Puissances

I. Notation puissance

1) Puissances à exposant positif

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel non nul.
L'écriture a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n\ facteurs}$$

On lit : « *a puissance n* ». Et « n » s'appelle **l'exposant** de a^n.

Convention : Pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$

Remarque : Pour tout nombre relatif a, $a^1 = a$.

Exemples : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ $\qquad (-8)^2 = (-8) \times (-8) = 64$

2) Puissances à exposant négatif

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel non nul. L'écriture a^{-n} désigne l'inverse de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n\ facteurs}}$$

Remarque : $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire que a^{-1} est l'inverse de a.

Exemples : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$; $(-13)^{-2} = \frac{1}{(-13)^2} = \frac{1}{(-13) \times (-13)} = \frac{1}{169}$

3) Priorités opératoires

Dans un enchainement de calculs, les priorités sont :

1) Parenthèses
2) Puissances
3) Multiplications, divisions
4) Additions, soustractions

Exemples : Calculer en respectant les priorités opératoires

$$A = 12 - 2^3 \times 5$$
$$A = 12 - 8 \times 5$$
$$A = 12 - 40$$
$$A = -28$$

$$B = 18 + (7 - 11)^2$$
$$B = 18 + (-4)^2$$
$$B = 18 + 16$$
$$B = 34$$

$$C = 2 \times \left[7 \div 10^2 - (-2)^3\right]$$
$$C = 2 \times \left[7 \div 100 - (-8)\right]$$
$$C = 2 \times \left[0,07 - (-8)\right]$$
$$C = 2 \times \left[0,07 + 8\right]$$
$$C = 2 \times 8,07$$
$$C = 16,14$$

Pièges à éviter :

a) $5^3 \neq 5 \times 3$ car $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ et $5 \times 3 = 5 + 5 + 5$

b) $-2^6 \neq (-2)^6$ car -2^6 est négatif

c) $3 \times 7^4 \neq (3 \times 7)^4$

d) $5 + 3^2 \neq (5 + 3)^2$

II- Puissances de 10

Exercice : Compléter les égalités suivantes avec une puissance de 10 :

$$34{,}125 = 0{,}034125 \times 10^3 \quad ; \quad 6{,}2836 = 628{,}36 \times 10^{-2}$$

$$0{,}00017 = 170 \times 10^{-6} \quad ; 27{,}18 = 271800 \times 10^{-4}$$

a) Ecriture scientifique

Définition : Tout nombre décimal non nul admet une **écriture scientifique**, écriture sous la forme : $a \times 10^{n}$ où a est un nombre dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieur à 10.
Le nombre a s'appelle **la mantisse**.

Exemples : L'écriture scientifique de - 4235 est $-4{,}235 \times 10^3$;
L'écriture scientifique de 0,0124 est $1{,}24 \times 10^{-2}$

b) Préfixes à retenir

Préfixe	giga	méga	kilo	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	c	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Ecritures décimales	*1 000 000 000*	*1 000 000*	*1 000*	*0,01*	*0,001*	*0,000 001*	*0,000 000 001*

Exemples : Un gigaoctet, noté Go, correspond à une quantité de données numériques de 10^9 octets, soit un milliard d'octet.
Un microgramme, noté μg, correspond à une masse de 10^{-6} grammes, soit un millionième de gramme.

Exercice : Compléter le tableau suivant

Ecriture décimale	Ecriture scientifique	Ecriture décimale	Ecriture scientifique
253	$= 2{,}53 \times 10^{2}$	0,053	$= 5{,}3 \times 10^{-2}$
56	$= 5{,}6 \times 10^{1}$	0,056	$= 5{,}6 \times 10^{2}$
1 237	$= 1{,}237 \times 10^{3}$	0,375	$= 3{,}75 \times 10^{-1}$
1 563	$= 1{,}563 \times 10^{3}$	0,005	$= 5 \times 10^{-3}$
580	$= 5{,}8 \times 10^{2}$	0,00017	$= 1{,}7 \times 10^{-4}$

c) Calculer avec des puissances de 10

On considère n et m deux nombres **entiers** non nuls.

