

AVERTISSEMENT

Vous venez de télécharger gratuitement le fichier pédagogique du manuel Mission Indigo Cycle 4.

Nous vous rappelons qu'il est destiné à un **usage strictement personnel**. Il ne peut ni être reproduit ni être mutualisé sur aucun site (site d'établissement, site enseignant, blog ou site de peer to peer), même à titre gracieux.

Deux raisons principales :

- **Eviter de rendre le fichier accessible aux élèves dans les moteurs de recherche.**
- **Respecter pleinement le droit d'auteurs** : en effet, l'ensemble des guides pédagogiques et livres du professeur mis à votre disposition sont des œuvres de l'esprit protégées par le droit de la propriété littéraire et artistique.

Nous vous rappelons que selon les articles L 331-1 et L 335-4 du Code de la propriété intellectuelle, toute exploitation non autorisée de ces œuvres constitue un délit de contrefaçon passible de sanctions de natures pénale et civile, soit trois ans d'emprisonnement et 300 000 euros d'amende.



MATHS



LIVRE DU PROFESSEUR

Sous la direction de Christophe BARNET

Helena BERGER
Nadine BILLA
Patricia DEMOULIN
Amaïa FLOUS
Benoît LAFARGUE
Marion LARRIEU
Aurélie LAULHERE
Marie-Christine LAYAN
Sandrine POLLET
Marion ROBERTOU
Florian RUDELLE
Agnès VILLATTES

hachette
ÉDUCATION
vous accompagne

Édition : Charlotte Kocalénios, Nathalie Legros, Cécile Chavent, Stéphanie Mathé, Valérie Dumur

Fabrication : Yoann Le Berre

Mise en page : Grafatom (Catherine Bonnevialle)

Schémas : Lionel Buchet, Grafatom (Franck Gouvert)

Couverture : Anne-Danielle Naname / Laurine Caucat

Maquette intérieure : Anne-Danielle Naname / Laurine Caucat – Grafatom (Catherine Bonnevialle)

© Scratch : pages 9, 10, 29, 38, 43, 55, 65-66, 76, 84, 93, 109, 116, 124, 136-137, 144-145, 153, 161, 169, 177, 184, 191, 202, 220, 228, 236, 250, 258, 267, 268, 278-279, 291-292, 303, 313, 324, 335-336, 348-349, 362-363, 375, 387-388, 401, 445, 459-460, 462-492, 497, 502-503.

Scratch est développé par le groupe Lifelong Kindergarten auprès du MIT Media Lab.

Voir <http://scratch.mit.edu>

© Hachette Livre 2017, 58 rue Jean Bleuzen 92178 Vanves.

www.hachette-education.com

ISBN 978-2-01-702535-1

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

L'usage de la photocopie des ouvrages scolaires est encadré par la loi.

Grâce aux différents accords signés entre le CFC (www.cfcopies.com), les établissements et le ministère de l'Éducation nationale, sont autorisées :

- les photocopies d'extraits de manuels (maximum 10 % du livre) ;
- les copies numériques d'extraits de manuels dans le cadre d'une projection en classe (au moyen d'un vidéoprojecteur, d'un TBI-TNI, etc.) ou d'une mise en ligne sur l'intranet de l'établissement, tel que l'ENT (maximum 4 pages consécutives dans la limite de 5 % du livre). Indiquer alors les références bibliographiques des ouvrages utilisés.

Avant-propos

Dans un contexte de profonds changements, cette nouvelle collection se veut à la hauteur des enjeux.

L'équipe d'auteurs propose :

- un parcours structuré suivant la **logique de cycle** ;
- des ressources nombreuses et variées pour répondre aux besoins de **tous les élèves** et de toutes les démarches pédagogiques ;
- des contenus attractifs pour **motiver** les élèves et une place centrale accordée au **numérique**.

Un manuel de cycle

Les différents attendus de fin de cycle sont travaillés **tout au long du cycle**, en cohérence avec les repères de progressivité des programmes. Ils sont **introduits** puis **approfondis** progressivement à chaque niveau. Le parcours proposé s'inscrit donc complètement dans la logique d'un programme de cycle, avec notamment :

- des **activités** qui permettent de remobiliser des notions déjà étudiées et d'en découvrir de nouvelles ;
- un **cours** qui présente de façon synthétique tous les attendus de fin de cycle ;
- des **exercices** d'entraînement et des problèmes conçus pour :
 - acquérir et entretenir les fondamentaux tout au long du cycle ;
 - approfondir de façon progressive les attendus de fin de cycle ;
 - découvrir des notions qui vont au-delà des attendus de fin de cycle.

Une grande variété de problèmes pour tous les élèves

Chaque manuel propose :

- des problèmes simples, concrets et accessibles à tous les élèves et des problèmes à **prise d'initiative** favorisant la réflexion et l'autonomie ;
- des problèmes qui mobilisent les **six compétences mathématiques** du programme, avec un repérage de ces compétences pour s'assurer qu'elles sont toutes travaillées et/ou pour les évaluer plus facilement ;
- des problèmes qui contribuent à **tous les domaines du socle commun** avec une indication des problèmes en lien avec **d'autres disciplines** ;
- des problèmes qui permettent un entraînement régulier aux différentes formes de raisonnement et un apprentissage progressif de la **démonstration**.

De nombreuses ressources pour introduire l'algorithmique et utiliser les outils numériques

Le thème « Algorithmique et programmation » est abordé à travers :

- des **exercices courts** dans chaque chapitre, en lien avec les notions étudiées ;
- des **activités** qui permettent de construire progressivement et rapidement tous les attendus de fin de cycle ;
- la réalisation de **projets motivants**, accessibles à tous les élèves et permettant une différenciation des attendus pour mieux gérer l'hétérogénéité de leur niveau.

Des exercices faisant appel à un tableur ou à un logiciel de géométrie dynamique sont également proposés dans tous les chapitres.

Des ressources pour l'accompagnement personnalisé

Dans chaque chapitre, une page « Travailler autrement » propose des **exercices différenciés**, ainsi que des activités permettant de **travailler en groupe**. De nombreux **problèmes ouverts** permettent également de différencier les attendus selon le niveau des élèves.

En fin de manuel sont proposés quelques projets réalisables dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires. De nombreux problèmes interdisciplinaires présents dans chaque chapitre peuvent compléter ces ressources.

Des chapitres structurés pour s'adapter à toutes les démarches pédagogiques

Chaque chapitre est structuré autour de deux, trois ou quatre capacités. À chacune d'elles correspondent une ou plusieurs activités d'introduction, un paragraphe de cours et des exercices d'entraînement.

Il est ainsi plus aisément de construire une **progression spiralée**, de mettre en œuvre une évaluation ciblée des acquis des élèves et de proposer des **remédiations** aux difficultés des élèves.

Des compléments numériques riches et innovants

Le manuel numérique, accessible facilement pour tous les élèves, propose :

- des **diaporamas** pour toutes les « Questions flash », ainsi que des exercices et un QCM interactifs pour travailler l'**oral** en classe de façon simple et vivante ;
- des **activités supplémentaires**, qui permettent de remobiliser des notions étudiées les années antérieures ou d'en découvrir de nouvelles ;
- une **vidéo** d'environ deux minutes qui présente de façon synthétique chaque capacité du cours, utilisable en remédiation ou dans le cadre d'une « classe inversée » ;
- des **exercices résolus** pour s'approprier les savoir-faire correspondant à chaque capacité du cours ;
- deux pages d'**exercices supplémentaires** pour chaque chapitre, à utiliser en classe, en accompagnement personnalisé ou par l'élève en autonomie ;
- pour chaque chapitre, un QCM d'**auto-évaluation** de chaque capacité et une **carte mentale** qui reprend l'**essentiel du cours** ;
- les fichiers de tous les exercices faisant appel à un logiciel ;
- des **activités supplémentaires d'algorithmique et de programmation** ;
- des exemples de projets réalisables dans le cadre des EPI.

L'équipe des auteurs

Pour construire le cours

Des questions flash...

... qui portent sur des **activités mentales** courtes que l'on peut facilement et rapidement traiter à l'oral et qui remobilisent des notions déjà étudiées.

5. Écrire sous la forme d'un produit.

- $b^2 + 3b$
- $12 - 6y$
- $14x^2 + 2x$
- $16x - 4x^2$

Des activités...

... qui permettent de remobiliser des notions déjà étudiées et d'en découvrir de nouvelles.

Activité 2

Quand Zoé entre dans le labyrinthe, elle tape sur sa calculatrice, en une seule ligne, les nombres et les opérations qu'elle rencontre le long de son chemin (elle ne peut aller que vers la droite et vers le bas).

- À la sortie du labyrinthe, la calculatrice de Zoé affiche 14 comme résultat. Quel chemin Zoé a-t-elle suivi ?
- Écrire les calculs correspondant à trois autres chemins, ainsi que leurs résultats.
- Dans quel ordre la calculatrice semble-t-elle effectuer les opérations ?

Des activités à prise d'initiative...



... qui accordent une place centrale à la réflexion de l'élève et qui lui permettent de **construire** le sens des notions abordées et d'en **percevoir** l'utilité.

Activité 2

Prise d'initiative

Pour ce jeu, qui se joue à deux, on utilise une grille de 20 cases numérotées de 1 à 20 et les règles suivantes.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Règle 1: chaque joueur, à tour de rôle, coche une case qui n'a pas encore été cochée.

Règle 2: à l'exception du coup d'ouverture, chaque joueur ne peut cocher une case que si son numéro est un diviseur ou un multiple du numéro de la case cochée au coup précédent.

Règle 3: un joueur perd la partie lorsqu'il ne peut plus jouer en utilisant les règles précédentes.

Un cours synthétique

Un cours clair et concis...

... accessible à tous les élèves.

3 Reconnaitre un nombre premier

Définition

Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

- 6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme diviseurs.
- 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Propriété

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Il existe une infinité de nombres premiers.
Liste des nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Un cours construit...

... pour faciliter une **progression spiralee**.

Chaque chapitre du manuel est structuré autour de deux, trois ou quatre capacités. À chacune d'elles correspondent une ou plusieurs activités d'introduction, un paragraphe de cours et des exercices d'entrainement.

Il est ainsi plus aisés de construire une progression spiralee pour chaque niveau sur l'ensemble du cycle, de mettre en œuvre une **évaluation ciblée** des acquis des élèves et de proposer des remédiations aux difficultés des élèves.

Pour utiliser le cours

Des questions flash...

... qui se prêtent particulièrement bien à un traitement à l'oral, en début de séance ou à l'issue de l'institutionnalisation d'une notion. Elles contribuent à rendre le cours plus vivant.

Questions flash

diapo

- 1 Vrai ou faux ?**
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
 1. 56 est un multiple de 8. 2. 0 est un diviseur de 16.
 3. 5 divise 20. 4. 1 est un multiple de 9.
 5. 48 est divisible par 2. 6. 26 est un multiple de 4.
- 2** Compléter les phrases suivantes par les nombres qui conviennent.
 1. ... est à la fois un multiple et un diviseur de 25.
 2. ... est un multiple de tous les nombres.
 3. ... est un diviseur de tous les nombres.
 4. ... et ... sont les diviseurs de 7.
 5. ... est le plus petit multiple de 2 et 9.

Des problèmes...

... d'une grande variété dont certains permettent de découvrir des notions qui vont au-delà des attendus de fin de cycle.

34 Les Daltons



Après avoir observé ce dessin, Lili affirme qu'elle reconnaît deux transformations géométriques. Antone lui répond qu'elle se trompe.

1. À quelles transformations Lili pense-t-elle ?
2. Lequel des deux a raison ? Justifier.

60 Numération binaire

Pour aller plus loin

Le système de numération binaire est un moyen de représenter les nombres avec deux symboles : 0 et 1. Il est constamment utilisé en informatique.

Exemple : Le nombre **1101** en écriture binaire correspond au nombre 13. On écrit :

$$\begin{aligned} 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ = 13 \end{aligned}$$

1. Trouver les nombres correspondant aux nombres en numération binaire suivants.

101

11001

11101

2. On veut écrire 125 en écriture binaire :

- vérifier que la plus grande puissance de 2 contenue dans 125 est 2^6 donc 64 ;
- trouver le reste de la division euclidienne de 125 par 64, on peut alors écrire $125 = 2^6 \times 1 + 61$;
- trouver la plus grande puissance de 2 contenue dans ce reste, on peut alors écrire $61 = 2^5 \times 1 + R$;
- recommencer le processus.

On peut alors écrire $125 = 2^6 \times 1 + \dots$ et trouver son écriture en numération binaire.

3. Trouver l'écriture binaire des nombres suivants.

24

36

102

Des exercices...

... pour acquérir les savoir-faire fondamentaux et pour les entretenir tout au long du cycle.

7 Effectuer les calculs suivants.

$$\begin{array}{lll} A = (-7) - (-10) & B = 7 + (-9,4) & C = (-12) + (-7) \\ D = -13 - 3 & E = (-19) + 8 & F = 6 - 9 \end{array}$$

8 Calculer :

- a. la différence entre 35 et (-13) ;
- b. la somme de (-39) et 41 ;
- c. la somme de (-12,3) et (-4,7) ;
- d. la différence entre 7 et 15.

9 La petite sœur de Léa a gribouillé une partie de son travail.

- Aider Léa à retrouver les termes manquants.

$$\begin{array}{l} a. 5 + \blacksquare = -4 \\ b. (-9) + \blacksquare = -2 \\ c. (-12) + \blacksquare = -5 \\ d. 8 + \blacksquare = 3 \end{array}$$

La contribution des mathématiques au socle commun de connaissances, de compétences et de culture se concrétise par la mobilisation de compétences à travers la résolution de problèmes internes aux mathématiques, en lien avec d'autres disciplines ou issus de la vie courante.

Les six compétences mathématiques

Le programme mentionne explicitement comme objectif l'acquisition des six compétences mathématiques qui contribuent notamment à l'acquisition du domaine 1.3. du socle commun.

Dans chaque chapitre, un repérage de quelques problèmes permettant de travailler plus spécifiquement chaque compétence est proposé. Cela permet ainsi de s'assurer que chaque compétence est régulièrement mobilisée dans les travaux proposés aux élèves. Cela peut également faciliter une démarche d'évaluation de ces compétences.

Pour mieux cibler les compétences					
Chercher	54	57	Raisonner	44	56
Modéliser	46	52	Calculer	43	45
Représenter	55	60	Communiquer	52	59

Des problèmes qui contribuent à tous les domaines du socle commun

Au-delà des objectifs du programme de mathématiques, chaque enseignement disciplinaire doit contribuer à l'acquisition de l'ensemble du socle commun de connaissances, de compétences et de culture. **Les problèmes ont été choisis pour contribuer autant que possible à chaque domaine du socle commun.**

- 1. Les langages pour penser et communiquer
- 1.1. Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral et à l'écrit
- 1.2. Comprendre, s'exprimer en utilisant une langue étrangère et, le cas échéant, une langue régionale
- 1.3. Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques
- 1.4. Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages des arts et du corps
- 2. Les méthodes et outils pour apprendre
- 3. La formation de la personne et du citoyen
- 4. Les systèmes naturels et les systèmes techniques
- 5. Les représentations du monde et l'activité humaine

Des problèmes simples, concrets

Des problèmes accessibles à tous les élèves

Des problèmes qui permettent un **entraînement régulier aux différentes formes de raisonnement et un apprentissage progressif de la démonstration**.

Dans chaque chapitre, quatre pages sont dédiées à des problèmes motivants, souvent concrets ou en lien avec d'autres disciplines. Leur variété et leur progressivité permettent de proposer à **tous les élèves** des travaux mobilisant leurs connaissances et leurs compétences, dans l'esprit des nouvelles épreuves du DNB.

23 Guernica

Voici une photo à l'échelle $\frac{1}{145}$ du tableau *Guernica* peint en 1937 par Pablo Picasso et représentant une scène de massacre dans la ville de Guernica pendant la guerre civile espagnole.



• Estimer les dimensions réelles de ce tableau.

Des problèmes à prise d'initiative

Des problèmes favorisant la réflexion et l'autonomie des élèves

Des problèmes à prise d'initiative, dont certains prennent la forme de **tâches complexes**, permettent d'aller plus loin dans l'acquisition des différentes compétences des élèves, notamment de la compétence « **chercher** ». Ils permettent de mettre en œuvre des « **pratiques d'investigation** » (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) préconisées par le programme.

46 Défis !



- En utilisant 5 fois le chiffre 5, les opérations de ton choix et éventuellement des parenthèses, écrire une expression égale à 55.
- En utilisant 6 fois le chiffre 6, les opérations de ton choix et éventuellement des parenthèses, écrire une expression égale à 66.

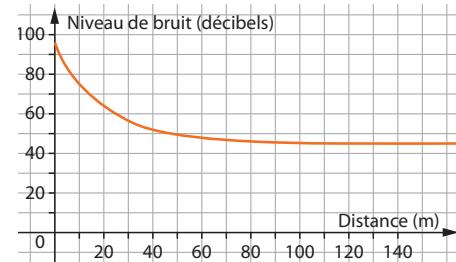
Des problèmes



Des problèmes issus des annales du DNB et qui correspondent à l'esprit de la nouvelle épreuve du Brevet.

37 Beaucoup de bruit pour rien

Le graphique ci-dessous donne le niveau de bruit (en décibels) d'une tondeuse à gazon en marche, en fonction de la distance (en mètres) entre la tondeuse et l'endroit où s'effectue la mesure.



En utilisant ce graphique, répondre aux deux questions suivantes. *Aucune justification n'est attendue.*

- Quel est le niveau de bruit à une distance de 100 mètres de la tondeuse ?
- À quelle distance de la tondeuse se trouve-t-on quand le niveau de bruit est égal à 60 décibels ?

D'après DNB Polynésie, 2015.

Des problèmes transversaux

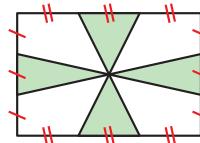
Des problèmes transversaux à la fin du manuel

Les problèmes transversaux (16 pages dont 4 pages type Brevet) permettent de mobiliser, y compris en évaluation, des connaissances et des compétences variées, qui portent sur plusieurs chapitres, à tout moment de l'année scolaire et notamment de remobiliser, dans un contexte nouveau et inconnu, des connaissances abordées antérieurement.

31 Fanion

Le fanion ci-contre mesure 6 cm sur 9 cm.

- Quelle fraction du rectangle est peinte en vert sur celui-ci ?



Pour donner du sens aux notions étudiées et éviter les cloisonnements disciplinaires, de nombreux problèmes en lien avec d'autres disciplines sont proposés. Certains de ces problèmes peuvent être exploités dans le cadre d'un EPI.

Problèmes en lien avec les trois parcours

Certains problèmes contribuent aux trois « parcours éducatifs » qui structurent également la scolarité obligatoire :

- le « **parcours citoyen** », en lien avec les valeurs de la République, l'éducation aux médias et à l'information, l'éducation à l'environnement et au développement durable ;
- le « **parcours d'éducation artistique et culturelle** » pour aller à la rencontre d'œuvres dans les domaines des arts et du patrimoine ;
- le « **parcours avenir** » pour comprendre le monde économique et professionnel, ainsi que la diversité des métiers et des formations.

Ces problèmes sont repérés par des pictogrammes dans chaque manuel :

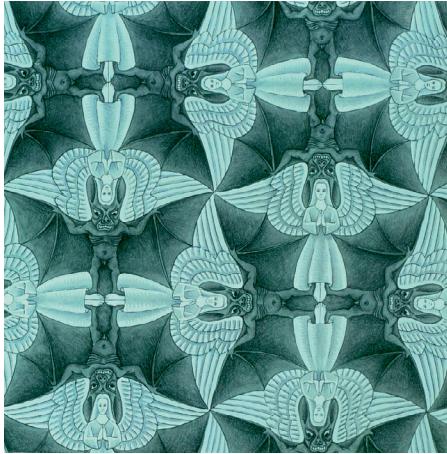
CIT

PEAC

AV

28 Les pavages d'Escher

PEAC



Sur la gravure *Symmetry Drawing E45* de M. C. Escher, mettre en évidence :

- deux symétries axiales ;
- deux symétries centrales.

Problèmes en lien avec d'autres disciplines

De nombreux problèmes interdisciplinaires présents dans chaque chapitre peuvent compléter ces ressources et peuvent constituer des ressources pour les EPI.

Ces problèmes sont repérés par des pictogrammes dans chaque manuel.



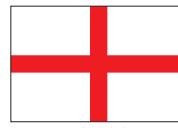
38 Union Flag (Union Jack)

LV

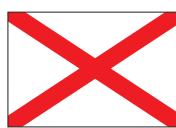
How many axes and centers of symmetry are there in the flags?



Scottish flag
St Andrew's Cross



English Flag
St George's Cross



Irish flag before 1922
St Patrick's Cross



The three flags gathered in 1801. The Union Flag

Objectifs généraux

Cet enseignement de l'informatique n'a pas pour objectif de former des élèves experts, mais de leur apporter des clés de décryptage d'un monde numérique en évolution constante.

Il permet d'acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats.

Il est également l'occasion de mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur une **pédagogie de projet**, active et **collaborative**.

L'approche de la collection

Le thème « Algorithmique et programmation » n'a pas vocation à être traité comme un chapitre traditionnel. L'activité autonome de l'élève doit être centrale. Ce thème peut être abordé suivant trois axes, de façon complémentaire :

- des **exercices courts** dans chaque chapitre en lien avec les notions étudiées ;
- des **activités** à faire en séance de travaux pratiques ;
- des **projets** riches, motivants et accessibles, qui peuvent éventuellement être abordés dans le cadre d'un EPI en collaboration avec l'enseignant de technologie.

Pour se former à Scratch

1. Les cartes Scratch

Les cartes Scratch sont un moyen rapide d'apprendre de nouveaux codes de Scratch : une face montre ce qu'on peut faire, l'autre face montre comment le faire. Elles ont des niveaux de difficulté gradués.

<https://scratch.mit.edu/help/cards/>

2. Le guide d'utilisation de Scratch et des vidéos de tutoriel

<https://scratch.mit.edu/help/>

Page Algorithmique et outils numériques

Dans chaque chapitre, des exercices peuvent être traités de façon souple : en salle informatique, avec un tableau interactif, un vidéoprojecteur à la maison... Ils mobilisent les notions mathématiques du chapitre mais restent faciles d'accès sur le plan algorithmique. Ils peuvent ainsi être traités à tout moment de l'année scolaire.

Algorithmique et outils numériques

49 Symétrique (2)

Bouchra a écrit la script suivant.



1. Quelle figure a-t-on dessinée ?

2. Compléter le script pour dessiner ensuite le symétrique de cette première figure par rapport à l'un de ses côtés.

3. La nouvelle figure obtenue a-t-elle d'autres axes et/ou un centre de symétrie ?

Chapitre 46

 Sept **activités** pour aborder ou approfondir chaque attendu de fin de cycle



The booklet cover features a yellow header with the word "Activités". Below it is a red bar with the title "Des programmes de calcul". A small icon of a computer mouse is next to the title. To the right, a blue icon of a person's head with a gear inside is followed by the text "Deux activités supplémentaires dans le manuel numérique". At the bottom, there is a small illustration of a brown box with a purple number "5" above it and a red label "S'CORE" on the side.

- Ces activités sont conçues pour aborder les différents attendus de fin de cycle : notion de variable informatique, boucles, instructions conditionnelles, déclenchement d'une action par un évènement... Ces activités ont vocation à être traitées en une ou deux heures, en salle informatique (ou classe mobile, tablettes...). L'élève peut travailler très largement en autonomie. Ces activités mobilisent souvent des notions mathématiques mais restent faciles d'accès.

- Elles sont de difficulté très graduée et se terminent systématiquement par des prolongements (« Pour aller plus loin ») afin de pouvoir facilement **prendre en compte l'hétérogénéité des élèves**. L'essentiel est accessible à tous les élèves mais ceux qui iront plus vite auront des problèmes plus complexes qui permettront de les motiver.
- Une première activité permet de prendre (ou reprendre) contact avec l'environnement de Scratch.

Chapitre 47

 Six **projets** motivants et accessibles à tous pour mobiliser l'ensemble des attendus de fin de cycle



The booklet cover features a yellow header with the word "Chapitre" and the number "47" in a circle, followed by the word "Projets". Below it is a red bar with the title "Jeu dans un labyrinthe". A small icon of a computer mouse is next to the title. To the right, a red button-like icon says "Utilisable en EPI (TECH)". At the bottom, there is a small illustration of a wooden treasure chest with a lock.

Jeu dans un labyrinthe

Objectif : Déplacer un personnage dans un labyrinthe afin d'atteindre un trésor.

Pour réaliser ce jeu, il faudra utiliser deux lutins : le personnage et le trésor. Il faudra écrire des scripts pour chacun de ces deux lutins. Tous les scripts doivent démarrer quand on clique sur le drapeau vert.

Étape 1 Dessiner un labyrinthe

Dessiner un nouvel arrière-plan en forme de labyrinthe en n'utilisant qu'une seule couleur. On pourra s'inspirer du modèle ci-contre ou faire son propre labyrinthe.



Les projets comportent un **objectif de réalisation concrète** et sollicitent largement l'autonomie et l'initiative de l'élève. Ils sont à mener sur la durée (par exemple, à raison d'une heure par semaine sur 3 à 8 semaines) et peuvent être plus ou moins approfondis, selon le temps dont on dispose ou le niveau de maîtrise des élèves. Ils mobilisent l'ensemble des notions du programme.

Progression sur le cycle 4

5 ^e	4 ^e	3 ^e
Activités		
1 À la découverte de Scratch <ul style="list-style-type: none">• Découvrir l'environnement de Scratch.• Écrire un premier script	1 L'environnement de Scratch * <ul style="list-style-type: none">• Maîtriser l'environnement de Scratch• Écrire quelques scripts simples	1 L'environnement de Scratch * <ul style="list-style-type: none">• Maîtriser l'environnement de Scratch• Écrire quelques scripts simples
2 Des programmes de calcul <ul style="list-style-type: none">• Comprendre et utiliser la notion de variable	2 Des programmes de calcul * <ul style="list-style-type: none">• Comprendre et utiliser la notion de variable	2 Des programmes de calcul * <ul style="list-style-type: none">• Comprendre et utiliser la notion de variable
3 Construction de figures <ul style="list-style-type: none">• Utiliser les commandes de déplacement et d'écriture pour construire des figures	3 Construction de figures * <ul style="list-style-type: none">• Utiliser les commandes de déplacement et d'écriture pour construire des figures	3 Construction de figures * <ul style="list-style-type: none">• Utiliser les commandes de déplacement et d'écriture pour construire des figures
4 Répétition générale <ul style="list-style-type: none">• S'initier aux structures itératives	4 Répétition générale * <ul style="list-style-type: none">• Utiliser des structures itératives et conditionnelles	4 Le multiplicatio <ul style="list-style-type: none">• Utiliser des structures itératives et conditionnelles
5 Un jeu de balle <ul style="list-style-type: none">• S'initier à la programmation événementielle et à la structure conditionnelle• Écrire plusieurs scripts s'exécutant en parallèle	5 Expériences aléatoires * <ul style="list-style-type: none">• Simuler des expériences aléatoires• Utiliser des variables, des boucles et des structures conditionnelles	5 Autour des nombres premiers * <ul style="list-style-type: none">• Déterminer des nombres premiers• Utiliser des blocs et des listes
6 Expériences aléatoires <ul style="list-style-type: none">• S'initier aux structures conditionnelles• Utiliser des nombres aléatoires		6 Expériences aléatoires * <ul style="list-style-type: none">• Simuler des expériences aléatoires• Utiliser des variables, des boucles et des structures conditionnelles
Projets		
1 Jeu dans un labyrinthe <ul style="list-style-type: none">• Déplacer un personnage dans un labyrinthe	1 Attrape-moi si tu peux ! <ul style="list-style-type: none">• Programmer un jeu d'adresse	1 Comme chien et chat <ul style="list-style-type: none">• Programmer un jeu d'adresse
2 Jeu de pong <ul style="list-style-type: none">• Empêcher le plus longtemps possible la balle de toucher le sol	2 Course de voiture <ul style="list-style-type: none">• Programmer un jeu de course de voiture sur un circuit	2 Jeu de Nim <ul style="list-style-type: none">• Programmer un jeu de stratégie à deux joueurs

* Activités supplémentaires disponibles dans le manuel numérique.

L'accompagnement personnalisé s'adresse à **tous les élèves**. Il nécessite une **évaluation diagnostique** et la mise en œuvre d'une **pédagogie différenciée**.

Des exercices différenciés

Les exercices différenciés permettent généralement **d'aborder les mêmes compétences et dans un même contexte, mais avec des degrés de difficultés différents**.

Les écritures d'énoncés et les analyses de productions sont des formes de travaux originales qui se prêtent particulièrement bien aux travaux de groupes.

Travailler autrement

Utilisable en AP

Exercice 2

Le triangle ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm et $CD = 1$ cm.

1. Montrer que les triangles DCF, AED et BEF sont des triangles égaux.
 2. Démontrer que le triangle DEF est un triangle équilatéral.
-

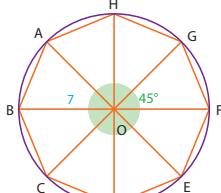
Exercice 2

Le triangle ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

1. Montrer que les triangles DCF, AED et BEF sont des triangles égaux.
 2. Démontrer que le triangle DEF est un triangle équilatéral.
-

Écriture d'un problème

1. Inventer l'énoncé d'un exercice utilisant la figure ci-dessous.
2. Échanger cet énoncé avec son binôme et résoudre l'exercice.

**Analyse d'une production**

On a posé à Loïc le problème suivant :
 « Soit ABC un triangle isocèle en A, 1 milieu de [AC] et J milieu de [AB]. Démontrer que les triangles BIC et CJB sont des triangles égaux. »
 Voici sa réponse :

LOIC

*ABC est un triangle isocèle en A donc $\hat{ABC} = \hat{ACB}$
 Les triangles BIC et CJB ont un côté en commun : [BC].
 Si deux triangles ont un angle de même mesure entre 2 côtés de même longueur, alors ils sont égaux.
 En conclusion, les triangles BIC et CJB sont des triangles égaux*

- Analyser la réponse de Loïc et corriger ses erreurs, s'il y en a.

Programme officiel du cycle 4

Le **programme de mathématiques** est rédigé pour l'ensemble du cycle. Les connaissances et compétences visées sont des attendus de la fin du cycle. Pour y parvenir, elles devront être travaillées de manière progressive et réinvesties sur toute la durée du cycle. [...] La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique qui sont détaillées dans le tableau ci-après. Pour ce faire, une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines.[...]

Compétences travaillées
Chercher (domaines du socle : 2, 4) <ul style="list-style-type: none">• Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances.• S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.• Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.• Décomposer un problème en sous-problèmes.
Modéliser (domaines du socle : 1, 2, 4) <ul style="list-style-type: none">• Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants.• Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).• Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.• Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).
Représenter (domaines du socle : 1, 5) <ul style="list-style-type: none">• Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.• Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.• Représenter des données sous forme d'une série statistique.• Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple, perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau).
Raisonner (domaines du socle : 2, 3, 4) <ul style="list-style-type: none">• Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.• Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.• Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.• Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Calculer (domaine du socle : 4) <ul style="list-style-type: none">• Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).• Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.• Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.).
Communiquer (domaines du socle : 1, 3) <ul style="list-style-type: none">• Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française.• Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.• Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.

Thème A - Nombres et calculs

Attendus de fin de cycle

- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes.
- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers.
- Utiliser le calcul littéral.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre. <ul style="list-style-type: none">• Nombres décimaux.• Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé.• Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales.• Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144.• Les préfixes de nano à giga.	Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes). Relier fractions, proportions et pourcentages. Associer à des objets des ordres de grandeurs (par exemple, la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la longueur de l'intestin, la capacité de stockage d'un disque dur, la vitesse du son et de la lumière, la population française et mondiale, la distance de la Terre à la Lune et au Soleil, la distance du Soleil à l'étoile la plus proche). Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.

Programme officiel du cycle 4

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels. Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée. • Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. • Égalité de fractions.	Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers.
Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté. Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient). Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique. • Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).	Pratiquer régulièrement le calcul mental ou à la main, et utiliser à bon escient la calculatrice ou un logiciel. Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes (par exemple, comparer des consommations d'eau ou d'électricité, calculer un indice de masse corporelle pour évaluer un risque éventuel sur la santé, déterminer le nombre d'images pouvant être stockées sur une clé USB, calculer et comparer des taux de croissance démographique).
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible. • Division euclidienne (quotient, reste). • Multiples et diviseurs. • Notion de nombres premiers.	Recourir à une décomposition en facteurs premiers dans des cas simples. Exploiter tableurs, calculatrices et logiciels, par exemple pour chercher les diviseurs d'un nombre ou déterminer si un nombre est premier. Démontrer des critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5 ou 10, ou la preuve par 9). Étudier des problèmes d'engrenages (par exemple braquets d'un vélo, rapports de transmission d'une boîte de vitesses, horloge), de conjonction de phénomènes périodiques (par exemple éclipses ou alignements de planètes).
Utiliser le calcul littéral	
Mettre un problème en équation en vue de sa résolution. Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples. Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. • Notions de variable, d'inconnue. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour apprécier la notion d'équation. Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

Repères de progressivité

La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendés au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.

Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient, et, quand ces notions ont été bien installées, ils font le lien avec le calcul littéral.

Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. En 5^e, les élèves calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel. À partir de la 4^e, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, à passer d'une représentation à une autre d'un nombre, à justifier qu'un nombre est ou non l'inverse d'un autre. Ils n'abordent la notion de fraction irréductible qu'en 3^e.

La notion de racine carrée est introduite en lien avec le

théorème de Pythagore ou l'agrandissement des surfaces. Les élèves connaissent quelques carrés parfaits, les utilisent pour encadrer des racines par des entiers et utilisent la calculatrice pour donner une valeur exacte ou approchée de la racine carrée d'un nombre positif.

Les puissances de 10 d'exposant entier positif sont manipulées dès la 4^e, en lien avec les problèmes scientifiques ou technologiques. Les exposants négatifs sont introduits progressivement. Les puissances positives de base quelconque sont envisagées comme raccourci d'un produit.

Dès le début du cycle 4, les élèves comprennent l'intérêt d'utiliser une écriture littérale. Ils apprennent à tester une égalité en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui y figure. À partir de la 4^e, ils rencontrent les notions de variables et d'inconnues, la factorisation, le développement et la réduction d'expressions algébriques. Ils commencent à résoudre, de façon exacte ou approchée, des problèmes du 1^{er} degré à une inconnue et apprennent à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation ou d'une inéquation. En 3^e, ils résolvent algébriquement équations et inéquations du 1^{er} degré, et mobilisent le calcul littéral pour démontrer. Ils font le lien entre forme algébrique et représentation graphique.

Thème B - Organisation et gestion de données, fonctions

Attendus de fin de cycle

- Interpréter, représenter et traiter des données.
- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités.
- Résoudre des problèmes de proportionnalité.
- Comprendre et utiliser la notion de fonction.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Interpréter, représenter et traiter des données	
<p>Recueillir des données, les organiser.</p> <p>Lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique.</p> <p>Calculer des effectifs, des fréquences.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes). <p>Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indicateurs : moyenne, médiane, étendue. 	<p>Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données.</p> <p>Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web.</p> <p>Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs (par exemple, des données mises sur l'environnement numérique de travail par les élèves dans d'autres disciplines) ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées.</p> <p>Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique : résultats d'élections, données de veille sanitaire (par exemple consultations, hospitalisations, mortalité pour la grippe), données financières relatives aux ménages (par exemple impôts, salaires et revenus), données issues de l'étude d'un jeu, d'une œuvre d'art...</p>
Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités	
<p>Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples.</p> <p>Calculer des probabilités dans des cas simples.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Notion de probabilité. • Quelques propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'événements certains, impossibles, incompatibles, contraires. 	<p>Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou à deux épreuves).</p> <p>Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).</p> <p>Calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).</p>
Résoudre des problèmes de proportionnalité	
<p>Reconnaitre une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.</p>	<p>Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par :</p> <ul style="list-style-type: none"> • des formules (par exemple la longueur d'un cercle ou l'aire d'un disque comme fonction du rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension comme fonction de l'intensité) ; • des représentations graphiques (par exemple des nuages de points ou des courbes) ; • un tableau (dont des lignes ou des colonnes peuvent être proportionnelles ou non).
<p>Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.</p> <p>Résoudre des problèmes de pourcentage.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Coefficient de proportionnalité. 	<p>Compléter un tableau de proportionnalité en utilisant, par exemple, le produit en croix.</p> <p>Calculer et interpréter des proportions (notamment sous forme de pourcentages) sur des données économiques ou sociales ; appliquer des pourcentages (par exemple, taux de croissance, remise, solde, taux d'intérêt) à de telles données.</p> <p>Établir le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 ; proposer quelques applications (par exemple que l'on n'additionne pas les remises).</p>
Comprendre et utiliser la notion de fonction	
<p>Modéliser des phénomènes continus par une fonction.</p> <p>Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. • Notion de variable mathématique. • Notion de fonction, d'antécédent et d'image. • Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$. • Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine. 	<p>Utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre, par exemple en utilisant un tableur ou un grapheur.</p> <p>Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.</p> <p>Étudier et commenter des exemples (fonction reliant la tension et l'intensité dans un circuit électrique, fonction reliant puissance et énergie, courbes de croissance dans un carnet de santé, tests d'effort, consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse, production de céréales en fonction des surfaces ensemencées, liens entre unités anglo-saxonnes et françaises, impôts et fonctions affines par morceaux...).</p> <p>Faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.</p>

Programme officiel du cycle 4

Repères de progressivité

Les caractéristiques de position d'une série statistique sont introduites dès le début du cycle. Les élèves rencontrent des caractéristiques de dispersion à partir de la 4^e.

Les activités autour de la proportionnalité prolongent celles du cycle 3. Au fur et à mesure de l'avancement du cycle, les élèves diversifient les points de vue en utilisant les représentations graphiques et le calcul littéral. En 3^e, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème.

En 5^e la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée

en 3^e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes.

Dès le début et tout au long du cycle 4 sont abordées des questions relatives au hasard, afin d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations issues de la vie quotidienne (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.), en suscitant des débats. On introduit et consolide ainsi petit à petit le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le modèle équiprobable. Une fois ce vocabulaire consolidé, le lien avec les statistiques est mis en œuvre en simulant une expérience aléatoire, par exemple sur un tableau. À partir de la 4^e, l'interprétation fréquentiste permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5^e.

Thème C - Grandeurs et mesures

Attendus de fin de cycle

- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées	
Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités. • Notion de grandeur produit et de grandeur quotient. • Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule.	Identifier des grandeurs composées rencontrées en mathématiques ou dans d'autres disciplines (par exemple, aire, volume, vitesse, allure, débit, masse volumique, concentration, quantité d'information, densité de population, rendement d'un terrain). Commenter des documents authentiques (par exemple, factures d'eau ou d'électricité, bilan sanguin).
Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques	
Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles. • Notion de dimension et rapport avec les unités de mesure (m, m ² , m ³).	Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes), l'échelle d'une carte. Utiliser un système d'information géographique (cadastre, géoportail, etc.) pour déterminer une mesure de longueur ou d'aire ; comparer à une mesure faite directement à l'écran.

Repères de progressivité

Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Les grandeurs produits et les grandeurs

quotients sont introduites dès la 4^e. L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3^e, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès.

Thème D - Espace et géométrie

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Représenter l'espace	
(Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère. • Abscisse, ordonnée, altitude. • Latitude, longitude. Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales. Développer sa vision de l'espace.	Repérer une position sur carte à partir de ses coordonnées géographiques. Mettre en relation diverses représentations de solides (par exemple, vue en perspective, vue de face, vue de dessus, vue en coupe) ou de situations spatiales (par exemple schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques). Utiliser des solides concrets (en carton par exemple) pour illustrer certaines propriétés. Utiliser un logiciel de géométrie pour visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace. Faire le lien avec les courbes de niveau sur une carte.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure. Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.	Construire des frises, des pavages, des rosaces. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.
Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. <ul style="list-style-type: none"> • Position relative de deux droites dans le plan. • Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes /internes. • Médiatrice d'un segment. • Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). • Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. • Théorème de Thalès et réciproque. • Théorème de Pythagore et réciproque. 	Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

Repères de progressivité

Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration.

Le théorème de Pythagore est introduit dès la 4^e, et est

réinvesti tout au long du cycle dans des situations variées du plan et de l'espace. Le théorème de Thalès est introduit en 3^e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.

La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3^e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

Thème E - Algorithmique et programmation

Attendus de fin de cycle

- Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas. Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné. Écrire un programme dans lequel des actions sont déclenchées par des événements extérieurs. Programmer des scripts se déroulant en parallèle. <ul style="list-style-type: none"> • Notions d'algorithme et de programme. • Notion de variable informatique. • Déclenchement d'une action par un événement, séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles. 	Jeux dans un labyrinthe, jeu de Pong, bataille navale, jeu de nim, tic tac toe. Réalisation de figure à l'aide d'un logiciel de programmation pour consolider les notions de longueur et d'angle. Initiation au chiffrement (Morse, chiffre de César, code ASCII...). Construction de tables de conjugaison, de pluriels, jeu du cadavre exquis... Calculs simples de calendrier. Calculs de répertoire (recherche, recherche inversée...). Calculs de fréquences d'apparition de chaque lettre dans un texte pour distinguer sa langue d'origine : français, anglais, italien, etc.

Repères de progressivité

En 5^e, les élèves s'initient à la programmation événementielle. Progressivement, ils développent de nouvelles compétences, en programmant des actions en parallèle, en utilisant la notion

de variable informatique, en découvrant les boucles et les instructions conditionnelles qui complètent les structures de contrôle liées aux événements.

Sommaire

NOMBRES ET CALCULS

Nombres entiers et décimaux

1. Divisibilité	21
2. Enchainement d'opérations	31
3. Puissances	39
4. Décomposition en facteurs premiers	45

Nombres relatifs

5. Nombres relatifs : définition	59
6. Nombres relatifs : addition et soustraction	69
7. Nombres relatifs : multiplication et division	77
8. Nombres relatifs : opérations	87

Fractions

9. Fractions : comparaison	97
10. Fractions : addition, soustraction	103
11. Fractions : multiplication et division	111
12. Fractions : forme irréductible	119

Calcul littéral

13. Expressions littérales	127
14. Développement et factorisation 1	133
15. Résolution d'équations	139
16. Développement et factorisation 2	147
17. Résolution d'inéquations	155

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Proportionnalité

18. Proportionnalité et tableaux	163
19. Proportionnalité et représentations graphiques	171
20. Proportionnalité et pourcentages	181

Calcul et représentation de grandeurs, fonctions

21. Durées, horaires	187
22. Grandeurs quotients, grandeurs produits	195
23. Fonctions	205
24. Fonctions affines	213

Représentation et traitement de données

25. Moyenne et représentations graphiques	223
26. Médiane et étendue	231
27. Moyenne et groupes	239

Probabilités

28. Expériences aléatoires et probabilité	245
29. Probabilité d'un événement	253
30. Arbres de probabilités	261

ESPACE ET GÉOMÉTRIE

Construction et transformation de figures

31. Symétries	271
32. Translations et rotations	283
33. Homothéties	295

Angles et triangles

34. Angles	307
35. Triangles et cercles	317
36. Triangles égaux, triangles semblables	327
37. Théorème de Pythagore	339
38. Trigonométrie	351

Parallélisme et quadrilatères

39. Parallélogrammes	367
40. Parallélogrammes particuliers	379
41. Triangles et quadrilatères	391
42. Théorème de Thalès	405

Espace

43. Solides de l'espace	423
44. Repérage dans l'espace	437
45. Sections planes de solides	449

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

46. Activités	463
47. Projets	477
Problèmes transversaux	493

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». Les connaissances associées sont :

- la division euclidienne (quotient, reste) ;
- les multiples et diviseurs ;
- la notion de nombres premiers.

Les capacités associées sont de déterminer si un entier est ou n'est pas un multiple d'un autre entier, de comprendre et d'utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers.

Repères de progressivité

- Ce chapitre réinvestit la division euclidienne et les critères de divisibilité par 2; 3; 4; 5; 9 et 10 vus au cycle 3. En calcul mental, on pourra en amont travailler plus particulièrement sur les tables de multiplication.
- Le chapitre 9 sur les fractions permet également d'appliquer les notions travaillées dans ce chapitre avec la simplification de fractions. En effet, si ce chapitre est travaillé avant le chapitre des fractions, la simplification sera présentée comme une application des critères de divisibilité ; si ce chapitre est travaillé après le chapitre des fractions, la simplification de fractions permettra de créer un lien avec ce chapitre, sous forme de rappel.

- D'autres notions sur le même thème seront travaillées dans le chapitre 4 : algorithme plus rapide de recherche des nombres premiers, décomposition d'un nombre en facteurs premiers qui sera abordée en 3^e.

Objectifs du chapitre

Ce chapitre s'inscrit dans le développement du calcul en mettant l'accent sur la maîtrise du sens des opérations vues au cycle 3. La nouveauté de ce chapitre est la compréhension des nombres premiers. Une place importante est accordée au raisonnement et à la résolution de problèmes, liés le plus souvent à des situations de la vie quotidienne (conjonction de phénomènes périodiques, problèmes d'engrenages...). Des problèmes de nature purement arithmétique y trouvent également leur part. De nombreux exercices et problèmes forment également à la démonstration en diversifiant les pratiques : conjecture-validation, essai-erreur...

Ce chapitre a été conçu de façon à laisser à l'élève la possibilité de travailler le calcul mental, tout en lui donnant l'occasion d'exploiter le calcul instrumenté (calculatrice, tableur, logiciels) pour rechercher les diviseurs d'un nombre ou déterminer si un nombre est premier. Certains exercices font référence à des notions permettant d'aller plus loin dans l'univers des nombres entiers, des diviseurs et multiples, avec notamment le PGCD et PPCM.

Activités

Questions flash

1. 40 et 515 sont dans la table de multiplication de 5 car ils se terminent par 0 ou 5.

2. a. 3 6 12 24 48

On multiplie par 2 à chaque étape.

2. b. 5 10 15 20 25

On écrit les multiples croissants de 5 (on additionne 5 à chaque étape).

c. 30 27 24 21 18

On écrit les multiples décroissants de 3 (on retranche 3 à chaque étape).

d. 4 6 8 10 12

On écrit les multiples croissants de 2 (on additionne 2 à chaque étape).

e. 90 80 70 60 50

On écrit les multiples de 10 décroissants (on retranche 10 à chaque étape).

3. a. $6 \times 3 = 18$.

c. $63 \div 3 = 21$.

b. $5 \times 8 = 40$.

d. $48 \div 6 = 8$.

4. a. Dans la division euclidienne de 37 par 4, 9 est le quotient et 1 est le reste.

b. $37 = 4 \times 9 + 1$.

c. $4 \times 9 < 37 < 4 \times 10$.

5. On effectue la division euclidienne de 34 par 16.
 $34 = 16 \times 2 + 2$. Il lui faut 3 clés.

6. $2 \times 3 \times 100 = 600$. Il possède 600 feuilles.

7. $4 \times 10 = 40$. Il y a 40 gâteaux.

On effectue la division euclidienne de 40 par 3 :
 $40 = 3 \times 13 + 1$.

Chaque ami aura 13 gâteaux et Lucille mangera le gâteau restant.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de division euclidienne, de multiples et de diviseurs. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication, la notion de multiples, de diviseurs, de division euclidienne. La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances pour trouver les diviseurs d'un nombre entier et de savoir utiliser la division euclidienne. On pourra conseiller aux élèves de faire un schéma pour visualiser la situation. Cette activité peut être cherchée en groupes ou en classe entière ; elle permet de réinvestir les connaissances du cycle 3 en donnant du sens grâce à un problème concret.

- 1.** 144 n'est pas un multiple de 5, car il ne se termine pas par 5.
Il ne peut donc pas mettre des carrés de 5 cm de côté.

2.

Il faut chercher les nombres entiers qui divisent à la fois 144 et 120, c'est-à-dire les diviseurs communs à 144 et 120. Il est possible d'utiliser la calculatrice et de faire remarquer que les diviseurs se trouvent par paires, sauf si le nombre est un carré parfait, auquel cas il aura un nombre impair de diviseurs.

On pourra faire remarquer qu'il est possible d'utiliser la division euclidienne (et regarder si le reste est nul) ou la division décimale (et regarder si le quotient est entier) pour trouver les diviseurs. C'est également l'occasion de revoir la notion de multiple.

Diviseurs de 144 :

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 – 18 – 24 – 36 – 48 – 72 – 144.

Diviseurs de 120 :

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 8 – 10 – 12 – 15 – 20 – 24 – 30 – 40 – 60 – 120.

Les diviseurs communs sont :

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 – 24.

Les dimensions des côtés des carrés peuvent être de : 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 12 cm ou 24 cm.

- 3. a.** $144 \div 3 = 48$ et $120 \div 3 = 40$.

Il lui faudra 48 carrés dans la longueur et 40 dans la largeur, soit $48 \times 40 = 1\,920$ carreaux.

On effectue la division euclidienne de 1 920 par 500 :
 $1\,920 = 500 \times 3 + 420$.

C'est ici l'occasion de rappeler le vocabulaire suivant : dividende, diviseur, quotient et reste, ainsi que la touche « division euclidienne » de la calculatrice :

Pour la Casio fx-92

Pour la TI collège

Le jeu de Juniper Green

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de multiples et de diviseurs. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication, la notion de multiples, de diviseurs. La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances pour trouver les diviseurs et les multiples d'un nombre entier. Cette activité peut également servir de première approche vers les nombres premiers. Cette activité est intéressante à chercher en binôme, notamment pour tester le jeu proposé à la question 2.

- 1.** Le premier joueur coche le 14. Le deuxième joueur peut effectivement cocher le 7 puisque 7 est un diviseur de 14.

On pourra faire remarquer que le deuxième joueur aurait aussi pu cocher 1, qui est diviseur de tous les nombres.

Le premier joueur doit alors cocher soit un multiple de 7, mais il n'y en a plus, soit un diviseur de 7 et il n'y a que 1, il n'a donc pas le choix.

Tous les nombres étant des multiples de 1, le deuxième joueur

peut cocher ce qu'il veut. Il a donc intérêt à cocher un nombre qui n'est divisible que par 1 (déjà coché) et lui-même (déjà coché lors de ce choix) : il est alors sûr de gagner.

Par exemple, s'il choisit 11, le premier joueur ne peut plus rien cocher et le deuxième joueur a forcément gagné.

- 2. Exemple de partie :**

Joueur 1 : 10 Joueur 2 : 2

Joueur 1 : 4 Joueur 2 : 8

Joueur 1 : 1 Joueur 2 : 12

Joueur 1 : 3 Joueur 2 : 15

Joueur 1 : 5 Joueur 2 : ne peut plus jouer.

C'est le joueur 1 qui a gagné.

- 3. Pour être sûr de gagner, le joueur 1 doit choisir un nombre uniquement divisible par 1 et lui-même, supérieur à 10.**

On pourra alors faire remarquer que ces nombres particuliers s'appellent des nombres premiers.

Le joueur suivant ne peut alors que cocher 1 et en choisissant de nouveau un autre nombre uniquement divisible par 1 et lui-même, supérieur à 10 (par exemple 11 ; 13 ; 17 ou 19), le joueur 2 ne peut plus rien cocher (1 étant déjà coché et n'ayant pas de multiples car trop grand), le joueur 1 est alors sûr de gagner.

Le compte est bon

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de retravailler les critères de divisibilité. Les prérequis nécessaires sont les tables de multiplication. La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances sur les critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 et 10. Cette activité peut être cherchée en classe entière ou en groupe, sans la calculatrice de façon à utiliser les critères de divisibilité.

- 1.** • Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair (0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.

- 2.** • 120 se termine par 0 donc il est divisible par 5. Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 120 est 20 qui est divisible par 4. La somme des chiffres de 120 est $1 + 2 + 0 = 3$ qui est divisible par 3, donc 120 est divisible par 3.

Donc $120 = 5 \times 4 \times 3 \times \heartsuit$. $5 \times 4 \times 3 = 60$ et $120 = 60 \times 2$.Donc $120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$.

- 105 est divisible par 5 car il se termine par 5.

La somme des chiffres de 105 est $1 + 0 + 5 = 6$ qui est divisible par 3, donc 105 est divisible par 3.

Donc $105 = 5 \times 3 \times \heartsuit$.

Activité 3

105 n'est divisible ni par 2, ni par 4 (il n'est pas pair), ni par 6, ni par 8 (puisque il n'est pas divisible par 2) et il n'est pas divisible par 9 (car la somme de ses chiffres, 6, n'est pas divisible par 9).

$$5 \times 3 = 15 \text{ et } 15 \times 7 = 105.$$

Donc $105 = 5 \times 3 \times 7$.

- 270 est divisible par 2 (car il est pair) et par 0 (car il se termine par 0). La somme des chiffres de 270 est $2 + 7 + 0 = 9$ qui est divisible par 9, donc 270 est divisible par 9.

Donc $270 = 2 \times 5 \times 9 \times \heartsuit$.

$$2 \times 5 \times 9 = 90 \text{ et } 90 \times 3 = 270.$$

Donc $270 = 2 \times 5 \times 9 \times 3$.

- 280 est divisible par 2 (car il est pair) et par 5 (car il se termine par 0).

$$280 = 2 \times 5 \times \heartsuit.$$

$$2 \times 5 = 10 \text{ et } 10 \times 28 = 280.$$

$$\text{Or } 28 = 7 \times 4.$$

$$\text{Donc } 280 = 2 \times 5 \times 7 \times 4.$$

Le crible d'Eratosthène

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir le crible d'Eratosthène et d'obtenir les nombres premiers inférieurs à 100.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication, la notion de multiples.

La capacité introduite est de reconnaître les nombres premiers. Cette activité peut être cherchée en classe entière ou en groupes, la phase de restitution finale se faisant en classe entière, pour définir ce qu'est un nombre premier.

1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

5. Les vingt-cinq nombres entourés : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97 n'admettent que 2 diviseurs : 1 et eux-mêmes.

- On les appelle des nombres premiers.
- On pourra faire remarquer que 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur 1 et que 2 est le seul nombre premier pair, les autres nombres pairs admettant forcément au moins 3 diviseurs : 1 ; 2 et eux-mêmes.
- On pourra faire remarquer qu'à partir de 50 (la moitié de 100), on peut s'arrêter et indiquer aux élèves qu'en fin de cycle, on trouvera un test d'arrêt plus rapide.

Exercices

Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Questions flash

- 1.** Vrai. $56 = 8 \times 7$.
 - 2.** Faux. On ne peut pas diviser par 0.
 - 3.** Vrai. $20 = 5 \times 4$.
 - 4.** Faux. Un multiple de 9 doit être supérieur ou égal à 9.
 - 5.** Vrai. $48 = 24 \times 2$.
 - 6.** Faux. 26 n'est pas dans la table de 4.
-
- 2.** 1. 25 est à la fois un multiple et un diviseur de 25.
2. 0 est un multiple de tous les nombres.
3. 1 est un diviseur de tous les nombres.
4. 1 et 7 sont les diviseurs de 7.
5. 0 est le plus petit multiple commun de 2 et 9.
- 18 est le plus petit multiple commun non nul de 2 et 9.
-
- 3.** On note q le quotient et r le reste.
a. Dans la division euclidienne de 23 par 7, on a $q = 7$ et $r = 2$.
b. Dans la division euclidienne de 41 par 6, on a $q = 6$ et $r = 5$.
c. Dans la division euclidienne de 30 par 5, on a $q = 6$ et $r = 0$.
d. Dans la division euclidienne de 52 par 9, on a $q = 5$ et $r = 7$.
-
- 4.** 1. 0 est un multiple de 1. $0 = 0 \times 1$.
2. 80 est un multiple et un diviseur de 80. $80 = 1 \times 80$.
3. 9 est un diviseur de 72. $72 = 9 \times 8$.
4. 42 est un multiple de 14. $42 = 3 \times 14$.
5. 1 est un diviseur de 17. $17 = 1 \times 17$.
6. 13 est un diviseur de 39. $39 = 13 \times 3$.
7. 24 est un multiple de 3. $24 = 8 \times 3$.
8. 45 est un multiple de 5. $45 = 5 \times 9$.
-
- 5.** 1. Multiples de 6 entre 19 et 32 : 24 et 30.
2. Diviseurs de 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Diviseurs de 20 : 1, 2, 4, 5, 10, 20.
Diviseurs de 54 : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
Diviseurs de 196 : 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196.
-
- 6.** On cherche des multiples de 46.

On peut procéder par tâtonnements (ou essais successifs) en ne partant pas forcément de 46.

 $46 \times 10 = 460$ non, c'est trop grand.
 $46 \times 9 = 414$ non, trop grand aussi.
 $46 \times 8 = 368$ non, toujours trop grand.
 $46 \times 6 = 276$.
276 est le plus grand multiple de 46 inférieur à 300.
-
- 7.** Les diviseurs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
Il y en a donc 12. Maximilien a tort.
-
- 8.** 1. Le nombre 9 a 3 diviseurs : 1 – 3 – 9.
Le nombre 4 a trois diviseurs : 1 – 2 – 4.
Le nombre 25 a trois diviseurs : 1 – 5 – 25.
2. Le nombre 8 a 4 diviseurs : 1 – 2 – 4 – 8.
Le nombre 27 a 4 diviseurs : 1 – 3 – 9 – 27.
Le nombre 6 a 4 diviseurs : 1 – 2 – 3 – 6.
-
- 9.** 1. Le plus petit nombre divisible par 2, 3 et 5 est le plus petit multiple commun de 2, de 3 et de 5 :
 $2 \times 3 \times 5 = 30$.
C'est 30.

On peut aussi dresser la liste des multiples de 2, de 3 et de 5 et chercher le plus petit multiple commun aux trois listes.
-
2. Le plus petit nombre divisible par 4 et 10 est le plus petit multiple commun à 10 et 4 :
 $10 = 2 \times 5$ et $4 = 2 \times 2$ donc $2 \times 2 \times 4 = 20$; 20 est le plus petit nombre divisible par 4 et 10.

On peut là aussi dresser la liste des multiples de 10 et s'arrêter au premier multiple de 4.

- 10.** • Les diviseurs de 24 sont :
1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 – 24.
• Les diviseurs de 42 sont :
1 – 2 – 3 – 6 – 7 – 14 – 21 – 42.
• Les diviseurs communs à 25 et 42 sont donc :
1 – 2 – 3 et 6.
-
- 11.** 1. Les dix plus petits multiples de 10 (excepté 0) sont :
10 – 20 – 30 – 40 – 50 – 60 – 70 – 80 – 90 – 100.
2. Les dix plus petits multiples de 12 (excepté 0) sont :
12 – 24 – 36 – 48 – 60 – 72 – 84 – 96 – 108 – 120.
3. Le plus petit multiple commun non nul (PPCM) à 10 et 12 est 60.

On le note $\text{PPCM}(10 ; 12) = 60$.
-
- 12.** 1. Les diviseurs de 24 sont : 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 – 24.
Les diviseurs de 60 sont :
1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 10 – 12 – 15 – 20 – 30 – 60.
2. Le plus grand diviseur commun (PGCD) de 24 et 60 est 12.

On le note $\text{PGCD}(24 ; 60) = 12$.
-
- 13.** La division euclidienne de 60 par 8 donne un quotient 7 et un reste 4.
On peut donc écrire : $60 = 8 \times 7 + 4$.
C'est Bastien qui a raison.

Simbad a faux car il a écrit un reste supérieur au diviseur.
Sandra a effectué une division décimale et non euclidienne.
Céline a donné une valeur approchée du quotient dans la division décimale.
-
- 14.** On a $150 = 144 + 6$.
Or $144 = 24 \times 6$.
donc $150 = 24 \times 6 + 6$.
La division euclidienne de 150 par 24 donne $q = 6$ et $r = 6$.

Si on décompose $150 = 120 + 30$, le reste est trop grand et $24 \times 7 = 168$ est supérieur à 150.
-
- 15.** 1. La division euclidienne de 278 par 8 :

278	8
38	34
6	

 $q = 34$ et $r = 6$.
On peut donc écrire : $278 = 8 \times 34 + 6$.
2. La division euclidienne de 1 245 par 9 :

1245	9
34	138
75	3

 $q = 138$ et $r = 3$.
On peut écrire : $1 245 = 9 \times 138 + 3$.
-
- 16.** 1. On sait que dans la division euclidienne, on a :
Dividende = diviseur \times quotient + reste.
On remplace les valeurs que l'on connaît.
On a donc :
Dividende = $9 \times 4 + 7 = 43$.
Le dividende est 43.
2. La division euclidienne de 337 par d donne $q = 12$ et $r = 13$.
On peut donc écrire :
 $337 = 12 \times d + 13$.
On sait que $337 - 13 = 324$ et $324 \div 12 = 27$, on peut donc en déduire que le diviseur est 27.
On a bien $337 = 12 \times 27 + 13$.
-
- 17.** a. $4 433 = 45 \times 98 + 23$
C'est bien une division euclidienne, on peut la traduire par :
• 4 433 est le dividende, 45 le diviseur, 98 le quotient et 23 le reste. On a bien $23 < 45$.
• 4 433 est le dividende, 98 est le diviseur, 45 le quotient et 23 le reste. On a bien $23 < 98$.

b. $321 = 17 \times 18 + 15$.

- C'est bien une division euclidienne, on peut la traduire par :
321 est le dividende, 17 le diviseur, 18 le quotient et 15 le reste. On a bien $15 < 17$.
- On peut aussi la traduire par :
321 est le dividende, 18 le diviseur, 17 le quotient et 15 le reste. On a bien $15 < 18$.
- c. $203 = 6 \times 31 + 17$ est une division euclidienne : 203 est le dividende, 31 le diviseur, 6 le quotient et 17 le reste. On a bien $17 < 31$.

Attention, il n'y a pas d'autre possibilité car $17 > 6$ (6 ne peut pas être le diviseur et 31 le quotient).

Utiliser des critères de divisibilité

Questions flash

18

1. Vrai. C'est un nombre pair.
2. Faux. 14 n'est pas dans la table de 4.
3. Vrai. Le chiffre des unités de 25 est 5.
4. Vrai. Le chiffre des unités de 50 est 0.
5. Faux. La somme des chiffres de 29 est $2 + 9 = 11$ qui n'est pas un multiple de 9.
6. Vrai. La somme des chiffres de 180, $1 + 8 + 0 = 9$ est un multiple de 9.

19

1. Vrai. La somme des chiffres de 75 est $7 + 5 = 12$ qui est un multiple de 3.
2. Vrai. Le chiffre des unités de 800 est 0.
3. Vrai. La somme des chiffres de 96 est $9 + 6 = 15$; 15 est un multiple de 3.
4. Vrai. $84 = 4 \times 21$.
5. Faux. Le nombre formé par ses deux derniers chiffres est dans la table de 4.
6. Vrai. C'est un nombre pair.
7. Vrai. Il ne se termine pas par 0.
8. Faux. La somme des chiffres de 579 est :
 $5 + 7 + 9 = 21$; 21 n'est pas un multiple de 9.
9. Vrai. La somme des chiffres de 9 855 est :
 $9 + 8 + 5 + 5 = 27$; 27 est un multiple de 9.

20

est divisible par	2	3	4	5	9	10
360	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
456	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non
282	Oui	Oui	Non	Non	Non	Non
46 221	Non	Oui	Non	Non	Non	Non
33 525	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non
6 288	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non

21

1. 5 900, 1 548, 452 et 584 sont des multiples de 2. Ils sont tous pairs.
2. 1 548 et 123 sont des multiples de 3.
 $1 + 5 + 4 + 8 = 18$ est un multiple de 3.
 $1 + 2 + 3 = 6$ est un multiple de 3.
3. 5 900 et 485 sont des multiples. Ils se terminent par 0 ou par 5.

22

1. 756 et 10 200 sont divisibles par 4 car 56 et 200 sont des multiples de 4.
2. 756 et 207 sont divisibles par 9.
 $7 + 5 + 6 = 18$ est un multiple de 9 et $2 + 0 + 7 = 9$ est divisible par 9.
3. 10 200 est divisible par 10. Il se termine par 0.

23

- On cherche d'abord les nombres divisibles par 4 : 48, 27 900, 63 672, 42 324 sont divisibles par 4 car 48, 00, 72 et 24 sont des multiples de 4.
- On cherche maintenant s'ils sont divisibles par 3 en calculant la somme de leurs chiffres.
 $4 + 8 = 12$; 12 est dans la table de 3, donc 48 est divisible par 3.

2 + 7 + 9 = 18 ; 18 est dans la table de 3, donc 279 est divisible par 3.

$6 + 3 + 6 + 7 + 2 = 24$; 24 est dans la table de 3, donc 23 672 est divisible par 3.

$4 + 2 + 3 + 2 + 4 = 13$; 13 n'est pas dans la table de 3, donc 42 324 n'est pas divisible par 3.

• En conclusion, 48, 27 900, 63 672, 42 324 sont divisibles par 3 et par 4.

24

1. Faux.

Il suffit de donner un contre-exemple : 24 est divisible par 3 mais pas par 9.

2. Faux.

Il suffit de donner un contre-exemple : 20 est un multiple de 4 mais pas de 8.

3. Vrai. Tous les nombres divisibles par 10 se terminent par 0, ils sont donc divisibles par 5 car pour qu'un nombre soit divisible par 5, il doit se terminer par 5 ou 0.

Reconnaitre un nombre premier

Questions flash

25

1. Faux. 1 admet un seul diviseur ; or un nombre premier doit en admettre exactement deux.
2. Vrai. Il n'est divisible que par 1 et lui-même.
3. Vrai. 6 est divisible par 1 et lui-même mais aussi par 2.
4. Faux. 7 est un nombre premier inférieur à 11.
5. Faux. 2 est un nombre premier.

2 est le seul nombre premier pair.

26

- 13, 23, 43, 101 et 197 sont des nombres premiers. Ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes.
18 est aussi divisible par 2 (il y en a d'autres).
87 est divisible par 3, car $8 + 7 = 15$.
319 est divisible par 11.
415 se termine par un 5, il est donc divisible par 5.

27

1. Vrai. 103 est un nombre premier.

On cherche s'il est divisible par les nombres compris entre 2 et 10.

2. Faux. 97 est un nombre premier.

On cherche s'il est divisible par les nombres compris entre 2 et 9.

3. Faux. Le produit de 8 par 24 ne peut pas être un nombre premier puisqu'il est un multiple de 8 et de 24.

On peut aussi dire qu'il est divisible par 2 puisque 8 et 24 sont divisibles par 2.

4. Faux. 125 se termine par 5, il est donc divisible par 5.
5. Vrai. $49 = 7 \times 7$.

28

1. 2 est le seul nombre premier. Tous les autres nombres se terminant par un 2 sont pairs donc divisibles par 2.
2. Il y a 13, 23, 43, 53, 73 et 83.

29

1. Faux. 9 est un nombre impair mais n'est pas un nombre premier.
2. Faux. 2 est premier. Il est le seul.
3. Faux. 13 et 17 sont deux nombres premiers consécutifs et leur différence est 4.

4. Faux. 13 et 17 sont des nombres premiers.
 $13 + 17 = 30$.

30 n'est pas un nombre premier.

5. Faux. 5 est un multiple de 5 et est un nombre premier. C'est le seul.

30

- Tiphaine a raison : 53 est un nombre premier car il n'admet que 1 et 53 comme diviseur.
Jolan a tort car 106 admet 2 comme autre diviseur (il est pair).

Problèmes

31 Céréales

On est dans une situation de partage avec un reste.

Pour trouver le nombre de portions, on effectue la division euclidienne de 375 par 25 :

$$\begin{array}{r} 375 \\ \hline 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

On peut écrire : $375 = 25 \times 15$.

On pourra faire 15 portions de 25 g de céréales avec un paquet de 375 g.

32 Plan de table

Pour trouver toutes les possibilités, il faut chercher les diviseurs de 208.

Ils pourront faire des tables de 2 – 4 – 8 – 13 – 16 – 26 – 52 – 104 ou une seule table de 208 personnes.

1 est aussi un diviseur de 208 mais on suppose qu'ils ne feront pas des tables d'une personne.

33 Cinéma

Pour trouver le nombre de pochettes, on effectue la division euclidienne de 67 par 9 :

$$\begin{array}{r} 67 \\ \hline 9 \\ \hline 4 \end{array}$$

On peut écrire : $67 = 9 \times 7 + 4$.

Il lui faudra 8 pochettes. Dans la dernière, il n'y aura que 4 tickets de cinéma.

34 Préparation d'un mariage

- 1 653 n'est pas divisible ni par 5 ni par 2 car il ne se termine pas ni par un nombre pair, ni par 5, donc la division euclidienne donnera un reste non nul.
- 1 653 est divisible par 3, $1 + 6 + 5 + 3 = 15$, la somme de ses chiffres est dans la table de 3.
 $1653 = 3 \times 551$.
- En conclusion, c'est Lila qui pourra faire des paquets de 3 calissons sans qu'il lui en reste.

35 Tournoi de handball

On effectue la division euclidienne de 149 par 5 :

$$\begin{array}{r} 149 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

On peut donc écrire : $149 = 5 \times 29 + 4$.

Il y aura 29 équipes de 5 joueurs et 4 remplaçants.

36 Tonneau

On convertit d'abord $225 \text{ L} = 22\ 500 \text{ cl}$.

On fait la division euclidienne de $22\ 500$ par 75 :

$$\begin{array}{r} 22\ 500 \\ \hline 75 \\ \hline 0 \end{array}$$

Le reste est nul, donc $22\ 500$ est divisible par 75.

$22\ 500 = 75 \times 300$.

On peut remplir 300 bouteilles de 75 cl avec un tonneau de 225 L.

37 Des bonbons

On cherche d'abord le nombre de bonbons dont elle a besoin : $6 \times 12 = 72$ bonbons.

On effectue la division euclidienne de 72 par 30 :

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 30 \\ \hline 12 \end{array}$$

$72 = 2 \times 30 + 12$.

Il lui faudra 3 paquets de 30 bonbons pour pouvoir faire tous ses sachets.

38 Durées

- On effectue la division euclidienne de 7 380 par 60 :

$$\begin{array}{r} 7380 \\ \hline 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

On peut écrire : $7\ 380 = 60 \times 123$.

Il y a 123 minutes dans 7 380 secondes.

- On effectue la division euclidienne de 900 par 60 :

$$\begin{array}{r} 900 \\ \hline 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

On peut écrire $900 = 60 \times 15$.

Il y a 15 heures dans 900 minutes.

- On effectue la division euclidienne de 972 par 60 :

$$\begin{array}{r} 972 \\ \hline 60 \\ \hline 12 \end{array}$$

On peut écrire $972 = 60 \times 16 + 12$.

$972 \text{ min} = 16 \text{ h } 12 \text{ min}$.

39 Les courses

On calcule le prix des rôtis de porc :

$14 \times 12 = 168 \text{ €}$, les rôtis de porc coutent 168 € en tout.

On cherche le prix total des rôtis de bœuf :

$546 - 168 = 378 \text{ €}$.

On effectue la division de 378 par 18 :

$378 = 18 \times 21$.

Un rôti de bœuf coûte donc 21 €.

40 Des livres

Les élèves peuvent procéder par tâtonnements (essais successifs), les nombres choisis étant assez petits.

On peut aussi dresser la liste des multiples de 5 et des multiples de 7 et trouver deux de ces multiples (un dans chaque liste) dont la somme est égale à 58.

On trouve : $58 = 5 \times 6 + 7 \times 4$.

Il pourra ranger 6 livres à 5 cm de largeur et 4 livres à 7 cm de largeur et il n'y aura pas d'espace de libre.

41 Dividende

On effectue la division euclidienne de 171 par 8 :

$$\begin{array}{r} 171 \\ \hline 8 \\ \hline 3 \end{array}$$

On peut écrire $171 = 8 \times 21 + 3$.

On peut augmenter le dividende 175 de 4 sans que le quotient change. Le reste doit toujours rester inférieur au diviseur.

$172 = 8 \times 21 + 4$;

$173 = 8 \times 21 + 5$;

$174 = 8 \times 21 + 6$;

$175 = 8 \times 21 + 7$;

$176 = 8 \times 21 + 8$. Impossible.

42 Rallye Kangourou

$15 = 3 \times 5$. Il n'y a pas d'autre possibilité pour décomposer 15 en produit de facteurs entiers à 1 chiffre. La somme donne $3 + 5 = 8$.

43 Des verres

On cherche le nombre de verres qu'il a achetés :

$36 \times 12 = 432$ verres.

Après la casse, il lui en reste : $432 - 7 = 425$.

425 n'est pas divisible par 10, il ne se termine pas par 0, donc il ne pourra pas faire des paquets de 10 sans qu'il lui en reste pour les revendre.

44 Cœur

On cherche le nombre de battements de cœur en un an : $4\ 500 \times 24 \times 365 = 39\ 420\ 000$ battements en un an.

En 70 ans, le cœur aura fait :

$70 \times 43\ 800\ 000 = 2\ 759\ 400\ 000$ battements en 70 ans.

45 Nombres parfaits

- Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6.

La somme de ses diviseurs excepté lui-même donne :

$1 + 2 + 3 = 6$.

6 est bien un nombre parfait.

- Les diviseurs de 28 sont : 1 – 2 – 4 – 7 – 14 – 28.

La somme de ses diviseurs excepté lui-même donne :

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

28 est bien un nombre parfait.

Engrenages

Dans les engrenages, on a la propriété :

Nombre de dents de la roue 1 × Nombre de tours de la roue 1 = Nombre de dents de la roue 2 × Nombre de tours de la roue 2

On a :

$12 \times$ Nombres de tours du grand engrenage = $6 \times$ Nombres de tours du petit engrenage :

$12 \times 3 = 36 ; 36 = 6 \times 6$. La petite roue fait 6 tours.

Rallye mathématique

Sandra a le double de l'âge de Christian.

Trois fois l'âge de Christian ajoutés à l'âge de Pierre est donc égal à 35.

La différence entre 35 et l'âge de Pierre est donc divisible par 3. On envisage toutes les possibilités :

- Si cette différence est 33 :

Pierre a alors 2 ans, Christian $33 \div 3 = 11$ ans et Sandra $2 \times 11 = 22$ ans. Impossible, car Christian doit être le plus jeune.

- Si cette différence est 30 :

Pierre a alors 5 ans, Christian $30 \div 3 = 10$ ans et Sandra $2 \times 10 = 20$ ans. Impossible, car Christian doit être le plus jeune.

- Si cette différence est 27 :

Pierre a alors 8 ans, Christian $27 \div 3 = 9$ ans et Sandra $2 \times 9 = 18$ ans. Impossible, car Christian doit être le plus jeune.

- Si cette différence est 24 :

Pierre a alors 11 ans, Christian $24 \div 3 = 8$ ans et Sandra $2 \times 8 = 16$ ans. Cela convient.

- Si cette différence est 21 :

Pierre a alors 14 ans, Christian $21 \div 3 = 7$ ans et Sandra $2 \times 7 = 14$ ans. Impossible, car il n'y a pas de jumeaux.

- Si cette différence est 18 :

Pierre a alors 17 ans, Christian $18 \div 3 = 6$ ans et Sandra $2 \times 6 = 12$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 15 :

Pierre a alors 20 ans, Christian $15 \div 3 = 5$ ans et Sandra $2 \times 5 = 10$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 12 :

Pierre a alors 23 ans, Christian $12 \div 3 = 4$ ans et Sandra $2 \times 4 = 8$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 9 :

Pierre a alors 26 ans, Christian $9 \div 3 = 3$ ans et Sandra $2 \times 3 = 6$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 6 :

Pierre a alors 29 ans, Christian $6 \div 3 = 2$ ans et Sandra $2 \times 2 = 4$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 3 :

Pierre a alors 32 ans, Christian $3 \div 3 = 1$ an et Sandra $2 \times 1 = 2$ ans. Impossible, car Sandra doit être la plus âgée.

- Si cette différence est 0 :

Pierre a alors 35 ans, Christian $0 \div 3 = 0$ an et Sandra $2 \times 0 = 0$ an. Impossible, car un seul enfant serait né.

- En conclusion, les enfants reçoivent respectivement 8, 11 et 16 euros.

On a bien $8 + 11 + 16 = 35$ et l'aînée a le double du plus jeune.

Année bissextile ?

- 636 est divisible par 4 ($36 = 4 \times 9$) et ne se termine pas par 0. 636 était une année bissextile.

- 2 000 est divisible par 4 et aussi par 400. 2000 était une année bissextile.

- 1 900 est divisible par 4 mais aussi par 100. 1900 n'était pas une année bissextile.

• 1 224 est divisible par 4 ($24 = 6 \times 4$).

C'était une année bissextile.

• 1 562 n'est pas divisible par 4 (62 n'est pas divisible par 4).

Ce n'était pas une année bissextile.

• 2 020 est divisible par 4 ($20 = 4 \times 5$).

2020 sera une année bissextile.

Programme de calcul

- Programme de calcul appliquée à 5 :

$$5 \times 8 = 40 \rightarrow 40 + 10 = 50 \rightarrow 50 \div 2 = 25.$$

- Programme de calcul appliquée à 7 :

$$7 \times 8 = 56 \rightarrow 56 + 10 = 66 \rightarrow 66 \div 2 = 33.$$

- Programme de calcul appliquée à 11 :

$$11 \times 8 = 88 \rightarrow 88 + 10 = 98 \rightarrow 98 \div 2 = 49.$$

On peut demander d'écrire les calculs en lignes si ce chapitre est fait après les priorités de calcul.

On peut aller plus loin en demandant d'écrire la programme avec un nombre x .

On multiplie le nombre du départ par 8 et ensuite on ajoute 10. 8 et 10 sont des multiples de 2. Donc quand on divise par 2, on obtient un nombre entier.

$x \times 8 + 10$ est divisible par 2.

Énergie nucléaire

Pour une éolienne, la production annuelle est de :

$$5 \times 2\ 000 = 10\ 000 \text{ MWh par an.}$$

Un réacteur délivre en moyenne :

$$(7\ 000\ 000 + 8\ 000\ 000) \div 2 = 7\ 500\ 000 \text{ MWh.}$$

$$7\ 500\ 000 \div 10\ 000 = 750.$$

Il faut donc 750 éoliennes pour remplacer un réacteur.

Running the numbers

1. 2 millions de bouteilles sont utilisées en 5 min.

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 5 \times 12 \text{ min.}$$

Le nombre de bouteilles utilisées en une journée est de :

$$2 \times 12 \times 24 = 576 \text{ millions de bouteilles en plastiques jetées en une journée.}$$

2. On effectue la division euclidienne de 576 000 000 par 58.

$$576\ 000\ 000 = 58 \times 9\ 931\ 034 + 28$$

Ils pourraient réaliser 9 931 034 couettes avec les bouteilles utilisées en une journée.

3. $1 \text{ h} = 3\ 600 \text{ s} = 120 \times 30 \text{ s.}$

$$106\ 000 \times 120 \times 24 = 305\ 280\ 000 \text{ canettes jetées en une journée.}$$

Le nombre de canettes jetées est inférieur à celui des bouteilles plastique.

Changement de vitesse

Pour avoir un nombre entier, il faut que le nombre de dents du plateau soit un multiple du nombre de dents du pignon.

36 est un multiple de 12 et de 18.

48 est un multiple de 12, de 16 et de 24.

Éclipse

On effectue la division euclidienne de 6 585 par 365.

$$6\ 585 = 365 \times 18 + 15.$$

2000, 2004, 2008, 2012, 2016 sont des années bissextiles, elles ont donc un jour de plus.

La prochaine éclipse aura donc lieu en :

$$1\ 999 + 18 = 2\ 017.$$

$$15 - 5 = 10; 11 + 10 = 21.$$

Elle aura lieu le 21 août 2017.

Des tours

Pour les deux tours, le nombre de marches est un nombre premier.

On retrouve cette particularité dans beaucoup de monuments.

Les poupées

Le nombre de poupées de Cibélia est un multiple de 7 mais pas de 4, 5 et 6.

On cherche tous les multiples de 7 inférieurs à 100 puis on élimine les multiples de 4, de 5 et de 6 :

$$7 - 14 - 21 - 28 - 35 - 42 - 49 - 56 - 63 - 70 - 77 - 84 - 91 - 98.$$

Puis on effectue les divisions euclidiennes par 4, 5 et 6 des nombres restants pour trouver les restes.

Le seul nombre dont le reste est 3 par la division euclidienne par 4, 5 et 6 est 63.

Elle a 63 poupées.

56 Le prénom

Le mot Annabelle contient 9 lettres. On a donc une périodicité de 9.

On effectue la division euclidienne de 1000 par 9 :

$$1\,000 = 9 \times 111 + 1.$$

Le reste est 1 donc la 1 000^e lettre sera donc le A.

57 Le « père cent »

Une semaine compte 7 jours. On a donc une périodicité de 7.

On effectue la division euclidienne de 100 par 7 :

$$100 = 7 \times 14 + 2.$$

Le reste est 2 donc le baccalauréat aura lieu 2 jours après le mardi, c'est-à-dire un jeudi.

58 Le vélo

On cherche le premier multiple commun à 15 et 12. C'est 60 car :

$$15 \times 4 = 60 \text{ et } 12 \times 5 = 60.$$

On peut faire écrire les tables de 15 et de 12.

Ils passeront ensemble la ligne d'arrivée au bout de 60 min, donc 1 heure, soit à 12 h.

59 Relevé d'identité bancaire

$$N = 584\,968\,745\,100\,014\,500\,269.$$

On effectue la division euclidienne de N × 100 par 97.

Cette division ne peut pas se faire à la calculatrice.

$$\begin{array}{r} 58\,496\,874\,510\,001\,450\,026\,900 \\ = 97 \times 603\,060\,561\,958\,777\,835\,328 + 84. \\ 97 - 84 = 13. \end{array}$$

La clé RIB de ce compte est le 13.

60 Christmas

Le 1^{er} janvier 2015 est un jeudi.

L'année 2015 est une année bissextille et comporte 365 jours.

$$365 = 7 \times 52 + 1.$$

L'année 2015 contient 52 semaines plus 1 jour.

Le 30 décembre 2015 est donc un jeudi. Le 23 décembre est donc aussi un jeudi. Le jour de Noël, le 25 décembre, est donc un samedi.

61 Le loto

On cherche les nombres premiers entre 1 et 49 :

$$2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43 - 47.$$

Il y en a 15 sur les 49 possibles auxquels il faut rajouter les 4 nombres premiers parmi les 10 numéros « chance » nombres de la grille.

Elle a donc 19 chances sur 59, ce qui ne fait pas 1 chance sur 4.

$$\frac{19}{59} \neq \frac{1}{4}. \text{ Elle n'a donc pas raison.}$$

62 Billets de banque

1. On transforme le code du billet en un nombre en cherchant le rang de la lettre V, 22.

$$V02396040124 \text{ donne donc } 2\,202\,396\,040\,124.$$

On effectue la division euclidienne de 2 202 396 040 124 par 9.

La calculatrice ne fait pas cette opération.

$$22\,023\,960\,404\,124 = 9 \times 24\,471\,067\,112 + 8.$$

Le reste est 8 donc le billet est authentique.

2. Soit N le nombre obtenu en transformant la lettre. On sait que si on ajoute 8 à ce nombre, le résultat est divisible par 9. On sait qu'un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

$$16\,122\,343\,242 + 8 = 16\,122\,343\,250.$$

La somme des chiffres donne :

$$1 + 6 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 5 + 0 = 29.$$

On a donc les possibilités suivantes :

$$36 = 29 + 7, \text{ c'est la lettre G.}$$

$$45 = 29 + 16, \text{ c'est la lettre P.}$$

$$54 = 29 + 25, \text{ c'est la lettre Y.}$$

63 Calculatrice

On remarque que les chiffres après la virgule forment une suite récurrente de 3 chiffres 1, 4 et 8.

On effectue la division euclidienne de 128 par 3 :

On trouve $128 = 3 \times 42 + 2$. Le reste est 2.

C'est donc le deuxième chiffre dans 148 qui est 4.

Le 128^e chiffre sera un 4.

64 Le petit train dominois

On effectue la division euclidienne de 228 par 45 :

$$\begin{array}{r} 228 \quad | \quad 45 \\ 3 \quad | \quad 5 \end{array}$$

Elle devra prendre le 6^e train.

$$5 \times 25 = 125 \text{ min.}$$

$$125 \text{ min.} = 2 \text{ h } 05 \text{ min.}$$

Elle prendra le train de 12 h 05.

65 Des champignons

La division euclidienne de 95 par le nombre d'amis a pour reste 5.

$$\text{On a donc } 95 = b_1 \times q + 5, \text{ donc } b_1 \times q = 90.$$

La division euclidienne de 160 par le nombre d'amis a pour reste 10.

$$\text{On a donc } 160 = b_2 \times q + 10, \text{ donc } b_2 \times q = 150.$$

On cherche le plus grand diviseur commun à 90 et 150.

Les diviseurs de 90 :

$$1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 9 - 10 - 15 - 30 - 45 - 90.$$

Les diviseurs de 150 :

$$1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 15 - 25 - 30 - 50 - 75 - 150.$$

Le plus grand diviseur commun est 30.

Il pourra les partager entre 30 amis au maximum.

$$90 \div 30 = 3 \text{ et } 150 \div 30 = 5.$$

Chaque ami aura 3 cèpes et 5 girolles.

66 Cubes et pavés droits

La valeur maximale du côté du cube doit être un multiple de 60, de 40 et de 24.

On cherche le plus petit multiple commun non nul.

Multiples de 60 : 60 - 120 - ...

Multiples de 40 : 40 - 80 - 120 - ...

Multiples de 24 : 24 - 48 - 72 - 96 - 120 - ...

La valeur minimale possible pour la longueur de l'arête du cube est 120 cm.

67 La terrasse

$$5,40 \text{ m} = 540 \text{ cm et } 6,60 \text{ m} = 660 \text{ cm.}$$

1. Non, ce n'est pas possible car 660 n'est pas divisible par 9.

2. 660 est divisible par 20, 400 est divisible par 20.

C'est donc possible.

3. On cherche le plus grand diviseur commun à 540 et 660.

C'est 60.

$$540 = 60 \times 9;$$

$$660 = 60 \times 11.$$

Les dalles feront 60 cm de côté (et il en faudra 9 dans la largeur et 11 dans la longueur).

$$9 \times 11 = 99.$$

Il lui faudra 99 dalles.

68 Addition cachée

$$\begin{array}{r} 41 \\ + 47 \\ \hline 88 \end{array}$$

69 Des étagères

On cherche combien il peut faire d'étagères avec chaque élément.

$26 = 4 \times 6 + 2$, avec les planches longues, il pourrait en faire 6.

$33 = 6 \times 5 + 3$, avec les planches courtes, il pourrait en faire 5.

$200 = 12 \times 16 + 8$, avec les petites équerres, il pourrait en faire 16.

$20 = 2 \times 10$, avec les grandes équerres, il pourrait en faire 10.

$510 = 14 \times 36 + 6$, avec les vis, il pourrait en faire 36.

Il pourra donc faire 5 étagères avec son matériel.

70 Algorithmie et tableau

1. Ce script sert à écrire la liste des 11 premiers multiples d'un nombre entier choisi.

Dès qu'on cliquera de nouveau sur le drapeau vert, la liste est vidée grâce à :

supprimer l'élément tout ▾ de la liste multiples ▾ .

Exemple si le nombre choisi est 7 :

multiples	
1	0
2	7
3	14
4	21
5	28
6	35
7	42
8	49
9	56
10	63
11	70

k 11 + longueur: 11

2. a. Dans la cellule B4, il faut saisir la formule : =B\$1*A4.

Dans une formule, lorsqu'on fait référence à une cellule précise qui doit être employée dans tous les cas, même lorsqu'on copie la formule dans une autre colonne ou une autre ligne, il faut rajouter le symbole \$ devant la référence de la ligne et de la colonne.

Ici, il suffit juste de rajouter le symbole \$ devant la référence de la ligne puisque la formule est écrite dans la même colonne B.

Si on ne saisisait pas le symbole \$ devant la référence de la ligne, dans la cellule B5, on verrait apparaître la formule =B2*A5, ce qui serait faux.

- b. Dans la cellule B13, la formule =B\$1*A13 a été recopiée.

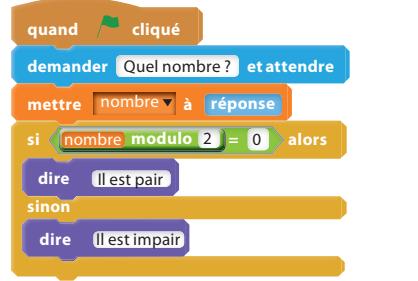
La cellule B1 est fixée dans la formule grâce au symbole \$ devant la référence de la ligne.

Exemple si le nombre choisi est 7 :

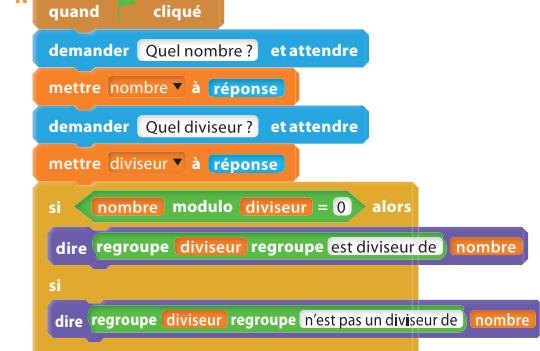
B13		f _x	=B\$1*A13
A	B	C	D
1 Nombre :	7		
2			
3 k multiples			
4 0 0			
5 1 7			
6 2 14			
7 3 21			
8 4 28			
9 5 35			
10 6 42			
11 7 49			
12 8 56			
13 9 63			
14 10 70			

71 Modulo

1. Ce script sert à tester si un nombre entier choisi est ou n'est pas divisible par 3.
2. Grâce à la commande `nombre modulo 3`, on calcule le reste dans la division euclidienne du nombre entier choisi (désigné par la variable « `nombre` ») par 3.
3. On teste cette fois si le nombre choisi est divisible ou non par 2 :



4.



72 Cryptage

1. et 2. Dans C2, il faut saisir la formule =17*A2+56 et dans D2 la formule =MOD(C2;26).
3. Dans la cellule E2, il faut saisir la formule =CAR(D2+97).

La fonction =CAR(97) renvoie la lettre « a », or on veut que la cellule E2 renvoie la lettre « e » de rang 4 (indiqué dans D2) ; la lettre « e » est renvoyée par la formule =CAR(101) soit =CAR(D2+97).

On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
alphabet initial					
1 a	0	56	4	e	
2 b	1	73	21	v	
3 c	2	90	12	m	
4 d	3	107	3	d	
5 e	4	124	20	u	
6 f	5	141	11	l	
7 g	6	158	2	c	
8 h	7	175	19	t	
9 i	8	192	10	k	
10 j	9	209	1	b	
11 k	10	226	18	s	
12 l	11	243	9	j	
13 m	12	260	0	a	
14 n	13	277	17	r	
15 o	14	294	8	i	
16 p	15	311	25	z	
17 q	16	328	16	q	
18 r	17	345	7	h	
20 s	18	362	24	y	
21 t	19	379	15	p	
22 u	20	396	6	g	
23 v	21	413	23	x	
24 w	22	430	14	o	
25 x	23	447	5	f	
26 y	24	464	22	w	
27 z	25	481	13	n	

4. Le message est « tu es un champion ».

On associe chaque lettre cryptée à la lettre de l'alphabet initial grâce au tableau précédent.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Le nombre étant divisible par 0, il se termine par 0. Donc $\clubsuit = 0$. La somme des chiffres est égale à 11, donc pour être divisible par 9, \heartsuit doit être égal à 7 (somme égale à 18). Le nombre est 127 350.

Exercice 1

Le nombre étant divisible par 5, il se termine par 0 ou 5.

- Si $\clubsuit = 0$, la somme des chiffres est égale à 11. Donc pour être divisible par 3, \heartsuit doit être égal à 1 (somme égale à 12), à 4 (somme égale à 15) ou 7 (somme égale à 18).
- Si $\clubsuit = 5$, la somme des chiffres est égale à 16. Donc pour être divisible par 3, \heartsuit doit être égal à 2 (somme égale à 18) ou 5 (somme égale à 21) ou 8 (somme égale à 24).

