

Plan du cours

I.	Division euclidienne	1
II.	Multiples, diviseurs et nombres premiers	2
1.	Multiples et diviseurs	2
2.	Critères de divisibilité (Rappel de 6ème)	2
3.	Nombres premiers	3
4.	Diviseurs communs	3
III.	Décomposition en produit de facteurs premiers	3
1.	Définition	3
2.	Notion de PGCD	4
3.	Application aux fractions irréductibles	5

Mes objectifs :

- ↪ Je dois savoir si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier. Et savoir reconnaître un nombre premier,
- ↪ Je dois connaître et savoir utiliser les critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5, 4, 9 ou 10),
- ↪ Je dois savoir écrire une décomposition en facteurs premiers dans des cas simples,
- ↪ Je dois savoir simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

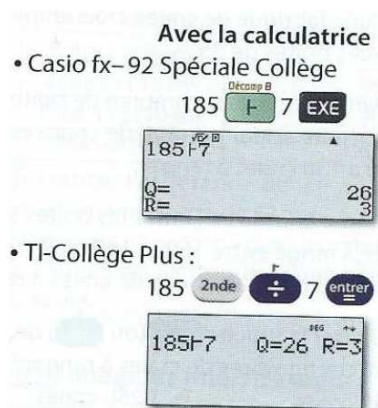
I. Division euclidienne

Propriété

Effectuer la division euclidienne d'un entier **a (le dividende)** par un entier **b (le diviseur)** non nul, c'est trouver deux entiers **q (le quotient)** et **r (le reste)** tels que :

$$a = b \times q + r$$

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 185 par 7.



II. Multiples, diviseurs et nombres premiers

1. Multiples et diviseurs

Définition

Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Définition

Dire que l'entier naturel a est un **multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que b est un **diviseur** de a et a est **divisible** par b .

Exemple : $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un **multiple** de 5
- 15 est un **multiple** de 3.
- 5 et 3 sont des **diviseurs** de 15.

Remarque :

- Tout nombre est multiple de 1 donc 1 est un diviseur de tout nombre entier naturel.
- Tout nombre est multiple de lui-même donc tout nombre est divisible par lui-même.

2. Critères de divisibilité (Rappel de 6ème)

- Un nombre est divisible par 2 si il est pair, donc si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemple : 326 est divisible par 2 mais pas 987.

- Un nombre est divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.

Exemple : 125 est divisible par 5 mais pas 431.

- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Exemple : 43 281 est divisible par 3, car $4 + 3 + 2 + 8 + 1 = 18$ et 18 est un multiple de 3.

- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple : 738 est divisible par 9, car $7 + 3 + 8 = 18$ et 18 est un multiple de 9.

- Un nombre est divisible par 10 si il se termine par 0.

Exemple : 350 est divisible par 10.

3. Nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs distincts, 1 et lui-même.



Attention, 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Exemple : Début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...
(Pour une liste plus détaillée voir l'activité sur le crible d'Erathostène)

4. Diviseurs communs

Définition

Dire que d est un **diviseur commun** de deux nombres a et b signifie que a et b sont divisibles par d .

Exemple : Quels sont les diviseurs communs de 12 et 18 ?

$$D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\} \quad \text{et} \quad D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Les diviseurs communs de 12 et de 18 sont : 1, 2, 3 et 6.

Définition

Dire que deux nombres entiers naturels sont **premiers entre eux** signifie que leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : Montrer que 12 et 35 sont premiers entre eux.

$$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \quad \text{et} \quad D_{35} = \{1; 5; 7; 35\}$$

Le seul diviseur commun de 12 et 35 est 1 donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

III. Décomposition en produit de facteurs premiers

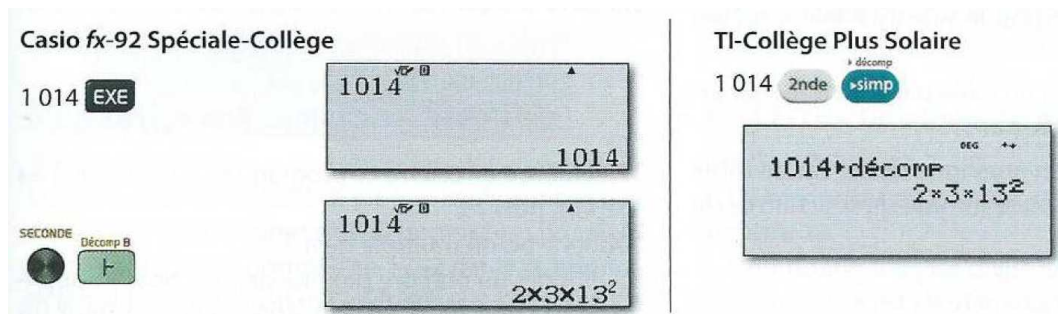
1. Définition

Propriété

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple : Décomposons 1014 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{aligned} 1014 &= 2 \times 507 \\ 1014 &= 2 \times (3 \times 169) \\ 1014 &= 2 \times (3 \times (13 \times 13)) \\ 1014 &= 2 \times 3 \times 13 \times 13. \\ \text{Donc, } 1014 &= 2 \times 3 \times 13^2. \end{aligned}$$



Exercice d'application 1

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

24

.....

2 100

.....

588

.....

2. Notion de PGCD

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. Leur plus grand diviseur commun est noté PGCD(a ; b).

Exemple : 1. Donner le PGCD de 35 et 60 à l'aide de la liste des diviseurs de chacun des nombres.

.....

2. Donner le PGCD de 144 et 48 en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exercice d'application 2

On a 126 croissants et 180 pains au chocolat que l'on veut répartir dans des corbeilles ayant toutes le même contenu.
Combien de corbeilles peut-on prévoir au maximum ?

3. Application aux fractions irréductibles

Définition

Soient a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : $\frac{5}{7}$ est une fraction irréductible car 5 et 7 sont premiers entre eux.

Remarque : On peut simplifier facilement une fraction et la rendre irréductible en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple : On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$:

On sait que $120 = 12 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

et $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Donc $\frac{120}{84} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

Exercices 27, 34 et 33 du livres