PRODUIT	INVERSE	QUOTIENT	PUISSANCE DE PUISSANCE
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$	$\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$(10^m)^n = 10^{m\times n}$
Exemple :	***Exemple :***	***Exemple :***	***Exemple :***
$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$	$\dfrac{1}{10^7} = 10^{-7}$	$\dfrac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$	$(10^{-5})^2 = 10^{-5\times 2} = 10^{-10}$

Exercice : Ecrire le résultat sous la forme d'une puissance de 10

$10^4 \times 10^3 = 10^7$; $10^2 \times 10^{-2} = 10^0 = 1$; $10^5 \times 10^1 \times 10^6 = 10^{12}$; $\dfrac{10^{10}}{10^3} = 10^7$; $\dfrac{10^5}{10^{-3}} = 10^8$; $\dfrac{10^{-2}}{10^{-3}} = 10^1$

$\dfrac{10^4}{10^3} \times \dfrac{10^9}{10^3} = 10 \times 10^6 = 10^7$; $10 \times \dfrac{10^{-1}}{10^4} \times 10^2 = 10 \times 10^{-5} \times 10^2 = 10^{-2}$;

$(10^2)^3 = 10^6$; $(10^{-1})^5 = 10^{-5}$; $(10^{-2})^{-7} = 10^{14}$

$(10^3)^4 \times 10^{-2} = 10^{12} \times 10^{-2} = 10^{10}$; $\dfrac{10^4}{10^3} \times (10^4)^3 = 10 \times 10^{12} = 10^{13}$;

$$\frac{(10^2)^3 \times 10^{-4}}{(10^4)^{-3} \times 10^2} = \frac{10^6 \times 10^{-4}}{10^{-12} \times 10^2} = \frac{10^2}{10^{-10}} = 10^{12}$$

II- Généralités sur les puissances

A retenir : (pour a non nul car 0^0 n'est pas défini)

Par convention : $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- Pour n et p entiers relatifs : $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $(a^n)^p = a^{n \times p}$; $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- Pour a et b des nombres, b non nul et n entier relatif : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Applications : Calculer en respectant les priorités et en utilisant les formules sur les puissances. Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

Pour limiter le nombre de feuilles, les calculs sont écrits en ligne alors qu'il est préférable de les écrire en colonne :

Tableau 1 :

$A = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$

$B = 3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$

$C = 3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$

$D = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$

$E = (2 \times 4)^3 = 8^3 = 512$

$F = 2 \times 4^3 = 2 \times 64 = 128$

$G = 2^3 \times 4 = 8 \times 4 = 32$

$H = 2^3 \times 4^3 = 8 \times 64 = 512$

Tableau 2 :

$A = 2 \times 3^2 + 4 = 2 \times 9 + 4 = 18 + 4 = 22$

$B = 2 + 3^2 \times 4 = 2 + 9 \times 4 = 2 + 36 = 38$

$C = 2 \times 3 + 4^2 = 6 + 16 = 22$

$D = 2 + 3 \times 4^2 = 2 + 3 \times 16 = 2 + 48 = 50$

$E = 2^2 \times 3 + 4 = 4 \times 3 + 4 = 16$

$F = 2^2 + 3 \times 4^2 = 4 + 3 \times 16 = 4 + 48 = 52$

$G = 2 \times 3^2 + 4 \times 5 = 2 \times 9 + 20 = 18 + 20 = 38$

$H = 2 \times 3 + 4^2 \times 5 = 6 + 16 \times 5 = 6 + 80 = 86$

$I = (2 \times 3)^2 + 4 \times 5 = 6^2 + 20 = 36 + 20 = 56$

$J = 2 \times (3 + 4)^2 \times 5 = 2 \times 7^2 \times 5 = 2 \times 49 \times 5 = 490$