Les nombres possibles sont :

124 350 – 127 350 – 122 355 – 125 355 – 128 355.

Exercice 2

$40\ 000 = 200 \times 200$.

Il y a 200 lignes de 200 carrés.

80 cm = 800 mm.

$800 \div 200 = 4$.

Le Carré mesure 4 mm de côté.

Exercice 2

80 cm = 800 mm.

Les diviseurs de 800 sont : 1 – 2 – 4 – 5 – 8 – 10 – 16 – 20 – 25 – 32 – 40 – 50 – 80 – 100 – 160 – 200 – 400 – 800.

Si le côté mesure 1 mm de côté, il y a alors $800^2 = 640\ 000$ carrés.
 S'il mesure 2 mm, il y a $400^2 = 160\ 000$ carrés.
 S'il mesure 4 mm, il y a $200^2 = 40\ 000$ carrés.
 S'il mesure 5 mm, il y a $160^2 = 25\ 600$ carrés.
 S'il mesure 8 mm, il y a $100^2 = 10\ 000$ carrés.
 S'il mesure 10 mm, il y a $80^2 = 6\ 400$ carrés.
 S'il mesure 16 mm, il y a $50^2 = 2\ 500$ carrés.
 S'il mesure 20 mm, il y a $40^2 = 1\ 600$ carrés.
 S'il mesure 25 mm, il y a $32^2 = 1\ 024$ carrés.
 S'il mesure 32 mm, il y a $25^2 = 625$ carrés.
 S'il mesure 40 mm, il y a $20^2 = 400$ carrés.
 S'il mesure 50 mm, il y a $16^2 = 196$ carrés.
 S'il mesure 80 mm, il y a $10^2 = 100$ carrés.
 S'il mesure 100 mm, il y a $8^2 = 64$ carrés.
 S'il mesure 160 mm, il y a $5^2 = 25$ carrés.
 S'il mesure 200 mm, il y a $4^2 = 16$ carrés.
 S'il mesure 400 mm, il y a $2^2 = 4$ carrés.
 S'il mesure 800 mm, il y a 1 Carré.

Les autres noms possibles seraient :

640 000 – 160 000 – 25 600 – 10 000 – 6 400 – 2 500
 – 1 600 – 1 024 – 625 – 400 – 196 – 100 – 64 – 25 – 16 – 4 Carrés
 ou 1 Carré.

Analyse d'une production

- Sophie a oublié 10 dans les diviseurs.
- Albert a oublié les nombres associés aux diviseurs qu'il a écrits : 4 – 25 – 20 et 100.
- Zian a oublié 1 et 100 comme diviseurs (un nombre entier admet toujours 1 et lui-même comme diviseurs).

Introduction

Ce chapitre permet de travailler le thème « Nombre décimaux » du programme.

La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendés au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4. De nombreux exercices et problèmes permettent de pratiquer le calcul exact ou approché, à la main ou instrumenté. C'est aussi l'occasion de développer le sens critique des élèves en les incitant à vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. Enfin, des problèmes très concrets amènent à effectuer des calculs et des comparaisons.

Repères de progressivité

Il n'est pas nécessaire d'avoir traité d'autres notions avant d'aborder ce chapitre. Néanmoins, il serait souhaitable d'avoir traité des problèmes remobilisant les quatre opérations sur les

nombres entiers et les nombres décimaux. Savoir enchaîner des opérations sera nécessaire pour résoudre de nombreux problèmes dans divers domaines (fractions, nombres relatifs, calcul littéral, proportionnalité, calcul et représentation de grandeurs, traitement de données, angles). Il est donc essentiel de traiter ces notions très tôt dans l'année.

Objectifs du chapitre

Le choix a été fait de ne traiter dans un premier temps que les enchaînements d'opérations concernant des nombres positifs. Celles concernant les nombres relatifs seront étudiées dans le chapitre 6. L'objectif est d'amener les élèves à savoir utiliser les enchaînements des quatre opérations notamment dans des situations concrètes et variées. Le travail sur le vocabulaire (somme, différence, produit, quotient...) reste volontairement d'une technicité modérée.

Activités

Questions flash

- 1.** $50 + 45 + 35 = 130$.
Inès possède 130 livres au total.
- 2.** Montant du ticket :

$$\begin{aligned} 1,60 \text{ €} + 3,15 \text{ €} + 8,85 \text{ €} + 18,40 \text{ €} + 12 \text{ €} \\ = 1,60 \text{ €} + 18,40 \text{ €} + 3,15 \text{ €} + 8,85 \text{ €} + 12 \text{ €} \\ = 20 \text{ €} + 12 \text{ €} + 12 \text{ €} = 44 \text{ €}. \end{aligned}$$
- 3.** Nathan fait 5 allers-retours par semaine.
 $3,5 \text{ km} \times 5 \times 2 = 35 \text{ km}$.
Nathan parcourt 35 km par semaine.

- 4.** $40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 60\ 000 \text{ cm}^3$.
Le volume de l'aquarium est de $60\ 000 \text{ cm}^3$.
- 5.** Nombre de vers des strophes de 4 vers : $2 \times 4 = 8$.
Nombre de vers des strophes de 3 vers : $2 \times 3 = 6$.
Nombre total de vers lus par Hatim : $8 + 6 = 14$.

Le bon ordre

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'enchaîner des calculs avec des opérations de même « catégorie ». Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'opérations simples sur les nombres entiers (une seule opération). La capacité introduite est de savoir calculer sans parenthèses.

1. • En commençant par la soustraction, on obtient $7 + 7 = 14$.
• En commençant par l'addition, on obtient $100 - 100 = 0$.
• À la calculatrice, on obtient $A = 14$.
2. Il faut donc commencer par l'addition pour calculer l'expression A.

Activité 1

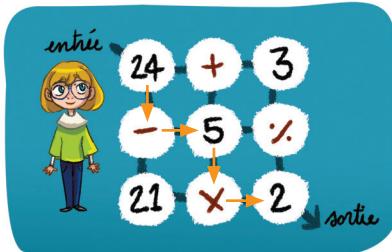
3. • En faisant les mêmes types d'essais, on trouve que pour l'expression B, il faut commencer par la division. On trouve $B = 32$, alors qu'en commençant par la multiplication, on trouve 2.
- En faisant les mêmes types d'essais, on trouve que pour l'expression C, il faut commencer par la première soustraction. On trouve $C = 90$, alors qu'en commençant par la seconde soustraction, on trouve 110.
- En faisant les mêmes types d'essais, on trouve que pour l'expression D, il faut commencer par la première division. On trouve $D = 2,5$, alors qu'en commençant par la seconde division, on trouve 10.
4. Pour les expressions A, B, C et D, il faut effectuer les calculs de la gauche vers la droite.

L'objectif de cette activité est de découvrir les priorités opératoires.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'opérations simples sur les nombres entiers (une seule opération).
La capacité introduite est de savoir calculer sans parenthèses.

1.

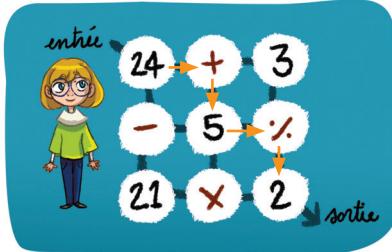
Les élèves peuvent tester avec leur calculatrice les différents chemins possibles. Si certains tentent de faire les calculs « à la main », ceux-ci auront sans doute des résultats faux puisqu'ils ne connaissent pas les priorités opératoires. C'est l'occasion de lancer un débat et d'expliquer l'intérêt de fixer des règles afin que tout le monde trouve le même résultat pour un même calcul.

Zoé a suivi le chemin suivant :



2.

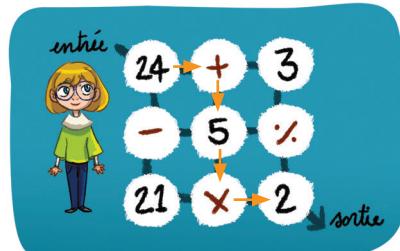
Voici trois autres chemins possibles (ce ne sont pas les seuls) :



Le résultat affiché par la calculatrice est : 26,5.



Le résultat affiché par la calculatrice est : 25,5.



Le résultat affiché par la calculatrice est 34.

3. La calculatrice semble commencer par les multiplications et les divisions.

On pourra alors commencer à parler de priorités opératoires.

Épreuve sportive

Activité 3

L'objectif de cette activité est d'écrire une expression avec des parenthèses ou sous forme de quotient.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'opérations sur les nombres.
La capacité introduite est de savoir calculer avec des parenthèses.

1. Pour avoir 4 lieux de tirs à intervalle régulier, il faut partager la piste en 5 parties de même longueur.

Dans le métro

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'écrire une expression en respectant les priorités et en utilisant des parenthèses.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'opérations sur les nombres.
La capacité introduite est de savoir calculer avec un quotient.

Trajet de Peter

- Entre les stations Hyde Park et Grand, les stations sont à égale distance, soit 1,1 km (distance entre Hyde Park et Inglewood). Peter doit donc parcourir $4 \times 1,1$ km = 4,4 km pour rejoindre Inglewood.
- Entre les stations Inglewood et Manchester Square, les stations sont à égale distance, soit 1,6 km (distance entre Inglewood et La

$$7 \div 5 = 1,4 \text{ ou } \frac{7}{5} = 1,4.$$

Le premier tir a donc lieu au bout de 1,4 km.

$$2. (17 + 7) \div 5 = 4,8 \text{ ou } \frac{17 + 7}{5} = 4,8.$$

Le premier tir a donc lieu au bout de 1,4 km.

Il faut faire ressortir la nécessité des parenthèses pour changer l'ordre des opérations à effectuer.

Activité 4

Tijera).

Peter doit donc parcourir $2 \times 1,6$ km = 3,2 km pour rejoindre Manchester Square.

- Au final, Peter parcourt 4,4 km + 3,2 km = 7,6 km.

On peut faire le calcul en une seule opération : $4 \times 1,1 + 3 \times 1,6$. Les multiplications étant prioritaires, il n'est pas nécessaire de mettre des parenthèses.

Trajet de Stacy

Entre Rosa Park et Hawthorne, il y a 5,4 km. Donc la distance entre deux stations sur cet axe est de $\frac{5,4 \text{ km}}{3} = 1,8$ km.

Stacy doit donc parcourir $4 \times 1,8$ km = 7,2 km.

On peut faire le calcul en une seule opération : $\frac{5,4}{3} \times 4$ ou $5,4 \div 3 \times 4$ (on peut faire remarquer que, les calculs s'effectuant de gauche à droite, il n'est pas nécessaire de mettre des parenthèses) ou encore $5,4 \times \frac{4}{3}$. Les calculs s'effectuant de gauche à droite, il n'est pas nécessaire de mettre des parenthèses.

Trajet de Mason

- Entre Culver Junction et La Cienega, il y a 0,7 km (même distance qu'entre Motor et Culver Junction).
- Entre les stations La Cienega et Manchester Square, les stations

sont à égale distance, soit 1,7 km (distance entre Culver City Center et Fox Hille).

• Mason doit donc parcourir $4 \times 1,7$ km = 6,8 km pour rejoindre Manchester Square.

Au final, Mason doit parcourir 0,7 km + 6,8 km = 7,5 km.

On peut faire le calcul en une seule opération : $0,7 + 4 \times 1,7$ (on peut faire remarquer que, les multiplications étant prioritaires, il n'est pas nécessaire de mettre des parenthèses) ou $4 \times 1,7 + 0,7$.

Conclusion

C'est donc Stacy qui a le moins de trajet à parcourir.

Que de vocabulaire...

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir les noms des opérations.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec et sans parenthèses.

La capacité introduite est de savoir utiliser un vocabulaire approprié pour décrire des calculs.

Les élèves peuvent utiliser un dictionnaire pour définir des termes dont ils ignorent le sens ou trouver une définition claire d'un mot dont ils connaissent le sens mais qu'ils ont du mal à exprimer.

- Un produit est le résultat d'une multiplication. Ce n'est pas le même sens qu'en français (ici « ce qui naît d'une activité de la nature ou de l'homme »).

Exercices

Calculer sans parenthèses

Questions flash

1 A = 2 ; B = 28 ; C = 14 ; D = 48 ; E = 14 ; F = 16.

2 A = 30 ; B = 20 ; C = 18 ; D = 2 ; E = 5 ; F = 18.

3 A = 7 ; B = 12 ; C = 31 ; D = 21 ; E = 15 ; F = 64.

4 A = $40 + 16 - 12 + 4 - 8$

A = $56 - 12 + 4 - 8$

A = $44 + 4 - 8$

A = $48 - 8$

A = 40

B = $11 - 5 + 15 - 4 + 3$

B = $6 + 15 - 4 + 3$

B = $21 - 4 + 3$

B = 17 + 3

B = 20

C = $8 + 9 - 5,7 - 4,7$

C = $17 - 5,7 - 4,7$

C = $11,3 - 4,7$

C = 6,6

D = $3 - 2,7 + 2,3 + 4$

D = $0,3 + 2,3 + 4$

D = $2,6 + 4$

D = 6,6

E = $18,2 - 5,1 + 4,5$

E = $13,1 + 4,5$

E = 17,6

F = $0,8 - 0,13 + 0,54 - 0,4$

• Une somme est le résultat d'une addition. Ce n'est pas le même sens qu'en français (ici, « quantité d'argent »).

• Les termes désignent des nombres qu'on additionne ou qu'on soustrait. Ce n'est pas le même sens qu'en français (ici, « éléments entrant en relation les uns avec les autres » puis « moment où prend fin dans le temps une action, un état »).

• Les facteurs désignent des nombres qu'on multiplie. Ce n'est pas le même sens qu'en français (ici, « agent, élément qui concourt à un résultat ; cause »).

• Une différence est le résultat d'une soustraction. Ce n'est pas le même sens qu'en français (ici, « absence de similitude entre des choses »).

2. C'est la dernière étape qui donne le nom du calcul.

F = $0,67 + 0,54 - 0,4$

F = $1,21 - 0,4$

F = 0,81

5 A = $20 \times 12 \div 6 \div 2$

A = $240 \div 6 \div 2$

A = $40 \div 2$

A = 20

B = $10 \times 8 \div 4 \times 5$

B = $80 \div 4 \times 5$

B = 20×5

B = 100

C = $24 \div 4 \times 2 \div 3$

C = $6 \times 2 \div 3$

C = $12 \div 3$

C = 4

D = $30 \div 6 \times 5 \times 2 \div 10$

D = $5 \times 5 \times 2 \div 10$

D = $25 \times 2 \div 10$

D = $50 \div 10$

D = 5

6 A = $22 - 9 - 3$

A = $13 - 3$

A = 10

B = $7 \times 8 \div 2$

B = $56 \div 2$

B = 28

C = $215 - 14 + 1 + 3 - 7$

C = $201 + 1 + 3 - 7$

C = $202 + 3 - 7$

C = $205 - 7$

C = 198

D = $72 \div 4 \times 2$

D = 18×2

D = 36

Activité 5

$$\begin{aligned} E &= 1\,600 \div 16 \div 2 \\ E &= 100 \div 2 \\ E &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 37,3 - 18,3 + 10 \\ F &= 19 + 10 \\ F &= 29 \end{aligned}$$

- 7 a. $13 + 5 - 2 = 16$
 b. $13 + 5 + 2 = 20$
 c. $13 - 5 - 2 = 6$
 d. $13 - 5 + 2 = 10$

- 8 a. $20 \div 5 \times 2 = 8$
 b. $20 \times 5 \div 2 = 50$
 c. $20 \times 5 \times 2 = 200$
 d. $20 \div 5 \div 2 = 2$

$$\begin{aligned} 9 A &= 24 - 5 \times 3 \\ A &= 24 - 15 \\ A &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5 + 45 \div 5 \\ B &= 5 + 9 \\ B &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 12 - 6 \div 2 \\ C &= 12 - 3 \\ C &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 36 \div 6 + 6 \\ D &= 6 + 6 \\ D &= 12 \end{aligned}$$

$$10 A = 5 \times 6 - 3 \times 4$$

$$\begin{aligned} A &= 30 - 12 \\ A &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 15 \div 3 + 2 \times 5 \\ B &= 5 + 10 \\ B &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 22 - 3 \times 6 + 5 \\ C &= 22 - 18 + 5 \\ C &= 4 + 5 \\ C &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 2 + 4 \times 5 - 2 \times 7 \\ D &= 2 + 20 - 14 \\ D &= 22 - 14 \\ D &= 8 \end{aligned}$$

$$11 A = 2 - 6 \div 3 + 3 \times 4 + 1$$

$$\begin{aligned} A &= 2 - 2 + 12 + 1 \\ A &= 12 + 1 \\ A &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2,5 + 3 \times 7 - 35 \div 5 \\ B &= 2,5 + 21 - 7 \\ B &= 23,5 - 7 \\ B &= 16,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 12 \div 3 - 1 + 7 \times 8 \\ C &= 4 - 1 + 56 \\ C &= 3 + 56 \\ C &= 59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 4,5 - 5 \div 2 + 1,5 \times 2 \\ D &= 4,5 - 2,5 + 3 \\ D &= 2 + 3 \\ D &= 5 \end{aligned}$$

- 12 Pour le A, Lucas n'a pas respecté la priorité de la multiplication : c'est faux.
 Pour le B, c'est juste : Lucas a bien calculé de la gauche vers la droite (il n'y a que des additions et des soustractions).
 Pour le C, Lucas n'a pas respecté la priorité de la division : c'est faux.
 Pour le D, c'est juste : Lucas a bien calculé en respectant la priorité de la multiplication.

$$\begin{aligned} 13 1. A &= 3 + 2 \times 5 - 4 \\ A &= 3 + 10 - 4 \\ A &= 13 - 4 \\ A &= 9 \end{aligned}$$

C'est donc la fille rousse qui a raison.

2. La fille brune a commencé par la soustraction alors que la multiplication est prioritaire.
 La fille blonde a fait les calculs de gauche à droite sans tenir compte des priorités.

Calculer avec des parenthèses

Questions flash

$$14 A = 1 ; B = 28 ; C = 30 ; D = 8 ; E = 27 ; F = 3.$$

$$15 A = 80 ; B = 27 ; C = 39 ; D = 2.$$

$$\begin{aligned} 16 A &= 31 - (4 + 5) \times 2 \\ A &= 31 - 9 \times 2 \\ A &= 31 - 18 \\ A &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (14 + 7) \div 3 + 4 \\ B &= 21 \div 3 + 4 \\ B &= 7 + 4 \\ B &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 42 \times (13 - 11) \div 3 \\ C &= 42 \times 2 \div 3 \\ C &= 84 \div 3 \\ C &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 40 - (13 - 6) \times (1 + 2) \\ D &= 40 - 7 \times 3 \\ D &= 40 - 21 \\ D &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 A &= [14 - (2 + 3)] \times 2 \\ A &= [14 - 5] \times 2 \\ A &= 9 \times 2 \\ A &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 12 \div [(4 + 2) \times 2] \\ B &= 12 \div [6 \times 2] \\ B &= 12 \div 12 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= [8 - (7 - 2)] \times 3 \\ C &= [8 - 5] \times 3 \\ C &= 3 \times 3 \\ C &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 0,5 \times [38 - (7 + 3)] \\ D &= 0,5 \times [38 - 10] \\ D &= 0,5 \times 28 \\ D &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 A &= (25 - 7) - 8 \\ A &= 25 - 7 - 8 \\ A &= 18 - 8 \\ A &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5 + (49 \div 7) \\ B &= 5 + 49 \div 7 \\ B &= 5 + 7 \\ B &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (3 \times 2) + 2 \times (5 - 3) \\ C &= 3 \times 2 + 2 \times (5 - 3) \\ C &= 6 + 2 \times 2 \\ C &= 6 + 4 \\ C &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 6 \times [(5 \times 2) - 4] \\ D &= 6 \times [5 \times 2 - 4] \\ D &= 6 \times [10 - 4] \\ D &= 6 \times 6 \\ D &= 36 \end{aligned}$$

19 A = $225 - [(15 + 7) \times 10 - 2]$
A = $225 - [22 \times 10 - 2]$
A = $225 - [220 - 2]$
A = $225 - 218$
A = 7

$$\begin{aligned} B &= 15 + 7 \times (100 - 20) \div 8 + 2 \\ B &= 15 + 7 \times 80 \div 8 + 2 \\ B &= 15 + 560 \div 8 + 2 \\ B &= 15 + 70 + 2 \\ B &= 85 + 2 \\ B &= 87 \\ C &= [10 \times 3,2 - (79 - 71)] \div 6 \\ C &= [10 \times 3,2 - 8] \div 6 \\ C &= [32 - 8] \div 6 \\ C &= 24 \div 6 \\ C &= 4 \end{aligned}$$

20 1. $62 - 30 - 7 + 20 = 32 - 7 + 20 = 25 + 20 = 45$
2. $62 - (30 - 7) + 20 = 62 - 23 + 20 = 39 + 20 = 59$
3. $62 - (30 - 7 + 20) = 62 - (23 + 20) = 62 - 43 = 19$

Calculer avec des quotients

Questions flash

21 A = 8 ; B = $\frac{13}{2}$ ou 6,5 ; C = 10 ; D = $\frac{17}{2}$ ou 8,5.

22 Luce a calculé d'abord $3\,051 \div 2,5$ puis a ajouté 6,5 alors qu'il faut d'abord calculer le dénominateur (comme s'il y avait des parenthèses) :

$$\frac{3\,051}{2,5 + 6,5} = \frac{3\,051}{9} = 339.$$

23 A va avec H.
B va avec E.
C va avec F.
D va avec G.

24 A = $2,5 + 1,5 \times 3 + \frac{152}{3,5 + 11,5}$

$$A = 2,5 + 1,5 \times 3 + \frac{150}{15}$$

$$A = 2,5 + 4,5 + 10$$

$$A = 7 + 10$$

$$A = 17$$

$$B = \frac{56}{28}$$

$$B = \frac{2}{4} \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ ou } 0,5$$

$$C = \frac{27,8 + 32,5}{2,5 \times 4}$$

$$C = \frac{60,3}{10}$$

$$C = 6,03$$

$$D = \frac{5 \times (10,6 - 9,8) + 40}{20 - 10,3 + 1,3}$$

$$D = \frac{5 \times 0,8 + 40}{9,7 + 1,3}$$

$$D = \frac{4 + 40}{11}$$

$$D = \frac{44}{11}$$

$$D = 4$$

25 1. A = $\frac{\frac{16}{8}}{2}$
A = $\frac{2}{2}$
A = 1

$$\begin{aligned} B &= 16 + \frac{8}{2} \\ B &= 16 + 4 \\ B &= 20 \\ C &= \frac{16}{2} + 8 \\ C &= 8 + 8 \\ C &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{16 + 8}{2} \\ D &= \frac{24}{2} \\ D &= 12 \end{aligned}$$

2. A va avec ④ ; B va avec ① ; C va avec ③ ; D va avec ②.

Utiliser le bon vocabulaire

Questions flash

- 26 a. La dernière opération effectuée est la soustraction. C'est donc une différence.
b. La dernière opération effectuée est la soustraction. C'est donc une différence.
c. La dernière opération effectuée est la division. C'est donc un quotient.
d. La dernière opération effectuée est l'addition. C'est donc une somme.

- 27 a. Le produit de 9 par 14.
b. La différence entre le produit de 5 par 7 et 3.
c. Le produit de 8 par la différence entre 9 et 3.
d. Le quotient de 64 par 15.
e. Le quotient de la somme de 15 et de 13 par 7.
f. Le produit de la somme de 15 et de 7 par la différence entre 10 et 7.

28 a. $28 - \frac{21}{7} = 25$
b. $5 \times (7 + 2) = 45$
c. $\frac{17 + 7}{2} = 12$

29 a. $\frac{28}{7}$ ou $28 \div 7$
b. $30 + 2 \times 12$
c. $15 \times (2 + 7)$

Problèmes

30 Sucreries

1. $5 \times 1,80$ représente le prix des gâteaux.
2. $12 \times 0,70$ représente le prix des sucettes.
3. $5 \times 1,80 + 12 \times 0,70$.
4. $5 \times 1,80 + 12 \times 0,70 = 9 + 8,4 = 17,4$.
Magali a payé 17,40 €.

31 Le phare de Contis

Recette du phare en 2014 :
 $9\,298 \times 3 \text{ €} + 3\,741 \times 1 \text{ €} = 27\,894 \text{ €} + 3\,741 \text{ €} = 31\,635 \text{ €}$.

32 Qui dit vrai ?

Produit de la somme de 8 et de 7 par 5 :

$$(8 + 7) \times 5 = 15 \times 5 = 75.$$

Somme du produit de 8 par 7 et de 5 :

$$8 \times 7 + 5 = 56 + 5 = 61.$$

Cela ne revient pas au même, c'est Candice qui a raison.

33 Expressions

1. Somme restant à Vincent (en euros) :

$$150 - \frac{36}{3} (= 150 - 12 = 138).$$

2. Longueur restante (en cm) :

$$150 - 3 \times 36 (= 150 - 108 = 42).$$

3. Nombre de pages lues par Théo par jour :

$$\frac{150 - 36}{3} \left(= \frac{114}{3} = 38 \right).$$

34 À la boulangerie

1. a. $3 \times 0,90 = 2,70$ représente le prix des baguettes de pain (en euros).

b. $10 - 3,30 = 6,70$ représente la somme payée par Noé (en euros).

c. $6,70 - 2,70 = 4$ représente le prix des croissants (en euros).

d. $4 \div 5 = 0,80$ représente le prix d'un croissant (en euros).

2. Prix d'un croissant en euros :

$$\frac{10 - 3,30 - 3 \times 0,90}{5} \left(= \frac{6,70 - 2,70}{5} = \frac{4}{5} = 2 \right).$$

35 Scientifique ?

Si Mathis avait utilisé une calculatrice scientifique, celle-ci respecterait les priorités opératoires.

Dans ce cas, le résultat obtenu serait :

$$2 + 5 \times 3 - 8 = 2 + 15 - 8 = 17 - 8 = 9.$$

La calculatrice a fait les calculs de gauche à droite sans respecter les priorités :

$$2 + 5 = 7 \quad 7 \times 3 = 21 \quad 21 - 8 = 13$$

Mathis n'a donc pas utilisé une calculatrice scientifique.

36 Anniversaire

Nombre de roses achetées (ou âge de la femme de Franck) :

$$\frac{100 + 5}{3} = 35.$$

37 Parking

Temps pendant lequel M. Oscar est resté garé au parking :

$$19 h 20 \text{ min} - 13 h 45 \text{ min} = 5 \text{ h } 35 \text{ min}.$$

La 1^{re} heure est gratuite.

La 2^e heure lui coûte 2,50 €.

La 3^e heure lui coûte 1,50 €.

La 4^e heure et la 5^e heure lui coûtent chacune 1 €.

La 6^e heure est incomplète, elle lui coûte 0,25 € par quart d'heure entamé, ici 3 (car 30 min < 35 min < 45 min).

M. Oscar paiera donc :

$$2,50 \text{ €} + 1,50 \text{ €} + 2 \times 1 \text{ €} + 3 \times 0,25 \text{ €} \\ = 2,50 \text{ €} + 1,50 \text{ €} + 2 \text{ €} + 0,75 \text{ €} = 6,75 \text{ €}.$$

38 Sportif !

$$3\ 200 \text{ m} = 3,2 \text{ km}.$$

Distance que Yannis doit parcourir en canoë :

$$39,7 \text{ km} - 3 \times 3,2 \text{ km} - 5 \times 4,5 \text{ km}$$

$$= 39,7 \text{ km} - 9,6 \text{ km} - 22,5 \text{ km}$$

$$= 30,1 \text{ km} - 22,5 \text{ km} = 7,6 \text{ km}$$

39 À la Poste

1. Pour envoyer une lettre de 165 g à Bordeaux, on paie 2,75 €.

2. Pour envoyer une lettre de 90 g à Pointe-à-Pitre en Guadeloupe, on paie :

$$1,75 \text{ €} + 9 \times 0,05 \text{ €} = 2,20 \text{ €}.$$

3. Pour envoyer une lettre de 370 g à Nouméa en Nouvelle-Calédonie, on paie :

$$3,70 \text{ €} + 37 \times 0,11 \text{ €} = 7,77 \text{ €}.$$

40 Le camping

Le séjour durera 4 nuits.

Coût du séjour (en euros) :

$$\begin{array}{l} 6,50 \times 4 + \underbrace{3,5 \times 4}_{\substack{\text{voiture} \\ \text{et caravane}}} + \underbrace{5,5 \times 3 \times 4}_{\substack{\text{électricité} \\ \substack{1 \text{ adulte et} \\ 1 \text{ enfant de plus} \\ \text{de 10 ans}}}} + \underbrace{2,10 \times 2 \times 4}_{\substack{\text{2 enfants entre} \\ \text{4 et 10 ans}}} + \underbrace{2 \times 0,35 \times 4}_{\substack{\text{2 taxes} \\ \text{d'habitation} \\ \text{pour le plus} \\ \text{de 13 ans}}} \\ = 26 + 14 + 66 + 16,80 + 2,80 = 125,60. \end{array}$$

41 Écologie

$$75 \text{ g} = 0,075 \text{ kg}.$$

Nombre de kilogrammes de déchets économisés par an si les Français ne consommaient que de l'eau du robinet :

$$\frac{144}{1,5} \times 0,075 \text{ kg} = 7,2 \text{ kg}.$$

42 Chaud ou froid...

1.

Nombre en degrés Fahrenheit	50
On retranche 32	18
On multiplie le résultat par 5	90
On divise le nombre obtenu par 9	10

50°F correspondent donc à 10°C.

$$2. \frac{(50 - 32) \times 5}{9}.$$

3. Vérification à la calculatrice.

4. *Fahrenheit 451*, titre de cette œuvre, évoque la température en degrés Fahrenheit à laquelle le papier s'enflamme et brûle, d'après l'auteur.

Dans l'introduction de l'édition commémorative des 40 ans de ce livre, Bradbury explique avoir contacté plusieurs départements de chimie, et n'avoir obtenu aucun renseignement. Il aurait alors téléphoné au poste de pompiers le plus proche qui lui aurait donné ce chiffre comme température de combustion du papier.

Néanmoins, cette température n'est pas la même pour tous les types de papier. Elle dépend de nombreux facteurs comme de la composition du papier.

En réalité, le titre fait référence à deux choses : les autodafés assistés par les pompiers (mise au bûcher de milliers d'ouvrages dits « dangereux » en Allemagne en 1933) et, de manière plus symbolique, la baisse d'intérêt pour la littérature.

$$3. \frac{(451 - 32) \times 5}{9} \approx 232,8.$$

451°F correspondent approximativement à 233 °C.

43 Recyclage

1. Nombre de canettes par année en France :

$$150 \times 3\ 600 \times 24 \times 365 = 4\ 730\ 400\ 000.$$

$$11,6 \text{ cm} = 0,116 \text{ m} = 0,000\ 116 \text{ km}.$$

Hauteur si on empile toutes ces canettes :

$$4\ 730\ 400\ 000 \times 0,000\ 116 \text{ km} = 548\ 726,4 \text{ km} > 384\ 400 \text{ km}.$$

Alex a tout à fait raison, on atteindrait largement la Lune ! (En fait, on la dépasserait.)

$$2. \frac{60}{10} \times 4\ 730\ 400\ 000 = 2\ 838\ 240\ 000.$$

60 % de 4 730 400 000 canettes, c'est 2 838 240 000 canettes.

Nombre de vélos que l'on pourrait fabriquer en France au bout d'un an avec le recyclage de canettes :

$$3. \frac{2\ 838\ 240\ 000}{670} \approx 4\ 236\ 179.$$

44 Missing signs

Plusieurs solutions sont possibles.

$$a. 5 - (4 + 3 - 2) \div 1 = 0$$

$$b. 5 - 4 + 3 - 2 - 1 = 1$$

$$c. 5 - 4 + 3 - 2 \times 1 = 2$$

$$d. 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3$$

$$e. (5 - 4) \times 3 + 2 - 1 = 4$$

$$f. 5 + 4 - 3 - 2 + 1 = 5$$

45 Facture

Montant à payer (en euros) :

$$4,33 \times 12 + \underbrace{(25\ 153 - 22\ 133) \times 0,0767}_{\text{abonnement}} + \underbrace{9,07 + 50,04}_{\text{consommation}} + \text{taxes}$$

$$= 342,704$$

$$\approx 342,70$$

Voici la facture complétée.

ÉLECTRICITÉ	Abonnement 4,33 €/mois du 10/01/15 au 10/01/16	Consommation du 14/11/14 au 16/11/15
Relevé ou estimation en kWh		
ancien		22 133
nouveau		25 153
différence		3 020
Prix du kWh en €		0,0767
Montant HT en €		231,63
Taxes locales en €	9,07	
TVA en €	50,04	
TOTAL TTC en €		342,70

46 Défis !

Les solutions ne sont pas uniques !

$$1. [(5 \div 5) + (5 + 5)] \times 5 = 55$$

$$2. [6 \times (6 + 6) - 6] \times \frac{6}{6} = 66$$

47 Roman Opalka

$$1. \frac{5\,569\,249}{231} \approx 24\,109.$$

Il a donc inscrit environ 24 100 nombres sur chaque toile.

2. L'ordre de grandeur trouvé est beaucoup plus petit, cela s'explique par le fait que plus les nombres sont grands, plus il faut de chiffres pour les écrire. En conséquence, les premières toiles contiennent beaucoup plus de nombres que les dernières. L'ordre de grandeur trouvé peut être considéré comme une moyenne.

48 Match de rugby

Pour l'Union Bordeaux Bègles, on peut avoir 4 joueurs aplatisant le ballon derrière la ligne et le marquage d'une pénalité.

Pour le Stade Français, on peut avoir 3 joueurs aplatisant le ballon derrière la ligne et une transformation d'essai.

Ce ne sont pas les seules possibilités.

Pour l'UBB :

Nombre de ballons aplatis	4	3	3	2	2	1
Nombre d'essais transformés	0	4	1	5	2	9
Nombre de pénalités	1	0	2	1	3	0
Nombre de ballons aplatis	1	1	1	0	0	0
Nombre d'essais transformés	6	3	0	10	7	4
Nombre de pénalités	2	4	6	1	3	5

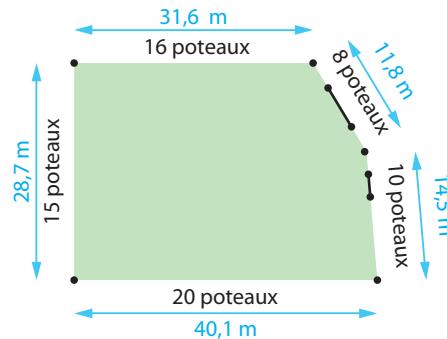
Pour le Stade Français :

Nombre de ballons aplatis	3	2	1	1
Nombre d'essais transformés	1	2	6	3
Nombre de pénalités	0	1	0	2
Nombre de ballons aplatis	1	0	0	0
Nombre d'essais transformés	0	7	4	1
Nombre de pénalités	4	1	3	5

49 Cloture

Plusieurs solutions peuvent être envisagées. Les élèves doivent chercher et proposer des solutions cohérentes et argumentées.

Par exemple :



Dans ce cas, il faut 64 poteaux. Attention, les poteaux des coins (il y en a 5) sont comptés deux fois. Le coût pour les poteaux est donc de :

$$64 \times 2,95 \text{ €} = 188,80 \text{ €.}$$

Le périmètre à couvrir par le grillage est donc de :

$$31,6 \text{ m} + 28,7 \text{ m} + 40,1 \text{ m} + 14,5 \text{ m} - 1 \text{ m}$$

$$+ 11,8 \text{ m} - 3 \text{ m} - 69 \times 0,03 \text{ m} = 124,77 \text{ m}$$

Le grillage est vendu par 2 000 cm = 2 m.

$$\frac{124,77}{2} \approx 62,4.$$

Le coût du grillage est donc de :

$$63 \times 21,90 \text{ €} = 1\,379,70 \text{ €.}$$

Ainsi la facture s'élèvera à :

$$\underbrace{188,80 \text{ €}}_{\text{poteaux}} + \underbrace{1\,379,70 \text{ €}}_{\text{grillage}} + \underbrace{299 \text{ €}}_{\text{portail}} + \underbrace{349 \text{ €}}_{\text{portillon}} = 2\,216,50 \text{ €.}$$

50 La tour Eiffel

On note que le plus petit (3 ans) montera gratuitement.

Avec cette visite, la famille va payer :

$$\underbrace{9 \text{ €}}_{\substack{\text{maman} \\ \text{ascenseur}}} + \underbrace{4,50 \text{ €}}_{\substack{\text{1 enfant} \\ \text{entre 4} \\ \text{et 11 ans}}} + \underbrace{5 \text{ €}}_{\substack{\text{papa} \\ \text{escalier}}} + \underbrace{4 \text{ €}}_{\substack{\text{1 jeune} \\ \text{entre 12} \\ \text{et 24 ans}}} = 22,50 \text{ €.}$$

S'ils étaient tous montés au sommet, ils auraient payé :

$$\underbrace{2 \times 15,50 \text{ €}}_{\substack{\text{2 adultes}}} + \underbrace{13,50 \text{ €}}_{\substack{\text{1 jeune} \\ \text{entre 12} \\ \text{et 24 ans}}} + \underbrace{11 \text{ €}}_{\substack{\text{1 enfant} \\ \text{entre 4} \\ \text{et 11 ans}}} = 55,50 \text{ €.}$$

En choisissant de visiter la tour Eiffel ainsi au lieu de tous monter au sommet, ils ont donc économisé :

$$55,50 \text{ €} - 22,50 \text{ €} = 33 \text{ €.}$$

Prix d'une canette de soda et d'une glace pour chaque membre de la famille :

$$(2 \text{ €} + 3 \text{ €}) \times 5 = 5 \text{ €} \times 5 = 25 \text{ €} < 33 \text{ €.}$$

Élise a donc raison.

51 Se brosser les dents... sans gaspillage

D'après les doc. 1 et 2, à raison de 2 brossages de dents de 2 minutes par jour, on économise $2 \times 8 \text{ L} = 16 \text{ L}$ par jour.

Par an, l'économie serait donc de : $16 \text{ L} \times 365 = 5\,840 \text{ L}$.

D'après le doc. 3, pour 52 m^3 soit $52\,000 \text{ dm}^3 = 52\,000 \text{ L}$ consommés, on paie 174,72 €.

Donc pour 5 840 L, on paie : $\frac{174,72 \text{ €}}{52\,000} \times 5\,840 \approx 19,62 \text{ €.}$

Ainsi, pour une personne décidant de fermer le robinet pendant qu'elle se lave les dents, l'économie serait d'environ 20 € par an.

Algorithmique et outils numériques

52 Merlin le magicien

1.

Nombre choisi	2	5
Son double	4	10
Son triple	6	15
Leur somme	10	25
Le quotient du résultat par 10	1	2,5

2. Voir la feuille du tableur ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Nombre choisi	49	132	1785	13853
2	Son double	98	264	3570	27706
3	Son triple	147	396	5355	41559
4	Leur somme	245	660	8925	69265
5	Quotient par 10	24,5	66	892,5	6926,5

3. Le résultat semble être à chaque fois la moitié du nombre de départ. Merlin n'est donc pas un magicien !

Si le calcul littéral a été abordé, on peut prouver cette conjecture. Cela peut aussi être l'occasion de l'introduire, avec un enjeu.

Nombre choisi	x
Son double	$2x$
Son triple	$3x$
Leur somme	$5x$
Le quotient du résultat par 10	$\frac{5x}{10} = \frac{x}{2}$

53 Priorité !

L'élève qui a raison est Lucie. Elle obtient :

$$20 - 3 \times 5 - 2 = 20 - 15 - 2 = 5 - 2 = 3.$$

Ahmed obtient : $(20 - 3) \times 5 - 2 = 17 \times 5 - 2 = 85 - 2 = 83$.

Enzo obtient : $(20 - 3) \times (5 - 2) = 17 \times 3 = 51$.

Kaena obtient : $20 - (3 \times 5 - 2) = 20 - (15 - 2) = 20 - 13 = 7$.

Ornella obtient : $20 - 3 \times (5 - 2) = 20 - 3 \times 3 = 20 - 9 = 11$.

54 Scripts et calculs

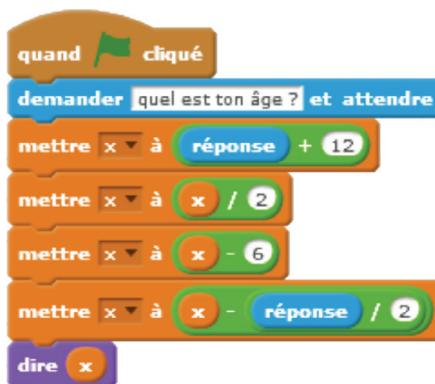
1. Ce script renvoie $3 + 4 = 7$.
2. Ce script renvoie $2 + 5 \times 4 = 2 + 20 = 22$.
3. Ce script renvoie $12 - 6 \div 2 = 12 - 3 = 9$.

55 Merlin, le retour

1.

Âge	10	15	20
On additionne 12	22	27	32
On divise par 2	11	13,5	16
On retranche 6	5	7,5	10
On retranche la moitié de l'âge	0	0	0

2.



3. Il semble que l'on trouve 0 à chaque fois.

Si le calcul littéral a été abordé, on peut prouver cette conjecture. Cela peut aussi être l'occasion de l'introduire, avec un enjeu.

Âge	x
On additionne 12	$x + 12$
On divise par 2	$\frac{x + 12}{2}$
On retranche 6	$\frac{x + 12}{2} - 6 = \frac{x + 12}{2} - \frac{12}{2} = \frac{x}{2}$
On retranche la moitié de l'âge	$\frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0$

Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. D'après l'expression, Clara souhaite acheter 4 classeurs, 1 calculatrice scientifique, 6 stylos-bille et 1 cahier.
2. $4 \times 5 + 15 + 6 \times 0,50 + 1,50 = 20 + 15 + 3 + 1,50 = 39,50$
Clara paiera donc 39,50 € pour ces articles.

Exercice 1

1. D'après l'expression, Clara souhaite acheter 2 classeurs, 1 calculatrice scientifique et 3 stylos-bille.
2. $35 - 2 \times 5,2 - 15 - 3 \times 0,5 = 35 - 10,4 - 15 - 1,5 = 24,6 - 15 - 1,5 = 9,6 - 1,5 = 8,1$
Il restera 8,10 € à Clara après ses achats.

Exercice 2

Il y a plusieurs solutions.

- a. $3 + 3 + 3 - 3 = 6$
- b. $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$
- c. $3 \times 3 \times 3 + 3 = 30$
- d. $3 \times 3 + 3 - 3 = 9$

Exercice 2

Il y a plusieurs solutions.

- a. $3 - 3 + 3 - 3 = 0$
- b. $3 \times 3 + 3 + 3 = 15$
- c. $3 \times 3 + 3 \div 3 = 10$
- d. $3 - 3 \div 3 + 3 = 5$

Exercice 3

$$60 - 17 \times 3 = 60 - 51 = 9.$$

Exercice 3

$$3 + 4 + \frac{50}{15 + 10} = 3 + 4 + \frac{50}{25} = 3 + 4 + 2 = 9.$$

Écriture d'un énoncé

1. Par exemple : Bastien achète 5 livres d'occasion à 3,50 € pièce et 9 stickers à 2 € pièce ; combien paie-t-il ?
2. Par exemple : Axelle dispose de 50 € sur son compte Paypal et télécharge 3 applications à 4 € ; combien lui reste-t-il ?
3. Pour le premier énoncé :
 $3,5 \times 5 + 9 \times 2 = 17,5 + 18 = 35,5$
Bastien a dépensé 35,50 €.
Pour le deuxième énoncé :
 $50 - 3 \times 4 = 50 - 12 = 38$
Il reste 38 € à Axelle.

Analyse d'une production

- Julien n'a pas respecté les priorités, il a calculé les additions et soustractions d'abord alors que la multiplication est prioritaire (elle doit être effectuée en premier).
- Inès n'a pas respecté les priorités, elle a effectué les calculs de la gauche vers la droite alors que la multiplication est prioritaire (elle doit être effectuée en premier).
- Lola n'a aucune erreur, elle a fait son calcul en respectant les priorités opératoires, puis de la gauche vers la droite quand il ne restait plus que des additions et soustractions.

Introduction

Parties du programme traitées dans le chapitre :

1. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
2. Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique.
3. Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).

Dans ce chapitre : « les puissances de 10 d'exposant entier positif sont manipulées dès la 4^e, en lien avec les problèmes scientifiques ou technologiques. » L'inverse d'un nombre ayant

été défini dans le chapitre 11 sur les fractions, les exposants négatifs sont introduits pour donner des ordres de grandeur de quantités très petites. « Les puissances positives de base quelconque sont envisagées comme raccourci d'un produit. » Au niveau des outils, les élèves seront amenés à utiliser leur calculatrice ou un tableur dans la résolution de certains problèmes pour faciliter le traitement de calculs. Un des objectifs pour l'élève est de comprendre et interpréter les réponses renvoyées par le logiciel ou la calculatrice en termes d'ordre de grandeur.

Activités

Questions flash

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. a. 25 km^2 | b. 36 mm^2 | c. 27 cm^3 | d. 343 dm^3 |
| 2. a. 638 | b. 7 821 | c. 590 | d. 7,4 |
| 3. a. 0,78 | b. 8,24 | c. 5,999 | d. 4,26 |
| e. 0,492 3 | f. 9 485 7 | | |
- 4. a.** L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$. **L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$.**

L'inverse de 20 est $\frac{1}{20}$.

b. L'inverse de 1 est 1. L'inverse de -1 est -1.

c. L'inverse de -3 est $-\frac{1}{3}$.

La rumeur

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notation de puissance pour la multiplication répétée.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des entiers.

La capacité introduite est de calculer une puissance d'exposant positif.

On peut définir la notation 3^n à la fin de l'activité.

Les élèves peuvent présenter la démarche à l'aide d'un tableau et utiliser la calculatrice pour calculer les puissances de 3. Ils peuvent aussi utiliser un tableur. L'intérêt du tableur est de pouvoir calculer les sommes des puissances de 3 simultanément.

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{12} = 797\ 161$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{13} = 2\ 391\ 484$$

Activité 1

Heure	Nombre de nouvelles personnes	Nombre total de personnes
09:00	1	1
09:10	3	4
09:20	9	13
09:30	27	40
09:40	81	121
09:50	243	364
10:00	729	1 093
10:10	2 187	3 280
10:20	6 561	9 841
10:30	19 683	29 524
10:40	59 049	88 573
10:50	177 147	265 720
11:00	531 441	797 161
11:10	1 594 323	2 391 484
11:20	4 782 969	7 174 453
11:30	14 348 907	21 523 360
11:40	43 046 721	64 570 081
11:50	129 140 163	193 710 244
12:00	387 420 489	581 130 733
12:10	1 162 261 467	1 743 392 200

Pour dépasser 1 200 000 personnes, il faut attendre 11h10.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire les puissances d'exposant négatif.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des entiers et des fractions.

La capacité introduite est de calculer une puissance d'exposant négatif.

On peut définir la notation 3^n à la fin de l'activité.

1. $7^5 = \frac{7^6}{7} = \frac{117\,649}{7} = 16\,807$

7^{-3}	7^{-2}	7^{-1}	7^0	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6
$\frac{1}{343}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{7}$	1	7	49	343	2\,401	16\,807	117\,649

3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ordre de grandeur

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire des ordres de grandeur pour comparer.

Les prérequis nécessaires sont de savoir comparer des nombres, de connaître les notions de puissance d'exposant positif et de puissance d'exposant négatif.

La capacité introduite est de préparer l'introduction de l'écriture scientifique.

1. La Terre : 12 750 km

Une molécule : 1 nm

L'écriture scientifique

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire l'écriture scientifique d'un nombre.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des notions de puissance d'exposant positif et de puissance d'exposant négatif.

La capacité introduite est de déterminer l'écriture scientifique d'un nombre.

Activité 3

Une galaxie : 10^{21} m

Un atome : 10^{-10} m

La plus haute tour du monde : 828 m

Le système solaire : 12 milliards de km

2. La Terre : 10^4 km = 10^7 m

Une galaxie : 10^{21} m

Un atome : 10^{-10} m

La plus haute tour du monde : 828 m = 10^3 m

Le système solaire : 12 milliards de km $\approx 10^{13}$ m

3. 10^{-10} m < 10^{-9} m < 10^{-6} m < 10^{-1} m < 10^3 m < 10^7 m < 10^{13} m < 10^{21} m

Activité 4

1. $0,042\,8 \times 10^5 = 4\,280$

$4,28 \times 10^3 = 4\,280$

$42\,800 \times 10^{-1} = 4\,280$

$0,428 \times 10^4 = 4\,280$

Ce sont 4 écritures différentes du même nombre.

2. $4,28 \times 10^3$

3. Masse de la Lune : $7,36 \times 10^{22}$ kg.

Masse d'un atome de fer : $9,35 \times 10^{-26}$ kg.

Exercices

Calculer une puissance d'exposant positif

Questions flash

1. a. 4^5 se lit « 4 exposant 5 ».
b. 6^8 est une puissance de 6.
c. 7^4 est le produit de quatre facteurs tous égaux à 7.
d. 9 est l'exposant de 10^9 .

2. a. Faux. b. Vrai. c. Faux.
d. Vrai. e. Vrai.

3. a. Négatif. b. Négatif. c. Positif.
d. Négatif. e. Positif. f. Positif.

4. A = 4^8 B = $(-7)^4$ C = $-0,8^7$ D = 1^1

5. a. 32 b. 64 c. 10 000 000 d. $\frac{1}{1\,000}$
e. 6,25 f. 81 g. -81 h. -125

6. $2^4 \times 3^2$ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
 $(-4)^2 \times 6^4$ $(-4) \times (-4) \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$
 $\frac{3^2}{2^3}$ $\frac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 2}$
 $9^3 \times 5^2$ $9 \times 9 \times 9 \times 5 \times 5$

7 A = 10 125 B = -288 C = $\frac{64}{49}$ D = $\frac{1}{125}$

8 C'est Juliette qui a raison, il faut commencer par 2^5 .

9 A = 369 B = -8 C = -665 D = 72

10 a. A = -3 b. A = 7 c. A = 0 d. A = 153

11 a. 100 000 b. 10 000 000 000
d. -10 e. -1 000
g. 1 000 000 h. -10 000

12 a. 10^4 b. 10^7
d. 10^{-2} e. 10^5
c. 10^0
f. 10^{12}

13 45×10^5 C 4 500 000

$4,5 \times 10^3$ C 4 500

$0,045 \times 10^9$ C 45 000 000

45×10^0 C 45

14 8 760 000 -120 000 -36 6 000

Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre

Questions flash

24 a. Vrai. b. Faux. c. Faux. d. Faux.

25 L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal qui ne comporte qu'un seul chiffre non nul avant la virgule.

Comme :

a. $1,3 \times 10^7$ b. $7,6 \times 10^{-2}$ c. 2×10^0

26 a. $7,654 \times 10^3$ b. $1,7 \times 10^7$
d. $7,6 \times 10^{-3}$ e. $8,72 \times 10^{-4}$ c. $3,47 \times 10^1$
f. 9×10^0

27 $0,37 \times 10^3$ C $3,7 \times 10^2$

37×10^{-6} C $3,7 \times 10^{-5}$

$0,000\,37 \times 10^{-2}$ C $3,7 \times 10^{-6}$

28 a. $7,89 \times 10^6$ b. $6,7 \times 10^{-4}$
c. 3×10^3 d. $1,28 \times 10^0$

Calculer une puissance d'exposant négatif

Questions flash

15 2^{-3} se lit « 2 exposant -3 ». 9^{-2} est une puissance de 9.
 5^{-8} est l'inverse du nombre 5^8 . -6 est l'exposant de 10^{-6} .

16 a. Faux. b. Vrai. c. Faux.
d. Vrai. e. Faux. f. Faux.

17 a. $12^{-5} = \frac{1}{12^5}$ b. $\frac{1}{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8} = 8^{-6}$
c. $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 5^{-4}$ d. $\frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2)} = (-2)^{-3}$
e. $0,8^{-7} = \frac{1}{0,8^7}$ f. $1,3^{-3} = \frac{1}{1,3^3}$

18 a. $\frac{1}{16}$ b. $\frac{1}{25}$ c. $\frac{1}{100}$ d. 100
e. $-\frac{1}{27}$ f. $\frac{1}{121}$ g. $-\frac{1}{64}$ h. $\frac{1}{16}$

19

A = $13^3 + 7 \times 5^{-3}$
C = $\frac{10}{2 + 5^{-3}}$

B = $\left(\frac{-4}{9}\right)^{-2}$
D = $\frac{2 \times 7^4}{3^{-2}}$

20 a. 0,000 1 b. 0,1 c. -0,000 01 d. 0,01
21 a. 10^{-2} b. 10^{-9} c. 10^{-5} d. 10^{-3}
e. 10^{-6} f. 10^{-4} g. 10^{-5}

22 32×10^{-4} C 0,003 2

$3\,200 \times 10^{-3}$ C 3,2

$0,32 \times 10^{-1}$ C 0,032

$3,2 \times 10^{-5}$ C 0,000 032

23 0,008 2 0,001 256 -0,235 -89

Problèmes

29 Si grand, si petit

a. $4,5 \times 10^9$ b. $1,5 \times 10^{-6}$ m
c. $7,3 \times 10^9$ d. 3×10^8 m/s
e. $-6,5 \times 10^7$ f. 2×10^{-3} cm
g. 1×10^{-10} m

30 Ça butine !

$50 \times 5\,500\,000 = 275\,000\,000 = 2,75 \times 10^8$ fleurs butinées.

31 Du cœur

$80 \times 365 \times 24 \times 60 \times 75 = 3\,153\,600\,000 = 3,153\,6 \times 10^9$ secondes

32 Le nombre d'étoiles dans l'univers

$100 \times 10^9 \times 100 \times 10^9 = 1 \times 10^{22}$ étoiles dans l'univers visible.

33 Clin d'œil

$80 \times 365 \times 30\,000 = 8,76 \times 10^8$

34 Record du monde

En 60 ans, l'ongle du pouce a grandi de 2 m.
Donc il a grandi de 2 m en $60 \times 365 = 21\,900$ jours.

Donc la vitesse est $\frac{2}{21\,900} \approx 9 \times 10^{-5}$ m/j.

35 La Terre, planète bleue

- $\frac{35 \times 10^7}{5 \times 10^8} \approx 70\%$ et $\frac{150 \times 10^6}{5 \times 10^8} \approx 30\%$
- On remarque que la grande majorité de la surface de la Terre est occupée par les océans.

36 Le Papyrus Rhind

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16\,807$ grains de blés.

37 Les nombres de Fermat

- $2^{2^0} + 1 = 3$ $2^{2^1} + 1 = 5$ $2^{2^2} + 1 = 17$
- $\frac{2^{2^n} + 1}{641} = 6\,700\,417$ donc la conjecture n'est pas vérifiée pour $n = 5$.

38 Le langage binaire

- Le nombre 11 111 000 s'écrit 248 en base 10.
- $13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

Le nombre 13 s'écrit 1 101 en binaire.

Le nombre 87 s'écrit 1 010 111 en binaire.

Le nombre 106 s'écrit 1 101 010 en binaire.

- Le nombre 1 100 101 011 100 011 s'écrit 51 939 en base 10.

39 **Les images numériques**

1. $2^8 = 256$, il y a donc 256 couleurs.
2. $2^{24} = 16\ 777\ 216 \approx 16$ millions. L'image est donc constituée de 24 bits.
3. $2^{42} \approx 4,4 \times 10^{12}$. 42 bits sont donc nécessaires.

40 **Dans notre cerveau**

1. a. $100 \times 10^9 = 10^{11}$ neurones à la naissance.
- b. $10^{11} \times 10^4 = 10^{15}$ connexions.
2. On cherche le nombre d'années n tel que :

$$5 \times 10^4 \times 365 \times n > 10^{11}$$

$$\frac{10^{11}}{5 \times 10^4 \times 365} \approx 5\ 479,45$$
, donc le stock sera épuisé au bout de 5 480 années.

41 **Le triangle de Sierpinski**

1. a. $3^4 = 27$ triangles verts à l'étape 4.
- b. $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ à l'étape 20.
2. a. $3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 3 = 6,75$ cm
b. $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \times 3 \approx 34,2$ cm
3. $1\ 000$ km = 10^8 cm
Avec la calculatrice ou un tableur, on teste la formule $\left(\frac{3}{2}\right)^n \times 3$ pour différentes valeurs de n .
Le périmètre dépasse 1 000 km pour $n = 43$.

42 **Histoire de globules**

1. $\frac{0,2 \times 2,025 \times 10^{13}}{5,5} \approx 7,36 \times 10^{11}$ globules rouges dans 200 mL de sang.
2. $\frac{5,5 \times 70\ 000}{0,01} = 3,85 \times 10^7$ globules blancs dans le corps humain.
3. $\frac{5,5 \times 2\ 500\ 000}{0,01} = 1,375 \times 10^9$ plaquettes dans le corps humain.

43 **La molécule d'eau**

On calcule d'abord la masse d'une molécule d'eau :

$$1,67 \times 10^{-27} \times 2 + 2,679 \times 10^{-26} = 3,013 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Comme 1 L pèse 1 kg, on a :

$$\frac{1}{3,013 \times 10^{-26}} \approx 3,32 \times 10^{25} \text{ molécules d'eau dans 1 L d'eau.}$$

44 **Powerful zeros**

- $3^4 \times 4^5 \times 5^6 = (3 \times 4 \times 5)^4 \times 4 \times 5^2 = 60^4 \times 100$
 $60^4 = 6^4 \times 10^4$ et ce nombre possède 4 zéros à la fin.
Donc en multipliant par 100, on trouvera 6 zéros à la fin de $3^4 \times 4^5 \times 5^6$.

45 **Le nombre de parties d'échecs**

1. Non, la calculatrice indique ERREUR Maths.
2. $(20 \times 20)^5 = (4 \times 100)^5 = 4^5 \times 100^5$
 $= 1\ 024 \times 10^{10} = 1,024 \times 10^{13}$
3. $30 \times 30 = 9 \times 100 = 9 \times 10^2$
4. $(30 \times 30)^{35} = 9^{35} \times 100^{35} = 9^{35} \times 10^{70}$
 $= 2,5 \times 10^{33} \times 10^{70} \approx 2,5 \times 10^{103}$
5. $N \approx 1,024 \times 10^{13} \times 2,5 \times 10^{103} = 2,56 \times 10^{116}$

Ce problème permet de montrer les limites de la calculatrice quand on manipule de très grands nombres et donc l'intérêt de calculer avec des puissances.

46 **Objectif Lune**

$$0,01 \times 2^{42} \approx 4,4 \times 10^{10} \text{ cm} = 4,4 \times 10^5 \text{ km}$$

Donc il faudra 42 pliages pour dépasser la distance Terre-Lune.

Pour prolonger ce problème, il peut être intéressant d'expliquer qu'une feuille de papier ne peut être pliée plus de 7 fois. Voir l'adresse : youtu.be/yZTRn5vLA8o

La réponse mathématique se heurte donc aux réalités physiques : cela peut susciter un débat.

47 **Le Visage de la guerre**

1. Le nombre de nouvelles têtes à chaque étape est une puissance de 3.
Donc le nombre total de têtes à l'étape n est donné par la formule : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$
On peut utiliser un tableur, en écrivant dans la cellule B3 : $=3*B2$ et en cellule C3 : $=B3+C2$.
Ensuite on utilise la poignée de copie vers le bas.

A	B	C
Étape	Nombre de nouvelles têtes	Nombre total de têtes
1		
2	1	1
3	3	4
4	9	13
5	27	40
6	81	121
7	243	364
8	729	1093
9	2187	3280
10	6561	9841
11	19683	29524
12	59049	88573
13	177147	265720
14	531441	797161
15	1594323	2391484
16	4782969	7174453
17	14348907	21523360
18	43046721	64570081
19	129140163	193710244
20	387420489	581130733
21	1162261467	1743392200

Pour la 10^e étape, on trouve 29 524 têtes, et pour la 20^e étape, on trouve 1 743 392 200.

2. Dali dénonce les souffrances et le nombre de morts pendant les guerres après la guerre civile espagnole et pendant la Seconde Guerre mondiale.

C'est un autre contexte mais les mêmes calculs que l'Activité 1.

48 **Cent mille milliards de poèmes**

1. Comme il y a dix feuilles découpées en 14 bandes, on a $10 \times 10 \times \dots \times 10 = 10^{14}$ poèmes.
Or cent mille milliards = $100\ 000 \times 10^9 = 10^5 \times 10^9 = 10^{14}$
2. Considérons que le temps de lecture d'un vers est de 5 secondes.
Un poème contient 14 vers donc le temps de lecture d'un seul poème est $14 \times 5 = 70$ s.
Comme il y a 10^{14} poèmes, le temps de lecture de l'intégralité des poèmes est de :
 $70 \times 10^{14} = 7 \times 10^{15}$ secondes
 $\frac{7 \times 10^{15}}{60 \times 60 \times 24 \times 365} = 221\ 968\ 543,9$ années
 ≈ 200 millions d'années.

Une des difficultés de cette question est la prise d'initiative de l'élève au niveau du temps de lecture d'un vers (par recherche Internet, test de lecture en classe...), de comprendre que le fait que tous les élèves n'aient pas la même valeur importe peu sur le résultat attendu qui est une estimation donnée comme un ordre de grandeur.

49 **Énergie libérée lors d'un séisme**

1. 1 cm sur la carte représente 12,5 km en réalité, en mesurant la faille dans le doc. 1 on trouve environ 2,4 cm donc cela fait $12,5 \times 2,4 = 30$ km en réalité.
D'après le doc. 2, cela correspond à un séisme de magnitude 7.
À l'aide du doc. 3, on peut maintenant déterminer la quantité d'énergie libérée : $1,99 \times 10^{15}$ joules.
2. C'est environ 1 000 fois moins que l'énergie totale consommée en France en un an.
3. $1,99 \times 10^9 \times 49\ 000 = 9,751 \times 10^{13}$ joules

50 Le bon script

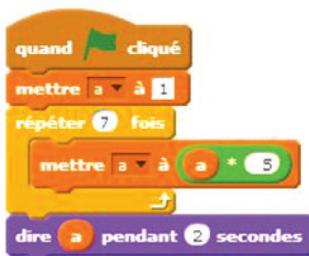
Script A : 2^6
Script D : 3^6

Script B : 3^2
Script E : 6^2

Script C : 6^3
Script F : 2^3

51 Calcul de puissance

1.



2.



3.



52 Propagation d'un virus informatique

1. $20^3 = 8\ 000$ nouveaux ordinateurs seront infectés au bout de 3 secondes et au total il y aura $1 + 20 + 20^2 + 20^3 = 8\ 421$ ordinateurs infectés en prenant en compte les ordinateurs infectés avant.
2. b. En B3, on écrit : =B2*20
Et en C3 : =B3+C2
3. a. 10 778 947 368 421
b. Il faut 7 secondes pour infecter un milliard d'ordinateurs.

53 Loi de Titius-Bode

2. On écrit en D2 : =0,4+0,3*2^(A2-2)
3. La loi ne se vérifie plus pour Neptune, avec une erreur d'environ 22,4 %.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. 524 n'est pas compris entre 1 et 10.
2. $5,24 \times 10^{11}$

Exercice 1

1. Juliette a divisé 625 par 100 pour avoir un nombre compris entre 1 et 10, mais au lieu de multiplier 10^{-7} par 100, elle a divisé par 100.
2. $6,25 \times 10^{-5}$

Exercice 2

$$3^{10}$$

Exercice 2

Si on note n le nombre de questions, alors le nombre de façons de répondre est 3^n .

Exercice 3

$$\frac{1,5 \times 10^3 \times 0,5}{2} = 375 \text{ m}$$

Exercice 3

$$\frac{1,1 \times 10^4}{1,5 \times 10^3} \times 2 \approx 14,67 \text{ s}$$

Recherche d'informations

1. La dune du Pyla est constituée d'environ 60 millions de mètres cubes de sable soit 60 milliards de litres de sable. Le volume d'un grain de sable est d'environ 130 picolitres, c'est-à-dire $130 \times 10^{-12} \text{ L}$.

$$\frac{60 \times 10^9}{130 \times 10^{-12}} \approx 4,6 \times 10^{20} \text{ grains de sable.}$$

2. Réponse à venir

Analyse d'une production

Iban a divisé 852,34 par 100 mais il a divisé 10^9 par 100 au lieu de multiplier par 100.

Enzo a trouvé la bonne réponse.

Vester s'est trompé car 0,852 34 n'est pas compris entre 1 et 10.

Décomposition en facteurs premiers

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». Les connaissances associées sont : la division euclidienne (quotient, reste), les multiples et diviseurs, les nombres premiers et la décomposition en nombres premiers. Les capacités associées sont de déterminer si un entier est ou n'est pas un multiple d'un autre entier, de comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers, de savoir écrire un nombre en produit de facteurs premiers.

- Ce chapitre réinvestit la division euclidienne, les critères de divisibilité et les nombres premiers vus dans le chapitre 1. L'accent est mis dans ce chapitre sur l'étude des nombres premiers et la décomposition des nombres en produit de facteurs premiers sur des cas simples.
- Ce chapitre a été conçu de façon à laisser à l'élève la possibilité de travailler le calcul mental, tout en lui donnant l'occasion d'exploiter le calcul instrumenté (calculatrice, tableau, logiciels) pour rechercher les diviseurs d'un nombre, déterminer si un nombre est premier ou décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers.

• Une place importante est accordée au raisonnement et à la résolution de problèmes, liés le plus souvent à des situations de la vie quotidienne (engrenages, phénomènes périodiques...), mais figurent également dans ce chapitre des exercices d'arithmétique pure, permettant aussi de retravailler le calcul littéral et les fractions. De nombreux exercices et problèmes continuent également à former à la démonstration en diversifiant les pratiques : conjecture-validation, essai-erreur...

Certains exercices font référence à des notions permettant d'aller plus loin dans l'univers des nombres entiers, des diviseurs et multiples, avec notamment le PGCD et PPCM, les nombres circulaires.

- On pourra faire le lien avec la partie *Algorithmique et programmation* (chapitres 46 et 47) pour la décomposition en produit de nombres premiers, les critères de divisibilité et la recherche de diviseurs.

Activités

Questions flash

1. Les nombres 58, 134, 326, 3 978 et 1 240 sont divisibles par 2. Ils sont tous pairs et leur chiffre des unités est pair.
2. $15 \text{ L} = 1 500 \text{ cL}$.
 $1 500 \div 75 = 20$. On pourra remplir 20 bouteilles.
3. $180 \div 12 = 15$. On peut faire 15 tables de 12 personnes.
4. 121 n'est pas un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 4, qui n'est pas dans la table de 9.
133 n'est pas un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 7, qui n'est pas dans la table de 9.
297 est un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 18, qui est dans la table de 9.
5. Les nombres 55, 360, 525 et 755 sont divisibles par 5 car leur chiffre des unités est 0 ou 5.
6. 2, 5, 13 et 19 sont des nombres premiers, ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes.
6, 12 et 15 ne sont pas premiers : 6 et 12 sont pairs, donc ils sont divisibles par 2, et 15 est divisible par 5 car il se termine par 5.

7. 24, 38, 37, 48 admettent un nombre pair de diviseurs car ce ne sont pas des carrés de nombres entiers (les diviseurs se trouvent deux par deux).
25, 36 et 49 admettent un nombre impair de diviseurs car ce sont des carrés de nombres entiers.

C'est l'occasion de faire remarquer que 25, 36 et 49 ont un nombre impair de diviseurs car ce sont des carrés de nombres entiers (ce qu'on appelle des « carrés parfaits »).

8. Diviseurs de 24 : 1 2 3 4 6 8 12 24
Diviseurs de 42 : 1 2 3 6 7 14 21 42
Les diviseurs communs à 24 et 42 sont : 1, 2, 3 et 6.
Diviseurs de 70 : 1 2 5 7 10 14 35 70
Diviseurs de 35 : 1 5 7 35
Les diviseurs communs à 70 et 35 sont : 1, 5, 7 et 35.
Diviseurs de 12 : 1 2 3 4 6 12
Diviseurs de 20 : 1 2 4 5 10 20
Les diviseurs communs à 12 et 20 sont : 1, 2 et 4.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de revoir le crible d'Ératosthène vu en début de cycle et d'obtenir ainsi les nombres premiers inférieurs à 100. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication et de la notion de multiples. La capacité introduite est de reconnaître les nombres premiers.

1. a. et b. On commence par barrer le 1 et tous les multiples de 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Puis ceux de 3 et de 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On continue avec 11, 13, 17 et 19.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On trouve :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

c. Les nombres restants entourés :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61
67 71 73 79 83 89 97 sont les 25 nombres premiers inférieurs à 100 : ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes.

2. a. 137 n'est pas pair, il n'est pas divisible par 2.

$1 + 3 + 7 = 11$, la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3, il n'est pas divisible par 3.

137 n'est pas divisible par 5 car il ne se termine ni par 5 ni par 0.

$$\begin{array}{r} 137 \\ \hline 7 \\ 67 \\ \hline 4 \end{array}$$

La division euclidienne de 137 par 7 a un reste non nul, 137 n'est pas divisible par 7.

$$\begin{array}{r} 137 \\ \hline 11 \\ 27 \\ \hline 5 \end{array}$$

La division euclidienne de 137 par 11 a un reste non nul, 137 n'est pas divisible par 11.

b. 137 n'est pas divisible par 4 ou par 6 ou par 8 puisqu'il n'est pas divisible par 2.

137 n'est pas divisible par 9 puisqu'il n'est pas divisible par 3.

137 n'est pas divisible par 10 car il ne se termine pas par 0.

137 n'admet donc aucun diviseur inférieur ou égal à 11 autre que 1.

c. Avec la calculatrice : $\sqrt{137} \approx 11,7$.

137 ne peut donc pas être divisible par un nombre compris entre 12 et 136 car il n'est divisible par aucun nombre compris entre 2 et 11 (les diviseurs étant trouvés par paires).

On peut aussi encadrer 137 entre deux carrés parfaits.

$$121 < 137 < 144$$

$$11^2 < 137 < 12^2$$

$$11 < \sqrt{137} < 12$$

d. 137 n'a donc aucun autre diviseur à part 1 et 137 : il est donc premier.

Pour trouver les diviseurs d'un nombre entier autre que 1, on cherche tous les diviseurs compris entre 2 et sa racine carrée. On peut évidemment s'aider des critères de divisibilité.

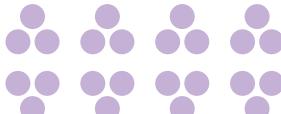
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de décomposer des nombres en produit de facteurs premiers.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication et de la notion de nombres premiers.
La capacité introduite est la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.
Cette activité peut être faite en classe entière en projetant les premières décompositions et en amenant une discussion collective pour trouver les suivantes.

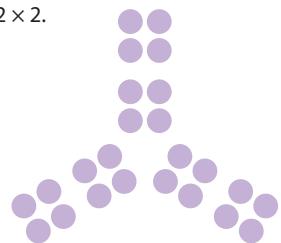
1.

Un lien Internet intéressant permettant de visualiser des décompositions de nombres entiers en facteurs premiers : datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

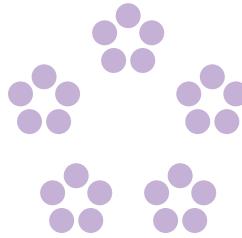
Pour 24, on obtient : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.



Ou $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$.



Pour 25, on obtient : $25 = 5 \times 5$.



2. $660 = 2 \times 330$

Or 330 est divisible par 2

$$330 = 2 \times 165$$

On obtient le tableau suivant :

660	2
330	2
165	

On peut donc écrire $165 = 2 \times 2 \times 165$.

3. On continue et on obtient le tableau suivant :

660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

On peut donc écrire $660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$.

On peut alors parler de la notation avec les puissances.
 $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$

Exercices

Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Questions flash

1. a. La division euclidienne de 32 par 5 :

$$\begin{array}{r} 32 \\ 2 \bigg| \quad 5 \\ \quad 6 \end{array}$$

Le quotient est 6 et le reste est 2.

- b. La division euclidienne de 124 par 3 :

$$\begin{array}{r} 124 \\ 04 \bigg| \quad 3 \\ \quad 1 \quad 41 \end{array}$$

Le quotient est 41 et le reste est 1.

- c. La division euclidienne de 5 par 4 :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1 \bigg| \quad 4 \\ \quad 1 \end{array}$$

Le quotient est 1 et le reste est 1.

2. 1. 5 est un diviseur de 75.
2. 64 est un multiple de 8.
3. 3 est un diviseur de 27.

3. Vrai, $36 = 6 \times 6$.

2. Faux, la division euclidienne de 49 par 6 a pour reste 1.
3. Faux, 12 est un diviseur de 24. 24 est un multiple de 12.

4. 1. Vrai, son chiffre des unités est un nombre pair.
2. Vrai, son chiffre des unités est 5.
3. Vrai, la somme de ses chiffres est égale à 9, qui est un multiple de 9.

Questions flash

5. a. Si un nombre est divisible par 2, il se termine par un nombre pair et s'il est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5 mais 5 n'est pas pair. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 se terminant par 0 : 50, 60, 70, 80, 90 et 100.
b. Si un nombre est divisible par 2, il se termine par un nombre pair et s'il est divisible par 3, la somme de ses chiffres est un multiple de 3. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 vérifiant ces deux conditions : 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.
c. Si un nombre est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5 et s'il est divisible par 3, la somme de ses chiffres est un multiple de 3. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 vérifiant ces deux conditions : 60, 75, 90.

6. La division euclidienne de 647 par 12 :

$$\begin{array}{r} 647 \\ 47 \bigg| \quad 12 \\ \quad 53 \end{array}$$

On peut donc écrire $647 = 12 \times 53 + 11$.

C'est la réponse b.

Dans la réponse a, le diviseur est 11 et pas 12.

Dans la réponse c, le reste est supérieur au diviseur.

7. Cet écran est ce qu'on obtient en voulant calculer la division euclidienne de 85 par 6.

On peut le traduire par $85 = 6 \times 14 + 1$.

8. La division euclidienne d'un nombre d par 14 dont le reste est 3 et le diviseur 7, se traduit par l'égalité suivante : $d = 7 \times 14 + 3$. On a donc $d = 101$. Le dividende est 101.

9 Le quotient est 36 et le diviseur est 8.

On peut traduire la division euclidienne par : $d = 8 \times 36 + r$

Le reste r est inférieur à 8. d est le dividende.

On a donc toutes les possibilités suivantes :

$$\begin{aligned}d &= 8 \times 36 + 0 = 288 \\d &= 8 \times 36 + 1 = 289 \\d &= 8 \times 36 + 2 = 290 \\d &= 8 \times 36 + 3 = 291 \\d &= 8 \times 36 + 4 = 292 \\d &= 8 \times 36 + 5 = 293 \\d &= 8 \times 36 + 6 = 294 \\d &= 8 \times 36 + 7 = 295\end{aligned}$$

10 Il veut partager équitablement les timbres. On effectue la division euclidienne de 184 par 36. On peut la traduire par l'égalité suivante : $184 = 36 \times 5 + 4$

Il va donc utiliser 6 pages, avec 4 timbres dans la dernière page.

11 a. Les diviseurs de 128 sont :

1 2 4 8 16 32 64 128.

b. Les diviseurs de 56 sont :

1 2 4 7 8 14 28 56.

c. Les diviseurs de 78 sont :

1 2 3 6 13 26 39 78.

12 a. 5 multiples de 15 : 15 30 45 60 75.

b. 5 multiples de 12 : 24 36 48 60 72.

c. 5 multiples de 8 : 8 24 32 48 64.

Remarque : 0 est multiple de tous les nombres, on a choisi de ne pas le faire figurer dans les multiples.

13 a. Non, $46 = 13 \times 3 + 7$. Le reste n'est pas nul.

b. Oui, $39 = 3 \times 13$.

c. Non, $263 = 13 \times 20 + 3$. Le reste n'est pas nul.

14 255 est un multiple de 51.

51 est un diviseur de 255.

51 divise 255.

15 1. Les diviseurs de 34 sont : 1 2 17 34.

2. Les diviseurs de 85 sont : 1 5 17 85.

3. Le plus grand diviseur commun de 34 et 85 est 17. On le note PGCD (34 ; 85) = 17.

16 1. Les diviseurs de 156 sont :

1 2 3 4 6 12 13 26 39 52 78 156.

Les diviseurs de 130 sont :

1 2 5 10 13 26 65 130.

2. Donc le PGCD (130 ; 156) = 26.

17 Les diviseurs de 18 sont : 1 2 3 6 9 18.

Il a donc 6 diviseurs. C'est Thibault qui a raison.

18 Manon confond les critères de divisibilité par 2 et par 3.

Pour savoir si un nombre est divisible par 3, il faut calculer la somme de ses chiffres.

Ainsi 57 est divisible par 3 mais son chiffre des unités n'est pas un multiple de 3.

19 • 1 548 est divisible par 2 : son chiffre des unités est un nombre pair. $1 \ 548 = 2 \times 774$

• 1 548 est divisible par 3 : sa somme des chiffres est égale à $1 + 5 + 4 + 8 = 18$, qui est divisible par 3. $1 \ 548 = 3 \times 516$

• 1 548 n'est pas divisible par 5, car il ne se termine ni par 0 ni par 5.

• 1 548 est divisible par 9 : sa somme des chiffres est égale à $1 + 5 + 4 + 8 = 18$, qui est divisible par 9. $1 \ 548 = 9 \times 172$

• 1 548 est divisible par 4 : 48 est divisible par 4. $1 \ 548 = 387 \times 4$

est divisible par	2	3	4	5	9
1 345 (somme des chiffres : 13)	NON	NON	NON	OUI	NON
5 340 (somme des chiffres : 12)	OUI	OUI	OUI	OUI	NON
1 368 (somme des chiffres : 18)	OUI	OUI	OUI	NON	OUI

21 Il a tort, il suffit de donner un contre-exemple.

15 est divisible par 3, mais pas par 9.

Par contre tout nombre divisible par 9 est divisible par 3, car $9 = 3 \times 3$.

22 On analyse chaque proposition :

Il est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5, mais il est pair, donc il se termine par 0.

Il est divisible par 11 ; on cherche donc parmi 110, 220 et 330 les nombres divisibles par 3.

C'est 330 ($3 + 3 + 0 = 6$ qui est divisible par 3.)

Reconnaitre un nombre premier

Questions flash

23 a. Faux, il n'est divisible que par 1.

b. Faux, il est divisible par tous les nombres.

c. Vrai, il est divisible par 1 et lui-même.

24 a. Vrai.

b. Vrai.

c. Faux, 15 est impair mais il n'est pas premier.

d. Faux, 2 est premier mais il est le seul nombre pair premier.

e. Vrai.

f. Faux. Entre 13 et 17, il y a un écart de 4.

25 a. 2 est un diviseur commun à 56 et 174. Ils sont tous les deux pairs.

b. 13 est un diviseur commun à 26 et 39.

c. 17 est un diviseur commun à 34 et 51.

26 Nombres premiers compris entre 100 et 150 :

101 103 107 109 113 127 131 137 139 149.

27 a. 217 n'est pas premier. Il est divisible par 7. $217 = 7 \times 31$

b. 289 n'est pas premier. Il est divisible par 17. $289 = 17 \times 17$

c. 439 est premier. $\sqrt{439} \approx 20,9$. Il n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

28 Nombres premiers compris entre 200 et 300 :

211 223 227 229 233 239 241 251

257 263 269 271 277 281 283 293

29 Le fait que $523 \div 4 = 130,75$ montre juste que la division décimale s'arrête, mais la division euclidienne n'a pas pour reste 0. Cela prouve juste que 523 n'est pas divisible par 4.

De plus, il a tort. 523 est premier.

Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Questions flash

30 a. Faux, $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$.

b. Faux, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

c. Vrai, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

31 a. Vrai, $6 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 3^2$.

b. Faux, $12 \times 3 = 4 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

32 A = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$

B = $3 \times 2^3 \times 5 = 3 \times 8 \times 5 = 120$

C = $2 \times 3 \times 5^2 = 2 \times 3 \times 25 = 150$

33 a. 2 est un diviseur de A et de B.

b. $6 = 3 \times 2$

6 est un diviseur de A, car il est divisible par 2 et 3.

6 n'est pas un diviseur de B.

c. 7 est un diviseur de B mais pas de A.

Problèmes

34

a. $42 = 2 \times 3 \times 7$

2	2
21	3
7	7
1	

b. $75 = 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^2$

3	3
25	5
5	5
1	

c. $164 = 2^2 \times 41$

2	2
82	41
41	41
1	

$164 = 2 \times 2 \times 41 = 2^2 \times 41$

35

a. $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

2	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

b. $5\ 005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

5	5
1\ 001	7
143	11
13	13
1	

$5\ 005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

c. $3\ 192 = 2^8$

2	2
1\ 596	2
798	2
399	3
133	7
19	19
1	

$3\ 192 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 19 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 19$

36

a. $6\ 615 = 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

3	3
2\ 205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

$6\ 615 = 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

b. $7\ 986 = 2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 11 = 2 \times 3 \times 11^3$

2	2
3\ 993	3
1\ 331	11
121	11
11	11
1	

$7\ 986 = 2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 11 = 2 \times 3 \times 11^3$

c. $17\ 745 = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 13 = 3 \times 5 \times 7 \times 13^2$

3	3
5\ 915	5
1\ 183	7
169	13
13	13
1	

$17\ 745 = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 13 = 3 \times 5 \times 7 \times 13^2$

37

a. $36 = 6 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

b. $216 = 8 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$

c. $135 = 5 \times 27 = 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^3$

Le calcul est certes bon mais Yasmine s'est trompée : elle n'a pas été jusqu'au bout de la décomposition en nombres premiers. Elle a oublié de décomposer 9 en 3×3 .
9 n'est pas un nombre premier.

39

Multiples de 6

1. Trois multiples de 6 : 12 ; 18 ; 36.
2. Tous les multiples de 6 s'écrivent sous la forme $6k$, k étant un nombre entier positif ou nul.
3. $6k = 3 \times 2 \times k$

Tout multiple de 6 peut donc s'écrire sous la forme $3 \times (2k)$ et est un multiple de 3, et sous la forme $2 \times (3k)$ et est donc un multiple de 2.

40

Divisibilité

36 058 est divisible par 2, car il est pair, et par 9, car la somme de ses chiffres $3 + 6 + 0 + 5 + 8 = 18$ est divisible par 9.
Il est donc divisible par $2 \times 9 = 18$.

41

Nombres amicaux

1. Diviseurs de 220 :
1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220
Diviseurs de 284 : 1 2 4 71 142 284
 $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$
 $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$
Donc 220 et 284 sont amicaux.
2. Diviseurs de 1184 :
1 2 4 8 16 32 37 74 148 296 592 1184
Diviseurs de 1210 :
1 2 5 10 11 22 55 110 121 242 605 1210
 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$
 $1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$
Donc 1 184 et 1 210 sont amicaux.

42

Nombres permutables

Les nombres premiers permutables à deux chiffres sont : 11 ; 13 et 31 ; 17 et 71 ; 37 et 73 ; 79 et 97.

43

De 1 à 9

Cet exercice permet de retravailler les tables de multiplication et les critères de divisibilité.

9	4	1	36
2	3	8	48
6	7	5	210

108	84	40
-----	----	----

Le premier chiffre trouvé sera le 5 : 40 ne pouvant être décomposé que sous la forme 8×5 et 210 étant le seul nombre parmi 210 ; 48 et 36 n'étant pas divisibles par 5, on place d'abord le 5 à l'intersection de la ligne 210 et de la colonne 40. 36 n'étant pas divisible par 8, on place le 8 à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 210.

Il faut donc placer 1 dans la ligne 36 et la colonne 40.

36 peut se décomposer sous la forme $6 \times 6 \times 1$ mais on ne peut placer deux fois le même chiffre. On décompose donc 36 sous la forme $9 \times 4 \times 1$. 84 n'étant pas divisible par 9, mais par 4, on place 9 à l'intersection de la ligne 36 et de la colonne 108 et 4 à l'intersection de la ligne 36 et de la colonne 84. 84 peut se décomposer sous la forme 4×21 et 21 se décompose sous la forme 3×7 . 48 n'étant pas divisible par 7 mais par 3, on place 3 à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 84 et 7 à l'intersection de la colonne 84 et de la ligne 210. 48 = $3 \times 8 \times 2$ donc 2 se place à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 108 et 108 = $9 \times 2 \times 6$ donc 6 se place à l'intersection de la ligne 210 et de la colonne 108.

On vérifie que $6 \times 7 \times 5 = 210$.

44

Le bus

$164 = 53 \times 3 + 5$

Il devra donc prendre le 4^e bus et attendre $17 \times 3 = 51$ min.

Attention : 4 bus mais que 3 intervalles !

45 Le collier

Coup de pouce : trouver une périodicité.

Louison alterne à chaque fois 1 rouge, 4 bleues et 3 blanches, soit 8 perles.

$$109 = 8 \times 13 + 5$$

La 109^e perle sera donc la 5^e perle de cette suite de 8 perles, soit une bleue.

46 Nombres premiers entre eux

Cet exercice permet d'aller plus loin, en abordant la notion de nombres premiers entre eux, en lien avec la recherche des diviseurs de deux nombres entiers.

1. Diviseurs de 45 : 1 3 5 9 15 45.
 2. Diviseurs de 28 : 1 2 4 7 14 28.
 3. 45 et 28 sont premiers entre eux, car leur seul diviseur commun est 1.
 4. On ne peut pas trouver deux nombres pairs premiers entre eux, car ils ont forcément 2 comme diviseur commun.
 5. On peut trouver deux nombres impairs premiers entre eux : 15 et 7, par exemple.
15 et 7 sont impairs.
- Diviseurs de 15 : 1 3 5 15.
Diviseurs de 7 : 1 7.
Leur seul diviseur commun est 1 : ils sont premiers entre eux.

47 Tournoi de softball

Diviseurs de 72 :

1 2 3 4 8 9 18 24 36 72

Diviseurs de 108 :

1 2 3 4 6 9 12 18 27 36 54 108

Le nombre d'équipes doit être un diviseur commun à 72 et 108 : 1 2 3 4 9 18 et 36.

Il peut donc y avoir :

36 équipes de 2 filles et 3 garçons, soit 5 élèves par équipe.
18 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 élèves par équipe.
9 équipes de 8 filles et 12 garçons, soit 20 élèves par équipe.
4 équipes de 18 filles et 27 garçons, soit 45 élèves par équipe.
3 équipes de 24 filles et 36 garçons, soit 60 élèves par équipe.
2 équipes de 36 filles et 54 garçons, soit 90 élèves par équipe.
1 équipe de 72 filles et 108 garçons, ce qui est impossible car il n'y a alors qu'une seule équipe.

Les équipes devant être composées de 8 à 15 élèves, il n'y a qu'une seule possibilité : constituer 18 équipes de 4 filles et 6 garçons.

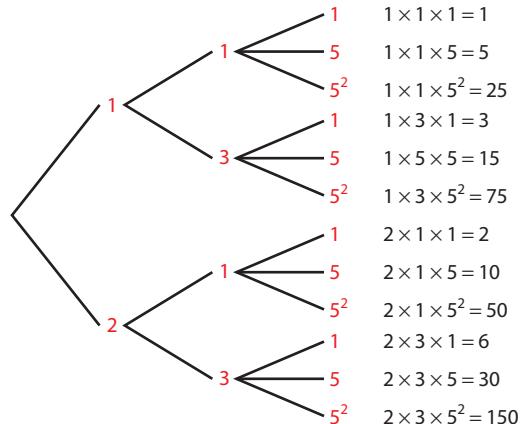
48 À la recherche des diviseurs

1.

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$\text{Donc } 150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5.$$

2. Diviseurs de 150 :



Les diviseurs de 150 sont donc :

1 2 3 5 6 10 15 25 30 50 75 150.

49 Tour de magie

Cet exercice permet de travailler le raisonnement, et plus particulièrement la preuve par une démonstration à l'aide du calcul littéral.

À partir de l'exemple :

$$\begin{aligned} 126\ 126 &= 126 \times 1\ 000 + 126 \\ &= 126 \times (1\ 000 + 1) = 126 \times 1\ 001 \end{aligned}$$

Or $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$.

Démonstration :

Soit N le nombre choisi à 3 chiffres qui s'écrit sous la forme abc (a étant le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités).

On a donc $N = 100a + 10b + c$.

Le nombre N' , formé de 6 chiffres, s'écrit sous la forme abc abc, soit $N' = 100\ 000a + 10\ 000b + 1\ 000c + 100a + 10b + c$.

Le magicien demande de diviser ce nombre par 7, puis par 13, puis par 11. Il demande donc de diviser par $7 \times 13 \times 11 = 1\ 001$.

Or si on multiplie N par 1 001, on obtient :

$$N \times 1\ 001 = (100a + 10b + c) \times (1\ 000 + 1)$$

$N \times 1\ 001 = 100\ 000a + 10\ 000b + 1\ 000c + 100a + 10b + c$, c'est-à-dire le nombre N' .

Lorsque le magicien demande de diviser le nombre N' à 6 chiffres, il est sûr de retrouver le nombre N à 3 chiffres initialement choisi.

50 Les draps

On cherche le plus petit multiple non nul commun à 9 et 12.

Multiples de 9 : 9 18 27 36 45...

Multiples de 12 : 12 24 36 48...

M. Blanc changera de nouveau ses draps et ceux de sa fille le même jour dans 36 jours.

51 Spirographe

On cherche le plus petit multiple non nul commun à 18 et 56.

Multiples de 18 :

18 36 54 72 90 108 126 144 162 180 ... 468 486 504.

Multiples de 56 :

56 112 168 ... 392 448 504.

Le grand cercle doit avoir fait tourner 504 dents, c'est-à-dire doit avoir fait $504 \div 56 = 9$ tours pour que le point A reprenne exactement sa position initiale.

Les multiples à écrire étant nombreux, une décomposition de 18 et 56 en produit de facteurs premiers peut permettre de trouver plus rapidement le plus petit multiple commun.

52 The rings

On cherche le plus petit multiple non nul commun à 12 et 15.

Multiples de 12 : 12 24 36 48 60.

Multiples de 15 : 15 30 45 60.

Les montres sonneront toutes les deux en même temps dans 60 heures, soit 2 jours et demi, c'est-à-dire le 23 septembre à 6 h 30 du matin.

53 Carte bancaire

Cet exercice permet de travailler la lecture d'énoncé et la recherche d'informations dans un texte ; il permet également de passer du langage courant au langage mathématique.

Le 1^{er} chiffre est 4 : on calcule son double : 8.

Le 2^{er} chiffre est conservé : 5.

Le 3^{er} chiffre est 2 : on calcule son double : 4.

Le 4^{er} chiffre est conservé : 0.

Le 5^{er} chiffre est 3 : on calcule son double : 6.

Le 6^{er} chiffre est conservé : 3.

Le 7^{er} chiffre est 7 : on calcule son double : 14, puis on le remplace par $1 + 4 = 5$.

Le 8^{er} chiffre est conservé : 3.

Le 9^{er} chiffre est 4 : on calcule son double : 8.

Le 10^{er} chiffre est conservé : 3.

Le 11^{er} chiffre est 1 : on calcule son double : 2.

Le 12^{er} chiffre est conservé : 0.

Le 13^{er} chiffre est 5 : on calcule son double : 10, puis on le remplace par $1 + 0 = 1$.

Le 14^e chiffre est conservé : 5.

Le 15^e chiffre est 0 : on calcule son double : 0.

On ajoute ces 15 chiffres obtenus :

$$8 + 5 + 4 + 0 + 6 + 3 + 5 + 3 + 8 + 3 + 2 + 0 + 1 + 5 + 0 = 53$$

On effectue la division euclidienne de 53 par 10 : $53 = 10 \times 5 + 3$

Le reste est 3, on retranche ce reste à 10 : $10 - 3 = 7$.

La clé de Luhn est 7. Or, ici, sur cette carte, le 16^e chiffre est 4.

Cette carte n'est donc pas valide.

54 Nombres premiers

Il faut calculer l'expression $n^2 + n + 43$ en remplaçant n par les nombres entiers successifs, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre non premier.

Cet exercice permet de retravailler le calcul littéral.

