Séance d'AP 2 : Rédiger une démonstration

I. Rappel d'arithmétique

MULTIPLE - DIVISEUR

Soient a et b deux nombres entiers relatifs (b non nul).
S'il existe un entier relatif k tel que $a = bk$, on dit que a est un **multiple** de b et que b est un **diviseur** de a.

Exemples :

— *Montrer que 21 est un multiple de 7 :* $21 = 3 \times 7$ *donc 21 est bien un multiple de 7.*

— *Montrer que tout multiple de 9 est multiple de 3 :*
Soit a un multiple de 9. Comme a est un multiple de 9, il existe un entier k_1 *tel que* $a = 9k_1$.
Or, $a = 9k_1 = 3 \times 3 \times k_1 = 3 \times k_2$ *où* $k_2 = 3k_1$
k_2 *est un entier car produit de deux entiers, donc* $a = 3k_2$. a *donc aussi un multiple de 3.*

PAIR - IMPAIR - PREMIER

Soit a un nombre entier relatif.

— a est **pair** si 2 est un diviseur de a, c'est-à-dire s'il existe un nombre entier relatif k tel que $a = 2k$.
— a est **impair** si 2 nest pas un diviseur de a, c'est-à-dire s'il existe un nombre entier relatif k tel que $a = 2k + 1$.
— a est **premier** s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemples :

— *Montrer que 37 est un nombre impair :*
On peut écrire $37 = 2 \times 18 + 1 = 2k + 1$ *avec* $k = 18$. *Donc 37 est bien un nombre impair.*

— *Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair :*
Soient a et b deux entiers impairs. On peut alors écrire $a = 2k_1 + 1$ *et* $b = 2k_2 + 1$ *où* k_1 *et* k_2 *sont des entiers.*
Donc $a + b = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1) = 2k_3$ *où* $k_3 = k_1 + k_2 + 1$
$a + b$ *s'écrit sous la forme* $a + b = 2k_3$ *donc* $a + b$ *est un nombre pair.*

Démonstration 1

Propriété : "La somme de deux multiples de a est un multiple de a."

Soit b et c deux multiples de a.
Comme b est un multiple de a, il existe un entier k_1 tel que $b = ak_1$.
Comme c est un multiple de a, il existe un entier k_2 tel que $c = ak_2$"
Alors : $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2) = ak$, où $k = k_1 + k_2$.
$k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = ak$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de a.

Démonstration 2

Propriété : "Le carré d'un nombre impair est impair."

Soit a un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$ où k est entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ où $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 sécrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est un nombre impair.

Démonstration 3

Propriété : "$\frac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal."

Approche de la représentation du nombre par le calcul à la main : $\frac{1}{7} \approx 0.142857142857...$
Ce résultat ne permet de pas de justifier que $\frac{1}{7}$ n'est pas décimal.

Nous allons pour démontrer cette propriété utiliser le raisonnement par l'absurde.

Prenons alors la la proposition P **contraire** : $\frac{1}{7}$ est un nombre décimal.
Par définition, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{7} = \frac{a}{10^n}$
On a alors $10^n = 7a$.
10^n serait donc un multiple de 7.
Or la décomposition de 10^n en facteurs premiers : $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ montre que 10^n n'est pas un multiple de 7 qui lui est premier.
Donc, l'hypothèse de départ nous mène à une contradiction. On en déduit qu'elle est fausse.

Conclusion : $\frac{1}{7}$ **n'est pas un nombre décimal.**