Tableau 3 :

$$E = \frac{4^4 \times 3^4}{2^4 \times 12^4} \times 6^4$$

$$E = \frac{(4 \times 3)^4 \times (2 \times 3)^4}{2^4 \times 12^4}$$

$$E = \frac{12^4 \times 2^4 \times 3^4}{2^4 \times 12^4}$$

$$E = 3^4$$

$$F = \frac{7^{-3} \times 10^3 \times 14^3 \times 2^{-3}}{3^3 \times 5^3 \times 6^{-3}}$$

$$F = \frac{7^{-3} \times (5 \times 2)^3 \times (7 \times 2)^3 \times 2^{-3}}{3^3 \times 5^3 \times (2 \times 3)^{-3}}$$

$$F = \frac{7^{-3} \times 5^3 \times 2^3 \times 7^3 \times 2^3 \times 2^{-3}}{3^3 \times 5^3 \times 2^{-3} \times 3^{-3}}$$

$F = \frac{2^3}{2^{-3}}$ car $a^{-n} \times a^n = 1$ donc $F = 2^6$

Une technique à retenir :

$A = 3 \times 10^4 \times 5 \times 10^3$

$A = 3 \times 5 \times 10^4 \times 10^3$ — **On change l'ordre des facteurs… « Les puissances de 10 derrière »**

$A = 15 \times 10^7$ — On « calcule » les deux « petits » produits (Calculatrice)

$A = 1{,}5 \times 10^8$ — On donne l'écriture scientifique

$B = \frac{18 \times 10^{-4} \times 2{,}5 \times 10^9}{15 \times 10^7}$

$B = \frac{18 \times 2{,}5 \times 10^{-4} \times 10^9}{15 \times 10^7}$ — **On change l'ordre des facteurs… « Les puissances de 10 derrière »**

$B = \frac{18 \times 2{,}5}{15} \times \frac{10^{-4} \times 10^9}{10^7}$ — **On sépare en deux quotients**

$B = 3 \times \frac{10^5}{10^7}$ — On calcule le premier quotient (calculatrice) et on simplifie le 2e ces quotients à l'aide des propriétés de calculs avec les puissances de 10.

$B = 3 \times 10^{5-7}$

$B = 3 \times 10^{-2}$ — On donne l'écriture scientifique

Entrainement

Puissances

Exercice 1 :

1) Donner les résultats des calculs suivants sous la forme a^n :

$I = (10^{-2})^{-5}$; $J = 7 \times 7^5 \times 7^{-3}$; $K = \dfrac{5^{-11} \times 5^{-3}}{5^4 \times (5^{-2})^{-5}}$

2) Donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique des résultats des calculs suivants :

$A = \dfrac{4 \times 10^5 \times 6{,}4 \times 10^{-3}}{0{,}16 \times 10^4}$ $B = \dfrac{4 \times 10^2 + 3 \times 10}{4 \times 10 + 3}$ $C = 15 \times 10^{-3} + 340 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-2}$

Résolution :

1) $I = (10^{-2})^{-5} = 10^{10}$; $J = 7 \times 7^5 \times 7^{-3} = 7^3$;

$K = \dfrac{5^{-11} \times 5^{-3}}{5^4 \times (5^{-2})^{-5}}$

$K = \dfrac{5^{-14}}{5^4 \times 5^{10}}$

$K = \dfrac{5^{-14}}{5^{14}}$

$K = 5^{-28}$

2) $A = \frac{4 \times 10^5 \times 6{,}4 \times 10^{-3}}{0{,}16 \times 10^4}$

$A = \frac{4 \times 6{,}4}{0{,}16} \times \frac{10^5 \times 10^{-3}}{10^4}$

$A = 160 \times \dfrac{10^2}{10^4}$

$A = 160 \times 10^{-2}$

$A = 1{,}6$

$A = 1{,}6 \times 10^0$ (Écriture scientifique)

$B = \dfrac{4 \times 10^2 + 3 \times 10}{4 \times 10 + 3}$

$B = \dfrac{4 \times 100 + 30}{40 + 3}$

$B = \dfrac{430}{43}$

$B = 10$

$B = 1 \times 10^1$ (Écriture scientifique)

$C = 15 \times 10^{-3} + 340 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-2}$

$C = 0{,}015 + 34 - 0{,}02$

$C = 33{,}995$

$C = 3{,}3995 \times 10^1$ (Écriture scientifique)