Pour $n = 1 : 1^2 + 1 + 43 = 43$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 2 : 2^2 + 2 + 43 = 47$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 3 : 3^2 + 3 + 43 = 53$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 4 : 4^2 + 4 + 43 = 61$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 5 : 5^2 + 5 + 43 = 71$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 6 : 6^2 + 6 + 43 = 83$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 7 : 7^2 + 7 + 43 = 97$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 8 : 8^2 + 8 + 43 = 113$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 9 : 9^2 + 9 + 43 = 131$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 10 : 10^2 + 10 + 43 = 151$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 11 : 11^2 + 11 + 43 = 173$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 12 : 12^2 + 12 + 43 = 197$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 13 : 13^2 + 13 + 43 = 223$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 14 : 14^2 + 14 + 43 = 251$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 15 : 15^2 + 15 + 43 = 281$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 16 : 16^2 + 16 + 43 = 313$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 17 : 17^2 + 17 + 43 = 347$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 18 : 18^2 + 18 + 43 = 383$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 19 : 19^2 + 19 + 43 = 421$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 20 : 20^2 + 20 + 43 = 461$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 21 : 21^2 + 21 + 43 = 503$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 22 : 22^2 + 22 + 43 = 541$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 23 : 23^2 + 23 + 43 = 593$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 24 : 24^2 + 24 + 43 = 641$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 25 : 25^2 + 25 + 43 = 691$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 26 : 26^2 + 26 + 43 = 743$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 27 : 27^2 + 27 + 43 = 797$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 28 : 28^2 + 28 + 43 = 853$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 29 : 29^2 + 29 + 43 = 911$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 30 : 30^2 + 30 + 43 = 971$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 31 : 31^2 + 31 + 43 = 1\ 033$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 32 : 32^2 + 32 + 43 = 1\ 097$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 33 : 33^2 + 33 + 43 = 1\ 163$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 34 : 34^2 + 34 + 43 = 1\ 231$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 35 : 35^2 + 35 + 43 = 1\ 301$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 36 : 36^2 + 36 + 43 = 1\ 373$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 37 : 37^2 + 37 + 43 = 1\ 447$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 38 : 38^2 + 38 + 43 = 1\ 523$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 39 : 39^2 + 39 + 43 = 1\ 601$, c'est un nombre premier.

Pour $n = 40 : 40^2 + 40 + 43 = 1\ 681$, ce n'est pas un nombre premier.

La plus petite valeur de n qui ne fonctionne pas est 40.

Info : les mathématiciens ont toujours voulu caractériser les nombres premiers.

En 1772, Euler trouve l'expression $n(n + 1) + 41$ qui produit de nombreux nombres premiers.

En 1798, Legendre propose $n(n - 1) + 41$.

Les nombres premiers de Mersenne sont les plus célèbres $2^p - 1$, avec p premier, car c'est sous cette forme que l'on connaît les plus grands nombres premiers.

55 Alignement de planètes

On effectue la division euclidienne de 780 par 365 (car il y a 365 jours par année non bissextile) :

$$780 = 365 \times 2 + 50$$

L'événement suivant a eu lieu 2 ans et 50 jours plus tard.

Or 2008 est une année bissextile, donc 1 an plus tard, ce sera le 23 décembre 2008, puis 1 an plus tard, le 23 décembre 2009.

Il faut maintenant rajouter 50 jours :

9 jours après, c'est le 1^{er} janvier 2010. Il faut alors rajouter 41

jours : 31 jours plus tard, c'est le 1^{er} février et 10 jours plus tard, le 11 février 2010.

56 La conjecture de Goldbach

Il faut écrire les nombres sous la forme de la somme de deux nombres premiers :

$$26 = 13 + 13 \text{ ou } 26 = 7 + 19 \text{ ou } 26 = 3 + 23$$

$$58 = 11 + 47 \text{ ou } 58 = 29 + 29 \text{ ou } 58 = 5 + 53 \text{ ou } 58 = 17 + 41$$

$$138 = 7 + 131 \text{ ou } 138 = 11 + 127 \text{ ou } 138 = 29 + 109 \text{ ou }$$

$$138 = 31 + 107 \text{ ou } 138 = 67 + 71 \text{ ou } 138 = 59 + 79 \text{ ou }$$

$$138 = 37 + 101 \text{ ou } 138 = 41 + 97$$

Les deux termes peuvent être évidemment inversés dans chaque somme précédemment écrite.

57 Démonstrations

$$\text{1.a. } N = 100 \times c + 10 \times d + u$$

$$\text{b. } N = 2 \times 50 \times c + 2 \times 5 \times d + u$$

$$N = 2 \times (50c + 5d) + u$$

Si u est divisible par 2, $2 \times (50c + 5d)$ étant divisible par 2, alors N est divisible par 2.

On vient de démontrer le critère de divisibilité par 2 : un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est divisible par 2, c'est-à-dire pair.

$$N = 5 \times 20 \times c + 5 \times 2 \times d + u$$

$$N = 5 \times (20c + 2d) + u$$

Si u est divisible par 5, $5 \times (20c + 2d)$ étant divisible par 5, alors N est divisible par 5.

On vient de démontrer le critère de divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est divisible par 5, c'est-à-dire si c'est 0 ou 5 (seuls nombres à 1 chiffre divisibles par 5).

$$N = 10 \times 10 \times c + 10 \times d + u$$

$$N = 10 \times (10c + d) + u$$

Si u est divisible par 10, $10 \times (10c + d)$ étant divisible par 10, alors N est divisible par 10.

On vient de démontrer le critère de divisibilité par 10 : un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est divisible par 10, c'est-à-dire si c'est 0 (car 0 est le seul nombre à un chiffre divisible par 10).

$$\text{2.a. } N = (99 + 1)c + (9 + 1)d + u$$

$$\text{b. } N = 99c + c + 9d + d + u \quad (\text{On développe.})$$

$$N = 9 \times 11 \times c + c + 9 \times d + d + u$$

$$N = 9 \times (11c + d) + c + d + u$$

Si $c + d + u$ est divisible par 9, $9 \times (11c + d)$ étant divisible par 9, alors N est divisible par 9.

On vient de démontrer le critère de divisibilité par 9 : un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres ($c + d + u$) est divisible par 9.

On a également :

$$N = 3 \times 3 \times (11c + d) + c + d + u$$

$$N = 3 \times (33c + 3d) + c + d + u$$

Si $c + d + u$ est divisible par 3, $3 \times (11c + d)$ étant divisible par 3, alors N est divisible par 3.

On vient de démontrer le critère de divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres ($c + d + u$) est divisible par 3.

58 Des fractions !

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	$48 = 2^4 \times 3$

$$72 = 2$$

$$36 = 2$$

$$18 = 2$$

$$9 = 3$$

$$3 = 3$$

$$1 \quad 72 = 2^3 \times 3^2$$

$$\text{Donc: } \frac{48}{72} = \frac{2^4 \times 3}{2^3 \times 3^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

On supprime le même nombre de facteurs égaux à 2 au numérateur et au dénominateur, et on fait la même chose pour 3.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
126	2
63	3
21	3
7	7
1	$126 = 2 \times 3^3 \times 7$
Donc : $\frac{180}{126} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$	
585	3
195	3
65	5
13	13
1	$585 = 3^2 \times 5 \times 13$
1 275	5
255	5
51	3
17	17
1	$1 275 = 5^2 \times 3 \times 17$
Donc : $\frac{585}{1275} = \frac{3^2 \times 5 \times 13}{5^2 \times 3 \times 17} = \frac{3 \times 13}{5 \times 17} = \frac{39}{85}$	

59 Algorithme d'Euclide

1. Diviseurs de 15 : 1 3 5 15.

Diviseurs de 25 : 1 5 25.

Donc PGCD(15 ; 25) = 5.

Diviseurs de 27 : 1 3 9 27.

Diviseurs de 81 : 1 3 9 27 81.

Donc PGCD(27 ; 81) = 27.

2. a. $910 = 105 \times 8 + 70$

$$105 = 70 \times 1 + 35$$

$$70 = 35 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 35. Donc PGCD(910 ; 105) = 35.

$$2 450 = 675 \times 3 + 425$$

$$675 = 425 \times 1 + 250$$

$$425 = 250 \times 1 + 175$$

$$250 = 175 \times 1 + 75$$

$$175 = 75 \times 2 + 25$$

$$75 = 25 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 25. Donc PGCD(2 450 ; 675) = 25.

Cet exercice permet de découvrir l'algorithme d'Euclide, qui repose sur la propriété suivante :

Pour a et b entiers tels que $a > b$ et b non nul : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste dans la division euclidienne de a par b .

60 Numération binaire

1. Pour 101 :

$$A = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$A = 1 \times 4 + 0 + 1 \times 1$$

$$A = 4 + 0 + 1$$

$$A = 5$$

Le nombre correspondant à 101 en écriture binaire est 5.

Pour 11001 :

$$B = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$B = 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

$$B = 16 + 8 + 0 + 0 + 1$$

$$B = 25$$

Le nombre correspondant à 11001 en écriture binaire est 25.

Pour 11101 :

$$B = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$B = 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

$$B = 16 + 8 + 4 + 0 + 1$$

$$B = 29$$

Le nombre correspondant à 11101 en écriture binaire est 29.

2. $2^7 = 128 > 125$, donc 2^6 est la plus grande puissance de 2 contenue dans 125.

$$125 = 64 \times 1 + 61$$

$$125 = 2^6 \times 1 + 61$$

La plus grande puissance de 2 contenue dans 61 est $2^5 = 32$.

$$61 = 32 \times 1 + 29$$

$$61 = 2^5 \times 1 + 29$$

La plus grande puissance de 2 contenue dans 29 est $2^4 = 16$.

$$29 = 16 \times 1 + 13$$

$$29 = 2^4 \times 1 + 13$$

La plus grande puissance de 2 contenue dans 13 est $2^3 = 8$.

$$13 = 8 \times 1 + 5$$

$$13 = 2^3 \times 1 + 5$$

La plus grande puissance de 2 comprise dans 5 est $2^2 = 4$.

$$5 = 4 \times 1 + 1$$

$$5 = 2^2 \times 1 + 1$$

$$\text{Et } 1 = 1 \times 1 + 0$$

$$1 = 2^0 \times 1 + 0$$

On a donc :

$$125 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

donc l'écriture en numération binaire de 125 est : 1111101.

3. Pour s'aider, on peut calculer les premières puissances de 2.

• Pour 24 :

$$24 = 16 \times 1 + 8$$

$$24 = 2^4 \times 1 + 8$$

$$8 = 8 \times 1 + 0$$

$$8 = 2^3 \times 1 + 0$$

$$\text{Donc } 24 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

Donc l'écriture en numération binaire de 24 est : 11000.

• Pour 36 :

$$36 = 32 \times 1 + 4$$

$$36 = 2^5 \times 1 + 4$$

$$4 = 4 \times 1 + 0$$

$$4 = 2^2 \times 1 + 0$$

$$\text{Donc } 4 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

Donc l'écriture en numération binaire de 36 est : 100100.

• Pour 102 :

$$102 = 64 \times 1 + 38$$

$$102 = 2^6 \times 1 + 38$$

$$38 = 32 \times 1 + 6$$

$$38 = 2^5 \times 1 + 6$$

$$6 = 4 \times 1 + 2$$

$$6 = 2^2 \times 1 + 2$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$2 = 2^1 \times 1 + 0$$

Donc

$$102 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

Donc l'écriture en numération binaire de 102 est : 110110.

Pour information : le système binaire est un système de numération essentiel à l'informatique. On nomme bit (de l'anglais *binary digit*, signifiant « chiffre binaire ») les chiffres de la numération binaire positionnelle. Ceux-ci ne peuvent prendre que deux valeurs : 0 et 1. Les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors qui ne gèrent que deux états. Un calcul en informatique n'est donc qu'une suite d'opérations avec des 0 et des 1. Chaque groupe de huit de ces chiffres est appelé octet.

61 PPCM et PGCD

1. 84 2

$$42 \quad 2$$

$$21 \quad 3$$

$$7 \quad 7$$

$$1 \quad$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$270 \quad 2$$

$$135 \quad 3$$

$$45 \quad 3$$

$$15 \quad 3$$

$$5 \quad 5$$

$$1 \quad$$

$$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$$

2. a. PPCM(84 ; 270) = $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3\ 780$

On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte du plus grand exposant.

b. PGCD(84 ; 270) = $2 \times 3 = 6$

On ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant.

62 Nombres premiers circulaires

Les douze nombres premiers circulaires compris entre 10 et 200 sont :

11
13 et 31
17 et 71
37 et 73
79 et 97
113 et 131
199

63 Le jeu de Nim

On pourra s'aider en représentant les allumettes ou en réalisant le jeu en réalité.

1. Il y a 21 allumettes en début de partie.

Nathan prend 3 allumettes : il en reste donc 18.

Fabien en prend 3 : il en reste alors 15.

Nathan en prend 2 : il en reste alors 13.

Fabien en prend 3 : il en reste alors 10.

Nathan en prend 3 : il en reste alors 7.

Fabien en prend 2 : il en reste alors 5.

C'est au tour de Nathan de jouer :

• s'il en prend 1 : il en reste alors 4.

Si Fabien en prend 1, il en reste 3. Nathan prend les 3 et il gagne.

Si Fabien en prend 2, il en reste 2. Nathan prend les 2 et il gagne.

Si Fabien en prend 3, il en reste 1. Nathan prend celle restante et il gagne.

• s'il en prend 2 : il en reste alors 3.

Fabien prend les 3 et il gagne.

• s'il en prend 3 : il en reste alors 2.

Fabien prend les 2 et il gagne.

Nathan peut donc gagner et il gagne même à coup sûr s'il prend 1 allumette au tour suivant.

2. Pour gagner à tous les coups, il faut, lorsque c'est son tour, laisser un nombre d'allumettes correspondant à un multiple de 4 : 4, 8, 12 ou 16 allumettes. Et il vaut donc mieux ne pas commencer !

64 Les boîtes

Dans ce problème, il faut trier les informations et organiser sa démarche.

Coup de pouce : décomposer 36 en produit de 3 facteurs.

On cherche d'abord le nombre de boîtes nécessaires.

$$20\ 000 = 36 \times 555 + 20$$

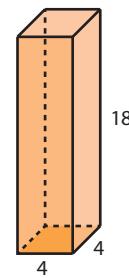
Il faudra donc 555 boîtes (et il restera 20 pâtes de fruits non rangées).

On décompose 36 en produits de facteurs premiers : $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$, afin de chercher toutes les dimensions possibles de la boîte, compte tenu qu'il faut y ranger 36 pâtes de fruits cubiques de 2 cm d'arête.

On peut décomposer 36 sous la forme de 3 facteurs de la façon suivante :

$2 \times 2 \times 9$
 $2 \times 3 \times 6$
 $4 \times 3 \times 3$
 $1 \times 9 \times 4$
 $1 \times 6 \times 6$
 $12 \times 3 \times 1$
 $1 \times 2 \times 18$
 $1 \times 1 \times 36$

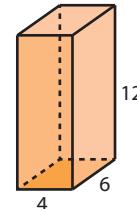
- 1^{re} solution : une boîte de 2×2 cm sur 2×2 cm sur 9×2 cm soit 4 cm sur 4 cm sur 18 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (4 \times 4) + 2 \times (4 \times 18) + 2 \times (4 \times 18) = 32 + 144 + 144 = 320 \text{ cm}^2.$$

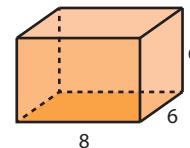
- 2^e solution : une boîte de 2×2 cm sur 3×2 cm sur 6×2 cm soit 4 cm sur 6 cm sur 12 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (4 \times 6) + 2 \times (4 \times 12) + 2 \times (6 \times 12) = 48 + 96 + 144 = 288 \text{ cm}^2.$$

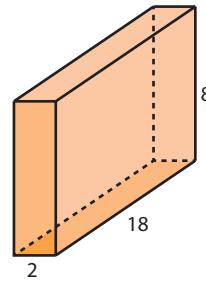
- 3^e solution : une boîte de 4×2 cm sur 3×2 cm sur 3×2 cm soit 8 cm sur 6 cm sur 6 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (8 \times 6) + 2 \times (8 \times 6) + 2 \times (6 \times 6) = 96 + 96 + 72 = 264 \text{ cm}^2.$$

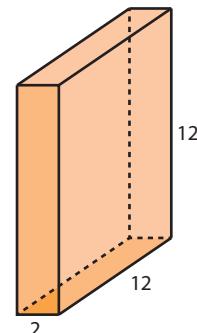
- 4^e solution : une boîte de 1×2 cm sur 9×2 cm sur 4×2 cm soit 2 cm sur 18 cm sur 8 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (2 \times 18) + 2 \times (2 \times 8) + 2 \times (18 \times 8) = 72 + 32 + 288 = 392 \text{ cm}^2.$$

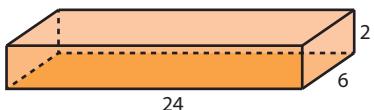
- 5^e solution : une boîte de 1×2 cm sur 6×2 cm sur 6×2 cm soit 2 cm sur 12 cm sur 12 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (2 \times 12) + 2 \times (2 \times 12) + 2 \times (12 \times 12) = 48 + 48 + 288 = 384 \text{ cm}^2.$$

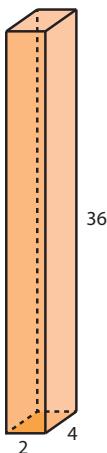
- 6^e solution : une boîte de 12 × 2 cm sur 3 × 2 cm sur 1 × 2 cm soit 24 cm sur 6 cm sur 2 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (24 \times 6) + 2 \times (24 \times 2) + 2 \times (6 \times 2) = 288 + 96 + 24 = 408 \text{ cm}^2.$$

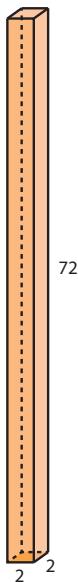
- 7^e solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 2 × 2 cm sur 18 × 2 cm soit 2 cm sur 4 cm sur 36 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (2 \times 4) + 2 \times (2 \times 36) + 2 \times (4 \times 36) = 16 + 144 + 288 = 448 \text{ cm}^2.$$

- 8^e solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 1 × 2 cm sur 36 × 2 cm soit 2 cm sur 2 cm sur 72 cm.



On trouve une aire totale de la boîte de :

$$2 \times (2 \times 2) + 2 \times (2 \times 72) + 2 \times (2 \times 72) = 8 + 288 + 288 = 584 \text{ cm}^2.$$

L'aire la plus petite est 264 cm². Elle est obtenue pour une boîte de dimensions 8 cm sur 6 cm sur 6 cm.

Il faut commander 555 boîtes, soit :

$$555 \times 264 = 146\,520 \text{ cm}^2 = 14,652 \text{ m}^2 \text{ de carton.}$$

Le carton coutant 15,50 € le m², il faudra passer une commande de :

$$15,50 \times 14,652 = 227,106 \approx 227,11 \text{ €.}$$



65 Vive la mariée !

1. $3\,003 = 20 \times 150 + 3$ et $3\,731 = 20 \times 186 + 11$

On fait donc 20 corbeilles avec 150 dragées au chocolat et 186 dragées aux amandes dans chacune et il reste $3 + 11 = 14$ dragées non utilisées.

- a. $3\,003 = 90 \times 33 + 33$

$$3\,731 = 90 \times 41 + 41$$

La proposition d'Emma de faire 90 ballotins ne convient pas car il restera des dragées.

- b. Diviseurs de 3 003 :

$$\begin{array}{l} 1 \ 3 \ 7 \ 11 \ 13 \ 21 \ 33 \ 39 \ 77 \ 91 \ 143 \ 231 \ 273 \ 429 \\ 1\,001 \ 3\,003 \end{array}$$

Diviseurs de 3 731 : 1 7 13 41 91 287 533 3 731
91 est le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731. Ils pourront donc faire au maximum 91 ballotins.

$$3\,003 \div 91 = 33 \text{ et } 3\,731 \div 91 = 41$$

Il y aura donc 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes dans chaque ballotin.

66 Les ballons

- S'il reste 37 ballons, c'est que le reste de la division des 428 ballons par le nombre d'enfants est 37.

$$428 - 37 = 391 \text{ et on cherche les diviseurs de } 391 : 1 \ 17 \ 23 \ 391.$$

Si l'on considère qu'il n'y avait pas qu'un seul enfant à la fête, il y avait 17 ou 23 ou 391 enfants à cette fête.

- Il ne reste pas de ballon, ce qui signifie que la division de 828 par le nombre d'enfants est un nombre entier.

$$828 \div 17 \approx 48,7$$

$$828 \div 23 = 36$$

$$828 \div 391 \approx 2,1$$

826 est divisible par 23. Il y avait donc 23 enfants présents.

67 Parc d'attractions

- a. Le forfait famille coûte 35 €. Si ce couple et son enfant de 8 ans prennent les places à l'unité, cela revient à $12 \times 2 + 7 = 24 + 7 = 31$ €. Le forfait famille n'est donc pas intéressant.

b. Soit n le nombre d'enfants du couple. En prenant les places à l'unité, cela revient à : $2 \times 12 + 7n = 24 + 7n$ €.
On souhaite que le forfait famille soit plus intéressant, on cherche donc à résoudre l'inéquation :

$$35 < 24 + 7n$$

$$35 - 24 < 7n$$

$$11 < 7n$$

$$\frac{11}{7} < n$$

Donc le forfait famille est plus intéressant à partir de 2 enfants. On peut aussi le résoudre par tâtonnements : On calcule le prix avec 2 enfants et on constate que le forfait famille est alors plus intéressant.

1 couple avec 2 enfants va payer $24 + 14 = 38$ €.

- a. La recette est alors de $89 \times 35 = 3\,115$ €.

b. Le prix moyen par personne est de $3\,115 \div 510 \approx 6,11$ €.

- On pourra raisonner par essais successifs (ou tâtonnements).

Pour 100 entrées adultes, il y a alors :

$$380 - 100 = 280 \text{ entrées enfants, soit une recette de : } 100 \times 12 + 280 \times 7 = 3\,160 \text{ € ; c'est trop bas.}$$

Pour 150 entrées adultes, il y a alors :

$$380 - 150 = 230 \text{ entrées enfants, soit une recette de : } 150 \times 12 + 230 \times 7 = 3\,410 \text{ € ; c'est trop bas.}$$

Pour 200 entrées adultes, il y a alors :

$$380 - 200 = 180 \text{ entrées enfants, soit une recette de : } 200 \times 12 + 180 \times 7 = 3\,660 \text{ € ; c'est ce que l'on cherchait.}$$

Donc 200 entrées adultes et 180 entrées enfants ont été vendues lors de cette journée.

68 Programme de calcul

On peut d'abord faire tester le programme avec des nombres simples et voir si la conjecture semble vraie.

Par exemple, si on choisit 1 :

$$(1 + 3) \times 7 + 3 \times 1 - 21 = 4 \times 7 + 3 - 21$$

$$= 28 + 3 - 21 = 31 - 21 = 10$$

Cela semble vrai, puis on peut tester avec d'autres nombres.

Cela ne suffisant pas à prouver que cela fonctionne pour n'importe quel nombre entier, on effectue le programme de calcul avec x comme nombre de départ.

Pour x comme nombre de départ, le résultat est :

$$(x + 3) \times 7 + 3x - 21 = 7x + 21 + 3x - 21 = 10x.$$

L'affirmation est donc vraie : on obtient toujours un multiple de 10.

69

Garçon, l'audition !

Soit n le nombre de personnes sachant nager (n est un nombre entier naturel).

Un tiers de n sont des femmes et un quart de n ont moins de 25 ans. Donc n est divisible par 4 et par 3 et est inférieur à $20 - 5 = 15$, car l'organisateur accepte un maximum de 20 personnes, mais parmi elles, 5 ne savent pas nager.

n est donc un multiple de 3 et de 4 inférieur à 15 : n est égal à 12.

Comme 5 personnes ont déclaré ne pas savoir nager, 12 + 5 = 17 personnes se sont présentées à cette audition.

Algorithmique et outils numériques

70

Modulo

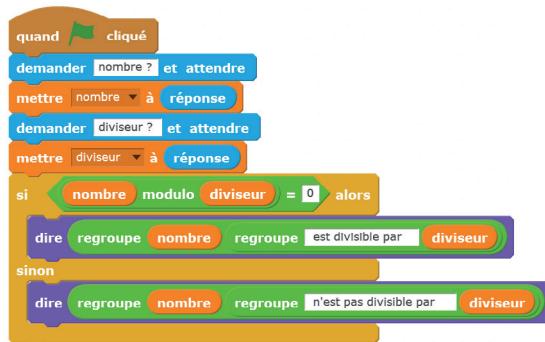
L'élève doit ici créer intégralement le script, créer les variables. Il n'est pas guidé.

On crée deux variables :

- « nombre » : le nombre à tester ;
- « diviseur » : le diviseur envisagé.

La commande permet de calculer le reste dans la division euclidienne du premier nombre inscrit par le second.

Le script est donc :



71

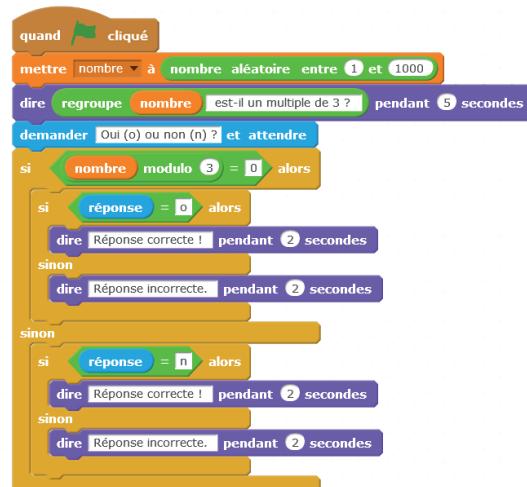
Vrai ou faux ?

Ce script permet de choisir un nombre (variable « nombre »), compris entre 1 et 1 000, au hasard, puis de demander si ce nombre est ou non un multiple de 3. On répond par oui ou non en saisissant « o » pour oui et « n » pour non ; le script permet ensuite d'indiquer si la réponse donnée est correcte ou non.

Si la réponse est « o » et que le reste (« réponse ») est bien 0, il s'affichera « Réponse correcte ! » ; si le reste (« réponse ») n'est pas 0, il s'affichera « Réponse incorrecte ».

Si la réponse est « n » et que le reste (« réponse ») n'est pas 0, il s'affichera « Réponse correcte ! » ; si le reste (« réponse ») est 0, il s'affichera « Réponse incorrecte ».

Voici le script complété dans l'ordre :



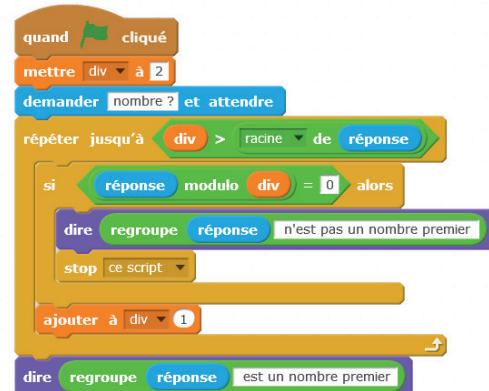
72

Script incomplet

1. Ce script permet de chercher si un nombre entier choisi (variable « nombre ») est un nombre premier ou non.

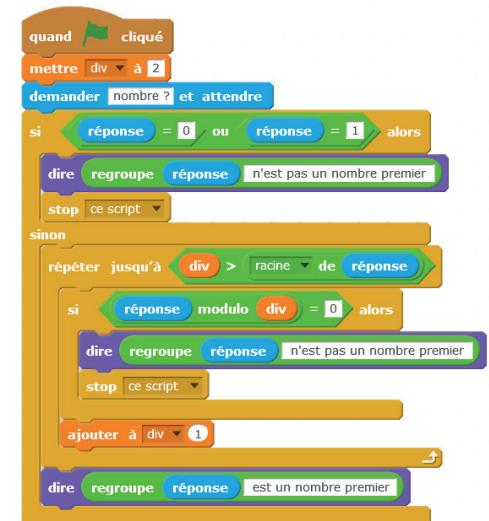
La variable « div » sert de diviseur à tester. On l'augmente de façon successive de 1 jusqu'à la valeur test limite égale à la racine carrée de « nombre ». Si on ne trouve aucun diviseur supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à la racine carrée du nombre à tester, le nombre est déclaré premier.

2. Script complété :



3. Ce script ne fonctionne que pour un nombre supérieur ou égal à 2.

Pour que le script fonctionne pour 0 et 1 (0 et 1 ne sont pas des nombres premiers), il faut le modifier ainsi :



73

Diviseurs

La formule saisie dans la cellule C2, puis étirée dans la plage de cellules C3:C25 est : =SI(MOD(A2;B2)=0;«oui»;«non»)

Si le reste dans la division euclidienne du nombre inscrit dans A2 par le nombre inscrit dans B2 est nul, il s'affiche « oui », sinon il s'affiche « non ».

ou : =SI(ENT(A2/B2)=A2/B2;«oui»;«non»)

Si la partie entière de la division décimale du nombre inscrit dans A2 par le nombre inscrit dans B2 est égale au quotient de cette division, il s'affiche « oui », sinon il s'affiche « non ».

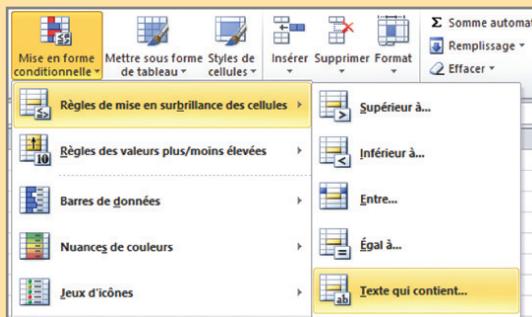
Dans la cellule B2, on saisit « 1 », puis dans B3, on saisit « 2 », on sélectionne les cellules B2 et B3 et on étire jusqu'à B25 ou on saisit « 1 » dans B2 et on saisit « =B2+1 » dans B3 et on étire B3 jusqu'à B25.

	A	B	C
1	Nombre	Diviseur possible	Oui/non
2	24	1	oui
3	24	2	oui
4	24	3	oui
5	24	4	oui
6	24	5	non
7	24	6	oui
8	24	7	non
9	24	8	oui
10	24	9	non
11	24	10	non
12	24	11	non
13	24	12	oui
14	24	13	non
15	24	14	non
16	24	15	non
17	24	16	non
18	24	17	non
19	24	18	non
20	24	19	non
21	24	20	non
22	24	21	non
23	24	22	non
24	24	23	non
25	24	24	oui

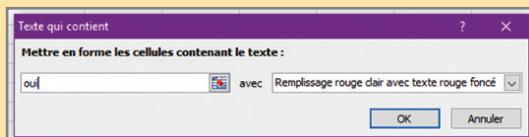
Les diviseurs de 24 sont donc :

1 2 3 4 6 8 12 24.

Remarque : on peut faire surligner en rouge, par exemple, les cellules dans lesquelles s'affiche « oui » pour plus de lisibilité grâce à la mise en forme conditionnelle.



Puis :



On obtient alors :

	A	B	C
1	Nombre	Diviseur possible	Oui/non
2	24	1	oui
3	24	2	oui
4	24	3	oui
5	24	4	oui
6	24	5	non
7	24	6	oui
8	24	7	non
9	24	8	oui
10	24	9	non
11	24	10	non
12	24	11	non
13	24	12	oui
14	24	13	non
15	24	14	non
16	24	15	non
17	24	16	non
18	24	17	non
19	24	18	non
20	24	19	non
21	24	20	non
22	24	21	non
23	24	22	non
24	24	23	non
25	24	24	oui

74 Code-barres EAN

1.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	code EAN											Clé
2												
3												

Il faut saisir dans la cellule M2 la formule :

$$=SI(MOD((B2+D2+F2+H2+J2+L2)*3+A2+C2+E2+G2+I2+K2;10)=0;\text{«}0\text{»};10-MOD((B2+D2+F2+H2+J2+L2)*3+A2+C2+E2+G2+I2+K2;10))$$

2.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	code EAN											Clé
2	9	7	8	2	0	1	3	9	5	3	5	7
3												

La clé du produit est vérifiée.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

	A	B	C	D
1	1	2		7
2		3	1	2
3	8	4	6	
4	0		9	9

Exercice 1

	A	B	C	D
1	9	7		1
2		1	4	3
3	4	0	5	
4	0		5	6

Remarque : l'élève pourra aussi trouver cette solution, qu'on éliminera (on ne trouve pas l'écriture 07 mais 7 dans des nombres croisés).

	A	B	C	D
1	9	7		1
2		3	6	3
3	4	0	5	
4	0		0	7

Exercice 2

1. Dans un engrenage, on a la propriété suivante :

Nombre_{tours de la roue 1} × Nombre_{dents de la roue 1}

= Nombre_{tours de la roue 2} × Nombre_{dents de la roue 2}

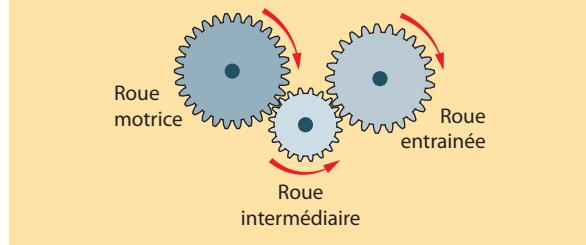
B tourne à $300 \times 30 \div 20 = 450$ tours par minute.

C tourne à $300 \times 30 \div 40 = 225$ tours par minute.

D tourne à 225 tours par minute.

2. La roue D tourne dans le même sens que A.

Information :



Exercice 2

Dans un engrenage, on a la propriété suivante :

- Nombre_{tours de la roue 1} × Nombre_{dents de la roue 1}
= Nombre_{tours de la roue 2} × Nombre_{dents de la roue 2}
1. B tourne à $600 \times 30 \div 20 = 900$ tours par minute.
C tourne à $900 \times 20 \div 40 = 450$ tours par minute.
D tourne à 450 tours par minute.
E tourne à $450 \times 25 \div 36 = 312,5$ tours par minute.
F tourne à 312,5 tours par minute.
G tourne à $20 \times 312,5 \div 36 \approx 173,6$ tours par minute.
2. La roue E tourne dans le sens inverse de A.

Analyse d'une production

Louise a divisé par 10 qui n'est pas un nombre premier : 16 380 n'est donc pas décomposé en produit de nombres premiers. Il faudrait décomposer 10 en 2×5 .

Thomas a oublié les exposants dans les facteurs de la décomposition en nombres premiers : 2 doit être à la puissance 2 et 3 également.

Idris a divisé par 10 et 18 qui ne sont pas des nombres premiers : il aurait dû diviser par 2, 3 et 7. Il n'a donc pas décomposé 16 380 en produit de nombres premiers.

Introduction

Ce chapitre permet d'aborder les points suivants du programme :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.
- calculer avec des nombres relatifs en écriture décimale (somme, différence, produit et quotient), notion d'opposé.
- rencontrer des nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes.
- (se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal (abscisse, ordonnée, altitude).

Repères de progressivité

- La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendés au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.
Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions.
- L'introduction des nombres décimaux relatifs au cycle 4 a plusieurs objectifs :
 - étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui de nombres décimaux positifs et négatifs) dans lequel toutes les soustractions sont possibles.
- Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs.
- accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « en dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes...).
- étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Liens avec les domaines du socle

- La compréhension des nombres négatifs en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons, la perception de l'extension de l'ensemble des

décimaux positifs à celui des décimaux relatifs, la compréhension de l'écriture des nombres négatifs et de leur représentation sur la droite graduée contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

- L'utilisation des nombres relatifs pour modéliser des grandeurs physiques (température, profondeur, altitude) ou sociales (dates, gains et pertes) susceptibles de prendre des valeurs en dessous de zéro contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4) ainsi qu'aux représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est le premier du cycle sur les nombres relatifs. On y introduit la notion de nombre relatifs en s'appuyant sur des exemples de la vie courante. Si cette notion nouvelle est déjà régulièrement utilisée par les élèves, il ne faut cependant pas minimiser les difficultés que certains pourront rencontrer.

Dans un premier temps, on s'attachera à la définition des nombres relatifs et à l'extension de l'ensemble des nombres décimaux qui rend toutes les soustractions possibles.

Grâce à cette extension, on est maintenant en mesure de graduer l'intégralité d'une droite. La comparaison des nombres relatifs s'appuie alors sur la droite graduée en disant que lorsque l'on parcourt une droite graduée dans le sens de la flèche, le nombre rencontré en premier est le plus petit, avant d'énoncer des règles plus précises de comparaison.

Pour finir, après avoir travaillé le repérage sur l'intégralité de la droite graduée, on s'intéresse au repérage dans tout le plan.

Pour aborder sereinement ce chapitre, les élèves devront être à l'aise avec la notion de soustraction de nombres décimaux positifs, savoir repérer un point sur une demi-droite graduée et savoir comparer des nombres décimaux positifs.

Enfin, le calcul mental est privilégié pour que les élèves s'approprient bien la notion de nombre relatif, c'est pourquoi l'utilisation de la calculatrice est à éviter.

Activités

Questions flash

- 1. a.** Les coureurs partent de Tarbes.
b. Christopher Froome a parcouru environ 165 km.
c. Au bout de 90 km, les coureurs sont au niveau de la côte de Vielleségure.
d. La ville qui est entre 110 km et 120 km de Tarbes est Mauléon-Licharre.
e. Environ 20 km séparent Trois-Villes et Arette.

Cet exercice permet de revoir le repérage sur une demi-droite graduée, il n'est pas nécessaire ici de parler de l'abscisse d'un point qui sera revue dans l'Activité 2.

- 2.** Joe (1,52 m ou 152 cm) – William (1,68 m ou 168 cm) – Jack (1,8 m ou 180 cm) – Averell (1,93 m ou 193 cm)

Cet exercice est l'occasion de revoir la comparaison des nombres décimaux. On peut, par exemple, convertir les tailles en centimètre avant de les comparer et ensuite rappeler la comparaison des nombres décimaux.

On peut aussi conseiller aux élèves en difficulté d'ajouter des 0 afin que chaque nombre ait le même nombre de chiffres après la virgule avant de les comparer.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir de nouveaux nombres, les nombres négatifs, et d'amener les élèves à faire des soustractions dont certaines étaient jusqu'alors impossibles.

En préambule de l'activité, on peut demander aux élèves s'ils connaissent des situations de la vie quotidienne dans lesquelles interviennent des nombres négatifs.

La capacité introduite est de connaître les nombres relatifs. Le travail se fera plutôt de manière individuelle mais les élèves en difficulté pourront demander de l'aide à leurs camarades.

- 1. a.** La température descend de 4°C en dessous de 0, il fait donc -4°C .

De manière très intuitive, les élèves diront qu'il fait -4°C . On peut leur faire remarquer que $0 - 4 = -4$; -4 est donc le résultat de la soustraction $0 - 4$. C'est un nombre plus petit que 0.

- b.** Pierre arrive 3 étages sous le sol, c'est au -3 .

Remarque identique à la question **a.** : écrire $0 - 3 = -3$.

- c.** $12\,000 - 5\,000 = 7\,000$. L'avion sera à 7 000 pieds.

- d.** $0 - 100 = -100$. Jules César est né en -100 .

- e.** $53 - 18 = 35$. Il reste 35 € à Roméo.

- f.** $110 - 150 = -40$. Le spéléologue est à -40 m.

On peut demander aux élèves ce que signifie -40 m et comment on fait pour calculer $110 - 150$.

Après leur avoir demandé les stratégies adoptées pour faire ce calcul, on pourra leur faire remarquer, par exemple : $110 - 110 - 50 = 0 - 50 = -50$.

Conclusion : on peut généraliser en disant que les nombres négatifs sont tous les nombres plus petits que 0. On peut alors parler des nombres relatifs, qui regroupent l'ensemble de tous les nombres positifs et de tous les nombres négatifs.

- 2.** Les nombres négatifs sont les nombres $-4 ; -2 ; -100$ et -40 . On les repère grâce au signe « $-$ » placé devant.

On peut demander aux élèves de comparer alors les différents statuts du signe « $-$ » :

- le signe opératoire signifiant la soustraction ;
- le signe « $-$ » devant un nombre négatif.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{3. A = 0 - 9 = -9} & \mathbf{B = 0 - 8 = -8} \\ \mathbf{C = 3 - 10 = -7} & \mathbf{D = 5 - 12 = -7} \\ \mathbf{E = 10 - 11,2 = -1,2} & \end{array}$$

On pourra refaire ce type de calcul tout au long du chapitre (en début d'heure, par exemple).

En synthèse de cette activité : on vient de découvrir de nouveaux nombres : les nombres négatifs.

Un nombre négatif est un nombre plus petit que 0, il est précédé du signe « $-$ ».

Les nombres relatifs sont l'ensemble des nombres positifs et des nombres négatifs.

Grâce aux nombres négatifs, toutes les soustractions sont maintenant possibles.

Le signe « $-$ » a maintenant deux significations :

- le signe « $-$ » de la soustraction ;
- le signe « $-$ » pour préciser qu'un nombre est négatif.

Sur la route

Activité 2

Intentions des auteurs

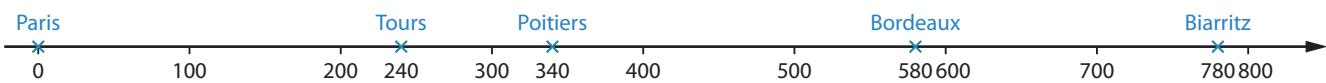
L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de demi-droite graduée et d'abscisse d'un point.

On pourra insister sur le fait de bien adapter les graduations aux nombres à placer.

Les prérequis nécessaires sont de savoir placer un point sur une demi-droite graduée.

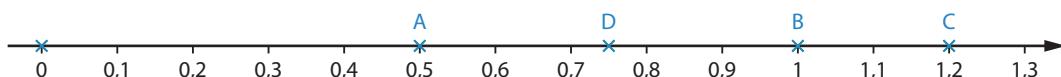
La capacité introduite est de repérer un point sur une droite graduée et choisir une graduation adaptée.

- 1.** On pourra choisir 2 cm pour 100 km.



C'est le moment de rappeler aux élèves le vocabulaire : origine, unité, graduation, abscisse.

- 2.** On peut prendre, par exemple : 1 cm pour 0,1.



Pour placer le point C, on peut rappeler aux élèves que $1,2$ est égal à $1 + \frac{2}{20}$; d'où la nécessité de partager l'unité en 10 parties égales.

Synthèse : rappeler encore une fois le vocabulaire (origine, unité, graduation, abscisse).

On pourra insister sur les graduations adaptées aux points à placer.

Intentions des auteurs

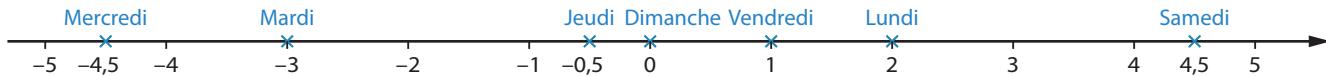
L'objectif de cette activité est de savoir repérer un nombre relatif sur une droite graduée et comparer les nombres relatifs. Les prérequis nécessaires sont de savoir placer un point sur une demi-droite graduée et de savoir comparer les nombres positifs. La capacité introduite est de comparer les nombres relatifs.

- On classe les températures dans l'ordre croissant :

$$-4,5 < -3 < -0,5 < 1 < 2 < 4,5.$$

On peut rappeler le sens de l'ordre croissant. Le travail individuel doit être assez rapide. Avant de passer à la question suivante, on peut demander aux élèves quel est le nombre le plus petit.

- On place chaque point sur la droite graduée ci-dessous :



- Sur une droite graduée, les points sont placés dans le même ordre que leurs abscisses.
- Les nombres positifs sont supérieurs aux nombres négatifs.
Si deux nombres sont positifs le plus grand est celui qui est le plus éloigné de zéro.
Au contraire, si deux nombres sont négatifs, le plus grand est celui qui est le plus proche de zéro.

Synthèse : grâce aux nombres relatifs, on peut maintenant graduer l'intégralité de la droite.
Le zéro est au centre des nombres, il sépare les nombres positifs des nombres négatifs.
Les points et leurs abscisses sont rangés dans le même ordre, on peut maintenant les comparer.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir le repérage d'un point dans le plan.
Les prérequis nécessaires sont de savoir repérer un point sur une droite graduée.
La capacité introduite est de repérer un point dans le plan.

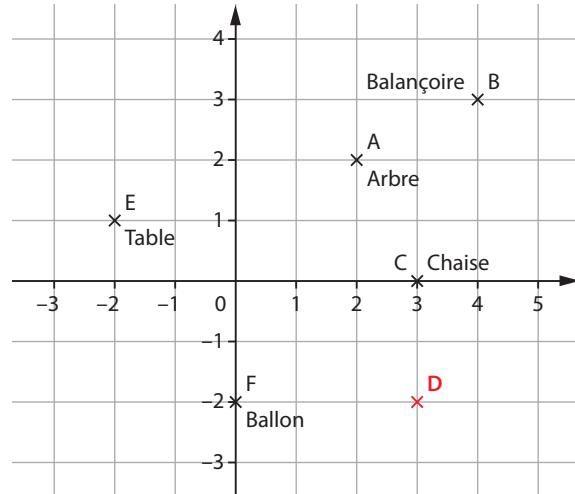
- Plusieurs solutions sont possibles : le point A est deux carreaux à gauche du zéro et 2 carreaux au-dessus de l'axe...
Pour le point B, 4 carreaux à gauche puis 3 carreaux vers le haut.

Les élèves doivent travailler de manière individuelle pour pouvoir comparer les différentes idées et discuter des méthodes de chacun et de probables ambiguïtés.
Dans le cas de A, l'ordre dans lequel on donne les coordonnées n'a pas d'importance, mais c'est différent dans le cas de B.
On garde ensuite les élèves qui ont utilisé les coordonnées pour rebondir et motiver la convention choisie dans la question 2.

- C a pour coordonnées (3 ; 0), E(-2 ; 1) et F(-0 ; -2).

On peut demander ici quelle est l'abscisse d'un point donné, l'ordonnée d'un point donné, trouver un point d'abscisse donné, d'ordonnée donnée, trouver deux points qui ont la même abscisse ou la même ordonnée.

- On place le point D(3 ; -2).



Synthèse : pour repérer un point dans le plan on utilise des coordonnées.

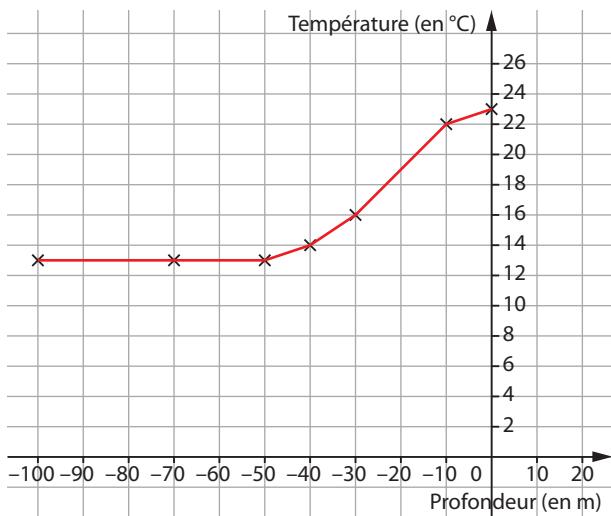
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser un repère du plan pour représenter des données et interpréter les résultats.
La capacité introduite est de savoir repérer un point dans le plan.

- On peut choisir 1 cm pour 10 m en abscisse et 1 cm pour 2 °C en ordonnée, par exemple.

On peut proposer aux élèves de travailler en groupe pour échanger sur le choix des unités.
Si certains semblent un peu perdus, on peut les aiguiller en leur disant que les unités peuvent être différentes et essayer de voir quelle sera l'unité la plus adaptée selon la grandeur à placer.

Voir le graphique ci-après.



2. En dessous de -50 m , la température est stable.

On peut montrer aux élèves qu'ici le graphique nous donne une bonne évolution visuelle de la température de l'eau en fonction de la profondeur.

Exercices

Connaitre les nombres relatifs

Questions flash

1. Les villes où la température est négative sont : Strasbourg ($-0,6\text{ }^{\circ}\text{C}$), Dijon ($-0,4\text{ }^{\circ}\text{C}$), Aurillac ($-0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$), Bourg-Saint-Maurice ($-3,3\text{ }^{\circ}\text{C}$).
2. 1. Rome a été fondée en 753 avant J.-C.
2. À bord du Nautilus, le capitaine Némo est descendu 20 000 m en dessous du niveau de la mer.
3. L'altitude de la mer Morte est 410 m sous le niveau de la mer.
4. Le résultat de la différence $8 - 12$ est -4 , le résultat est négatif, c'est un nombre plus petit que zéro.
5. Le zéro absolu est la température théorique la plus basse qui puisse exister. Elle vaut $273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ en dessous de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
3. April appuie sur le 10, Zoé sur le -2 , Nolan sur le -5 et Héloïse sur le 3.
4. 1. Non, car Mathieu ne peut pas boire plus de 75 cl. Or $1\text{ L} = 100\text{ cl}$ donc 1 L est supérieur à 75 cl.
2. Oui, car une température peut être inférieure à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
3. Non, car Mathis ne peut pas donner plus de bonbons qu'il n'en a : il a 5 bonbons, il ne peut pas en donner 6.
4. Oui, car Auguste peut être né avant J.-C.
5. Même si toutes les soustractions sont possibles, toutes ne permettent pas de répondre à un problème. Il faut bien faire attention à la cohérence entre le résultat et la situation.

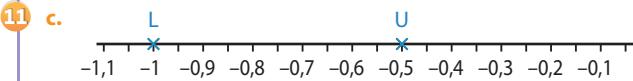
$$8 - 15 = \boxed{7}$$

$$2 - 8 = \boxed{-6}$$

$$3 - 3 = \boxed{0}$$

$$12 - 6 = \boxed{6}$$

$$21 - 14 = \boxed{-7}$$



6

	Nombre de buts marqués	Nombre de buts encaissés	Différence de buts
Équipe A	8	6	2
Équipe B	3	4	-1
Équipe C	10	8	2
Équipe D	6	6	0
Équipe E	7	9	-2

Repérer un point sur une droite graduée

Questions flash

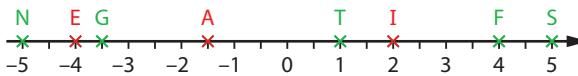
7. A(1) ; B(-3) ; C(2,5) ; D($-0,5$) ; E($-3,5$).

8. A(1) ; B(-2) ; C(0,5) ; D($-1,4$) ; E($-0,3$).

9. A(-10) ; B(-30) ; C(-40) ; D(-14) ; E(-24).

10. 1. E(-4), A($-1,5$), I(2).

2.



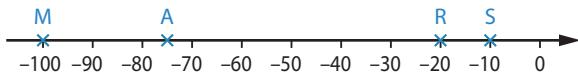
11.

Dans cet exercice, insister pour que les élèves choisissent des graduations bien adaptées aux points qu'ils placent.

a.



b.



c. Voir en bas de page.

12. 1. et 3.



2. L'abscisse du point L est -20 , l'abscisse du point N est 15 .

Comparer des nombres relatifs

Questions flash

13. a. $-12 < 0$
c. $-3 > -4$

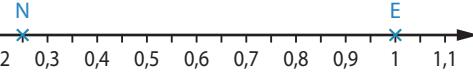
b. $-1,2 > -3$
d. $-1,2 < -1,19$

14. Julia a tort car, par exemple, $-0,5$ est supérieur à -1 et $-0,5$ est négatif.

15. 1. -15 2. -4 3. $-4 < -3,4 < -3$

16. Le garçon a raison car pour les nombres positifs le nombre le plus grand est celui qui a la plus grande distance à 0 (donc celui qui est le plus éloigné de 0). La fille a tort car pour les nombres négatifs le plus grand est celui qui a la plus petite distance à 0 donc celui qui est le plus proche de 0.

17. $-3,3 < -2,4 < -0,1 < 0 < 5,1 < 5,8 < 6,5$



18. a. $-4,04 < 4$
c. $0 > -57$
e. $-0,001 > -0,0001$

- b. $3,051 > -3,05$
d. $-312 > -321$
f. $1,2 > 1,18$

19. Thalès (-625) - Pythagore (-580) - Archimède (-287) - Euclide (-275)

20. a. $1,3 < 2 < 2,7$

- b. $-2,7 < -2 < -1,03$
c. $-8,2 < -8 < -7,8$
e. $0,5 < 1 < 1,2$

- f. $-0,1 < 0 < -1,9$

- a. $2 < 2,8 < 3$

- b. $-3 < -2,8 < -2$

- c. $-4 < -3,5 < -3$

- d. $25 < 25,7 < 26$

21. 1. $-5 ; -5,8 ; -4,7$

2. Oui... $-5,2$.

3. Non, il y en a une infinité.

Repérer un point dans le plan

Questions flash

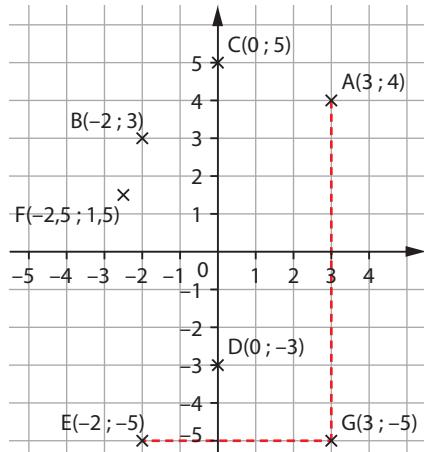
23. $F(1 ; -1) ; L(0 ; 2) ; E(-1 ; 0) ; U(0 ; 3) ; R(1 ; 5) ; S(-1 ; 4)$.

24. 1. Faux, 4 est l'ordonnée.

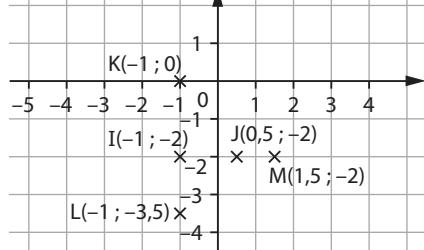
2. Vrai.

3. Vrai, le point de coordonnées $(3 ; 3)$, par exemple.

25.



26. 1.

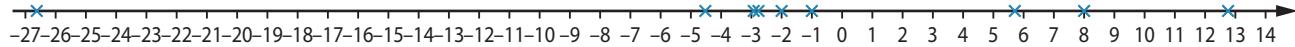


2. I, J et M sont alignés.

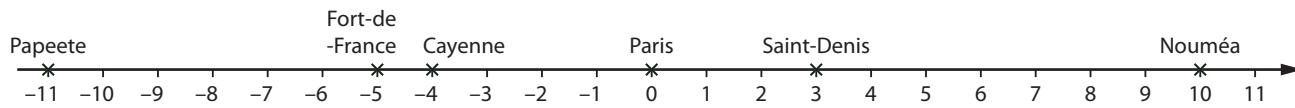
3. K, I et L sont alignés.

30. 2.

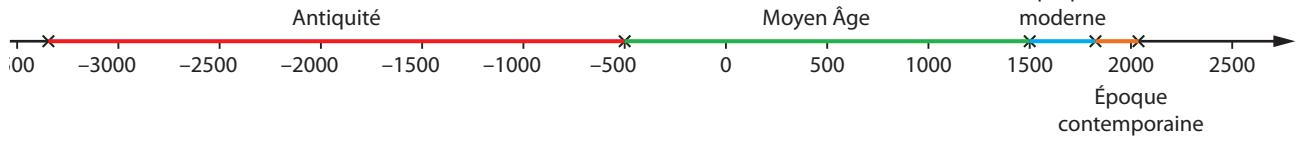
S



31. 2.

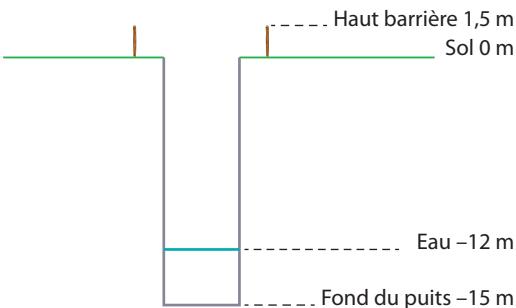


32.



Problèmes

27. Le puits



28. Évolution de population

- Le graphique représente l'évolution de la population française et de la population allemande de 1995 à 2011.
- La population française n'a pas baissé entre 1995 et 2011.
- C'est en 2005 que la population française a le plus augmenté.
- En 2010, l'Allemagne a perdu 200 000 habitants.
- La population allemande a baissé en 1999 et de 2005 à 2011.

29. Rome

Les nombres possibles sont : $-751, -752, -753, -754, -755, -756, -757, -758, -759$.

Le seul nombre dont la somme des chiffres est égale à 15 est -753 .

Rome a été fondée en -753 .

30. Ça brille !

- L'astre le plus brillant est le Soleil ($-26,7$), l'astre le moins brillant est Neptune.
- Voir en bas de page.

31. Décalage horaire

1.

Ville	Heure de Paris	Heure locale	Décalage horaire
Fort-de-France	10 h 00	5 h 00	-5
Saint-Denis	11 h 30	14 h 30	3
Nouméa	12 h 00	22 h 00	+10
Cayenne	9 h 00	5 h 00	-4
Papeete	8 h 00	21 h 00 (la veille)	-11

2. Voir en bas de page.

3. Fort-de-France est une graduation avant Cayenne donc le décalage horaire entre Fort-de-France et Cayenne est de $-1 h 00$.

4. Papeete est 21 graduations avant Nouméa donc le décalage horaire entre Papeete et Nouméa est de $-21 h 00$.

32. Histoire

Voir en bas de page.

33 Très chaud ou très froid

Un thermomètre à mercure permet de mesurer des températures allant de -38°C à $+356^{\circ}\text{C}$.
Avec un thermomètre à alcool on peut mesurer des températures allant de -112°C à $+78^{\circ}\text{C}$.

1. L'eau bout à 100°C .

$-38 < 100 < 356$, il faut donc prendre un thermomètre à mercure.

2. $-112 < -67,8 < 78$, il faut utiliser le thermomètre à alcool.

3. On peut mesurer cette température avec un thermomètre à alcool car $-93,2^{\circ}\text{C}$ est supérieur à -112°C .

34 Qui a tué Jules César ?

Cléopâtre est une femme.

Cicéron est né en -106 , donc avant Jules César (-100).

Vercingétorix est mort en -46 , avant Jules César (-44).

Ces trois personnages n'ont pas pu assassiner Jules César.

C'est donc Marcus Junius Brutus et Caius Cassius Longinus qui ont assassiné Jules César : tous les deux sont nés après Jules César, ils sont donc plus jeunes que lui et ils sont morts après Jules César.

35 La bourse

- Les entreprises qui ont vu leurs actions monter sont Carrefour (+2,2 %), Danone (+1,9 %) et Orange (2,27 %).
- Les entreprises qui ont vu leurs actions baisser sont EDF (-0,8 %), L'Oréal (-1,12 %), LVMH (-2,74 %) et Veolia (-1,88 %).
- Orange (2,27 %) - Carrefour (2,2 %) - Danone (1,9 %) - EDF (-0,8 %) - L'Oréal (-1,12 %) - Veolia (-1,88 %) - LVMH (-2,74 %).

36 Vénus

- La Vénus de Brassempouy a été sculptée en -22000 donc bien avant l'antiquité (-3500). Elle ne peut donc pas être une représentation de Vénus.
- Vénus de Brassempouy (-22000) - Aphrodite sur son cygne (-460) - Vénus de Milo (-100) - La Naissance de Vénus (1499).

37 Qui suis-je ?

GABRIEL

38 Émissions de CO₂

- En 1990, les habitants qui polluent le plus sont les Américains (19,2 tonnes de CO₂ par habitants), ceux qui polluent le moins sont les Chinois (1,9 tonne de CO₂ par habitants).
- En 2013, les habitants qui polluent le plus sont les Américains (16,2 tonnes de CO₂ par habitants), ceux qui polluent le moins sont les Français (4,8 tonnes de CO₂ par habitants).
- Allemagne - France - États-Unis - Japon - Chine
- Non, car les Chinois polluent moins que les Américains mais l'évolution de leurs émissions de CO₂ est bien plus importante : +224,5 % pour les Chinois, -15,7 % pour les Américains.
- Moins de chauffage, moins de voiture...

39 What time?

$$8 + 11,5 - 9 = 10,5$$

It will be 10 h 30 min.

40 Course cycliste

1. Il a mis 2 h 43 min et 53 s pour finir son étape.

$$2 \text{ h } 45 \text{ min } 23 \text{ s} - 1 \text{ min } 30 \text{ s} = 2 \text{ h } 43 \text{ min } 53 \text{ s}$$

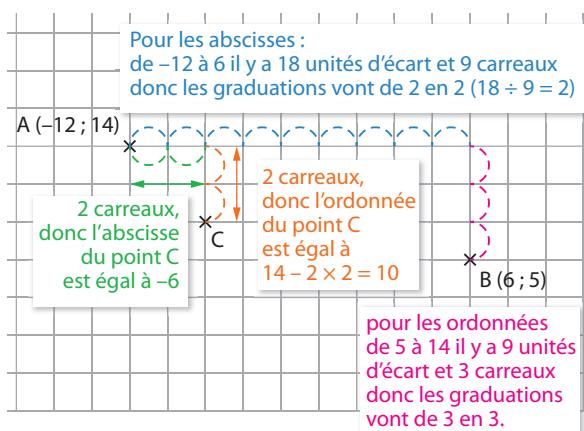
2. 2 h 50 min 52 s - 2 h 45 min 23 s = 5 min 39 s.

Son chronomètre affiche 5 min 39 s.

41 Coordonnées GPS

- Le Cap.
- La ville sur l'axe des ordonnées est Londres, ses coordonnées sont environ (0 ; 52).
- La ville sur l'axe des abscisses est Nairobi, ses coordonnées sont environ (38 ; 0).
- Les villes dont les ordonnées sont négatives sont Rio, Le Cap et Sidney, elles se situent dans l'hémisphère sud.
- Rio de Janeiro ($-40 ; -20$).
- L'équateur et le méridien de Greenwich.

42 Coordonnées ?



L'objectif est de résoudre cet exercice de manière intuitive sans parler de calcul de distance entre deux points qui sera introduite au chapitre suivant.

43 Où est la tortue ?

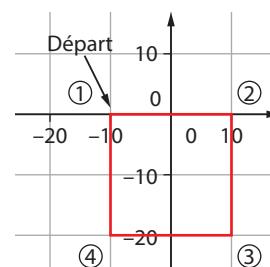
Le but de l'exercice est de se repérer dans un repère tout en matérialisant des déplacements donnés par des instructions simples de programmation.

1. a. La figure tracée par la tortue a 4 côtés de même longueur (20) et 4 angles droits. Donc c'est un carré de côté 20.

On pourra bien faire le lien entre les instructions et les propriétés mathématiques de la figure.

b.

On pourra amener les élèves à utiliser un repère pour matérialiser les déplacements puis en lire les coordonnées de chaque point.



Étape ① ($-10 ; 0$) ; étape ② ($10 ; 0$) ; étape ③ ($10 ; -20$) ; étape ④ ($-10 ; -20$).

c. Clémence a répété 4 fois la même instruction donc elle peut utiliser la boucle REPETE 4 fois.

REPETE 4 AV 20 TD 90

2. • Elle commence par placer la tortue à l'origine du repère.

POUR MAISON

ORIGINE

• Elle peut commencer par la fenêtre, en positionnant la tortue au niveau de la fenêtre, puis tracer le carré :

LC AV 10

BC

REPETE 4

AV 10 TG 90

- Elle peut ensuite positionner la tortue en (10 ; 30) pour tracer les murs.

LC AV 10
TD 90 AV 10
BC
REPETE 4
TD 90 AV 50

- Elle peut ensuite amener la tortue en (-20 ; -20) pour tracer la porte.

LC
TD 90 AV 50
TD 90 AV 30
BC
TD 90 AV 20
TG 90 AV 10
TG 90 AV 20
FIN

Il existe une commande FPOS[-20 -20] pour amener directement la tortue en (-20 ; -20) ; il est possible de proposer aux élèves de reprendre le programme en utilisant cette commande.

44 Laser Quest

- Bilan des points

PRÉNOMS	POINTS MARQUÉS	POINTS PERDUS	TOTAL
Anton	148	173	-25
Abibatou	192	163	29
Lily	161	175	-14
Saïda	145	122	23
Andréa	113	130	-17
Sarah	98	125	-27
Louis	200	125	75

- Classement avant bonification

Louis (+75) - Abibatou (+29) - Saïda (+23) - Lily (-14) - Andréa (-17) - Anton (-25) et Sarah (-27).

- Répartition des bonifications

Louis est premier donc bénéfice de +20 points, il a donc 95 points.

Abibatou est deuxième donc bénéficie de +15 points, elle a donc 44 points.

Saïda est troisième donc bénéficie de +10 points, elle a donc 33 points.

Sarah est dernière, donc bénéficie de +5, elle a donc -22 (addition intuitive).

- Répartition des récompenses

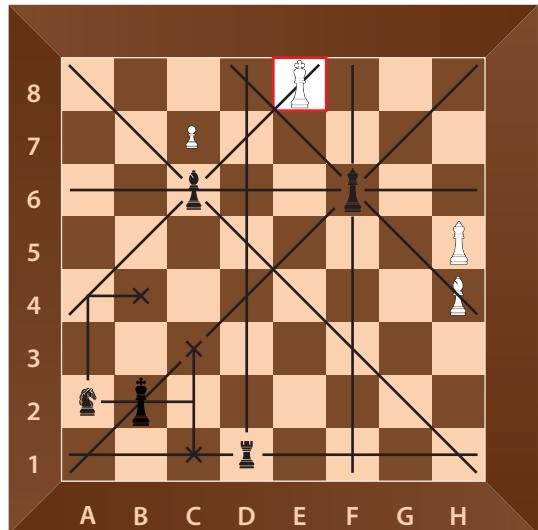
Louis qui a 95 points (score supérieur à 75) aura 2 entrées gratuites.

Abibatou et Saïda (scores compris entre 20 et 50 points) auront -5 € sur leur prochaine partie.

Anton (-25 points) et Sarah (-22 points) ont moins de -20 points et auront une entrée gratuite.

45 Échec et Mat

Les élèves doivent commencer par reproduire le repère et placer les pièces sur l'échiquier en fonction de leurs coordonnées, puis repérer les différents déplacements de chaque pièce.



Le roi est échec et mat, ce qui signifie qu'il peut être mangé par une pièce et qu'il n'a aucun moyen de s'échapper au tour suivant, il est donc cerné de toute part.

Sachant qu'il ne peut pas être une case à côté de la reine car il pourrait la manger et être sauvé, la seule possibilité qui reste est la case E8.

Algorithmique et outils numériques

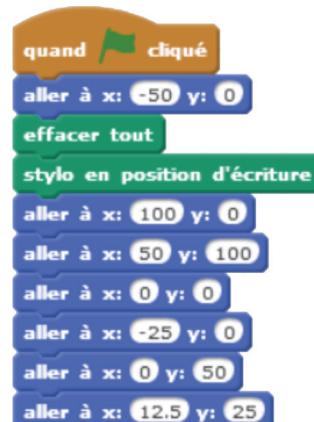
46 Logo

1.



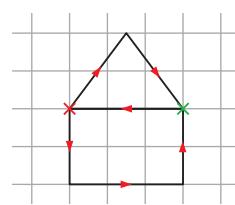
La figure tracée est un triangle isocèle.

2.



47 Méli-mélo

1. Pour tracer la figure sans tracer deux fois le même segment, il faut partir des points rouges ou verts.



2.

quand cliqué

aller à x: 0 y: 0

effacer tout

stylo en position d'écriture

aller à x: 150 y: 0

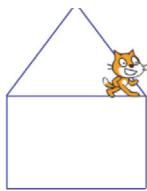
aller à x: 75 y: 100

aller à x: 0 y: 0

aller à x: 0 y: -100

aller à x: 150 y: -100

aller à x: 150 y: 0

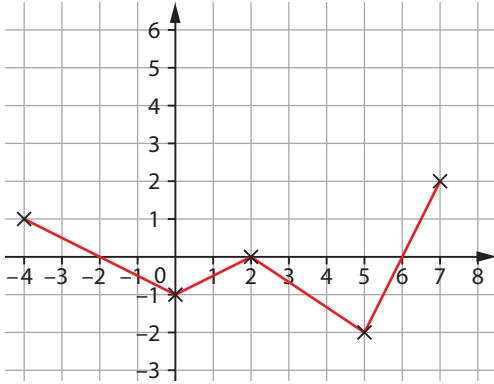


Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Les graduations ont la même valeur dans les deux exercices mais elles sont plus explicites dans le premier exercice.

48 Cassiopée

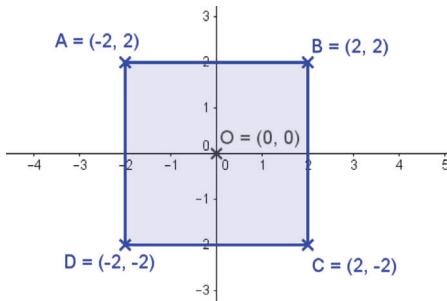


Il faut placer les points de coordonnées $(-4 ; 1)$; $(0 ; -1)$; $(2 ; 0)$ et $(7 ; 2)$.

49 Symétriques

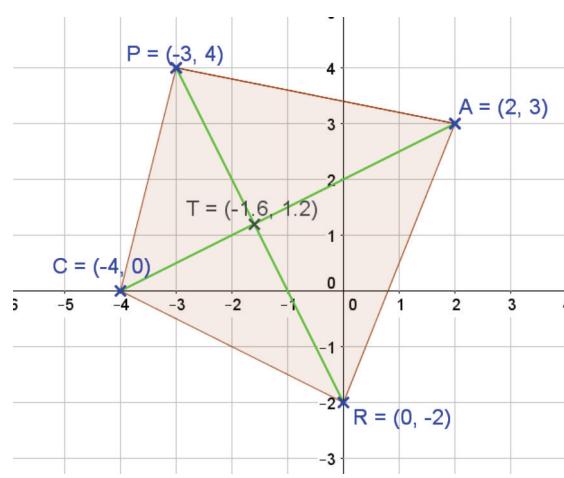
On pourra insister sur le fait qu'il est possible de placer les points directement si on affiche la grille ou bien que l'on peut utiliser le cadre de saisie pour placer les points.

1. à 5.



6. ABCD est un carré.

50 Chasse au trésor



Les coordonnées exactes du trésor sont $(-1,6 ; 1,2)$.

Exercice 1

- Chaque graduation principale vaut 1.
A(5) ; B(-4) ; C(-1) ; D(2,5).
- Chaque graduation vaut 0,1.
A(0,5) ; B(-0,4) ; C(-0,1) ; D(0,2).
- Chaque graduation vaut 0,25.
A(1,25) ; B(-1) ; C(-0,25) ; D(0,75).

Exercice 1

- Chaque graduation vaut 1.
A(5) ; B(-4) ; C(-1) ; D(2,5).
- Chaque graduation vaut 0,1.
A(0,5) ; B(-0,4) ; C(-0,1) ; D(0,2).
- Chaque graduation vaut 0,25.
A(2,25) ; B(-4) ; C(-3,25) ; D(1,75).

Exercice 2

Rappeler si besoin la définition du classement dans l'ordre croissant.

On commence par classer les nombres négatifs (le plus petit est le plus éloigné de 0), puis les positifs.

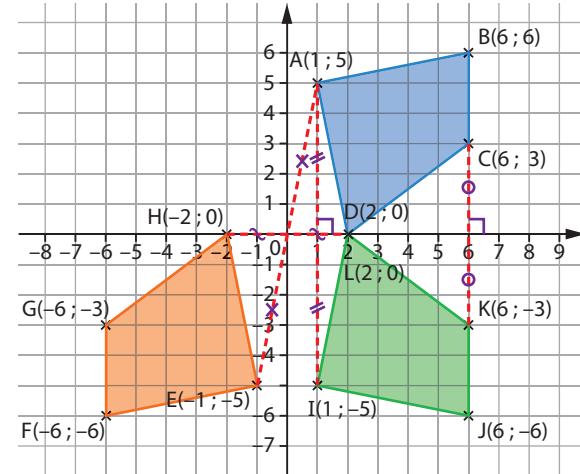
$$-5 < -3,2 < -1,5 < 0 < 2,5 < 3,9$$

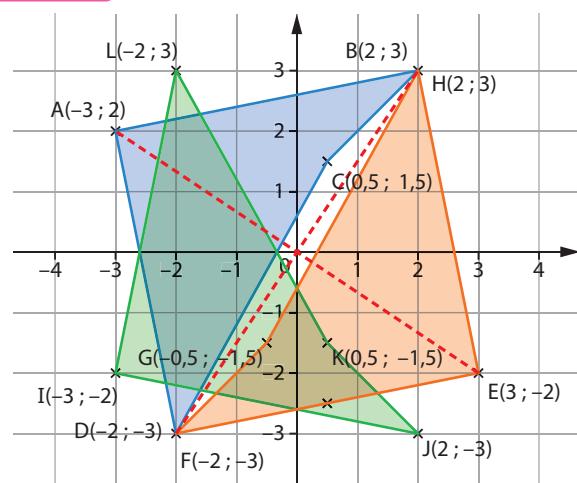
Exercice 2

Écrire tous les nombres avec deux chiffres après la virgule permet de visualiser le classement plus rapidement.

$$-0,35 < -0,30 < -0,25 < -0,08 < 0,30 < 0,45 < 0,80$$

Exercice 3



Exercice 3**Travail en binôme**

Il est possible aussi de jouer la classe entière contre l'enseignant : les élèves élaborent la grille à deux, ce qui leur permet aussi de s'autocorriger en cas d'erreur. L'enseignant gagne s'il a coulé cinq binômes, la classe gagne si elle coule l'enseignant.

Analyse d'une production

- Louise a mal classé les nombres négatifs, elle a considéré que le plus petit était le plus proche de 0.
De plus, elle les a plutôt classés dans l'ordre croissant.
- $10 > 4,9 > 3,5 > 1,2 > 0 > -1,5 > -5 > -10$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances associées sont :

- le calcul avec des nombres relatifs en écriture décimale (somme, différence, produit et quotient) ;
- la notion d'opposé ;
- rencontrer des nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes.

Repère de progressivité

- La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendés au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.
- Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé.
- L'introduction des nombres décimaux relatifs au cycle 4 a notamment pour objectif d'accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « en dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes...).

Lien avec les domaines du socle

- La compréhension des nombres négatifs en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons, la perception de l'extension de l'ensemble des décimaux positifs à celui des décimaux relatifs, la compréhension de l'écriture des nombres négatifs et de leur représentation sur la droite graduée contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

- L'utilisation des nombres relatifs pour modéliser des grandeurs physiques (température, profondeur, altitude) ou sociales (dates, gains et pertes) susceptibles de prendre des valeurs en dessous de zéro contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4) ainsi qu'aux représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

Objectifs du chapitre

- Dans ce deuxième chapitre du cycle sur les nombres relatifs, on introduit l'addition et la notion d'opposé (dire que l'opposé du nombre a est le nombre $-a$ sera vu dans le chapitre 7 avec la multiplication par -1). Une fois ces deux notions bien maîtrisées, il est possible de passer à la soustraction et son application aux calculs de distances sur une droite graduée.

Même si la simplification d'écriture n'est pas clairement exprimée dans ce chapitre, on peut au fil du temps amener les élèves à simplifier les écritures en ne conservant que les signes d'opérations sauf dans le cas où le premier terme de la somme est négatif. Pour plus d'intérêt, les problèmes qui nécessitent d'effectuer des successions d'additions et de soustractions sont à travailler dans ce sens pour amener les élèves à trouver des méthodes efficaces pour effectuer ce type de calculs (regroupement des nombres de même signe, neutralisation des opposés).

Enfin, le calcul mental est privilégié, les élèves doivent automatiser au maximum le calcul avec les nombres relatifs (tout au long de l'année), c'est pourquoi on pourra éviter l'utilisation systématique de la calculatrice.

- Les prérequis pour aborder ce chapitre sont :
 - connaître la définition des nombres relatifs ;
 - savoir repérer et se repérer sur une droite graduée ;
 - connaître la symétrie axiale et la symétrie centrale ;
 - être à l'aise avec l'enchaînement d'opérations.

Activités

Questions flash

- 1. a.** • À 6 h, la température est négative.
• À 10 h, il fait 0 °C (positif et négatif).
- À 17 h, la température est positive.
b. À 8 h, il fait –3 °C et à 12 h il fait 3 °C.
- c. La température la plus haute est 6 °C à 17 h.
- d. La température la plus basse est –3 °C à 8 h.

2. On lit les abscisses des points sur la droite graduée : D(–0,8) ; R(–0,55) ; O(–0,4) ; I(0,1) ; T(0,2) ; E(0,5) ; S(0,65).

Cet exercice est l'occasion de reparler rapidement du vocabulaire (droite graduée, origine, abscisse...).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la somme de deux nombres relatifs puis la somme de plusieurs nombres relatifs. Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion de nombres relatifs. La capacité introduite est d'additionner des nombres relatifs.

L'activité est assez longue mais elle permet aux élèves de bien s'approprier la somme de deux nombres relatifs, puis de plusieurs nombres relatifs. On pourra faire le point régulièrement et corriger l'activité question par question. La question 5. (somme de plusieurs nombres relatifs) pourra même être traitée ultérieurement, une fois les automatismes de l'addition de deux nombres bien ancrés.

1. a.

Cette première question met en place l'activité et la somme de deux nombres relatifs par des notions de perte et de gain. Sans écrire aucun calcul, les élèves seront capables de dire combien les enfants perdent ou gagnent de points.

	Nina	Valentin	Roméo	Cali	Pablo	Leïla	Djamel
Lancer de dés							
Bilan	perd 1 gagne 4 gagne 3	perd 5 perd 2 perd 7	gagne 2 perd 3 perd 1	gagne 6 perd 1 gagne 5	perd 5 gagne 6 gagne 1	gagne 2 gagne 4 gagne 6	perd 3 perd 5 perd 8

b. Djamel, Valentin, Roméo, Pablo, Nina, Cali et Leïla.

2.

Ici, les élèves devront faire le lien entre la notion de perte et de gain et les nombres relatifs.

	Nina	Valentin	Roméo	Cali	Pablo	Leïla	Djamel
Lancer de dés	$(-1) + 4$	$-5 + (-2)$	$2 + (-3)$	$6 + (-1)$	$-5 + 6$	$2 + 4$	$-3 + (-5)$
Bilan	3	-7	-1	5	1	6	-8

3.

Pour répondre à ces deux questions, les élèves sont amenés à tester de nombreux calculs, et ils devront mettre en place une stratégie pour additionner deux nombres relatifs s'ils veulent être efficaces.

a. Il faut trouver deux nombres dont la somme est égale à 5 : $6 + (-1) = 5$.

b. Il faut trouver deux nombres dont la somme est -6.

$$-5 + (-1) = -6 ; -3 + (-3) = -6.$$

4.

Une fois le travail précédent terminé, les élèves pourront donner leur méthode de calcul. Il faudra la formaliser clairement avec toute la classe.

• Si deux nombres relatifs ont le même signe, on ajoute les distances à zéro, le résultat est du signe des deux nombres.

• Si deux nombres relatifs sont de signes contraires, on soustrait les distances à zéro, le résultat est du signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

5. Cette dernière question met en place l'addition de plusieurs nombres relatifs. Elle peut être traitée plus tard si on veut.

	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Bilan
Nina	+3	-4	-6	+4	-8	$3 + (-4) + (-6) + 4 + (-8) = 7 + (-18) = -11$
Roméo	-2	+6	+2	-3	-1	$-2 + 6 + 2 + (-3) + (-1) = 8 + (-6) = 2$
Leïla	+3	-8	-2	+12	-1	$3 + (-8) + (-2) + 12 + (-1) = 15 + (-11) = 4$

a. Leïla a le plus de points.

b.

Avant la correction, repérer les différentes méthodes des élèves et en choisir 2 ou 3, pour que le choix de la stratégie la plus efficace soit débattu avec la classe.

Pour calculer une succession d'additions avec les nombres relatifs, on regroupe les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux.

Pour le moment, les nombres opposés n'ont pas été évoqués. Si certains élèves font la remarque en disant que $(-4) + 4 = 0$, on peut leur répondre que c'est une bonne remarque et que ce cas particulier sera abordé dans la prochaine activité.

Ça s'annule

Activité 2

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir et formaliser la notion de nombres opposés.

Les prérequis nécessaires sont le repérage sur une droite graduée et l'addition de nombres relatifs.

La capacité introduite est de reconnaître deux nombres opposés.

1.

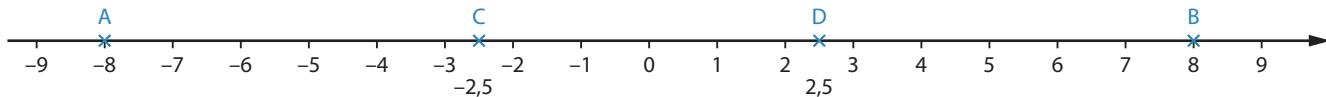
Pour ces deux questions, il n'est pas demandé d'écrire un calcul.

- a. Pierre a autant de billes que le matin...
 b. Il fait 0 °C.

2. a. $8 + (-8) = 0$; $-2,5 + 2,5 = 0$.

On précise ici que deux nombres dont la somme est égale à zéro sont des nombres opposés.

b.



Ici, on peut faire remarquer aux élèves que lorsque deux points ont pour abscisses deux nombres opposés alors ils sont symétriques par rapport à 0.

Les distances à zéro de deux nombres opposés sont donc égales.

En conclusion : deux nombres opposés ont la même distance à zéro et sont de signes contraires.

3. L'opposé de 2 est -2.

L'opposé de -6 est 6.

L'opposé de -5,8 est 5,8.

L'opposé de 7,9 est -7,9.

L'opposé de 6,2 est -6,2.

Jeu de cartes

Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir que soustraire un nombre revient à ajouter son opposé pour pouvoir ensuite soustraire les nombres relatifs en transformant toutes les soustractions en additions.

Les prérequis nécessaires sont l'opposé d'un nombre relatif, et additionner des nombres relatifs.

La capacité introduite est soustraire deux nombres relatifs.

Dans cette activité, l'idéal est de fabriquer les cartes, que l'on distribuera ensuite aux élèves qui travailleront en groupe (un jeu de cartes pour deux ou trois élèves).

1.

Certains feront la somme, et d'autres vont vite remarquer qu'à chaque carte correspond la carte avec le nombre opposé, la somme est donc égale à 0.

$$-7 + 6 + (-1) + (-4) + 7 + (-2) + 5 + 1 + 2 + (-6) + 4 + (-5) + 3 + (-3) = 0.$$

2. Si on enlève la carte +5, chaque carte a sa « carte opposée » sauf -5, donc la somme vaut -5.

3. Si on enlève la carte -3, chaque carte a sa « carte opposée » sauf +3, donc la somme vaut +3.

Si certains continuent à refaire le calcul de la somme totale, leur indiquer la remarque précédente.

Préciser aussi aux élèves que le fait d'enlever une carte revient à soustraire sa valeur à la somme de départ.

4. a. La somme vaut 6.

- b. La somme vaut -4.

- c. La somme vaut 3.

- d. La somme vaut 7.

5. Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Orléans-Bruxelles

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de relier la distance entre deux points et la différence de deux nombres relatifs.

Les prérequis nécessaires sont soustraire deux nombres opposés et repérer un nombre sur une droite graduée.

La capacité introduite est de calculer la distance entre deux points sur une droite graduée.

1. Jules a parcouru 120 km.

$$2. 320 - (-130) = 320 + 130 = 450.$$

Jules a parcouru 450 km au total.

Gâteau au chocolat

Activité 5

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'enchaîner les additions et les soustractions de nombres relatifs.

On pourra insister sur les méthodes de calcul : regrouper, regarder s'il y a des nombres opposés...

Les prérequis nécessaires sont additionner et soustraire les nombres relatifs.

La capacité introduite est d'enchaîner des additions et des soustractions de nombres relatifs.

$$1. 2 \times 2,5 + 2,25 + 1,60 + (2,10 - 0,5) + 0,4 \times 2 + 1,75 - 1,20.$$

$$2. A = 2 \times 2,5 + 2,25 + 1,60 + 2,10 - 0,5 + 0,4 \times 2 + 1,75 - 1,20 \\ = 5 + 2,25 + 1,60 + 2,10 + 0,8 + 1,75 - 0,5 - 1,20 \\ = 13,50 - 1,70 = 11,80.$$

Colette ne pourra pas acheter ce dont elle a besoin pour faire son gâteau.

Exercices

Additionner des nombres relatifs

Questions flash

- 1 A = $-3 + 8 > 0$
 B = $-5 + 5 = 0$
 C = $2 + 4 > 0$
 D = $8 + (-10) < 0$
 E = $-12,1 + (-8,7) < 0$
 F = $2,4 + (-2,5) < 0$

- 2 A = $4 + (-5) = -1$
 B = $12,3 + 4,9 = 17,2$
 C = $-8 + (-5) = -13$
 D = $-4 + 4 = 0$
 E = $21,9 + (-31) = -8,1$
 F = $-5,1 + 8,2 = 3,1$

3 A = $-2 + 3 + (-4) + 5$
 $= 3 + 5 + (-2) + (-4)$
 $= 8 + (-6)$
 $= -6$
 C = $0,5 + 2,1 + (-4) + 1,5$
 $= 2,1 + 0,5 + 1,5 + (-4)$
 $= 4,1 + (-4)$
 $= 0,1$

B = $3 + (-4) + (-7) + 4$
 $= 3 + 4 + (-4) + (-7)$
 $= 3 + (-7)$
 $= -4$

- 4 Agathe avance de 10 pas puis recule de 5 pas.
 Anthony plonge à 10 m, puis descend encore de 5 m.
 Charlotte mange 5 bonbons puis encore 10.
 Lors d'un jeu de hasard, Justine a gagné 5 € puis perdu 10 €.
-
- 5 A = $2,3 + 4,8 = 7,1$
 B = $-4,1 + (-5,4) = -9,5$
 C = $2,5 + (-1,8) = 0,7$
 D = $(-7,2) + 2,9 = -4,3$
 E = $-158 + (-87) = -245$
 F = $157 + (-278) = -121$

- 6 $-12 + 5 =$
 $-5 + (-12) =$
 $12 + (-5) =$
 $12 + 5 =$
-

- 7 a. $(-1) + 6 = 5$
 b. $8 + (-11) = -3$
 c. $(-5) + (-2) = -7$
 d. $3,2 + (-3,2) = 0$
 e. $(-3,2) + (-4,2) = -7,8$
 f. $5,4 + (-1,5) = 3,9$

- 8 a.
- | | | |
|----|----|----|
| | -1 | |
| 2 | | -3 |
| -3 | 5 | -8 |
- b.
- | | | |
|----|-----|----|
| | 12 | |
| 5 | 7 | |
| 22 | -7 | 14 |
| 37 | -15 | 8 |
| | 6 | |

- 9 a. $-5 + (-2) = -7$.
 b. $5 + (-8) = -3$.
 c. Impossible car la somme de deux nombres négatifs est positive.

10 Dans cet exercice, on pourra insister sur la méthode : regrouper les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux.

$$\begin{aligned} A &= (-3) + (-5) + 6 + (-1) + 12 + 8 \\ &= 6 + 12 + 8 + (-3) + (-5) + (-1) \\ &= 26 + (-9) \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 9 + (-5) + 6 + 9 + (-7) + (-2) \\ &= 9 + 6 + 9 + (-5) + (-7) + (-2) \\ &= 24 + (-14) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 0,1 + 0,5 + (-0,4) + 0,8 + (-0,6) \\ &= 0,1 + 0,5 + 0,8 + (-0,4) + (-0,6) \\ &= 1,4 + (-1) \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

11 Ici, on pourra insister sur le calcul astucieux : regrouper les positifs et les négatifs mais aussi des nombres particuliers pour faciliter le calcul mental.

$$\begin{aligned} A &= 0,4 + (-5) + (-2,5) + 5 + 1,6 \\ &= 0,4 + 1,6 + 5 + (-5) + (-2,5) \\ &= 7 + (-7,5) \\ &= -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-5,5) + 1,95 + 5,1 + (-1,5) + 0,05 + (-2,3) \\ &= 5,1 + 1,95 + 0,05 + (-5,5) + (-1,5) + (-2,3) \\ &= 7,1 + (-9,3) \\ &= -2,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 250 + (-425) + 150 + (-123) + (-75) + 38 \\ &= 250 + 150 + 38 + (-425) + (+75) + 38 \\ &= 438 + (-538) \\ &= -100 \end{aligned}$$

Reconnaitre deux nombres opposés

Questions flash

- 12 A = $6 + (-6) = 0$ B = $-4 + 5 \neq 0$
 C = $-12 + 12 = 0$ D = $3,5 + 3,5 \neq 0$
 E = $3 + (-3) = 0$ F = $(-2) + (-2) \neq 0$

- 13 L'opposé de -5 est 5.
 L'opposé de 6 est -6.
 L'opposé de -2,4 est 2,4.
 L'opposé de 3,8 est -3,8.
 L'opposé de 0 est 0.

- 14 1. Vrai.
 2. Faux, la somme de deux nombres opposés est égale à 0.
 3. Vrai, deux nombres opposés sont de signes contraires.
 4. Faux, ils doivent aussi être de signes contraires.

- 15 1. A(-3) et C(3) ont des abscisses opposées.
 2. A et C sont symétriques par rapport à O.
 3. L'abscisse du point E est l'opposé de l'abscisse du point B, c'est-à-dire 1.

Soustraire deux nombres relatifs

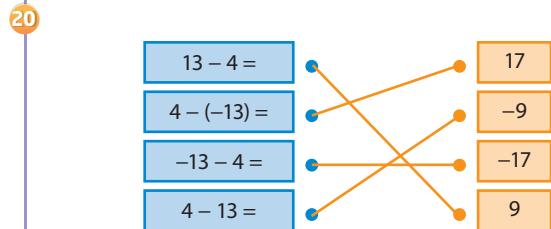
Questions flash

16 A = $5 - (-3) = 5 + 3$
 B = $10 - (+5) = 10 + (-5)$
 C = $-10 - (-5) = -10 + 5$
 D = $-2 - 4 = -2 + (-4)$
 E = $3 - 8 = 3 + (-8)$
 F = $7 - (-5) = 7 + 5$

17 A = $5 - 4 = 1$
 B = $10 - (-5) = 10 + 5 = 15$
 C = $-5 - 8 = -5 + (-8) = -13$
 D = $9 - 13 = 9 + (-13)$
 E = $-8 + 7 = -1$
 F = $6 - (-7) = 6 + 7 = 13$

18 a. AB = $4 - 1 = 3$
 b. OA = $1 - 0 = 1$
 c. OD = $0 - (-4) = 0 + 4 = 4$
 d. AC = $1 - (-2) = 1 + 2 = 3$
 e. DC = $-2 - (-4) = -2 + 4 = 2$
 f. BD = $4 - (-4) = 4 + 4 = 8$

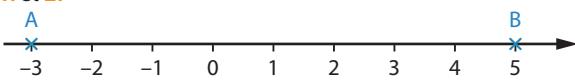
19 a. $3,2 - 5,35 = 3,2 + (-5,35) = -2,15$
 b. $8,1 - (+15) = 8,1 + (-15) = -6,9$
 c. $4,7 - (-5) = 4,7 + 5 = 9,7$
 d. $-120 - 56 = -120 + (-56) = -176$
 e. $-284 - (-45) = -284 + 45 = -239$
 f. $-0,06 - (3,4) = -0,06 + (-3,4) = -3,46$



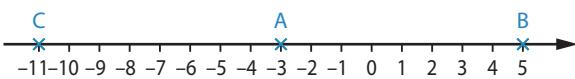
21 a. $-5 - 10 = -15$
 b. $3 - 5 = -2$
 c. $15 - (-3) = 18$
 d. $-21 - (-38) = 17$
 e. $3,2 - (-2,1) = 5,3$
 f. $-24,9 - 6,2 = -31,4$

22 a. AB = $1 - 0,2 = 0,8$
 b. OA = $1 - 0 = 1$
 c. OD = $0 - (-0,2) = 0,2$
 d. AC = $1 - (-0,5) = 1,5$
 e. BD = $0,2 - (-0,2) = 0,4$
 f. CD = $-0,2 - (-0,5) = 0,3$

23 1. et 2.



