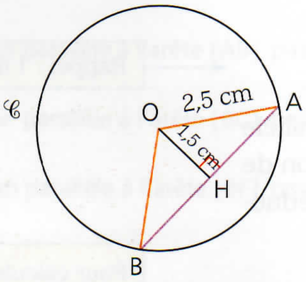
Énoncé **Le cylindre ci-contre de hauteur 3 cm et de diamètre 5 cm est coupé par un plan parallèle à son axe situé à 1,5 cm de l'axe.**
Calculer les dimensions de la section.



Solution

Le plan est parallèle à l'axe (OO'), donc la section ABCD est un rectangle tel que : AD = OO' = 3 cm.

> Une des deux dimensions de la section est la hauteur du cylindre (ici AD = OO'). Il reste à calculer l'autre dimension du rectangle ABCD : on va calculer la longueur AB.



> Pour calculer AB, on travaille dans le cercle de base de centre O et de rayon 2,5 cm.

A et B sont des points du cercle 𝒞 de centre O et de rayon 2,5 cm, donc :
OA = OB = 2,5 cm.
Le triangle AOB est donc isocèle en O.

Le point H est le pied de la hauteur issue du sommet principal O, donc H est le milieu de [AB].

> Le point H étant le milieu de [AB], on commence par calculer AH, puis on obtiendra AB en multipliant AH par 2.

Le triangle OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :
$OA^2 = OH^2 + HA^2$
D'où : $HA^2 = OA^2 - OH^2$
$HA^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 4$
$HA = 2$ cm.

On connaît OH et OA, donc pour calculer AH, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHA.

H est le milieu de [AB], donc
$AB = 2 \times AH = 2 \times 2$
$AB = 4$ cm.

On connaît AH, donc on peut maintenant calculer AB.

La section ABCD est donc un rectangle de dimensions 3 cm et 4 cm.

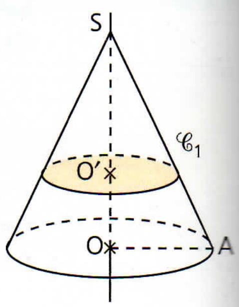
Savoir-faire 3 Calculer le volume d'un cône en utilisant un facteur de réduction

Énoncé **Un cône de révolution $\mathscr{C}_1$ de hauteur 6 cm et dont la base a pour rayon 3 cm est coupé par un plan parallèle à la base situé à 4 cm du sommet.**

1. Calculer le volume du cône $\mathscr{C}_1$. On arrondira le résultat au mm³.

2. a. Quel est le facteur de réduction qui permet d'obtenir le cône $\mathscr{C}_2$ de hauteur SO′ = 4 cm à partir du cône $\mathscr{C}_1$?

b. En déduire le volume du cône $\mathscr{C}_2$. On arrondira le résultat au mm³.



Solution

1. Soit $\mathscr{V}$ le volume du grand cône.

$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$\mathscr{V} = 18\pi$ **cm³, soit** $\mathscr{V} \approx 56{,}549$ **cm³.**

Rappel : 1 mm³ = 0,001 cm³

2. a. Le cône $\mathscr{C}_1$ est coupé par un plan parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base et le « petit » cône obtenu est une réduction du cône initial.
Soit k le facteur de réduction.
$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Pour calculer le facteur de réduction, on utilise les deux hauteurs SO′ et SO du cône réduit et du cône initial.

b. Soit $\mathscr{V}'$ le volume du cône réduit. On obtient ainsi :
$\mathscr{V}' = k^3 V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 18\pi = \frac{8}{27} \times 18\pi$

$\mathscr{V}' = \frac{16}{3}\pi$ **cm³, soit** $\mathscr{V}' \approx 16{,}755$ **cm³.**

Dans une réduction de facteur k, les longueurs sont multipliées par k et les volumes par k^3.