3. AB = $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.
 4. Le point C d'abscisse -11 est tel que AC = 8.



24

	Température basse (en °C)	Température haute (en °C)	Amplitude thermique
Lundi	3	17	14
Mardi	2	12	10
Mercredi	-2	8	10
Jeudi	-10	-1	9
Vendredi	-5	3	8
Samedi	0	3	3
Dimanche	-2	7	9

Enchaîner des additions et des soustractions de nombres relatifs

Questions flash

25 A = $3 + (-5) - (-3) + 5$
 A = $3 + (-5) + 5 + 3$
 A = $3 + 3$
 A = 6

B = $3 - (-5) + 3 + (-5)$
 B = $3 + 5 + 3 + (-5)$
 B = $3 + 3 + 5 + (-5)$
 B = 6

C = $-3 - 5 - (-3) - 5$
 C = $-3 + (-5) + 3 + (-5)$
 C = $3 + (-3) + (-5) + (-5)$
 C = -10

26 A = $-1 + 7 - 8 + 3$
 A = $-1 + 7 + (-8) + 3$
 A = $7 + 3 + (-1) + (-8)$
 A = $10 + (-9)$
 A = 1

B = $3 - (-7) - 8 + 3$
 B = $3 + 7 + (-8) + 3$
 B = $13 + (-8)$
 B = 5

27 1. a.
 A = $-2 + 3 - 8 - 5 + 10$
 A = $-2 + 3 + (-8) + (-5) + 10$
 A = $3 + 10 + (-2) + (-8) + (-5)$
 A = $3 + 10 - 2 - 8 - 5$

b. A = 13 - 15
 A = -2

2. B = $20 + 15 - 12 + 3 - 20$
 B = $15 + 3 + 20 - 20 - 12$
 B = $18 - 12$
 B = 6

C = $-36 - 24 + 41 + 58 - 1$
 C = $41 + 58 - 36 - 24 - 1$
 C = $99 - 61$
 C = 38

D = $0,7 - 3,5 + 2,5 - 8$
 D = $0,7 + 2,5 - 3,5 - 8$
 D = $3,2 - 11,5$
 D = -8,3

E = $-3,2 - 4 - 6,9 + 4$
 E = -10,1

28 A = $-3 + (-7) - (-3) + 8 - 5 + 10$
 A = $-3 + (-7) + 3 + 8 + (-5) + 10$
 A = $8 + 10 + (-7) + (-5)$
 A = $18 + (-12)$
 A = 6

B = $135 + (-154) - (-65) - 46$
 B = $135 + (-154) + 65 + (-46)$
 B = $135 + 65 + (-154) + (-46)$
 B = $200 + (-200)$
 B = 0

C = $1,98 + (-5,2) - (-3,4) + 0,02 - 4,5$
 C = $1,98 + (-5,2) + 3,4 + 0,02 + (-4,5)$
 C = $1,98 + 0,02 + 3,4 + (-5,2) + (-4,5)$
 C = $5,4 + (-9,7)$
 C = -4,3

D = $21 - (-5 + 3) + (4 - 8) - 21$
 D = $21 - (-2) + (-4) + (-21)$
 D = $21 + 2 + (-4) + (-21)$
 D = -4

29

a.
 $A = 2 - 4 + 3 - (-1)$
 $A = 2 - 4 + 3 + 1$
 $A = 2 + 3 + 1 - 4$
 $A = 6 - 4$
 $A = 2$

b.

$B = 2 - (4 + 3) - (-1)$
 $B = 2 - 7 + 1$
 $B = 2 + 1 - 7$
 $B = 3 - 7$
 $B = -4$

c.

$C = (4 - 2) - (3 + (-1))$
 $C = 2 - 2$
 $C = 0$

Problèmes

30

L'ascenseur fou

$2 + 3 - 4 - 2 + 1 = 3 + 1 - 4 = 4 - 4 = 0$.
Maïna s'arrêtera bien au rez-de-chaussée.

31

Programmes de calcul

1. $21 + (-6) = 15$.
Gabrièle pense au nombre 21.
2. $3 - 8 = -5$.
Louise pense au nombre 3.
3. $-11 - (-9) = -11 + 9 = -2$.
Paul pense au nombre -2.

32

Euskal Trail

2,55 km = 2 550 m.
Les coureurs partent de Urepel à 420 m d'altitude.
 $420 + 2\,280 - 2\,550 = 2\,700 - 2\,550 = 150$ m.
Saint-Étienne-de-Baïgorry est à une altitude de 150 m.

33

Lacs

1. $775 - 1\,433 = -658$.
Le point le plus bas du lac Tanganyika est -658 m.
2. $455 - (-1\,182) = 1\,637$ m.
Le lac Baïkal a une profondeur de 1 637 m, il est donc plus profond que le lac Tanganyika. C'est lui le lac le plus profond du monde.

34

Sécurité routière

1.

	Nombre de tués en 2013	Nombre de tués en 2014
Piétons	454	499
Cyclistes	151	159
Cyclos	153	165
Motos	642	625
Voitures	1616	1663
Poids Lourds	61	56
Total	3 077	3 167

Le bilan de l'année 2014 est moins satisfaisant car le nombre de tués sur les routes a augmenté par rapport à 2013.

2. Quelques facteurs responsables d'accidents :
– vitesse excessive ;
– alcool au volant ;
– fatigue.

35

L'effet de serre

$15 - (-18) = 15 + 18 = 33$ °C.
L'amplitude thermique entre ses deux températures est de 33 °C.

36

Accord de Kyoto

1.

Pays	Objectif Kyoto 2008-2012 (en %)	Évolution entre 2008 et 2012 (en %)	Bilan
Allemagne	-21	-24,4	-3,4
Autriche	-13	+2,9	+15,9
France	0	-10,6	-10,6
Portugal	27	+2,5	-24,5
Suède	+4	-18,8	-14,8

2. Tous les pays sauf l'Autriche ont respecté leurs engagements.

3. Parce que ces pays émettent moins de gaz à effet de serre que les autres.

37

Calculatrice cassée

Il faut réussir à faire -1 en ajoutant 5 et en retranchant 13.

$5 + 5 + 5 + 5 = 25$

$-13 - 13 = -26$

$25 - 26 = -1$

Azélia peut ajouter 5 fois 5 et retrancher 2 fois 13.

38

Plongée dans la mer Rouge

1. Ils n'ont pas pu voir tous ces poissons, car le mérou est visible à -67 m et ils ne peuvent pas descendre en dessous de -60 m.

2. $-6 - (-36) = -6 + 36 = 30$.

La rascasse et le poisson paillot sont séparés de 30 m.

3. $-19 - (-53) = -19 + 53 = 34$.

Le napoléon et le chirurgien sont séparés de 34 m.

4. L'expression $-36 - (-53)$ permet de calculer la distance entre la rascasse et le napoléon.

5. La rascasse est à -36 m.

$-36 - 7 = -43$ et $-36 + 7 = -29$.

La demoiselle domino peut être à -43 m ou bien à -29 m.

39

Architecture

On calcule le temps de construction de chaque monument :

Parthénon : $-432 - (-447) = -432 + 447 = 15$.

Panthéon : $-27 - (-125) = -27 + 125 = 98$.

Mosquée Bleue : $1616 - 1609 = 7$.

Notre-Dame : $1345 - 1163 = 182$.

Sagrada Famillia : $2026 - 1882 = 144$.

Le monument qui a été construit le moins rapidement est Notre-Dame, puis la Sagrada Famillia, vient ensuite le Panthéon, puis le Parthénon et enfin la Mosquée Bleue.

40

Comptes

$S = 33,5 + 45 - 19,9 - 12,4 + 60 - 24,9$

$S = 33,5 + 45 + 60 - 19,9 - 24,9 - 12,4$

$S = 138,5 - 57,2$

$S = 81,3$. À la fin du mois, il reste 81,3 € à Eneko.

41

Tour de France

Cet exercice peut se traiter sans utiliser les nombres relatifs mais lors de la correction, on peut utiliser ce qui a été vu pour rendre les calculs plus efficaces en regroupant positifs et négatifs.

$A = 553 + 980 - 1\,036 - 71 + 1\,641 - 822 + 393 - 1\,049 + 1\,116$

$A = 223 + 980 + 1\,641 + 393 + 1\,116 - 1\,036 - 71 - 822 - 1\,049$

$A = 4\,683 - 2\,978$

$A = 1\,705$. La Toussuire est à 1 705 m.

42

Cours du cacao

Même remarque qu'à l'exercice précédent.

$2\,886 - 956 + 925 - 354 = 3\,811 - 1\,310 = 2\,501$

Au mois de mai, une tonne de cacao coûte 2 501 \$.

43

Méthode

1. Oui, leurs calculs sont corrects.

$A = -17 + 25 + (-47) - (-51) - 25 = -13$.

2. Thelma a fait ses calculs de gauche à droite.
3. Jeanne a regroupé les termes positifs entre eux et les termes négatifs entre eux, elle a également remarqué que +25 et -25 étaient deux nombres opposés donc leur somme est égale à 0.
4. La méthode la plus efficace est celle de Jeanne ; il est plus simple d'ajouter des nombres relatifs de même signe et d'alléger les calculs en éliminant les nombres opposés.

44 Souvenir of London

1. Total of spending :

$$\begin{aligned} S &= 4,70 + 0,5 \times 3 + 5,20 \times 2 - 1,5 + 2 \\ &= 4,70 + 1,50 + 10,40 - 1,50 + 2 \\ &= 17,1 \end{aligned}$$

Louise spends 17,1 €, so she gets off £3.

$$17,1 - 3 = 14,1.$$

She can buy all what she wants.

2. $15 - 14,1 = 0,9$.

Louise can buy one postcard at £0,50.

45 Pression

1. Si on descend de 10 m, la pression due à l'eau est égale à 1 bar.
 $P_T = 1 + 1 = 2$.
 À -10 m, la pression absolue est égale à 2 bars.
2. Pour passer de -30 m à -60 m, Denis est descendu de 30 m, donc la pression due à l'eau augmentera de $3 \times 1 = 3$ bars. La pression absolue augmentera donc de 3 bars.
 $P_A = 1 + 6 = 7$ bars.
3. Si la pression absolue a augmenté de 4 bars, cela signifie que Martine est descendue de $4 \times 10 = 40$ m.
 $-10 + (-40) = -50$.
 Martine est donc à -50 m.

46 Carré magique

- 1.

Ce premier carré magique permet de jouer avec la notion d'opposé.

$$-3 + 2 + 1 = 0 \text{ donc :}$$

-3	2	1
2	0	-2
-1	-2	3

①

$$b. -5 + (-2) + 6 + 9 + (-8) = 15 + (-15) = 0$$

-12	4	-5	11	2
-4	12	-2	-11	5
-1	-10	6	-3	8
7	-7	9	0	-9
10	1	-8	3	-6

②

47 Défi !

- 1.

Ici, les calculs sont simples, on peut aller un peu plus vite... pour que les élèves soient de plus en plus efficaces.

- a. $1 - 2 = -1$
- b. $1 - 2 + 3 = 4 - 2 = 2$
- c. $1 - 2 + 3 - 4 = 4 - 6 = -2$
- d. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 9 - 6 = 3$

- 2.

Ici, on peut faire travailler les élèves en groupe puis retenir quelques solutions que les élèves viennent exposer au tableau (du moins « performant » au plus « efficace », par exemple).

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 97 - 98 + 99 - 100$$

$$S = -1 + (-1) + \dots + (-1) + (-1)$$

Il y a 50 fois (-1)

donc $S = -50$.

48 Quelle note ?

- 1.

Les élèves devront commencer par vérifier chaque calcul, et attester de leur exactitude.

Liwa a répondu à 8 calculs dont 6 sont corrects et 2 sont faux, les calculs c. et e. :

$$c. -10 + 2 = -12 \quad e. 5,5 - (-3,5) = 2$$

Il a donc 6 points pour les calculs corrects et il perd $0,5 \times 2 = 1$ point pour les calculs qui sont faux.

La note finale est $6 - (2 \times 0,5) = 5$.

Liwa a 5 sur 10.

2. Pour la question c., on a $-10 + 2 = -8$.

Pour la question e., on a : $5,5 - (-3,5) = 5,5 + 3,5 = 9$.

D'autre part :

$$i. 15,8 - 20,5 = -4,7 \quad j. -4,7 - (-7,9) = -4,7 + 7,9 = 3,2$$

49 Tarot simplifié

- 1.

Charles	Djamal	Jean	Pierre	Sophie
+50	-50	-50	100	-50

2. a. Bilan pour chaque joueur :

Charles : $300 - 250 = -50$

Djamal : $-25 - (-125) = -25 + 125 = 100$

Jean : $-150 - (-100) = -50$

Pierre : $100 - 50 = 50$

Sophie : $-175 - (-125) = -175 + 125 = -50$

Les joueurs qui ont perdu sont Charles, Jean et Sophie ; ils ont perdu chacun 50 points.

Les joueurs qui ont gagné sont Djamal et Pierre.

- b. Charles, Jean et Sophie ont perdu 50 points, la mise était donc une garde (50 points).

Djamal a gagné 100 points, soit deux fois la mise, c'est lui qui a pris, il jouait avec Pierre qui, lui, a gagné une fois la mise soit 50 points.

3. a. $450 + 375 - 600 - 125 - 100 = 825 - 825 = 0$.

Les scores sont corrects car leur somme est égale à 0.

- b. Une garde sans le chien correspond à une mise de $4 \times 25 = 100$ points.

- Si Sophie gagne, elle gagnera $100 \times 2 = 200$ points, et Djamal gagnera aussi 100 points.

Les autres perdront 100 points.

Charles	Djamal	Jean	Pierre	Sophie
+450	+375	-600	-125	-100
350	475	-700	-225	100

Le classement est : Djamal, Charles, Sophie, Pierre et Jean.

- Si Sophie perd, elle perdra $100 \times 2 = 200$ points, et Djamal perdra aussi 100 points.

Les autres gagneront 100 points.

Charles	Djamal	Jean	Pierre	Sophie
+450	+375	-600	-125	-100
550	275	-500	-25	-300

Le classement est : Charles, Djamal, Pierre, Sophie et Jean.

50 Besoins du muscle

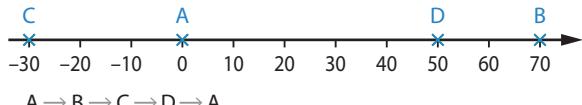
- 1.

Muscle au repos	Glucose	Quantité dans le sang entrant	Quantité dans le sang sortant	Différence de quantité entre le sang entrant et le sang sortant
		90 mg	80 mg	-10 mg
O_2	20 mL	15 mL		-5 mL
CO_2	49 mL	54 mL		+5 mL
Muscle en activité	Glucose	90 mg	50 mg	-40 mg
	O_2	20 mL	11 mL	-9 mL
	CO_2	49 mL	58 mL	9 mL

Lorsque le muscle est au repos, il consomme des glucides et de l'oxygène, et produit du dioxyde de carbone.

La remarque est identique pour un muscle en activité, mais on remarque que la consommation d'oxygène et de glucides est bien plus importante pour un muscle en activité.

51 Déplacements



$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$

1.

- quand cliqué
- avancer de 7
- attendre 1 secondes
- avancer de -10
- attendre 1 secondes
- avancer de 8
- attendre 1 secondes
- avancer de -5

2. $7 - 10 + 8 - 5 = 7 + 8 - 10 - 5 = 0$.

52 Calculatrices

Cet exercice permet de reparler des deux statuts du signe « - » soustraction ou nombre négatif. La calculatrice TI-collège plus fait d'ailleurs cette distinction car il faut utiliser deux touches différentes selon que l'on fasse une soustraction ou que l'on rentre une valeur négative.

1. La touche permet de faire une soustraction alors que la touche sert à préciser qu'un nombre est négatif.
2. a. Non, la calculatrice Casio ne fait pas de distinction entre les deux signes « - » bien qu'il existe une touche spécifique.
3. $A = -5,8$.
4. $B = 3,74 + (-5,24) - (-4,56) - 2,98 = 0,08$.
 $C = -25,4 - (-18,75) + 5,96 - (-14,79) = 14,1$.

53 La boucle est bouclée

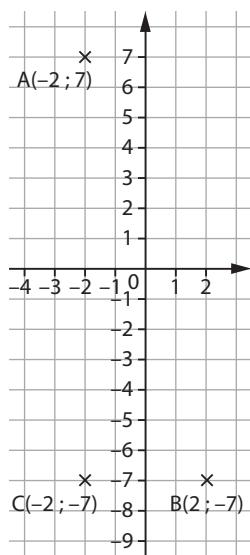
1. $3 \times 3 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$;
 $3 \times 2,5 - 2 \times 2,5 = 7,5 - 5 = 2,5$.
2. a.

			= B1 * 3
A	B	C	D
Nombre choisi	-8	-23	-52
Son triple	-24	-69	-156
Son double	-16	-46	-104
Leur différence	-8	-23	-52

- b. En $B2 := B1 \times 3$ En $B3 := B1 \times 2$ En $B4 := B2 - B3$
3. Ce programme de calcul revient à prendre le nombre de départ.
- b. Avec le calcul littéral, si on désigne par x le nombre de départ : $3x - 2x = x$.

54 Coordonnées opposées

4. B est le symétrique de A par rapport à O.
5. C est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Partie 1 : $175 + (-175) = 0$

Partie 2 :

$$-200 + (-50) + 150 + 200 = 150 + (-50) = 100$$

Partie 3 :

$$200 + (-175) + 125 + (-50) = 325 + (-225) = 100$$

Exercice 1

Les élèves sont plus à l'aise, on peut donc écrire les calculs directement (éviter le $+(-)$ et écrire directement $-$).

Partie 1 : $175 - 175 + 125 + 50 = 175$

Partie 2 :

$$-200 - 50 + 125 + 200 = 275 - 50 = 225$$

Partie 3 :

$$150 + 200 - 175 + 125 - 50 = 375 - 225 = 150$$

Exercice 2

$$1. 3 + (-2) + 1 = 4 + (-2) = 2$$

$$2. 3 - (-2) - 1 = 3 + 2 + (-1) = 5 + (-1) = 4$$

Exercice 2

$$1. 3,2 - (-2,8) + (-1,4) = 3,2 + 2,8 + (-1,4) \\ = 6 + (-1,4) = 4,6$$

$$2. 3,2 - (-2,8 - (-1,4)) = 3,2 - (-2,8 + 1,4) \\ = 3,2 - (-1,4) \\ = 3,2 + 1,4 = 4,6$$

Exercice 3

Cellule A2 : « =A1 + B1 »

Cellule B2 : « =A1 - B1 »

Cellule C2 : « =B1 - A1 »

Exercice 3

Cellule A2 : « = A1 + B1 + C1 »

Cellule B2 : « = A1 - B1 + C2 »

Cellule C2 : « = A1 + B1 - C1 »

Écriture d'un énoncé

1.

8,2
-4,9 13,1
-6,7 2,2 10,9
-1,3 -5,4 7,6 3,1

2. a.

10
14 -4
2 12 -16
5 -3 15 -31

Analyse d'une production

$$1. A = A = -2 + 8 + (-9) + 10$$

$$A = -2 + 8 - 9 + 10$$

$$A = 18 - 11$$

$$A = 7$$

Pauline et Ness se sont trompées.

Thanh a fait le bon calcul.

$$2. Pauline s'est trompée, en faisant $-2 + 8 = -6$ puis $-9 + 10 = -19$.$$

On a ensuite $-19 + (-6) = -25$.

Ness n'a pas tenu compte du « . » devant le 2 et a calculé $2 + 8 + 10 = 20$.

Nombres relatifs : multiplication et division

Introduction

Ce chapitre permet d'aborder les points suivants du programme :

- calculer avec des nombres relatifs en écriture décimale (somme, différence, produit et quotient),
- notion d'opposé.

Exemples :

- Effectuer des calculs pour résoudre des problèmes ;
- Rencontrer des nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes ;
- Pratiquer régulièrement le calcul mental ou à la main et utiliser à bon escient la calculatrice ou un logiciel.

Repère de progressivité :

La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendés au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.

Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient et, quand ces notions ont été bien installées, ils font le lien avec le calcul littéral.

Ce chapitre est traité très tôt dans l'année de 4^e afin de pouvoir le réinvestir tout au long de l'année sous forme de calcul mental, ou d'outils dans la résolution de problèmes (calcul littéral), et d'introduire les opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire.

Les élèves se sont familiarisés avec les nombres relatifs dès le début du cycle 4.

Durant l'année de 5^e, ils ont appris à les repérer sur une droite graduée, à les comparer, à les utiliser pour repérer un point dans le plan. Ils ont ensuite appris à les additionner.

Après avoir rencontré la notion d'opposé, ils ont pu généraliser la soustraction à tous les nombres relatifs.

Ils ont ensuite enchainé des additions et des soustractions de nombres relatifs.

Il est important de retravailler en milieu de cycle l'addition et la soustraction de nombres relatifs afin de permettre aux plus fragiles d'aborder ces deux opérations plus sereinement.

En principe, l'addition est plutôt bien maîtrisée mais la soustraction est encore source de nombreuses erreurs et doit donc être revue de façon approfondie.

Une fois bien installées, la multiplication et la division seront abordées.

Comme pour l'addition et la soustraction, la multiplication et la division sont introduites en revenant au sens des opérations et construites de façon à prolonger les règles connues sur les nombres positifs.

Il est préférable d'avoir travaillé, en amont de l'introduction de la multiplication, la distributivité dans le cadre numérique des nombres positifs par le biais d'un petit calcul de début de séance (102×37 ; $4,65 \times 12 + 4,67 \times 88\ldots$).

Dans ce chapitre, le calcul mental, réfléchi et intelligent, est privilégié. Ainsi, sauf mention contraire, la calculatrice ne sera pas autorisée.

Activités

Questions flash

1. $-17^{\circ}\text{C} < -5^{\circ}\text{C} < 0^{\circ}\text{C} < 5,3^{\circ}\text{C} < 22^{\circ}\text{C}$

2. L'opposé de 3 est -3 .

L'opposé de -3 est 3 .

L'opposé de $5,8$ est $-5,8$.

L'opposé de $-12,5$ est $12,5$.

3. a. $12,6 + 2,4 = 15$

c. $-12,6 + (-2,4) = -15$

e. $12,6 + (-12,6) = 0$

b. $-12,6 + 2,4 = -10,2$

d. $12,6 + (-2,4) = 10,2$

4. a. $15 - 2 = 13$

c. $-15 - (-2) = -15 + 2 = -13$

5. Lucien a obtenu 0.

6. a. 62×21
 $= 62 \times 20 + 62$
 $= 1\ 302$

b. 62×19
 $= 62 \times 20 - 62$
 $= 1\ 178$

c. $62 \times 12 + 62 \times 88$
 $= 62 \times 100$
 $= 6\ 200$

b. $-15 - 2 = -15 + (-2) = -17$

d. $3,8 \times 997 + 3,8 \times 3$
 $= 3,8 \times 1\ 000$
 $= 3\ 800$

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver l'addition et la soustraction de nombres relatifs.
Les prérequis nécessaires sont de trouver le terme manquant dans une addition.
La capacité introduite est d'additionner et soustraire des nombres relatifs

Les élèves sont en situation de recherche individuelle pour commencer, puis peuvent partager leurs réponses avec leurs camarades (ou en équipe de trois ou quatre élèves). Toutes les réponses données sont ensuite notées au tableau puis débattues. Si cela n'a pas été fait, on amène les élèves à modéliser par une égalité chaque devinette afin de faire l'économie d'une formulation par écrit. Ce sera l'occasion de tester des égalités avec les différentes réponses notées (si certains ont noté le nombre cherché par une lettre, on peut le relever mais pas nécessairement le formaliser).

Pour l'addition, on peut avoir recours à des modélisations diverses évoquées par les élèves (températures, gains, pertes, ascenseur...) mais sans en abuser de sorte à ne pas faire obstacle à l'apprentissage ultérieur de la multiplication (notamment le produit de deux nombres négatifs). C'est surtout l'occasion de réactiver les règles formelles d'additions et de soustractions. On priviliera cependant, pour les plus fragiles, des raisonnements du type : $-6 + 8 = -6 + 6 + 2 = 0 + 2 = 2$

Ousmane : ... + 7 = 32, le nombre cherché est $32 - 7 = 25$.

Esteban : ... + 8 = 2, le nombre cherché est $2 - 8 = -6$.

Léila : ... + 15 = 0, le nombre cherché $0 - 15 = -15$.

C'est l'occasion de réactiver la définition de deux nombres opposés.

Lucas : ... + 5 = -2, le nombre cherché est $(-2) - 5 = (-2) + (-5) = -7$.

À ce stade, c'est l'occasion de donner des explications en revenant au sens :

$-2 - 5$ est le nombre qu'il faut ajouter à 5 pour obtenir -2 :
 $\dots + 5 = -2$

En ajoutant -5 de chaque côté de l'égalité, on trouve :
 $(-5) + \dots + 5 = -2 + (-5)$, comme $-5 + 5 = 0$.

Donc $(-2) - 5 = (-2) + (-5) = -7$, et bien noter que pour soustraire 5, on ajoute l'opposé de 5.

Kim : $\dots + 7 - 9 + (-2) - (-4) = 39$ qui s'écrit :

$\dots + 7 + (-9) + (-2) + 4 = 39$, on obtient $\dots + 11 + (-11) = 39$ soit $\dots + 0 = 39$, le nombre cherché est donc 39.

On notera les différentes méthodes :

• soustraire les termes les uns après les autres ;

• calculer directement la somme algébrique du 1^{er} membre.

On remarquera l'intérêt (gain de temps) de cette deuxième méthode et ce sera l'occasion de réactiver les méthodes de calculs utiles pour une somme algébrique.

Plongée

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la multiplication de nombres relatifs puis une nouvelle écriture de l'opposé d'un nombre.

Les prérequis nécessaires sont :

- la définition de deux nombres opposés (deux nombres sont opposés si leur somme est égale à zéro) ;
- la distributivité dans le cadre numérique de nombres positifs ;
- écrire une somme de termes égaux à l'aide d'un produit.

La capacité introduite est de multiplier des nombres relatifs.

1.

Cette première partie peut débuter par un travail individuel court, suivi d'une mise en commun.

Le travail s'appuie sur les connaissances implicites des élèves à partir d'une somme de termes égaux.

Le produit d'un nombre relatif négatif par un nombre entier positif va simplifier l'écriture d'une telle somme.

La règle de calcul du produit d'un nombre négatif par un nombre relatif quelconque en découlera facilement et sera admise.

a. Il atteindra -30 m.

b. $(-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) \times 5$, donc $(-6) \times 5 = -30$.

On pourra ici proposer d'autres exemples : « Et s'il était descendu à $-6,4$ m ; $-7,2$ m ; -10 m... » afin que les élèves conjecturent la règle.

c. Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif. La distance à zéro du produit de deux nombres relatifs de signes contraires est égale au produit des distances à zéro des deux facteurs.

Il est important de préciser aux élèves que cette règle est admise.

2.

Cette deuxième partie nécessite davantage de temps. Elle peut débuter par un travail individuel plus long que le précédent, suivi d'une mise en commun par petit groupe puis d'un débat en classe. Le travail s'appuie ici sur la somme de deux nombres opposés et sur le prolongement de la distributivité aux nombres négatifs.

Activité 2

- a. • L'opposé de 20 est -20 .

- L'opposé de 7 est $7 \times (-1)$.

Ils trouvent la réponse facilement en utilisant 1.

- L'opposé de 3,2 est $3,2 \times (-1)$.

Ils trouvent la réponse facilement en utilisant également 1.

- L'opposé de (-12) est $(-12) \times (-1)$.

Souvent obtenu par élimination.

- L'opposé de $(-5) \times 3$ est $(-5) \times (-3)$.

Ici la preuve s'impose car le résultat est loin d'être naturel pour les élèves.

Elle peut être menée en sollicitant les élèves à chaque étape.

- b. $(-5) \times 3 + (-5) \times (-3) = (-5) \times [3 + (-3)] = (-5) \times 0 = 0$

donc $(-5) \times (-3)$ est l'opposé de $(-5) \times 3$.

Par conséquent, $(-5) \times (-3) = 15$.

c.

En reprenant le raisonnement utilisé pour $(-5) \times (-3)$, on généralise la règle observée au produit de deux nombres négatifs. On insiste sur le fait que l'on a ainsi défini une multiplication sur les nombres relatifs ayant les mêmes propriétés que celles qu'on connaît sur les nombres positifs.

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.

La distance à zéro du produit de deux nombres relatifs de signes contraires est égale au produit des distances à zéro des deux facteurs.

d. Le produit d'un nombre relatif par -1 est égal à son opposé et on peut écrire $a \times (-1) = -a$.

On peut faire noter :

L'opposé de (-12) est $(-12) \times (-1)$ et peut se noter $-(-12) = 12$.

On fait remarquer que $-a$ n'est pas toujours négatif et on peut aller plus loin avec certains en demandant le signe de $-a$ en fonction de a .

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle des signes d'un produit de plusieurs facteurs.
Les prérequis nécessaires sont la multiplication de deux nombres relatifs.
La capacité introduite est de multiplier des nombres relatifs.

Il faut préciser que la calculatrice n'est pas autorisée afin que les élèves soient amenés à ne chercher que le signe du produit.

1.

On peut commencer par un travail individuel. Ce travail peut être suivi d'une mise en commun par petits groupes. Le professeur peut ensuite noter un chemin par groupe sur le labyrinthe 1 projeté au tableau. Chaque chemin est ensuite débattu par la classe. Déjà à ce stade, certains peuvent faire émerger l'idée de grouper les facteurs par deux. Sinon, on peut laisser faire.

- $-1 \rightarrow -12 \rightarrow -13 \rightarrow -3 : (-1) \times (-12) \times (-13) \times (-3)$
- $-1 \rightarrow -8 \rightarrow -10 \rightarrow -6 \rightarrow -4 \rightarrow -3 : (-1) \times (-8) \times (-10) \times (-6) \times (-4) \times (-3)$
- $-1 \rightarrow -4 \rightarrow -13 \rightarrow -14 \rightarrow -11 \rightarrow -2 \rightarrow -4 \rightarrow -3 : (-1) \times (-4) \times (-13) \times (-14) \times (-11) \times (-2) \times (-4) \times (-3)$
- $-1 \rightarrow -8 \rightarrow -12 \rightarrow -3 : (-1) \times (-8) \times (-12) \times (-3)$

2.

Même démarche qu'au 1.

- $-1 \rightarrow -4 \rightarrow -7 \rightarrow -5 \rightarrow -2 : -1 \times (-4) \times (-7) \times (-5) \times (-2)$
- $-1 \rightarrow -8 \rightarrow -10 \rightarrow -11 \rightarrow -2 : -1 \times (-8) \times (-10) \times (-11) \times (-2)$
- $-1 \rightarrow -8 \rightarrow -9 \rightarrow -13 \rightarrow -4 \rightarrow -11 \rightarrow -2 : -1 \times (-8) \times (-9) \times (-13) \times (-4) \times (-11) \times (-2)$
- $-1 \rightarrow -4 \rightarrow -7 \rightarrow -13 \rightarrow -5 \rightarrow -11 \rightarrow -6 \rightarrow -4 \rightarrow -2 : -1 \times (-4) \times (-7) \times (-13) \times (-5) \times (-11) \times (-6) \times (-4) \times (-2)$

3.

L'objectif ici est de faire apparaître clairement, si cela n'a pas émergé aux questions précédentes que, si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif ; s'il est impair, le produit est négatif. On fera également clairement apparaître les groupements par deux facteurs.

Il y aura 12 facteurs, on peut donc faire 6 groupes de deux facteurs. Le produit sera donc positif. Elle doit donc prendre la sortie 1.

4. et 5.

L'objectif est de mettre en évidence que seuls les facteurs négatifs influent sur le signe du produit et d'élaborer une méthode pour déterminer le signe d'un produit de plusieurs facteurs.

Les élèves repartent en recherche individuelle suivie d'une mise en commun par groupe afin de proposer une méthode donnant rapidement le signe d'un produit. Les méthodes sont proposées à l'oral et débattues si besoin.

4. Le labyrinthe 2 a été construit en intercalant un nombre positif entre deux nombres négatifs.

- $(-1) \times 14 \times (-12) \times 2 \times (-13) \times 8 \times (-3)$ est positif.
- $(-1) \times 5 \times (-8) \times 5 \times (-10) \times (-6) \times (-4) \times (-3)$ est positif.
- $(-1) \times 9 \times (-4) \times 8 \times (-13) \times (-14) \times (-11) \times 16 \times (-2) \times (-4) \times (-3)$ est positif.
- $(-1) \times 5 \times (-8) \times 3 \times (-12) \times 6 \times (-3)$ est positif.
- $-1 \times 9 \times (-4) \times 14 \times (-7) \times 18 \times (-5) \times 15 \times (-2)$ est négatif.
- $-1 \times 5 \times (-8) \times 5 \times (-10) \times 17 \times (-11) \times 16 \times (-2)$ est négatif.
- $-1 \times 5 \times (-8) \times (-9) \times (-13) \times 13 \times (-4) \times (-11) \times 16 \times (-2)$ est négatif.
- $-1 \times 9 \times (-4) \times 14 \times (-7) \times 17 \times (-13) \times 22 \times (-5) \times 20 \times (-11) \times (-6) \times (-4) \times (-2)$ est négatif.

Les facteurs positifs n'ont pas changé le signe des produits.
Les chemins du labyrinthe 2 sont donc toujours valables.

5. Pour connaître le signe d'un produit de plusieurs nombres relatifs, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre est pair le produit est positif.
Si ce nombre est impair le produit est négatif.

Tickets à gratter

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle des signes du quotient de deux nombres relatifs.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la multiplication de deux nombres relatifs et de la définition du quotient de deux nombres positifs.
La capacité introduite est de savoir diviser deux nombres relatifs.

Calculatrice non autorisée.

1. On modélise cette situation.

Si certains ont noté le nombre cherché par une lettre, on peut le relever, mais seulement dans ce cas.

- Pour le ticket vert :

Ligne 1 : $5 \times \dots = -115$ donc comme 5 est positif, le 1^{er} nombre cherché est négatif.

Colonne 2 : $\dots \times (-5) = -115$ donc comme (-5) est négatif, le 1^{er} nombre cherché est positif.

Le seul nombre étant à la fois positif et négatif est zéro.

Or $5 \times 0 = 0 \times (-5) = 0$.

On ne peut donc pas trouver un tel nombre. Et le ticket vert ne sera donc jamais gagnant.

- Pour le ticket bleu :

Ligne 1 : $5 \times \dots = -115$ donc comme 5 est positif, le 1^{er} nombre cherché est négatif.

Colonne 2 : $\dots \times (-5) = 115$ donc comme (-5) est négatif, le 1^{er} nombre cherché est négatif.

Ligne 2 : $\dots \times (-5) = -115$ donc comme (-5) est négatif, le 2^e nombre cherché est positif.

Activité 4

Colonne 1 : $5 \times \dots = 115$ donc comme 5 est positif, le 2^e nombre cherché est positif.

Le ticket bleu peut donc être gagnant.

2.

Les élèves vont ici prolonger naturellement la définition du quotient de deux nombres positifs à deux nombres relatifs quelconques. À la fin de cette question, si cela n'a pas été proposé par les élèves, on les invite à formuler la règle des signes pour un quotient.

• Le nombre qui multiplié par 5 donne -115 est le quotient de -115 par 5, on vient de voir que ce nombre est négatif.

On trouve donc que le quotient de -115 par 5 est -23 .

Le nombre qui multiplié par (-5) donne 115 est le quotient de 115 par (-5) , on vient de voir que ce nombre est négatif.

On trouve donc que le quotient de -115 par 5 est aussi -23 .

On peut donc écrire : $\frac{-115}{5} = \frac{115}{-5} = -\frac{115}{5} = -23$

• Le nombre qui multiplié par 5 donne 115 est le quotient de 115 par 5, ce nombre est 23 .

Le nombre qui multiplié par (-5) donne -115 est le quotient de -115 par (-5) , on vient de voir que ce nombre est positif.

On trouve donc que le quotient de -115 par (-5) est aussi 23 .

On peut donc écrire : $\frac{-115}{-5} = \frac{115}{5} = 23$

3.

En groupe, avant la mise en commun.

Pour calculer le quotient de deux nombres relatifs, on commence par déterminer son signe :

- si les deux nombres sont de même signe il est positif ;
- si les deux nombres sont de signes contraires il est négatif.

Puis on divise les distances à zéro.

Exercices

Additionner et soustraire des nombres relatifs

Questions flash

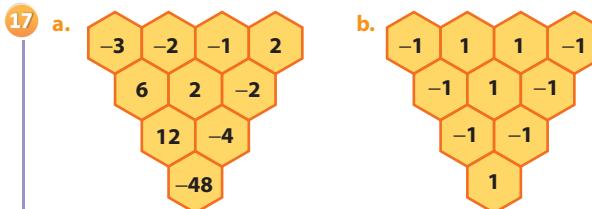
- 1.** A = $35 + 15 = 50$ B = $-7 + 4 = -3$
 C = $-13 + 13 = 0$ D = $15 + (-25) = -10$
 E = $-8 + (-9) = -17$ F = $-4 + 9 = 5$
- 2.** A = $38 - 21 = 17$ B = $20 - 36 = 20 + (-36) = -16$
 C = $-14 - 14 = -14 + (-14) = -28$
 D = $-8 - (-10) = -8 + 10 = 2$
 E = $9 - (-4) = 9 + 4 = 13$ F = $7 - 7 = 0$
- 3.** A = $9 + (-6) = 3$ B = $10 - 12 = 10 + (-12) = -2$
 C = $-5 + (-6) = -11$ D = $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$
- 4.** A = $(-5) + 8 + (-3) + (-7) + (-8)$
 $= -5 + (-3) + (-7) = -15$
 B = $-2 - (-3) + 7 - 12$
 $= -2 + 3 + 7 + (-12)$
 $= 10 + (-14) = -4$
- 5.** A = $-2 + 8,2 = 6,2$ B = $-6,5 + (-3) = -9,5$
 C = $-12 + 7 = -5$ D = $(-7,5) + (-3,6) = -11,1$
 E = $13 + (-12) = 1$ F = $4 + (-19) = -15$
- 6.** A = $-3 - 10,2$ B = $-7 - (-13)$
 A = $-3 + (-10,2)$ B = $-7 + 13$
 A = $-13,2$ B = 6
 C = $12 - 17$ D = $0 - 26$
 C = $12 + (-17)$ D = -26
 C = -5
 E = $-14 - 14$ F = $5,8 - (-4,2)$
 E = $-14 + (-14)$ F = $5,8 + 4,2$
 E = -28 F = 10
- 7.** A = $(-7) - (-10) = (-7) + 10 = 3$
 B = $7 + (-9,4) = -2,4$
 C = $(-12) + (-7) = -19$
 E = $(-19) + 8 = -11$
- 8.** a. $35 - (-13) = 35 + 13 = 48$
 b. $(-39) + 41 = 2$
 c. $(-12,3) + (-4,7) = -17$
 d. $7 - 15 = 7 + (-15) = -8$
- 9.** a. Le nombre manquant est : $-4 - 5 = -4 + (-5) = -9$
 b. Le nombre manquant est : $-2 - (-9) = -2 + 9 = 7$
 c. Le nombre manquant est : $-5 - (-12) = -5 + 12 = 7$
 d. Le nombre manquant est : $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$
- 10.** a. $-11 + (-6) = -17$
 b. $7 - 8 = -1$
 c. $26 + (-26) = 0$
 d. $-18 - 17 = -35$
- 11.** • En utilisant la calculatrice, on trouve A = 9, c'est donc Louis qui a raison.
 • Erreur d'Andréa : pour soustraire, il ajoute le même nombre au lieu d'ajouter son opposé.
 • Erreur de Jade : pour soustraire, elle ajoute les opposés des deux termes au lieu d'ajouter seulement l'opposé du 2^e.
- 12.** A = $2 + (-8) + 7 + (-12) + (-5) + 4 + (-2)$
 $= [2 + (-2)] + 11 + (-25) = -14$
 B = $(-5) + (-4) - 15 - (-6) + 7$
 $= (-5) + (-4) + (-15) + 6 + 7$
 $= -24 + 13 = -11$
 C = $(-14) - 14 + 30 + (-15) - (-20)$
 $= -14 + (-14) + 30 + (-15) + 20$
 $= -28 + 20 + (-15) + 30$
 $= -8 + (-15) + 30$
 $= -23 + 30 = 7$
 D = $(-4) + (-3) - 5 - 3 + (-2)$
 $= -4 + (-3) + (-5) + (-3) + (-2) = -17$
 E = $3 - 12 + 15 - 17 - 23$
 $= 3 + (-12) + 15 + (-17) + (-23)$
 $= -52 + 18 = -34$

13. A = $(-25) - 18 + (-3) + 25 + 3$
 $= (-25 + 25) + (-3 + 3) - 18 = -18$
 B = $(-3,5) + (-4,8) + 5 + (-0,2) + 13,5$
 $= (-3,5 + 13,5) + (-4,8 - 0,2) + 5 = 10 + (-5) + 5 = 10$

Multiplier des nombres relatifs

Questions flash

- 14.** A = $12 \times 5 = 60$ B = $-1 \times 5 = -5$
 C = $(-3) \times (-3) = 9$ D = $3,5 \times (-10) = -35$
 E = $-168 \times 0 = 0$ F = $-56 \times (-0,1) = 5,6$
- 15.** A est positif ; B est négatif ; C est négatif ; D est négatif ; E est positif.
- 16.** A = $(-3) \times 5 = -15$ B = $(-6) \times (-6) = 36$
 C = $(-12) \times 0,3 = -3,6$ D = $0,4 \times (-3) = -1,2$
 E = $(-21) \times (-5) = 105$ F = $(-56) \times (-0,5) = 28$
 G = $4,5 \times (-1) = -4,5$ H = $-1,48 \times 0 = 0$
 I = $3,5 \times (-0,01) = -0,035$



18. a. $1 \times (-3) = -3$ b. $(-1) \times (-5) = 5$ c. $(-3) \times (-1) = 3$
 d. $(-1) \times 3 = -3$ e. $(-5) \times (-1) = 5$ f. $1 \times (-5) = -5$

- 19.** a. $(-27) \times 34 = -918$
 b. $(-27) \times (-34) = 918$
 c. $27 \times (-340) = -918 \times 10 = -9180$
 d. $(-270) \times (-340) = 918 \times 100 = 91800$
 e. $27 \times (-0,34) = -918 \times 0,01 = -9,18$
 f. $-2,7 \times (-3,4) = 918 \times 0,01 = 9,18$

20. A est négatif car il y a 5 (nombre impair) facteurs négatifs.
 B est positif car il y a 56 (nombre pair) facteurs négatifs.

21. A = $-(10 \times 3 \times 2 \times 5 \times 6) = -10 \times 10 \times 18 = -1800$
 B = $4,3 \times 10 \times 2 \times 1 \times 1 = 86$
 C = $-(0,8 \times 4 \times 0,3 \times 2 \times 1) = -0,24 \times 8 = 1,92$

- 22.** a. Il y a déjà 2 facteurs négatifs et le produit est positif, le 3^e facteur est donc positif.
 b. Il y a déjà 3 facteurs négatifs et le produit est négatif, le facteur manquant est donc positif.
 c. Il y a déjà 3 facteurs négatifs et le produit est négatif, les 2 facteurs manquants sont donc tous les deux négatifs ou tous les deux positifs.

23. A = $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 9 \times 9 = 81$
 B = $(-2) \times 0,25 \times 75 \times (-4) \times 4$
 $= (2 \times 75) \times (0,25 \times 4) \times 4 = 150 \times 1 \times 4 = 600$
 C = $-3,02 \times (-20) \times 3 \times 5 \times (-1)$
 $= -3,02 \times (20 \times 5) \times 3 \times 1 = -302 \times 3 = -906$
 D = $-4,53 \times 2 \times (-0,001) \times 5$
 $= 4,53 \times 10 \times 0,001 = 4,53 \times 0,01 = 0,0453$

Diviser deux nombres relatifs

Questions flash

- 24.** A est négatif ; B est négatif ; C est positif ; D est négatif ; E est positif ; F est négatif.
- 25.** A = $(-48) \div 6 = -8$ B = $(-35) \div (-7) = 5$
 C = $55 \div (-11) = -5$ D = $0 \div (-3) = 0$
 E = $-15 \div (-0,1) = 150$ F = $-24 \div 100 = -0,24$
- 26.** A = $\frac{-9}{-2} = 4,5$ B = $\frac{24}{-6} = -4$
 C = $\frac{-12}{5} = -2,4$ D = $\frac{-21}{-7} = 3$

27 A = $40 \div (-5) = -8$
 C = $46 \div (-1) = -46$
 E = $(-54) \div (-6) = 9$

B = $(-32) \div (-8) = 4$
 D = $(-25) \div 25 = -1$
 F = $(-42) \div (-7) = 6$

28 A = $34 \div (-5) = -6,8$
 C = $(-60) \div (-12) = 5$
 E = $(-7) \div (-0,2) = 35$

B = $(-21) \div 6 = -3,5$
 D = $(-22) \div 4 = -5,5$
 F = $(-105) \div (-3) = 35$

- 29 a. Il faut multiplier (-5) par (-8) pour obtenir 40 .
 b. Il faut multiplier 7 par (-6) pour obtenir (-42) .
 c. Il faut multiplier (-3) par 13 pour obtenir (-39) .
 d. Il faut multiplier (-5) par $\frac{23}{5}$ pour obtenir 23 .

30 Les nombres positifs sont :

$$\frac{-34}{-16} = \frac{34}{16} \quad -\frac{19}{6} = \frac{19}{6} \quad \frac{4}{3}$$

31 a. $-\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$ c. $\frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$ d. $-\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

32 a. $\frac{-36}{-3} = 12$ b. $\frac{-16}{5} = -\frac{16}{5} = -3,2$
 c. $\frac{3}{-10} = -\frac{3}{10} = -0,3$ d. $\frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$
 e. $\frac{11}{-6} = -\frac{11}{6}$ f. $\frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}$

Problèmes

L'ascenseur

Le trajet de Bertrand est traduit par la succession d'additions et de soustractions suivante :

$$\begin{aligned} & 28 - 5 - 24 + 3 - 14 + 1 \\ &= 28 + (-5) + (-24) + 3 + (-14) + 1 \\ &= 32 + (-43) \\ &= -11 \end{aligned}$$

Bertrand est descendu de 11 étages.

Un cocktail de calculs

A = $(-3) + (-4) \times (-5)$ B = $-30 \div (-4 + 6)$
 A = $-3 + 20$ B = $-30 \div 2$
 A = 17 B = -15

C = $5 - (-4) \times (-4)$ D = $5 - 4 \times (-4)$
 C = $5 - 16$ D = $5 - (-16)$
 C = $5 + (-16)$ D = $5 + 16$
 C = -9 D = 21

E = $-8 - [8 - (-2)] + (-3)$ F = $3 - 4 \times (-5) \times (-5)$
 E = $-8 - (8 + 2) + (-3)$ F = $3 - 100$
 E = $-8 - 10 + (-3)$ F = $3 + (-100)$
 E = -21 F = -97

G = $12 - 6^2$ H = $(-5)^2 + 13$
 G = $12 - 36$ H = $25 + 13$
 G = $12 + (-36)$ H = 38
 G = -24

I = $-4^2 + 21$ J = $(-2) \times (-5) - (-5)^2$
 I = $-16 + 21$ J = $10 - 25$
 I = 5 J = $10 + (-25)$
 J = -15

K = $(-5) \times (-3) - 4 \times (-6) - 1$ L = $6 \times (-2) - 3 \times (-3) \times (-1) \times (-2)$
 K = $15 - (-24) - 1$ L = $-12 - (-18)$
 K = $15 + 24 - 1$ L = $-12 + 18$
 K = $39 - 1$ L = 6
 K = 38

La calculatrice

1. Marianne n'obtiendra pas le bon résultat.
 2. Elle n'a pas tapé les parenthèses séparant le numérateur du dénominateur. En effet :

$$\frac{8 + 3 \times (-4)}{1 + 2 \times (-1,5)} = [8 + 3 \times (-4)] \div [1 + 2 \times (-1,5)] \\ = [8 + (-12)] \div [1 + (-3)] \\ = -4 \div (-2) = 2$$

Une foule de quotients

1.

On peut amener les élèves à passer de la fraction à la division pour éviter les erreurs sur la calculatrice.

A = $17 \div (3 - 10)$ B = $[-2 - (-17)] \div (5 - 8)$
 A = $17 \div (-7)$ B = $(-2 + 17) \div [5 + (-8)]$
 A = $-\frac{17}{7}$ B = $15 \div (-3)$
 B = -5

C = $(-4 - 5) \div (5 - 6)$ D = $(6 - 6 \times 4) \div (6 \times 2 - 2)$
 C = $(-9) \div (-1)$ D = $(6 - 24) \div (12 - 2)$
 C = 9 D = $(-18) \div 10$
 D = $-1,8$

E = $2 - 6 + 6 = 2$ F = $[(-21) + 7 \times 3] \div [-13 + 17 \times (-4)]$
 F = $(-21 + 21) \div [-13 + 17 \times (-4)]$
 F = $0 \div [-13 + 17 \times (-4)]$
 F = 0

G = $[-2 \times (-4) \times 3 \times (-3)] \div (4,5 \times 2)$

G = $-72 \div 9$

G = -8

H = $[-5 \times (-3) \times (-4)] \div [(-1) \times (-1) \times (-1)]$

H = $-60 \div (-1)$

H = 60

I = $[-9 \times (-3) - (-3) \times (-5)] \div [15 \div (-3) - 2]$

I = $(27 - 15) \div (-5 - 2)$

I = $12 \div (-7)$

I = $-\frac{12}{7}$

3. $-8 < -5 < -\frac{17}{7} < -1,8 < -\frac{12}{7} < 0 < 2 < 9 < 60$

Jeu télévisé

Voici l'expression correspondant au score de chaque candidat.

Lucas : $7 \times 4 - 3 \times 5 - 10 \times 2$
 = $28 - 15 - 20 = 28 + (-15) + (-20)$
 = $28 + (-35) = -7$

Juliette : $13 \times 4 - 7 \times 5 = 52 - 35 = 17$

Léila : $9 \times 4 - 11 \times 2 = 36 - 22 = 14$

Esteban : $-4 \times 5 - 16 \times 2$
 = $-20 - 32$
 = $-20 + (-32)$
 = -52

$-52 < -7 < 14 < 17$

Classement : 1 Juliette ; 2 Léila ; 3 Lucas ; 4 Esteban

Programme de calcul

1. $12 \rightarrow 5 \rightarrow -25$

On peut écrire l'enchaînement des calculs en une seule expression : $[12 + (-7)] \times (-5) = 5 \times (-5) = -25$

$-12 \rightarrow -19 \rightarrow 95$

On peut écrire l'enchaînement des calculs en une seule expression : $[-12 + (-7)] \times (-5) = -19 \times (-5) = 95$

2.

Certains vont chercher la solution par tâtonnement. On peut valoriser cette méthode tout en montrant qu'elle est couteuse en temps.

Il est simple et naturel ici de remonter le programme :

$20 \div (-5) = -4$

$-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$

On teste $[3 + (-7)] \times (-5) = (-4) \times (-5) = 20$.

Chloé a donc choisi 20.

Le jeu des bulles

1. a. $[-4 \times 2 - (3 - 1)] \times (-10) = (-8 - 2) \times (-10) = 100$

La solution d'Estelle n'est pas correcte. Elle a obtenu 100, c'est l'opposé du nombre cherché.

b. $[(3 - 1) - (-4) \times 2] \times (-10)$

2. $[6 - (-4)] \times (-10)$

$[-4 + (-1)] \times (6 \times 3 + 2)$

40 L'Alaska

Prérequis : Calcul de moyenne non pondérée.

- En janvier, février, mars, novembre et décembre la température moyenne minimale est inférieure à -15°C .
- Moyenne = $(-28,1 + (-25,8) + (-18,7) + (-6,4) + 3,3 + 9,7 + 11,4 + 8,4 + 2,3 + (-7,7) + (-20,9) + (-26)) \div 12 = -98,5 \div 12 \approx -8,2$

En moyenne, la température minimale moyenne est environ $-8,2^{\circ}\text{C}$.

- On peut faire remarquer ici la pertinence d'utiliser une lettre pour la valeur inconnue, puis l'équation peut être résolue par retour au sens des opérations.

On note x la température moyenne en octobre :

$$[-23,4 + (-19,8) + (-11,7) + (-0,7) + 9,2 + 15,4 + 16,9 + 13,8 + 7,5 + x + (-16,3) + (-21,4)] \div 12 = -2,8$$

$$(-30,5 + x) \div 12 = -2,8$$

$$\text{donc } -38 + x = -2,8 \times 12$$

$$\text{donc } -30,5 + x = -33,6$$

$$\text{donc } x = -33,6 - (-30,5) = -33,6 + 30,5 = -3,1$$

La température moyenne en octobre est de $4,4^{\circ}\text{C}$.

- $11,9 + 10,2 + 9,4 + 8,1 + 15,5 + 34,8 + x + 49,8 + 24,1 + 22,9 + 20,3 + 21,6 = 276,1$

Soit $228,6 + x = 276,1$

$$\text{donc } 228,6 + x = 276,1$$

$$\text{donc } x = 276,1 - 228,6 = 47,5$$

En juillet, il tombe 47,5 mm de pluie.

- Le climat de type polaire peut être caractérisé par des températures froides toute l'année et des hivers glaciaux. Les précipitations sont peu abondantes.
- Le nord du Canada, l'Alaska et la Sibérie ont un climat de type polaire.

41 Temperature in Chicago

- $1,8 \times (-2) + 32 = -3,6 + 3,2 = -0,4$

When Paul leaves Paris, the temperature is $-0,4^{\circ}\text{F}$.

- On peut résoudre cette équation en revenant au sens des opérations.

$$1,8 \times T^{\circ}\text{ Celsius} + 32 = 14$$

$$\text{donc } 1,8 \times T^{\circ}\text{ Celsius} = 14 - 32 = -18$$

$$\text{et } T^{\circ}\text{ Celsius} = -18 \div 1,8 = -10$$

When Paul arrives at Paris, the temperature is -10°C .

- The coldest city is Chicago.

42 Carré magique (1)

-16	-3	-2	-13
-5	-10	-11	-8
-9	-6	-7	-12
-4	-15	-14	-1

-50	1	-20
4	10	25
-5	100	-2

$$\text{b. Constante} = -18 \times 6 \times (-2) = 216$$

-18	-1	12
4	6	-9
3	-36	-2

$$\text{c. On peut autoriser la calculatrice.}$$

Constante = 5 040

1	-15	-24	14
-12	28	3	-5
-21	6	-10	4
20	-2	7	-18

43 Carré magique (2)

- D'une part : $a \times b = -2 \times 10 = -20$, d'autre part : $c \times d = -4 \times (-5) = 20$.

On constate que $a \times b \neq c \times d$, on ne choisira donc pas $a = -2 ; b = 10 ; c = -4$ et $d = -5$.

- D'une part : $a \times b = -4 \times 3 = -12$, d'autre part : $c \times d = 2 \times (-6) = -12$.

On constate que $a \times b = c \times d$, on peut donc choisir $a = -4$; $b = 3$; $c = 2$ et $d = -6$.

-6	16	18
36	-12	4
8	9	-24

- $a = -6 ; b = -5 ; c = -15$ et $d = -2$

-75	36	-10
4	30	225
-90	25	-12

44 La bonne réponse

Le produit de 112,9 par $-47,2$ est positif, donc le résultat ne peut pas être $-5\ 318,88$ ni $-5\ 328,88$.

Le dernier chiffre non nul du produit est 8, donc le résultat ne peut pas être $4\ 318,96$.

Un ordre de grandeur de ce produit est $100 \times 50 = 5\ 000$, donc le résultat ne peut pas être $518,88$.

45 Températures dans l'espace

- $120 - (-170) = 290$, l'amplitude thermique sur la Lune est de 290°C .

• $490 - 446 = 44$, l'amplitude thermique sur Vénus est de 44°C .

• $-3 - (-133) = -3 + 133 = 130$, l'amplitude thermique sur Mars est de 130°C .

- $T^{\circ}\text{C} + 273,15 = T^{\circ}\text{F}$

$$\text{donc } T^{\circ}\text{C} = T^{\circ}\text{F} - 273,15 = 460 - 273,15 = 186,85$$

La température moyenne sur Vénus est $186,85^{\circ}\text{F}$.

- $T^{\circ}\text{C} = T^{\circ}\text{F} - 273,15 = 210 - 273,15 = -63,15$

La température moyenne sur Mars est $-63,15^{\circ}\text{C}$.

46 Géovision

- San Jose est à une altitude de 26 mètres.

- En cours de montée (1)

$$(1\ 526 - 26) \div 300 = 5$$

L'avion est monté de 5 fois 300 m.

$$20 - 2 \times 5 = 10$$

À 1 526 m, la température extérieure est donc 10°C .

- Fin de montée

On peut montrer ici l'intérêt d'utiliser une lettre.

On note x l'altitude en fin de montée.

$$20 + \frac{x - 26}{300} \times (-2) = -50$$

On peut résoudre cette équation en revenant au sens des opérations.

$$\frac{x - 26}{300} \times (-2) = -50 - 20$$

$$\frac{x - 26}{300} \times (-2) = -70$$

$$x - 26 = \frac{-70 \times 300}{-2}$$

$$x - 26 = 10\ 500$$

$$x = 10\ 526$$

En fin de montée, l'avion se trouve à 10 526 m.

- En cours de montée (2)

$$(6\ 000 - 26) \div 300 \approx 19,9$$

L'avion est monté d'environ 19,9 fois 300 m.

$$20 - 19,9 \times 2 = 20 - 39,8 = 20 + (-39,8) = -19,8$$

À 1 526 m, la température extérieure est donc $-19,8^{\circ}\text{C}$.

- Début de descente

L'altitude est toujours de 10 526 m.

Durant la phase de croisière, l'avion a volé 5 h à une vitesse de 870 km/h.

$$870 \times 5 = 4\ 350$$

Il a donc parcouru pendant cette phase 4 350 km.

$$4\ 350 + 300 = 4\ 650$$

La distance parcourue totale au début de la descente est donc de 4 650 km.

47 Jeu des jetons

À travers cet exercice, on active le calcul littéral. Il peut être intéressant de le proposer en groupe.

- Lili a obtenu -100 , donc : $a \times b \times c = -100$

• $a \times 2 \times b \times (-5) \times c = (a \times b \times c) \times 2 \times (-5)$
 $= -100 \times (-10) = 1000$

Mattéo a obtenu 1 000.

• $-1 \times b \times c \times a = -1 \times (a \times b \times c) = -1 \times (-100) = 100$
 Loane a obtenu 100.

• $a \times c \times a \times b \times a \times c \times b = (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times a$
 $= -100 \times (-100) \times a$
 $= 10\,000 \times a$

On ne peut donc pas déterminer le score d'Antoine.

On peut ici préciser que l'on a quand même simplifié l'écriture et que le score d'Antoine ne dépend que de la valeur de a .

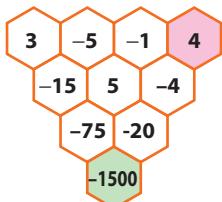
• $a \times (-3) \times c \times (-3) \times b \times (-3) \times a$
 $= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (a \times b \times c) \times a$
 $= -27 \times (-100) \times a = 2\,700 \times a$

On ne peut donc pas déterminer le score de Nina.

On peut ici aussi préciser que l'on a quand même simplifié l'écriture et que le score de Nina ne dépend que de la valeur de a .

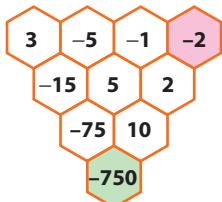
48 Le nid d'abeille

- Esteban :



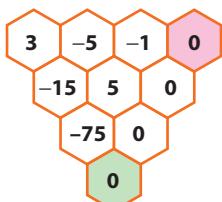
Esteban a tort : si on note 4 dans l'hexagone rose, on obtient 1 500.

- Léila :



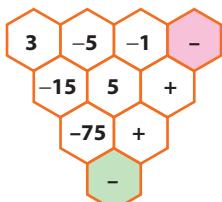
Léila a raison : si on note -2 dans l'hexagone rose, on obtient -750.

- Juliette :



Juliette a tort : si on note 0 dans l'hexagone rose, on obtient 0.

- Kim :



Kim a raison : si on choisit un nombre négatif dans l'hexagone rose, on obtient un nombre négatif dans l'hexagone vert.

- Lucas :

Il est important d'insister qu'un seul contre-exemple suffit pour prouver que Lucas a tort.

Si on prend -2, on trouve -750, et non -7 500. Donc Lucas a tort.

49 L'Iliade

1. $2\,016 - 3\,250 = 2\,016 + (-3\,250) = -1\,234$

La guerre se serait déroulée vers l'an -1234.

2. $-484 - 400 = -484 + (-400) = -884$

D'après Hérodote, Homère serait né vers l'an -884 soit au IX^e siècle avant J.-C.

3. $-420 - (-484) = -420 + 484 = 64$

Hérodote est mort à 64 ans.

4. $-800 - 50 = -800 + (-50) = -850$

$-800 + 50 = -750$

La date d'écriture de l'*Iliade* serait comprise entre l'an -850 et l'an -750.

On peut ici utiliser la notation [-850 ; -750].

5. $1\,530 + 480 - (-800) = 2\,010 + 800 = 2\,810$

P. Brunet a traduit l'*Iliade* 2 810 ans après son écriture en grec.

50 Débats

Cet exercice peut être l'occasion de faire un point sur les règles du débat mathématique.

Il se prête très bien à un travail en groupe suivi d'un débat en classe.

- Kim :

Il faut insister sur le fait qu'un seul contre-exemple suffit pour invalider une affirmation.

L'opposé du produit de 3 par (-4) est : $-[3 \times (-4)] = -(-12) = 12$
 Le produit des opposés de 3 et (-4) est : $(-3) \times 4 = -12$
 Donc l'affirmation de Kim n'est pas correcte.

- Juliette : Si $a = -5$, $-a = -(-5) = -1 \times (-5) = 5$, donc pour $a = -5$, $-a$ est positif.
 Donc l'affirmation de Juliette n'est pas correcte.
- Esteban :

Ici, il faut insister sur le fait que des exemples ne permettent pas de prouver une propriété générale.

Calculer le carré d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par lui-même.

- Si le nombre est positif, son carré est le produit de deux nombres positifs, ce produit est donc positif.
- Si le nombre est négatif, son carré est le produit de deux nombres négatifs, ce produit est donc positif.
 Donc l'affirmation d'Esteban est correcte.

- Lucas : $\frac{1}{4} \times 100 = 25$

Le quart de 100 est donc 25.

Si 25 facteurs sont positifs, alors 75 facteurs sont négatifs.
 Or dans un produit, si le nombre de facteurs négatifs est impair, alors ce produit est négatif.
 Donc s'il y a 75 facteurs négatifs, le produit est négatif.
 L'affirmation de Lucas est donc correcte.

- Léila : $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
 L'affirmation de Léila n'est donc pas correcte.

Algorithmique et outils numériques

Dans cette partie, certains élèves peuvent remplacer le nombre choisi par une lettre et donner une écriture littérale des programmes de calculs. Dans ce cas, il sera bien sûr intéressant de le relever afin de réactiver doucement le calcul littéral.

51 Programme de calcul (1)

2. a. Dans la cellule B2, on entre $=B1*(-2)$.

Dans la cellule B3, on entre $=B2+27$.

Dans la cellule B4, on entre $=B3*(-6)$.

Dans la cellule B5, on entre $=B4-3*B1$.

- b. Le nombre affiché en B5 est le résultat du programme de calcul.

3. En utilisant le tableur, en remplaçant successivement les nombres choisis dans la cellule B1, on trouve que :

- a. Si l'on choisit -5,8, on obtient -214,2.

A	B
1 Choisir un nombre	-5,8
2 Multiplier ce nombre par -2	11,6
3 Ajouter 27	38,6
4 Multiplier ce nombre par -6	-231,6
5 Soustraire le triple du nombre de départ	-214,2

- b. Si l'on choisit -12 , on obtient -270 .

	A	B
1	Choisir un nombre	-12
2	Multiplier ce nombre par -2	24
3	Ajouter 27	51
4	Multiplier ce nombre par -6	-306
5	Soustraire le triple du nombre de départ	-270

- c. Si l'on choisit -3 , on obtient -189 .

	A	B
1	Choisir un nombre	-3
2	Multiplier ce nombre par -2	6
3	Ajouter 27	33
4	Multiplier ce nombre par -6	-198
5	Soustraire le triple du nombre de départ	-189

- d. Si l'on choisit 25 , on obtient 63 .

	A	B
1	Choisir un nombre	25
2	Multiplier ce nombre par -2	-50
3	Ajouter 27	-23
4	Multiplier ce nombre par -6	138
5	Soustraire le triple du nombre de départ	63

4.

Ici c'est le tâtonnement qui est attendu. Si nécessaire on peut apprendre aux élèves à tâtonner correctement (voire tâtonner par dichotomie, méthode assez naturelle pour les élèves).

10 donne -72 . 20 donne 18 .
 15 donne -27 . 17,5 donne $-4,5$.
 18,75 donne $6,75$. 18 donne 0 .
 Valentin a donc choisi 18 .

5. Voici le script correspondant à ce programme de calcul :

```

quand vert cliqué
    demander "nombre de départ ?" et attendre
    mettre "nombre choisi" à réponse
    mettre "résultat" à -2 * nombre choisi
    ajouter à "résultat" 27
    mettre "résultat" à -6 * résultat
    ajouter à "résultat" -3 * nombre choisi
    dire "résultat" pendant 2 secondes
  
```

52 Programme de calcul (2)

1.

Choisir un nombre.
 Ajouter -12 à ce nombre.
 Multiplier cette somme par -2 .
 Ajouter l'opposé du nombre de départ.
 Donner le résultat.

2.

On pourra demander aux élèves d'écrire dans chaque cas, l'expression numérique correspondant à l'enchaînement de calculs.

a. $0 \rightarrow -12 \rightarrow 24 \rightarrow 24$

Si on choisit 0 , on obtient 24 .

$$[0 + (-12)] \times (-2) + (-1) \times 0 = 24 + 0 = 24$$

b. $1 \rightarrow -11 \rightarrow 22 \rightarrow 21$

Si on choisit 1 , on obtient 21 .

$$[1 + (-12)] \times (-2) + (-1) \times 1 = 22 + (-1) = 21$$

c. $-1 \rightarrow -13 \rightarrow 26 \rightarrow 27$

Si on choisit -1 , on obtient 27 .

$$[-1 + (-12)] \times (-2) + (-1) \times (-1) = 26 + 1 = 27$$

3. Après exécution du script, on obtient les mêmes résultats.

53 Programme de calcul (3)

1.

Choisir un nombre.
 Ajouter -3 à ce nombre.
 Prendre l'inverse de cette somme.
 Ajouter -2 .
 Donner le résultat.

2.

On pourra là aussi demander aux élèves d'écrire l'expression numérique correspondant à l'enchaînement de calculs.

$$\begin{aligned} 4 &\rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow -1 \\ \frac{1}{4 + (-3)} + (-2) &= \frac{1}{1} + (-2) = -1 \end{aligned}$$

3. On calcule l'inverse de la somme du nombre choisi et -3 .
 Donc la somme du nombre choisi et -3 doit être différente de 0 .
 Par conséquent le nombre choisi doit être différent de 3 .

54 À toi de jouer

Traduire « prendre l'opposé d'un nombre » peut poser problème à certains élèves.

```

quand vert cliqué
    demander "nombre de départ ?" et attendre
    mettre "nombre choisi" à réponse
    mettre "résultat" à -2 * nombre choisi
    ajouter à "résultat" 27
    mettre "résultat" à -6 * résultat
    ajouter à "résultat" -3 * nombre choisi
    dire "résultat" pendant 2 secondes
  
```



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. a. $5 - 0,5 = 4,5$
 $4,5 \times 2 \times 5 = 45$

b. $5^2 = 25$
 $25 \times 2 = 50$
 $50 - 5 = 45$

2. Les formules possibles sont :
 $= A2 * A2 * 2 - A2$

$$= 2 * A2^2 - A2$$

Exercice 1

1. Programme A :
 $-10 - 0,5 = -10,5$
 $-10,5 \times 2 \times (-10) = 210$

Programme B :
 $(-10)^2 = 100$
 $100 \times 2 = 200$
 $200 - (-10) = 200 + 10 = 210$

2. a. Les formules possibles sont :

$$= A2 * A2 * 2 - A2 = 2 * A2^2 - A2$$

b. On peut conjecturer que ces deux programmes sont équivalents, c'est-à-dire pour un même nombre choisi, ils donnent le même résultat.

Démonstration :

On note x le nombre de départ.

Le résultat obtenu en appliquant le programme A est :

$$(x - 0,5) \times 2 \times x$$

Le résultat obtenu en appliquant le programme B est :

$$x^2 \times 2 - x$$

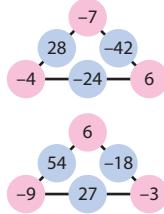
$$(x - 0,5) \times 2 \times x = 2 \times x \times x - x = 2 \times x^2 - 0,5 \times 2 \times x = 2 \times x^2 - 1 \times x = 2 \times x^2 - x$$

Les programmes A et B sont donc équivalents.

Exercice 2

1. Liam a obtenu la case bleue en multipliant les nombres notés sur les deux cases roses qui l'entourent.

2.

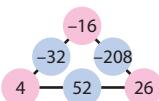


$$\begin{aligned}-7 \times (-4) &= 28 \\ -7 \times 6 &= -42 \\ -4 \times 6 &= -24\end{aligned}$$

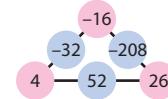
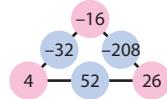
$$54 \div (-9) = -6$$

Exercice 2

Liam a obtenu la case bleue en multipliant les nombres notés sur les deux cases roses qui l'entourent puis il a divisé ce produit par 2.



Il y a deux possibilités pour le triangle 3.

**Analyse d'une production**

	1	2	3	4	5
A	-1	0	0		-3
B	2	1		-3	9
C		3	6		6
D	5		5	4	
E		-1	4		-8

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances associées sont :

- calculer avec les nombres relatifs en écriture décimale (somme, différence, produit et quotient), notion d'opposé ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ; définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs) ; connaître les préfixes de nano à giga.

- Le but commun est de résoudre des problèmes :

- en utilisant les nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes, faire des bilans, calculer des taux d'accroissement ;
- en utilisant les puissances et la notation scientifique pour résoudre des problèmes liés à la physique, à la technologie, pour associer à des objets des ordres de grandeur (un atome, une bactérie, la distance de la Terre à la Lune).

- Repères de progressivité

Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient, et,

quand ces notions ont été bien installées, ils font le lien avec le calcul littéral.

Les puissances de 10 d'exposant entier positif sont manipulées dès la 4^e, en lien avec les problèmes scientifiques ou technologiques. Les exposants négatifs sont introduits progressivement. Les puissances positives de base quelconque sont envisagées comme raccourci d'un produit.

En fin de cycle, les élèves doivent maîtriser ce calcul à la main, mental ou avec une calculatrice.

- Les notions travaillées dans ce chapitre ont déjà été abordées en début et milieu de cycle. Cependant la maîtrise et le sens des calculs sur les nombres relatifs et les puissances ne sont souvent pas complètement acquis pour de nombreux élèves.

Il peut être judicieux d'aborder ce chapitre par petites touches régulières sur plusieurs débuts de séance afin de permettre aux plus fragiles de maîtriser ces notions et aux plus avancés de ne pas se lasser tout en assurant un entretien de ces savoirs.

Dans ce chapitre, le calcul mental, réfléchi et intelligent est privilégié. Ainsi, sauf mention contraire, la calculatrice ne sera pas autorisée.

Activités

Questions flash

1. a. $-3 + 5 = 2$ b. $5 - 8 = 5 + (-8) = -3$

c. $-5 - 4 = -5 + (-4) = -9$

e. $2,4 - (-5) = 2,4 + 5 = 7,4$

f. $-4,1 - 7,8 = -4,1 + (-7,8) = -11,9$

g. $5 - (-7) = 5 + 7 = 12$

b. $1,5 + 3,5 = 5$

d. $5 + (-2) = 3$

2. a. $0,5 \times 3,4 \times 2 \times 10 = (0,5 \times 2) \times 3,4 \times 10 = 1 \times 34 = 34$

b. $5 \times 4,2 \div 10 = 21 \div 10 = 2,1$

c. $\frac{10 \times 6}{3 \times 5} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2}{1} = 4$

3. a. L'opposé de 3 est -3.

L'opposé de -5 est 5.

L'opposé de 0 est 0.

b. L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$.

L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$.

L'inverse de 1 est 1.

- 4. Pour répondre le plus vite possible, on tape :

a. $2,8^5$ b. $(-5) \times 3$
c. 3^4 d. $(-7)^3$

5. a. $3,125 \times 100 = 312,5$ b. $5,45 \times 100\ 000 = 545\ 000$

c. $4\ 500 \div 1\ 000 = 4,5$

e. $315 \times 0,01 = 3,15$

g. $5,25 \div 0,1 = 5,25 \times 10 = 52,5$

h. $4,2 \div 0,000\ 01 = 420\ 000$

b. $12 \div 10\ 000 = 0,0012$

d. $25 \times 0,000\ 1 = 0,002\ 5$

f. $3 \times 0,001 = 0,003$

Vers le Cap-Ferret

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver l'addition et la soustraction de nombres relatifs.

Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation avec des nombres relatifs, additionner et soustraire deux nombres relatifs.

La capacité introduite est l'addition et la soustraction des nombres relatifs.

Cette activité donne l'occasion aux élèves de travailler le sens de l'addition et la soustraction de nombres relatifs ainsi que la technique de calcul d'une somme algébrique.

Activité 1

$20 - 5 + 12 - 18 + 5 - 9 = 37 - 32 = 5$

À l'arrivée, 5 personnes descendront du bus avec Yann.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver la multiplication et la division de nombres relatifs.
Les prérequis nécessaires sont de connaître les équations du 1^{er} degré.
La capacité introduite est la multiplication et la division des nombres relatifs.
Les deux équations peuvent ne pas être résolues de manière experte, ni même écrites par certains élèves mais résolues par tâtonnement ou par retour au sens des opérations. Il sera intéressant de montrer à ces élèves l'efficacité d'une résolution algébrique et de réactiver ainsi la définition d'une équation ainsi que la résolution d'une équation du 1^{er} degré.

1. a. $-3 \times 7 + 24 = -21 + 24 = 3$; la calculatrice affichera 3.

b. $-3 \times (-5) + 24 = 15 + 24 = 39$; la calculatrice affichera 39.

2. a. On cherche x tel que : $-3x + 24 = -24$.

Cela revient à résoudre : $-3x + 24 - 24 = -24 - 24$.

soit : $-3x = -48$

$$\text{soit : } x = \frac{-48}{-3} = 16$$

Au départ, Inès a entré 16 dans sa calculatrice.

- b. On cherche x tel que : $-3x + 24 = 54$.

Cela revient à résoudre : $-3x + 24 - 24 = 54 - 24$.

soit : $-3x = 30$

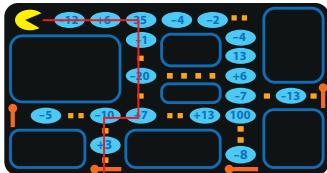
$$\text{soit : } x = \frac{30}{-3} = -10$$

Au départ, Inès a entré -10 dans sa calculatrice.

Pac-Man

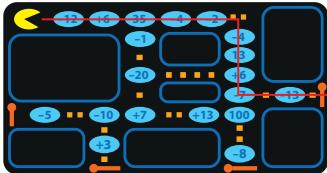
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver la règle des signes d'un produit de plusieurs facteurs.
Les prérequis nécessaires sont de connaître le produit de deux nombres relatifs.
La capacité introduite est la multiplication et la division des nombres relatifs.
Il faut préciser que la calculatrice n'est pas autorisée afin que les élèves soient amenés à ne chercher que le signe du produit. On peut commencer par un travail individuel. Ce travail peut être suivi d'une mise en commun par petit groupe.
Il sera important de réactiver le fait que le signe n'est déterminé que par le nombre de facteurs négatifs.



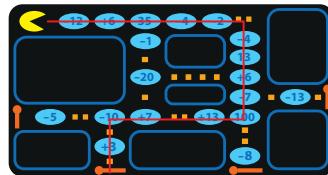
$$-12 \times 6 \times 35 \times (-1) \times (-20) \times 7 \times (-10) \times 3$$

Il y a 4 facteurs négatifs, ce produit est donc positif.



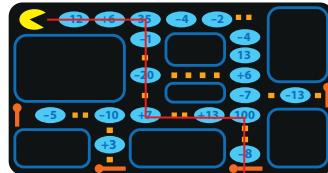
$$-12 \times 6 \times 35 \times (-4) \times (-2) \times (-4) \times 13 \times 6 \times (-7) \times (-13)$$

Il y a 6 facteurs négatifs, ce produit est donc positif.



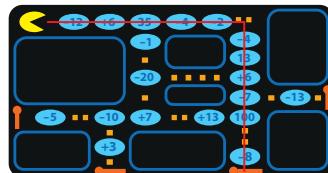
$$-12 \times 6 \times 35 \times (-4) \times (-2) \times (-4) \times 13 \times 6 \times (-7) \times 100 \times 13 \times 7 \times (-10) \times 3$$

Il y a 6 facteurs négatifs, ce produit est donc positif.



$$-12 \times 6 \times 35 \times (-1) \times (-20) \times 7 \times 13 \times 100 \times (-8)$$

Il y a 4 facteurs négatifs, ce produit est donc positif.



$$-12 \times 6 \times 35 \times (-4) \times (-2) \times (-4) \times 13 \times 6 \times (-7) \times 100 \times (-8)$$

Il y a 6 facteurs négatifs, ce produit est donc positif.

Attaque informatique

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver les calculs de puissances de nombres relatifs.
Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation, calculer avec des nombres entiers.
La capacité introduite est le calcul de la puissance d'un nombre.
La calculatrice sera autorisée pour cette activité.
On peut commencer par un travail individuel. Ce travail peut être suivi d'une mise en commun par petit groupe.
Cette activité permet de donner du sens à la puissance d'un nombre, de réactiver les puissances d'exposant positif et négatif et permettra également de réintroduire pour les plus avancés l'inverse d'un nombre et la notion d'inéquation.

1. À 16 heures, $5 \times 5 \times 5$ millions de fichiers seront touchés.
Soit 125 millions de fichiers seront touchés à 16 h.

2. À 9 heures, $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ millions de fichiers seront touchés.

Soit $\frac{1000000}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 1600$ fichiers étaient touchés à 9 heures.

De plus, $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$.

Donc ils ont tous les deux raison.

3. Soit n le nombre d'heures passées après 13 heures.

On cherche donc la valeur maximale de n tel que $5^n < 100000$.

En utilisant la calculatrice, on trouve que $5^7 = 78\ 125$ et que $5^8 = 390\ 625$.

L'ingénieur a donc 7 heures pour agir avant que 100 000 millions de fichiers ne soient cryptés.

- 4.

Ici, il y a deux méthodes.

- En utilisant la question 2. :

À 9 heures, 1 600 fichiers étaient cryptés, donc à 8 heures, il y en avait 5 fois moins, soit 320, et à 7 heures encore 5 fois moins, soit 64 fichiers. Donc à 7 heures, moins de 100 fichiers étaient touchés.

- En utilisant une méthode experte mais pas vraiment avantageuse :

Soit n le nombre d'heures avant 13 heures.

On cherche donc la valeur minimale de n tel que $\frac{1\ 000\ 000}{5^n} < 100$.

Or $1\ 000\ 000 \times \frac{1}{5^n} = 1\ 000\ 000 \times 5^{-n}$, donc on cherche n tel que :

$1\ 000\ 000 \times 5^{-n} < 100$. Soit $5^{-n} < \frac{100}{1\ 000\ 000}$, soit $5^{-n} < \frac{1}{10\ 000}$.

En utilisant la calculatrice, on trouve que $5^{-5} = 0,000\ 32$ et que $5^{-6} = 0,000\ 064$.

$13 - 6 = 7$, donc à 7 heures, moins de 100 fichiers étaient touchés.

Projets SVT

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réactiver les puissances de 10 et l'écriture scientifique.

Les prérequis nécessaires sont de savoir lire un tableau à double entrée, lire un tableau, connaître le préfixe μ .

La capacité introduite est le calcul de la puissance d'un nombre.

Cette activité utilise la notation du tableau pour motiver la réintroduction de l'écriture scientifique que les élèves retrouveront aussi sur les calculatrices les moins récentes.

Il sera bien sûr important de demander aux élèves la signification du E et de leur demander comment ils écriraient ces résultats sur leur feuille, puis de décrire à l'oral la définition d'une telle écriture.

Activité 5

1. a. L'écriture utilisée par le tableur est une abréviation de l'écriture scientifique.

b. Cette écriture permet un gain de place.

2. a. Dans la feuille de calcul de Valentin, le tableur affichera :

- en B5 : -6,8E+07 pour $-6,8 \times 10^7$.
- en C5 : -6,5E+07 pour $-6,5 \times 10^7$.

b. Dans la feuille de calcul d'Hédi, le tableur affichera en B5 : 2,5E-7 pour $2,5 \times 10^{-7}$.

Exercices

Additionner et soustraire des nombres relatifs

Questions flash

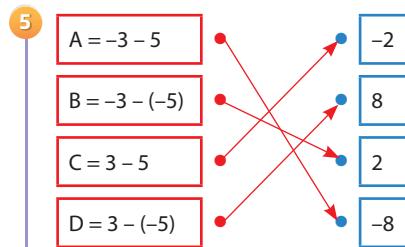
1. a. La somme de deux nombres négatifs est **négative**.
 b. -6 et 6 sont deux nombres **opposés**.
 c. L'opposé de -12 est **12**.
 d. Pour soustraire -8, on ajoute **8**.

2. a. $-3 + 8 = 5$ b. $7 + (-9) = -2$
 c. $-4 + (-7) = -11$ d. $120 - (-25) = 125$
 e. $-28 - (-47) = 29$ f. $-0,08 - 0,32 = -0,4$

3. $5 + 3 - 5 + 4 - 1 = 3 + 4 - 1 = 7 - 1 = 6$
 Lucas a gagné 6 billes.

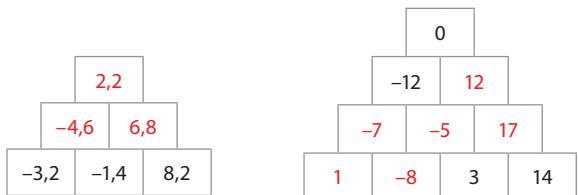
4. Cet exercice est l'occasion de réinvestir les techniques de base de calcul avec les nombres relatifs : on change les soustractions en additions, on repère les opposés, on regroupe les positifs et les négatifs.
 Les élèves plutôt à l'aise pourront aussi simplifier les écritures avant de se lancer dans le calcul.

a. $-8 + 12 + 20 + 8 - 14$
 $= -8 + 12 + 20 + 8 + (-14)$
 $= 12 + 20 + (-14)$
 $= 32 + (-14)$
 $= 18$
 b. $9 - (-12) - 25 - 12$
 $= 9 + 12 + (-25) + (-12)$
 $= 9 + (-25)$
 $= -16$
 c. $0,4 + 1,7 - 3,2 + 0,6 - 0,5$
 $= 0,4 + 1,7 + 0,6 - 3,2 - 0,5$
 $= 2,7 - 3,7$
 $= -1$
 d. $0,25 + 3,4 - (-0,25)$
 $= 0,25 + 3,4 + 0,25$
 $= 3,9$



6. a. $-2,5 + 8 = 5,5$
 c. $7,8 - (-3,4) = 11,2$
 e. $-129 - (-145) = 16$

- b. $-2,3 - 1,4 = -3,7$
 d. $-14,2 + 1,6 = -12,6$
 f. $17 - 28 = -11$



8. a. $-16 = -10 + (-6)$
 b. $-16 = 10 + (-26)$
 c. $-16 = -26 - (-10)$

9. $E = -5 + 9 - 4 - (-4) + (-9) - 12 + 7$
 $= -5 + 9 - 4 + 4 - 9 + (-12) + 7$
 $= 7 + (-5) + (-12)$
 $= 7 + (-17)$
 $= -10$
 $F = -2,7 + 5,4 + 8 - (-0,6) - 1,3 - (-8)$
 $= -2,7 + 5,4 + 8 + 0,6 - 1,3 + 8$
 $= -2,7 + 5,4 + 8 + 0,6 + (-1,3) + 8$
 $= 5,4 + 8 + 0,6 + 8 + (-2,7) + (-1,3)$
 $= 22 + (-4)$
 $= 18$
 $G = 142 - 27 - (-38) + 240 + (-33) - 150$
 $= 142 + (-27) + 38 + 240 + (-33) + (-150)$
 $= 142 + 38 + 240 + (-27) + (-33) + (-150)$
 $= 420 + (-210)$
 $= 210$
 $D = 12 - (5 - 18 + 7) + 19 - (4 + 8)$
 $= 12 - (-6) + 19 - 12$
 $= 12 + 6 + 19 + (-12)$
 $= 25$

Multiplier et diviser des nombres relatifs

Questions flash

- 10** a. Le produit de deux nombres négatifs est **positif**.
 b. Le quotient d'un nombre positif par un nombre négatif non nul est **négatif**.
 c. $-1 \times (-3)$ est l'opposé de **-3**.
 d. Un produit de facteurs est positif si le nombre de facteurs négatifs est **pair**.

11 a. $4 \times (-2) = -8$ b. $-25 \times (-4) = 100$
 c. $-2,5 \times 100 = -250$ d. $\frac{20}{-4} = -5$
 e. $\frac{-35}{-100} = 0,35$ f. $\frac{-45}{-90} = 0,5$

- 12** a. Positif.
 b. Négatif.
 c. Négatif.
 d. Négatif.

13
$$\begin{array}{r} -4 \\ -7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ -7 \\ \hline \end{array}$$

14 a. $-0,25 \times 4 = -1$ b. $1,5 \times 4 = 6$
 c. $(-12) \times (-5) = 60$ d. $\frac{-5}{0,1} = -50$
 e. $\frac{-40}{-80} = 0,5$ f. $\frac{1,2}{-3} = -0,4$

15 a. $-24 = -8 \times 3$
 b. $-24 = 2 \times (-3) \times 4$
 c. $-24 = \frac{48}{-2}$

16 a. $-132 \times 70 = -9\,240$ d. $-1,32 \times (-7) = 9,24$
 b. $13,2 \times 0,7 = 9,24$ e. $0,132 \times (-700) = -94,2$
 c. $-1 \times 1,32 \times (-70) = 94,2$ f. $13\,200 \times (-0,07) = -924$

17 a. $\frac{5}{2} = \frac{-5}{-2}$ b. $-\frac{5}{2} \neq \frac{5}{2}$ c. $\frac{-5}{2} = \frac{5}{-2}$
 d. $\frac{5}{2} \neq \frac{5}{-2}$ e. $-\frac{5}{2} = \frac{5}{-2}$ f. $-\frac{5}{2} = -\frac{5}{-2}$

18 a. $-1 \times 2 = -2$ b. $-(-5) = 5$ c. $-\frac{10}{-5} = 2$

19 Ici on pourra préciser que l'on peut regrouper certains facteurs pour calculer astucieusement.

a. $-0,2 \times 4,8 \times 5 \times 10$ b. $8 \times (-100) \times 2,34 \times (-0,125)$
 $= -4,8 \times 0,1 \times 10$ $= 8 \times 0,125 \times 100 \times 2,34$
 $= -4,8$ $= 234$
 c. $-0,01 \times (-500) \times 4 \times (-0,1) \times 2,5$
 $= -5 \times 1 = -5$
 d. $\frac{-3 \times (-1) \times 10}{(-2) \times 4 \times 5}$ e. $\frac{-6 \times 8 \times (-10)}{3 \times 2 \times 5}$
 $= \frac{30}{-40}$
 $= -0,75$ $= \frac{48}{3}$
 $= 16$

20 Il est possible de rappeler rapidement les priorités de calculs avant de faire cet exercice.

a. $-8 + 10 \times (-3) - (-5)$ b. $[(10 - 17) \times 3 - 5] \times 2$
 $= -8 + (-30) + 5$ $= (-7 \times 3 - 5) \times 2$
 $= -38 + 5$ $= (-21 - 5) \times 2$
 $= -33$ $= -26 \times 2$
 $$ $= -52$
 c. $\frac{-4 \times 5 + 8}{-2 - 1}$ d. $\frac{12 - 6 \times (-4)}{-3 \times 2}$
 $= \frac{-20 + 8}{-3}$
 $= \frac{-12}{-3}$
 $= 4$ $= \frac{12 - (-24)}{-6}$
 $= \frac{36}{-6}$
 $= -6$

Calculer la puissance d'un nombre

Questions flash

- 21** a. $7,1 \times 7,1 \times 7,1 = 3 \times 7,1$
 b. $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^6$
 c. $\frac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6^5} = 6^{-5}$
 d. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 4^{-6}$
22 a. $1\,000 = 10^3$ b. $10\,000\,000 = 10^7$
 c. $0,000\,1 = 10^{-4}$ d. $\frac{1}{1\,000\,000} = 10^{-6}$
 e. $\text{dix millions} = 10^6$ f. $\text{un cent-millième} = 10^{-5}$
23 a. $10^2 = 100$ b. $10^{-3} = 0,001$
 c. $(-10)^6 = 1\,000\,000$ d. $10^{-5} = 0,000\,01$
 e. $10^9 = 1\,000\,000\,000$ f. $(-10)^{-2} = 0,01$
24 a. Oui, car $1 \leqslant 1,2 < 10$ et 10^{-3} .
 b. Non, c'est la forme décimale.
 c. Non, car $25,7 > 10$.
 d. Non, car $0,24 < 10$.
 e. Oui, car $1 \leqslant 2,5 < 10$ et 10^5 .
 f. Non, car 3^{10} n'est pas une puissance de 10.

25 $3^3 = 27$
 Il y a 27 menus différents.
26 Au rang 7 : $4^7 = 16\,384$
 Au rang 10 : $4^{10} = 1\,048\,576$
27 a. $5^2 = 25$ b. $18^0 = 1$ c. $(-1)^{19} = -1$
 d. $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25$ e. $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,25$

28 Les règles sur les puissances ne sont pas un attendu de fin de cycle mais l'on peut à la suite de cet exercice aller un peu plus loin et énoncer quelques règles de calcul avec les puissances que l'on pourra aussi travailler dans le cadre de l'accompagnement personnalisé.

a. $5^3 \times 5^8 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3 \text{ facteurs}} \times \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{8 \text{ facteurs}} = 5^{11}$
 b. $(-2)^6 \times (-2)^3 = \underbrace{(-2) \times \dots \times (-2)}_{6 \text{ facteurs}} \times \underbrace{(-2 \times \dots \times (-2))}_{3 \text{ facteurs}} = (-2)^9$

c. $\frac{10^5}{10^9} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

29 Pour que l'exercice soit bénéfique, l'utilisation de la calculatrice est déconseillée, elle peut être utilisée une fois l'exercice terminé pour permettre aux élèves de vérifier leur calcul. Dans le cas d'un travail en groupe, on peut amener les élèves à réfléchir sur les différentes erreurs qui ont été faites.
 Lors de la correction, ne pas hésiter à bien détailler les calculs pour que les élèves s'approprient les priorités de calcul.

a. $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$
 b. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
 c. $3 \times 2^3 = 3 \times 6 = 18$
 d. $100 \times 5^{-2} = \frac{100}{25} = 4$
 e. $(1 + 5)^2 = 6^2 = 36$

30 A = $1,7 \times 10^2 - 5^2 \times 2$ B = $10 \times (-2)^4 + (3 \times 2)^2$
 C = $(8-9)^{11} \times (-6) - 3^2$ D = $6 \times 5 + (-2)^{-3} \times 80$

31

	Écriture décimale (en m)	Écriture scientifique (en m)
1 nanomètre (nm)	0,000 000 001	10^{-9}
1 micromètre (μm)	0,000 001	10^{-6}
1 millimètre	0,001	10^{-3}
1 kilomètre	1 000	1×10^3
1 année-lumière	9 461 000 000 000 000	$9,461 \times 10^{15}$

2. a. $8 \mu\text{m} = 0,000 008 \text{ m} = 8 \times 10^{-6} \text{ m}$
b. $6,95 \times 10^5 \text{ km} = 6,95 \times 10^3 \times 10^5 \text{ m}$
 $= 6,95 \times 10^8 \text{ m}$
 $= 695 000 000 \text{ m}$
c. $1 000 \text{ nm} = 1 000 \times 10^{-9} \text{ m}$
 $= 1 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,000 001 \text{ m}$
d. $150 000 000 \text{ km} = 150 000 000 000 \text{ m}$
 $= 150 \times 10^9 \text{ m}$

32

Pour classer ces nombres dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand), on commence par tous les écrire sous forme décimale (ou scientifique).

$$\begin{aligned}0,59 \times 10^5 &= 59 000 \\5,95 \times 10^3 &= 5 950 \\59 100 &\\592 \times 10 &= 5 920 \\592 \times 10 < 5,95 \times 10^3 < 0,59 \times 10^5 < 59 100\end{aligned}$$

Problèmes

33

Calculs et codes secrets

1. a. $(-5 + 3) \times 2 - (-17)$
 $= -2 \times 2 + 17$
 $= -4 + 17$
 $= 13$
b. $\frac{4 \times (-3) \times 10}{-6 \times 5 \times 4}$
 $= \frac{-30}{-30} = 1$
c. $2^4 \times 5 - (10 - 12)^2 \times 15$
 $= 16 \times 5 - 2^2 \times 15$
 $= 80 - 4 \times 15$
 $= 80 - 60 = 20$
d. $\frac{3,2 \times 10^4}{4 \times 10^3}$
 $= \frac{3,2}{4} \times \frac{10^4}{10^3}$
 $= 0,8 \times 10^1 = 8$

2. $13 \rightarrow M \quad 1 \rightarrow A \quad 20 \rightarrow T \quad 8 \rightarrow H$

Le mot que l'on obtient est MATH.

34

Affirmations

1. Vrai, car si le nombre de facteurs négatifs est le double du nombre de facteurs positifs, il y a donc un nombre pair de facteurs négatifs et le résultat est positif.
2. $(x + 2) \times (-3) + 6 = -3x - 6 + 6 = -3x$
Faux, car si on choisit un nombre négatif le résultat sera positif.

Certains élèves utiliseront naturellement le calcul littéral pour répondre à la question, d'autres feront des tests. Si, en testant, des élèves n'ont pas pensé à faire le calcul avec des nombres négatifs et ont répondu « Vrai » pour cette affirmation, on pourra une nouvelle fois insister sur le fait qu'un exemple n'est pas une preuve. En effet, ici, ils n'ont testé que des nombres positifs et leur conclusion est fausse.

35

Énigmes

1. Le produit des deux nombres est positif, ce qui signifie que ces deux nombres sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs.
Voici les décompositions de 36 comme produit de deux nombres positifs possibles :
 $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

En étudiant les différents produit, on remarque que : $-3 \times (-12) = 36$ et $-3 + (-12) = -15$

Aucun autre couple de nombres ne vérifie les conditions requises donc $a = -3$ et $b = -12$.

2. Si le quotient de a par b est positif, alors a et b sont de même signe, et si la somme de a et b est négative, ces deux nombres doivent être négatifs, car la somme de deux nombres positifs est positive.

36

Dilatation d'un rail

La différence de température entre l'hiver et l'été est égale à $-20 - 40 = -60^\circ\text{C}$.

En été, le rail mesure 30 m, donc $L_0 = 30 \text{ m}$.

$$\Delta L = 12 \times 10^{-6} \times L_0 \times \Delta T$$

$$\Delta L = 12 \times 10^{-6} \times 30 \times (-60)$$

$$\Delta L = -21 600 \times 10^{-6} = 0,216 \text{ m}$$

$$30 - 0,216 = 29,784 \text{ m}$$

Le rail mesure 29,784 m en hiver.

37

Ça rebondit !

1. $1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0,06$

Au 5^e rebond, la balle remonte à environ 0,24 m.

$1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0,06$

Au 10^e rebond, la balle remonte à environ 0,06 m.

2. $1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0,100 1 \quad 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 0,075$

La balle remonte à moins de 10 cm au 9^e rebond.

38

Produit négatif

Le produit $n(n - 3)$ est négatif si l'un des deux facteurs est négatif.

Si n est négatif, alors $n - 3$ est négatif donc le produit est positif. Donc n est un nombre positif.

On va maintenant s'intéresser au facteur $n - 3$.

Si $n > 3$, $n - 3 > 0$.

Le produit est alors positif, n est donc un nombre entier **positif et inférieur à 3**.

Les valeurs possibles de n sont 1 et 2.

39

Master Mind

1. There are 7 possibilities for the first color, 7 for the second, 7 for the third and again 7 for the forth.

So there are $7^4 = 2 401$ codes.

2. There are 7 possibilities for the first color, 6 for the second, 5 for the third and 4 for the forth.

So there are $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ codes.



40

Carré magique (1)

1. Après avoir fait la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, on remarque que tous les résultats sont égaux à 3. Ce carré est bien un carré magique additif.

	0	5	-2	3
-1		1	3	3
4		-3	2	3
3	$0 - 1 + 4 = 3$	$5 + 1 - 3 = 3$	$-2 + 3 + 2 = 3$	3

2. Après avoir fait le produit des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, on remarque que tous les résultats sont égaux à 2^3 . Ce carré est bien un carré magique multiplicatif.

	2^0	2^5	2^{-2}	2^3
2^{-1}	2^1	2^3	2^3	
2^4	2^{-3}	2^2	2^3	
2^3	2^3	2^3	2^3	2^3

$$2^0 \times 2^{-1} \times 2^4 = \frac{1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2^3$$

$$2^5 \times 2^1 \times 2^{-3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^3$$

3.

Cette question est l'occasion de mettre en lumière les règles de calcul sur les puissances.
 $a^n \times a^m = a^{n+m}$ pour répondre à la question dans un premier temps.
 Puis, une fois l'exercice corrigé, on pourra proposer des calculs du type $\frac{2^5}{2^3}, \frac{2^5}{2^7}$, puis $(5^2)^4\dots$ pour étendre la remarque aux règles du type $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $(a^n)^m = a^{m+n}$.

Après une phase de recherche individuelle, les élèves pourront confronter leurs idées en groupe et faire émerger la première règle de calcul.

En calculant $2^0 \times 2^{-1} \times 2^4$, on remarque que ce produit est égal à $2^{0-1+4} = 2^3$, de même $2^5 \times 2^1 \times 2^{-3} = 2^{5+1-3} = 2^3$, et les autres produits... Or comme le carré de la question 1. était un Carré magique additif de constante 3, le Carré magique 2. est donc un Carré magique multiplicatif de constante 2^3 .

41 Carré magique (2)

1. Lors de la correction de cet exercice, on pourra réinvestir la règle vue dans l'exercice précédent et introduire $a^n \times b^n = (ab)^n$.

	↓	↓	↓	↓	
→ 1	bc	ab^3	a^3		$1 \times bc \times ab^3 \times a^3 = a^{1+3} \times b^{1+3} \times c = a^4b^4c = (ab)^4c$
→ a^3b	ab^2	c	b		$a^3b \times ab^2 \times c \times b = a^4b^4c = (ab)^4c$
→ ac	ab	a^2b	a^2		$(ab)^4c$
→ b^3	a^2	a	abc		$(ab)^4c$
$(ab)^4c$	$(ab)^4c$	$(ab)^4c$	$(ab)^4c$		$(ab)^4c$

2.	1	-15	54	-8
	24	18	5	-3
	-10	-10	-12	9
	-27	4	-2	30

La constante est égale à 32.

Prolongement de l'exercice dans la partie « Algorithmique et outils numériques ».

42 L'éponge de Menger

1. a. À l'étape 1, le cube de départ est découpé en 27 petits cubes, puis on enlève le cube central et les 6 cubes de chaque face, il y a donc $27 - 7 = 20$ petits.
 À l'étape 2, chacun des 20 petits cubes précédents est découpé et donne aussi 20 petits cubes, il y a alors $20 \times 20 = 400$ petits cubes.
 À l'étape 3, on recommence et le solide est composé de $20^3 = 8\ 000$ petits cubes.
 b. À l'étape 6, le solide est formé par $20^6 = 6,4 \times 10^7$ petits cubes.

Ici, on peut demander aux élèves de donner oralement la valeur décimale de $6,4 \times 10^7$: 64 millions.

À l'étape 10, il y a $20^{10} = 1,024 \times 10^{10}$ cubes.

Même remarque que précédemment : plus de 10 milliards.

2. a. À l'étape 1, le cube est découpé en 27 petits cubes et on en garde seulement 20, le volume du solide est alors :

$$\frac{20}{27} \approx 0,74 \text{ m}^3.$$

À l'étape 2, le volume du solide est égal à $\frac{20^2}{27^2} \approx 0,549 \text{ m}^3$.

À l'étape 3, le volume du solide est égal à $\frac{20^3}{27^3} \approx 0,406 \text{ m}^3$.

b. À l'étape 6, le volume du solide est égal à $\frac{20^6}{27^6} \approx 0,165 \text{ m}^3$.

À l'étape 10, le volume du solide est égal à $\frac{20^{10}}{27^{10}} \approx 0,049 \text{ m}^3$.

On remarque que plus les étapes avancent, plus le volume du solide diminue et se rapproche de 0.

On pouvait prévoir ce résultat car, à chaque étape, on enlève un peu plus de matière au cube de départ.

43 La légende de Sissa

1. a. Il y a 32 grains de blé sur la 6^e case de l'échiquier de Sissa.
 b. Le nombre de la case B10 correspond au nombre de grains de blé sur la 10^e case. Le nombre de grains de blé est doublé à chaque case, il y en a $2^0 = 1$ sur la 1^{re}, $2^1 = 2$ sur la 2^e, donc il y en a $2^{10-1} = 2^9 = 512$ sur la 10^e case et $9,22 \times 10^{18}$ sur la 64^e.
 c. La case E2 donne la somme des grains de blé sur chaque case, il y aurait donc environ $1,84 \times 10^{19}$ grains de blé sur l'échiquier.
 1 000 grains de blé pèsent environ 50 g donc $1,84 \times 10^{19}$ grains de blé vont peser :

$$1,84 \times 10^{19} \times 10^{-3} \times 50 = 92 \times 10^{16} \text{ g} \\ = 92 \times 10^{13} \text{ kg} \\ = 92 \times 10^{10} \text{ tonnes} \\ = 92 \times 10^4 \text{ millions de tonnes}$$

Cette production est supérieure à la production de l'Asie entière en 2014. Le Roi Belkib n'a pas pu honorer sa promesse.

2. Production mondiale totale en millions de tonnes, en 2014 : 249,1 + 99,3 + 23,4 + 288,8 + 27,3 = 2 687,9

En 2014, la production mondiale de blé était de 2 687,9 millions de tonnes.

$$\frac{92 \times 10^4}{2\ 687,9} \approx 342,4$$

Il faudrait 343 ans à l'ensemble du monde pour honorer la promesse du roi Belkib.

44 Refroidissement éolien

1. On parle d'indice de refroidissement éolien car c'est le vent qui fait que la température ressentie est plus basse que la température réelle.

2. • Pour le matin

$$R_C = -35 + 0,2 \times (0,134\ 5 \times (-35) - 1,52) \times 4,7 \approx -40,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

La température ressentie le matin est environ égale à $-40,9 \text{ }^\circ\text{C}$; cette température est comprise entre $-48 \text{ }^\circ\text{C}$ et $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ donc les risques sont :

« Risque élevé de gelure de la peau exposée et d'hypothermie en 5 à 10 min »

- Pour l'après-midi

$$R_C = -25 + 0,2 \times (0,134\ 5 \times (-25) - 1,52) \times 4,7 \approx -29,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

La température ressentie l'après-midi est environ égale à $-29,6 \text{ }^\circ\text{C}$; cette température est comprise entre $-28 \text{ }^\circ\text{C}$ et $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ donc les risques sont :

« Faible risque de gelure et d'hypothermie ».

45 Mouvements des plaques

1. a. • Latitude

Durée du déplacement : 2016 – 1998 = 18 ans.

Déplacement : $0 - (-36) = 0 + 36 = 36 \text{ cm}$.

$$v = \frac{36}{18} = 2$$

La vitesse moyenne du déplacement en latitude est 2 cm par an. La plaque se déplace vers le nord car la vitesse de déplacement est positive.

- Longitude

Durée du déplacement : 2016 – 1998 = 18 ans.

Déplacement : $0 - 21 = -21 \text{ cm}$

$$v = \frac{-21}{18} \approx -1,17$$

La vitesse moyenne du déplacement en longitude est environ égale à $-1,17 \text{ cm par an}$. La plaque se déplace vers l'ouest car la vitesse de déplacement est négative.

2. a. La vitesse de déplacement entre Nouméa et Tahiti est négative ($-7,2 \text{ cm par an}$) donc les deux plaques convergent (elles se rapprochent).

- b. • Distance entre Nouméa et Tahiti

Sur le plan, la distance entre Nouméa et Tahiti est égale à 5,7 cm.

L'échelle indique que 1 cm sur le plan correspond à 100 km dans la réalité, donc la distance réelle entre Nouméa et Tahiti est environ égale à 5 700 km.

- La vitesse de déplacement est égale à $-7,2 \text{ cm par an}$.

$$20 \times 10^6 \times (-7,2) = -144 \times 10^6 \text{ cm}$$

$$= -144 \times 10^1 \text{ km} = -1\ 440 \text{ km}$$

En 20 millions d'années, les plaques vont se rapprocher de 1 440 km.

$$5\ 700 - 1\ 440 = 4\ 260$$

Les deux villes seront alors séparées d'environ 4 260 km.

46 Canal du Midi

1. Pour calculer le dénivelé total du parcours, il suffit de faire la somme de chaque dénivelé, il faut faire la somme des valeurs des cellules B2 à L2 : =SOMME(B2:L2)
2. $D = 2,44 + 4,65 + 3,08 + 2,62 - 2,58 - 5,58 - 6,78 - 2,24 - 2,63 - 9,42 - 5,2 = -21,64$
Le dénivelé est égal à -21,64 m.
3. Le dénivelé est négatif donc le parcours est descendant.

47 Qui a raison ?

1. • Pour Paolo, $x = 3$:

$$5 \times 3^2 - 10 \times 3 + 2 = 5 \times 9 - 30 + 2 = 45 - 30 + 2 = 17$$

$$7 \times 3 - 4 = 21 - 4 = 17$$
Pour $x = 3$, les résultats sont bien égaux.
- Pour Noa, $x = -2$:

$$5 \times (-2)^2 - 10 \times (-2) + 2 = 5 \times 4 + 20 + 2 = 20 + 22 = 42$$

$$7 \times (-2) - 4 = -14 - 4 = -18$$
Pour $x = -2$, les résultats sont bien différents.
2. Seul Noa a donné le bon argument dans cet exercice, pour $x = -2$ l'égalité n'est pas vérifiée donc l'égalité $5x^2 - 10x + 2 = 7x + 4$ n'est pas vraie pour toute valeur de x . Paolo a vérifié que l'égalité était vraie pour $x = 3$ mais pas pour toutes les valeurs de x .

48 Différentes écritures d'un nombre

1. $A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 0 \times 1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$
Le chiffre des unités de ce nombre est 0.
2. $A = 2 \times 100 + 10 + 0,1 + 0,02 = 210,12$
3. $210,12 = 2,1012 \times 10^2$
4. $A = 21\,012 \times 10^{-2}$
5. $A = 210 + \frac{12}{100} = 210 + \frac{3}{25}$

49 Les déchets

- $30 \times 10^6 \text{ t} = 30 \times 10^9 \text{ kg}$
 $65\,000\,000 = 6,5 \times 10^7$
 $\left(\frac{30 \times 10^9}{6,5 \times 10^7} \right) \div 365 \approx 1,3$
- Oui c'est vrai, car un Français produit en moyenne environ 1,3 kg de déchets par jour.

50 On double !

- 1 h → 2 cellules
2 h → $2 \times 2 = 4$ cellules
5 h → $2^5 = 32$ cellules
8 h → $2^8 = 256$ cellules (7 h, c'est 2 fois moins donc 128)
Elle notera, la première fois, plus de 200 cellules au bout de 8 h.

51 Distance Terre-Soleil

1. $300\,000 \times \frac{1}{75} = 4\,000 \text{ km}$
Le satellite est à 4 000 km de la Terre.
2. $8 \text{ min } 30 \text{ s} = 80 \times 60 + 30 = 4\,830 \text{ s}$
 $3 \times 10^5 \times 4,83 \times 10^3 = 14,49 \times 10^8 = 1,449 \times 10^9$
La Terre est à $1,449 \times 10^9$ km du soleil soit environ 1,5 milliard de kilomètres.

52 Rover Curiosity

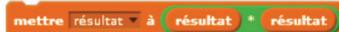
En plus du travail sur les puissances de 10, cet exercice est l'occasion de revoir la notion de vitesse et de travailler sur les grandeurs produits.

1. Le vol a duré environ 255 jours.
2. $255 \times 24 = 6\,120$ donc $255 \text{ j} = 6\,120 \text{ h}$.
 $v = \frac{d \text{ en km}}{t \text{ en h}} = \frac{560 \times 10^6}{6\,120} \approx 91\,500 \text{ km/h}$
La vitesse moyenne du Rover était environ égale à 91 500 km/h.
3. Temps de parcours du signal :
 $t = \frac{d}{v} = \frac{248 \times 10^6}{3 \times 10^5} \approx 827 \text{ s} \approx 14 \text{ min}$
Les premières images sont parties le 6 août à 7 h 58 min et sont arrivées 14 minutes plus tard, à 8 h 12.

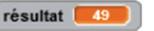
53 Un programme particulier

1. Ce script donne le résultat du programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre
- Ajouter 1 au nombre de départ
- Prendre le carré du résultat
- Ajouter -2 fois le nombre de départ au résultat
- Ajouter -1 au résultat

 Démarrer le programme
 demander Nombre de départ? et attendre
Demander le nombre de départ
 mettre nombre de départ à réponse
Stocker le nombre de départ dans la variable « réponse »
 mettre résultat à nombre de départ + 1
Mettre dans la variable « résultat », le nombre de départ + 1
 mettre résultat à résultat * résultat
Mettre dans la variable « résultat », le résultat précédent au carré
 ajouter à résultat -2 * nombre de départ
Ajouter au résultat -2 fois le nombre de départ
 ajouter à résultat -1
Ajouter -1 au résultat précédent
 dire résultat pendant 2 secondes
Donner le résultat du programme de calcul

2.

 réponse 0
 résultat 49
 nombre de départ 7



49 est le carré de 7.

3. b.

B2	A	B	C	D	E
	Nombre de départ	Ajouter 1	Mettre au carré	Enlever le double du nombre de	Soustraire 1
1					
2	-10	-9	81	101	100

C2	A	B	C	D	E
	Nombre de départ	Ajouter 1	Mettre au carré	Enlever le double du nombre de	Soustraire 1
1					
2	-10	-9	81	101	100

Deux énoncés pour un exercice

A	B	C	D	E
Nombre de départ	Ajouter 1	Mettre au carré	Enlever le double du nombre de	Soustraire 1
1				
2	-10	-9	81	101

A	B	C	D	E
Nombre de départ	Ajouter 1	Mettre au carré	Enlever le double du nombre de	Soustraire 1
1				
2	-10	-9	81	101

A	B	C	D	E
Nombre de départ	Ajouter 1	Mettre au carré	Enlever le double du nombre de	Soustraire 1
1				
2	-10	-9	81	101
3	-9	-8	64	82
4	-8	-7	49	65
5	-7	-6	36	50
6	-6	-5	25	37
7	-5	-4	16	26
8	-4	-3	9	17
9	-3	-2	4	10
10	-2	-1	1	5
11	-1	0	0	2
12	0	1	1	1
13	1	2	4	2
14	2	3	9	5
15	3	4	16	10
16	4	5	25	17
17	5	6	36	26
18	6	7	49	37
19	7	8	64	50
20	8	9	81	65
21	9	10	100	82
22	10	11	121	101

Le résultat obtenu est le carré du nombre de départ.

4. a. $(x+1)^2 - 2x - 1$
 b. $(x+1)^2 - 2x - 1$
 $= (x+1)(x+1) - 2x - 1$
 $= x^2 + x + x + 1 - 2x - 1$
 $= x^2$

54 Des scripts puissants

- a. 6 b. 4 c. 1 d. 5 e. 3 f. 2

55 Carré magique

1.

A	B	C	D	E	F	G
1	a	-4	1	=B2*B3	=B1*B2*A3	=B1^A3
2	b	5	=B1^A3*B2	=B1*B2^A2	=B3	=B2
3	c	6	=B1^A3*B3	=B1*B2*B2	=B1^A2*B2	=B2^A2
4			=B2*A3	=B1^A2	=B1	=B1*B2*B3
5 constante		=D1+E1+F1+G1				

2. Pour faire un nouveau carré magique, il suffit de changer les valeurs de a , b et c .

A	B	C	D	E	F	G
1	a	-4	1	30	-500	-64
2	b	5	-320	-100	6	5
3	c	6	-24	-20	80	25
4			125	16	-4	-120
5 constante		-533				

A	B	C	D	E	F	G
1	a	-1	1	6	8	-1
2	b	-2	2	-4	-3	-2
3	c	-3	3	2	-2	4
4			-8	1	-1	-6
5 constante		14				

A	B	C	D	E	F	G
1	a	-5	1	7	-5	-125
2	b	1	-125	-5	7	1
3	c	7	-35	-5	25	1
4			1	25	-5	-35
5 constante		-122				

Exercice 1

$$\begin{aligned} A &= 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90 \\ B &= -5^2 + (2+8)^3 = -25 + 10^3 = -25 + 1\ 000 \\ &= 975 \\ C &= \frac{-2 \times 10^3}{50} = \frac{-2 \times 1\ 000}{50} = \frac{-2\ 000}{50} = -40 \end{aligned}$$

Exercice 1

$$\begin{aligned} A &= 10 \times (-3)^2 - (-5) \times 10 \\ A &= 10 \times 9 - (-50) \\ A &= 90 + 50 = 140 \\ B &= -5^2 + (2+8)^3 + 5 \times 10^{-1} \\ B &= -25 + 10^3 + 5 \times 10^{-1} \\ B &= -25 + 1\ 000 + 0,5 \\ B &= 975,5 \\ C &= \frac{6,4 \times 10^3 \times 10^2}{8 \times 10^4} = \frac{6,4 \times 10^5}{8 \times 10^4} = \frac{6,4}{8} \times 10 \\ &= 0,8 \times 10 = 8 \end{aligned}$$

Exercice 2

1. a. $-3 \times 2 \times (-5) = 3 \times 2 \times 5 = 30$
 $(-4)^2 + 2 = 16 + 2 = 18$
 b. Les trois entiers consécutifs choisis sont : -5 , -4 et -3 .
 2. a. Si le 2^e nombre est -6 , les deux autres nombres sont donc -7 et -5 .
 Le calcul de Sofiane donne donc : $-5 \times 2 \times (-7) = 70$
 Le calcul de Jeanne donne donc : $(-6)^2 + 2 = 36 + 2 = 38$
 Sofiane et Jeanne n'obtiennent pas le même résultat.
 Le professeur n'a donc pas pu choisir -6 comme deuxième nombre.
 b. Si le 2^e nombre est -2 , les deux autres nombres sont donc -3 et -1 .
 Le calcul de Sofiane donne donc : $-1 \times 2 \times (-3) = 6$
 Le calcul de Jeanne donne donc : $(-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$
 Sofiane et Jeanne obtiennent le même résultat.
 Le professeur a donc pu choisir -2 comme deuxième nombre.

Exercice 2

- a. Si le 2^e nombre est -6 , les deux autres nombres sont donc -7 et -5 .
 Le calcul de Sofiane donne donc : $-5 \times 2 \times (-7) = 70$
 Le calcul de Jeanne donne donc : $(-6)^2 + 2 = 36 + 2 = 38$
 Sofiane et Jeanne n'obtiennent pas le même résultat.
 Le professeur n'a donc pas pu choisir -6 comme deuxième nombre.
 b. Si le 2^e nombre est -2 , les deux autres nombres sont donc -3 et -1 .
 Le calcul de Sofiane donne donc : $-1 \times 2 \times (-3) = 6$
 Le calcul de Jeanne donne donc : $(-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$
 Sofiane et Jeanne obtiennent le même résultat.
 Le professeur a donc pu choisir -2 comme deuxième nombre.

Écriture d'un énoncé

1.

I	II	III	IV	V
A	-3	6	1	-2
B		4	2	8
C	9		3	1
D	2	1	0	
E	4	5		-4
				0

Analyse d'une production

1. Marius a donné deux réponses fausses.

2. Les réponses de Marius sont les suivantes :

$$A = -3^2 - 2 \times 5^3 = -9 - 10^3 = -9 + 1\ 000 = 991$$

$2 \times 5^3 \neq 10^3$, en effet $2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250$, car les puissances sont prioritaires sur la multiplication.

On a donc $A = -9 - 250 = -259$.

$$B = (7 - 2 \times 4)^{23} = (7 - 8)^{23} = (-1)^{23} = -1$$

Ce calcul est correct.

$$C = \frac{-7 \times (-3)^2 + (2-3)^{17}}{-2 \times 4} = \frac{-79 + (-1)^{17}}{-8} = \frac{-63 + 1}{-8}$$

$$= \frac{-62}{-8} = 7,75$$

$(-1)^{17} \neq 1$, car l'exposant est un nombre impair.

Et $(-1)^{17} = -1$.

$$\text{On a donc } C = \frac{-63 - 1}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8.$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances associées sont :

- utiliser les nombres pour comparer ;
- calculer et résoudre des problèmes ;
- utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) et de passer d'une représentation à une autre :
 - les nombres décimaux ;
 - les nombres rationnels ;
 - les fractions.
- comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels ;

– repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée :

- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire ;
- égalité de fractions ;
- pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. Ils calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel.

Activités

Questions flash

1. Faux : les 7 parts ne sont pas égales.
2. Oui, 48 est divisible par 3.

3. $\frac{1}{2}; \frac{5}{7}; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Des partages

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de définir la fraction comme un nombre.

La capacité introduite est de connaître la notion de fraction.

- Il semble indispensable que les élèves disposent véritablement d'une bande de papier constituée de quatre rectangles identiques pour mettre en pratique le pliage.
- Pour de nombreux élèves, la fraction $\frac{4}{3}$ représente quatre fois un tiers : seul le partage « naturel » de l'unité intervient alors. Les élèves ne maîtrisent pas encore la notion de fraction quotient abordée en 6^e : $\frac{4}{3}$ est le résultat de la division de quatre unités par trois. La fraction $\frac{4}{3}$ prend véritablement son statut de nombre lorsque l'élève complète l'égalité $3 \times \dots = 4$.

Activité 1

1. Elle va rabattre les bords vers le « centre » de la bande en superposant les trois parties pour avoir deux plis marqués et trois parts égales.

2. $\frac{4}{3}$.

C'est le quotient de 4 par 3 : la division de 4 par 3 est ainsi « devenue possible ».

3. $3 \times \frac{4}{3} = 4$.

La fraction $\frac{4}{3}$ est ainsi le nombre qui, multiplié par 3, donne 4. On pourra faire remarquer aux élèves que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.

Au marché

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'établir les règles d'égalité de quotients, de simplifier des fractions et d'apprendre à diviser par un nombre décimal.

Les prérequis nécessaires sont de savoir utiliser la notion de proportionnalité, reconnaître l'écriture fractionnaire comme un quotient.

La capacité introduite est de connaître des fractions égales.

Activité 2

- 3.

$$\frac{4,5}{2} = \frac{\dots}{12} = \frac{\dots}{4} = \frac{45}{\dots}$$

4. Il a raison :

$$\frac{108}{2,25} = \frac{108 \times 100}{2,25 \times 100} = \frac{10800}{225} = 48.$$

Il avait chargé 48 cageots dans son camion.

1. a. 4,5 kg ; b. 27 kg ; c. 9 kg ; d. 45 kg.

2. Chaque quotient représente la masse de légumes contenue dans chaque cageot ; ces quotients sont donc tous égaux.

La fraction la plus simple est $\frac{9}{4}$.

Exercices

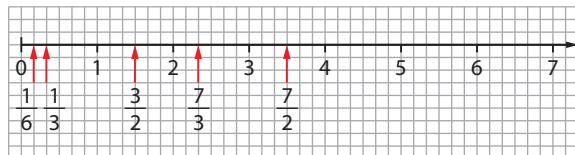
Connaitre la notion de fraction

Questions flash

- 1.** a. La fraction $\frac{6}{25}$ représente le quotient de 6 par 25.
 b. Le quotient $\frac{1,5}{2,8}$ est égal à la fraction $\frac{15}{28}$.
 c. 7 est le dénominateur de la fraction $\frac{4}{7}$ et son numérateur est 4.
- On peut demander aux élèves de formuler d'autres phrases à l'oral en utilisant ces expressions.
- 2.** 1. Faux, par exemple $\frac{1}{3}$.
 2. Vrai : tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction décimale.
- 3.** a. $5 \times \frac{11}{5} = 11$; b. $\frac{7}{3} \times 3 = 7$;
 c. $9 \times \frac{7}{9} = 7$; d. $3 \times \frac{11}{3} = 11$.
- 4.** a. $13 \times \frac{1}{13} = 1$; b. $11 \div 6 = \frac{11}{6}$;
 c. $6 \times \frac{11}{6} = 11$; d. $8 \times \frac{7}{8} = 7$.

- 5.** 1. $\frac{7}{3}$.
 2. Non, car la division ne s'arrête pas.

- 6.** 1. Le temps de parole accordé à chaque élève est exactement de $\frac{11}{6}$ minutes.
 2. Ce nombre ne peut pas s'écrire sous forme décimale car la division de 11 par 6 est infinie.



Reconnaitre des fractions égales

Questions flash

- 8.** Les deux ont raison car ces deux fractions sont égales : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$.
- 9.** 1. Vrai. 2. Vrai. 3. Faux.
- 10.** $\frac{14}{18} = \frac{2 \times 7}{2 \times 9} = \frac{7}{9}$; $\frac{20}{30} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{2}{3}$;
 $\frac{25}{10} = \frac{5 \times 5}{5 \times 2} = \frac{5}{2}$; $\frac{15}{12} = \frac{3 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{4}$.
- Toutes les simplifications sont acceptées ; la notion de fraction irréductible n'est pas abordée en 5^e.

Pour l'exercice 11, une aide est proposée ; pas pour l'exercice 12.

- 11.** a. $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$;
 b. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}$;
 c. $\frac{80}{100} = \frac{80 \div 20}{100 \div 20} = \frac{4}{5}$;
 d. $\frac{49}{21} = \frac{49 \div 7}{21 \div 7} = \frac{7}{3}$.

- 12.** a. $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$;
 b. $\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$;
 c. $\frac{3,4}{7,8} = \frac{34}{78}$;
 d. $\frac{56}{24} = \frac{7}{3}$;
 e. $\frac{72}{45} = \frac{8}{5}$.

- 13.** $\frac{81}{99}$ et $\frac{9}{11}$.
 $\frac{7}{5}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{36}{42}$.
 $\frac{12}{16}$; $\frac{75}{100}$ et $\frac{3}{4}$.
 $\frac{7}{8}$.

- 14.** Toutes les simplifications sont acceptées ; la notion de fraction irréductible n'est abordée qu'en 3^e.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{81}{72} &= \frac{9 \times 9}{9 \times 8} = \frac{9}{8} \text{ ou } \frac{81}{72} = \frac{3 \times 27}{3 \times 24} = \frac{27}{24}. \\ \bullet \frac{55}{60} &= \frac{5 \times 11}{5 \times 12} = \frac{3 \times 5}{3 \times 6}. \\ \bullet \frac{24}{16} &= \frac{2 \times 12}{2 \times 8} = \frac{12}{8} \text{ ou } \frac{6}{4} \text{ ou } \frac{3}{2}. \\ \bullet \frac{44}{33} &= \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Cet exercice est l'occasion de réinvestir les critères de divisibilité.

- 15.** Cet exercice permet d'utiliser le vocabulaire sur les fractions.

$$\begin{aligned} \bullet 1. \frac{15}{18} &= \frac{3 \times 5}{3 \times 6} = \frac{5}{6}. & 2. \frac{15}{18} &= \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}. \\ \bullet 3. \frac{15}{18} &= \frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}. \end{aligned}$$

- 16.** $\frac{1,5}{0,12} = \frac{150}{12} = \frac{6 \times 25}{6 \times 2} = 12,5$; on peut remplir entièrement 12 verres.

- 17.** $\frac{5,13}{4,5} = \frac{513}{450} = \frac{9 \times 57}{9 \times 50} = 1,14$; un litre d'essence coûte 1,14 €.

Comparer des fractions

Questions flash

- 18.** a. Dans la fraction $\frac{11}{3}$, le **numérateur** est supérieur au **dénominateur** donc elle est **supérieure à 1**.
 b. Les fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{6}{7}$ ont le même **dénominateur** ; la plus petite des deux est donc celle qui a le plus petit **numérateur**.

Questions flash

19. $\frac{130}{13} > \frac{128}{13} > \frac{45}{13} > \frac{9}{13} > \frac{8}{13} > \frac{4}{13}$.

20. Ce sera l'occasion de comparer les différentes stratégies utilisées : la comparaison à 1, la mise au même dénominateur, le calcul des quotients.

a. $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$ b. $3,2 > \frac{31}{10}$ c. $\frac{5}{7} < 1$
 d. $\frac{11}{8} > \frac{25}{27}$ car $\frac{11}{8} > 1$ et $\frac{25}{27} < 1$ e. $\frac{3}{4} > \frac{70}{100}$

21. Quotients égaux à 1 :

$\frac{4,3}{4,3}$ et $\frac{3,5}{3,5}$.

Quotients inférieurs à 1 :

$\frac{12\ 578}{12\ 758}, \frac{189}{269}, \frac{45,04}{45,4}, \frac{548\ 231}{549\ 321}$.

Quotients supérieurs à 1 :

$\frac{7}{5}, \frac{25}{1}, \frac{1}{0,5}, \frac{3895}{389,5}$.

22. $\frac{9}{2} > 1 > \frac{1}{3} > \frac{2}{9} > 0$.

Ce sera l'occasion de comparer les différentes stratégies utilisées : la comparaison à 1, la mise au même dénominateur (18), le calcul des quotients.

23. $\frac{5}{14} < \frac{3}{7} < 1 < \frac{3}{2} < \frac{25}{4}$.

Même remarque que pour l'exercice 22.

Exprimer une proportion

Questions flash

24. Proportion de coeurs : $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$.

Proportion de valets : $\frac{4}{32}$ ou $\frac{1}{8}$.

25. $\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 12\%$.

Il y a 12 % de gauchers dans cette classe.

26. • $\frac{7}{10} = 0,7$;
 • $4\% = \frac{4}{100} = \frac{4 \times 1}{4 \times 25} = \frac{1}{25}$;
 • $\frac{11}{20} = \frac{11 \times 5}{20 \times 5} = \frac{55}{100} = 55\%$;
 • $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$.

27. 1. La proportion de poissons-clowns est de $\frac{15}{150}$.

2. Oui, car $\frac{15}{150} = \frac{15 \times 1}{15 \times 10} = \frac{1}{10} = \frac{1 \times 10}{10 \times 10} = \frac{10}{100}$.

28. 1. $\frac{18}{48} = 0,375 = \frac{37,5}{100} = 37,5\%$.

La proportion de BD est de $\frac{18}{48}$ soit 37,5 %.

2. $\frac{14}{48} \approx 0,29 = 29\%$.

La proportion de mangas est de $\frac{14}{48}$ soit environ 29 %.

29. $\frac{3,7}{33,7} \approx 0,1\ 098 \approx 11\%$.

La proportion de logements inondables en France en 2009 était d'environ 11 %.

Problèmes

30. Prix à l'unité

$\frac{3,5}{4} < 1$ et $\frac{10}{9} > 1$, donc Lydie a intérêt de choisir le magasin A.

31. Tableau d'honneur

1. $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$;
 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{20}{30}$.

Donc Christopher a tort car $\frac{17}{30} < \frac{18}{30} < \frac{20}{30}$.

2. 1^{er} : Karim ; 2^e : Claire ; 3^e : Christopher.

32. Gaming

1. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}$.

C'est Florent qui a joué le plus longtemps car $\frac{45}{60} > \frac{41}{60}$.

2. Florent a joué $\frac{45}{60}$ d'heure, soit 45 minutes et Amélie $\frac{41}{60}$ d'heure, soit 41 minutes.

33. Au goûter

1. Martin a mangé les 25 % du contenu de la boîte car :

$\frac{3}{12} = \frac{3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100}$.

2. $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{4 \times 4} = \frac{4}{16}$.

Donc Léo a mangé 4 portions de la 2^e boîte.

34. Disparition

On fait disparaître $\frac{4}{49}$ des lettres.

35. Journée sportive

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{20}{30}$ et $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$.

Proportionnellement au nombre de matchs joués, c'est donc la 5^e B la meilleure de ces deux classes car $\frac{21}{30} > \frac{20}{30}$.

36. Des diagrammes

1. $\frac{1}{10}$ correspond à 36° donc $\frac{3}{10}$ correspond à 108° .

2.

Les élèves qui comparent les parts bleue et orange sans considérer le type de diagramme vont obtenir une réponse fausse.

$\frac{4}{9} = \frac{40}{90}$ et $\frac{3}{10} = \frac{27}{90}$.

Il y a donc plus d'élèves qui travaillent 30 min que d'élèves qui travaillent 45 min, car $\frac{40}{90} > \frac{27}{90}$.

37. Félix le chat

Pour s'aider, on peut représenter la situation par un schéma. Les élèves doivent connaître la formule du calcul de la longueur d'un cercle.

$\frac{62,8}{3,14} = \frac{62,8 \times 100}{3,14 \times 100} = \frac{6280}{314} = 20$.

Le diamètre du cercle décrit par Félix est d'environ 20 m.

Comme il reste à 2 m du bord, le diamètre de la piscine est d'environ 16 m ($20 - 2 \times 2 = 16$).

38 Emploi du temps

- La proportion d'heures d'anglais dans la semaine est de $\frac{4}{29}$ en semaine A et $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ en semaine B.
- Le professeur de français ; proportion en semaine A : $\frac{6}{29}$, et en semaine B : $\frac{6}{28}$.

On pourra demander aux élèves de refaire cet exercice avec leur propre emploi du temps.

39 Space heroes

- $\frac{48}{50} = \frac{48 \times 2}{50 \times 2} = \frac{96}{100}$.

Kevin a déjà obtenu 96 % des soleils.

- $\frac{85}{125} = \frac{5 \times 17}{5 \times 25} = \frac{17}{25} = \frac{51}{75}$;
 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{50}{75}$;
 $\frac{51}{75} > \frac{50}{75}$.

Donc la proportion d'étoiles est plus importante que celle des martiens.

40 Imaginer

Voici un exemple avec cinq éléments sur les sept (écrits en gras ci-dessous).

Par exemple :

Mercredi, de 13 h 30 à 18 h 30, **quatre amis** se sont retrouvés ; ils ont regardé la **télévision** pendant les $\frac{3}{5}$ du temps passé ensemble. Combien de minutes ont-ils passées devant la télévision ?

41 Affichage

Surface du mur : $5 \times 2 = 10 \text{ m}^2$

Chaque affiche a une surface égale à $\frac{10}{3} \text{ m}^2$; ce nombre ne peut pas s'écrire sous forme décimale car la division ne s'arrête pas.

42 Évaporation des océans

On écrira une égalité de fractions, on n'utilisera pas le calcul d'une fraction d'une quantité

$$\left(\frac{4}{43} \times 430\,000\right), \text{ qui sera vu dans le chapitre 11.}$$

a. $\frac{4}{43} = \frac{40\,000}{430\,000}$; donc $40\,000 \text{ km}^3$ d'eau sont retombés en une année sur les continents.

b. $430\,000 - 40\,000 = 390\,000$; donc $390\,000 \text{ km}^3$ d'eau retombent sur les océans.

43 Défi

Pour s'aider, on peut écrire les trois fractions au même dénominateur.

1. $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 6}{2 \times 6} = \frac{18}{12}$; il faut trouver une fraction comprise

entre $\frac{7}{12}$ et $\frac{18}{12}$ qui puisse se simplifier par 3.

Par exemple : $\frac{7}{12} < \frac{9}{12} < \frac{18}{12}$.

Or $\frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$. Donc $\frac{7}{12} < \frac{3}{4} < \frac{18}{12}$.

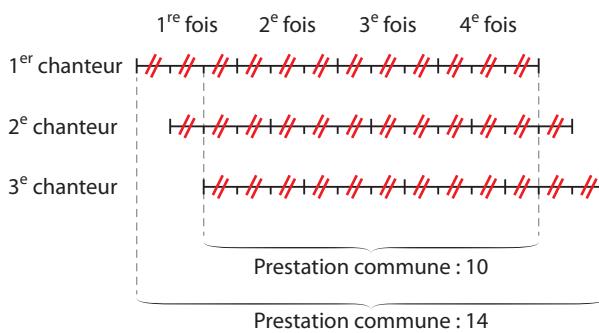
2. La fraction peut être égale aussi à $\frac{12}{12}$ ou $\frac{15}{12}$; on peut donc remplacer les pointillés par 4 ou par 5.

44 Harry Potter

- 150 mornilles ($54 \div 0,36 = 150$).
- Non, car $54 \div 7,89 \approx 6,8$ ou $7 \times 7,89 = 55,23 > 54$.

45 Chant en canon

Pour s'aider, on peut représenter les durées de chacun à l'aide de segments.



Les trois chanteurs ont chanté ensemble pendant $\frac{10}{14}$ du temps.

46 Fraction de temps

• Pierre a passé 75 % de son temps libre à préparer son exposé :

$$\frac{105 \text{ min}}{140 \text{ min}} = \frac{5 \times 3 \times 7}{5 \times 4 \times 7} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}.$$

• Maxime a passé 80 % de son temps libre à préparer son exposé :

$$\frac{120 \text{ min}}{150 \text{ min}} = \frac{4 \times 3 \times 10}{5 \times 3 \times 10} = \frac{4}{5} = \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100}.$$

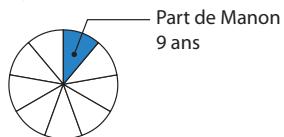
47 Anniversaire

Cet exercice permet de revoir le partage d'un disque en parts égales et l'utilisation du rapporteur.

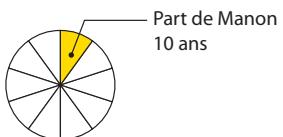
1. Chacune mangera $\frac{1}{9}$ du gâteau.

(Il ne faut pas oublier que Manon mange aussi du gâteau.)

2.



3.



48 Approcher un nombre

Cet exercice met en évidence les limites de l'emploi de la calculatrice et pose le problème de l'utilisation des valeurs approchées.

1. L'affichage semble contredire l'affirmation du professeur car la machine affiche 3,141 592 92 pour les deux quotients.

2. On calcule les produits en croix :

$$78\,539\,823 \times 113 = 8\,874\,999\,999 \text{ et}$$

$$355 \times 25\,000\,000 = 8\,875\,000\,000.$$

Comme ils ne sont pas égaux, les fractions ne peuvent pas être égales : le professeur a raison.

On peut également montrer que les produits en croix ne sont pas égaux en considérant uniquement le chiffre des unités de chaque produit.

3. C'est une approximation du nombre π .

On pourra prolonger cet exercice sur l'historique du nombre π avec les différentes approximations rencontrées au cours des siècles.

49 Jeu du Uno

1. Chaque couleur représente $\frac{19}{112}$ du nombre total de cartes.

2. $\frac{36}{112} = \frac{4 \times 9}{4 \times 28} = \frac{9}{28}$; les cartes Action représentent $\frac{36}{112}$

ou $\frac{9}{28}$ du nombre total de cartes.

3. $\frac{84}{112} = \frac{4 \times 3 \times 7}{4 \times 4 \times 7} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$; les $\frac{3}{4}$ des cartes (ou 75 %) n'ont pas été distribuées.

50 Consommation de papier

On calcule les différents quotients à l'aide d'un tableau ou d'une calculatrice.

	A	B	C	D
1	Pays	consommation totale	nombre d'habitants	consommation par hab
2	Allemagne	19 607 193 940	80 854 408	242,5
3	Belgique	3 601 023 414	11 323 973	318
4	Canada	6 117 901 415	35 099 836	174,3
5	Etats-Unis	73 914 838 720	321 368 864	230
6	France	9 452 922 019	66 663 766	141,8
7	Japon	27 668 485 660	126 919 659	218

La France est le pays où la proportion de papier consommé par habitant est la moins élevée avec 141,8 kg/habitant.

51 Trop salé ?

Les mini pizzas représentent le produit le plus salé car la proportion de sel est de $\frac{0,9}{60} = \frac{0,9 \times 5}{60 \times 5} = \frac{4,5}{300}$ alors que, pour les lasagnes, elle est de $\frac{1,8}{300}$.

52 Les lois

1. La proportion de votes « pour » nécessaire est de $\frac{555}{925}$ ou $\frac{3}{5}$ car $\frac{555}{925} = \frac{5 \times 111}{5 \times 185} = \frac{111}{185} = \frac{3 \times 37}{5 \times 37} = \frac{3}{5}$.

2. Si 294 députés votent « pour », il faut que 261 sénateurs votent aussi « pour » car :

$$555 - 294 = 261.$$

Cela représente une proportion de 75 % car :

$$\frac{261}{925 - 577} = \frac{261}{348} = 0,75.$$

53 Suite de fractions

On commence par chercher des multiples communs au dénominateur de la 1^{re} fraction (5) et le numérateur de la 2^e fraction (4) ; on modifie les deux premières fractions jusqu'à ce que le dénominateur de la 2^e fraction soit un multiple de 6.

Par exemple : $\frac{72}{120}; \frac{120}{210}; \frac{210}{385}$.

On peut prolonger l'exercice en demandant aux élèves s'il existe d'autres solutions.

Par exemple : $\frac{144}{240}; \frac{240}{420}; \frac{420}{770}$.

54 Cinéma

On peut présenter des photos des différents formats de film.

Les élèves pourront représenter l'écran à l'échelle $\frac{1}{20}$ et représenter la partie utilisée lors de la projection des différents formats de film.

Comme l'image est positionnée sur toute la largeur de l'écran (3,70 m), chaque format de film doit être approché par une écriture fractionnaire de numérateur 3,70.

Les élèves pourront faire des produits en croix pour déterminer certains dénominateurs.

$$\bullet \frac{4}{3} = \frac{3,70}{2,775}.$$

L'image ne rentre pas « en hauteur » lorsqu'elle est positionnée sur toute la largeur de l'écran (3,70 m) car $2,775 \text{ m} > 2,5 \text{ m}$.

$$\bullet \frac{1,85}{1} = \frac{3,70}{2}.$$

Une bande de 0,50 m sur 3,70 m ne sera pas utilisée sur l'écran.

$$\bullet \frac{16}{9} \approx \frac{3,70}{2,1}.$$

Une bande de 0,40 m sur 3,70 m ne sera pas utilisée sur l'écran.

$$\bullet \frac{2,35}{1} \approx \frac{3,70}{1,57}.$$

Une bande de 0,93 m sur 3,70 m ne sera pas utilisée sur l'écran.

Le format le plus adapté est le $\frac{16}{9}$.

55 Béton

$$\textbf{1. } 4\ 000 \text{ L} = 4\ 000 \text{ dm}^3 = 4 \text{ m}^3.$$

Les proportions sont : $\frac{4}{48}$ d'eau ; $\frac{36}{48}$ de granulats ; $\frac{8}{48}$ de ciment (ou $\frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$).

$$\textbf{2. a. } \frac{4}{48} = \frac{4 \times 1}{4 \times 12} = \frac{1}{12}; \quad \frac{36}{48} = \frac{4 \times 9}{4 \times 12} = \frac{9}{12};$$

$$\frac{8}{48} = \frac{2 \times 4}{12 \times 4} = \frac{2}{12}.$$

Donc il suffit de mélanger :

- 1 seau d'eau ;
- 9 seaux de granulats ;
- 2 seaux de ciment.

b. Oui, à condition de respecter ces proportions. Par exemple :

- 2 seaux d'eau ;
- 18 seaux de granulats ;
- 4 seaux de ciment.
- ou
- 3 seaux d'eau ;
- 27 seaux de granulats ;
- 6 seaux de ciment.

56 Manger équilibré

$$253 + 599 + 79 = 931 \text{ kcal};$$

$\frac{931}{2500} = 0,3724 = 37,24\%$, donc le déjeuner représente bien environ 35 % de l'apport calorique quotidien.

Il faut ensuite vérifier l'apport calorique des éléments nutritionnels.

Lipides : $(9 + 35 + 0,3) \times 9 = 398,7 \text{ kcal}$.

$\frac{398,7}{931} \approx 0,43$ soit environ 43 %, ce qui ne représente pas entre 30 et 35 % de l'apport énergétique.

Les élèves constatent ainsi que le repas de Fabrice est nettement trop riche en lipides (ou légèrement trop pauvre en protides et en glucides).

57 Consommation de hamburgers

1. « =B2/C2 ». On obtient ainsi le nombre théorique de hamburgers mangés par habitant.
2. Italie – Espagne – Allemagne – France – Grande-Bretagne – États-Unis.

58 À petits pas

1. Première étape : $n = 1$, deuxième étape : $n = 2$, troisième étape : $n = 3$.
2. Le tracé a la forme d'une sorte d'escargot constitué de segments de plus en plus petits qui convergent vers un point puisque le lutin pivote et se déplace d'une longueur qui diminue à chaque boucle.



59 Les smileys

1. Dans la cellule B4 : « =B3+50 ».
Dans la cellule C4 : « =C3+50 ».
Dans la cellule D4 : « =B4/C4 ».
2. Il doit en gagner 600.

60 Flocon de Koch

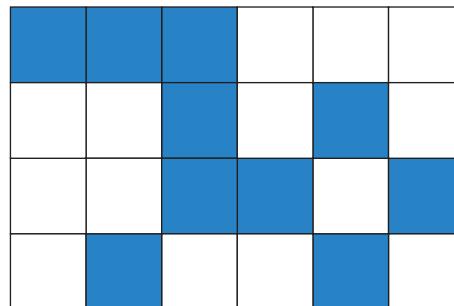
On remarquera que la formule à inscrire dans C3 est donnée sur la capture d'écran.
Un réglage permet un affichage sous forme de fraction dans la colonne B.

- | | |
|----------------|------------------|
| 1. « =B2*C2 ». | 2. « =A2+1 ». |
| 3. « =B2/3 ». | 4. 39,954 884 9. |

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1.



2. On peut tracer un cercle que l'on partage en 24 secteurs angulaires de 15° et on en colorie 10 en bleu.

Exercice 1

Un rectangle de 6 cm sur 4 cm comme ci-dessus (ou de 3 cm sur 8 cm ou de 2 cm sur 12 cm...), un cercle que l'on partage en 24 secteurs angulaires de 15° et on en colorie 10...

Exercice 2

1. Son périmètre est égal à 27 cm : $9 \times 3 = 27$.
2. Non, puisqu'un tiers du segment est remplacé par deux tiers : le périmètre de la 2^e figure est 36 cm.
 $(3 \times 4) \times 3 = 36$.

Exercice 2

1. Son périmètre est égal à 27 cm : $9 \times 3 = 27$.
2. Non, puisqu'un tiers du segment est remplacé par deux tiers : le périmètre de la 2^e figure est :
 $(3 \times 4) \times 3 = 36$ cm.
3. Le périmètre de la 3^e figure est : $(1 \times 4 \times 4) \times 3 = 48$ cm.

Analyse d'une production

Aucune des deux ne s'est trompée ; elles n'ont pas simplifié par le même nombre.

$$\text{Mélanie : } \frac{144}{324} = \frac{9 \times 16}{9 \times 36} = \frac{16}{36}.$$

$$\text{Zoé : } \frac{144}{324} = \frac{4 \times 36}{4 \times 81} = \frac{36}{81}.$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances associées sont :

- utiliser les nombres pour comparer ;
- calculer et résoudre des problèmes.

Les capacités associées sont d'utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) et de passer d'une représentation à une autre :

- nombres décimaux ;
- nombres rationnels (positifs ou négatifs) ;
- fractions.

- Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.
- Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée :
 - ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire ;
 - égalité de fractions.
- Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.
- Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).

Ce chapitre doit être traité après avoir vu le produit et le quotient de deux nombres relatifs.

Activités

Questions flash

- 1. a.** $\frac{9}{3}$ est décimal car $9 \div 3 = 3$.
 - b.** $\frac{8}{5}$ est décimal car $8 \div 5 = 1,6$.
 - c.** $\frac{7}{11}$ n'est pas décimal car la division ne s'arrête pas.
 - d.** $\frac{15}{12}$ est décimal car $15 \div 12 = 1,25$.
- 2. a.** $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ car on a multiplié le numérateur et le dénominateur par 3.
 - b.** $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ car on a divisé le numérateur et le dénominateur par 8.
 - c.** $\frac{49}{63} \neq \frac{7}{8}$ car on a divisé le numérateur par 7 mais pas le dénominateur.
 - d.** $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$ car on a multiplié le numérateur et le dénominateur par 20.
- 3. a.** 132 est divisible par 2, par 3 et par 4.
 - b.** 245 est divisible par 5.
 - c.** 642 est divisible par 2 et par 3.

d. 450 est divisible par 2, par 3, par 5 et par 9.

e. 855 est divisible par 3, par 5 et par 9.

4. a. $\frac{15}{45} = \frac{5 \times 3}{5 \times 9} = \frac{3}{9}$ ou $\frac{15}{45} = \frac{3 \times 5}{3 \times 15} = \frac{5}{15}$
ou $\frac{15}{45} = \frac{15 \times 1}{15 \times 3} = \frac{1}{3}$

Toutes ces simplifications sont acceptées. En 4^e, on n'attend pas de fraction irréductible.

b. $\frac{44}{15}$ n'est pas simplifiable.

c. $\frac{27}{36} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{3}{4}$ ou $\frac{27}{36} = \frac{3 \times 9}{3 \times 12} = \frac{9}{12}$
d. $\frac{140}{210} = \frac{2 \times 70}{2 \times 105} = \frac{70}{105}$ ou $\frac{140}{210} = \frac{5 \times 28}{5 \times 42} = \frac{28}{42}$
 ou $\frac{140}{210} = \frac{10 \times 14}{10 \times 21} = \frac{14}{21}$ ou $\frac{140}{210} = \frac{70 \times 2}{70 \times 3} = \frac{2}{3}$
 ou $\frac{140}{210} = \frac{7 \times 20}{7 \times 30} = \frac{20}{30}$ ou $\frac{140}{210} = \frac{14 \times 10}{14 \times 15} = \frac{10}{15}$
 ou $\frac{140}{210} = \frac{35 \times 4}{35 \times 6} = \frac{4}{6}$

Toutes ces simplifications sont acceptées.

Observation des oiseaux

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de fraction considérée comme un nombre, les égalités de fractions (vues dans le chapitre 9) et d'introduire les fractions avec un numérateur et/ou un dénominateur négatif.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des produit et quotient de relatifs.

La capacité introduite est de reconnaître des fractions égales.

1. $\frac{5}{3}$ h pour les femmes, $\frac{15}{9}$ h = $\frac{5}{3}$ h pour les hommes.

On demandera aux élèves comment ils peuvent comparer deux fractions et on leur fera rappeler la règle d'égalité de deux fractions (un quotient ne change pas si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul).

Activité 1

2. $3 \times \frac{5}{3} = 5$ ou $3 \times \frac{15}{9} = 5$ ou $3 \times \frac{10}{6} = 5$

3.

Dans cette question, on introduit des nombres négatifs.

Pour que le produit soit négatif, le signe du nombre manquant doit être négatif.

Donc $45 \times \frac{-75}{45} = -75$ ou $45 \times \frac{-5}{3} = -75$.

On conclura cette activité en rappelant que l'écriture fractionnaire

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a .

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la propriété de l'égalité des produits en croix.
Les prérequis nécessaires sont de savoir reconnaître et traiter une situation de proportionnalité.
La capacité introduite est de reconnaître des fractions égales.

$$1. \frac{5}{7} = \frac{10}{14}$$

2. a. $5 \div 7 = \frac{5}{7}$ dL de liquide vaisselle pour 1 dL de liquide à bulles.

b. 10 dL

$$c. 14 \times \frac{5}{7} = 10$$

$$d. 14 \times 5 = 10 \times 7$$

3. Si $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$, alors $5 \times 14 = 10 \times 7$ (produit en croix).

On peut donc généraliser cette égalité dans toutes les situations de proportionnalité. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.

Chasse au trésor

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la propriété de l'égalité des produits en croix pour prouver que deux fractions ne sont pas égales.
Les prérequis nécessaires sont de connaître l'égalité des produits en croix.
La capacité introduite est de reconnaître des fractions égales.

Si ces fractions étaient égales, leurs produits en croix seraient égaux. Mais le chiffre des unités du produit $\underline{\quad} 1 \times \underline{\quad} 2$ est 2, alors que le chiffre des unités du résultat de $\underline{\quad} 5 \times \underline{\quad} 6$ est 0. Donc $\underline{\quad} 1 \times \underline{\quad} 2 \neq \underline{\quad} 5 \times \underline{\quad} 6$. Les fractions ne sont donc pas égales.

Couvre-chefs

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle d'addition et de soustraction de deux fractions à travers une activité à prise d'initiative où les élèves devront trouver une méthode (mise au même dénominateur) pour effectuer ces opérations. Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer une proportion, simplifier une fraction.

La capacité introduite est d'additionner et soustraire des fractions.

- $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ des personnages sont des hommes à tête couverte et $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ des personnages sont des hommes à tête nue.
- Cette somme représente la proportion d'hommes parmi l'ensemble des personnages. Elle est égale à $\frac{16}{21}$.

3. $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ représente la part de Sarah.

$\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$ représente la part d'Enzo.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$$

Certains élèves effectueront peut-être $\frac{1}{7} - \frac{1}{3}$ et trouveront donc un résultat négatif. Ce sera l'occasion de revenir sur la notion de comparaison de fractions.

4. Pour additionner ou soustraire des fractions, on les écrit d'abord avec le même dénominateur puis on additionne ou on soustrait les numérateurs en gardant le dénominateur commun.

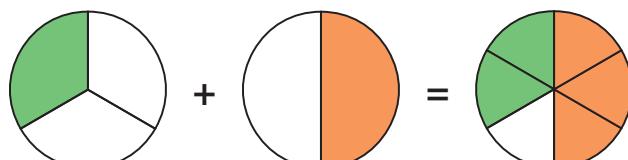
Diagrammes circulaires

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de visualiser sur des diagrammes circulaires l'addition et la soustraction de fractions.
Les prérequis nécessaires sont de savoir partager un disque en parts égales, utiliser le rapporteur.
La capacité introduite est d'additionner et soustraire des fractions.

$$1. \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12} \text{ et } \frac{5}{9} - \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

2. Par exemple :



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

On pourra projeter les différents exemples proposés par les élèves et en garder une trace numérique (ou papier) pour illustrer le cours des élèves.

Exercices

Reconnaitre des fractions égales

Questions flash

- 1** a. Non, car le numérateur est multiplié par 3 et le dénominateur est multiplié par 4.
 b. Oui, car le numérateur et le dénominateur sont divisés par le même nombre : 2.
 c. Oui, car le numérateur et le dénominateur sont divisés (ou multipliés) par le même nombre : -1.
 d. Non, car le numérateur est divisé par -5 et le dénominateur est divisé par 5.
 e. Oui, car le numérateur et le dénominateur sont divisés par le même nombre : -6.

2 $\frac{8}{-6}$ car toutes les autres fractions sont égales à $\frac{4}{3}$.

3 a. $\frac{3}{2} = \frac{7,5}{5}$ b. $\frac{10}{7} = \frac{8}{5,6}$
 c. $\frac{-5,2}{2} = \frac{13}{-5}$ d. $\frac{-6}{-0,4} = \frac{9}{0,6}$

Le nombre manquant s'obtient mentalement en faisant les produits en croix.

4 La situation 2.

5 Toutes les simplifications sont acceptées.

- $\frac{45}{25} = \frac{5 \times 9}{5 \times 5} = \frac{9}{5}$
- $\frac{24}{16} = \frac{2 \times 12}{2 \times 8} = \frac{12}{8}$ ou $\frac{24}{16} = \frac{4 \times 6}{4 \times 4} = \frac{6}{4}$
 ou $\frac{24}{16} = \frac{8 \times 3}{8 \times 2} = \frac{3}{2}$
- $\frac{-28}{49} = -\frac{7 \times 4}{7 \times 7} = -\frac{4}{7}$
- $\frac{-81}{54} = -\frac{3 \times 27}{3 \times 18} = -\frac{27}{18}$ ou $\frac{-81}{54} = -\frac{9 \times 9}{9 \times 6} = -\frac{9}{6}$
 ou $\frac{-81}{54} = -\frac{27 \times 3}{27 \times 2} = -\frac{3}{2}$

6 $\frac{-5}{3} = \frac{-10}{6} = \frac{20}{-12} = \frac{60}{-36} = \frac{-45}{27}$

Les trois premières égalités ne posent pas de difficulté ; pour la dernière, il faut que les élèves pensent à repartir de la 1^{re} fraction.

7 Cet exercice permet de réinvestir le vocabulaire sur les fractions.

- a.** $\frac{8}{7} = \frac{8 \times 8}{7 \times 8} = \frac{64}{56}$ **b.** $\frac{-5}{6} = \frac{-5 \times 8}{6 \times 8} = \frac{-40}{48}$
c. $\frac{-3,5}{1} = \frac{-3,5 \times 8}{1 \times 8} = \frac{-28}{8}$

8 $\frac{8}{15} = \frac{8 \times (-4)}{15 \times (-4)} = \frac{-32}{-60}$ $-\frac{7}{42} = \frac{-7 \times 1}{-7 \times (-6)} = \frac{1}{-6}$
 $\frac{-54}{-63} = \frac{(-9) \times 6}{(-9) \times 7} = \frac{6}{7}$ $-\frac{-32}{64} = \frac{32 \times 1}{32 \times 2} = \frac{1}{2}$

- 9** • $47 \times 7 = 329$ et $16 \times 21 = 336$; les produits ne sont pas égaux donc $\frac{47}{21} \neq \frac{16}{7}$.
 • $-89 \times 159 = -14\,151$ et $-115 \times 123 = -14\,145$
 Les produits ne sont pas égaux donc $\frac{-89}{123} \neq \frac{-115}{159}$.
 • $-3,7 \times (-15,6) = 57,72$ et $1,2 \times 48,1 = 57,72$
 Les produits sont égaux donc $\frac{-3,7}{48,1} = \frac{1,2}{-15,6}$.

10 $\frac{162,5}{25} = \frac{13}{2}$

On calcule $25 \times 13 = 325$ puis on divise par 2.

$$\frac{6}{5} = \frac{-4,8}{-4}$$

On calcule $6 \times (-4) = -24$ puis on divise par 5.

$$\frac{15}{28} = \frac{11,25}{21}$$

On calcule $15 \times 21 = 315$ puis on divise par 28.

$$\frac{-125}{95} = \frac{75}{-57}$$

On calcule $-125 \times (-57) = 7\,125$ puis on divise par 75.

11

Cet exercice permet de revenir sur le signe du quotient de deux relatifs.

$$\frac{7}{2} = \frac{-14}{-4} \quad \frac{2}{7} = \frac{-4}{-14} \quad \frac{7}{-14} = \frac{2}{-4} \quad \frac{-4}{2} = \frac{-14}{7}$$

Comparer des fractions

Questions flash

12 Image 1 : $\frac{1}{2}$ Image 2 : $\frac{4}{5}$ Image 3 : $\frac{19}{30}$

13 $\frac{-3}{-4}$: positif $\frac{-2}{7}$: négatif $\frac{5}{-8}$: négatif

$\frac{-1}{4}$: négatif $\frac{-6}{11}$: positif

14 a. Faux, car $5 \times 11 = 55$ et $8 \times 7 = 56$; les produits en croix ne sont pas égaux.

b. Vrai, car $-5,4 \times 10 = -54$ et $-9 \times 6 = -54$; les produits en croix sont égaux.

c. Faux, car $-3,5 \times 2 = -7$ et $10 \times 0,7 = 7$; les produits en croix ne sont pas égaux.

15 $\frac{-12}{7} > \frac{-16}{9}$ $\frac{4}{11} < \frac{7}{12}$



$$\frac{-7}{6} < \frac{-3}{4} < \frac{-1}{-3} < \frac{1}{2}$$

16 $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$ $-\frac{8}{6} = \frac{-16}{12}$ $-\frac{2}{3} = \frac{-8}{12}$

$\frac{-7}{12} = -\frac{24}{12}$ $\frac{9}{2} = \frac{54}{12}$

$\frac{54}{12} > \frac{21}{12} > \frac{-7}{12} > \frac{-8}{12} > \frac{-16}{12} > \frac{-24}{12}$

donc $\frac{9}{2} > \frac{7}{4} > \frac{-7}{12} > \frac{-2}{3} > \frac{-8}{6} > -2$

17 a. $A = \frac{5+5}{8} = \frac{10}{8}$ et $B = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$
 10 est supérieur à 5 donc $A > B$.

b. $A = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1$ et $B = \frac{5}{3+3} = \frac{5}{6} < 1$ donc $A > B$.

c. $A = \frac{5}{8}$ et $B = \frac{5}{3}$ donc $A < 1$ et $B > 1$ donc $A < B$.

d. $A = \frac{5+(-2)}{8} = \frac{3}{8}$ et $B = \frac{5}{-2+3} = \frac{5}{1} = 5$

$A < 1$ donc $A < B$.

e. $A = \frac{5+(-11)}{8} = \frac{-6}{8}$ et $B = \frac{5}{-11+3} = \frac{5}{-8} = \frac{-5}{8}$

-6 est inférieur à -5 donc $A < B$.

f. $A = \frac{5+(-9)}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$ et $B = \frac{5}{-9+3} = \frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$

Comme $A = \frac{-3}{6}$ et que -3 est supérieur à -5, on peut conclure que $A > B$.

Additionner et soustraire des fractions

Questions flash

- 19.**
- $\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{4+7}{3} = \frac{11}{3}$
 - $\frac{2}{7} + \frac{8}{7} = \frac{2+8}{7} = \frac{10}{7}$
 - $\frac{9}{5} - \frac{7}{5} = \frac{9-7}{5} = \frac{2}{5}$
 - $\frac{4}{6} + \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4+11-5}{6} = \frac{10}{6}$
 - $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{5-3-7}{2} = \frac{-5}{2}$
- 20.**
- $\frac{-5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{-5+4}{9} = \frac{-1}{9}$
 - $\frac{-5}{11} - \frac{8}{11} = \frac{-5-8}{11} = \frac{-13}{11}$
 - $\frac{2}{5} - \frac{-7}{5} = \frac{2-(-7)}{5} = \frac{9}{5}$
 - $\frac{4}{7} - \frac{-5}{7} = \frac{-4-(-5)}{7} = \frac{1}{7}$

Dans les exercices 21 à 23, l'un des dénominateurs est multiple de l'autre.

- 21.**
- $$A = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$$
- $$B = \frac{3}{4} + \frac{-3}{16} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} + \frac{-3}{16} = \frac{12}{16} + \frac{-3}{16} = \frac{9}{16}$$
- $$C = \frac{8}{35} + \frac{-4}{5} = \frac{8}{35} + \frac{-4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{8}{35} + \frac{-28}{35} = \frac{-20}{35}$$
- 22.**
- $$A = \frac{13}{25} - \frac{2}{5} = \frac{13}{25} - \frac{2 \times 5}{5 \times 5} = \frac{13}{25} - \frac{10}{25} = \frac{3}{25}$$
- $$B = -\frac{31}{18} - \frac{4}{3} = -\frac{31}{18} - \frac{4 \times 6}{3 \times 6} = -\frac{31}{18} - \frac{24}{18} = -\frac{55}{18}$$
- $$C = 1 - \frac{5}{42} = \frac{42}{42} - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$
- 23.**
- $$A = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} + \frac{-7}{8} = \frac{5 \times 4}{2 \times 4} + \frac{3 \times 2}{4 \times 2} + \frac{-7}{8}$$
- $$= \frac{20}{8} + \frac{6}{8} + \frac{-7}{8} = \frac{19}{8}$$
- $$B = \frac{4}{15} + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} = \frac{4 \times 2}{15 \times 2} + \frac{2 \times 6}{5 \times 6} - \frac{7}{30}$$
- $$= \frac{8}{30} + \frac{12}{30} - \frac{7}{30} = \frac{13}{30}$$

Dans les exercices 24 et 25, les dénominateurs ne sont pas multiples l'un de l'autre ; une aide est proposée pour le 24, mais pas pour le 25.

- 24.**
- $\frac{5}{8} + \frac{11}{6} = \frac{15}{24} + \frac{44}{24} = \frac{59}{24}$
 - $\frac{7}{30} + \frac{2}{12} = \frac{14}{60} + \frac{10}{60} = \frac{24}{60}$

- 25.**
- Dans cet exercice, les élèves devront trouver des multiples communs aux deux dénominateurs ; on fera remarquer que l'on peut choisir n'importe lequel de ces multiples mais qu'il est judicieux de choisir le plus petit pour faciliter les calculs (et pas obligatoirement le produit des deux dénominateurs).

$$A = \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} + \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{15}{12} + \frac{2}{12} = \frac{17}{12}$$

$$B = \frac{7}{15} - \frac{3}{10} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} - \frac{3 \times 3}{10 \times 3} = \frac{14}{30} - \frac{9}{30} = \frac{5}{30}$$

$$C = -\frac{5}{8} + \frac{5}{12} = -\frac{5 \times 3}{8 \times 3} + \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = -\frac{15}{24} + \frac{10}{24}$$

$$= \frac{-5}{24}$$

- 26.**
- $\frac{4}{5} + \frac{3}{20} = \frac{19}{20}$
 - $\frac{8}{9} + \frac{-2}{3} = \frac{2}{9}$
 - $\frac{7}{6} - \frac{5}{9} = \frac{11}{18}$
 - $-\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{-7}{12}$

Cet exercice permet de revoir les priorités des calculs avec parenthèses.

$$A = \frac{5}{7} - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{7} - \left(\frac{3 \times 2}{2 \times 2} - \frac{5}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{7} - \left(\frac{6}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{7} - \frac{1}{4} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{1 \times 7}{4 \times 7}$$

$$= \frac{20}{28} - \frac{7}{28} = \frac{13}{28}$$

$$B = \left(\frac{5}{8} + \frac{-7}{4} \right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{5}{8} + \frac{-7 \times 2}{4 \times 2} \right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{4}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{5}{8} + \frac{-14}{8} \right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{-9}{8} - \frac{-5}{3}$$

$$= \frac{-9 \times 3}{8 \times 3} - \frac{-5 \times 8}{3 \times 8} = \frac{-27}{24} - \frac{-40}{24} = \frac{-27 + 40}{24}$$

$$= \frac{13}{24}$$

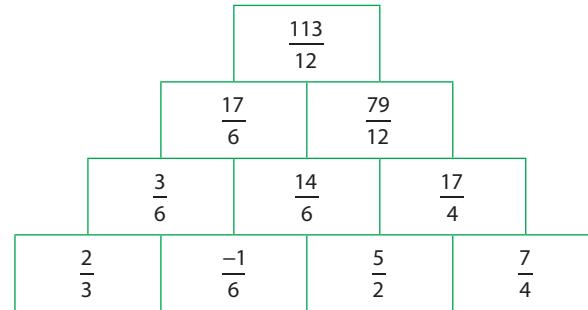
28.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{5}{12}$$

$$= \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Achille a tort : le mélange de Maya rentre exactement dans la carafe.

- 29.**
- On pourra proposer à certains élèves quelques résultats intermédiaires et/ou le résultat final en haut de la pyramide. On pourra remarquer que la simplification de fractions n'est pas forcément judicieuse ici.



- 30.**
- Cet exercice permet de travailler la maîtrise de la langue ; on pourra se limiter aux questions a. et b. avec certains élèves. De même, les calculs des questions c. et d. pourront être réservés aux élèves plus expérimentés.

- $\frac{2}{9} + \frac{4}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{9} + \frac{12}{9} = \frac{14}{9}$
- $\frac{3}{5} - \frac{4}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} - \frac{4}{10} = \frac{2}{10}$
- $\frac{3}{2} + \left(\frac{11}{4} - \frac{5}{2} \right) = \frac{3}{2} + \left(\frac{11}{4} - \frac{5 \times 2}{2 \times 2} \right)$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{11}{4} - \frac{10}{4} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- $\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4} \right)$

$$= \left(\frac{4 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5 \times 3}{2 \times 3} \right) - \left(\frac{3 \times 2}{2 \times 2} + \frac{7}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{6} + \frac{15}{6} \right) - \left(\frac{6}{4} + \frac{7}{4} \right) = \frac{23}{6} - \frac{13}{4}$$

$$= \frac{23 \times 2}{6 \times 2} - \frac{13 \times 3}{4 \times 3} = \frac{46}{12} - \frac{39}{12} = \frac{7}{12}$$

31

$$A = x + y + z = \frac{5}{6} + \frac{-1}{24} + \frac{-7}{12}$$

$$= \frac{5 \times 4}{6 \times 4} + \frac{-1}{24} + \frac{-7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{20}{24} + \frac{-1}{24} + \frac{-14}{24} = \frac{5}{24}$$

$$B = x - y + z = \frac{5}{6} - \frac{-1}{24} + \frac{-7}{12}$$

$$= \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{-1}{24} + \frac{-7 \times 2}{12 \times 2}$$

$$= \frac{20}{24} - \frac{-1}{24} + \frac{-14}{24} = \frac{7}{24}$$

$$C = x - (y + z) = \frac{5}{6} - \left(\frac{-1}{24} + \frac{-7}{12} \right)$$

$$= \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \left(\frac{-1}{24} + \frac{-7 \times 2}{12 \times 2} \right)$$

$$= \frac{20}{24} - \left(\frac{-1}{24} + \frac{-14}{24} \right) = \frac{20}{24} - \frac{-15}{24} = \frac{35}{24}$$

Problèmes

Gaz à effet de serre

$$1 - \left(\frac{3}{25} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = 1 - \frac{12 + 30 + 20 + 20}{100}$$

$$= \frac{100 - 82}{100} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

$\frac{9}{50}$ des gaz à effet de serre sont rejetés par le secteur résidentiel et tertiaire.

Jardin

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{5}{30} + \frac{12}{30} = \frac{17}{30}$$

Non, il lui reste $\frac{13}{30}$ soit moins de la moitié car $\frac{13}{30} < \frac{15}{30}$.

Tapisserie

$$\frac{4}{15} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{8 + 12 + 5}{30} = \frac{25}{30}$$

Il n'a donc pas fini après 3 jours de travail car $\frac{25}{30} < \frac{30}{30}$.

TGV

$\frac{1}{3}$ des places du wagon n°16 sont occupées.

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 7}{21} = \frac{8}{21}$$

$\frac{8}{21}$ des places du wagon n°16 ont été prises à Poitiers.

Élections

$$\frac{3}{11} + \frac{2}{9} = \frac{27 + 22}{99} = \frac{49}{99}$$

Le candidat Z a obtenu $\frac{99}{99} - \frac{49}{99} = \frac{50}{99}$ des voix.

Or $\frac{50}{99} > \frac{1}{2}$ donc il n'y aura pas de second tour.

Football

1. $(120 \times 2 + (53 + \frac{1}{3}) \times 2) = 240 + 106 + \frac{2}{3} = \frac{1040}{3}$ yards

On précisera que la largeur du terrain est donnée en notation américaine : « 53 1/3 » signifie $53 + \frac{1}{3}$.

De même, dans 0,9144 m, le point joue le rôle de la virgule. Certains élèves se demanderont peut-être si les « end zones » font partie du terrain ; on pourra leur préciser que ce sont les zones d'en-but et qu'elles font donc partie du terrain.

2. $\frac{1040}{3} \times 0,9144 = 316,992$ m

Triathlon

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{20}{31} \right) = 1 - \frac{31 + 60}{93} = 1 - \frac{91}{93} = \frac{2}{93}$$

Il effectue donc $\frac{2}{93}$ du parcours en nageant.

Cantine

$$1 - \left(\frac{4}{10} + \frac{1}{3} \right) = 1 - \left(\frac{12}{30} + \frac{10}{30} \right) = \frac{30}{30} - \frac{22}{30} = \frac{8}{30}$$

Donc $\frac{8}{30}$ (ou $\frac{4}{15}$) des élèves ont choisi le fromage.

Voyage en Espagne

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{8} = \frac{24 + 15}{40} = \frac{39}{40}$$

Il manque donc $\frac{1}{40}$ de la somme pour financer la totalité du voyage.

Logement

Aire du séjour : $7 \times 6 = 42 \text{ m}^2$

$\frac{42}{105} = \frac{14}{35}$ et $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ or $\frac{14}{35} < \frac{15}{35}$ donc ce logement ne répond pas au critère de Sofien.

Énigme

$$3 \times \frac{1111}{101} + 4 \times \frac{1111}{101} = 33 + 44 = 77$$

Carré magique

$\frac{-1}{4}$	$\frac{-7}{3}$	$\frac{-1}{6}$
$\frac{-5}{6}$	$\frac{-11}{12}$	-1
$\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-19}{12}$

Les élèves choisiront peut-être de garder 24 comme dénominateur ; on pourra faciliter les calculs en remplissant une ou deux cases supplémentaires pour certains élèves.

Différentes méthodes

- Le nombre de chiffres à l'affichage de la calculatrice étant limité, on ne peut pas comparer la huitième ou la neuvième ou la dixième décimale de ces quotients. On ne peut donc pas savoir si ces deux fractions sont égales.
- Considérons les produits en croix : le chiffre des unités du produit $615\ 185 \times 25\ 000\ 000$ est 0 et le chiffre des unités du résultat de $276\ 552\ 273 \times 55\ 612$ est 6. Ces deux produits ne sont donc pas égaux ; les fractions $\frac{276\ 552\ 273}{25\ 000\ 000}$ et $\frac{615\ 185}{55\ 612}$ ne sont pas égales.

AJR (Apport journalier recommandé)

1. $\frac{1}{3}$ (céréales) $> \frac{3}{10}$ (lait) $> \frac{1}{4}$ (fromage) $> \frac{1}{5}$ (yaourt)

Pour ranger ces fractions, on peut les écrire avec le même dénominateur (60) mais on peut facilement calculer mentalement ces quotients.

2. $\frac{20}{60} + \frac{18}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{65}{60}$ or $\frac{65}{60} > 1$
donc ces quatre aliments couvrent les besoins en calcium.

Défi

Coup de pouce : commencer d'abord par ranger ces fractions.

$$\frac{11}{20} > \frac{2}{5} > \frac{-3}{5} > \frac{-7}{10}$$

Les élèves penseront peut-être à calculer la valeur décimale de ces quotients pour répondre aux questions et arriveront ainsi à répondre plus facilement (ils n'effectueront pas d'addition et de soustraction de fractions comme on le souhaiterait mais leur stratégie doit être acceptée).

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{11}{20} + \frac{2}{5} = \frac{19}{20} & \text{b. } \frac{-3}{5} + \frac{-7}{10} = \frac{-13}{10} \\ \text{c. } \frac{11}{20} - \frac{-7}{10} = \frac{25}{20} & \text{d. } \frac{-3}{5} - \frac{-7}{10} = \frac{1}{10} \end{array}$$

Pour le d., le recours à une droite graduée facilite la réponse.

47 Grands fleuves

Les élèves doivent connaître la formule de calcul de la longueur d'un cercle pour résoudre ce problème.

La longueur totale des cinq plus grands fleuves est de 31 047 km.

$$6\,696 + 6\,450 + 6\,380 + 5\,971 + 5\,550 = 31\,047$$

Le tour de la Terre représente :

$$\pi \times d = \pi \times 2 \times 6\,371 \approx 40\,030 \text{ km}$$

$$\frac{31\,047}{40\,030} \approx \frac{3}{4} \text{ donc Mathis a tort : c'est possible.}$$

48 Devoirs d'anglais

$$\frac{10}{15} = \frac{40}{60} \quad \frac{9}{12} = \frac{45}{60} \quad \frac{7}{10} = \frac{42}{60}$$

La meilleure note est donc $\frac{9}{12}$ et la plus mauvaise est $\frac{10}{15}$.

49 Écart

Les élèves essaieront sûrement de construire une droite graduée pour répondre à la question ; certains penseront que les fractions sont données par ordre croissant et n'effectueront pas les bons calculs.

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \quad \text{donc } \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \quad \text{et} \quad \frac{7}{15} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

donc ces trois points sont régulièrement espacés.

50 Plongée sous-marine

$$1. \frac{-100}{3} = \frac{-100 \times 127}{3 \times 127} = \frac{-12\,700}{381}$$

$$\text{Or } \frac{-12\,700}{381} < \frac{-6\,250}{381} \quad \text{donc } \frac{-100}{3} < \frac{-6\,250}{381}$$

$$2. \frac{-6\,250}{381} - \frac{-12\,700}{381} = \frac{-6\,250 + 12\,700}{381} = \frac{6\,450}{381}$$

$= \frac{2\,150}{127}$ pieds soit environ 17 pieds.

51 Froid glacial en altitude

$$\frac{200}{9} - \frac{-50}{3} = \frac{200 + 150}{9} = \frac{350}{9}$$

La température a diminué de $\frac{350}{9}$ °C.

52 À vélo

Coup de pouce : un schéma pour illustrer la situation.

Il reste à parcourir : $1 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$ du parcours.

Or $\frac{23}{30} = \frac{2,3}{3}$, donc la distance entre son domicile et le collège est de 3 km.

53 Égalité

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6}{30} + \frac{9}{30} + \frac{15}{30} - \frac{10}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

54 Le temps de sommeil

Coup de pouce : calculer d'abord la fraction correspondant au sommeil léger.

$$\text{Sommeil léger : } \frac{7}{24} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24} + \frac{3}{24} = \frac{10}{24}$$

$$1 - \left(\frac{1}{48} + \frac{7}{24} + \frac{10}{24} \right) = 1 - \frac{35}{48} = \frac{13}{48}$$

La part de sommeil paradoxal représente $\frac{13}{48}$ de la durée totale de sommeil.

55 Demi-cercles

Longueur du demi-cercle rose : $\pi \times 2 \text{ cm}$

Longueur du demi-cercle vert : $\pi \times 1 \text{ cm}$

Longueur du demi-cercle bleu : $\frac{\pi}{2} \text{ cm}$

Longueur du demi-cercle noir : $\pi \times 3,5 \text{ cm}$

Périmètre total de la figure : $2\pi + \pi + 0,5\pi + 3,5\pi = 7\pi \text{ cm}$

• La partie rose représente $\frac{2\pi}{7\pi}$ soit $\frac{2}{7}$ de la figure totale.

• La partie verte représente $\frac{\pi}{7\pi}$ soit $\frac{1}{7}$ de la figure totale.

• La partie bleue représente $\frac{0,5\pi}{7\pi}$ soit $\frac{1}{14}$ de la figure totale.

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} ; \text{ les trois réunies représentent la moitié de la figure totale.}$$

56 Les risques volcaniques

$$1. \frac{2}{5} = \frac{26}{65} \quad \text{et} \quad \frac{6}{13} = \frac{30}{65} \quad \text{donc } \frac{2}{5} < \frac{6}{13}$$

donc « les nuées ardentes » sont le phénomène le plus meurtrier.

$$2. \frac{2}{5} + \frac{6}{13} = \frac{26}{65} + \frac{30}{65} = \frac{56}{65}$$

$$56 \div 65 \approx 0,86 \text{ soit } 86\%.$$

Environ 86 % des décès induits par une éruption volcanique sont causés par des lahars ou des nuées ardentes.

57 Clé USB

$$32 \div 4 = 8 \quad \text{Les photos occupent } 8 \text{ Go.}$$

$$32 - (20 + 8) = 4 \quad 4 \text{ Go} = 4\,000 \text{ Mo}$$

Il reste 4 000 Mo libres sur la clé pour la musique.

$$\frac{4\,000}{4} = 1\,000 \text{ morceaux de musique d'environ } 4 \text{ Mo chacun} \\ \text{pourront être stockés sur la clé.}$$

58 Frise historique

1. Durée de la période étudiée par Fabien :

$$\frac{476 - (-3\,000)}{3} = \frac{3\,476}{3} \text{ ans}$$

Durée de la période étudiée par Steven :

$$\frac{1492 - 476}{4} = \frac{1016}{4} = 254 \text{ ans}$$

Durée des deux périodes réunies :

$$\frac{3\,476}{3} + 254 = \frac{3\,476 + 762}{3} = \frac{4\,238}{3} \text{ ans}$$

2. Date de la fin de la période étudiée par Fabien :

$$-3\,000 + \frac{3\,476}{3} = \frac{-5\,524}{3}$$

$$476 - \frac{-5\,524}{3} = \frac{1428}{3} + \frac{5\,524}{3} = \frac{6\,952}{3} \text{ années entre la fin}$$

de la période étudiée par Fabien et le début du Moyen Âge soit environ 2 317 ans.

59 La Marseillaise



60 Collection de verres

Les formules du volume du cône et du cylindre ne sont pas données dans l'exercice.

1. Volume des trois verres coniques :

$$\frac{\pi \times 2^2 \times 4}{3} + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} + \frac{\pi \times 4^2 \times 5}{3} = \frac{16\pi + 36\pi + 80\pi}{3} = \frac{132\pi}{3} = 44\pi \text{ cm}^3$$

Volume du verre cylindrique : $\pi \times 2^2 \times 11 = 44\pi \text{ cm}^3$

Donc les trois verres coniques ont la même contenance que le verre cylindrique.

2. Volume des 4 verres :

$$44 \times 2 = 88\pi \text{ cm}^3 = 0,088\pi \text{ dm}^3 = 0,088\pi \text{ L} = 8,8\pi \text{ cl} \approx 27,65 \text{ cl}$$

Le barman ne pourra donc pas répartir une canette de 33 cl dans ces quatre verres, car 33 est supérieur à 27,65.

61 La piscine

- Auront-ils assez de temps ?

En une journée, Marc et Vanessa carrèlent $\frac{1}{3}$ d'une piscine chacun, Medhi carrèle $\frac{1}{5}$ d'une piscine et Jérémie carrèle $\frac{1}{7}$ d'une piscine.

En une journée, à eux quatre, ils carrèlent :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{35 + 35 + 21 + 15}{105} = \frac{106}{105} \text{ d'une piscine}$$

soit un peu plus d'une piscine.

- Auront-ils assez de carrelage ?

Surface à carreler :

$$2 \times 4 \times 1,5 + 2 \times 2 \times 1,5 + 2 \times 4 = 26 \text{ m}^2$$

Quantité de carrelage nécessaire : 4 cartons pleins

Quantité de carrelage disponible :

$$3 + \frac{1}{3} + \frac{4}{7} = \frac{63 + 7 + 12}{21} = \frac{82}{21} \text{ cartons}$$

Or $\frac{82}{21} < 4$ donc il manque du carrelage.

Marc, Vanessa, Medhi et Jérémie ne pourront pas carreler une piscine durant leur journée de travail car ils n'auront pas assez de carrelage.

$$\text{Donc } A = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

On peut imaginer que certains élèves poursuivront la décomposition de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{1}{15}$; on leur fera remarquer que la décomposition n'est pas unique (par exemple : $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{240}$).

$$B = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

$$\text{ou } B = A + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{4}{6} + \frac{4}{30} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{2}{4} + \frac{2}{12} + \frac{2}{16} + \frac{2}{240} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120} \end{aligned}$$

La question de la décomposition minimale se pose alors.

Algorithmique et outils numériques

62 Fractions égyptiennes

- a. et c.

E2		fx		=C2+D2	
A	B	C	D	E	
1	n	1/n	1/(n+1)	1/(n*(n+1))	1/(n+1) + 1/(n*(n+1))
2	1	1	1/2	1/2	1
3	2	1/2	1/3	1/6	1/2
4	3	1/3	1/4	1/12	1/3
5	4	1/4	1/5	1/20	1/4
6	5	1/5	1/6	1/30	1/5
7	6	1/6	1/7	1/42	1/6
8	7	1/7	1/8	1/56	1/7
9	8	1/8	1/9	1/72	1/8
10	9	1/9	1/10	1/90	1/9

On remarque que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n}$

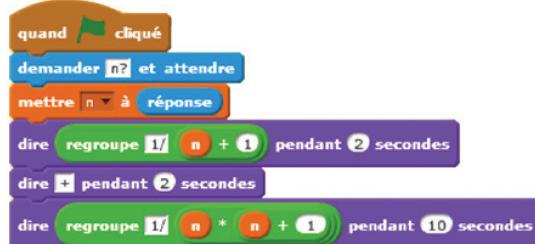
b. Dans B2 : « =1/A2 » Dans C2 : « =1/(A2+1) »

Dans D2 : « =1/(A2*(A2+1)) » Dans E2 : « =C2+D2 »

d. Pour tout n positif non nul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \times (n+1)} &= \frac{1 \times n}{(n+1) \times n} + \frac{1}{(n+1) \times n} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+1) \times n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2.



3.

Ce script ne permet pas d'obtenir directement la décomposition des fractions proposées ; il faut penser d'abord à les écrire sous la forme d'une somme de fractions de numérateur 1.

$$\text{Exemple : } A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

On entre la valeur 5 dans ce script : on obtient la décomposition de $\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$.

63 Formule de Leibniz

1.

E3		fx		=E2+B3-D3	
A	B	C	D	E	Approximation de π
1	n	4/n	p	4/p	
2	1	4	3	1,33333333	2,66666667
3	5	0,8	7	0,57142857	2,895238095
4	9	0,44444444	11	0,36363636	2,976046176
5	13	0,30769231	15	0,26666667	3,017071817

2. Dans A3 : « =A2+4 » Dans C3 : « =C2+4 »

4. Dans E2 : « =B2-D2 »

5. Dans E3 : « =E2+B3-D3 »

6. La dixième approximation de π est $\approx 3,096\ 161\ 526$.

Elle se trouve sur la 11^e ligne.

7. • À partir de la ligne n°25 :

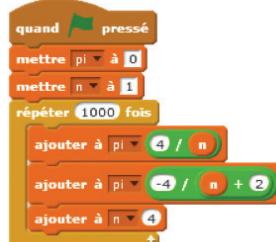
24	89	0,04494382	91	0,04395604	3,11985609
25	93	0,04301075	95	0,04210526	3,12076158

• À partir de la ligne n°315 :

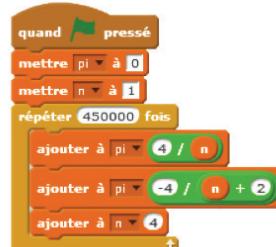
314	1249	0,00320256	1251	0,00319744	3,139995211
315	1253	0,00319234	1255	0,00318725	3,140000298

8. a. n correspond aux dénominateurs de la formule de Leibniz et la variable π affiche les approximations de ce nombre.

b.



c. On obtient $\pi \approx 3,141\ 592$. Ainsi :



450 000 fois n'est pas la seule possibilité.

Dans les exercices verts, l'un des dénominateurs est multiple de l'autre ; ce n'est pas le cas dans les exercices roses.

Exercice 1

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{72} = \frac{7}{72}$$

La France et les États-Unis ont gagné $\frac{7}{72}$ des médailles d'or.

Exercice 1

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{12} = \frac{6 + 20}{48} = \frac{26}{48} = \frac{13}{24}$$

L'Allemagne et la Russie ont gagné $\frac{13}{24}$ des médailles d'or.

Exercice 2

$$1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{96} \right) = 1 - \left(\frac{6}{96} + \frac{5}{96} \right) = \frac{85}{96}$$

$\frac{85}{96}$ des départements français étaient en vigilance jaune.

Exercice 2

Les élèves doivent déduire des informations données à côté de la carte de la France que le nombre de départements en France métropolitaine est 96.

$$1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{6} \right) = 1 - \left(\frac{6}{48} + \frac{40}{48} \right) = \frac{48 - 46}{48} = \frac{2}{48} = \frac{4}{96}$$

4 départements étaient sans vigilance le 7 septembre.

Écriture d'un énoncé

Voici un exemple.

Aujourd'hui vers midi, parmi les personnes qui se trouvent sur les pistes de ski d'une station de sports d'hiver, $\frac{2}{15}$ skient sur les pistes vertes, $\frac{3}{20}$ sur les pistes noires et 11 % sur les pistes rouges. Les autres descendent les pistes bleues. Quelle est la proportion de personnes qui skient sur les pistes bleues ?

Analyse d'une production

• Erreurs : Raphaël a additionné les dénominateurs des fractions pour additionner les parts.

Mathias a confondu la fraction qui représente les six morceaux avec « le liant magique » qui est la part à ajouter pour obtenir 1.

• Réponse correcte : $1 - \frac{63}{64} = \frac{64}{64} - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$

La fraction qui manquait était donc $\frac{1}{64}$.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs » : utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes. Les connaissances et compétences associées sont :

- Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.
- * Nombres décimaux
- * Nombres rationnels (positifs ou négatifs)
- * Fractions
- Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.
- Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée :
 - * ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire
 - * égalité de fractions
- Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.
- Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève.

Rencontrer diverses écritures dans des situations variées.

Relier fractions, proportions et pourcentages.

- Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale).
- **Repères de progressivité**
La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations appréhendées au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.

Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient.

Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. En 5^e, les élèves calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel. À partir de la 4^e, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, à passer d'une représentation à une autre d'un nombre, à justifier qu'un nombre est ou non l'inverse d'un autre. Ils n'abordent la notion de fraction irréductible qu'en 3^e.

• Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de différentes représentations d'une fraction (décompositions additives, multiplicatives, cas des fractions décimales, repérage sur une droite graduée) permettent de conduire intelligemment un calcul mental, posé ou instrumenté (domaine 1). L'explication d'un tel calcul, à l'oral ou à l'écrit, pour valider la démarche qui lui correspond ou montrer son efficacité, conduit à argumenter pour convaincre (domaine 3). La résolution de problèmes issus des sciences et techniques mettant en jeu des fractions (reconnaissance d'une situation de proportionnalité, évaluation d'une proportion, d'un pourcentage, traitement de données statistiques, contrôle de la vraisemblance de résultats) favorise la compréhension du monde (domaines 4 et 5). (Voir document d'accompagnement sur les fractions.)

Ce chapitre doit être traité après avoir vu le produit et le quotient de deux nombres relatifs et l'addition et la soustraction de fractions.

Activités

Questions flash

Les élèves n'ont pas encore appris à prendre la fraction d'une quantité ; il faut donc revenir à la notion de partage.

- $50 \div 5 = 10$; le pull coûte 10 €.
- Il lui reste 40 € ; $40 \div 2 = 20$; le foulard coûte 20 €.
- $40 - 20 = 20$ € ; il lui reste 20 €.

$$2. 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) = \frac{10}{10} - \left(\frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \right) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Il verse donc $\frac{1}{5}$ L de jus d'ananas dans la bouteille.

Des molécules

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle de multiplication d'une fraction par un entier en passant par l'addition de deux fractions.

Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer une proportion.

La capacité introduite est de multiplier des fractions.

2. Il a tort : il y a $\frac{4}{11}$ des molécules qui contiennent de l'azote et $\frac{4}{11}$

du carbone donc $\frac{4}{11} + \frac{4}{11} = \frac{8}{11}$.

On en déduit : $2 \times \frac{4}{11} = \frac{8}{11}$ et pas $\frac{8}{22}$.

On conclura l'activité en demandant aux élèves de généraliser cette règle de calcul : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$

- $\frac{2}{11}$ à chaque réponse.
- $\frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$
- $3 \times \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$

Drapeau américain

Activité 2

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle de multiplication de deux fractions.
Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer un partage, calculer l'aire d'un rectangle.
La capacité introduite est de multiplier des fractions.

1. L'aire du rectangle bleu représente les $\frac{14}{65}$ de l'aire du drapeau.

2. $L \times \ell = \frac{2}{5} \times \frac{7}{13}$ On en déduit que $\frac{2}{5} \times \frac{7}{13} = \frac{14}{65}$.

On peut, pour conclure, demander aux élèves de conjecturer la règle de multiplication de deux fractions.

Du mauve

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de calculer la fraction d'un entier et la fraction d'une fraction.
Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer un partage, calculer l'aire d'un rectangle.
La capacité introduite est de calculer une fraction d'un nombre.

Le partage de Kévin a pour but de montrer que le partage de la serviette peut aussi se faire en partageant l'unité d'aire (1 dm^2) puis en multipliant par le nombre d'unités (12) pour amener les élèves à calculer une fraction d'un nombre à l'aide du produit de la fraction par ce nombre.

1. a. Sonia a partagé équitablement et directement la serviette de 12 dm^2 en 4 bandes verticales, puis en a teinté en mauve 3 sur les 4.

Kévin a teinté les $\frac{3}{4}$ de chaque carré de 1 dm^2 et il a répété

12 fois cette opération pour le faire sur toute la surface de la serviette.

Ils ont tous deux respecté la règle de couleur.

b. Sur la partage de Sonia, il y a 3 bandes mauves de 3 dm^2 chacune soit une aire de la partie mauve égale à $3 \times 3 = 9 \text{ dm}^2$.

c. Selon le partage de Kévin : $\frac{3}{4}$ de $12 = \frac{3}{4} \times 12 = 9$

On conclura cette question en demandant aux élèves de conjecturer la règle de calcul d'une fraction d'une quantité.

2. a. Les $\frac{2}{3}$ du tissu mauve sont pailletés.

b. Les $\frac{6}{12}$ de la serviette sont pailletés. Cela correspond à une fraction qui se traduit par le calcul : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

On conclura cette question en demandant aux élèves de conjecturer la règle de calcul d'une fraction de fraction.

Patchwork

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la notion d'inverse. Les prérequis nécessaires sont de savoir multiplier un entier par une fraction, multiplier deux fractions.
La capacité introduite est de connaître l'inverse d'un nombre.

Certaines égalités peuvent aussi être complétées par des nombres décimaux (la c. et la d.).

On conclura cette activité en précisant que lorsque le produit de deux facteurs est égal à 1, on dit que les nombres sont inverses l'un de l'autre.

$$\begin{array}{lll} a. 1 \times 1 = 1 & b. 3 \times \frac{1}{3} = 1 & c. \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1 \\ d. 6 \times \frac{1}{6} = 1 & e. 0,5 \times \frac{1}{2} = 1 & \end{array}$$

Console de jeux

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la règle de calcul d'une division par une fraction.
Les prérequis nécessaires sont de savoir multiplier un entier par une fraction, multiplier deux fractions, traiter une situation de proportionnalité, connaître l'inverse d'un nombre.
La capacité introduite est de diviser par une fraction.

1. Violette a payé les $\frac{3}{4}$ de la console, car $\frac{285}{380} = \frac{5 \times 3 \times 19}{5 \times 4 \times 19} = \frac{3}{4}$.

2.

Durée totale d'utilisation (en heures)	1	2	3	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{1}{3}$	8
Temps de jeu de Violette (en heures)	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	6

$$3. \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

4. Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Activité 5

Exercices

Multiplier des fractions

Questions flash

1. A = $\frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$
 $C = \frac{5 \times (-11)}{6 \times 4} = \frac{-55}{24}$

B = $-\frac{7 \times 4}{5} = -\frac{28}{5}$
 $D = \frac{-8 \times (-10)}{9 \times 9} = \frac{80}{81}$

2. A = $\frac{8}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{63}$
 $B = -5 \times \frac{4}{9} = \frac{-20}{9}$ ou B = $-5 \times \frac{4}{-9} = \frac{20}{9}$

3. A est positif car le nombre de signes négatifs est pair.
 B est négatif car le nombre de signes négatifs est impair.
 C est négatif car le nombre de signes négatifs est impair.
 D est positif car le nombre de signes négatifs est pair.

4. A = $\frac{5 \times (-3)}{8 \times 2} = \frac{-15}{16}$
 $C = \frac{-3 \times 4}{5} = \frac{-12}{5}$

B = $\frac{7 \times (-3)}{8 \times 8} = \frac{-21}{64}$
 $D = \frac{-2 \times (-10)}{11 \times 3} = \frac{20}{33}$

5. On précisera aux élèves de s'interroger sur le signe du résultat avant d'effectuer les calculs : cela facilite les calculs.

A = $\frac{7 \times 5}{3 \times 4 \times 3} = \frac{35}{36}$ B = $-\frac{4 \times 5 \times 5}{3 \times 7 \times 3} = -\frac{100}{63}$

6. a. $\frac{-55}{63} \times \frac{35}{66} = -\frac{55 \times 35}{63 \times 66} = -\frac{5 \times 11 \times 7 \times 5}{9 \times 7 \times 6 \times 11} = -\frac{25}{54}$
 b. A = $\frac{49 \times 10}{15 \times 21} = \frac{7 \times 7 \times 2 \times 5}{3 \times 5 \times 3 \times 7} = \frac{14}{9}$
 B = $-\frac{28 \times 36}{27 \times 7} = -\frac{7 \times 4 \times 9 \times 4}{9 \times 3 \times 7} = -\frac{16}{3}$
 C = $\frac{17 \times 39}{52 \times 34} = \frac{17 \times 3 \times 13}{4 \times 13 \times 17 \times 2} = \frac{3}{8}$

7. Cet exercice permet de réinvestir les additions, soustractions de fractions et les priorités des calculs.

A = $-\frac{2}{21} \times \frac{14}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{2 \times 7 \times 2}{3 \times 7 \times 5} - \frac{8}{5}$
 $= -\frac{4}{15} - \frac{24}{15} = -\frac{28}{15}$

B = $\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \times \frac{-1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{6}{24} - \frac{5}{24} = \frac{1}{24}$
 C = $\frac{4}{-3} + \frac{-7}{6} \times \frac{-2}{5} = -\frac{4}{3} + \frac{7 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{4}{3} + \frac{14}{30} = -\frac{20}{15} + \frac{14}{15} = -\frac{13}{15}$
 D = $\left(\frac{8}{15} - \frac{7}{5}\right) \times \left(\frac{-1}{6} + \frac{2}{9}\right)$
 $= \left(\frac{8}{15} - \frac{21}{15}\right) \times \left(\frac{-3}{18} + \frac{4}{18}\right) = -\frac{13}{15} \times \frac{1}{18} = -\frac{13}{270}$

8. a. $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ b. $\frac{7}{2} \times \frac{-5}{4} = \frac{-35}{8}$
 c. $\frac{-5}{6} \times \frac{9}{4} = \frac{-45}{24} = \frac{-15}{8}$ d. $\frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$

9. Cet exercice permet de réinvestir la substitution d'une lettre par un nombre et de revenir sur la suppression du signe \times entre deux lettres.

10. R = $\frac{7}{5} \times \frac{-3}{10} + (-4) = \frac{-21}{50} + \frac{-200}{50} = \frac{-221}{50}$

2. S = $\frac{-21}{50} - \frac{-3}{10} \times (-4) = \frac{-21}{50} - \frac{12}{10} = \frac{-21}{50} - \frac{60}{50} = \frac{-81}{50}$

3. T = $\left(\frac{7}{5} + \frac{-3}{10}\right) \left(\frac{7}{5} + (-4)\right) = \left(\frac{14}{10} + \frac{-3}{10}\right) \left(\frac{7}{5} + \frac{-20}{5}\right) = \frac{11}{10} \times \frac{-13}{5} = \frac{-143}{50}$

Calculer une fraction d'un nombre

Questions flash

10. a. Vrai. b. Vrai. c. Faux.

11. a. 8 bonbons car $40 \div 5 = 8$.

12. $\frac{4}{7} \times 21 = 12$ Le cadeau coûte 12 €.

13. $\frac{7}{25} \times 1500 = 420$ 420 mineurs ont été interrogés.

14. a. $\frac{7}{10} \times 60 = 42$ min

b. $\frac{2}{5} \times 60 = \frac{120}{5} = 24$ min

c. $\frac{5}{6} \times 60 = \frac{5 \times 6 \times 10}{6} = 50$ min

d. $\frac{4}{15} \times 60 = \frac{4 \times 4 \times 15}{15} = 16$ min

15. $\frac{13}{20} \times 150 = 97,5$ Le morceau contient 97,5 g d'eau.

16. Cet exercice permet de travailler le sens des opérations et la maîtrise de la langue.

- a. Les chocolats qui ne sont pas au chocolat noir.
 b. Les chocolats qui sont noirs et fourrés au praliné.
 c. Les chocolats qui sont noirs et qui ne sont pas fourrés au praliné.

17. Théo boit les $\frac{2}{15}$ de la bouteille ; il en reste les $\frac{13}{15}$. Morgane boit les $\frac{39}{150}$ (ou $\frac{13}{50}$) de la bouteille car $\frac{3}{10} \times \frac{13}{15} = \frac{39}{150}$.

Connaitre l'inverse d'un nombre

Questions flash

18. 2 a pour inverse $\frac{1}{2}$.

$-\frac{1}{2}$ a pour inverse -2.

$-\frac{5}{24}$ a pour inverse $-\frac{24}{5}$.

$\frac{24}{5}$ a pour inverse $\frac{5}{24}$.

19. a. $\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = 1$

b. $\frac{-3}{13} \times \frac{13}{-3} = 1$

c. $5 \times \frac{1}{5} = 1$

d. $-4 \times \frac{1}{-4} = 1$

20. Cet exercice permet de revenir sur les notions d'opposé et d'inverse que les élèves confondent souvent.

a. Faux : l'inverse de -5 est $-\frac{1}{5}$.

b. Vrai.

c. Faux : l'inverse de $\frac{-3}{7}$ est $-\frac{7}{3}$.

d. Vrai.

e. Faux : l'opposé de l'inverse de 8 est $-\frac{1}{8}$.

f. Faux : c'est 1.

- 21**
- L'inverse de $\frac{2}{5}$ est $\frac{5}{2}$ soit 2,5.
 - L'inverse de $\frac{-1}{3}$ est $\frac{3}{-1}$ soit -3.
 - L'inverse de $\frac{-8}{6}$ est $\frac{6}{-8}$ soit -0,75.
 - L'inverse de $\frac{-5}{-4}$ est $\frac{-4}{-5}$ soit 0,8.
 - L'inverse de $\frac{10}{-1,2}$ est $\frac{-1,2}{10}$ soit -0,12.

22 a. $\frac{7}{3}$ b. $\frac{1}{-8}$ c. $-\frac{18}{11}$ d. $\frac{9}{-14}$ e. $\frac{-35}{-16} = \frac{35}{16}$

23 B car $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

D car $0,75 = \frac{3}{4}$.

E car $\frac{15}{20} = \frac{5 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{4}$.

24 Cet exercice permet de faire la synthèse sur la notion d'inverse et d'opposé.

Nombre x	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{-7}$	$\frac{8}{9}$
Inverse de x	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{-7}$	6	-7	$\frac{9}{8}$
Opposé de x	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{9}$

25 A = $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{23}{12}$ donc l'inverse de A est $\frac{12}{23}$.

Cet exercice est l'occasion de montrer aux élèves que l'inverse d'une somme n'est pas égal à la somme des inverses.

Diviser par une fraction

Questions flash

- 26** $\frac{-7}{5} \div \frac{4}{9} = \frac{-7}{5} \times \frac{9}{4}$ C'est l'expression C.
- 27** A = $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ B = $\frac{2}{3} \times 3 = 2$
C = $\frac{3}{-7} \times \frac{7}{-1} = 3$ D = $-8 \times 8 = -64$

28 A = $\frac{11}{5} \times \frac{1}{-3} = -\frac{11}{15}$ B = $(-3) \times \frac{5}{11} = -\frac{15}{11}$
C = $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ D = $\frac{2}{-3} \times \frac{7}{-5} = \frac{14}{15}$

29 c. $\frac{-14}{25} \times \frac{15}{-7} = \frac{2 \times 7 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 7} = \frac{6}{5} = 1,2$

30 $\frac{4}{3} \div (-5) \rightarrow \frac{4}{-5} \times \frac{1}{3}$ $\frac{4}{-5} \div \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{-5} \times 3$
 $\frac{4}{-5} \div (-3) \rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}$ $4 \div \frac{3}{-5} \rightarrow 4 \times \frac{-5}{3}$

31 Cet exercice permet de travailler la maitrise de la langue. On peut le prolonger en demandant aux élèves d'écrire eux-mêmes une phrase et l'expression mathématique correspondante.

- $\frac{15}{8} \div \frac{3}{5} = \frac{15}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{75}{24}$
- $15 \div \frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3} = \frac{60}{3} = 20$
- $\frac{15}{4} \div 3 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

32 Coup de pouce pour le **c.** et **d.** : écrire une égalité « à trous ». Pour le **c.** ... $\div \frac{-3}{7} = \dots \times \frac{7}{-3} = 3$ ou voir que le résultat du **c.** est le triple du résultat du **a.** et que le résultat du **d.** est celui du **b.** multiplié par 7.

a. $\frac{-3}{7}$ b. $\frac{3}{7}$ c. $\frac{-9}{7}$ d. 3

Dans les exercices **33** et **34**, les élèves ont à gérer les quatre opérations sur les fractions et des priorités de calcul.

33 A = $\frac{7}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 4 \times 2} = \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{14}{6} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6}$
B = $\frac{-4}{9} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{3} = -\frac{28}{135}$
C = $-\frac{8}{3} \times \frac{6}{-5} + \frac{7}{4} = \frac{8 \times 3 \times 2}{3 \times 5} + \frac{7}{4} = \frac{16}{5} + \frac{7}{4} = \frac{64}{20} + \frac{35}{20} = \frac{99}{20}$
34 L = $\frac{-7}{5} \div \left(\frac{4}{18} - \frac{7}{18} \right) = \frac{-7}{5} \div \frac{-3}{18} = \frac{-7}{5} \times \frac{18}{-3}$
 $= \frac{7 \times 3 \times 6}{5 \times 3} = \frac{42}{5}$
M = $\left(\frac{8}{10} + \frac{-15}{10} \right) \div \left(\frac{-27}{12} - \frac{2}{12} \right) = \frac{-7}{10} \div \frac{-29}{12}$
 $= \frac{-7}{10} \times \frac{12}{-29} = \frac{7 \times 2 \times 6}{2 \times 5 \times 29} = \frac{42}{145}$

Problèmes

Écrans

1. $\ell = \frac{16}{9} \times 30 = \frac{160}{3}$ cm
2. $h = 52 \div \frac{16}{9} = 52 \times \frac{9}{16} = \frac{117}{4}$ cm = 29,25 cm

Cours de guitare

$\left(3 + \frac{1}{5} \right) \div \frac{4}{5} = \left(\frac{15}{5} + \frac{1}{5} \right) \div \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \times \frac{5}{4} = 4$

Il a donné 4 cours.

Verres d'eau

$\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ Elle peut remplir entièrement 6 verres.

Grille croisée

Dans cet exercice, on pourra suggérer aux élèves de simplifier les fractions pour faciliter les calculs.

$\frac{2}{3}$	\times	$\frac{4}{5}$	=	$\frac{8}{15}$
\times		\times		\times
$\frac{5}{4}$	\times	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{5}{6}$
=				=
$\frac{5}{6}$	\times	$\frac{8}{15}$	=	$\frac{4}{9}$

Résistances

$\frac{1}{R} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$ donc $R = \frac{30}{11}$ Ω .

40 Connexion Internet

1. Islande : $\frac{24}{25} \times 323\,000 = 310\,080$ habitants connectés.

Chine : $\frac{19}{50} \times 1\,357\,000\,000 = 515\,660\,000$ habitants connectés.

France : $\frac{19}{25} \times 66\,030\,000 = 50\,182\,800$ habitants connectés.

2. $2 \times \frac{19}{50} = \frac{19}{25}$ C'est vrai.

41 Impressionnistes

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ Elle a consacré $\frac{10}{21}$ du temps à sa recherche sur les impressionnistes français.

42 Le hérisson

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \div \frac{1}{3} &= \frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{5} \text{ heures} = 2,4 \text{ heures} \\ &= 2 \text{ h} + \frac{4}{10} \times 60 \text{ min} = 2 \text{ h } 24 \text{ min} \end{aligned}$$

Il lui faudra 2 h 24 min pour parvenir à sa cabane.

Les données numériques sous forme fractionnaire peuvent poser problème aux élèves. On pourra commencer par proposer cet exercice avec une vitesse entière ou décimale.

43 Gâteaux au chocolat

Coup de pouce : faire un schéma.

Dans un gâteau, il y a 8 parts. Avec les cinq gâteaux entiers, on obtient 40 parts.

Les trois quarts d'un gâteau représentent 6 parts.

Donc il y a 46 parts au total.

On peut aussi écrire :

$$5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4} \text{ et } \frac{23}{4} \div \frac{1}{8} = 46$$

44 Opérations

a. $\frac{4}{7}$ et $\frac{-7}{2}$	b. $\frac{11}{6}$ et $\frac{-5}{3}$
c. $\frac{-7}{2}$ et $\frac{3}{4}$	d. $\frac{-7}{2}$ et $\frac{3}{4}$

45 Mesures électriques

1. $F = \frac{1}{0,015} = \frac{1\,000}{15} = \frac{200}{3}$ Hz

2. $T = \frac{1}{50} = 0,02$ s

46 Achats

On travaille la maîtrise de la langue et le sens des opérations.

1. a. Quel est le prix du disque ?

b. Quelle fraction d'argent lui reste-t-il après l'achat du disque ?

c. Quelle est la somme qu'il lui reste après avoir acheté le disque ?

d. Quelle fraction de son argent représente le prix du roman ?

e. Quelle fraction de son argent lui reste-t-il après ses deux achats ?

2. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times 30 = 5$ €

47 Le tire-bouchon

Il s'enfonce de $\frac{2}{5}$ de sa hauteur en $\frac{4}{3}$ de tour, donc de $\frac{1}{5}$ de sa hauteur en $\frac{2}{3}$ de tour et de $\frac{5}{5}$ de sa hauteur en $\frac{10}{3}$ de tour, soit 3 tours et un tiers de tour ou $\frac{4}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{20}{6} = 3 + \frac{1}{3}$.

48 Chromosomes

$$\frac{15}{19} \times \frac{19}{23} \times 46 = \frac{15 \times 19 \times 2 \times 23}{19 \times 23} = 30 \text{ chromosomes}$$

49 Activité portuaire

1. $\frac{9}{100} \times 88\,000\,000 = 7\,920\,000$ tonnes

2. $\frac{4}{5} \times \frac{22}{25} \times 88\,000\,000 = 61\,952\,000$ tonnes

50 Pain d'épice

$$\begin{aligned} Z &= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{15}{15} - \frac{5}{15} - \frac{6}{15}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

51 Défi

Le nombre de facteurs est impair donc A est négatif.

On simplifie les 2, les 3, les 4... les 19, et on trouve $A = -\frac{1}{20}$.

52 Décomposition de la lumière

$$\frac{89}{105} \times \frac{35}{41} \times 615 = \frac{1\,915\,725}{4\,305} = 445$$

La longueur d'onde du violet est 445 nanomètres.

53 En vacances

1. $\frac{21}{40} \times 1\,160\,000\,000 = 609\,000\,000$ nuitées

2. $\frac{17}{50} \times \frac{19}{40} \times 1\,160\,000\,000 = 187\,340\,000$ nuitées

54 Électricité

$$2,2 - \frac{3}{11} \times 2,2 = 1,6 \text{ V}$$

55 Géographie française

$$265\,000 \div \frac{53}{142} = 265\,000 \times \frac{142}{53} = 710\,000$$

Il y avait 710 000 habitants dans le Limousin en 2005.

56 Programme de calcul

On retrouve le nombre de départ : si on prend x comme nombre de départ, le programme donne : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \times (-x) = \frac{5}{5}x = x$

On pourra prolonger cet exercice en demandant aux élèves d'imaginer d'autres programmes de calcul qui permettent de trouver comme résultat le nombre de départ ou le double du nombre de départ ou la moitié...

57 Pancakes

La réalisation d'un schéma facilite la résolution de ce problème. Cela peut être une façon de différencier.

Mrs Smallwood a mangé les $\frac{1}{8}$ des pancakes. Il en reste les $\frac{7}{8}$.

Mike mange les $\frac{2}{7}$ des $\frac{7}{8}$ donc les $\frac{2}{8}$. Il reste $\frac{5}{8}$.

Steve mange les $\frac{2}{5}$ des $\frac{5}{8}$ donc les $\frac{2}{8}$. Il reste $\frac{3}{8}$, qui correspondent à 12 pancakes.

Donc $\frac{1}{8}$ des pancakes correspond à 4 pancakes et les $\frac{8}{8}$ à 32 pancakes.

Elle avait préparé 32 pancakes.

58 Différentes pointures

Avant d'effectuer les calculs, on pourra demander aux élèves s'ils connaissent leur pointure américaine (beaucoup de « tennis » à la mode les utilisent).

1. a. $(25 + 1) \div \frac{2}{3} = 26 \times \frac{3}{2} = 39$ b. $39 - 33 = 6$

2. $(250 - 4 \times 25,4) \div \left(\frac{1}{3} \times 25,4\right) = 148,4 \times \frac{3}{25,4} \approx 17,5$

C'est une taille adulte, donc : $17,5 - 13 = 4,5$

59 Figures géométriques

Cet exercice permet de retravailler la notion d'aire d'un triangle.

Coup de pouce : exprimer l'aire jaune en fonction de l'aire du carré, puis l'aire rose en fonction de l'aire jaune, puis... Demander aux élèves de visualiser les hauteurs des triangles (ce sont toutes les mêmes).

L'aire du rectangle jaune représente les deux tiers de celle du carré ABCD. Les triangles rose et verts restants représentent donc ensemble $\frac{1}{3}$ de l'aire du carré. L'aire de chaque triangle vert est égale à la moitié de celle du triangle rose. L'aire du triangle rose est égale à la moitié du tiers du carré ABCD. L'aire du triangle gris est égale à l'aire d'un triangle vert (même base et même hauteur), c'est-à-dire $\frac{1}{12}$ du carré ABCD.

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \right)$$

60 GPS

On pourra demander aux élèves de commencer par prendre des valeurs numériques simples pour l'écran du GPS (en estimant des grandeurs proches de la réalité) pour observer et conjecturer la réponse finale.

L'aire de l'écran modifié est :

$$\left(L + \frac{25}{100}L \right) \left(\ell - \frac{20}{100}\ell \right) = \frac{125}{100}L \times \frac{80}{100}\ell = \frac{10\ 000}{10\ 000}L \times \ell = L \times \ell$$

Donc l'aire de l'écran n'a pas varié.

61 Le jardinier

$$1. 180 \times 90 \times \left(\frac{2}{3} \times 15 \right) = 162\ 000 \text{ cm}^3 = 162 \text{ L}$$

4 sacs de terreau seront nécessaires et il dépensera 27,80 €.

$$2. \left(\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{4}{25} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{50} = \frac{50+36}{450} = \frac{86}{450}$$

Les plants de carottes représentent les $\frac{86}{450}$ du potager.

$$\frac{86}{450} \times 162\ 000 = 30\ 960 \text{ cm}^3 = 30,96 \text{ L}$$

30,96 L de terreau seront nécessaires pour les plants de carottes.

62 Les temps géologiques

$$1. \frac{37}{58} = \frac{37 \times 12,5}{58 \times 12,5} = \frac{462,5}{725} = \frac{925}{1\ 450}$$

$$\frac{156}{725} = \frac{312}{1\ 450}$$

On peut représenter l'ère primaire par un segment de 14,5 cm, l'ère secondaire par un segment de 9,25 cm et l'ère tertiaire par un segment de 3,12 cm.

$$2. 62\ 400\ 000 \times \frac{725}{156} = 290\ 000\ 000$$

L'ère primaire a duré 290 000 000 ans.

L'ère primaire a duré de -540 000 000 à -250 000 000.

L'ère secondaire a duré 185 000 000 ans, c'est-à-dire de -250 000 000 à -65 000 000.

L'ère tertiaire a duré de -65 000 000 à -2 600 000.

63 Plongée sous-marine

$$\frac{50}{11} \times 330 = 1\ 500 ; \text{ la vitesse de propagation est de } 1\ 500 \text{ m/s.}$$

$$\frac{4}{225} \times 1\ 500 = \frac{6\ 000}{225} = \frac{400}{15} = \frac{80}{3} ; \text{ l'écho parcourt } \frac{80}{3} \text{ m}$$

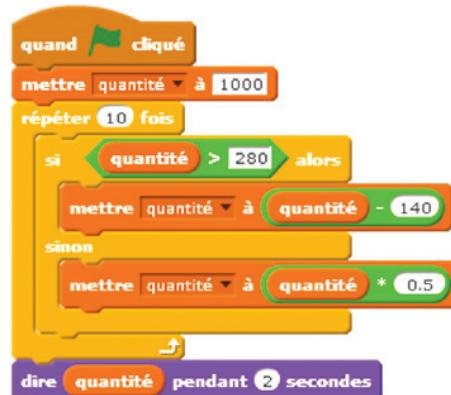
donc Sofia est à $\frac{40}{3}$ m de Marc.

La distance apparente à travers le masque est donc :

$$\frac{40}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{40}{3} \times \frac{3}{4} = 10 \text{ m}$$

Algorithmique et outils numériques

64 Mistouflette



65 La course à pied

2. Dans la cellule C2, on écrit : « =2/15*B2 »

3. Dans la cellule B3, on écrit : « =B2+C2 »

4.

A	B	C
1 Semaine	Distance parcourue (en km)	distance supplémentaire à parcourir
2	1	2
3	2	0,266666667
4	3	0,302222222
5	4	0,342518519
6	5	0,388187654
7	6	0,439946008
8	7	0,498605476
9	8	0,565086206
10	9	0,640431034
11	10	0,725821838
12	11	0,822598083
13	12	0,932277828
14	13	1,056581538
15	14	1,197459076
16	15	1,357120287
		1,538069658

Il lui faudra 14 semaines.

66 Fractions anglo-saxonnnes

$$1. 1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$4 + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

2.



$$3. a. A = 2 + \frac{1}{3} \quad B = 5 + \frac{4}{5} \quad C = 17 + \frac{6}{7}$$

b. En F2, elle doit entrer la formule : « =B2 »

c. En D2, elle doit entrer la formule : « =TRONQUE(A2/B2;0) »

d. En E2, elle doit entrer : « =A2-D2*B2 »

Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

$$a. \frac{4}{5} \times 75 = 60 \text{ cm}$$

$$c. \frac{4}{5} \times 48 = 38,4 \text{ cm}$$

$$b. \frac{4}{5} \times 60 = 48 \text{ cm}$$

$$d. \frac{4}{5} \times 38,4 = 24,576 \text{ cm}$$

Exercice 1

Les calculs sont plus longs que dans le vert et des conversions sont nécessaires.

$\frac{4}{5} \times 120 = 96$ cm puis $\frac{4}{5} \times 96 = 76,8$ cm

puis 61,44 cm puis 49,152 cm puis 39,321 6 cm puis 31,457 28 cm puis 25,165 824 cm puis 20,13 cm puis 16,1 cm.
Au bout du 9^e rebond.

Exercice 2

1. 8 cm

2. $\ell = \frac{2}{5} \times 8 = 3,2$ cm $L = 64 \div 3,2 = 20$ cm

3. Non : le périmètre du carré est 32 cm, celui du rectangle 46,4 cm.

Exercice 2

Ici, on n'aide pas les élèves avec des questions intermédiaires (contrairement à l'exercice précédent), et l'emploi du calcul fractionnaire s'impose.

Le côté du carré est 7 cm ; les dimensions du rectangle sont :

1. $\ell = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$ cm $L = 49 \div \frac{14}{3} = 10,5$ cm

Non : le périmètre du carré est 28 cm, celui du rectangle $\frac{91}{3}$ cm.

Exercice 3

1. $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{8}{28} + \frac{5}{28} = \frac{13}{28}$; il lui reste $\frac{15}{28}$ de sa réserve.

2. $\frac{4}{5} \times \frac{15}{28} = \frac{4 \times 3 \times 5}{5 \times 4 \times 7} = \frac{3}{7} = \frac{12}{28}$; il lui reste encore les $\frac{3}{28}$ de sa réserve.

Exercice 3

$\frac{2}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{8}{28} + \frac{5}{28} = \frac{13}{28}$; il lui reste $\frac{15}{28}$ de sa réserve.

$\frac{4}{5} \times \frac{15}{28} = \frac{4 \times 3 \times 5}{5 \times 4 \times 7} = \frac{3}{7} = \frac{12}{28}$

Jusqu'ici, l'exercice est identique au précédent, mais on va plus loin :

Il lui reste encore les $\frac{3}{28}$ de sa réserve, qui correspondent à 3 noisettes. Donc sa réserve comprenait 28 noisettes.

Écriture d'un énoncé

1. Par exemple :

Pour son anniversaire, Céline prépare un cocktail en prenant les trois cinquièmes de 9 bouteilles d'un litre de jus de fruits différents. Elle le complète avec les $\frac{7}{15}$ d'une bouteille d'un litre de sirop de grenadine. Quelle quantité totale obtient-elle ?

2. M. Bio cultive sept hectares de terrain dont 6 hectares d'arbres fruitiers, $\frac{4}{5}$ d'hectares de fraises et le reste de salades. Cette semaine, il a récolté les $\frac{3}{10}$ de sa surface d'arbres fruitiers puis un tiers de sa surface de fraises. Quelle fraction de son terrain a-t-il récolté ?

Analyse d'une production

Clément s'est trompé : il a calculé la fraction de Nekketsu et pas de Pantsu. Les trois quarts sont des Nekketsu donc il y a seulement un quart des mangas qui sont des Pantsu.

Fanny a bien calculé la fraction restante $\left(\frac{1}{4}\right)$. Cela ne représente pas un quart des livres de la bibliothèque mais seulement un quart des mangas.

La bonne réponse est : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$

Donc les Pantsu représentent les $\frac{2}{20}$ ou les $\frac{1}{10}$ de sa collection totale.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs » : utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes. Les connaissances et compétences associées sont :

Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.

- nombres décimaux ;
- nombres rationnels (positifs ou négatifs) ;
- fractions.

Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.

Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée

- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire ;
- égalité de fractions.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).

- Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
 - Rencontrer diverses écritures dans des situations variées.
 - Relier fractions, proportions et pourcentages.
 - Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.

– Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers.

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale).

• Repères de progressivité

La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations apprises au cycle 3 sont consolidées tout au long du cycle 4.

Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient.

Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. En 5^e, les élèves calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel. À partir de la 4^e, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, à passer d'une représentation à une autre d'un nombre, à justifier qu'un nombre est ou non l'inverse d'un autre. Ils abordent la notion de fraction irréductible en 3^e.

• Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de différentes représentations d'une fraction (décompositions additives, multiplicatives, cas des fractions décimales, repérage sur une droite graduée) permettent de conduire intelligemment un calcul mental, posé ou instrumenté (domaine 1). L'explication d'un tel calcul, à l'oral ou à l'écrit, pour valider la démarche qui lui correspond ou montrer son efficacité conduit à argumenter pour convaincre (domaine 3). La résolution de problèmes issus des sciences et techniques mettant en jeu des fractions (reconnaissance d'une situation de proportionnalité, évaluation d'une proportion, d'un pourcentage, traitement de données statistiques, contrôle de la vraisemblance de résultats) favorise la compréhension du monde (domaines 4 et 5).

Activités

Questions flash

1. a. $4 \times 2,5 = 10$

b. $-5 \times (-3) = 15$

c. $-7 \times \frac{15}{7} = -15$

2. En blanc : $\frac{6}{21}$

En rouge : $\frac{9}{21}$

En vert : $\frac{6}{21}$

La somme vaut 1.

3. a. $\frac{9}{6}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{27}{18}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{12}{8}$

b. $\frac{-6}{42}$ $\frac{-1}{7}$ $\frac{-30}{210}$

4. a. Faux. b. Vrai. c. Vrai.

Les acariens

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés.

Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion de moyenne, de savoir additionner des fractions.

La moyenne de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ est $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{2}$, c'est-à-dire $\frac{9}{40}$.

Or $\frac{1}{5} < \frac{9}{40} < \frac{1}{4}$ donc Naomie a raison.

Sachant que « la moyenne d'une série de données est toujours comprise entre la valeur minimale et la valeur maximale de cette série », on en conclut que la moyenne de deux fractions est toujours comprise entre ces deux fractions. Mehdi a donc raison.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de décomposer le numérateur et le dénominateur d'une fraction en produits de facteurs premiers pour la rendre irréductible.

Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer une proportion, de connaître la notion de nombres premiers. La capacité introduite est de déterminer la forme irréductible d'une fraction.

Pour débuter cette activité, un rapide rappel de la liste des nombres premiers inférieurs à 30 peut être utile. Il est également important que les élèves détaillent bien les produits effectués au numérateur et au dénominateur de la fraction exprimant la proportion demandée à la question 1.

Achat d'une voiture

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir le calcul d'une fraction d'un nombre lors de la résolution d'un problème. Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une fraction d'un nombre.

La capacité introduite est de multiplier des fractions.

Les élèves pourront s'appuyer sur le schéma pour mettre en place leur stratégie de résolution. On pourra demander aux élèves qui sont plus à l'aise d'écrire un seul enchainement d'opérations conduisant directement au résultat :

$$\left[6\ 399 - \left(\frac{6\ 399}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times 6\ 399 \right) \right] \div 6.$$

Exercices

Déterminer la forme irréductible d'une fraction

Questions flash

1. a. $\frac{45}{24} = \frac{15 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{8}$.

b. $7 \times 4 = 28$ mais 15×4 n'est pas égal à 50 donc ces deux fractions ne sont pas égales.

c. $33 \div 3 = 11$ et $27 \div 3 = 9$ donc $\frac{33}{27} \neq \frac{11}{8}$.

2. a. 145 et 375 sont tous deux divisibles par 5.
b. 153 et 450 sont tous deux divisibles par 9.

c. 7 456 et 6 542 sont tous deux divisibles par 2.
d. 3 534 et 2 511 sont tous deux divisibles par 3.

3. 1. Faux. 2. Vrai. 3. Faux.

4. $\frac{134}{76} \neq \frac{45}{26}$ car $134 \times 26 = 3\ 484$ et $76 \times 45 = 3\ 420$
 $\frac{325}{15} = \frac{260}{12}$ car $325 \times 12 = 3\ 900$ et $15 \times 260 = 3\ 900$
 $\frac{93}{-168} = \frac{-155}{280}$ car $93 \times 280 = 26\ 040$ et $-155 \times (-168) = 26\ 040$
 $\frac{784}{457} \neq \frac{219}{128}$ car $784 \times 128 = 100\ 352$ et $219 \times 457 = 100\ 083$

1. a. $\frac{2 \times 19}{7 \times 23} = \frac{38}{161}$

b. 2, 19, 7 et 23 sont des nombres premiers donc 38 et 161 n'ont aucun diviseur commun différent de 1 et on ne peut donc pas simplifier cette fraction.

2. a. Cette fraction est simplifiable car 126 et 690 sont tous deux divisibles par 2.

b. On décompose le numérateur et le dénominateur en un produit de facteurs premiers, puis on simplifie au maximum.

$$\frac{2 \times 3 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 3 \times 23} = \frac{3 \times 7}{5 \times 23} = \frac{21}{115}$$

Activité 3

$6\ 399 \div 3 = 2\ 133$. Romain paie 2 133 € à la commande.

Il reste les $\frac{2}{3}$ de 6 399 à payer ultérieurement.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times 6\ 399 = 2\ 559,6$ €. Romain paiera 2 559,60 € à la livraison.

Il restera alors à payer 1 706,40 € en six mensualités car :

$$6\ 399 - (2\ 133 + 2\ 559,6) = 1\ 706,4$$

Ce qui fera une somme de 284,40 € par mois pendant six mois car : $1\ 706,4 \div 6 = 284,40$ €

5.

a. 55 et 150 sont tous deux divisibles par 5 ; $\frac{5 \times 11}{5 \times 30} = \frac{11}{30}$

b. 124 et 80 sont tous deux divisibles par 4 ; $\frac{-4 \times 31}{4 \times 20} = \frac{-31}{20}$

c. 84 et 72 sont tous deux divisibles par 4 et par 3 ;

$$\frac{4 \times 21}{4 \times 18} = \frac{21}{18} = \frac{3 \times 7}{3 \times 6} = \frac{7}{6}$$

d. 52 et 88 sont tous deux divisibles par 4 ; $\frac{-4 \times 13}{4 \times 22} = \frac{-13}{22}$

6.

a. $\frac{92}{17}$ b. $\frac{13}{8}$

c. $\frac{15}{34}$ d. $-\frac{2\ 431}{9\ 388}$

7.

1. $135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^3$ et $225 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 = 5^2 \times 3^2$

Donc $\frac{5 \times 5 \times 3 \times 3}{5 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3}$

2. a. $\frac{5 \times 7 \times 3}{2 \times 7 \times 3 \times 3} = \frac{5}{6}$ b. $\frac{-2 \times 3 \times 7 \times 7}{5 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{-7}{5}$

c. $\frac{2^4 \times 3^3}{2^5 \times 3^2} = \frac{3}{2}$ d. $\frac{2^2 \times 3^3 \times 7}{7^2 \times 3^2} = \frac{12}{7}$

8.

A = $\frac{2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7}{2^5 \times 5 \times 7^2} = \frac{3^3 \times 5}{7} = \frac{135}{7}$

B = $-\frac{2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11}{2^2 \times 3^3 \times 7 \times 9 \times 11} = -\frac{5}{1} = -5$

9.

$\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{11}, \frac{4}{13}, \frac{4}{15}$

- 10** a. $\frac{45}{13}, \frac{13}{45}, \frac{13}{24}, \frac{24}{13}, \frac{13}{63}, \frac{63}{13}, \frac{13}{48}, \frac{48}{13}$
 b. $\frac{13}{24}, \frac{13}{45}, \frac{13}{63}$ et $\frac{13}{48}$ sont inférieures à 1.

- 11** $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ donc le dénominateur ne doit pas être divisible par 2 ni par 3, on peut donc écrire 23 ou 25 ou 29.

Additionner et soustraire des fractions

Questions flash

- 12** a. $\frac{-4}{3}$
 b. $\frac{-9}{5}$
 c. $\frac{1}{4}$
 d. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

13 $\frac{3}{7} + \frac{9}{7} = \frac{12}{7}$ $\frac{-3}{7} - \frac{9}{7} = \frac{-12}{7}$
 $\frac{3}{7} + \frac{-9}{7} = \frac{-6}{7}$ $\frac{-3}{7} - \frac{-9}{7} = \frac{6}{7}$

14 A = $\frac{-12}{20} + \frac{9}{20} = \frac{-3}{20}$
 B = $\frac{10}{24} - \frac{9}{24} = \frac{1}{24}$
 C = $\frac{-6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-2}{3}$

15 D = $\frac{56}{60} - \frac{21}{60} + \frac{-10}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$
 E = $\frac{-15}{24} - \frac{5}{24} + \frac{-10}{24} = \frac{-30}{24} = \frac{-5}{4}$

16 F = $\frac{22}{12} - \left(\frac{-9}{12} - \frac{10}{12} \right) = \frac{41}{12}$
 G = $\left(\frac{4}{21} - \frac{9}{21} \right) - \left(\frac{9}{30} - \frac{16}{30} \right) = \frac{-5}{21} - \frac{-7}{30} = \frac{-1}{210}$

17 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{20}{60} + \frac{24}{60} + \frac{15}{60} = \frac{59}{60}$; il reste donc $\frac{1}{60}$ du pot pour le gouter.

18 1. $\frac{1254}{324} = \frac{2 \times 3 \times 209}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{209}{54}$
 2. H = $\frac{209}{54} - \frac{11}{6} = \frac{209}{54} - \frac{99}{54} = \frac{110}{54} = \frac{55}{27}$

Multiplier des fractions

Questions flash

- 19** a. $\frac{-12}{5}$ b. $\frac{-44}{21}$ c. $\frac{110}{63}$ d. $-\frac{49}{30}$ e. $\frac{21}{10}$

20 f. $\frac{9}{7} \times \frac{-2}{3} = \frac{-18}{21}$
 g. $-5 \times \frac{4}{11} = \frac{-20}{11}$ ou $-5 \times \frac{4}{-11} = \frac{20}{11}$
 h. $\frac{-3}{7} \times \frac{15}{9} = \frac{-45}{63}$ ou $\frac{-3}{7} \times \frac{15}{-9} = \frac{45}{63}$

21 $\frac{2}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{7}$ $\frac{-3}{8} \times \frac{-4}{5} = \frac{12}{40}$
 $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{4}$

22 I = $\frac{-3 \times 11 \times 3 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 11} = -\frac{27}{20}$
 J = $\frac{7 \times 5 \times 7 \times 3 \times 3}{-7 \times 3 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2} = \frac{-21}{20}$
 K = $\frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2}{7 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2} = \frac{16}{45}$

23 L = $\frac{2 \times 2 \times 5 \times 3}{7 \times 3 \times 2 \times 7} = \frac{10}{49}$
 M = $\left(\frac{15}{24} - \frac{28}{24} \right) \times \left(\frac{56}{35} - \frac{-3}{35} \right) = -\frac{13}{24} \times \frac{59}{35} = \frac{-767}{840}$

24 $\frac{2}{5} \times 33 = \frac{66}{5} = 13,2$. Florent boit 13,2 cl de soda.

25 Zoé mange les trois dixièmes du gâteau ; il en reste les sept dixièmes.

$\frac{1}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{50}$; Philomène mange les $\frac{7}{50}$ du gâteau.

Diviser par une fraction

Questions flash

26 $\frac{1}{6}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{4}, 5, \frac{9}{-8}, \frac{3}{7}$

27 $\frac{4}{7} \times \frac{7}{4} = 1$ $-9 \times \frac{1}{-9} = 1$

$\frac{-3}{4} \times \frac{4}{-3} = 1$ $\frac{-1}{12} \times (-12) = 1$, par exemple.

28 $\frac{4}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5}$ $\frac{8}{11} \div \frac{-5}{4} = \frac{8}{11} \times \frac{4}{-5}$
 $\frac{11}{6} \div 4 = \frac{11}{6} \times \frac{1}{4}$

29 $\frac{5}{-7} = -5 \times \frac{3}{7}$ $\frac{-7}{-3} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$5 \div \frac{7}{3} = 5 \times \frac{3}{7}$

30 N = $\frac{-8}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{-32}{63}$ P = $\frac{11}{3} \times \frac{-4}{5} = \frac{-44}{15}$
 R = $-\frac{3}{5} \times \frac{-7}{10} = \frac{21}{50}$

31 $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{9}{7}} = \frac{4}{15} \times \frac{7}{9}$ $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{7}{9}} = \frac{15}{4} \times \frac{9}{7}$
 $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{9}} = \frac{4}{15} \times \frac{9}{7}$ $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{9}{7}} = \frac{15}{4} \times \frac{7}{9}$

32 S = $\frac{-15}{28} \times \frac{42}{-25} = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 3 \times 2}{7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{9}{10}$
 T = $\frac{63}{44} \times \frac{55}{-72} - \frac{3 \times 3 \times 7 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 11 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{-35}{32}$

U = $12 \times \frac{16}{45} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 2^4}{3 \times 3 \times 5} = \frac{64}{15}$

V = $-48 \times \frac{21}{32} = -\frac{2^4 \times 3^2 \times 7}{2^5} = \frac{-63}{2}$

W = $\frac{-5}{12} + \frac{7}{12} \times \frac{18}{5} = \frac{-25}{60} + \frac{126}{60} = \frac{101}{60}$

X = $\frac{\frac{1}{24}}{\frac{-11}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{-8}{11} = \frac{-1}{33}$

33 Y = $-55 \times \frac{43}{56} + \frac{-7}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{-7193}{168}$

Z = $\frac{-2^8 \times 13 \times 3 \times 61}{19 \times 2^7 \times 3 \times 7 \times 11} = -\frac{1586}{1463}$

Problèmes

34 Les différents nombres

Le nombre est	$\frac{7}{6} - \frac{11}{3}$	$\frac{2^3 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7}$	$\frac{45 \times 10^3}{9 \times (10^{-4})^2}$	$\frac{20\pi}{3}$
un entier.	NON	NON	OUI	NON
un décimal.	OUI	NON	OUI	NON
un rationnel.	OUI	OUI	OUI	NON

On peut demander à certains élèves de donner quelques expressions et de rajouter des colonnes au tableau avec d'autres exemples.

35 Plongée sous-marine

$$\frac{5}{7} \times (-21) = -15$$

Marina est à une profondeur de -15 m lorsque Kevin est à une profondeur de -21 m.

Les deux nageurs s'éloignent alors l'un de l'autre :

$-21 + (-9) = -30$ m et $-15 + 5 = -10$ m. Kevin est alors à -30 m et Marina à -10 m.

Kevin n'est pas deux fois plus profond que Marina mais trois fois plus profond.

36 Élection

1. $\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} = \frac{4}{18}$ donc $\frac{4}{18}$ des membres ont voté pour Marc et Sophie ;

$\frac{1}{3} \times \frac{14}{18} = \frac{14}{54}$ donc $\frac{14}{54}$ des membres ont voté pour Miri ;

$1 - \left(\frac{4}{18} + \frac{14}{54} \right) = 1 - \left(\frac{12}{54} + \frac{14}{54} \right) = \frac{54}{54} - \frac{26}{54} = \frac{28}{54}$ donc

$\frac{28}{54}$ des membres ont voté pour Mohamed.

$\frac{28}{54} \approx 0,5185$ donc il a obtenu la majorité absolue.

À cette occasion, on demandera aux élèves de préciser la différence entre majorité absolue et relative.

2. $\frac{1}{18} = \frac{3}{54}$; $\frac{1}{6} = \frac{9}{54}$ donc Marc a obtenu 3 voix, Sophie a obtenu 9 voix, Miri a obtenu 14 voix et Mohamed a obtenu 28 voix.

On peut prolonger cet exercice en demandant de construire un diagramme circulaire ou semi-circulaire représentant les résultats de cette élection.

37 Traduction

a. $\frac{8}{3} \times \left(\frac{7}{4} + \frac{-5}{6} \right) = \frac{8}{3} \times \left(\frac{21}{12} + \frac{-10}{12} \right) = \frac{8}{3} \times \frac{11}{12} = \frac{22}{9}$.

b. $\frac{\frac{-7}{8}}{\frac{-1}{5} - \frac{9}{10}} = \frac{-7}{8} \div \left(\frac{-11}{10} \right) = \frac{-7}{8} \times \frac{-10}{11} = \frac{35}{44}$.

c. $\frac{\frac{4}{15} + \frac{-3}{10}}{\frac{-11}{6} - \frac{-7}{4}} = \frac{\frac{8}{30} + \frac{-9}{30}}{\frac{-22}{12} - \frac{-21}{12}} = \frac{-1}{30} \times \frac{-12}{1} = \frac{2}{5}$

La maîtrise de la langue est travaillée ici ; on peut également proposer l'exercice dans l'autre sens (plutôt à l'oral car plus rapide).

38 Le poisson de Pierro della Francesca

Soit x la masse du corps :

$$\frac{1}{3}x + x + \frac{1}{12}x = 51$$

$$\frac{17}{12}x = 51$$

$$x = \frac{12}{17} \times 51 = 36 \text{ livres.}$$

Le corps pèse 36 livres, la tête 12 livres et la queue 3 livres.

On peut proposer aux élèves de schématiser ce problème pour le résoudre.

39 Émissions de CO₂

1. $1 - \left(\frac{3}{20} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Le secteur « Autres » représente un cinquième des émissions de CO₂.

2. 59 millions pour l'industrie.

$$59 \div \frac{3}{20} = 59 \times \frac{20}{3} = \frac{1180}{3} \approx 393 \text{ millions de tonnes au total.}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1180}{3} \approx 157 \text{ millions pour le transport.}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1180}{3} \approx 98 \text{ millions pour les résidences.}$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{1180}{3} \approx 78,5 \text{ millions pour les autres secteurs.}$$

Certains élèves ne penseront pas à utiliser la division ; ils passeront par la proportionnalité.

La fraction $\frac{1}{20}$ correspond à $\frac{59}{3}$ millions de tonnes, donc les $\frac{5}{20}$ correspondent à $5 \times \frac{59}{3}$ millions de tonnes...

40 Étudier à l'étranger

Il dépense $\frac{2}{5}$ de son budget pour se loger, il lui reste donc $\frac{3}{5}$ de son budget.

$\frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{47}{100}$. Il dépense donc $\frac{47}{100}$ de son budget pour la nourriture, les transports, les assurances et les loisirs.

Part de son budget que représente l'ensemble des dépenses : $\frac{2}{5} + \frac{47}{100} = \frac{87}{100}$.

Il lui restera donc $\frac{13}{100}$ de son budget après avoir pris en compte l'ensemble des dépenses.

Soit x son budget prévisionnel : $\frac{13x}{100} = 117$

$$x = 117 \div \frac{13}{100} = 117 \times \frac{100}{13} \text{ donc } x = 900 \text{ €.}$$

Son budget prévisionnel est de 900 €.

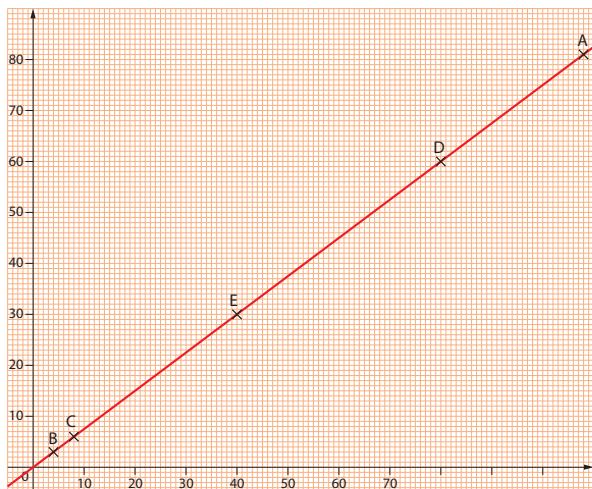
Les élèves pourront s'aider d'un schéma.

41 Repère

1. $\frac{108}{81} = \frac{27 \times 4}{27 \times 3} = \frac{4}{3}$

2. $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{80}{60} = \frac{40}{30}$

3. a. et b.



c. On remarque que les cinq points sont alignés. Ils appartiennent tous à une même droite qui passe par l'origine du repère.

42 Surfboard

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{14}{27} \text{ donc } 406 \div \frac{14}{27} = 406 \times \frac{27}{14} = 783.$$

Le montant total de ses économies est de 783 €.

43 Glace

$$1. 7 + \frac{1}{14} \times 7 = 7,5 \text{ L} = 7,5 \text{ dm}^3$$

2. Soit x le nombre de litres d'eau.

$$x + \frac{1}{14}x = 20 \text{ L} ; \quad \frac{15}{14}x = 20 ;$$

$$x = 20 \div \frac{15}{14} = 20 \times \frac{14}{15} ; \quad x \approx 18,7 \text{ L}$$

44 Hasarithmétique

$$1. \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \text{ et } \frac{16}{9} > \frac{4}{3} \quad (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ et } 2 > \sqrt{2} .$$

2. Antoine a tort car s'il choisit un nombre inférieur à 1, son affirmation est fausse.

En effet, voici un contre-exemple :

$$0,5^2 = 0,25 \text{ et } 0,25 < 0,5$$

Cet exercice sera l'occasion de revenir sur la notion de contre-exemple.

45 Sierpinski

$$\text{Pour } n=3 : \frac{5}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\text{Pour } n=4 : \frac{5}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\text{Pour } n=9 : \frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

46 Les bactéries

$$1. 500 + \frac{40}{100} \times 500 = 700 ; \text{ à } 13 \text{ h, il y aura } 700 \text{ bactéries.}$$

$$700 + \frac{40}{100} \times 700 = 980 ; \text{ à } 14 \text{ h, il y aura } 980 \text{ bactéries.}$$

$$980 + \frac{40}{100} \times 980 = 1\,372 ; \text{ à } 15 \text{ h, il y aura } 1\,372 \text{ bactéries.}$$

$$2. L = 1\,372 \times 0,5 = 686 \mu\text{m} = 0,000\,686 \text{ m} = 0,686 \text{ mm}$$

$$\frac{0,686}{4} = \frac{686}{4\,000} = \frac{343}{2\,000}$$

La longueur L représente les $\frac{343}{2\,000}$ du diamètre d'une bronche.

47 Énigmes à TIC

On appelle n le nombre d'énigmes du livre.

$$\frac{n}{15} - \frac{n}{16} = \frac{1}{4} \text{ donc } \frac{16n}{240} - \frac{15n}{240} = \frac{1}{4} \text{ donc } \frac{n}{240} = \frac{1}{4} .$$

On en déduit donc que $n = 60$.

Il a donc mis 4 h à la vitesse de 15 énigmes à l'heure. Axel a donc commencé son livre à 15 h.

48 Valeurs approchées

$$1. A = \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

$$B = 3 + \frac{1}{\frac{106}{15}} = \frac{318}{106} + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}$$

$$C = 3 + \frac{1}{\frac{112}{16} + \frac{1}{16}} = 3 \frac{1}{\frac{113}{16}} = \frac{339}{113} + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

$$2. A \approx 3,142\,9 \quad B \approx 3,141\,5 \quad C \approx 3,141\,6$$

3. On a ainsi approché le nombre π .

49 Irrationalité de $\sqrt{2}$

1. a. $(2n)^2 = 4n^2 = 2 \times 2n^2$ donc $(2n)^2$ est un nombre pair.

Soit k un nombre pair. k s'écrit alors sous la forme $k = 2n$ (n étant un nombre entier).

Donc $k^2 = (2n)^2$ est aussi pair.

On vient de prouver que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

b. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$; $4n^2$ est pair, $4n$ est pair donc $4n^2 + 4n + 1$ est impair.

On vient de prouver que le carré d'un nombre impair est impair car tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2n+1$, n étant un entier.

2. a. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$ donc $\frac{p^2}{q^2} = 2$ et $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est un nombre pair.

p est donc un nombre pair car s'il était impair, d'après le 1. b., son carré serait aussi impair.

b. $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2p')^2}{2} = \frac{4p'^2}{2} = 2p'^2$ donc q^2 est pair donc q est pair.

c. Comme p et q sont deux nombres pairs, ils sont divisibles par 2 donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

d. La supposition de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible. C'est donc un irrationnel.

Cette démonstration peut être abordée avec certains élèves mais elle peut s'avérer très difficile pour d'autres.

50 Vélo

Il utilise un braquet de $\frac{52}{18}$; cela veut dire que quand il effectue

un tour de pédailler, la roue effectue $\frac{52}{18}$ de tours, qui correspond à une distance de 6,04 m.

$6,04 \div \frac{52}{18} = 6,04 \times \frac{18}{52} = \frac{108,72}{52}$; un tour de roue correspond donc à $\frac{108,72}{52}$ m.

$\frac{108,72}{52} \div \pi \approx 0,66$ m ; le diamètre de la roue est d'environ 66 cm.

51 Une équation par Ben Ezra

Soit f , le nombre de fruits.

Il donne au premier gardien : $\frac{1}{2}f + 2$; il lui reste :

$$f - \left(\frac{1}{2}f + 2\right) = \frac{1}{2}f - 2.$$

Au 2^e, il donne : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f - 2\right) + 2 = \frac{1}{4}f + 1$; il lui reste :

$$\frac{1}{2}f - 2 - \left(\frac{1}{4}f + 1\right) = \frac{1}{4}f - 3.$$

Au 3^e, il donne : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}f - 3\right) + 2 = \frac{1}{8}f + \frac{1}{2}$; il lui reste :

$$\frac{1}{4}f - 3 - \left(\frac{1}{8}f + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}f - \frac{7}{2}.$$

On a donc l'équation suivante à résoudre :

$$\frac{1}{8}f - \frac{7}{2} = 1 ; \quad \frac{1}{8}f = \frac{9}{2}$$

donc $f = 36$. Il avait cueilli 36 fruits.

Pour aider les élèves, on peut leur suggérer de partir d'un nombre donné de fruits (50, par exemple) pour comprendre le problème.

52 Le papier cadeau

Dimensions du parallélépipède rectangle :

Longueur : 60 m ; largeur : 20 cm ; hauteur : 16 cm.

Surface totale du parallélépipède :

$$(60 \times 16 + 60 \times 20 + 16 \times 20) \times 2 = 4\,960 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Surface de papier : } 460 + \frac{90}{100} \times 460 = 9\,424 \text{ cm}^2.$$

Longueur minimale de papier : $9\,424 \div 76 = 124$ cm.

53 Un scrutin de liste

Les $\frac{5}{9}$ des voix correspondent à 1 663 920 voix ;
 $1\ 663\ 920 \div \frac{5}{9} = 2\ 995\ 056$; au total, il y a eu 2 995 056 suffrages exprimés.

La liste X a obtenu 554 640 voix soit $\frac{5}{27}$ des voix.

La liste Z a donc obtenu le reste, soit $\frac{7}{27}$ des voix.

C'est donc la liste Y qui est arrivée en tête : elle obtient d'abord un quart des sièges, soit 45 sièges.

Il reste 135 sièges à se répartir à la proportionnelle entre les trois listes.

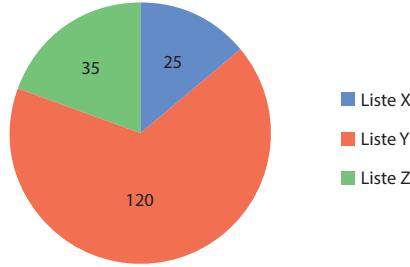
$$\text{Liste X : } \frac{5}{27} \times 135 = 25 \text{ sièges}$$

$$\text{Liste Y : } \frac{5}{9} \times 135 = 75 \text{ sièges}$$

$$\text{Liste Z : } \frac{7}{27} \times 135 = 35 \text{ sièges}$$

Avec un tableau de proportionnalité, on calcule les angles du diagramme circulaire :

Listes	X	Y	Z	Total
Nombre de sièges	25	120	35	180
Angle (en °)	50	240	70	360



54 Divisibilité

1.

	2	5	9
1 035 est divisible par	NON	OUI	OUI
774 est divisible par	OUI	NON	OUI
322 est divisible par	OUI	NON	NON

2. La fraction $\frac{774}{1\ 035}$ n'est pas irréductible car le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 9.

La fraction $\frac{332}{774}$ n'est pas irréductible car le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 2.

3. La fraction $\frac{322}{1\ 035}$ n'est pas irréductible car le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 23.

55 Propriétaire terrien

1. $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2}$; il lui reste la moitié de sa propriété.

2. 20 hectares.

56 Calculs

$$1. A = 1 - \left(\frac{8}{12} + \frac{3}{12} \right) = \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{\frac{6}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{25}{10} + \frac{2}{10}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

$$2. C = \frac{4}{5} \times \frac{35}{8} = \frac{4 \times 5 \times 7}{5 \times 4 \times 2} = \frac{7}{2}$$

$$3. A + B + C = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{42}{12} = \frac{48}{12} = 4 \text{ donc la somme est bien un nombre entier.}$$

57 Confiseur

$$1. \frac{80}{100} \times 120,40 = 96,32 \text{ €}$$

2. a. $\frac{301}{172} = \frac{7}{4}$; on a simplifié le numérateur et le dénominateur par 43.

b. On peut donc réaliser au maximum 43 sachets composés chacun de 7 caramels et 4 chocolats.

58 Vitesse de la lumière

$$1. d = V \times t = 300\ 000 \times \frac{1}{75} = 4\ 000 \text{ km}$$

$$2. d = V \times t = 300\ 000 \times 510 = 153\ 000\ 000 \text{ km} = 1,53 \times 10^8 \text{ km}$$

59 Vente de pins

$$\left(\frac{10}{24} \times 0,57^2 \times 22 \right) \times 92 \times 70 = 19\ 179,93 \approx 19\ 180 \text{ €}$$

60 Cinéma

$$1. \frac{70}{52,5} = \frac{700}{525} = \frac{7 \times 25 \times 4}{25 \times 7 \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$2. L \times \ell = 70 \times 52,5 = 3\ 675 \text{ mm}^2 = 0,003\ 675 \text{ m}^2$$

3. $\frac{588}{0,003\ 675} = 160\ 000$; quand les longueurs sont multipliées par un coefficient k , les aires sont multipliées par k^2 .
 $160\ 000 = 400^2$; donc le coefficient est 400.

$$70 \times 400 = 28\ 000 \text{ mm} = 28 \text{ m}$$

$$52,5 \times 400 = 21\ 000 \text{ mm} = 21 \text{ m}$$

Les dimensions de l'écran sont 28 m de longueur et 21 m de largeur.

Algorithmique et outils numériques

61 Simplification de fractions

1. a. Elle renvoie au reste de la division euclidienne.

b. « a » est divisible par « diviseur ».

c. « a » et « b » sont toutes deux divisibles par « diviseur ».

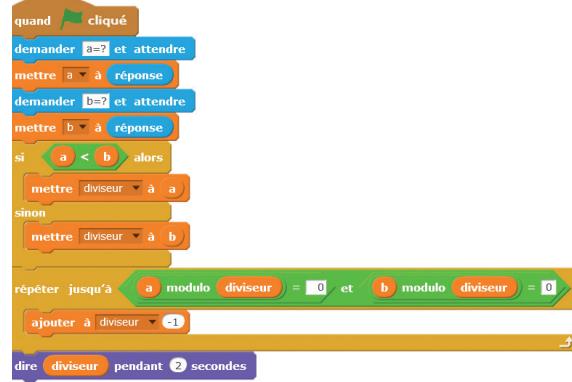
d. Il sert à déterminer si un nombre est un diviseur commun à deux autres nombres.

2. a. Ce script pose problème lorsque le seul diviseur commun aux deux nombres « a » et « b » est 1.

b. Ce script donne le plus petit diviseur commun supérieur ou égal à 2.

3. a. Un diviseur de n est toujours inférieur ou égal à n donc un diviseur commun à « a » et « b » est inférieur ou égal au plus petit des deux nombres « a » et « b ».

b.



62 Des sauts de puce

1. « =A2*1/3 » et « =B2+A3 »

2. La puce n'atteindra pas le chien.

63 Approcher un irrationnel à l'aide de rationnels

1. Dans A3, on tape « =1/(2+A2) ».

2. Dans B3, on entre « =1+A3 ».

3. Les résultats s'approchent de plus en plus de la valeur affichée pour $\sqrt{2}$.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Chocolats noirs : $\frac{2}{3} \times 60 = 40$

Chocolats noirs à la cerise : $\frac{1}{4} \times 40 = 10$

Chocolats noirs au caramel : 30

Chocolats au lait : $\frac{1}{5} \times 60 = 12$

Chocolats blancs : 8

Exercice 1

1. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

Il reste $\frac{2}{15}$ de chocolats blancs qui correspondent à 12

chocolats ; donc les $\frac{1}{15}$ des chocolats de la boîte représentent 6 chocolats.

Les $\frac{15}{15}$ de la boîte représentent donc 90 chocolats.

2. Chocolats noirs : $\frac{2}{3} \times 90 = 60$

Chocolats au lait : $\frac{3}{5} \times 30 = 18$

Chocolats blancs : 12

Exercice 2

$$\frac{30}{165} + \frac{3}{11} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 15}{11 \times 15} + \frac{3 \times 5}{11 \times 3} = \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7}{11}$$

Exercice 2

$$\frac{\frac{2 \times 11 \times 5 \times 7}{5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11}}{\frac{3}{9} + \frac{8}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{11}{9}} = \frac{7}{9} \times \frac{9}{11} = \frac{7}{11}$$

Exercice 3

1. $\frac{2}{7} \times 70\ 000 = 20\ 000$; $20\ 000 + 70\ 000 = 90\ 000$

Il coutait 90 000 € en 2002.

$$\frac{61}{100} \times 90\ 000 = 54\ 900$$

$$54\ 900 + 70\ 000 = 144\ 900$$

Il coutait 144 900 € en 2009.

2. Il a augmenté de 74 900 € entre 1999 et 2009.

$$\frac{74\ 900 \times 100}{70\ 000} = 107$$

Il a subi une augmentation de 107 %.

Exercice 3

1. Soit x le prix de l'appartement en 1999.

$$x + \frac{2}{7}x = 144\ 000$$

$$\frac{9}{7}x = 144\ 000$$

$$x = 144\ 000 \div \frac{9}{7} = 144\ 000 \times \frac{7}{9} = 112\ 000$$

En 1999, le logement coutait 112 000 €.

2. Il a augmenté de 123 200 € entre 1999 et 2009 car $235\ 200 - 112\ 000 = 123\ 200$.

$$\frac{123\ 200 \times 100}{112\ 000} = 110$$

Il a subi une augmentation de 110 %.

Travail en binôme

1. $\frac{100}{101}; \frac{103}{201}$

2. $\frac{\frac{100}{103}}{\frac{201}{101}} = \frac{100}{101} \times \frac{201}{103} = \frac{20\ 100}{10\ 403}$

et $\frac{\frac{103}{201}}{\frac{100}{101}} = \frac{103}{201} \times \frac{101}{100} = \frac{10\ 403}{20\ 100}$

Analyse d'un document

1. Parce que l'augmentation et la baisse ne se font pas sur la même quantité, donc on ne peut pas retrouver le niveau de départ.

2. Une augmentation qui ne compense pas la forte baisse de 2009 !

Après avoir subi en juin 2009 une baisse d'un tiers de sa valeur, la tonne de blé a aujourd'hui augmenté d'un tiers de la valeur de juillet 2009, ce qui ne lui permet tout de même pas de retrouver son niveau de 2008.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances associées sont :

- comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines) :
- tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation.

Objectifs du chapitre

- Tout au long de ce chapitre, l'élève utilisera le calcul littéral de différentes manières, dans des situations contextualisées dans lesquelles son utilisation est explicite, puis dans des problèmes qu'il aura à modéliser à l'aide d'expressions littérales.
En revanche, la maîtrise des techniques du calcul algébrique n'est pas l'objectif de ce chapitre.
- Au niveau de l'utilisation des outils numériques, le tableur est un outil efficace dans la résolution de problème, par exemple dans le calcul d'un grand nombre de valeurs pour une même expression littérale.

Activités

Questions flash

1. a. $13 \neq 103$.
b. $3,1 = \frac{310}{100}$.
c. $2\ 500\text{ g} = 2,5\text{ kg}$.
d. $240\text{ mm} \neq 2,4\text{ cm}$.
2. Airefigure 1 = $L \times \ell$.
Airefigure 2 = $\pi \times R \times R$.
3. a. Prendre le double d'un nombre, c'est **multiplier ce nombre par 2**.

- b. Prendre le triple d'un nombre, c'est **multiplier ce nombre par 3**.
- c. Prendre la moitié d'un nombre, c'est **diviser ce nombre par 2**.
4. a. L'aire d'un carré est égale au **produit de la longueur du côté par elle-même**.
b. Le périmètre d'un triangle est égal à **la somme des longueurs des trois côtés**.
5. a. $7 \times (5 + 3)$;
b. $11 - 9 \div 4$.

Les multiples visages de X

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réfléchir sur le statut de la lettre et ses différentes utilisations.

Il n'y a aucun prérequis nécessaire.

La capacité introduite est de voir l'utilisation de la lettre X dans différents contextes.

1. XXX sur la carte postale est une abréviation pour *kiss kiss kiss*.
Dans le jeu du morpion, le X désigne le symbole utilisé par un des deux joueurs.

Déduction des frais réels

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser une expression littérale. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des nombres décimaux, de connaître les priorités opératoires et de lire un tableau à double entrée.

La capacité introduite est d'utiliser une expression littérale.

1. On peut enlever les parenthèses car la multiplication est prioritaire. Par exemple, $(d \times 0,245) + 824$ devient $d \times 0,245 + 824$.
2. Dans le **doc. 1**, on lit à la ligne 5 que la puissance de la voiture de Bruno est de 5 CV. Donc dans le **doc. 2**, on lit la ligne 5 CV puis la

Activité 1

Dans la bibliothèque, le X est le symbole désignant 10 en numération romaine.

2. En mathématiques, X peut désigner un nombre inconnu que l'on cherche à déterminer ou alors il peut désigner un nombre dans une formule qui peut être remplacé par n'importe quelle valeur.

C'est cette dernière utilisation dans les formules qui peut être attendue dans un premier temps si les élèves ne connaissent pas encore la définition du mot « équation ». On peut, par exemple, leur demander de citer toutes les formules qu'ils connaissent.

Activité 2

colonne de 5 001 à 20 000 km puisqu'il a parcouru 17 000 km. La formule est $d \times 0,305 + 1 188$ et le calcul des frais à déduire est : $17\ 000 \times 0,305 + 1\ 188 = 6\ 373$. Il peut déduire 6 373 €.

Un des intérêts de l'activité est de faire remobiliser la lecture de tableau aux élèves et faire le tri dans les informations données. Un autre intérêt est de montrer l'utilisation d'expressions littérales dans un contexte hors du cadre mathématique.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'écrire et d'utiliser une expression littérale.
Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des nombres décimaux, de connaître les priorités opératoires.
La capacité introduite est d'écrire et d'utiliser une expression littérale.

1. a. $3 \times 11,40 = 34,20$ €.
b. $21,90 + 3 \times 7,80 = 45,30$ €.
c. Pour trois places, il ne faut pas prendre de formule.
2. Sans formule, le prix de 10 places est : $10 \times 11,40 = 114$ €.
Avec la formule Étoile, le prix de 10 places est :
 $21,90 + 10 \times 7,80 = 99,90$ €.
Donc Mila doit choisir la formule Étoile.
3. a. $11,4 \times n = 11,4 n$.
b. $21,9 + 7,8 \times n = 21,9 + 7,8 n$.
c. Avec le tableur, on obtient l'écran ci-contre.
Donc la formule Étoile devient plus intéressante à partir de 7 places achetées.

	A	B	C
1	n	Sans formule	Formule étoile
2	1	11,4	29,7
3	2	22,8	37,5
4	3	34,2	45,3
5	4	45,6	53,1
6	5	57	60,9
7	6	68,4	68,7
8	7	79,8	76,5
9	8	91,2	84,3
10	9	102,6	92,1
11	10	114	99,9

- d. Si Mila va au moins 7 fois au cinéma, il faut qu'elle prenne la formule Étoile et qu'elle achète donc la carte PASS'Ciné.

L'activité est proposée guidée mais on peut aussi l'ouvrir davantage en ne proposant pas les questions dans un premier temps puis donner les questions 1. et 2. en « coup de pouce ». Il est intéressant de laisser le choix aux élèves de l'outil (calculatrice, tableur) ou du calcul mental pour ensuite discuter de l'intérêt d'utiliser ces outils.

Une longueur inconnue

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de tester une égalité.
Les prérequis nécessaires sont de savoir écrire une formule dans une cellule, utiliser la poignée de recopie, les calculs de périmètres.
La capacité introduite est de tester une égalité.

1. On exprime le périmètre du triangle en fonction de x :
 $P_{CDE} = x + 5 + 5 = x + 10$.
Puis le périmètre du rectangle en fonction de x :
 $P_{ABCD} = 2 \times x + 2 \times 2 = 2x + 4$.
2. Dans la cellule B2, on écrit « =A2+10 ».
Dans la cellule C2, on écrit « =2*A2+4 ».

3.

	A	B	C
1	valeur de x	$x+10$	$2 \times x+4$
2	1	11	6
3	2	12	8
4	3	13	10
5	4	14	12
6	5	15	14
7	6	16	16
8	7	17	18
9	8	18	20
10	9	19	22
11	10	20	24

Pour $x = 6$, le triangle et le rectangle ont le même périmètre, qui vaut 16.

Bonjour !

Activité 5

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité pour les élèves n'est pas d'écrire et d'utiliser une expression littérale mais de mobiliser les compétences « chercher » et « communiquer » dans une situation ouverte.
Il n'y a aucun prérequis nécessaire.
La capacité introduite est d'écrire une expression littérale (amenée en synthèse par le professeur).

1. Les trois élèves ont échangé 3 poignées de mains.
2. Alice va saluer ses 3 amis donc cela fera 3 poignées de mains.
3. Cela fera $3 + 3 = 6$ poignées de mains.
- 4.

Pour cette question certains élèves peuvent être amenés à présenter leurs résultats intermédiaires sous forme de tableau et remarquer que pour obtenir le nombre de poignées de mains il suffit d'ajouter le nombre de personnes de l'étape précédente au nombre de poignées de mains qui lui correspond.

Avec le tableur, on écrit dans la cellule B3 : « =A2+B2 ».
Puis on utilise la poignée de recopie vers le bas jusqu'à obtenir 351 personnes.

	A	B
1	Nombre de personnes	Nombre de poignées de mains
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15
6	7	21

	A	B
343	344	58 996
344	345	59 340
345	346	59 685
346	347	60 031
347	348	60 378
348	349	60 726
349	350	61 075
350	351	61 425

Il y aura donc 61 425 poignées de mains échangées entre les 351 élèves du collège.

D'autres élèves peuvent résoudre le problème en comptant le nombre de poignées de mains que va serrer chaque personne.

Comme il y a 351 élèves, chaque élève va serrer 350 mains.
 $351 \times 350 = 122 850$.

Mais dans ce produit, les poignées de mains ont été comptées deux fois, on a compté la poignée de Max à Kamel et celle de Kamel à Max alors que c'est la même poignée. On va donc diviser ce produit par 2.

$$\frac{351 \times 350}{2} = 61 425.$$

Lors de la synthèse avec les élèves, il est intéressant de comparer les différentes méthodes puis de demander pour un nombre n de personnes d'écrire la formule :

$$\frac{n \times (n - 1)}{2}$$

Exercices

Écrire une expression littérale

Questions flash

1. a. $x + 12$
c. $17 - x$
2. a. $2t$
b. $x \times 5$
d. $x \div 9$
b. $3t$
c. $t \div 2$

3. $P = 2 \times \ell + 2 \times 5 = 2 \times \ell + 10$;
 $\mathcal{A} = 5 \times \ell + 2 \times 5 = 2 \times \ell + 10$;
 $\mathcal{A} = 5$.

4. $P = 3 \times b$; $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$.

5. 1. Le prix du stylo est $p + 1$.
 2. Le prix de la gomme est $p - 3$.
 3. Le prix du classeur est $2 \times p$.
 4. Le prix de l'effaceur est $\frac{p}{3}$.

6. $x \times 4 + 7$.

- 7.
- | | | |
|--|--|---------------------|
| La somme du produit de y par 5 et de 3. | | $y \times 5 + 3$ |
| Le quotient de 5 par la somme de y et de 3. | | $\frac{5}{(y + 3)}$ |
| La différence entre y et le quotient de 3 par 5. | | $y - \frac{3}{5}$ |
| Le produit de 3 par la différence entre y et 5. | | $(y - 5) \times 3$ |

8. $3 \times t + 2 \times c$.

Utiliser une expression littérale

Questions flash

9. a. $2 + 11 = 13$;
 b. $2 \times 4 - 6 = 2$;
 c. $3 \times (2 + 5) = 21$.
 10. a. $5 \times 10 - 7 = 43$;
 b. $5 \times 3 - 7 = 8$;
 c. $5 \times 1 - 7 = -2$.
 11. a. $2 \times (1 - 1) = 0$;
 b. $2 \times (11 - 1) = 2 \times 10$;
 c. $2 \times (46 - 1) = 90$.

12. a. $3 \times (3 + 18) = 63$;
 b. $10 \times (10 + 18) = 280$;
 c. $2,5 \times (2,5 + 18) = 51,25$.

13. a. $4 \times 1 + 9 \times 3 = 4 + 27 = 31$;
 b. $4 \times 11 + 9 \times 8 = 44 + 72 = 116$.

14.

	$4 \times (a + 10)$	$4 \times a + 10$
$a = 3$	52	22
$a = 1,5$	46	16
$a = 13$	92	62

15

	$15 \times x - 3 \times y$	$(x + y) \div 4$
$x = 1$ et $y = 2$	9	0,75
$x = 0,5$ et $y = 1,5$	3	0,5
$x = 3$ et $y = 15$	0	4,5

16

1. Ève a remplacé b par 7 et c par 6.
 2. $b + 3 \times c = 6 + 3 \times 7 = 6 + 21 = 27$.

17

1. C'est le garçon qui a raison :
 $2 \times 7 - 5 = 14 - 5 = 9$.
 2. Elle a remplacé t par 5 et r par 7 :
 $2 \times 5 - 7 = 10 - 7 = 3$.

18

- a. $T_{\text{kelvin}} = 0 + 273,15 = 273,15 \text{ k}$.
 b. $T_{\text{kelvin}} = 37 + 273,15 = 310,15 \text{ k}$.
 c. $T_{\text{kelvin}} = 100 + 273,15 = 373,15 \text{ k}$.

Tester une égalité

Questions flash

19

- a. C'est une égalité.
 b. Non, c'est un produit.
 c. C'est une égalité.

20

1. Vrai, car $2 + 17 = 19$.
 2. Faux, car $7 - 4 = 3 \neq 7$.
 3. Faux, car $2 \times 9 = 18 \neq 29$.
 4. Faux, car $5 \times 5 + 6 \times 1 = 31$.

21

- a. Vrai, car $5 \times 2 = 10$.
 b. Faux, car $2 + 11 = 13$ et $3 \times 2 + 5 = 11$.
 c. Vrai, car $0,5 \times 2 = 1$.

22

- a. Fausse, car $9 \neq 35$.
 b. Fausse, car $17 \neq 30$.
 c. Vraie, car les deux membres sont égaux à 25.

23

1. Fausse. 2. Vraie. 3. Vraie.

24

1. Vraie. 2. Fausse. 3. Vraie.

25

$y \times 5 - 9 = 2 \times y$		$y = 1$
$y \times y = 2 \times y$		$y = 2$
$4 \times y - 7 = y \div 2 + 7$		$y = 3$
$6 \times (y + 1) = 8 \times y + 4$		$y = 4$

L'égalité est fausse pour $b = 4$,
 et pour $b = 3$.

26

1. $P = 1,5 \times (25 + 1) = 39$. Paul chausse bien du 39.
 2. $P = 1,5 \times (23 + 1) = 36 \neq 35$. Donc Flo ne peut pas chauffer du 35.

Problèmes

C'est magique !

1. a. $2 \times (4 + 3) - 6 = 2 \times 7 - 6 = 14 - 6 = 8$.
 b. $2 \times (11 + 3) - 6 = 2 \times 14 - 6 = 28 - 6 = 22$.
 c. $2 \times (2,5 + 3) - 6 = 2 \times 5,5 - 6 = 11 - 6 = 5$.
 2. Le nombre obtenu est le double du nombre de départ.

Balistique

1. $h = 700 \times 700 \div 19,62 = 24\,974,515 \text{ m}$
 2. $h = 1\,500 \times 1\,500 \div 19,62$
 $= 114\,678,899 \text{ m}$
 $= 114,678\,899 \text{ km} > 100 \text{ km}$.

Donc la balle peut théoriquement entrer dans l'espace.

30 **Croisière**

A désigne le nombre d'adultes, E le nombre d'enfants.

- $R = 13,50 \times 113 + 6 \times 96 = 2\,101,5 \text{ €}$;
- $R = 13,50 \times 275 + 6 \times 167 = 4\,714,5 \text{ €}$.

31 **Fournitures**

- x représente le prix d'un cahier et y le prix d'un classeur.
- a. $7 \times 2,30 + 3 \times 2,70 = 24,20$, donc ce n'est pas possible.
- b. $7 \times 2,90 + 3 \times 2,50 = 27,80$, donc c'est possible.

32 **Nombre mystère**

- C'est l'égalité c. : $n + 7 = 3 \times n$.
- On teste l'égalité pour $n = 2$:
D'une part, $n + 7 = 2 + 7 = 9$;
D'autre part, $3 \times n = 3 \times 2 = 6$.
Donc l'égalité est fausse pour $n = 2$.
- On teste l'égalité pour $n = 2,5$:
D'une part, $n + 7 = 2,5 + 7 = 9,5$;
D'autre part, $3 \times n = 3 \times 2,5 = 7,5$.
Donc l'égalité est fausse pour $n = 2,5$.
- On teste l'égalité pour $n = 3$:
D'une part, $n + 7 = 3 + 7 = 10$;
D'autre part, $3 \times n = 3 \times 3 = 9$.
Donc l'égalité est fausse pour $n = 3$.
- On teste l'égalité pour $n = 3,5$:
D'une part, $n + 7 = 3,5 + 7 = 10,5$;
D'autre part, $3 \times n = 3 \times 3,5 = 10,5$.
Donc l'égalité est vraie pour $n = 3,5$.
- On teste l'égalité pour $n = 4$:
D'une part, $n + 7 = 4 + 7 = 11$;
D'autre part, $3 \times n = 3 \times 4 = 12$.
Donc l'égalité est fausse pour $n = 4$.

33 **Anniversaire**

- L'âge de Nao est donné par l'expression littérale : $\frac{x}{2} - 6$.
- Si le père a 28 ans :
 $\frac{28}{2} - 6 = 8$, donc Nao a 8 ans.
- Si le père a 32 ans :
 $\frac{32}{2} - 6 = 10$, donc Nao a 10 ans.
- Si le père a 36 ans :
 $\frac{36}{2} - 6 = 12$, donc Nao a 12 ans.
- Si le père a 26 ans :
 $\frac{26}{2} - 6 = 7$, donc Nao peut avoir 7 ans.
- Si Nao a 11 ans alors on fait $(11 + 6) \times 2 = 34$, donc le père ne peut pas avoir 35 ans.

34 **Shopping**

- Le montant des économies d'Asya est $c + 13$.
- Le montant des économies de Candice est $r + 22$.
- On a donc $c + 13 = r + 22$.
- $c + 13 = 42 + 13 = 55$ et $r + 22 = 30 + 22 = 52$; donc ce n'est pas possible.
 $c + 13 = 35 + 13 = 48$ et $r + 22 = 26 + 22 = 48$;
donc les chaussures ont pu coûter 35 € et la robe 26 €.

35 **Le grand raid**

- On calcule la FCM de Jean-Laurent :
 $220 - a = 220 - 41 = 179$.
On calcule la FCM de Patricia :
 $220 - a = 226 - 38 = 188$.
Donc Jean-Laurent a tort.

36 **Températures**

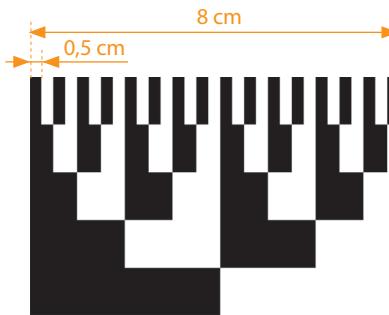
$$T_{\text{Fahrenheit}} = 32 + 36,3 \times 1,8 = 97,34 \text{ }^{\circ}\text{F} ;$$

$$T_{\text{Fahrenheit}} = 32 + 39 \times 1,8 = 102,2 \text{ }^{\circ}\text{F} ;$$

$$T_{\text{Fahrenheit}} = 32 + 36,3 \times 1,8 = 68 \text{ }^{\circ}\text{F}.$$

37 **Drôle de piano**

- Chaque bande noire ou blanche est divisée en deux bandes identiques, celle de gauche est noire et celle de droite est blanche.
- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ touches sur la ligne du haut.

3.**38** **Numéros surtaxés**

- On note m le nombre de minutes de la durée d'un appel téléphonique, le cout d'un appel est donné par l'expression : $1,349 + m \times 0,337$.
- Pour un appel de 10 min : $1,349 + 10 \times 0,337 = 4,719 \text{ €}$.
Pour un appel de 30 min : $1,349 + 30 \times 0,337 = 11,459 \text{ €}$.
- En procédant, par exemple, par essais successifs, on trouve pour un appel d'une durée de 15 min :
 $1,349 + 15 \times 0,337 = 6,404 \text{ €}$.
Pour un appel d'une durée de 40 min, on trouve :
 $1,349 + 40 \times 0,337 = 14,829 \text{ €}$.

39 **Programmes de calcul**

Non, c'est faux. Par exemple, si on choisit le nombre 10, on obtient :
 $10 \times 5 - 20 = 50 - 20 = 30$, avec le programme de Nour.
 $(10 - 4) \times 10 = 6 \times 10 = 60$, avec le programme de Flore.

40 **Taux de change**

- Avec le tableau, on entre en cellule B2 : «=1,12*A2», et en cellule C2 : «=1,09*B2+2». Puis on utilise la poignée de recopie vers le bas.

	A	B	C
1	Montant en €	Montant en \$ avec Allchange	Montant en \$ avec Yesmoney
2	1	1,12	3,09
3	2	2,24	4,18
4	3	3,36	5,27
5	4	4,48	6,36

On constate que Yesmoney est plus rentable à partir de 67 € :

	A	B	C
64	63	70,56	70,67
65	64	71,68	71,76
66	65	72,8	72,85
67	66	73,92	73,94
68	67	75,04	75,03
69	68	76,16	76,12
70	69	77,28	77,21
71	70	78,4	78,3

- On peut dire à Candice de se diriger vers Allchange si le montant à changer est inférieur à 67 € et vers Yesmoney sinon.

41 **Who tells the truth?**

- Pour $y = 2$

D'une part, $y \times (y - 2) = 2 \times (2 - 2) = 0$;
D'autre part, $3 \times y - 6 = 3 \times 2 - 6 = 6 - 6 = 0$.
Donc l'égalité est vraie pour $y = 2$.

- Pour $y = 3$

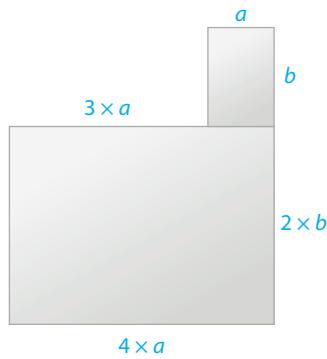
D'une part, $y \times (y - 2) = 3 \times (3 - 2) = 3$;
D'autre part, $3 \times y - 6 = 3 \times 3 - 6 = 9 - 6 = 3$.
Donc l'égalité est vraie pour $y = 3$.

- Pour $y = 5$

D'une part, $y \times (y - 2) = 5 \times (5 - 2) = 15$;
D'autre part, $3 \times y - 6 = 3 \times 5 - 6 = 15 - 6 = 9$.
Donc l'égalité est fausse pour $y = 5$. Ainsi c'est la fille qui a raison, l'égalité n'est pas toujours vraie.

42 **Des histoires de périmètres**

- Le périmètre de la figure est $4 \times b + 10 \times a$.
- Le périmètre de la figure suivante est bien $8 \times a + 6 \times b$.



43 La suite de maisons

1. La première maison est composée de 5 cure-dents, puis il suffit de rajouter 4 cure-dents pour faire une nouvelle maison. Donc on compte 4 cure-dents par maison plus un autre cure-dents pour la première maison.

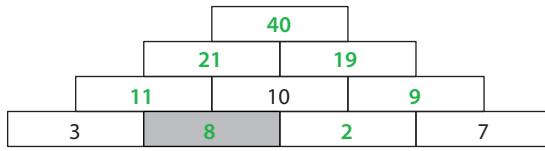
$$4 \times 25 + 1 = 101.$$

$$2. 4 \times 2015 + 1 = 8061.$$

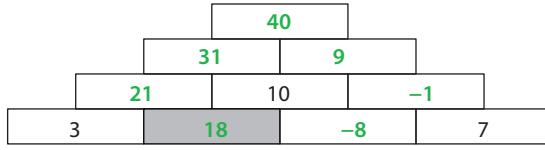
3. On peut faire $109 - 1 = 108$ en enlevant le premier cure-dents de la première maison, ensuite il faut 4 cure-dents par maison, donc on fait $108 \div 4 = 27$. Donc il fera 27 maisons et il ne restera aucun cure-dents.

44 Une pyramide additive

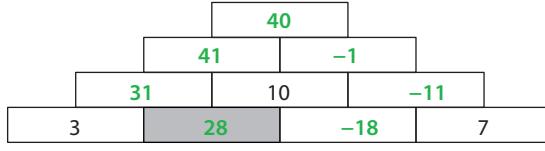
1. • En prenant 8 pour la colonne grisée :



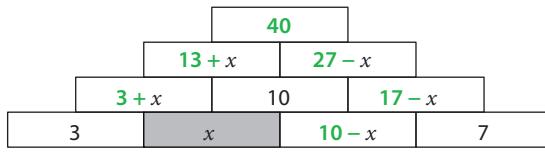
• En prenant 18 pour la colonne grisée :



• En prenant 28 pour la colonne grisée :



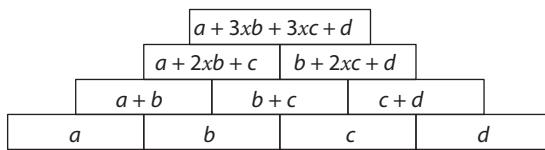
2. On trouve 40 à chaque fois. On appelle x le nombre dans la case grise et on complète la pyramide.



Quel que soit le nombre mis dans la case grise, on trouvera toujours 40 en haut de la pyramide.

45 Une autre pyramide additive

On appelle a, b, c, d les 4 nombres placés sur la première ligne de la pyramide et dans cet ordre.



On obtient au sommet de la pyramide : $a + 3 \times b + 3 \times c + d$. Pour obtenir le plus grand nombre au sommet, il faut mettre les deux plus grands nombres, parmi les quatre donnés, dans

2. On peut rassembler les résultats dans un tableau :

Grille	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
Boulettes	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Allumettes	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220
	+8	+12	+16	+20	+28	+24	+32	+36	+40	

les cases du milieu puisqu'ils comptent 3 fois chacun dans l'expression obtenue au sommet.

46 Fête des mères

D'après l'énoncé, en faisant la somme des deux achats on trouve que 10 roses et 6 pivoines coutent $38 + 32 = 70$ €. Il suffit ensuite de diviser par 2 et on trouve que 5 roses et 3 pivoines coutent 35 €.

On peut noter ici que l'introduction d'expressions littérales ne facilite pas la résolution du problème en début de cycle.

47 Grilles

1. Pour faire une grille de 3 par 3, il faudra 16 boulettes et 24 allumettes.

En faisant le dessin.

2.

Les élèves peuvent dessiner des grilles carrées de 3×3 , 4×4 , 5×5 ... et compter les boulettes.

On peut rassembler les résultats dans un tableau (voir le tableau en bas de page).

Pour faire une grille de 10×10 , il faut donc 121 boulettes et 220 allumettes.

3. On remarque que $289 = 17 \times 17$; donc c'est une grille de 16×16 .

On peut continuer le tableau et trouver le nombre d'allumettes : $220 + 44 + 48 + 52 + 56 + 60 + 64 = 544$.

On peut aussi établir que pour une grille de taille $n \times n$, le nombre de boulettes est $(n + 1) \times (n + 1)$ et le nombre d'allumettes est $2n \times (n + 1)$. En effet, on compte le nombre d'allumettes sur une ligne (il y en a n), puis on multiplie par le nombre de lignes (il y en a $n + 1$ lignes) et on multiplie par 2 puisqu'il y en a le même nombre pour les colonnes.

48 Distance d'arrêt d'une voiture

1. On lit la distance de freinage dans le doc. 2 : pour 30 km/h, elle est de 5 m environ.

Donc la distance d'arrêt est :

$$D_R + D_F = \frac{30}{3,6} + 5 \approx 13,3 \text{ m} < 25 \text{ m}.$$

Donc l'automobiliste pourra s'arrêter avant le passage du piéton.

2. On calcule maintenant la distance d'arrêt avec une vitesse de 60 km/h :

$$D_R + D_F = \frac{60}{3,6} + 18 \approx 34,7 \text{ m} > 25 \text{ m}.$$

Donc l'automobiliste ne pourra pas s'arrêter avant le passage du piéton.

Au travers de cet exercice, il peut être intéressant de débattre avec les élèves des problèmes de la vitesse en ville.

49 Économie d'énergie

À l'aide du doc. 3, on relève le nombre d'heures creuses et pleines pour lesquelles les appareils sont en veille.

Appareil	Nombres d'heures pleines en veille	Nombres d'heures creuses en veille
Ordinateur	10	8
Décodeur TV	12	7
TV	11	7
Lampe halogène	13	7
Machine à café	15	8

Chaîne stéréo	13	8
Four à micro-ondes	14	8

À l'aide du doc. 1, on calcule l'énergie consommée pour chaque appareil.

Appareil	Puissance consommée pendant les heures pleines	Puissance consommée pendant les heures creuses
Ordinateur	$2 \times 10 = 20$ Wh	$2 \times 8 = 16$ Wh
Décodeur TV	$12 \times 12 = 144$ Wh	$12 \times 7 = 84$ Wh
TV	$14 \times 11 = 145$ Wh	$14 \times 7 = 98$ Wh
Lampe halogène	$5 \times 13 = 65$ Wh	$5 \times 7 = 35$ Wh
Machine à café	$3 \times 15 = 45$ Wh	$3 \times 8 = 24$ Wh
Chaîne stéréo	$2,5 \times 13 = 32,5$ Wh	$2,5 \times 8 = 20$ Wh
Four à micro-ondes	$5,5 \times 14 = 77$ Wh	$5,5 \times 8 = 44$ Wh
Total	$537,5$ Wh = $0,537\ 5$ kWh	321 Wh = $0,321$ kWh

D'après le doc. 2, pour un jour le prix à payer est :

$$0,16 \times 0,53\ 75 + 0,111\ 4 \times 0,321 = 0,121\ 759\ 4 \text{ €.}$$

On multiplie ce dernier résultat par 365 et on trouve que l'économie que Bruno peut réaliser sur une année est entre 44 et 45 €.

Attention, toutes les plages horaires n'apparaissent pas dans le tableau du doc. 3. Le décompte des heures peut être délicat pour les élèves.

Algorithmique et outils numériques

50 De l'aire

- Les variables utilisées sont base et hauteur.
- Le script demande à l'utilisateur de rentrer la mesure d'un côté d'un triangle et celle de sa hauteur pour calculer l'aire de ce triangle et l'afficher à l'écran.
- $\frac{12 \times 6}{2} = 36$. Le script retourne 36.

51 Égalité !

- $\mathcal{A}_{ABCD} = x \times x$.
- $\mathcal{A}_{CDE} = \frac{x \times 12}{2} = 6 \times x$.
- Le script demande à l'utilisateur de rentrer un nombre qui est stocké dans la variable x .
Si l'égalité $x \times x = 6 \times x$ est vraie pour la valeur rentrée par l'utilisateur (c'est-à-dire $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{CDE}$) alors le script affiche « Égalité ! », sinon il affiche « Pas d'égalité... ».
- Pour $x = 0$, il y a égalité mais l'aire de la figure est nulle.
Pour $x = 6$: d'une part, $x \times x = 6 \times 6 = 36$ et d'autre part, $6 \times x = 6 \times 6 = 36$. Le script affichera « Égalité ! » pour $x = 6$.

52 Châteaux de cartes

- Pour construire un château de cartes à 3 étages, il faut 15 cartes.
Il en faut 26 pour construire un château à 4 étages.
- Dans la cellule B5, on écrit « =B4+3 ».
Dans la cellule C5, on écrit « =C4+B5 ».
- En recopiant vers le bas, on lit à la ligne de 120 étages qu'il faut 21 660 cartes.

A	B	C
118	353	20945
119	356	21301
120	359	21660
121	362	22022
122	365	22387

$$4. 6 \times 52 = 312$$

A	B	C
12	35	222
13	38	260
14	41	301
15	44	345
16	47	392
17	50	442

On voit à la ligne de 15 étages qu'il faut 345 cartes, c'est donc trop. Il pourra faire un château de 14 étages, il aura besoin de 301 cartes. Il en restera donc $312 - 301 = 11$ cartes.

53 La meilleure voiture

- Dans la cellule F2, on écrit : $=3*B2+2*C2+2*D2+E2$. La meilleure voiture est la voiture E pour la revue automobile.
- Dans la cellule G2, on écrit : $=3*B2+C2+D2+3*E2$. Cette formule place la voiture A en première position avec 21 points.

B	C	D	E	F	G
Dispositifs de sécurité (S)	Consommation de carburant (C)	Esthétique de la carrosserie (E)	Équipements intérieurs (T)	Note globale	Note modifiée
1					
2	3	1	2	18	21
3	2	2	2	16	16
4	3	1	3	19	19
5	1	3	3	18	18
6	3	2	3	21	20



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

- $8 + 2 \times b = 4 \times a$
- On prend par exemple $a = 4$ et $b = 4$.
 $8 + 2 \times 4 = 16$ et $4 \times 4 = 16$.

Exercice 1

- $5,6 + 2 \times b = 4 \times a$
- On prend par exemple $a = 3$ et $b = 3,2$.
 $5,6 + 2 \times 3,2 = 12$ et $4 \times 3 = 12$.

Exercice 2

- $P = 3 \times 3 + 2 + 4 + 6 = 21$ cm
- $2 + 4 + 6 = 12$ et $27 - 12 = 15$ cm représentent le triple de la longueur [AB].
Donc $[AB] = \frac{15}{3} = 5$ cm.

Exercice 2

- $P = 3 \times 3,5 + 2 + 4 + 6 = 22,5$ cm.
- $2 + 4 + 6 = 12$ et $63,75 - 12 = 51,75$ cm représentent le triple de la longueur [AB].
Donc $[AB] = \frac{51,75}{3} = 17,25$ cm.

Exercice 3

- $$7 \times x + 1 = 5 \times (x + 1).$$
- D'une part, $7 \times 2 + 1 = 14 + 1 = 15$;
D'autre part, $5 \times (2 + 1) = 5 \times 3 = 15$.

Exercice 3

- $$8 \times x + y = 2 \times (x + y) + 9.$$
- D'une part, $8 \times 2 + 3 = 16 + 3 = 19$.
D'autre part, $2 \times (2 + 3) + 9 = 2 \times 5 + 9 = 10 + 9 = 19$.

Analyse d'une production

- Les calculs de Sam sont corrects, mais il doit calculer les deux membres de l'égalité séparément.
D'une part, $6 \times 5 + 11 = 30 + 11 = 41$.
D'autre part, $4 \times (5 + 7) = 4 \times 12 = 48$.
Donc l'égalité est fausse pour $x = 5$.
- Aïda se limite aux nombres entiers, il faudrait calculer les deux expressions pour des valeurs comprises entre 8 et 9.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». Les connaissances associées sont :

- développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.

Dans le chapitre 13, l'élève a déjà rencontré des expressions littérales et a travaillé les capacités suivantes :

- écrire une expression littérale ;
- utiliser une expression littérale ;
- tester une égalité.

Dans ce chapitre, ces capacités seront approfondies et la distributivité sera introduite. Elle servira notamment à démontrer des propriétés, des conjectures émises lors de la résolution de problèmes. Elle permettra également la simplification d'expressions littérales, utilisée dans le chapitre suivant sur l'étude des équations. Au niveau de l'utilisation des outils numériques, l'élève poursuivra le travail amorcé dans le chapitre 13, le tableur est un outil efficace dans la résolution de problème, par exemple dans le calcul d'un grand nombre de valeurs pour une même expression littérale.

Activités

Questions flash

1. A est une somme. B est un produit. C est une somme.

2. a. $2a$ b. $3a$ c. a^2 d. $\frac{a}{3}$

3. $P = 10 + 2\ell$ et $A = 5\ell$

4. a. $x + 12$ b. $5x$

Les carreaux

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de produire et transformer des expressions littérales.

Les prérequis nécessaires sont de savoir écrire une expression littérale et utiliser une expression littérale (chapitre 13).

Un des intérêts de l'activité est de comparer les différentes expressions littérales produites par les élèves.

1. Non, pour un carré de côté 3, le nombre de carreaux de la bordure est 8, alors que pour un carré de côté 6 le nombre de carreaux de la bordure est 20.
2. On désigne par n le nombre de carreaux du côté du carré. Alors le nombre de carreaux de la bordure est $4(n - 1)$.

Les élèves peuvent trouver différentes formules suivant la méthode employée pour compter :

$$4n - 4$$

$$2n + 2(n - 2)$$

Il est intéressant de revenir sur ces expressions pour montrer qu'elles sont égales, une fois la distributivité introduite.

3. Pour 100 carreaux : $100 = 4(26 - 1)$ donc le carré de côté 26 contient une bordure de 100 carreaux.
Pour 150 carreaux : l'expression $4(n - 1)$ montre que le nombre de carreaux de la bordure est un multiple de 4, or 150 n'est pas un multiple de 4 donc on ne peut pas faire une bordure de 150 carreaux.
Pour 200 carreaux : $200 = 4(51 - 1)$ donc le carré de côté 51 contient une bordure de 200 carreaux.
Pour 250 carreaux : 250 n'est pas un multiple de 4 donc on ne peut pas faire une bordure de 250 carreaux.

Chacun son calcul

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la distributivité. Les prérequis nécessaires sont de connaître les priorités opératoires et de savoir écrire une expression littérale.

La capacité introduite est de développer un produit et de factoriser une somme ou une différence.

1. • Kim : $12 \times (7 + 3) = 120$
 $17 \times 54 - 17 \times 30 = 408$
 $5 \times (3,2 + 1,3) = 22,5$
 $12 \times 7 + 12 \times 3 = 120$
 $12 \times 7 - 12 \times 3 = 48$
 $17 \times (54 + 30) = 1428$
- Lucas : $17 \times (54 - 30) = 408$
 $k(a + b) = ka + kb$
 $k(a - b) = ka - kb$
- Ousmane : $5 \times 3,2 + 1,3 = 17,3$
 $17 \times 54 - 17 \times 30 = 888$
 $5 \times 3,2 + 5 \times 1,3 = 22,5$
 $17 \times 54 + 17 \times 30 = 1428$

Activité 2

2. $12 \times (7 + 3) = 12 \times 7 + 12 \times 3$
 $17 \times 54 - 17 \times 30 = 17 \times (54 - 30)$
 $5 \times (3,2 + 1,3) = 5 \times 3,2 + 5 \times 1,3$
 $12 \times 7 - 12 \times 3 = 12 \times (7 - 3)$
 $17 \times (54 + 30) = 17 \times 54 + 17 \times 30$
3. Par exemple :
 $5 \times (11 + 3) = 5 \times 11 + 5 \times 3$
 $8 \times 15 - 8 \times 2 = 8 \times (15 - 2)$
4. Il semble que, quelles que soient les valeurs prises par k , a et b :
 $k(a + b) = ka + kb$
 $k(a - b) = ka - kb$

L'objectif de cette activité est de comprendre la notion « développer », « factoriser ».

1. a. Léonard dessine et Léonard peint des portraits.

- b. Les vampires hantent ses rêves, les loups garous hantent ses rêves et les sorcières hantent ses rêves.
2. a. Les serpents sont des reptiles, sont recouverts d'écaillles et peuvent être de toutes les couleurs.
b. Au feu rouge, la voiture, la moto et le vélo s'arrêtent.

Avec ou sans

Activité 4

L'objectif de cette activité est de simplifier des écritures. La capacité introduite est de simplifier une expression littérale.

Exercices

Simplifier une expression littérale

Questions flash

1. a. Vrai.
c. Faux.
e. Faux.
b. Vrai. On note $5ab$.
d. Vrai.
f. Vrai.
2. a. $2t$
b. $3t$
c. $11t$
d. $5t + 3t$
3. A = $3x$
E = b
B = $8y$
F = $4c^2$
C = $10z$
G = $18xy$
D = 0
H = $3u + 11v$
4. A = $12x$
D = z^2
B = $2y + 6$
E = $14st$
C = $n + 5n^2$
F = $12x^3$
5. $y \times 5 - 9$
 $y \times 4$
 $11 + 4 \times y$
 $3 \times y \times 5$
 $5y - 9$
 $4y$
 $11 + 4y$
 $15y$
6. A = $6 \times x$
C = $5 \times t + 9$
E = $7 \times a \times b \times c$
B = $y \times y$
D = $1 \times z \times z \times z$
F = $3 \times x + 4 \times y$
7. a. Fausse.
b. Vraie.
c. Fausse.
d. Vraie.
8. Le double de la somme de y et 3.
La somme du double de y et de 3.
La différence entre le triple de y et 2.
Le triple de la différence entre y et 2.
 $2(y + 3)$
 $2y + 3$
 $3y - 2$
 $3(y - 2)$
9. A = $4 \times (x + 3)$
C = $y \times (2 \times t + 6)$
E = $5 \times z \times (3 \times u + 1)$
B = $y \times y \times (x + 2)$
D = $(r + 7) \times (r - 5)$
F = $3 \times x \times x \times (7 \times x - 2 \times y)$

Développer un produit

Questions flash

10. Les expressions qui sont des produits sont A, C, E, H et I.
11. a. $2 \times (x + 3) = 2 \times x + 2 \times 3$
c. $6(x + 11) = 6 \times x + 6 \times 11$
b. $5 \times (7 - y) = 5 \times 7 - 5 \times y$
d. $3(2y + 1) = 3 \times 2y + 3 \times 1$

1. On peut supprimer parfois le signe de la multiplication.
2. On peut supprimer le signe \times devant une parenthèse.
On peut supprimer le signe \times devant une lettre.

12. A = $3 \times x + 3 \times 5$
C = $10 \times 3 + 10 \times x$
E = $4 \times 2x + 4 \times 3$
B = $5 \times 6 - 5 \times x$
D = $7 \times x - 7 \times 3$
F = $2 \times 5x - 9 \times 2$

13. a. $5(12 - y) = 5 \times 12 - 5 \times y$
b. $-4(y + 3) = -4 \times y + (-4) \times 3$
c. $-2(y - 6) = -2 \times y - (-2) \times 6$

14. $-4(y + 5)$
 $-4(5 - y)$
 $-4y(y - 5)$
 $-4y(5y + 5)$
 $-4y - 20$
 $-20 + 4y$
 $-4y^2 + 20y$
 $-20y^2 - 20y$

15. A = $-5x - 10$
C = $x^2 + 3x$
E = $-3x^2 - 12x$
G = $12x^2 + 6x$
B = $-3x + 6$
D = $4x - x^2$
F = $2x^2 - 14x$
H = $-20x^2 + 40x$

16. 1. Si une parenthèse est précédée du signe +, on peut supprimer les parenthèses sans rien changer.
2. A = $3 + x + 2 = 5 + x$
C = $7 + x + 4 = 11 + x$
B = $4 + x - 2 = 2 + x$
D = $10 + 2x - 7 = 3 - 2x$
17. 1. Prendre l'opposé d'une somme, c'est prendre l'opposé de chacun de ses termes.
2. A = $8 - x - 3 = 5 - x$
C = $13 - x - 6 = 7 - x$
B = $5 - x + 1 = 6 - x$
D = $10 - 3x + 5 = 15 - 3x$

18. A = $7 + x$
D = $2 + x$
B = $4 + 2x$
E = $7 - 3x$
C = $2 - x$
F = $6 + x$

Factoriser une somme ou une différence

Questions flash

19. Les sommes et les différences : b, c, d et h.

20. a. $3 \times (x + 4)$
c. $4 \times (x - 2)$
e. $x \times (7x + 9)$
b. $7 \times (2 - x)$
d. $5 \times (3x + 4)$
f. $31 \times (x + y)$

21. a. Un facteur commun est 4.
c. Un facteur commun est 7.
e. Un facteur commun est 10.
b. Un facteur commun est x .
d. Un facteur commun est 3.
f. Un facteur commun est $3x$.

22. a. $9(y - 7)$
d. $7(y - z)$
b. $6(2y - 7)$
e. $y(x + z)$
c. $5(y + 1)$
f. $x(x + 3)$

23. a. $7(11 - y)$
c. $-3(y - 8)$
b. $-5(y + 3)$
d. $-4(9y - 1)$

24. $-2x^2 - 2x$
 $-6 + 3x$
 $-2x(x + 1)$
 $-3(2 - x)$

$-x^2 - 2x$	C	$-x(x + 2)$
$-2x - 6$	C	$-2(x + 3)$

25. a. $-2(x + 4)$ b. $x(x + 5)$ c. $-6x(x + 2)$
 d. $3(-x + 2)$ e. $x(3 - x)$ f. $2x(-x + 2)$
26. $A = L \times \ell = 10 + 5x = 5 \times (2 + x)$
 L'autre dimension est $2 + x$.

Problèmes

27. **Noël**
 1. $D = 2 \times 23,90 + 2 \times e = 2 \times (23,90 + e)$
 2. Pour $p = 16,10$ €, on obtient $D = 80$ €.

28. **Sans calculatrice (1)**
 1. Juliette développe le produit :
 $35 \times 12 = 35 \times (10 + 2) = 35 \times 10 + 35 \times 2$
 2. $A = 27 \times 100 + 27 \times 1 = 2\,727$
 $B = 17 \times 10 + 17 \times 3 = 221$
 $C = 57 \times 100 - 57 \times 1 = 5\,643$
 $D = 45 \times 20 - 45 \times 1 = 855$

29. **Sans calculatrice (2)**
 1. Ousmane factorise la somme :
 $37 \times 8 + 37 \times 2 = 37 \times 10 = 370$
 2. $A = 58 \times 10 = 580$
 $B = 23 \times 20 = 460$
 $C = 74 \times 1\,000 = 74\,000$
 $D = 57 \times 100 = 5\,700$

30. **Périmètres égaux ?**
 Périmètre du carré = $4(x + 5) = 4x + 20$
 Périmètre du triangle = $2(x + 10) + 2x = 4x + 20$
 Donc les deux figures ont le même périmètre.

31. **À chacun sa longueur**
 Il s'agit de factoriser les expressions pour les mettre sous la forme $L \times \ell = L \times x$.
 a. $x^2 + 7x = x(x + 7)$ donc la longueur est $x + 7$.
 b. $5x^2 + \frac{2}{3}x = x\left(5x + \frac{2}{3}\right)$ donc la longueur est $5x + \frac{2}{3}$.
 c. $11x^2 + x = x(11x + 1)$ donc la longueur est $11x + 1$.

32. **Sales !**
 1. $P = 5(3,20 - r)$ ou $P = 5 \times 3,20 - 5r$
 2. $P = 5(3,20 - 0,35) = 14,25$

33. **Deux programmes de calcul**
 1. Pour 5 au départ, on obtient 96 avec les deux programmes.
 Pour -2 au départ, on obtient 40 avec les deux programmes.
 2. On remarque que l'on obtient le même résultat pour les deux programmes avec le même nombre de départ.
 3. On traduit les deux programmes par des expressions littérales. On note x le nombre de départ.
 Programme 1 : $8(x + 7) = 8x + 8 \times 7 = 8x + 56$
 Programme 2 : $8x + 56$
 Donc, quel que soit le nombre de départ, le résultat sera le même avec les deux programmes.

34. **Toujours pareil !**
 1. Pour 5 au départ, on obtient 10.
 Pour -7 au départ, on obtient -14.
 Pour 8 au départ, on obtient 16.
 2. Il semble que l'on obtienne le double du nombre de départ.
 3. On note x le nombre de départ.
 Le programme donne $3(x + 9) - 27 - 2x = 2x$.

35. **Démonstration**
 1. $\mathcal{A}_{ACDF} = k \times (a + b)$ ou $\mathcal{A}_{ACDF} = k \times a + k \times b$.
 2. Comme les deux expressions désignent l'aire du rectangle ACDF, elles sont égales.

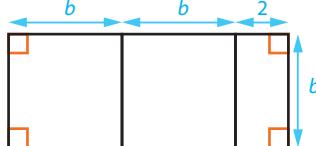
36. **Qui a raison ?**
 C'est Léila, car l'expression est un produit :
 $A = 2(4 \times 3x) = 2 \times 4 \times 3x = 24x$

37. **Nombres entiers**
 a. Vrai : $3n + 3n' = 3(n + n')$
 b. Faux : $3n \times 3n' = 9nn'$
 c. Vrai : $n + (n + 1) = 2n + 1$
 d. Vrai : $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4(n + 1)$
 e. Vrai : $(2n)^2 = 2n \times 2n = 4n^2$

38. Aires et périmètres

1. $\mathcal{A} = a^2 + 7a + 21$

2.



$$\mathcal{A} = b^2 + b^2 + 2b = 2b^2 + 2b = 2b(b + 1)$$

$$3. \text{ a. } \mathcal{P} = 2p + 9 \text{ et } \mathcal{A} = 3p + 4,5$$

$$\text{b. } \mathcal{P} = \frac{\pi y}{2} + y + 4 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)y + 4 \text{ et } \mathcal{A} = \frac{\pi y^2}{4} + 2y$$

$$\text{c. } \mathcal{P} = 6d + 2x + 2c \text{ et } \mathcal{A} = 3dx + dc$$

39. Jardin

$$1. \mathcal{A} = 20(15 + \ell) + 15 \times 1,5\ell = 300 + 42,5\ell$$

2. Dans la cellule B2, on écrit : =300+42,5*A2

	A	B
1	I	aire du jardin
2	0	300
3	1	342,5
4	2	385
5	3	427,5
6	4	470
7	5	512,5
8	6	555
9	7	597,5
10	8	640

On trouve $\ell \approx 7$ m.

3. La superficie totale du terrain est :

$$600 + 1,5\ell \times \ell = 600 + 1,5 \times 7^2 = 673,5 \text{ m}^2$$

40. Addition de fractions de même dénominateur

$$1. \text{ a. } 3\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) = 3 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{5}{3} = 2 + 5 = 8$$

$$\text{b. } \text{Donc } \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 8 \div 3 = \frac{8}{3}$$

$$2. \text{ a. } c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) = c \times \frac{a}{c} + c \times \frac{b}{c} = a + b$$

$$\text{b. } \text{Donc on a : } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

41. Pavements cosmatesques

1. Le nombre de losanges pour n motifs hexagonaux est $5n + 1$.

2. On remplace n par 13 dans l'expression de la question 1. :

$$5 \times 13 + 1 = 66$$

3. On cherche n de sorte que $5n + 1 = 100$.

$$5 \times 19 + 1 = 96 \text{ et } 5 \times 20 + 1 = 101.$$

Donc 19 motifs hexagonaux peuvent être délimités au maximum, puisqu'avec 20 motifs il faut 101 losanges.

Pour cette question, les élèves peuvent procéder par essais successifs à la calculatrice ou avec un tableau.

42. Nombres avec les mêmes chiffres

1. Avec 58 : $85 - 58 = 27$. Le symbole correspondant est #.

Avec 64 : $64 - 46 = 18$. Le symbole correspondant est #.

Avec 84 : $84 - 48 = 36$. Le symbole correspondant est #.

Il semble que quel que soit le nombre choisi, la différence obtenue est un multiple de 9. On remarque que dans la grille tous les multiples de 9 sont associés au symbole #.

2. Comme pour l'exemple $64 = 6 \times 10 + 4$, on écrit :

$$\overline{ab} = 10 \times a + b$$

$$\overline{ba} = 10 \times b + a$$

3. Comme $a < b$, on fait la différence :

$$\overline{ba} - \overline{ab} = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a = 9(b - a) \text{ qui est multiple de 9.}$$

L'intérêt de ce problème est de montrer une utilisation du calcul littéral pour démontrer une propriété dans un contexte arithmétique. L'étape la plus délicate sera d'écrire $\overline{ab} = 10 \times a + b$ (on utilise l'écriture \overline{ab} pour ne pas confondre avec le produit ab) ; on peut faire l'analogie avec les exercices de décomposition d'entiers au cycle 2.

43 Le tour de magie

1. Je suis né un 24 janvier :

$$24 \times 25 = 600$$

$$600 + 30 = 630$$

$$630 \times 80 = 50\,400$$

$$50\,400 - 2 \times 1 = 50\,398$$

$$50\,398 - 2\,400 = 47\,998$$

2. On note j le jour de naissance et m le mois de naissance. Le tour de magie se traduit par l'expression :

$$(25j + 30) \times 80 - 2m - 2\,400 = 2\,000j - 2m = 2(1\,000j - m)$$

3. Le résultat de la question **1.** est :

$$47\,998 = 2(1\,000j - m)$$

$$\text{Donc } 1\,000j - m = \frac{47\,998}{2} = 23\,999 = 1\,000 \times 24 - 1$$

Et on retrouve $j = 24$ et $m = 1$, soit le 24 janvier.

Donc le magicien doit diviser le résultat annoncé par le spectateur par 2 et le décomposer sous la forme $1\,000j - m$.

4. Le spectateur interrogé a annoncé 9 994.

$$\frac{9\,994}{2} = 4\,997 = 1\,000 \times 5 - 3$$

Donc le spectateur est né un 5 mars.

44 Des nombres carrés

1. $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$

$$1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$$

$$1 + 3 = 2^2 = 4$$

2. $1 + 3 + 5 + \dots + 57 + 59 = 30^2 = 900$

3. La somme des n premiers entiers impairs est donnée par l'expression n^2 .

4. $58^2 = 3\,364$. Donc on obtient 3 364 en ajoutant les 58 premiers nombres impairs.

45 Les margelles de la piscine

1. En complétant le bon de commande, on trouve 638 dalles à commander.

	A	B	C
		Largueur de la piscine (en m)	Nombre de dalles à commander
1			
2 Client 1		6	26
3 Client 2		8	34
4 Client 3		12	50
5 Client 4		4	18
6 Client 5		5	22
7 Client 6		8	34
8 Client 7		7	30
9 Client 8		18	74
10 Client 9		3	14
11 Client 10		9	38
12 Client 11		10	42
13 Client 12		8	34
14 Client 13		5	22
15 Client 14		12	50
16 Client 15		6	26
17 Client 16		16	66
18 Client 17		14	58
19	Total :		638

En notant ℓ la largeur de la piscine, le nombre de margelles est donné par la formule :

$$2\ell + 2(\ell + 3) - 4 = 4\ell + 2$$

On calcule le nombre de palettes nécessaires :

$$\frac{638}{15} \approx 42,53, \text{ donc il faut 43 palettes.}$$

$$43 \times 19,90 = 855,70$$

La commande de M. Rousseau auprès de son fournisseur s'élève à 855,70 €.

2. En notant ℓ la largeur de la piscine, le nombre de margelles est donné par la formule $4\ell + 2$.

On cherche ℓ de sorte que $4\ell + 2 = 54$.

Pour $\ell = 13$, on a $4 \times 13 + 2 = 54$.

La largeur maximale est 13 m.

46 Taux d'alcoolémie

1. Calcul du taux pour Emmanuelle :

$$\frac{0,8 \times 0,37 \times 100}{0,6 \times 56} \approx 0,881 \text{ g/L}$$

Calcul du taux pour Thomas :

$$\frac{0,8 \times 0,06 \times 660}{0,7 \times 74} \approx 0,612 \text{ g/L}$$

Calcul du taux de Lucia :

$$\frac{0,8 \times 0,11 \times 200}{0,6 \times 59} \approx 0,497 \text{ g/L}$$

Seule Lucia aura le droit de conduire.

$$\frac{0,8 \times 0,37 \times 50}{0,7 \times 71} + \frac{0,8 \times 0,11 \times 100}{0,7 \times 71} \approx 0,475 \text{ g/L} < 0,50 \text{ g/L}$$

Donc Jérôme peut boire un verre de vin de 10 cl à table.

Algorithmique et outils numériques

47 Polygones réguliers

1. Le script 1 permet de tracer un carré de côté 100 pixels.

Le script 2 permet de tracer un triangle équilatéral de côté 100 pixels.

2.



3. a. L'angle sera de $\frac{360}{n}$.

b.



c. Pour un hexagone, il suffit de remplacer n par 6. Pour un heptagone, on remplace n par 7 et pour un décagone, on remplace n par 10.

48 Programme de calcul (1)

1. L'utilisateur entre le nombre de départ.

Le nombre est ensuite stocké dans la variable x .

On ajoute 3 au nombre de départ.

On multiplie le résultat par 2.

On ajoute -6 au dernier résultat.

2. $2(x + 3) - 6$

3. $2(x + 3) - 6 = 2x$

On obtient le double du nombre de départ.

4.



49 Programme de calcul (2)



50 Perles de rocaille

1. Il faut 9 perles pour faire 4 étapes et 11 perles pour 5 étapes.
2. Le nombre de perles nécessaires à l'étape n est $2n + 1$.
3. Dans la cellule B2, on écrit : « =2*A2+1 ».
4. a. $350 = 2 \times 175 = 2 \times 174 + 1 + 1$
Donc elle fera son bracelet en 174 étapes : $2 \times 174 + 1 = 349$ perles.
- b. Il restera donc une perle.

Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Lucas a raison : $A = 5 \times x + 5 \times 6 = 5x + 30$.

Exercice 1

Léila a raison : $A = 7(4 - x) = 28 - 7x \neq 21x$ car la multiplication $7 \times x$ est prioritaire.

Exercice 2

1. $P = 2(x + 1 + 5) = 2(x + 6) = 2x + 12$
2. $2x + 12 = 4x$
3. Pour $x = 6$, l'égalité est vraie :
 - d'une part, $2 \times 6 + 12 = 24$;
 - d'autre part, $4 \times 6 = 24$.

Exercice 2

1. $P = 2(2x - 1 + 7 - x) = 2(x + 6) = 2x + 12$
2. $2x + 12 = 4x + 2$
3. Pour $x = 5$, l'égalité est vraie :
 - d'une part, $2 \times 5 + 12 = 22$;
 - d'autre part, $4 \times 5 + 2 = 22$.

Exercice 3

1. $P = 6(2,90 - x) = 17,4 - 6x$
2. $P = 17,4 - 6 \times 0,25 = 15,9 \text{ €}$

Exercice 3

1. $P = 5(2,90 - x) + 2(1,50 - x) = 17,5 - 7x$
2. $P = 17,5 - 7 \times 0,35 = 15,05 \text{ €}$

Écriture d'un énoncé

1. $6x + 2$
2. Un cinéma propose l'offre suivante : avec l'abonnement mensuel de 2 €, la place de cinéma ne coûte que 6 €.

Analyse d'une production

Manon fait une erreur dans la factorisation :

$$-7x + 3 \neq x(-7 + 3) = -7x + 3x$$

Léa n'a pas respecté la priorité à la multiplication $2 \times x$.

Victor factorise alors que l'expression de départ n'est ni une somme ni une différence, c'est un produit : $-5x \times 8x = -40x^2$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Parties du programme traitées dans le chapitre :

- mettre un problème en équation (et inéquation) en vue de sa résolution ;
- résoudre des équations du premier degré.
- Le chapitre 13 a montré aux élèves l'intérêt d'utiliser une écriture littérale. Ils ont produit des écritures littérales, les ont testées et les ont utilisées.
- Le chapitre 14 a eu le même objectif, en introduisant de nouveaux outils et de nouvelles règles qui permettent d'aborder et de modéliser des problèmes concrets plus complexes.

Ce chapitre « Résolution d'équations » va donc permettre d'aboutir à la résolution de ces problèmes, soit de façon exacte, soit de façon approchée, en les modélisant à l'aide d'une équation ou d'une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue.

Cependant, la résolution algébrique des inéquations du 1^{er} degré ne sera proposée que dans le chapitre 17.

- Les outils numériques ont un rôle important à jouer dans ce chapitre, soit pour tester, soit pour conjecturer, soit pour vérifier les solutions proposées.

Activités

Questions flash

1. a. $8x = 4$ b. $12 - 15 = -3$ c. $14 - 8,4 = 5,6$
 d. $2,5 + 4,5 = 7$ e. $7 \times 6 + 5 = 47$

2. a. $7 \times 0 - 1 = -1$ et $3 \times 0 = 0$: $-1 \neq 0$ donc l'égalité est fausse pour $x = 0$.
 b. $7 \times 0,25 - 1 = 0,75$ et $3 \times 0,25 = 0,75$ donc l'égalité est vraie pour $x = 0,25$.

c. $7 \times 1 - 1 = 6$ et $3 \times 1 = 3$: $6 \neq 3$ donc l'égalité est fausse pour $x = 1$.

3. La formule à écrire est : $=12*A2-7$
 4. L'aire d'un rectangle se calcule par la formule $L \times \ell$, donc ici on cherche un nombre qui multiplié par 3 donne 15. Or $5 \times 3 = 15$ donc la longueur mesure 5 cm.

Les balances

Activité 1

L'objectif de cette activité est de conjecturer les propriétés de l'égalité vis à vis des opérations.

Les prérequis nécessaires sont :

- savoir calculer avec des nombres décimaux ;
 - connaître le fonctionnement d'une balance à plateaux.
- La capacité introduite est de résoudre une équation.

1. La balance 2 est bien en équilibre car on ajoute le même élément dans chaque plateau.

De ce constat se déduit la première propriété de la capacité du cours « Résoudre une équation » :

« Une égalité reste vraie lorsque l'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres. »

La balance 3 est aussi en équilibre car on multiplie par la même quantité les éléments de chaque plateau.

De ce constat se déduit la deuxième propriété de la capacité du cours « Résoudre une équation » :

« Une égalité reste vraie lorsque l'on multiplie (ou divise) un même nombre à chacun de ses membres par un même nombre non nul. »

2. En enlevant de la deuxième balance les éléments proposés dans la première, on obtient une nouvelle balance, à savoir qu'un carré a la même masse que 2 ronds et 6 triangles.

En comparant à la première balance, on déduit une autre balance : 2 ronds et 6 triangles ont la même masse que 3 ronds et 1 triangle. Puis, en enlevant les deux ronds de chaque côté, on obtient que 6 triangles ont la même masse qu'un rond et un triangle. Donc, en retirant un triangle de chaque plateau, on en déduit qu'un rond a la même masse que 5 triangles et que 3 ronds ont la même masse que 15 triangles.

Comme, d'après la première balance, un carré a la même masse que 3 ronds et un triangle, on peut conclure qu'il faut poser 16 triangles sur le plateau de droite vide pour que la balance soit en équilibre.

3. En enlevant 6 boules orange de chaque côté, la balance reste en équilibre. Et on obtient un nouvel équilibre : 2 boules orange et une masse de 200 g pèsent 500 g.

On enlève ensuite une masse de 200 g de chaque côté : il reste que 2 boules orange pèsent 300 g. Donc une boule orange pèse 150 g.

Les questions 2. et 3. doivent être traitées par de la manipulation ou dessins à l'appui.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion d'équation. Nécessité d'introduire la modélisation par une équation. Les prérequis nécessaires sont :

- savoir calculer avec des nombres décimaux ;
- connaître le calcul littéral ;
- connaître les priorités opératoires.

La capacité introduite est de connaître la notion d'équation.

1. • Pour 1

Par le chemin de gauche : $(1 - 2) \times 7 = -7$

Par le chemin de droite : $1 \times 2 + 3 = 5$

$-7 \neq 5$ donc 1 ne peut pas être choisi.

• Pour 2,5

Par le chemin de gauche : $(2,5 - 2) \times 7 = 3,5$

Par le chemin de droite : $2,5 \times 2 + 3 = 8$

$3,5 \neq 8$ donc 2,5 ne peut pas être choisi.

• Pour -3

Par le chemin de gauche : $(-3 - 2) \times 7 = -35$

Par le chemin de droite : $-3 \times 2 + 3 = -3$

$-35 \neq -3$ donc -3 ne peut pas être choisi.

2. a. Par le chemin de gauche, le résultat en fonction de x est : $(x - 2) \times 7$ b. Par le chemin de droite, le résultat en fonction de x est : $x \times 2 + 3$ c. Comme les deux chemins doivent donner le même résultat, on obtient l'égalité $(x - 2) \times 7 = x \times 2 + 3$.d. Il faut résoudre l'équation $(x - 2) \times 7 = x \times 2 + 3$.

On développe le membre de gauche :

$$(x - 2) \times 7 = x \times 7 - 2 \times 7 = 7x - 14$$

On obtient la nouvelle égalité : $7x - 14 = 2x + 3$

On ajoute 14 à chaque membre : $7x - 14 + 14 = 2x + 3 + 14$

$$7x = 2x + 17$$

On soustrait $2x$ à chaque membre : $7x - 2x = 2x + 17 - 2x$
 $5x = 17$

On divise chaque membre par 5 : $5x \div 5 = 17 \div 5$
 $x = 3,4$

La valeur de x pour que l'égalité soit vraie est donc 3,4.

Cette question peut aussi être traitée par essais erreurs ou à l'aide d'un tableur.

3. a. Par le chemin de gauche, le résultat en fonction de x est :

$$x \times 7 - 2$$

b. Par le chemin de droite, le résultat en fonction de x est :

$$(x + 3) \times 4$$

c. Comme les deux chemins doivent donner le même résultat, on obtient l'égalité $x \times 7 - 2 = (x + 3) \times 4$.

d. Il faut résoudre l'équation $x \times 7 - 2 = (x + 3) \times 4$:

On développe le membre de droite :

$$(x + 3) \times 4 = x \times 4 + 3 \times 4 = 4x + 12$$

On obtient la nouvelle égalité : $7x - 2 = 4x + 12$

On ajoute 2 à chaque membre : $7x - 2 + 2 = 4x + 12 + 2$

$$7x = 4x + 14$$

On soustrait $4x$ à chaque membre : $7x - 4x = 4x + 14 - 4x$

$$3x = 14$$

On divise chaque membre par 3 : $3x \div 3 = 14 \div 3$

$$x = \frac{14}{3}$$

La valeur de x pour que l'égalité soit vraie est donc $\frac{14}{3}$.

Cette question ne peut pas être traitée par essais-erreurs ou à l'aide d'un tableur, car la valeur trouvée n'a pas d'écriture décimale. Il faut donc résoudre l'équation à l'aide des propriétés du cours.

Exercices

Connaitre la notion d'équation

Questions flash

1

Inconnue	$3x + 2 = 5$	$5y - 7 = y + 13$	$z + 4 = z^2$
Membres de l'équation	$3x + 2$ et 5	$5y - 7$ et $y + 13$	$z + 4$ et z^2
Terme(s) comportant l'inconnue	$3x$	$5y$ dans le premier membre y dans le second membre	z dans le premier membre z^2 dans le second membre
Terme(s) constant(s)	2 dans le premier membre 5 dans le second membre	-7 dans le premier membre 13 dans le second membre	4 dans le premier membre

2

- a. $-2 \times -2 = 4 \neq -4$ donc l'affirmation est fausse.
- b. $5 - 5 = 0$ donc l'affirmation est vraie.
- c. $\frac{100}{10} = 10$ donc l'affirmation est vraie.
- d. $-4 + 7 = 3 \neq -11$ donc l'affirmation est fausse.

3

- On veut tester si -1 est solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$. Dans le membre de gauche : $2x + 3 = 2 \times (-1) + 3 = 1$
Dans le membre de droite : $10 - 5x = 10 - 5 \times (-1) = 15$
 $1 \neq 15$ donc -1 n'est pas solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$.
- On veut tester si 0 est solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$. Dans le membre de gauche : $2x + 3 = 2 \times 0 + 3 = 3$
Dans le membre de droite : $10 - 5x = 10 - 5 \times 0 = 10$
 $3 \neq 10$ donc 0 n'est pas solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$.

- On veut tester si 1 est solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$.

Dans le membre de gauche : $2x + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$
Dans le membre de droite : $10 - 5x = 10 - 5 \times 1 = 5$

Les deux membres ont la même valeur donc 1 est solution de l'équation $2x + 3 = 10 - 5x$.

4

- a. Vrai : $5 + 2 = 7$ et $3 \times 2 + 1 = 7$
- b. Faux : $5(5 - 2) = 15$ et $4 \times 5 = 20$
- c. Faux : $2(3 + 1) = 8$ et $3^2 = 9$

5

$2y - 3 = 5y$	<input checked="" type="radio"/>	$y = -1$
$y^2 = 8y$	<input type="radio"/>	$y = 8$
$3y = \frac{y}{2} + 5$	<input type="radio"/>	$y = 2$
$7(y + 1) = 9y - 1$	<input type="radio"/>	$y = 4$

6

- La bonne étiquette est la verte :

1 est une solution de l'équation mais pas 2.

Résoudre une équation

Questions flash

7

- a. Fausse.
- b. Vraie.
- c. Fausse.
- d. Vraie.
- e. Vraie.

8

- a. Pour résoudre l'équation $x - 4 = 9$, on **ajoute 4 à chacun de ses membres**.
- b. Pour résoudre l'équation $2x = 17$, on **divise par 2 chaque membre**.
- c. Pour résoudre l'équation $\frac{x}{5} = 11$, on **multiplie par 5 chaque membre**.
- d. Pour résoudre l'équation $x + (-3) = 8$, on **soustrait (-3) à chacun de ses membres**.

- 9.** a. $-2 + x = 5$
 $-2 + x - (-2) = 5 - (-2)$
 $x = 7$
La solution de l'équation est 7.
- b. $x + 9 = 16$
 $x + 9 - 9 = 16 - 9$
 $x = 7$
La solution de l'équation est 7.
- c. $6x = 15$
 $6x \div 6 = 15 \div 6$
 $x = 2,5$
La solution de l'équation est 2,5.
- d. $-5x = 24$
 $-5x \div (-5) = 24 \div (-5)$
 $x = -4,8$
La solution de l'équation est -4,8.
- e. $4x + 3x = 49$
 $7x = 49$
 $7x \div 7 = 49 \div 7$
 $x = 7$
La solution de l'équation est 7.
- f. $-2x + 7x = 36$
 $5x = 36$
 $5x \div 5 = 36 \div 5$
 $x = 7,2$
La solution de l'équation est 7,2.
- 10.** a. $5x = 4$
b. $2x = 11$
- 11.** a. $\frac{3}{4}x = 5$
 $\frac{3}{4}x \div \frac{3}{4} = 5 \div \frac{3}{4}$
 $x = \frac{20}{3}$
La solution de l'équation est $\frac{20}{3}$.
- b. $4x - 3 = 11$
 $4x - 3 + 3 = 11 + 3$
 $4x = 14$
 $4x \div 4 = 14 \div 4$
 $x = 3,5$
La solution de l'équation est 3,5.
- c. $7 - 8x = 56$
 $7 - 8x - 7 = 56 - 7$
 $-8x = 49$
 $-8x \div (-8) = 49 \div (-8)$
 $x = -\frac{49}{8}$
La solution de l'équation est $-\frac{49}{8}$.
- d. $6x - 4 = 3x + 14$
 $6x - 4 + 4 = 3x + 14 + 4$
 $6x = 3x + 18$
 $6x - 3x = 3x + 18 - 3x$
 $3x = 18$
 $3x \div 3 = 18 \div 3$
 $x = 6$
La solution de l'équation est 6.
- e. $9 - 2x = 11 + 4x$
 $9 - 2x - 9 = 11 + 4x - 9$
 $-2x = 2 + 4x$
 $-2x - 4x = 2 + 4x - 4x$
 $-6x = 2$
 $-6x \div (-6) = 2 \div (-6)$
 $x = -\frac{1}{3}$
La solution de l'équation est $-\frac{1}{3}$.
- 12.** 1. $5(x - 3) - 3x + 7 = 5 \times x - 5 \times 3 - 3x + 7$
 $= 5x - 15 - 3x + 7 = 2x - 8$
2. Résoudre $5(x - 3) - 3x + 7 = 9$ revient à résoudre $2x - 8 = 9$ d'après 1.
 $2x - 8 = 9$
 $2x - 8 + 8 = 9 + 8$
- 13.** 1. $2(x - 7) = 2x - 14$
 $3(-x + 1) = -3x + 3$
2. Résoudre $2(x - 7) = 3(-x + 1)$ revient à résoudre :
 $2x - 14 = -3x + 3$
 $2x - 14 + 14 = -3x + 3 + 14$
 $2x = -3x + 17$
 $2x + 3x = -3x + 17 + 3x$
 $5x = 17$
 $5x \div 5 = 17 \div 5$
 $x = 3,4$
- 14.** $7(6 - 2x) - 3(4x + 1) = 0$
 $42 - 14x - 12x - 3 = 0$
 $-26x + 39 = 0$
 $-26x + 39 - 39 = 0 - 39$
 $-26x = -39$
 $-26x \div (-26) = -39 \div (-26)$
 $x = 1,5$
La solution de l'équation est 1,5.
- Modéliser une situation**
- Questions flash**

15.	a. $x + 11$	b. $x - 7$	c. $5x$	d. $\frac{x}{3}$
16.	a. $2x$	b. $\frac{x}{3}$	c. $x + 8$	d. $x - 13$
- 17.** 1. $5x + 9$
2. Pour trouver le nombre x qui donnera 18, on doit résoudre l'équation $5x + 9 = 18$.
 $5x + 9 = 18$
 $5x = 9$
 $x = 1,8$
Il faut donc mettre 1,8 pour obtenir 18.
3. Pour trouver le nombre x qui donnera son double, c'est-à-dire $2x$, on doit résoudre l'équation $5x + 9 = 2x$.
 $5x + 9 = 2x$
 $3x + 9 = 0$
 $3x = -9$
 $x = -3$
Il faut donc mettre -3 pour obtenir son double, soit -6.
- 18.** Le problème se modélise par l'équation $2n + 5 = 14$, où n est le nombre cherché.
 $2n + 5 = 14$
 $2n = 9$
 $n = 4,5$
Le nombre cherché est donc 4,5.
- 19.** Le problème se modélise par l'équation $4n - 7 = 3n$, où n est le nombre cherché.
 $4n - 7 = 3n$
 $n - 7 = 0$
 $n = 7$
Le nombre cherché est donc 7.
- 20.** Le problème se modélise par l'équation $3n - 4 = 2n + 1$, où n est le nombre cherché.
 $3n - 4 = 2n + 1$
 $n - 4 = 1$
 $n = 5$
Le nombre cherché est donc 5.
- 21.** Le problème se modélise par l'équation $a + (a + 3) + 2a = 107$, où a est l'âge d'Agnès.
 $a + (a + 3) + 2a = 107$
 $4a + 3 = 107$
 $4a = 104$
 $a = 26$
Agnès a donc 26 ans.

- 22** Le problème se modélise par l'équation $4s + s + s + 3s = 1\,647$, où s est la somme gagnée par Enzo et Flore.
 $4s + s + s + 3s = 1\,647$
 $9s = 1\,647$
 $s = 183$
Ainsi, Enzo et Flore ont gagné 183 €, Candice 549 € (183×3) et Valentin 732 € (183×4).

Connaitre la notion d'inéquation

Questions flash

	$2x + 8 > 11$	$4y - 6 \geq 3y + 7$	$3 - z < z^2$
Inconnue	x	y	z
Membres de l'inéquation	$2x + 8$ et 11	$4y - 6$ et $3y + 7$	$3 - z$ et z^2
Terme(s) comportant l'inconnue	$2x$	$4y$ dans le premier membre $3y$ dans le second membre	$-z$ dans le premier membre z^2 dans le second membre
Terme(s) constant(s)	8 dans le premier membre 11 dans le second membre	-6 dans le premier membre 7 dans le second membre	3 dans le premier membre

- 24** a. $3 \times 2 = 6 > 1$ donc l'affirmation est fausse.
b. $-4 + 7 = 3 > 2$ donc l'affirmation est vraie.
c. $\frac{5}{2} = 2,5 < 5$ donc l'affirmation est fausse.
d. $3 - (-7) = 10 > 7$ donc l'affirmation est fausse.

- 25** • $-1 - 3 = -4$ et $2 \times (-1) = -2$
Or $-4 < -2$ donc -1 n'est pas solution de l'inéquation.
• $-2 - 3 = -5$ et $2 \times (-2) = -4$
Or $-5 < -4$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation.
• $-3 - 3 = -6$ et $2 \times (-3) = -6$
Chaque membre est égal à -6 , donc -6 est solution de l'inéquation.

$3x - 7 \geq 5$	C	5
$-x + 3 \geq 8$	C	-12 ou -5
$x - 6 < -11$	C	-12

- 27** a. $2 + 7 = 9$ et $4 \times 2 + 2 = 10$
Or $9 < 10$ donc 2 est une solution de l'inéquation : l'affirmation est vraie.
b. $3(-1 + 1) = 0$ et $10 \times (-1) = -10$
Or $0 > -10$ donc -1 est une solution de l'inéquation : l'affirmation est vraie.
c. $8(5 - 1) = 32$ et $5^2 = 25$
Or $32 > 25$ donc 5 n'est pas solution de l'inéquation : l'affirmation est fausse.

28 Ni 7 ni 10 ne sont solutions de l'inéquation.

Problèmes

- 29** **Consécutifs**
En notant n le premier nombre entier, le problème se modélise par l'équation $n + (n + 1) + (n + 2) = 129$
 $n + (n + 1) + (n + 2) = 129$
 $3n + 3 = 129$
 $3n = 126$
 $n = 42$ Ainsi, les trois nombres sont 42, 43 et 44.

Dans un triangle

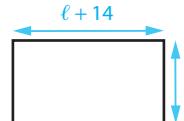
La somme des angles d'un triangle est égale à 180° , donc la situation se modélise par l'équation : $x + 40 + 40 + 3x - 17 = 180$
 $x + 40 + 40 + 3x - 17 = 180$
 $4x + 63 = 180$
 $4x = 117$
 $x = 29,25$
Les trois angles mesurent : 40° , $69,25^\circ$ et $70,75^\circ$.

Avec un parallélogramme

Pour que ce quadrilatère soit un parallélogramme, il faut que les côtés opposés soient égaux. Ce qui revient à trouver x tel que $3x - 1 = x + 3$.
 $3x - 1 = x + 3$
 $3x = x + 4$
 $2x = 4$
 $x = 2$
Donc x doit être égal à 2.

Un rectangle

Notons ℓ la largeur du rectangle. On obtient ainsi :



Le périmètre du rectangle étant de 378 m, le problème se modélise par l'équation : $2 \times (\ell + 14 + \ell) = 378$
 $2 \times (\ell + 14 + \ell) = 378$
 $2 \times (2\ell + 14) = 378$
 $2\ell + 14 = 189$
 $2\ell = 175$
 $\ell = 87,5$
Ainsi, le rectangle a pour largeur 87,5 m et pour longueur 101,5 m.

C'est la rentrée !

Le problème se modélise par l'équation :

$$7 \times \frac{c}{1,5} + 5 \times c + 11,25 = 44,60 \text{ où } c \text{ représente le prix du classeur.}$$

$$7 \times \frac{c}{1,5} + 5 \times c + 11,25 = 44,60$$

$$\frac{29}{3} c + 11,25 = 44,60$$

$$\frac{29}{3} c = 33,35$$

$$c = 3,45$$

Un classeur coûte 3,45 €.

Au restaurant

En notant p le prix du menu enfant, le problème se modélise par l'équation : $50 - (2 \times 2p + 3p + 3,80) = 0,70$
 $50 - (2 \times 2p + 3p + 3,80) = 0,70$
 $50 - (7p + 3,80) = 0,70$
 $7p + 3,80 = 49,3$
 $7p = 45,5$
 $p = 6,5$
Le menu enfant coûte 6,50 € et le menu adulte coûte 13 €.

One World Trade Center

En notant h la hauteur d'un étage, le problème se modélise par l'équation : $108h + 7,8h + 124,3 = 541,3$
 $108h + 7,8h + 124,3 = 541,3$
 $115,8h + 124,3 = 541,3$
 $115,8h = 417$
 $h \approx 3,6$
Ainsi, un étage a une hauteur de 3,6 m environ.

Une histoire de périmètre

On note x la longueur du segment [AM].

- a. Le problème se modélise par l'équation : $4x = 3(8,4 - x)$
 $4x = 3(8,4 - x)$
 $4x = 25,2 - 3x$
 $7x = 25,2$
 $x = 3,6$
Lorsque AB = 8,4 cm, le point M doit être à 3,6 cm de A pour que les deux périmètres du carré et du triangle équilatéral soient égaux.

b. Le problème se modélise par l'équation : $4x = 3(10 - x)$

$$4x = 3(10 - x)$$

$$4x = 30 - 3x$$

$$7x = 30$$

$$x = \frac{30}{7}$$

Lorsque $AB = 10$ cm, le point M doit être à $\frac{30}{7}$ cm de A pour que les deux périmètres du carré et du triangle équilatéral soient égaux.

37 Des trèfles

On note x le nombre de trèfles à 4 folioles.

La situation se modélise par l'équation : $3(134 - x) + 4x = 408$

$$3(134 - x) + 4x = 408$$

$$402 - 3x + 4x = 408$$

$$402 + x = 408$$

$$x = 6$$

Léila a cueilli 6 trèfles à 4 folioles : elle a eu beaucoup de chance (6 pour 134 par rapport à 1 pour 10 000).

38 Une nouvelle opération

1. a. $7 \oplus 4 = 7 \times 4 + 7 + 4 = 39$

b. $1,5 \oplus 8 = 1,5 \times 8 + 1,5 + 8 = 21,5$

c. $-2 \oplus 9 = -2 \times 9 + (-2) + 9 = -11$

2. On note x le nombre tel que $3 \oplus 5 = 2 \oplus x$.

$$3 \oplus 5 = 3 \times 5 + 3 + 5 = 23$$

$$2 \oplus x = 2x + 2 + x$$

On obtient donc l'équation $2x + 2 + x = 23$.

$$2x + 2 + x = 23$$

$$3x + 2 = 23$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

On a donc $3 \oplus 5 = 2 \oplus 7$.

39 Les stations de métro

On note n le nombre d'entrées Guimard qui existent encore.

Le problème se modélise par l'équation :

$$\frac{1}{11}n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}n + 5 = n$$

$$\frac{61}{66}n + 5 = n$$

$$\frac{5}{66}n = 5$$

$$n = 66$$

Il ne reste que 66 entrées Guimard aujourd'hui.

40 Cinéma

1. $7,80x + 21,90 < 11,40x$

2. a. $7,80 \times 6 + 21,90 = 68,70$

$$11,40 \times 6 = 68,4$$

Comme $68,70 > 68,4$, 6 n'est pas une solution de l'inéquation.

b. $7,80 \times 7 + 21,90 = 76,5$

$$11,40 \times 7 = 79,8$$

Comme $76,5 < 79,8$, 7 est une solution de l'inéquation.

c. D'après les questions **a.** et **b.**, s'abonner est plus avantageux à partir de 7 places.

41 Salle de bains

1. On note ℓ la largeur de la frise.

La condition sur l'aire de la frise donne l'inéquation $1,90\ell < 0,60$.

La condition sur le périmètre de la frise donne l'inéquation $2(1,90 + \ell) > 4,2$.

2. • -20 cm :

$$1,90 \times 0,2 = 0,38 < 0,60$$

$2(1,90 + 0,2) = 4,2$ donc 20 cm ne convient pas.

• -25 cm :

$$1,90 \times 0,25 = 0,475 < 0,60$$

$2(1,90 + 0,25) = 4,3 > 4,2$ donc 25 cm convient.

• -30 cm :

$$1,90 \times 0,3 = 0,57 < 0,60$$

$2(1,90 + 0,3) = 4,4 > 4,2$ donc 30 cm convient.

• -35 cm :

$$1,90 \times 0,35 = 0,665 > 0,60$$

donc 35 cm ne convient pas.

3. Toutes les largueurs comprises entre 21 cm et 31 cm conviennent.

Les élèves ne résolvent pas les inéquations, mais ils peuvent tester différentes valeurs ou utiliser un tableur.

42 L'allée du jardin

1. On note x la largeur de l'allée.

L'aire de la surface végétalisée est égale à : $(30 - x)(16 - x)$

L'aire de la double allée est égale à : $30x + 16x - x^2 = 46x - x^2$

Comme les aires de la double allée et de la surface végétalisée doivent être égales, le problème se modélise par l'équation : $(30 - x)(16 - x) = 46x - x^2$

2. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

On trouve deux solutions à cette équation : 6 et 40.

3. Le jardin a pour dimensions 30 m par 16 m donc la solution 40 ne convient pas ($40 > 30$). Seule la solution 6 convient au problème.

43 Consommation d'eau

1. Consommation hebdomadaire d'eau de la famille Vidal :

$$(4 \times 5 + 2) \text{ douches} + 2 \text{ bains} + 2 \text{ lave-vaisselle} + 2 \text{ lave-linge} + (10 \times 7) \text{ chasse d'eau} + 1 \text{ lavage de voiture}$$

Valeur minimale :

$$(4 \times 5 + 2) \times 20 + 2 \times 120 + 2 \times 10 + 2 \times 40 + (10 \times 7) \times 5 + 200 = 1\,330$$

Valeur maximale :

$$(4 \times 5 + 2) \times 50 + 2 \times 150 + 2 \times 20 + 2 \times 90 + (10 \times 7) \times 9 + 200 = 2\,450$$

La consommation hebdomadaire d'eau de la famille Vidal est comprise entre 1 330 L et 2 450 L.

2. Le problème se modélise par l'inéquation $4 \times v + 200 < 350$, où v représente le volume d'eau d'une douche à ne pas dépasser.

À l'aide d'un tableur, on peut trouver v : voir fichier joint dans le manuel numérique.

Ainsi, le volume à ne pas dépasser est 37,5 L.

44 Un périmètre



On note c le côté du petit carré.

Le périmètre de la figure s'exprime alors par l'expression littérale $(c + 1) \times 3 + 1 + c \times 3$ et le problème est modélisé par l'équation : $(c + 1) \times 3 + 1 + c \times 3 = 55$

$$(c + 1) \times 3 + 1 + c \times 3 = 55$$

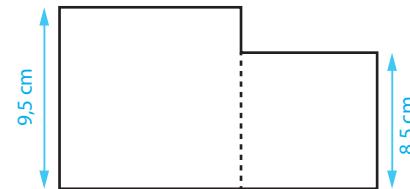
$$3c + 3 + 1 + 3c = 55$$

$$6c + 4 = 55$$

$$6c = 51$$

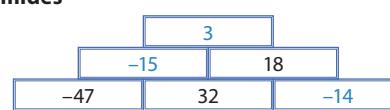
$$c = 8,5$$

On obtient donc la figure :

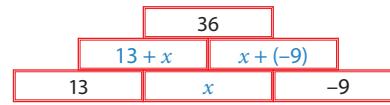


45 Les pyramides

1.



2. On note x le nombre de la case vide de la ligne du bas.



Le problème se modélise donc par l'équation :

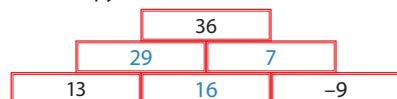
$$13 + x + x + (-9) = 36$$

$$2x + 4 = 36$$

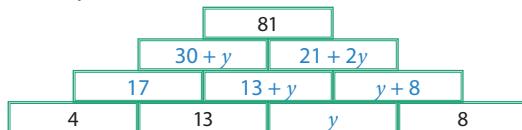
$$2x = 32$$

$$x = 16$$

Ainsi, on obtient la pyramide :



3. On note y le nombre de la case vide de la ligne du bas.



Le problème se modélise donc par l'équation :

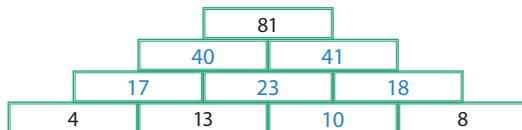
$$30 + y + 21 + 2y = 81$$

$$51 + 3y = 81$$

$$3y = 30$$

$$y = 10$$

Ainsi, on obtient la pyramide :



46 La somme manquante

De la première ligne, on a : 2 triangles + 2 carrés donnent 28, soit 1 triangle + 1 carré donnent 14.

De la troisième ligne, on a : 3 ronds + 1 triangle donnent 18.

De la quatrième ligne : 3 ronds + 1 carré donnent 20.

Donc en retranchant la troisième ligne à la quatrième, on obtient 1 carré – 1 triangle donnent 2.

Ainsi, en additionnant cette équation à la première écrite, on obtient que 2 carrés sont égaux à 16, soit **1 carré à 8**.

De la quatrième ligne, on déduit que 3 ronds sont égaux à 12, soit **1 rond à 4**.

De la troisième ligne, on déduit que **1 triangle est égal à 6**.

De la deuxième ligne, on a 2 carrés + 2 hexagones donnent 30, donc 2 hexagones sont égaux à 14, soit **1 hexagone à 7**.

Ainsi, la somme manquante est $6 + 7 + 2 \times 4 = 21$.

Cette méthode de résolution demande une bonne maîtrise du calcul littéral et de la résolution des équations.

Il est aussi possible de faire une résolution à l'aide d'un tableur (voir fichier joint dans le manuel numérique ou sur le site Hachette Éducation), voire de créer un programme (soit avec un tableur, soit avec Scratch) qui calcule les sommes de chaque ligne et chaque colonne en fonction des valeurs des 4 éléments entrés.

47 Les nombres spéciaux

Résolution à l'aide d'un tableur : voir fichier joint dans le manuel numérique.

Dans cette feuille de calcul, on entre le chiffre des dizaines et le programme procède au calcul de la propriété des nombres spéciaux. Il n'y a plus qu'à repérer les nombres qui sont spéciaux dans chaque dizaine.

Ainsi, les seuls nombres spéciaux sont :

19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 et 99.

Démonstration à l'aide du calcul littéral :

On montre simplement que les dizaines ne peuvent être des nombres spéciaux.

On note A le chiffre des dizaines et B le chiffre des unités des nombres à deux chiffres qui sont spéciaux.

Le problème se modélise par l'équation : $A + B + AB = 10A + B$

$$A + B + AB = 10A + B$$

$$9A = AB$$

$$\text{Or } A \neq 0, \text{ donc } B = 9.$$

Ainsi, tous les nombres spéciaux sont les nombres à deux chiffres ayant 9 comme chiffre des unités, soit :

19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 et 99.

48 Star sum

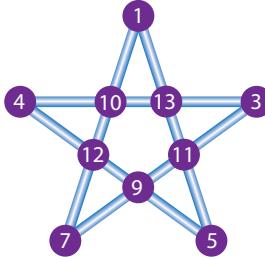
Ligne « C, I » : $7 + C + I + 3$

Ligne « R, I » : $1 + R + I + 5$

Ces deux sommes sont égales, donc $7 + C + I + 3 = 1 + R + I + 5$, soit $10 + C + I = 6 + R + I$.

Donc $R = C + 4$.

Or R et C ne peuvent être égaux qu'à 9, 10, 11, 12 ou 13. Donc C = 9 et R = 13. On obtient ainsi l'étoile :



49 Peson à ressort

1. Du doc. 1, on sait que l'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse de la charge suspendue.

Donc, vu les données, on déduit que :

- le ressort du peson A aura une longueur qui se modélise par l'équation $10 + 2m$, où m est la masse de la charge suspendue ;

- le ressort du peson B aura une longueur qui se modélise par l'équation $5 + 2,5m$, où m est la masse de la charge suspendue.

On souhaite avoir, pour une même charge, la même longueur de ressorts pour les deux pesons A et B.

Le problème se modélise donc par l'équation $10 + 2m = 5 + 2,5m$ où m est la masse de cette charge commune.

$$10 + 2m = 5 + 2,5m$$

$$2m + 5 = 2,5m$$

$$0,5m = 5$$

$$m = 10$$

Ainsi, pour un objet de 10 kg, les deux ressorts des pesons A et B auront la même longueur.

$$2. 10 + 2 \times 10 = 30 \text{ ou } 5 + 2,5 \times 10 = 30$$

La longueur est de 30 cm.

50 Aire de jeux

1. On note ℓ la largeur de la bande de gazon. Le problème se modélise par l'équation : $(15 + 2\ell) \times 2 + (10 + 2\ell) \times 2 = 85 + 1$

$$(15 + 2\ell) \times 2 + (10 + 2\ell) \times 2 = 85 + 1$$

$$30 + 4\ell + 20 + 4\ell = 86$$

$$50 + 8\ell = 86$$

$$8\ell = 36$$

$$\ell = 4,5$$

Ainsi, la bande de gazon a une largeur de 4,5 m.

2. Aire de la bande de gazon :

$$(15 + 9) \times (10 + 9) - 15 \times 10 = 306$$

L'aire à ensemencer est de 306 m².

Cout avec la première proposition : $3 \times 105 = 315$ €

Cout avec la deuxième proposition : $2 \times 30,90 = 61,80$ €

Cout avec la troisième proposition : 69,90 €

Donc l'ensemencement du gazon coutera 61,80 €.

Algorithmique et outils numériques

51 Être ou ne pas être

1. Il sert à tester si un nombre est solution de l'équation $5x + 7 = 12x$.

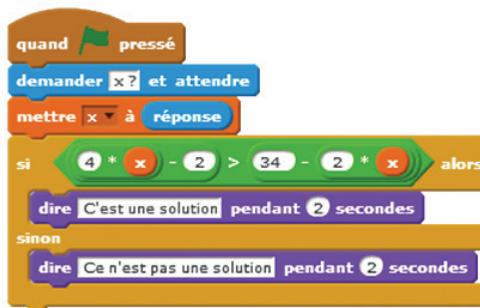
$$2. 5x + 7 = 12x$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

Il faut donc entrer la valeur 1.

3.



4. 7 est une solution de l'inéquation.



On peut aussi donner 8, 10, 100 comme solutions de cette inéquation.

5. a. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

b. En B2 : $=4*A2-2$

En C2 : $=34-2*A2$

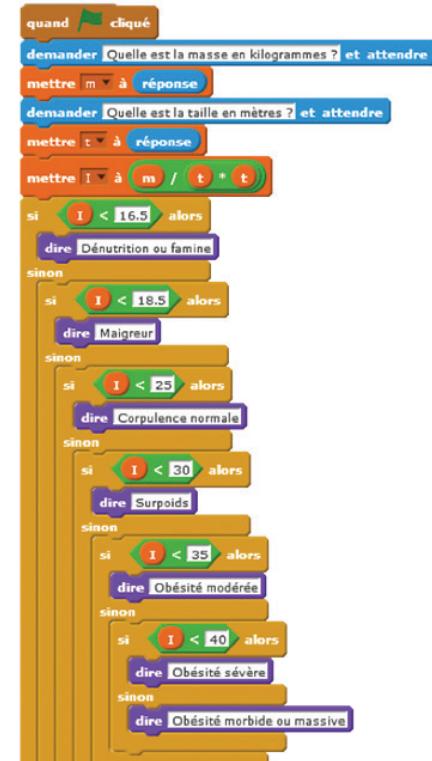
On en déduit que les nombres de 0 à 3 ne sont pas solutions. Mais en étirant au-delà de 6, on constate que les nombres supérieurs à 6 sont des solutions de l'inéquation.

c. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

d. Non, car tous les nombres supérieurs à 6 sont solutions, on ne peut donc tous les citer.

52 Indice de masse corporelle (IMC)

1.



2. Le script affiche Maigre.

3. Notons m la masse de Paul.

Son IMC est égal à $m \div (1,74)^2$. Comme il a une corpulence normale, son IMC est compris entre 18,5 et 25.

m vérifie donc l'inégalité $18,5 < m \div (1,74)^2 < 25$.

Ainsi, $56 < m < 76$.

Paul pèse entre 56 et 76 kg.

53 Un carré magique

1. Mettons 12 à la place de ?. On obtient alors :

A	B	C	D
1	6	9	21
2	12	-3	27
3	18	21	33

La somme de la première ligne est $6 + 9 + 21 = 36$.

La somme de la deuxième colonne est $9 + (-3) + 21 = 27$.

Donc le carré n'est pas magique.

2. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

3. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

4. Pour 5 :

A	B	C	D	E
1	6	9	21	36
2	9	-6	33	36
3	21	33	36	90
4	36	36	36	90
				36

Pour 9 :

A	B	C	D	E
1	6	9	21	36
2	5	-10	41	36
3	25	37	40	102
4	36	36	102	36

Après plusieurs tests, le carré n'est pas magique.

5. En appelant x le nombre mis à la place de ?, on obtient :

6	9	21
x	$x-15$	$x-30$
$30-x$	$42-x$	$45-x$

Avec la deuxième ligne, une équation pour trouver le nombre x est $x + x - 15 + x - 30 = 36$, soit $3x - 45 = 36$.

Après résolution de l'équation, on trouve que le nombre qui rend le carré magique est 27.

A	B	C	D	E
1	6	9	21	36
2	27	12	-3	36
3	3	15	18	36
4	36	36	36	36

Une autre équation peut être trouvée avec la troisième ligne : $30 - x + 42 - x + 45 - x = 36$, soit $117 - 3x = 36$.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

$$2x - 6 = 2$$

Exercice 1

$$3x - 11 = -0,5$$

Exercice 2

Le problème se modélise par l'équation $2 \times (L + 55) = 330$, où L est la longueur du rectangle.

$$2 \times (L + 55) = 330$$

$$L + 55 = 165$$

$$L = 110$$

Ainsi, le terrain a une longueur de 55 m.

Exercice 2

Le problème se modélise par l'équation $2 \times (\ell + 2\ell) = 120$, où ℓ est la largeur du rectangle.

$$2 \times (\ell + 2\ell) = 120$$

$$6\ell = 120$$

$$\ell = 20$$

Ainsi, le terrain a une largeur de 20 m et une longueur de 40 m.

Exercice 3

1. • Pour 140 km :

RAPIDAUTO : $3,20 \times 140 = 448$ €
EXPRESSCAR : $165 + 140 \times 2,10 = 459$ €
M. Fournier doit choisir RAPIDAUTO.

• Pour 160 km :

RAPIDAUTO : $3,20 \times 160 = 512$ €
EXPRESSCAR : $165 + 160 \times 2,10 = 501$ €
M. Fournier doit choisir EXPRESSCAR.

2. Le problème se modélise par l'équation $3,20k = 165 + 2,10k$ où k est le nombre de kilomètres pour lequel M. Fournier paiera le même tarif.

$$3,20k = 165 + 2,10k$$

$$1,1k = 165$$

$$k = 150$$

Ainsi, M. Fournier paiera le même tarif pour 150 km.

3. Conseil : pour moins de 150 km, choisir RAPIDAUTO, pour plus de 150 km, choisir EXPRESSCAR.

Exercice 3

Le problème se modélise par l'inéquation $3,60k > 180 + 2k$ où k est le nombre de kilomètres.

Puis, avec un tableur, on détermine le kilométrage à partir duquel l'inéquation est vérifiée. Voir fichier joint dans le manuel numérique.

Ainsi, EXPRESSCAR est plus avantageux à partir de 112,5 km.

Analyse d'une production

- Marilyne a mal développé les parenthèses (erreur de signe pour le 7) et a perdu le 1 du deuxième membre.

$$\begin{aligned} 5 - (x - 7) &= 4x + 1 \\ 12 - 1 &= 4x + x \\ 11 &= 5x \\ x &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

- Anissa a soustrait -5 au lieu de le diviser.

$$\begin{aligned} 5 - (x - 7) &= 4x + 1 \\ 5 - x + 7 &= 4x + 1 \\ -5x &= -11 \\ x &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

- Aurélien a fait une erreur sur la règle des signes dans la division.

$$\begin{aligned} 5 - (x - 7) &= 4x + 1 \\ 5 - x + 7 &= 4x + 1 \\ -5x &= -11 \end{aligned}$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

Les connaissances et compétences associées sont :

- développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.
- Dans le chapitre 13, l'élève a déjà rencontré des expressions littérales et a travaillé les capacités suivantes :
 - écrire une expression littérale ;
 - utiliser une expression littérale ;
 - tester une égalité.
- Dans le chapitre 14, ces capacités ont été approfondies et la simple distributivité a été introduite. Elle a servi à démontrer des propriétés et des conjectures et à simplifier des expressions littérales en vue de leur utilisation dans le chapitre traitant de la résolution des équations.

- Dans le chapitre 16, ce travail se poursuit au travers de différents problèmes algébriques, géométriques ou contextualisés et le calcul littéral est en particulier utilisé pour démontrer. Le parti a été pris d'introduire la double distributivité comme notion de cours en fin de cycle. Cela permet d'élargir le champ des problèmes à des situations plus riches, qui se ramènent néanmoins au premier degré après factorisation ou développement. Les identités remarquables, citées dans les exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève, sont introduites dans les problèmes.
- Au niveau de l'utilisation des outils numériques, l'élève poursuivra le travail mené plus tôt dans le cycle ; le tableur est un outil efficace dans la résolution de problèmes, par exemple dans le calcul d'un grand nombre de valeurs pour une même expression littérale, ou la conjecture de résultat.

Activités

Questions flash

- 1.** a. Vrai.
b. Faux.
c. Faux.
d. Vrai.
e. Faux.
- 2.** a. $A = (0 + 1)(2 \times 2 - 3) = 1$
b. $A = (-1 + 1)(2 \times 1 - 3) = 0$
c. $A = (3 + 1)(2 \times (-2) - 3) = -28$
- 3.** a. x^2
b. x
c. $2xy$
d. $(xy)^2$

- 4.** a. $40 + 8a$
b. $2x^2 - x$
c. $-2b + 6$
d. $7t - 7t^2$
e. $16t - 6t^2$
- 5.** a. $b(b + 3)$
b. $6(2 - y)$
c. $2x(7x + 1)$
d. $4x(4 - x)$
- 6.** a. C'est un multiple de 2 ou il est pair.
b. Il est impair.
c. C'est un multiple de 7.

Suites de nombres

Intentions des auteurs

Les objectifs de cette activité sont de créer et simplifier une expression littérale, d'utiliser une expression littérale pour démontrer un résultat général.

Les prérequis nécessaires sont de connaître le calcul littéral du chapitre 14, de savoir factoriser une somme.

La capacité introduite est de simplifier une expression. C'est une capacité vue dans le chapitre 14.

- 1.** La suite de nombres est : 1, 2, 3, 5, 8, 13.

Pour obtenir un nombre, il suffit d'additionner les deux précédents : $8 + 5 = 13$, $13 = 8 + 5$. Le nombre suivant sera donc $8 + 13 = 21$.

- 2.** Avec 2 et 5 : 2, 5, 7, 12, 19, 31.

Avec 4 et 6 : 4, 6, 10, 16, 26, 42.

- 3.** Pour 1, 2, 3, 5, 8, 13 : $(1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13) \div 4 = 8$.

Pour 2, 5, 7, 12, 19, 31 : $(2 + 5 + 7 + 12 + 19 + 31) \div 4 = 19$.

Activité 1

Pour 4, 6, 10, 16, 26, 42 : $(4 + 6 + 10 + 16 + 26 + 42) \div 4 = 26$.

On peut conjecturer que la somme des 6 nombres divisée par 4 donne le 5^e nombre de la suite.

4.

L'objectif de cette question est d'amener les élèves à utiliser le calcul littéral et d'en percevoir la nécessité pour démontrer la conjecture proposée. Des tests successifs, même nombreux, ne suffiront pas.

On note x et y les deux nombres choisis.

La suite des 6 nombres est donc : $x; y; x + y; x + 2y; 2x + 3y; 3x + 5y$ Ainsi, la somme des 6 nombres est :

$$x + y + (x + y) + (x + 2y) + (2x + 3y) + (3x + 5y) = 8x + 12y = 4(2x + 3y)$$

Et donc, si on divise par 4, on obtient bien le 5^e nombre de la suite des 6 nombres.

La conjecture proposée est donc toujours vraie.

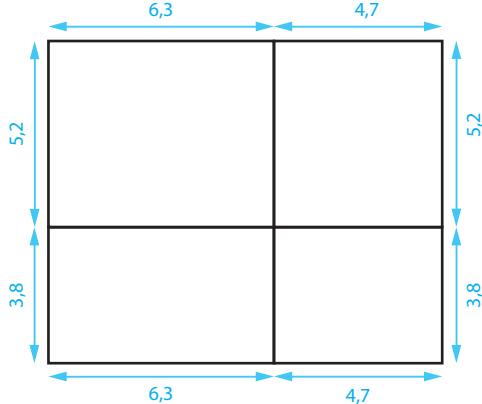
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer la double distributivité.
Les prérequis nécessaires sont de connaître l'aire d'un rectangle et de savoir développer avec la simple distributivité. La capacité introduite est de développer un produit avec la double distributivité.

1. $\mathcal{A} = 6,3 \times 5,2 + 5,2 \times 4,7 + 6,3 \times 3,8 + 3,8 \times 4,7 = 99$

Ainsi l'aire de la figure est de 99 cm^2 .

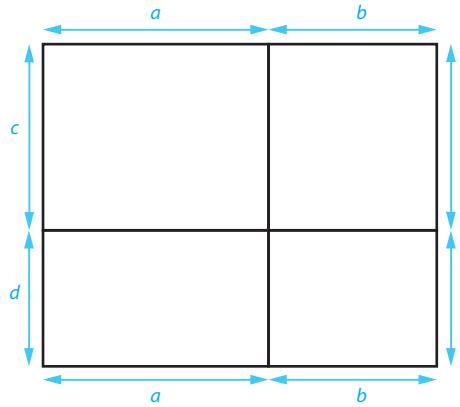
2.



Avec cette nouvelle disposition, on a :

$$\mathcal{A} = (6,3 + 4,7) \times (5,2 + 3,8) = 11 \times 9 = 99 \text{ cm}^2.$$

3. Il suffit de dessiner un rectangle de côtés $a + b$ et $c + d$.



4. a. $k(c + d) = kc + kd$

b. En prenant $k = a + b$, on obtient l'égalité :
 $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$.

c. En développant chaque terme de la somme du 2^e membre de l'égalité, on obtient :
 $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

On appelle cela la double distributivité car on utilise 2 fois la simple distributivité.

Exercices

Simplifier une expression

Questions flash

- 1 a. Faux.
c. Faux.
e. Faux.
b. Vrai.
d. Faux.
f. Faux.

- 2 • $(t + 4)^2$
• $t^2 + 4^2$
• $t \times 4$ ou $4t$

- 3 a. $2k$ avec k entier quelconque.
b. $2k + 1$ avec k entier quelconque.

4 $4 = 2^2$ $25 = 5^2$ $36 = 6^2$ $9 = 3^2$
 $121 = 11^2$ $100 = 10^2$ $0 = 0^2$

- 5 Jade et Jules ont raison.

- 6 a. $10x$
c. $t + 5t^2$
e. $18sz$
g. $xy - y$
b. $4y - 7$
d. n^2
f. $14x^3$
h. $y(x + 1)x^2$

7 A = $3(2x - 5) + 6x^2$
B = $5xy - 4x(y + 2) + 11y$
C = $-6x + 2x^2 + 4(11 + 3x)$
D = $3(2x + 1)^2$
E = $4xy + 2(6x + 7y) - 3xy$

8 A = $6 \times x \times y$
B = $5 \times y \times y$
C = $(7 \times t + 3) \times (2 \times x + 5)$
D = $3 \times (5 \times y - 2) + 2 \times x \times y$

Développer un produit avec la simple distributivité

Questions flash

- 9 a. Vrai.
b. Vrai.
c. Faux.
d. Faux.
e. Vrai.

10

L'objectif ici est de justifier une technique de calcul mental utilisée depuis le cycle 3, en décomposant les nombres et en utilisant le développement.

180 2 929 2 223 1 683

11 A = $-3x - 21$
C = $11x + 55$
E = $-18x - 12x^2$

B = $8x - 12$
D = $2x^2 + 9x$
F = $-20x + 10x^2$

12

$-4(y + 3) + 7y$

$11y + 9 + 6(7 - y)$

$5y^2 - 2y(y - 8)$

$y^2 + 2y + 1 + 3y(6y + 1)$

$3y^2 + 16y$

$19y^2 + 5y + 1$

$3y - 12$

$5y + 51$

13 A = $5x - 3x - 36 = 2x - 36$
B = $3x - 6 + 14x + 28 = 17x + 22$
C = $2x^2 + 4x^2 - 5x = 6x^2 - 5x$
D = $4x^2 - x - 5x^2 - 9x = -x^2 - 10x$

14

$2(b+6) + 7(b-1)$	•	9b + 5
$10(b+9) - 6(7-b)$	•	7b ² + 1
$(b^2+4) - (3-6b^2)$	•	16b + 48
$3(2b+11) + 5(8-3b)$	•	-9b + 73

15

A = $5a + 10 - 6a + 7 - a + 17$
B = $-3b^2 - 7b + 5b - b^2 = -4b^2 - 2b$
C = $-4c - 3c^2 - 9 + 2c - 6c^2 = -9c^2 - 2c - 9$
D = $-5d + 5d^2 - 10d - 42 + 18d = 5d^2 + 3d - 42$

Développer un produit avec la double distributivité

Questions flash

16

Pour A : oui, car c'est un double produit.
Pour B : non, car c'est une somme.
Pour C : non, car c'est une différence.
Pour D : oui, car c'est un double produit.

17

1. $(x+4) \times (x+3) = x \times x + x \times 3 + 4 \times x + 4 \times 3$
2. $(x-5)(x+6) = x \times x + x \times 6 + (-5) \times x + (-5) \times 6$
3. $(x-7)(x-2) = x \times x + x \times (-2) + (-7) \times x + (-7) \times (-2)$
4. $(2x+3)(3x+1) = 2x \times 3x + 2x \times 1 + 3 \times 3x + 3 \times 1$

18

A = $x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$
B = $2x^2 + 4x + 6x + 12 = 2x^2 + 10x + 12$
C = $x^2 + 9x - 7x - 63 = x^2 + 2x - 63$
D = $4x - x^2 - 12 + 3x = -x^2 + 7x - 12$
E = $15x^2 - 21x + 20x - 28 = 15x^2 - x - 28$
F = $-8x + 2x^2 + 32 - 8x = 2x^2 - 16x + 32$

19

1. $(2y-4)(3y+3) = 6y^2 - 6y - 12$
2. $(-y+3)(8-y) = -11y + y^2 + 24$
3. $-(y+6)(2y+4) = -2y^2 - 16y - 24$

20

A = $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2 + 4x + 4$
B = $(y-3)^2 = (y-3)(y-3) = y - 6y + 9$
C = $(3a+4)^2 = (3a+4)(3a+4) = 9a^2 + 24a + 16$
D = $(7-2b)^2 = (7-2b)(7-2b) = 49 - 28b + 4b^2$

21

A = $(2x-3)(7-x) = 14x - 2x^2 - 21 + 3x$
= $-2x^2 + 17x - 21$
B = $(x+y)(2x-y) = 2x^2 - xy + 2xy - y^2$
= $2x^2 - y^2 + xy$
C = $(x-7)(2+y) = 2x + xy - 14 - 7y$
D = $(x-1)(1-x) = x - x^2 - 1 + x = -x^2 + 2x - 1$
E = $3(3a+4)^2 = 3(3a+4)(3a+4)$
= $3(9a^2 + 24a + 16) = 27a^2 + 72a + 48$
F = $-5(4-b)^2 = -5(4-b)(4-b)$
= $-5(16 - 8b + b^2) = -5b^2 + 40b - 80$

Factoriser une somme ou une différence

Questions flash

22

A est le produit de x par la différence de x et de 2.
B est la différence entre le carré de x et 6.
C est le produit de la somme de x et 3 par la différence de x et 5.
D est le carré de la différence entre le double de x et 6.
E est la somme du produit de 7 par le carré de x et de 8.
F est le carré de la somme du quadruple de x de 9.

23

Facteur commun à F : 3
Facteur commun à G : x
Facteur commun à H : x
Facteur commun à I : $x+1$
Facteur commun à J : $2x-1$

24

A = $4(r+t)$
B = $16z$
C = $y(3y+2)$
D = $(x+2)(4x+3)$
E = $(y+6)(-3y+7)$
F = $(x-1)(6x+7)$

25

1. A = $(x+7)(2x-5) - (2x-5)(3x+2)$

A = $(2x-5)(x+7-3x-2)$
A = $(2x-5)(-2x+5)$

2. B = $(4x-3)(2x+1) - 5x(4x-3)$

B = $(4x-3)(2x+1-5x)$

B = $(4x-3)(-x+1)$

C = $(2x-5)(x+2) - (2x-5)(3x-7)$

C = $(2x-5)(x+2-3x+7)$

C = $(2x-5)(-2x+9)$

26

1. D = $5x^2(x-3) - 6x(x+7)$

= $\cancel{x} \times 5x(x-3) - \cancel{x} \times 6(x+7)$
E = $(x+3)(6x+2) - (x+3)^2$

= $\cancel{(x+3)}(6x+2) - \cancel{(x+3)}(x+3)$

F = $(3x+2)(x+5) + 3x+2$
= $\cancel{(3x+2)}(x+5) + \cancel{(3x+2)} \times 1$

G = $(x+1)(4x+5) - x - 1$
= $\cancel{(x+1)}(4x+5) - 1 \times \cancel{(x+1)}$

2. D = $x(5x(x-3) - 6(x+7))$

= $x(5x^2 - 15x - 6x - 42) = x(5x^2 - 21x - 42)$

E = $(x+3)(6x+2 - x - 3) = (x+3)(5x - 1)$

F = $(3x+2)(x+5+1) = (3x+2)(x+6)$

G = $(x+1)(4x+5-1) = (x+1)(4x-4)$

27

(8-3y)(y+5) + (8-3y)(y+6)

2y(y-3) + 14(y-3)

y²(8-3y) + 4(8-3y)

-y(y-3) - y + 3

2(y+7)(y-3)

-(y+1)(y-3)

(y² + 4)(8-3y)

(2y+11)(8-3y)

Problèmes

Une autre présentation

1.

$$\begin{array}{r} 3x & +4 \\ \times & 2x & -5 \\ \hline -15x & -20 \\ 6x^2 & +8x \\ \hline 6x^2 & -7x & -20 \end{array}$$

2. A = $(4x-7)(x+8)$

$$\begin{array}{r} 4x & -7 \\ \times & x & +8 \\ \hline 32x & -56 \\ 4x^2 & -7x \\ \hline 4x^2 & +25x & -56 \end{array}$$

B = $(-2x+3)(x+2)$

$$\begin{array}{r} -2x & +3 \\ \times & x & +2 \\ \hline -4x & +6 \\ -2x^2 & 3x \\ \hline -2x^2 & -x & +6 \end{array}$$

C = $(5x-2)(-2x-1)$

$$\begin{array}{r} 5x & -2 \\ \times & -2x & -1 \\ \hline -5x & +2 \\ -10x^2 & 8x \\ \hline -10x^2 & 3x & +2 \end{array}$$

$$D = (3x - 5)^2$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad -5 \\ \times \quad 3x \quad -5 \\ \hline -15x \quad +25 \\ 9x^2 \quad -15x \\ \hline 9x^2 \quad -30x \quad +25 \end{array}$$

29 Chercher l'intrus

1. L'intrus est $\frac{4n+8}{2} + n - 6$.
2. L'intrus est $3(n+1) - n + 1$.

30 Un calcul avec des grands nombres

1. a. En B2, on doit écrire : =A2+1.
- b. En E2, on doit écrire : =B2*C2-A2*D2.

	A	B	C	D	E
1	n	n+1	n+2	n+3	Programme
2	0	1	2	3	2
3	1	2	3	4	2
4	2	3	4	5	2
5	3	4	5	6	2
6	4	5	6	7	2
7	5	6	7	8	2
8	6	7	8	9	2

2. À la lecture de la feuille de calcul, on peut conjecturer que le programme donnera toujours 2.

Démonstration : On note n le premier entier choisi.

Le programme de calcul se traduit par l'expression littérale $(n+1)(n+2) - n(n+3)$.

Or $(n+1)(n+2) - n(n+3) = n^2 + 2n + n + 2 - n^2 - 3n = 2$.

Donc le programme de calcul donnera toujours 2.

3. $48\ 312\ 345\ 678 \times 48\ 312\ 345\ 679 - 48\ 312\ 345\ 677 \times 48\ 312\ 345\ 680 = 2$: c'est le programme de calcul appliqué au nombre 48 312 345 677 et les trois entiers qui le suivent.

4. Lorsqu'on fait le calcul à la calculatrice, elle affiche 0 : les calculs emploient des nombres trop grands, elle fait donc des approximations.

Le but de cette question est d'amener les élèves à prendre les résultats de la calculatrice avec précaution, à développer leur esprit critique vis-à-vis de l'outil.

31 Vrai ou faux ?

1. ① Vrai. ② Vrai.
③ Vrai. ④ Faux.
2. $12 \times 14 + 1 = 13^2$
3. a. $44 \times 46 + 1 = 45^2$ b. $89 \times 91 + 1 = 90^2$
4. Conjecture : $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$
 $n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1$ et $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Les identités remarquables n'étant plus explicitement au programme, il a été choisi de les traiter au travers de problèmes qui amènent à leur conjecture et leur démonstration. C'est l'objet des trois problèmes suivants : 32, 33 et 34.

32 Remarquable 1

1. $2,3^2 = 5,29$
 $3,7^2 = 13,69$
 $5,29 + 13,69 = 18,98$
 $18,98 + 2 \times 2,3 \times 3,7 = 36$
2. $7,2^2 = 51,84$
 $0,8^2 = 0,64$
 $51,84 + 0,64 = 52,48$
 $52,48 + 2 \times 7,2 \times 0,8 = 64$
3. $5^2 = 25$
 $3^2 = 9$
 $25 + 9 = 34$
 $34 + 2 \times 5 \times 3 = 64$
4. Avec 9 et 1 :
 $9^2 = 81$
 $1^2 = 1$
 $81 + 1 = 82$
 $82 + 2 \times 9 \times 1 = 100$

5. On constate que le programme de calcul donne le carré de la somme des deux nombres.

En effet :

$$(2,3 + 3,7)^2 = 6^2 = 36$$

$$(7,2 + 0,8)^2 = 8^2 = 64$$

$$(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$$

$$(9 + 1)^2 = 10^2 = 100$$

On obtient donc l'égalité suivante : a et b étant deux nombres, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

6. On note a et b les deux nombres choisis.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ car } ab = ba.$$

33 Remarquable 2

1. $8,2^2 = 67,24$
 $3,2^2 = 10,24$
 $67,24 + 10,24 = 77,48$
 $77,48 - 2 \times 8,2 \times 3,2 = 25$

2. Avec 9 et 1 :

$$9^2 = 81$$

$$1^2 = 1$$

$$81 + 1 = 82$$

$$82 - 2 \times 9 \times 1 = 64$$

Avec 10 et 15 :

$$10^2 = 100$$

$$15^2 = 225$$

$$100 + 225 = 325$$

$$325 - 2 \times 10 \times 15 = 25$$

3. On constate que le programme de calcul donne le carré de la différence des deux nombres.

En effet :

$$(8,2 - 3,2)^2 = 5^2 = 25$$

$$(9 - 1)^2 = 8^2 = 64$$

$$(10 - 15)^2 = (-5)^2 = 25$$

On obtient donc l'égalité suivante : a et b étant deux nombres, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

4. On note a et b les deux nombres choisis.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ car } ab = ba.$$

34 Remarquable 3

1. On a $a + b = 11$ et $a - b = 4$.
 Donc, en additionnant les deux égalités, on obtient $2a = 15$.
 Ainsi $a = 7,5$ et $b = 11 - a = 11 - 7,5 = 3,5$.
 $a^2 - b^2 = 7,5^2 - 3,5^2 = 44$

2. Avec $a = 9$ et $b = 1$:

$$a + b = 10 \quad a - b = 8 \quad a^2 - b^2 = 9^2 - 1^2 = 80$$

Avec $a = 5$ et $b = 10$:

$$a + b = 15 \quad a - b = -5$$

$$a^2 - b^2 = 5^2 - 10^2 = -75$$

3. On constate que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

En effet :

$$11 \times 4 = 44$$

$$10 \times 8 = 80$$

$$15 \times (-5) = -75$$

4. On note a et b les deux nombres choisis.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \text{ car } ab = ba.$$

35 Un programme de calcul

1. $(-2 + 4) \times (-2) + 4 = 2 \times (-2) + 4 = 0$
2. $(5 + 4) \times 5 + 4 = 9 \times 5 + 4 = 49$

3. a. Pour le nombre 9 : $(9 + 4) \times 9 + 4 = 13 \times 9 + 4 = 121 = 11^2$
 Pour le nombre 4 : $(4 + 4) \times 4 + 4 = 8 \times 4 + 4 = 36 = 6^2$

- b. Prenons un nombre entier n . Le programme de calcul se modélise par l'expression littérale $(n+4) \times n + 4$.

$$(n+4) \times n + 4 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Donc, quand on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul, on obtient toujours le carré d'un autre nombre entier.

On constate même plus, à savoir que c'est le carré du nombre choisi au départ augmenté de 2.

4. On veut obtenir 1 comme résultat. Or 1 est le carré de 1 et de -1. Il suffit donc de prendre -1 ou -3 comme nombre de départ.

$$\text{En effet : } (-1 + 4) \times (-1) + 4 = 3 \times (-1) + 4 = 1 \\ (-3 + 4) \times (-3) + 4 = 1 \times (-3) + 4 = 1$$

36

Avec des nombres impairs

1. a. En C2, il a écrit « =A2*B2+1 ».

	A	B	C
1	Nombre 1	Nombre 2	Résultat
2	1	3	4
3	3	5	16

- b. En A3, il a écrit « =A2+2 », et en B3, « =B2+2 ».

	A	B	C
1	Nombre 1	Nombre 2	Résultat
2	1	3	4
3	3	5	16
4	5	7	36
5	7	9	64
6	9	11	100
7	11	13	144
8	13	15	196
9	15	17	256
10	17	19	324
11	19	21	400

- c. Pour vérifier qu'un nombre est un multiple de 4, il suffit de vérifier qu'il est divisible par 4, c'est-à-dire que la division par 4 tombe juste. Donc Marvin doit écrire en D2 la division par 4 du résultat, soit la formule « =C2/4 ».

	A	B	C	D
1	Nombre 1	Nombre 2	Résultat	Vérification conjecture
2	1	3	4	1
3	3	5	16	4
4	5	7	36	9
5	7	9	64	16
6	9	11	100	25
7	11	13	144	36
8	13	15	196	49
9	15	17	256	64
10	17	19	324	81
11	19	21	400	100

2. Prenons un nombre impair. Il peut s'écrire sous la forme $2n + 1$ où n est un nombre entier. L'impair consécutif s'écrit alors $2n + 3$.

Le calcul proposé par Marvin s'exprime donc avec l'expression littérale $(2n + 1)(2n + 3) + 1$.

$$\begin{aligned}(2n + 1)(2n + 3) + 1 &= 4n^2 + 6n + 2n + 3 + 1 \\ &= 4n^2 + 8n + 4 \\ &= 4(n^2 + 2n + 1)\end{aligned}$$

C'est donc bien un multiple de 4.

37

Abu-Kamil

1. On note j le nombre de jours travaillés.

Le problème se modélise par l'expression littérale $6j - 4(30 - j) = 0$.

2. $6 \times 20 - 4(30 - 20) = 120 - 4 \times 10 = 80 \neq 0$: le salarié n'a pas pu travailler 20 jours.

$6 \times 10 - 4(30 - 10) = 60 - 4 \times 20 = -20 \neq 0$: le salarié n'a pas pu travailler 10 jours.

3. Pour déterminer le nombre de jours travaillés, il faut résoudre l'équation $6j - 4(30 - j) = 0$.

$$6j - 4(30 - j) = 0$$

$$6j - 120 + 4j = 0$$

$$10j = 120$$

$$j = 12$$

Le salarié a donc travaillé 12 jours durant le mois.

38

Multiple Magic

On note n le nombre choisi.

Le programme appliqué à n donne : $(2n + 5) \times 2 + 2 - n$.

On a donc :

$$\begin{aligned}(2n + 5) \times 2 + 2 - n &= 4n + 10 + 2 - n \\ &= 3n + 12 = 3(n + 4)\end{aligned}$$

On obtient donc un multiple de 3 quel que soit le nombre de départ choisi.

Ce problème peut être aussi mené de façon plus aidée en commençant par faire faire le programme avec différents nombres et en faisant conjecturer la réponse sur ces exemples testés.

39

Circuits de karting

Longueur du circuit de Gaëlle :

Notons D le diamètre du grand cercle.

La longueur du circuit de Gaëlle est égale à :

$$D\pi + (80 - D)\pi = D\pi + 80\pi - D\pi = 80\pi.$$

Longueur du circuit de Maeva :

Notons d le diamètre des cercles.

La longueur du circuit de Maeva est égale à $2 \times d\pi = 2d\pi$.

Or $2d = 80$, donc la longueur du circuit est 80π .

On peut donc en conclure que les deux circuits ont la même longueur.

40

Posologie

1. La posologie n'a pas été respectée pour Joé car une dose de 100 mg lui a été administrée, or il ne faut pas dépasser 70 mg par jour.

$$2. \frac{105 \times 17,5}{3\ 600} \approx 0,71 \text{ m}^2.$$

3. $0,71 \times 70 \approx 50$. La posologie a donc été respectée pour Lou.

41

Devinette

On note a et b les deux nombres dont la somme est égale à 300.

Si on augmente chacun d'eux de 7, on a :

$$\begin{aligned}(a + 7)(b + 7) &= ab + 7a + 7b + 49 \\ &= ab + 7(a + b) + 49 \\ &= ab + 7 \times 300 + 49 = ab + 2\ 149\end{aligned}$$

Leur produit est donc augmenté de 2 149.

42

Les fractales dans l'art

1.

	Longueur d'un côté	Nombre de cotés
Étape 1	$\frac{1}{3}$	4×3
Étape 2	$\frac{1}{3^2}$	$4^2 \times 3$
Étape n	$\frac{1}{3^n}$	$4^n \times 3$

2. Le périmètre de la figure à l'étape n est donc égal à :

$$\frac{1}{3^n} \times 4^n \times 3 = \frac{4^n}{3^{n-1}}.$$

3. Périmètre à la 10^e étape : $\frac{4^{10}}{3^{10-1}} \approx 53$.

$$\text{Périmètre à la 50^e étape : } \frac{4^{50}}{3^{50-1}} \approx 5\ 297\ 343.$$

$$\text{Périmètre à la 100^e étape : } \frac{4^{100}}{3^{100-1}} \approx 9,4 \times 10^{12}.$$

On constate que le périmètre ne cesse d'augmenter, il tend vers un nombre infiniment grand.

Créée en 1904, c'est la première courbe fermée de périmètre infini.

Brevet

43

Toujours positif ?

$$1. (11 - 6) \times 11 + 9 = 5 \times 11 + 9 = 64$$

$$2. (-4 - 6) \times (-4) + 9 = (-10) \times (-4) + 9 = 49$$

3. Notons x le nombre choisi au départ.

Après lui avoir appliqué le programme de calcul, on obtient $(x - 6) \times x + 9$.

Or $(x - 6) \times x + 9 = x^2 - 6x + 9 = (x + 3)^2$. Et un carré est toujours positif, donc Théo a raison.

44

Identiques

$$1. a. (4 + 3)^2 - 4^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$$

$$b. (-5 + 3)^2 - (-5)^2 = (-2)^2 - (-5)^2 = 4 - 25 = -21$$

2. Notons x le nombre choisi au départ.

Avec le programme A, on obtient : $(x + 3)^2 - x^2$.

Avec le programme B, on obtient : $6x + 9$.

$$\text{Or } (x + 3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9.$$

Donc les deux programmes donnent le même résultat, Clément a raison.

- 3.** Notons a le nombre de départ qui permettra d'obtenir 54 comme résultat des deux programmes.

En utilisant le programme B, on voit que a doit vérifier l'égalité $6a + 9 = 54$.

Il ne reste donc qu'à résoudre l'équation $6a + 9 = 54$ pour déterminer a .

$$6a + 9 = 54$$

$$6a = 45$$

$$a = 7,5$$

Ainsi, pour obtenir 54 avec ces deux programmes de calcul, il suffit de prendre 7,5 comme nombre de départ.

45 Distance d'arrêt

- 1.** $D = \frac{5}{18} \times 130 + 0,006 \times 130^2 \approx 138 \text{ m} > 100 \text{ m}$, donc le conducteur ne pourra pas s'arrêter à temps.

- 2.** La formule écrite est $= \frac{5}{18} * A2 + 0,006 * A2^2$.

- 3.** Cette affirmation est inexacte. En effet, à une vitesse de 30 km/h, la distance est de 14 m, et à une vitesse de 60 km/h, la distance est de 38 m, qui n'est pas le double de 14 m.

- 4.** Avec la règle du code de la route, on obtient une distance d'arrêt de 64 m pour une vitesse de 80 km/h. Dans la capture du tableau, on peut lire que la distance sera de 61 m.

Le résultat calculé avec la règle du code de la route est donc bien cohérent avec celui calculé par la formule.

46 Qui a raison ?

Jade : $(4 + 8) \times 3 - 24 - 4 = 12 \times 3 - 24 - 4 = 8$. Jade a donc raison.
Lucas : $(0 + 8) \times 3 - 24 - 0 = 8 \times 3 - 24 - 0 = 0$. Lucas a donc raison.

$$\begin{aligned} \text{Noé : } & (-3 + 8) \times 3 - 24 - (-3) = 5 \times 3 - 24 - (-3) \\ & = -6 \neq -9. \end{aligned}$$

Noé a donc tort.

Yasmine : Notons x le nombre choisi au départ. Une fois le programme appliqué, on obtient $(x + 8) \times 3 - 24 - x$.

Or $(x + 8) \times 3 - 24 - x = 3x + 24 - 24 - x = 2x$. Donc on obtient le double de x , c'est-à-dire du nombre de départ. Yasmine a donc raison.

Algorithmique et outils numériques

47 Programme de calcul et variables

1.

Choisir un nombre

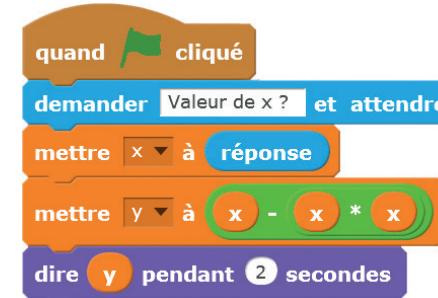
Lui ajouter 2 d'une part et le soustraire à 3 d'autre part
Multiplier les deux nombres obtenus

Retrancher 6 au résultat

$$2. (x + 2)(3 - x) - 6$$

$$3. (x + 2)(3 - x) - 6 = 3x - x^2 + 6 - 2x - 6 = x - x^2$$

4.



Dans ce script, deux variables sont utilisées. On aurait pu n'en utiliser qu'une seule en réutilisant x à la place de y . Mais cette réaffectation peut entraîner des difficultés pour les élèves, qui pourraient ne pas différencier la valeur choisie du résultat.

- 5.** On peut choisir les valeurs 0 et 1. En effet :

$$0 - 0^2 = 0 \text{ et } 1 - 1^2 = 0$$

Les élèves utiliseront le script écrit pour tester des valeurs.

- 6.** Pour déterminer le plus grand résultat possible, on crée une feuille de calcul avec un tableau.

	A	B
1	Valeur de x	Résultat du programme
2	-10	-110
3	-9	-90
4	-8	-72
5	-7	-56
6	-6	-42
7	-5	-30
8	-4	-20
9	-3	-12
10	-2	-6
11	-1	-2
12	0	0
13	1	0
14	2	-2
15	3	-6
16	4	-12
17	5	-20
18	6	-30

Avec cette première feuille, on peut constater que la valeur la plus grande se situe pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1.

On va donc affiner en prenant des valeurs de x plus précises :

	A	B
1	Valeur de x	Résultat du programme
2	0	0
3	0,1	0,09
4	0,2	0,16
5	0,3	0,21
6	0,4	0,24
7	0,5	0,25
8	0,6	0,24
9	0,7	0,21
10	0,8	0,16
11	0,9	0,09
12	1	0

Ainsi, le plus grand résultat possible est 0,25 et il est atteint pour 0,5 comme nombre de départ.

48 Entiers consécutifs

- 1.** En B2 := A2+1
En C2 := A2+B2
En D2 := B2^2-A2^2

Il faut ici veiller à obtenir un résultat positif.

2.

	A	B	C	D
1	Entier	Entier qui suit	Programme I	Programme II
2	0	1	1	1
3	1	2	3	3
4	2	3	5	5
5	3	4	7	7
6	4	5	9	9
7	5	6	11	11
8	6	7	13	13

Les programmes semblent donner le même résultat.

- 3.** Notons n l'entier choisi.

On obtient l'égalité : $n + n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, c'est-à-dire $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

$$\begin{aligned} 4. (n + 1)^2 - n^2 &= (n + 1)(n + 1) - n^2 \\ &= n^2 + n + n + 1 - n^2 = 2n + 1 \end{aligned}$$

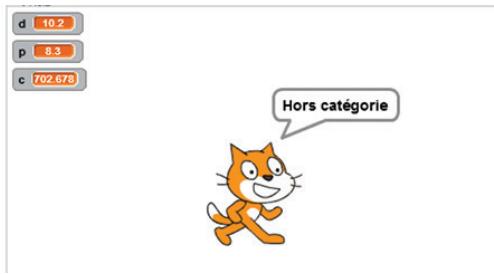
Donc l'égalité est toujours vraie.

$$5. 159 = 158 + 1 = 2 \times 79 + 1.$$

Ainsi $159 = 80^2 - 79^2$.



2. Lorsqu'on lance le script pour la montée du Pla d'Adet, il annonce :



Or, d'après le doc. 3, il est considéré catégorie 1 au Tour de France.

Donc le Tour de France n'emploie pas la même méthode pour classer les ascensions.

Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

- Jade a factorisé.
- $A = 5(x + 6) + 7x(x + 6)$
 $A = 5x + 30 + 7x^2 + 42x$
 $A = 7x^2 + 47x + 30$

Exercice 1

- Jade a factorisé.
- $A = 5(2x - 6) - 7x(2x - 6)$
 $A = 10x - 30 - 14x^2 + 42x$
 $A = -14x^2 + 52x - 30$

Exercice 2

- $(x + 24) + 12 = 3x$
- Pour savoir si Manon est majeure, il faut déterminer son âge, en résolvant l'équation $(x + 24) + 12 = 3x$.
 $(x + 24) + 12 = 3x$
 $x + 36 = 3x$
 $2x = 36$
 $x = 18$
Manon a 18 ans, elle est donc majeure.

Exercice 2

- $(x + 22) + 13 = 2(x + 9)$
- Pour savoir si Manon est majeure, il faut déterminer son âge, en résolvant l'équation $(x + 22) + 13 = 2(x + 9)$.
 $(x + 22) + 13 = 2(x + 9)$
 $x + 35 = 2x + 18$
 $x = 17$
Manon a 17 ans, elle n'est donc pas majeure.

Exercice 3

- $\mathcal{P} = 2(4x + 1 + 2x + 3)$
 $\mathcal{P} = 2(6x + 4)$
 $\mathcal{P} = 12x + 8$
- a. $\mathcal{A} = (4x + 1)(2x + 3)$
b. $\mathcal{A} = (4x + 1)(2x + 3)$
 $\mathcal{A} = 8x^2 + 12x + 2x + 3$
 $\mathcal{A} = 8x^2 + 14x + 3$

Exercice 3

- $\mathcal{P} = 2(3x - 2 + 10 - 2x)$
 $\mathcal{P} = 2(x + 8)$
 $\mathcal{P} = 2x + 16$
- a. $\mathcal{A} = (3x - 2)(10 - 2x)$
b. $\mathcal{A} = (3x - 2)(10 - 2x)$
 $\mathcal{A} = 30x - 6x^2 - 20 + 4x$
 $\mathcal{A} = -6x^2 + 34x - 20$

Analyse d'une production

Lorsque Fanny a développé son expression en utilisant la double distributivité, elle n'a multiplié que les premiers termes entre eux et les seconds entre eux.

La réponse correcte est :

$$(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ».

- Les connaissances et compétences associées sont :
 - mettre un problème en équation (et inéquation) en vue de sa résolution ;
 - résoudre des équations du premier degré ;
 - résoudre des inéquations du premier degré à une inconnue.
- Tout au long du cycle 4, le calcul littéral a montré aux élèves l'intérêt d'utiliser une écriture littérale pour aborder et modéliser des problèmes concrets qui ne seraient pas facilement résolubles sans l'utilisation de celui-ci. Des outils et des règles ont été donnés pour faciliter cette tâche.

Comme dans le chapitre 15, le chapitre « Résolution d'inéquations » va permettre d'aboutir à la résolution de ces problèmes, soit de façon exacte, soit de façon approchée, en les modélisant à l'aide d'équations du 1^{er} degré ou en se ramenant au 1^{er} degré.

De plus, un travail approfondi sur la résolution algébrique des inéquations du 1^{er} degré à une inconnue va permettre de résoudre de nouveaux problèmes se modélisant à l'aide de celles-ci. Cela permettra d'aborder des problèmes de minimum ou de maximum, voire d'optimisation.

- Les outils numériques ont toujours un rôle important à jouer dans ce chapitre, soit pour tester, soit pour conjecturer, soit pour approcher les solutions proposées.

Activités

Questions flash

1. a. $(5 \times 7 - 12) \div 2$ b. $((18 + 14) - 3,5) \times 17$
 2. Il faut partir de 4 : $4 \times 4 - 7 = 16 - 7 = 9$.
 3. a. Faux. b. Vrai.
 4. a. Formule saisie en B2 : « =4*A2-3 ».

- b. Formule saisie en C2 : « =7*A2+6 ».
 c. En observant le tableau, on peut relever que pour -3 , les deux expressions sont égales à -15 . Donc -3 est une solution de l'équation.

Les balances

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de revoir les propriétés de l'égalité vis-à-vis des opérations vues dans le chapitre 15. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des nombres décimaux et de connaître le fonctionnement d'une balance à plateaux.

La capacité introduite est de résoudre une équation.

Avec la première balance, en enlevant 4 pommes de chaque côté, on trouve qu'1 banane pèse autant que 3 pommes.

Activité 1

En utilisant cela dans la deuxième balance, on obtient que 9 pommes et 1 grappe de raisin pèsent autant que 11 pommes, soit 1 grappe de raisin pèse autant que 2 pommes.

Sachant qu'1 pomme pèse 170 g, on en déduit que la grappe de raisin pèse 2×170 g soit 340 g.

On peut aussi résoudre ce problème en modélisant l'équilibre des balances avec des équations, ce qui peut permettre de réintroduire la notion d'inconnue et la modélisation à l'aide d'expressions littérales d'un problème mathématique.

Les températures

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer une propriété liant les inégalités et l'addition. Les prérequis nécessaires sont de connaître l'encadrement d'un nombre, la comparaison, les inégalités. La capacité introduite est de résoudre une inéquation.

1. La température est comprise entre 12 et 13 degrés Celsius : $12 < t < 13$, t étant la température relevée par Lucas.
 2. À 14 h, la température sera comprise entre 17 et 18 degrés Celsius : $17 < t < 18$.

Activité 2

3. a. Si $a < b$ alors $a - b$ est négatif.
 b. $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$
 Comme $a - b$ est négatif, $(a + c) - (b + c)$ l'est aussi. Donc $a + c < b + c$.
 c. Une inégalité reste vraie lorsqu'on ajoute le même nombre à chacun de ses membres.
 4. Durant la nuit, la température sera comprise entre 10 et 11 degrés Celsius : $10 < t < 11$.
 5. Soient a , b et c trois nombres relatifs tels que $a < b$.
 On considère le nombre $(a - c) - (b - c)$.
 $(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b$
 Or $a - b$ est négatif (cf. 3. a.), donc $(a - c) - (b - c)$ aussi.
 Ainsi $a - c < b - c$.

Exercices

Résoudre une équation

Questions flash

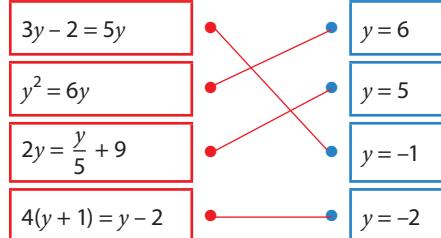
1

	$8x - 7 = 11$	$6y + 4 = 2 - y$	$z^2 - 5 = z$
Inconnue	x	y	z
Membres de l'équation	$8x - 7$ et 11	$6y + 4$ et $2 - y$	$z^2 - 5$ et z
Terme(s) comportant l'inconnue	$8x$	$6y$ dans le premier membre $-y$ dans le second membre	z^2 dans le premier membre z dans le second membre
Terme(s) constant(s)	-7 dans le premier membre 11 dans le second membre	4 dans le premier membre 2 dans le second membre	-5 dans le premier membre

2

- a. Faux, on retranche 5 à chaque membre.
 - b. Faux, on divise chaque membre par 7.
 - c. Vrai.
- 3
- a. Pour résoudre l'équation $x - 5 = 7$, on ajoute 5 à chaque membre.
 - b. Pour résoudre l'équation $6x = 14$, on divise chaque membre par 6.
 - c. Pour résoudre l'équation $\frac{x}{3} = 19$, on multiplie chaque membre par 3.
 - d. Pour résoudre l'équation $x + (-2) = 8$, on soustrait (-2) à chaque membre.

4



5

- a. $-3 + x = 7$
 $x = 7 - (-3)$
 $x = 10$
La solution de l'équation est 10.
- b. $5x = 19$
 $x = 19 \div 5$
 $x = 3,8$
La solution de l'équation est 3,8.
- c. $3x + 7x = 50$
 $10x = 50$
 $x = 50 \div 10$
 $x = 5$
La solution de l'équation est 5.
- d. $x + 8 = 11$
 $x = 11 - 8$
 $x = 3$
La solution de l'équation est 3.
- e. $-2x = 9$
 $x = 9 \div (-2)$
 $x = -4,5$
La solution de l'équation est -4,5.
- f. $-4x + 9x = 45$
 $5x = 45$
 $x = 45 \div 5$
 $x = 9$
La solution de l'équation est 9.

6

1. L'étiquette est $7x = 6$.

2. L'étiquette est $2x = 11$.

7

a. $\frac{5}{3}x = 4$

$$x = 4 \div \frac{5}{3}$$

$$x = 2,4$$

La solution de l'équation est 2,4.

b. $6x - 7 = 8$

$$6x = 8 + 7$$

$$6x = 15$$

$$x = 15 \div 6$$

$$x = 2,5$$

La solution de l'équation est 2,5.

c. $8 - 7x = 57$

$$-7x = 57 - 8$$

$$-7x = 49$$

$$x = 49 \div (-7)$$

$$x = -7$$

La solution de l'équation est -7.

d. $2x - 11 = 7x + 4$

$$2x - 7x = 4 + 11$$

$$-5x = 15$$

$$x = 15 \div (-5)$$

$$x = -3$$

La solution de l'équation est -3.

e. $6 - 3x = 15 + 4x$

$$-3x - 4x = 15 - 6$$

$$-7x = 9$$

$$x = 9 \div (-7)$$

$$x = -\frac{9}{7}$$

La solution de l'équation est $-\frac{9}{7}$.

8

1. $6(x - 2) - 4x + 92 = 6x - 12 - 4x + 92 = 2x + 80$

2. $6(x - 2) - 4x + 92 = 17$

$$2x + 80 = 17$$

$$2x = 17 - 80$$

$$2x = -63$$

$$x = -31,5$$

La solution de l'équation est -31,5.

9

1. $4(x - 5) = 4x - 20$

$$6(-x + 2) = -6x + 12$$

2. $4(x - 5) = 6(-x + 2)$

$$4x - 20 = -6x + 12$$

$$4x + 6x = 12 + 20$$

$$10x = 32$$

$$x = 3,2$$

La solution de l'équation est 3,2.

10

$3(7 - 2x) - 5(2x + 1) = 3 \times 7 - 3 \times 2x - 5 \times 2x - 5 = 16 - 16x$

Résoudre $3(7 - 2x) - 5(2x + 1) = 0$ revient à résoudre $16 - 16x = 0$.

$$16 - 16x = 0$$

$$16x = 16$$

$$x = 16 \div 16$$

$$x = 1$$

1 est donc solution de cette équation.

11

$-4(y + 3) = 7y$

$11y + 9 + 6(7 - y) = 3$

$2y^2 - 2y(y - 8) = 13$

$y^2 + 2y + 1 + 3y(6y + 1) = 19y^2$

$16y = 13$

$5y + 1 = 0$

$11y = -12$

$5y + 48 = 0$

Résoudre une inéquation

Questions flash

12

	$2x < 3$	$4y + 7 \leq 5y$	$z - 5 \geq 2z + 3$
Inconnue	x	y	z
Membres de l'inéquation	$2x$ et 3	$4y + 7$ et $5y$	$z - 5$ et $2z + 3$
Terme(s) comportant l'inconnue	$2x$	$4y$ dans le premier membre $5y$ dans le second membre	z dans le premier membre $2z$ dans le second membre
Terme(s) constant(s)	3 dans le second membre	7 dans le premier membre	-5 dans le premier membre 3 dans le second membre

13

- Les nombres x tels que $x > -5$ sont tous les nombres strictement supérieurs à -5 .
- Les nombres x tels que $x \leq -5$ sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -5 .
- Les nombres x tels que $x < -5$ sont tous les nombres strictement inférieurs à -5 .
- Les nombres x tels que $x \geq -5$ sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -5 .

14

1. 1 3. 3 0
2. -5 4. -6

15

- a. $x + 3 < 7$
 $x + 3 - 3 < 7 - 3$
 $x < 4$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 4 .
- b. $x + 1 \geq -8$
 $x + 1 - 1 \geq -8 - 1$
 $x \geq -9$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -9 .
- c. $9 + x > 3$
 $9 + x - 9 > 3 - 9$
 $x > -6$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à -6 .
- d. $x - 6 \leq 4$
 $x - 6 + 6 \leq 4 + 6$
 $x \leq 10$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à 10 .

16

- a. $5x > 12$
 $5x \div 5 > 12 \div 5$
 $x > 2,4$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à $2,4$.
- b. $2x < -10$
 $2x \div 2 < -10 \div 2$
 $x < -5$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à -5 .
- c. $-3x \leq 12$
 $-3x \div (-3) \geq 12 \div (-3)$
 $x \geq -4$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -4 .
- d. $-7x > -21$
 $-7x \div (-7) < -21 \div (-7)$
 $x < 3$
 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 3 .

e. $-x < 11$

$$-x \div (-1) > 11 \div (-1)$$

$$x > -11$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à -11 .

f. $-8x \geq -4$

$$-8x \div (-8) \leq -4 \div (-8)$$

$$x \leq 0,5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $0,5$.

17 1. $2x > 9$

2. $-4x \leq 15$

18 a. $2x + 5 > 10$

$$2x + 5 - 5 > 10 - 5$$

$$2x > 5$$

$$2x \div 2 > 5 \div 2$$

$$x > 2,5$$

Tous les nombres strictement supérieurs à $2,5$ sont les solutions de l'inéquation.

b. $5x - 7 \leq 8$

$$5x - 7 + 7 \leq 8 + 7$$

$$5x \leq 15$$

$$5x \div 5 \leq 15 \div 5$$

$$x \leq 3$$

Tous les nombres inférieurs ou égaux à 3 sont les solutions de l'inéquation.

c. $-3x + 4 < 13$

$$-3x + 4 - 4 < 13 - 4$$

$$-3x < 9$$

$$-3x \div (-3) > 9 \div (-3)$$

$$x > -3$$

Tous les nombres strictement supérieurs à -3 sont les solutions de l'inéquation.

d. $-x + 7 \geq -12$

$$-x + 7 - 7 \geq -12 - 7$$

$$-x \geq -19$$

$$-x \div (-1) \leq -19 \div (-1)$$

$$x \leq 19$$

Tous les nombres inférieurs ou égaux à 19 sont les solutions de l'inéquation.

19 a. $x + 1 < 3 - 2x$

$$x + 1 - 1 < 3 - 2x + 1$$

$$x < 4 - 2x$$

$$x + 2x < 4 - 2x + 2x$$

$$3x < 4$$

$$3x \div 3 < 4 \div 3$$

$$x < \frac{4}{3}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{4}{3}$.

b. $-x + 12 \leq x + 14$

$$-x + 12 - 12 \leq x + 14 - 12$$

$$-x \leq x + 2$$

$$-x - x \leq x + 2 - x$$

$$-2x \leq 2$$

$$-2x \div (-2) \geq 2 \div (-2)$$

$$x \geq -1$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -1 .

c. $5x - 4 \geq 2x + 11$

$$5x - 4 + 4 \geq 2x + 11 + 4$$

$$5x \geq 2x + 15$$

$$5x - 2x \geq 2x + 15 - 2x$$

$$3x \geq 15$$

$$3x \div 3 \geq 15 \div 3$$

$$x \geq 5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 5 .

d. $-7x + 6 \geq 3x$

$$-7x + 6 + 7x \geq 3x + 7x$$

$$6 \geq 10x$$

$$6 \div 10 \geq 10x \div 10$$

$$0,6 \geq x$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $0,6$.

20 1. $2(x - 1) - 3x + 7 = 2x - 2 - 3x + 7 = -x + 5$
2. $2(x - 1) - 3x + 7 > 6$

$$\begin{aligned} -x + 5 &> 6 \\ -x + 5 - 5 &> 6 - 5 \\ -x &> 1 \\ -x \div (-1) &< 1 \div (-1) \\ x &< -1 \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à -1 .

21 1. $5(x - 4) = 5x - 20$
 $3(-x + 4) = -3x + 12$

$$\begin{aligned} 2. 5(x - 4) &\leqslant 3(-x + 4) \\ 5x - 20 &\leqslant -3x + 12 \\ 5x - 20 + 20 &\leqslant -3x + 12 + 20 \\ 5x &\leqslant -3x + 32 \\ 5x + 3x &\leqslant -3x + 32 + 3x \\ 8x &\leqslant 32 \\ 8x \div 8 &\leqslant 32 \div 8 \\ x &\leqslant 4 \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à 4 .

22 $2(6 - 3x) - 4(x + 5) < 0$

$$\begin{aligned} 12 - 6x - 4x - 20 &< 0 \\ -8 - 10x &< 0 \\ -8 &< 10x \\ -8 \div 10 &< 10x \div 10 \\ -0,8 &< x \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à $-0,8$.

Modéliser une situation

Questions flash

23 a. $x + 7$
b. $x - 10$
c. $4x$
d. $x \div 2$
e. $2x + 3$

24 a. $2x > 13$
b. $\frac{x}{3} \geqslant 5$
c. $x + 7 \leqslant 16$
d. $x - 8 < 3$
e. $\frac{x}{4} + 1 \leqslant -2$

25 1. $3x + 5$

2. Trouver le nombre qui permet d'obtenir 32 revient à résoudre l'équation $3x + 5 = 32$.

$$3x + 5 = 32$$

$$3x = 27$$

$$x = 9$$

On doit choisir 9 si l'on veut obtenir 32.

3. Le problème se modélise par l'équation $3x + 5 = 2x$

$$3x + 5 = 2x$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

Pour obtenir le double du nombre de départ, il faut choisir -5 .

26 Le problème se modélise par l'inéquation $2x + 7 > 0$, où x est le nombre de départ.

$$2x + 7 > 0$$

$$2x > -7$$

$$x > -3,5$$

On peut donc dire que le nombre de départ est un nombre strictement supérieur à $-3,5$.

27 Le problème se modélise par $7x - 3 = 3x + 13$, où x est le nombre cherché.

$$7x - 3 = 3x + 13$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

Ainsi le nombre recherché est 4.

28 En notant n la note à obtenir à la prochaine évaluation, le problème se modélise par $(12,5 + n) \div 2 \geqslant 14$

$$(12,5 + n) \div 2 \geqslant 14$$

$$12,5 + n \geqslant 28$$

$$n \geqslant 15,5$$

Salomé doit donc obtenir au moins 15,5 sur 20 à sa prochaine évaluation.

29 Pour simplifier l'exercice, on peut considérer que le tour de piste a pour longueur 1 km et noter v la vitesse moyenne des quatre derniers tours de piste en km/h (on peut aussi exprimer la vitesse en nombre de tours par heure).

$$\text{Le temps de parcours des deux premiers tours est } t = \frac{2}{170} \text{ h.}$$

$$\text{Le temps de parcours des quatre derniers tours est } t = \frac{4}{v} \text{ h.}$$

La vitesse moyenne sur l'ensemble de la course est donc égale à $\frac{6}{\frac{2}{170} + \frac{4}{v}}$.

La situation peut donc être modélisée par l'inéquation :

$$\frac{6}{\frac{2}{170} + \frac{4}{v}} \geqslant 200.$$

$$\frac{6}{\frac{2}{170} + \frac{4}{v}} \geqslant 200$$

$$\frac{6}{2v + 4 \times 170} \geqslant 200$$

$$170v$$

$$\frac{6 \times 170v}{2v + 680} \geqslant 200$$

$$1020v \geqslant 200(2v + 680)$$

$$620v \geqslant 136\,000$$

$$v \geqslant \frac{136\,000}{670}$$

Le pilote doit donc conserver une vitesse moyenne d'au moins 220 km/h sur les quatre derniers tours.

On peut inviter certains élèves fragiles à suivre une démarche plus simple.

Si la vitesse moyenne sur l'ensemble de la course est de 200 km/h, le temps de parcours global en heures doit être égal à $t = \frac{d}{v} = \frac{6}{200} = 0,03$.

Le temps de parcours sur les deux premiers tours est $t = \frac{2}{170} \approx 0,011\,76$ donc le temps de parcours sur les

quatre derniers tours doit être environ de :

$$0,03 - 0,011\,76 = 0,018\,24 \text{ h.}$$

La vitesse doit donc être au moins égale à :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{4}{0,018\,24} \approx 219,3$$

Le pilote doit donc rouler à au moins 220 km/h sur les quatre derniers tours.

Problèmes

Économies

En notant x le prix d'un CD, le problème se modélise par l'équation $2x + 14 = 4x - 18$.

$$2x + 14 = 4x - 18$$

$$2x = 32$$

$$x = 16$$

Ainsi, le CD coûte 16 € et Axel dispose de $2 \times 16 + 14 = 46$ €.

Partage

En notant x la part de la première personne, le problème se modélise par l'équation :

$$\begin{aligned} x + (x + 3) + ((x + 3) + 3) + (((x + 3) + 3) + 3) \\ + (((((x + 3) + 3) + 3) + 3) + 3) = 100. \end{aligned}$$

$$x + (x + 3) + ((x + 3) + 3) + (((x + 3) + 3) + 3) + (((((x + 3) + 3) + 3) + 3) + 3) = 100$$

$$5x + 10 \times 3 = 100$$

$$5x = 70$$

$$x = 14$$

Ainsi, la première personne a 14 €, la 2^e 17 €, la 3^e 20 €, la 4^e 23 € et la 5^e 26 €.

32 Futs de vin

En notant c la capacité du petit fut, le problème se modélise par l'équation $20c + 40(c + 171) = 10\ 260$.

$$20c + 40(c + 171) = 10\ 260$$

$$20c + 40c + 6\ 840 = 10\ 260$$

$$60c = 3\ 420$$

$$c = 57$$

Ainsi, le petit fut a une capacité de 57 L et le grand de 228 L.

33 Ça vente !

On note v la vitesse minimale de l'avion sur les 1 250 kilomètres restants.

La situation se modélise par l'inéquation : $\frac{2\ 200 + 1\ 250}{\frac{2\ 200}{1\ 000} + \frac{1\ 250}{v}} > 950$.

$$\frac{3\ 450v}{2,2v + 1\ 250} > 950$$

$$3\ 450v > 950(2,2v + 1\ 250)$$

$$3\ 450v > 2\ 090v + 11\ 875\ 000$$

$$1\ 360v > 11\ 875\ 000$$

$$\text{Ainsi } v > \frac{11\ 875\ 000}{1\ 360}$$

L'avion doit voler à au moins 873,2 km/h.

34 Au volant, toujours attentif !

$$v = 50 \text{ km/h} = 50\ 000 \text{ m/h} = 50\ 000 \div 3\ 600 \text{ m/s} = \frac{125}{9} \text{ m/s}$$

En notant t la durée maximale en secondes d'inattention du conducteur, le problème se modélise par l'inéquation :

$$\frac{125}{9}(t + 1) + 14 < 40.$$

$$\frac{125}{9}(t + 1) + 14 < 40$$

$$\frac{125}{9}(t + 1) < 26$$

$$t + 1 < 1,872$$

$$t < 0,872$$

Ainsi, le conducteur ne doit pas être inattentif plus de 0,872 s'il veut éviter l'impact.

35 Parc d'attraction

En notant n le nombre d'entrées achetées, le cout de la formule LOOPING est donné par l'expression littérale $60 + 25n$ et celui de la formule Ti'Fou par la formule $95 + 15n$.

Le problème se ramène donc à résoudre l'inéquation :

$$60 + 25n < 95 + 15n.$$

$$60 + 25n < 95 + 15n$$

$$10n < 35$$

$$n < 3,5$$

Ainsi, la formule LOOPING est la plus avantageuse jusqu'à 3 places achetées.

36 Alors, combien ?

En notant n le nombre de caisses qu'Antoine peut transporter, le problème se modélise par l'inéquation $0,125n + 10 \leqslant 16$.

$$0,125n + 10 \leqslant 16$$

$$0,125n \leqslant 6$$

$$n \leqslant 48$$

Ainsi, Antoine ne doit pas transporter plus de 48 caisses s'il veut pouvoir passer sur le pont.

37 Prix de revient

En notant n le nombre d'exemplaires de livres à livrer, le problème se modélise par l'inéquation $3\ 200 + \frac{n - 1500}{100} \times 89 < 1,80 \times n$.

$$3\ 200 + \frac{n - 1500}{100} \times 89 < 1,80 \times n$$

$$3\ 200 + 0,89n - 1\ 335 < 1,8n$$

$$0,91n > 1\ 865$$

$$n > \frac{186\ 500}{91}$$

$\frac{186\ 500}{91} \approx 2\ 049$, il faut donc livrer au moins 2 050 exemplaires

pour que leur cout de revient soit inférieur à 1,80 €.

Comme le cout de l'impression est donné par centaine d'exemplaires supplémentaires, on peut aussi attendre comme réponse qu'il faut acheter 6 centaines supplémentaires soit 2 100 livres.

38 Rectangles dans un rectangle

1. En notant x la longueur AM, le problème se modélise par l'équation $(2 + x) \times 2 = ((15 - x) + 3) \times 2$.

$$(2 + x) \times 2 = ((15 - x) + 3) \times 2$$

$$4 + 2x = 36 - 2x$$

$$4x = 32$$

$$x = 8$$

Ainsi, les deux périmètres seront égaux lorsque le point M sera placé à 8 unités de A.

2. En notant x la longueur AM, le problème se modélise par l'équation $2x = (15 - x) \times 3$.

$$2x = (15 - x) \times 3$$

$$2x = 45 - 3x$$

$$5x = 45$$

$$x = 9$$

Ainsi, les deux aires seront égales lorsque le point M sera placé à 9 unités de A.

39 Nombre mystère

On note x le nombre de départ.

La situation se modélise par l'équation $2x + 15 = 9x - 1$.

$$2x + 15 = 9x - 1$$

$$7x = 16$$

$$\text{Ainsi } x = \frac{16}{7}. \text{ Le nombre mystère est } \frac{16}{7}.$$

40 Avec des fractions

En notant n ce nombre, le problème se modélise par l'équation :

$$\frac{3+n}{7+n} = 2 \times \frac{3}{7}.$$

$$\frac{3+n}{7+n} = 2 \times \frac{3}{7}$$

$$\frac{3+n}{7+n} = \frac{6}{7}$$

$$7(3+n) = 6(7+n)$$

$$21 + 7n = 42 + 6n$$

$$n = 21$$

Il faut donc ajouter 21 au numérateur et au dénominateur de

$$\frac{3}{7} \text{ pour en obtenir le double.}$$

41 Équations « produit nul »

1. Le produit $7 \times x$ est nul pour $x = 0$.

2. Le produit $7 \times (x - 3)$ est nul pour $x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.

3. On peut en déduire que $a = 0$ ou $b = 0$.

4. Le produit $(x - 8)(2x - 1) = 0$ est nul pour $x - 8 = 0$ ou

$$2x - 1 = 0, \text{ c'est-à-dire pour } x = 8 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

42 Le triangle égyptien

1. On note n la mesure du plus petit côté.

Alors les deux autres côtés ont pour mesure $n + 1$ et $n + 2$.

Pour que le triangle soit rectangle, il faut que l'égalité de Pythagore soit vérifiée. Le problème se modélise donc par l'équation $(n + 2)^2 = n^2 + (n + 1)^2$.

$$(n + 2)^2 = n^2 + (n + 1)^2$$

$$n^2 + 4n + 4 = n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

Le problème se modélise donc par l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$.

$$(n + 1)(n - 3) = n^2 - 3n + n - 3 = n^2 - 2n - 3$$

Le problème se modélise donc par l'équation :

$$(n + 1)(n - 3) = 0.$$

Or $(n + 1)(n - 3) = 0$ lorsque $n + 1 = 0$ ou $n - 3 = 0$, c'est-à-dire lorsque $n = -1$ ou $n = 3$.

Ainsi, une seule solution est valable pour la mesure du petit côté du triangle, soit 3. Et donc, un seul triangle répond au problème : le triangle égyptien.

43 Square and cube

En notant n le nombre cherché, le problème se modélise par l'équation $n^2 = 3n^3$.

$$n^2 = 3n^3$$

$$3n^3 - n^2 = 0$$

$$n^2(3n - 1) = 0$$

Or, $n^2(3n - 1) = 0$ lorsque $n = 0$ ou $3n - 1 = 0$, c'est-à-dire lorsque

$$n = 0 \text{ ou } n = \frac{1}{3}. \text{ Le nombre peut donc être } 0 \text{ ou } \frac{1}{3}.$$

44 Sangaku

1. On note r le rayon des quatre cercles identiques.

O est le centre du carré EFGH, donc $PO = r$.

De plus, le triangle rouge est rectangle, donc l'égalité de Pythagore est vérifiée. Ainsi, $(r + 1)^2 = 2r^2$.

$$(r + 1)^2 = 2r^2$$

$$r^2 + 2r + 1 = 2r^2$$

$$r^2 - 2r - 1 = 0$$

Le rayon doit donc vérifier l'équation $r^2 - 2r - 1 = 0$.

- 2.

	A	B
1	r	$r^2 - 2r - 1$
2	0	-1
3	0,5	-1,75
4	1	-2
5	1,5	-1,75
6	2	-1
7	2,1	-0,79
8	2,2	-0,56
9	2,3	-0,31
10	2,4	-0,04
11	2,5	0,25
12	2,6	0,56
13	2,7	0,89

Le rayon est donc compris entre 2,4 et 2,5 cm.

3. Le rayon du grand cercle est égal à $2r + 1$ donc il est compris entre 5,8 et 6 cm. Cet encadrement n'étant pas au millimètre près, il faut affiner celui de r .

	A	B
1	r	$r^2 - 2r - 1$
2	0	-1
3	0,5	-1,75
4	1	-2
5	1,5	-1,75
6	2	-1
7	2,1	-0,79
8	2,2	-0,56
9	2,3	-0,31
10	2,4	-0,04
11	2,45	0,1025
12	2,5	0,25
13	2,6	0,56
14	2,7	0,89

Ici, on déduit que r est compris entre 2,4 et 2,45 cm, donc le rayon du grand cercle est compris entre 5,8 et 5,9 cm.

45 Le pylône brisé

1. Pour que le camion nacelle convienne, il faut que la cassure soit au maximum à 20 m du sol.

On note h la hauteur jusqu'à la cassure. Il faut donc que $h < 20$.

Le pylône brisé forme un triangle rectangle avec le sol, donc l'égalité de Pythagore est vérifiée.

Ainsi, $(50 - h)^2 = 15^2 + h^2$.

$$(50 - h)^2 = 15^2 + h^2$$

$$2500 - 100h + h^2 = 225 + h^2$$

$$100h = 2275$$

$$h = 22,75 > 20$$

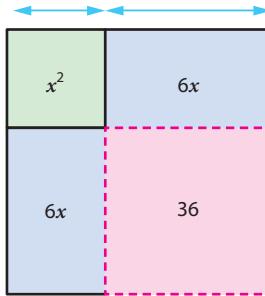
Donc le camion nacelle n'est pas suffisamment haut.

En revanche, la grue convient car $h < 30$.

2. D'après la question 1., les engins doivent avoir une hauteur minimale de 22,75 m.

46 La méthode d'Al Khwarizmi

- 1.

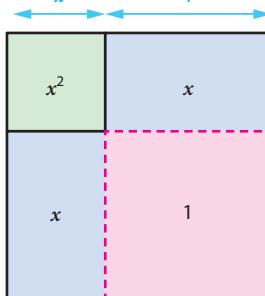


L'ensemble a pour aire $x^2 + 12x + 36$, soit $85 + 36 = 121$.

Ainsi, le grand carré a pour côté 11.

x vaut donc 5.

- 2.



L'ensemble a pour aire $x^2 + 2x + 1$, soit $8 + 1 = 9$.

Ainsi, le grand carré a pour côté 3.

x vaut donc 2.

47 Quitte ou triple

On note n le nombre de jetons de Jules avant de commencer à jouer.

Après la première partie gagnée, Jules a $3n - 12$ jetons. Après la deuxième partie gagnée, il en a $3(3n - 12) - 12$. Et après la troisième, il en a $3(3(n - 12) - 12) - 12$.

Le problème se modélise donc par l'équation :

$$3(3(n - 12) - 12) - 12 = 87.$$

$$3(3(n - 12) - 12) - 12 = 87$$

$$3(3(n - 12) - 12) = 99$$

$$3(3n - 36 - 12) = 99$$

$$9n - 144 = 99$$

$$9n = 243$$

$$n = 27$$

Ainsi, Jules avait 27 jetons avant de commencer à jouer.

48 Essence ou diesel ?

1. La voiture diesel consomme 4,1 L/100 km soit 0,041 L par kilomètre. De plus, le diesel coûte 1,109 € le litre, donc chaque kilomètre coûte $0,041 \times 1,109 = 0,045\,469$ €.

La voiture essence consomme 5,6 L/100 km soit 0,056 L par kilomètre. De plus, l'essence coûte 1,287 € le litre, donc chaque kilomètre coûte $0,056 \times 1,287 = 0,072\,072$ €.

En notant k le nombre de kilomètres parcourus, l'achat du véhicule diesel sera rentabilisé lorsque $20\,000 + 0,045\,469k < 18\,450 + 0,072\,072k$.

$$20\,000 + 0,045\,469k < 18\,450 + 0,072\,072k$$

$$0,026\,603k > 1\,550$$

$$k > 1\,550 \div 0,026\,603$$

$$1\,550 \div 0,026\,603 \approx 58\,264, \text{ l'achat sera rentabilisé à partir de } 58\,265 \text{ km.}$$

2. Jocelyn parcourt 12 000 km par an.

$$(58\,265 \div 12\,000) \times 12 \approx 58,26$$

Donc, l'achat du véhicule diesel sera rentabilisé au 59^e mois.

49 Mathilde et Paul

- La formule est : $=B1*9-8$.
- La formule est : $=B1*(-3)+31$.
- Au vu du tableau, le nombre pour que les deux programmes donnent le même résultat est compris entre 3 et 4.
- Le problème revient à résoudre l'équation : $9x - 8 = -3x + 31$, où x est le nombre cherché.
 $9x - 8 = -3x + 31$
 $12x = 39$
 $x = 3,25$
Le nombre cherché est 3,25.
La conjecture précédente est exacte.

50 Nombre mystère

En notant x le nombre mystère, le problème se modélise par l'équation $(x - 10)^2 - x^2 = -340$.
 $(x - 10)^2 - x^2 = -340$
 $x^2 - 20x + 100 - x^2 = -340$
 $-20x + 100 = -340$
 $-20x = -440$
 $x = 22$

Le nombre mystère est 22.

51 Hexagone non régulier

On note c la mesure du côté des petits triangles.
Le problème revient à résoudre l'équation :
 $3 \times 3c = 3c + 3 \times (6 - 2c)$.
 $3 \times 3c = 3c + 3 \times (6 - 2c)$
 $9c = 3c + 18 - 6c$
 $12c = 18$
 $c = 1,5$
Ainsi, la mesure du côté des petits triangles est 1,5 cm.

52 Des aires égales

- Aire de ABCD = $40 \times 40 = 1\ 600 \text{ cm}^2$.
- Aire de DEFG = $(40 - 15)(40 + 25) = 25 \times 65 = 1\ 625 \text{ cm}^2$.
- En notant ℓ la longueur AB, le problème se modélise par l'équation $\ell^2 = (\ell - 15)(\ell + 25)$.
 $\ell^2 = (\ell - 15)(\ell + 25)$
 $\ell^2 = \ell^2 + 25\ell - 15\ell - 375$
 $10\ell = 375$
 $\ell = 37,5$
Pour que l'aire du carré soit égale à celle du rectangle, il faut que AB = 37,5 cm.

53 La ficelle

- $V = \pi \times 0,5^2 \times h = 0,25\pi \times h$
- Sachant que le volume de la boule de rayon 30 cm est égal à $\frac{4}{3}\pi \times 300^3 = 36\ 000\ 000\pi$, le problème se modélise par l'équation $0,25\pi \times h = 36\ 000\ 000\pi$.
 $0,25\pi \times h = 36\ 000\ 000\pi$
 $h = 144\ 000\ 000$
Ainsi, la hauteur de la ficelle (c'est-à-dire sa longueur) est de 144 000 000 mm soit 144 km.

Algorithmique et outils numériques

54 Les jardins de Kiftsgate Court

- On note x la largeur de la bordure en centimètres.
L'aire de l'ilot s'exprime à l'aide de l'expression littérale : $(1\ 000 - 2x)(750 - 2x)$
L'aire de la surface recouverte d'eau s'exprime à l'aide de l'expression littérale :
 $750 \times 1\ 000 - (1\ 000 - 2x)(750 - 2x)$
Ainsi, comme on souhaite que ces deux aires soient égales, le problème se modélise par l'équation :
 $(1\ 000 - 2x)(750 - 2x) = 750 \times 1\ 000 - (1\ 000 - 2x)(750 - 2x)$
 $(1\ 000 - 2x)(750 - 2x) = 750 \times 1\ 000 - (1\ 000 - 2x)(750 - 2x)$
 $= 750\ 000 - 2\ 000x - 1\ 500x + 4x^2$
 $= 750\ 000 - (750\ 000 - 2\ 000x - 1\ 500x + 4x^2)$

$$750\ 000 - 3\ 500x + 4x^2 = 2\ 000x + 3\ 500x - 4x^2$$

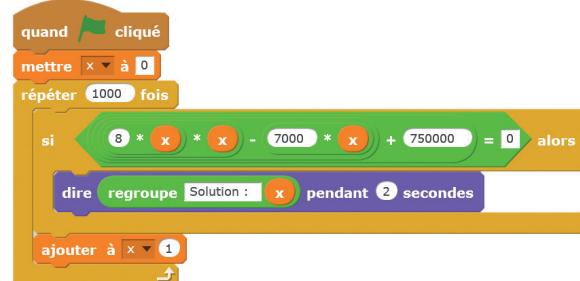
$$8x^2 - 7\ 000x + 750\ 000 = 0$$

Ainsi, le problème se modélise par l'équation :

$$8x^2 - 7\ 000x + 750\ 000 = 0$$

- Clarisse choisit ces valeurs car le plan d'eau qu'elle veut créer a une longueur de 1 000 cm.

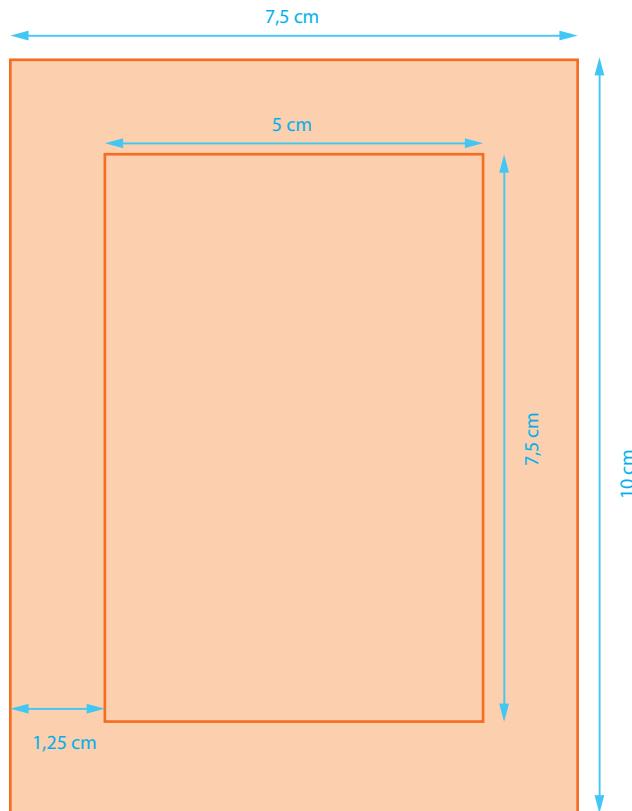
b.



Le script précédent affiche deux nombres qui sont tous les deux solutions de l'équation $8x^2 - 7\ 000x + 750\ 000 = 0$: 125 et 750.

- a. La valeur 750 ne fournit pas de solution satisfaisante car, si la largeur de la bordure avait une largeur de 750 cm, elle occuperait tout le plan d'eau et il n'y aurait pas d'ilot central. La bordure doit donc avoir une largeur de 125 cm.

- b. On peut prendre, par exemple, pour échelle $\frac{1}{100}$:



55 Volume d'un cône

- La hauteur du cône est comprise entre 0 et 10 cm.

- a. Le triangle SOM est rectangle en M. Donc la longueur du rayon peut se déterminer grâce à la hauteur et à la génératrice en utilisant le théorème de Pythagore. Ainsi Rayon² = 10² - h².

La formule à saisir dans B2 est donc « =10^2-A2^2 ».

- b. La formule en C2 est « =(PI() * B2 * A2) / 3 ».

La formule pour insérer π dans un calcul du tableau n'est pas forcément connue. Ne pas hésiter à la redonner.

	A	B	C
1	Hauteur	Rayon ²	Volume
2	0	100	0
3	0,5	99,75	52,2289779
4	1	99	103,672558
5	1,5	97,75	153,545341
6	2	96	201,06193
7	2,5	93,75	245,436926
8	3	91	285,884931
9	3,5	87,75	321,620548
10	4	84	351,858377
11	4,5	79,75	375,813021
12	5	75	392,699082
13	5,5	69,75	401,731161
14	6	64	402,12386
15	6,5	57,75	393,091781
16	7	51	373,849526
17	7,5	43,75	343,611696
18	8	36	301,592895
19	8,5	27,75	247,007722
20	9	19	179,070781
21	9,5	9,75	96,9966732
22	10	0	0

- d. Les hauteurs qui répondent au problème sont les hauteurs comprises entre 0 et 2 cm et celles comprises entre 9 et 10 cm.

56 Un programme de calcul

- a. Pour $x = 0$, ce script donne -2 .
 Pour $x = 4$, ce script donne 24 .
 Pour $x = 16$, ce script donne 504 .
- b. Pour que ce script donne 0 , il faut que $x^2 - 2 = 0$, avec $x < 2$ ou $2x^2 - 8 = 0$, avec $x \geq 2$.
 Or : $x^2 - 2 = 0$ pour $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ et $2x^2 - 8 = 0$ pour $x = 2$ ou $x = -2$.
 Donc des nombres pour lesquels ce script donne 0 sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ et 2 .



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

C'est Yasmine qui a raison : on ajoute -5 à chaque membre, l'inégalité ne change pas de sens.

Exercice 1

C'est Noé qui a raison : on multiplie par -1 chaque membre, l'inégalité change de sens.

Exercice 2

En notant v la vitesse, le problème se modélise par l'inéquation

$$\frac{2 \times 270 + 4 \times v}{6} \geq 300.$$

$$\frac{2 \times 270 + 4 \times v}{6} \geq 300$$

$$540 + 4v \geq 1800$$

$$4v \geq 1260$$

$$v \geq 315$$

Le pilote doit donc conserver une vitesse minimale de 315 km/h sur les quatre derniers tours.

Exercice 2

En notant v la vitesse, le problème se modélise par l'inéquation

$$\frac{3 \times 290 + 5 \times v}{8} \geq 310.$$

$$\frac{3 \times 290 + 5 \times v}{8} \geq 310$$

$$870 + 5v \geq 2480$$

$$5v \geq 1610$$

$$v \geq 322$$

Le pilote doit donc conserver une vitesse minimale de 322 km/h sur les cinq derniers tours s'il veut se qualifier. Or, il roule au maximum à 320 km/h, donc il ne réussira pas à se qualifier pour la course.

Exercice 3

En notant x le nombre affiché par Alicia et Yohann, le problème se modélise par l'équation $2x + 9 = 3x + 5$.

$$2x + 9 = 3x + 5$$

$$x = 4$$

Ainsi, le nombre affiché au départ est 4 .

Exercice 3

En notant x le nombre affiché par Alicia et Yohann, le problème se modélise par l'équation $7x + 10 = 3x + 7$.

$$7x + 10 = 3x + 7$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Ainsi, le nombre affiché au départ est $-\frac{3}{4}$.

Analyse d'une production

Baya a effectivement commis une erreur : elle a oublié de changer le sens de l'inégalité lorsqu'elle a divisé chaque membre par (-2) .

Résolution :

$$3x < 5x + 12$$

$$3x - 5x < 5x - 5x + 12$$

$$-2x < 12$$

$$-2x \div (-2) > 12 \div (-2)$$

$$x > -6$$

Ainsi, tous les nombres strictement supérieurs à -6 sont solutions de cette inégalité.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

En cycle 3, un élève est capable d'identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs. En cycle 4, un attendu de fin de cycle est de savoir résoudre des problèmes de proportionnalité. Nous avons proposé d'aborder la notion de proportionnalité dès le début du cycle et ce sur tout le cycle.

De ce fait, nous avons proposé en début de cycle de reconnaître des situations de proportionnalité et de non proportionnalité dans un premier temps.

Ensuite, nous avons proposé de travailler, à l'aide de tableaux, sur le calcul d'une quatrième proportionnelle sous différentes formes : passage à l'unité, coefficient de proportionnalité, linéarité et règle de trois.

Le produit en croix, en revanche, est gardé pour le milieu de cycle pour son aspect purement technique. Le nouveau programme met l'accent sur l'apprentissage du sens avant d'entrer dans la technique.

Enfin, nous avons traité les pourcentages et les échelles. Tous les problèmes proposés sont des situations de la vie courante.

Activités

Questions flash

L'élève est libre de calculer par la méthode qu'il souhaite, experte ou non, mais de façon rapide.

- 1.** a. 6 gaufres coutent 4 €.

6 est le double de 3 donc 4 est le double de 2.

- b. 9 gaufres coutent 6 €.

9 est le triple de 3 donc 6 est le triple de 2.

- c. 15 gaufres coutent 10 €.

15 est la somme de 6 et 9 donc 10 est la somme de 4 et 6.

- 2.** 1 kg vaut 1,8 € donc 2 kg en valent le double soit 3,6 €, et 0,5 kg en vaut la moitié soit 0,9 €.

Emma va donc payer $3,6 + 0,9 = 4,5$ € pour 2,5 kg de citrouille.

- 3.** 14 stylos pour 7 € donc 7 stylos (7 est la moitié de 14) pour 3,5 € (la moitié de 7€).

- 4.** Marie et Clément vont au restaurant avec leurs 4 enfants donc ils sont 6.

Ils paient 54 € pour 6 personnes donc pour seulement eux deux, ils payeraient 3 fois moins, soit $\frac{54}{3} = 18$ €.

- 5.** Pour 24 crêpes, il faut 1 L de lait donc pour 8 crêpes il en faut 3 fois moins, soit $\frac{1}{3}$ L.

- 6.** Il faut multiplier 3 par $\frac{7}{3}$ pour obtenir 7.

Proportionnel ou non ?

Activité 1

L'objectif de cette activité est de reconnaître des situations de proportionnalité ou de non proportionnalité dans la vie courante.

Les prérequis nécessaires sont un peu de logique de la vie courante et les durées.

La capacité introduite est de reconnaître des situations de proportionnalité ou de non proportionnalité

Intentions des auteurs

Dans cette activité, l'élève doit faire preuve de discernement et de logique pour reconnaître une situation de proportionnalité ou de nonproportionnalité dans des situations de la vie courante.

- 1.** La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge sinon à 3 ans il mesurerait 3 fois plus qu'à un an, soit $75 \times 3 = 225$ cm.

- 2.** À chaque heure, le robinet fuit de 0,3 L. Le débit est régulier. Les deux grandeurs (quantité d'eau et temps) sont proportionnelles.

- 3.** Les grandeurs masse et prix à payer sont proportionnelles car pour chaque kilogramme le prix est de 2,5 €.

- 4.** Si le nombre d'avocats était proportionnel au prix à payer, 2 avocats couteraient $1,35 \times 2 = 2,7$ €, mais ce n'est pas le cas. La situation n'est donc pas proportionnelle.

- 5.** Le forfait téléphonique de Mathilde ne dépend pas du nombre de messages ou de coups de fils passés donc les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

- 6.** S'il n'y avait pas la cotisation, le nombre de repas serait proportionnel au prix à payer mais la cotisation est présente et quelque soit le nombre de repas elle ne change pas.

- 7.** Les tarifs du musée du Louvre sont bien proportionnels au temps de la visite.

1 h pour 60 € donc 0,5 h pour 30 € d'où 90 € pour 1 h 30 min et 2 h pour 120 €.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de résoudre des problèmes simples de la vie courante sur la proportionnalité. Les prérequis nécessaires sont les quatre opérations. La capacité introduite est de calculer une quatrième proportionnelle avec le passage à l'unité par exemple.

C'est une résolution de problème avec un calcul de quatrième proportionnelle. Compte tenu des deux questions, le passage à l'unité est à privilégier pour la première question, puis la multiplication par une quantité pour la seconde.

Puzzle de Brousseau

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de coefficient de proportionnalité et de faire manipuler les élèves. Les prérequis nécessaires sont la construction d'un tableau et les multiplications à trous. La capacité introduite est de calculer une quatrième proportionnelle avec le coefficient de proportionnalité.

- Cette activité peut faire l'objet d'une différenciation au sein de la classe. On pourrait éventuellement mettre les élèves par groupe et des nombres différents peuvent être donnés en fonction du niveau de compétence des groupes.
 - Trois niveaux de compétences :
 - pour passer de 5 à 7,5 (on ajoute la moitié) ;
 - pour passer de 5 à 7 (on multiplie par un nombre décimal) ;
 - pour passer de 3 à 7 (on multiplie par une fraction non décimale).
 - C'est une activité à prise d'initiative donc les groupes partent dans la direction qu'ils souhaitent. La mise en œuvre de cette activité fait travailler le domaine 2 du socle.
- Les élèves vont partir rapidement dans la réalisation du puzzle et ils vont se rendre compte que leur production est bonne ou fausse. Les laisser s'interroger sur la pertinence de leur choix. Un tableau peut être proposé et la mise en place de la notion de coefficient de proportionnalité adaptée.

Exercices

Reconnaitre une situation de proportionnalité

Questions flash

- Un paquet de gâteaux coûte 1,70 € donc, si c'est une situation de proportionnalité, le cout pour 6 paquets sera de $6 \times 1,70 = 10,20$ €. Or $10,20 \neq 9,90$ donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.
- Faux. Pour passer d'une colonne à l'autre, on multiplie par 3 pour passer de 1 à 3. Si c'est un tableau de proportionnalité, on multiplie par 3 également pour passer de 52 à 56. Il est inutile de calculer pour voir que cela ne marche pas dans ce cas. L'âge et la taille ne sont pas des grandeurs proportionnelles.
- Un morceau coûte 1,20 €. Si c'est une situation de proportionnalité, le cout de 5 morceaux sera de $5 \times 1,20 = 6$ €. C'est bien une situation de proportionnalité.
- On remarque que 2 soins coutent 10 € donc 3 soins devraient coûter 15 € si c'était une situation de proportionnalité. Ce n'est pas le cas, donc le nombre de soins n'est pas proportionnel au prix payé.

1. Une bouteille dans le pack de 8 coûte $5,84 \div 8 = 0,73$ € (passage à l'unité).

Une bouteille dans le pack de 6 coûte $4,74 \div 6 = 0,79$ € (passage à l'unité).

Par comparaison, $0,73 < 0,79$, il est donc préférable d'entamer le pack de 8 bouteilles pour que ce soit plus économique.

2. Donc 3 bouteilles du pack de 8 couteront : $3 \times 0,73 = 2,19$ €.

Pour le pack de 6 bouteilles, il suffit de prendre la moitié.

$$4,74 \div 2 = 2,37$$

3 bouteilles du pack de 6 bouteilles couteront 2,37 €.

Activité 3

Longueur réelle	3	4	5	6
Longueur agrandie	4,2	5,6	7	8,4

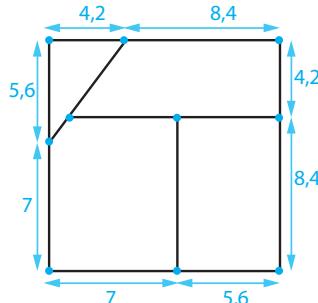
Le calcul du coefficient de proportionnalité semble approprié pour passer d'une ligne à l'autre.

Coefficient de proportionnalité : $7 \div 5 = 1,4$

$$3 \times 1,4 = 4,2$$

$$4 \times 1,4 = 5,6$$

$$6 \times 1,4 = 8,4$$



3. Pour donner du sens, il est préférable de ramener le prix au kilogramme pour les 2 paquets.

3 paquets de 70 g chacun représentent 210 g pour 1,16 €.

Prix (en €)	1,16	?
Quantité (en g)	210	1 000

Soit le coefficient de proportionnalité : $210 \div 1,16 \approx 181$.

Donc pour avoir le prix au kilo : $1 000 \div 181 \approx 5,52$ €.

1 paquet de 200 g pour 1,32 €.

1 kg représente 5 fois plus que 200 g.

Donc il suffit de multiplier par 5 pour avoir le prix pour un kilogramme : $1,32 \times 5 = 6,6$ €.

Le prix n'est donc pas proportionnel à la quantité de fromage.

- « 400 mg » signifie que dans un comprimé il y a 400 mg de molécule active d'ibuprofène.
- Soit un comprimé dosé à hauteur de 400 mg. Donc dans 1 200 mg, on peut prendre 3 comprimés dosés à 400 mg.

5. Toutes les dimensions de la girafe sont les doubles des dimensions du girafon.

On peut le visualiser dans un tableau.

Dimensions du girafon (en m)	0,75	1	1,25	3
Dimensions de la girafe (en m)	1,5	2	2,5	6

On reconnaît facilement que le coefficient de proportionnalité est 2.

Par conséquent, les dimensions de la girafe sont proportionnelles aux dimensions du girafon.

Calculer une quatrième proportionnelle

Les exercices suivants sont des situations de proportionnalité.

Questions flash

- 6** Un litre d'essence coûte 1,10 € donc 60 L coûtent $60 \times 1,1 = 66$ €.
- 7** 30 roses coûtent 36 €. 5 roses représentent 6 fois moins de roses donc le prix sera 6 fois moins élevé, soit $36 \div 6 = 6$ €.
- 8** Une personne consomme 60 m^3 d'eau par an. Dans l'immeuble, il y a 7 personnes.
($7 = 2 \times 3 + 1$) donc la consommation sera 7 fois plus importante, soit $7 \times 60 = 420 \text{ m}^3$ d'eau par an pour tout l'immeuble.

- 9** Le résultat peut être donné en kJ ou en kcal.

Quantité (en g)	100	20	60
Énergie (en kJ)	1 537	307,4	922,2

Les deux grandeurs sont proportionnelles donc on peut passer de la première colonne à la deuxième en divisant par 5, puis de la deuxième à la troisième en multipliant par 3.
Pour 60 g de pâtes, on consomme 922,2 kJ.

- 10** $26 = 8 \times 3 + 2$.
On connaît la quantité pour 8 personnes, il nous manque la quantité pour 2.
La quantité pour 2 personnes représente 4 fois moins que celle pour 8 personnes.
Les ingrédients seront donc 4 fois moins importants.

Ingrédients	8 pers.	2 pers.	24 pers.	26 pers.
Farine (en g)	250	62,5	750	812,5
Oeufs	4	1	12	13
Lait (en L)	0,5	0,125	1,5	1,625
Beurre (en g)	50	12,5	150	162,5

- 11** La recommandation est de 30 g pour 1 m².
Par conséquent, pour 1 350 m², il faut $1 350 \times 30 = 40 500$ g de graines pour tout le terrain de Loïc.
Chaque sac contient 15 kg, et $40 500 \text{ g} = 40,5 \text{ kg}$, il aura ainsi besoin de 3 sacs de 15 kg car $15 \times 3 = 45$.

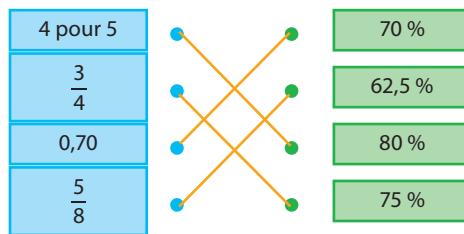
Appliquer et calculer un pourcentage

Questions flash

- 12** Faire le lien avec les élèves entre pourcentages et proportion. Ramener une proportion quelconque à une proportion de dénominateur 100.
- $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$.
Les océans représentent 75 % de la surface de la Terre.
- 13** On détermine l'augmentation : 2 % de 2 000 € correspondent à 40 €. Donc le nouveau salaire de Marion est de 2 040 €.
- 14** 60 % de 70 kg correspondent à 42 kg.
Donc le corps d'un homme de 70 kg est constitué de 42 kg d'eau.
- 15** Faire le lien entre toutes les différentes écritures d'un pourcentage.

- 4 pour 5 revient à $\frac{4}{5}$ soit, sur le dénominateur 100 : $\frac{80}{100}$.

- $\frac{3}{4}$ proportion au dénominateur 100 : $\frac{75}{100}$.
- 0,70 ramené à une proportion de dénominateur 100 : $\frac{70}{100}$.
- $\frac{5}{8}$ proportion au dénominateur 100 : $\frac{62,5}{100}$.



- 16** $69 \% \text{ de } 724\ 224 = 69 \% \times 724\ 224 \approx 499\ 715$.
499 715 personnes boivent l'eau du robinet sur Bordeaux Métropole.

- 17** 1. $1\ 018\ 280 - 423\ 823 = 594\ 457$.
Il y a eu 594 457 votants.
2. $423\ 823 \div 1\ 018\ 280 \times 100 \approx 41,6$.
Il y a eu environ 41,6 % d'abstention.
3. $2,09 \% \text{ de } 594\ 457 \approx 12\ 424$.
Environ 12 424 personnes ont voté blanc.
4. 50,7 % de 594 ;
 $457 = 50,7 \% \times 594\ 457 \approx 301\ 390$.
Environ 301 390 personnes ont voté pour la nouvelle maire au second tour.

- 18** La réduction est de $59,90 - 19,90 = 40$ €.
On calcule la proportion de réduction et on l'exprime avec un dénominateur égal à 100.
La proportion de réduction est de :

$$40 \div 59,9 \approx 0,67 \approx \frac{67}{100}$$

La réduction est donc d'environ 67 %.

- 19** La réduction est de 10 €.
Elle va payer 26,50 € après réduction donc l'album coûte 36,50 € avant réduction.
On calcule la proportion de réduction et on l'exprime avec un dénominateur égal à 100.
La proportion de réduction est de :

$$10 \div 36,5 \approx 0,27 \approx \frac{27}{100}$$

La réduction est d'environ 27 %.

Utiliser une échelle

Questions flash

- 20** L'échelle $\frac{1}{100}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 100 cm en réalité.
Donc 3 cm et 4 cm représentent respectivement 300 cm et 400 cm en réalité.
La chambre mesure donc 3 m sur 4 m.
- 21** L'échelle est $\frac{1}{27}$ car 1 cm sur la voiture en modèle réduit représente 27 cm sur la voiture en vraie grandeur.
- 22** Comme toutes les figurines mesurent 15 cm de haut et que tous les joueurs ne font pas la même taille dans la réalité, les deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

- 23** On détermine la longueur du parcours sur la carte :
 $4,6 + 4,4 + 0,3 + 3,9 + 2,5 + 2,3 = 8$ cm.
2 boucles représentent 1 200 m, par conséquent une boucle fait deux fois moins soit 600 m.
8 cm représentent $600 \text{ m} = 60\ 000 \text{ cm}$.
L'échelle est donc $\frac{8}{60\ 000}$.

24

Attention à bien mettre les deux grandeurs à la même unité.

Attention à bien mettre les deux grandeurs à la même unité.

L'échelle est $\frac{18}{32400}$.

Problèmes

25

Vive l'Algarve !

1. Le tarif est de 0,70 € par quart d'heure pendant la période du 1^{er} juillet au 31 aout. Dans 5 h 50 min, il y a 23 quarts d'heure complets et 1 quart d'heure entamé, soit 24 quarts d'heure à payer.

$$24 \times 0,70 = 16,80 \text{ €}.$$

Claire et Pedro paieront 16,80 € pour 5 h 50 min de parking le 4 aout.

2. Le tarif est de 0,10 € pour une heure.

$$7 \times 0,10 = 0,70 \text{ €}.$$

Ils paieront 0,70 € pour 7 h de parking le 1^{er} septembre.

26

Économisons l'eau !

40 % de 145 m³ = 0,4 × 145 = 58 m³.

La famille Portier va économiser 58 m³ sur l'année.

27

Tiramisu

Ingrédients	Recette originale	Recette adaptée
Café (en cL)	20	25
Biscuits (en g)	300	375
Œufs	4	5
Sucre (en g)	50	62,5
Cacao (en g)	50	62,5
Mascarpone (en g)	400	500

Pour passer de 400 à 500, il suffit de multiplier 400 par 1,25, puis faire de même pour toutes les quantités pour avoir des proportions équivalentes.

28

Attention aux prix !

Pour comparer deux pots, on peut se ramener à la même quantité.

Prix (en €)	4,50	?
Quantité (en g)	840	1 000

Le coefficient de proportionnalité est $840 \div 4,5$, il permet de passer de la première ligne à la seconde.

Le prix au kilogramme du premier pot est de :

$$1000 \div (840 \div 4,5) \text{ soit } 5,36 \text{ €.}$$

En comparant, le pot le plus économique est celui de 840 g.

29

Y a-t-il plus de travail ?

0,6 % de 2,9 millions = $\frac{0,6}{100} \times 2\ 900\ 000 = 17\ 400$.

Il y a 17 400 chômeurs de plus, soit :

$$2\ 900\ 000 + 17\ 400 = 2\ 917\ 400.$$

Au 1^{er} septembre, il y a 2 917 400 chômeurs.

30

Facture d'électricité

1 kWh coûte 0,102 6 €.

Estelle paie 97,16 €.

On cherche le nombre de kWh qui, multiplié par 0,102 6, donnera 97,16 €.

$$97,16 \div 0,1026 \approx 947.$$

Estelle a consommé environ 947 kWh.

31

Les jolis volets

Linda doit repeindre 68 m².

On calcule le prix du litre pour chacun des pots de peinture : $35,90 \div 2,5 = 14,36$ € le prix d'un litre de peinture dans le pot de 2,5 L.

$57 \div 3 = 19$ € le prix d'un litre de peinture dans le pot de 3 L.

Le pot de 2,5 L est le plus économique mais Linda doit peindre

68 m². Elle devra donc prendre 3 pots pour peindre tous ses volets.

Elle devra payer $35,90 \times 3 = 107,70$ €.

Si elle prend le pot de 3 L, Linda devra en prendre 2 pour peindre tous ses volets.

Elle devra payer $57 \times 2 = 114$ €.

32

Réserve pour l'hiver

La cuve de Pedro est à moitié pleine donc il lui faut $2\ 500 \div 2 = 1\ 250$ L.

1 000 L contiennent 635 €.

250 L contiennent 4 fois moins cher soit : $635 \div 4 = 158,75$ €.

Sa facture sera de $635 + 158,75 = 793,75$ €.

33

Restaurant asiatique

Le nombre de pièces et le prix sont des grandeurs proportionnelles. Tous les prix des nems et des samoussas sont identiques. Ils commandent :

$$4 + 4 + 2 + 4 + 2 = 16 \text{ pièces à } 0,95 \text{ € l'un :}$$

$$16 \times 0,95 = 15,20 \text{ €.}$$

Le prix et la masse sont proportionnels.

$$4,2 \times 1,9 = 7,98 \text{ €.}$$

100 g contiennent 1,90 € et 420 g représentent 4,2 fois plus que 100 g.

Le prix et la masse sont proportionnels.

$$4,5 \times 1,4 = 6,3 \text{ €.}$$

100 g contiennent 1,40 € et 450 g représentent 4,5 fois plus que 100 g.

Le total est de $15,20 + 6,30 + 7,98 = 29,48$ €.

Philippe pourra payer avec ses 30 € en monnaie.

34

Livre sterling

Le cours de la livre sterling est de 1,35 €, ce qui signifie que 1 £ représente 1,35 €. Ces deux grandeurs sont proportionnelles. On peut représenter la situation dans un tableau de proportionnalité.

Montant (en £)	1	102,4
Montant (en €)	1,35	138,24

Le coefficient de proportionnalité est 1,35.

$$\text{Donc } 102,4 \times 1,35 = 138,24 \text{ €.}$$

Les places de concert contiennent 138,24 €.

35

Miles

Le panneau représente la vitesse limite sur les autoroutes américaines, soit 65 miles par heure.

En une heure, on doit faire au maximum 65 miles.

1 mile = 1 609 344 km. Ces deux grandeurs sont proportionnelles.

On représente la situation dans un tableau de proportionnalité.

Distance (en miles)	1	65
Distance (en km)	1 609 344	?

Le coefficient de proportionnalité est 1 609 344.

$$\text{Donc } 65 \times 1 609 344 = 104 607 36 \text{ km.}$$

La vitesse limite sur les autoroutes américaines est d'environ 105 km/h.

36

Nouvelle voiture

Pour trouver la voiture qui consommera le moins, il faut pouvoir comparer.

On va chercher la consommation pour 100 km pour tous les modèles.

Modèle A	4,1 L pour 100 km
Modèle B	4,9 L pour 100 km
Modèle C	5,9 L pour 100 km
Modèle D	4,9 L pour 100 km
Modèle E	5,8 L pour 100 km

- Pour le modèle B, on a la consommation pour 1 km, par conséquent pour 100 km cela représente 100 fois plus que pour 1 km, soit $0,049 \text{ L} \times 100 = 4,9 \text{ L.}$
- Pour le modèle C, on fait un tableau de proportionnalité car les grandeurs « distance » et « consommation » sont proportionnelles.

Consommation (en L)	1	5,9
Distance (en km)	16,95	100

Le coefficient de proportionnalité est 16,95. Pour passer de la seconde ligne à la première, il suffit de diviser par le coefficient. Soit $100 \div 16,95 \approx 5,9$ L.

- Pour le modèle E, on fait un tableau de proportionnalité car les grandeurs « distance » et « consommation » sont proportionnelles.

Consommation (en L)	1	5,8
Distance (en km)	17,24	100

Le coefficient de proportionnalité est 17,24. Pour passer de la seconde ligne à la première, il suffit de diviser par le coefficient. Soit $100 \div 17,24 \approx 5,8$ L.

Ce qui semble logique car le modèle C parcourt moins de kilomètres avec un litre donc le modèle E est forcément plus économique que le modèle C.

- La voiture la plus économique est le modèle A.

37 Dollar

On cherche la valeur d'un dollar dans une autre devise. Ce qui nous intéresse ici c'est la valeur d'un dollar en euro. On représente la situation dans un tableau de proportionnalité.

Devises (en €)	800	1
Devises (en \$)	904	1,13

On calcule le coefficient de proportionnalité.

$$904 \div 800 = 1,13 ;$$

$$1 \text{ €} = 1,13 \text{ $.}$$

Le cours du dollar lors de son achat est de 1,13 \$ pour 1 €.

38 Soldes flottants

Les pourcentages de soldes ne sont pas cumulatifs. Le premier pourcentage de réduction s'applique sur le prix initial alors que le second s'applique sur le prix réduit (qui est moins important que le prix initial).

- On prend un exemple : pour une doudoune à 39,95 €, on applique 30 % de réduction sur le prix initial.
 $30\% \text{ de } 39,95 \text{ €} = 30\% \times 39,95 = 11,985 \text{ €}.$
 Donc le nouveau prix de la doudoune est de
 $39,95 - 11,985 \approx 27,96 \text{ €}.$
 On applique ensuite 10 % sur le nouveau prix et non sur le prix initial. Donc la réduction sera moins importante.
 $10\% \text{ de } 27,96 = 10\% \times 27,96 = 2,796 ;$
 $27,96 - 2,796 = 25,16 \text{ €}.$
 Donc la doudoune a pour prix réduit 25,16 € après les deux réductions successives.
- 40 % de 39,95 € = 40 % × 39,95 = 15,98 € ;
 $39,95 - 15,98 = 23,97 \text{ €}.$
 La réduction de 40 % est plus importante car elle porte sur le prix initial.

39 Concert complet

On calcule pour chaque soirée la recette.

Une place coûte 56,50 € et il y a 16 065 places dans la salle.

$$\text{Soit } 56,50 \times 16\,065 = 907\,672,5 \text{ €.}$$

Une soirée rapporte 907 672,5 €.

La période du 28 mars au 3 avril inclus compte 7 jours de concert.

$$\text{Donc } 907\,672,5 \times 7 = 6\,353\,707,5 \text{ €.}$$

La recette du concert sera de 6 353 707,50 €.

40 Cartes à collectionner

$$5 + 20 + 15 = 40 \text{ €.}$$

Victor a 40 € en poche pour acheter des cartes.

Il lui manque 128 cartes à 0,30 € la carte.

$$128 \times 0,30 = 38,40 \text{ €.}$$

Il doit payer 38,40 € pour acheter toutes les cartes manquantes.

Il a donc assez d'argent pour finir son livre de cartes à collectionner.

41 Buying music

A song costs 1,29€. So 8 songs will be $1,29 \times 8 = 10,32$ €.

The album costs 9,99€. It's better to buy the album for 9,99€.

42 Les raboteurs de parquet

La toile mesure 1,46 m sur 1,92 m. L'entrepreneur souhaite faire des reproductions de 60 cm par 80 cm. Les dimensions ne sont pas proportionnelles.

– Pour passer de 146 cm à 60 cm, il faut diviser les distances par $\frac{146}{60} \approx 2,433$.

– Pour passer de 192 cm à 80 cm, il faut diviser les distances par $\frac{192}{80} = 2,4$.

– Pour garder les proportions de la toile, il faut donc diviser les deux dimensions par 2,433 environ. On obtiendra une réduction de dimensions 60 cm et 78,9 cm.

43 Tour Eiffel

L'échelle est une situation de proportionnalité.

Deux distances sont proportionnelles.

Distance sur le croquis (en cm)	6	1,2
Distance réelle (en m)	324	64,8

On calcule le coefficient de proportionnalité.

$$324 \div 6 = 54 ;$$

$$1,2 \times 54 = 64,8 \text{ m.}$$

La distance entre deux piliers est d'environ 65 m.

44 Consommation d'eau

Un habitant de Marseille consomme 228 L d'eau par jour d'après la lecture du doc. 1.

On applique les pourcentages pour chaque usage au nombre 228.

Usages	Boisson	Cuisine	Voiture, jardin	Vaisselle
Consommation (en L)	2,28	13,68	13,68	22,8

Usages	Linge	Sanitaires	Bains, douches	Divers
Consommation (en L)	27,36	45,6	88,92	13,68

$$\bullet 1\% \text{ de } 228 = \frac{1}{100} \times 228 = 2,28.$$

$$\bullet 10\% \text{ de } 228 = 22,8.$$

$$\bullet 12\% \text{ de } 228 = \frac{12}{100} \times 228 = 27,36.$$

$$\bullet 6\% \text{ de } 228 = \frac{6}{100} \times 228 = 13,68.$$

$$\bullet 20\% \text{ de } 228 = 45,6.$$

$$\bullet 39\% \text{ de } 228 = \frac{39}{100} \times 228 = 88,92.$$

45 La fin des lunettes chères

On calcule la réduction $189 - 107,73 = 81,27$ €.

Le calcul de pourcentages est une situation de proportionnalité.

Pourcentage de réduction	100	43
Remise (en €)	189	81,27

Le coefficient de proportionnalité est : $1,89 = 189 \div 100$.

La remise est de 43 %.

De plus, « votre âge = votre % de remise », on peut en conclure que madame Crochet a 43 ans.

46 Internet

1. La longueur totale des câbles est de plus de 885 000 km, soit 22 fois la circonference de la Terre.

$$885\,000 \div 22 = 40\,227 \text{ km.}$$

La circonference de la Terre est d'environ 40 227 km.

2. Le plus long câble mesure 38 000 km et la totalité des câbles 885 000 km.

La proportion du plus long câble par rapport à l'ensemble des câbles est :

$$38\,000 \div 885\,000 \approx 4\%.$$

47 Calcul de l'impôt

Pour le calcul de l'impôt, il faut comprendre que pour les 9 690 premiers euros, personne n'est imposable sur son salaire. Ensuite, le contribuable est imposable à hauteur du pourcentage indiqué pour chaque tranche dans laquelle il intervient.

Pour Théo et Maëlle, ils sont tous les deux imposables dans la deuxième tranche car leurs revenus ne dépassent pas 26 764 € par an.

- Théo est imposable à hauteur de 14 % sur :

$$19\,428 - 9\,690 = 9\,738 \text{ €.}$$

$$14 \% \text{ de } 9\,738 \text{ €} = 14 \div 100 \times 9\,738 \approx 1\,363 \text{ €.}$$

Théo devra payer 1 363 € d'impôt sur le revenu.

- Maëlle est imposable à hauteur de 14 % sur :

$$25\,738 - 9\,690 = 16\,048 \text{ €.}$$

$$14 \% \text{ de } 16\,048 \text{ €} = 14 \div 100 \times 16\,048 \approx 2\,246 \text{ €.}$$

Maëlle devra payer 2 246 € d'impôt sur le revenu.

Les impôts prennent toujours les valeurs approchées à l'unité par défaut.

48 Enfant malade

Emma pèse 24 kg. Il faut donner une dose de 60 mg par kg. Donc $24 \times 60 = 1\,440$ mg.

Angélique peut administrer une quantité de 1 440 mg par jour à sa fille.

Il est conseillé de répartir cette dose sur 4 ou 6 fois dans la journée.

Pour 4 prises dans la journée, Angélique doit donner $1\,440 \div 4 = 360$ mg par prise.

Pour 6 prises dans la journée, Angélique doit donner $1\,440 \div 6 = 240$ mg par prise.

Le paracétamol est dosé à 2,4 %, c'est-à-dire qu'il y a 2,4 g = 2 400 mg de paracétamol dans 100 ml.

- Pour 4 prises dans la journée, il faut 360 mg = 0,36 g par prise.

Quantité paracétamol (en mL)	100	15
Quantité paracétamol (en mg)	2 400	360

Le coefficient de proportionnalité est $2\,400 \div 100 = 24$.

Pour passer de la seconde ligne à la première ligne, on divise par 24.

$$360 \div 24 = 15 \text{ mL.}$$

Comme Angélique n'a pas de pipette, elle utilise une cuillère à café qui contient 5 mL de liquide.

Pour 15 mL, il faut prendre 3 cuillères à café.

Si Angélique donne 4 prises de médicament à Emma, elle lui donnera à chaque fois 3 cuillères à café.

- Pour 6 prises dans la journée, il faut 240 mg = 0,24 g par prise.

240 mg représentent 10 fois moins que 2 400 mg donc il faut prendre 10 mL.

Comme Angélique n'a pas de pipette, elle utilise une cuillère à café qui contient 5 mL de liquide.

Pour 10 mL, il faut prendre 2 cuillères à café.

Si Angélique donne 6 prises de médicament à Emma, elle lui donnera à chaque fois 2 cuillères à café.

49 Cantine

Il faut calculer le quotient familial dans un premier temps.

Le nombre de parts dans une famille de 4 personnes : chaque parent compte pour une part et chaque enfant compte pour une demi-part soit 3 parts en tout.

- À l'aide du doc. 1 :

Quotient familial mensuel = $37\,604 \div (12 \times 3) \approx 1\,045$.

- À l'aide du doc. 3 :

En fonction du quotient familial, on trouve le prix d'un repas.

Pour un quotient de 1 045, on se trouve dans la tranche 913 – 1 087, soit 3,06 € le repas.

- À l'aide du doc. 2 :

Pour le mois de septembre, Juliette et Evann vont payer 17 repas à 3,06 €, soit $17 \times 3,06 = 52,02$ €.

Pour le mois d'octobre, Juliette et Evann vont payer 8 repas à 3,06 €, soit $8 \times 3,06 = 24,48$ €.

50 Résidence paysagée

Pour réaliser les devis, il faut calculer la surface à peindre et la surface à gazonner.

On peut envisager de distribuer le travail dans la classe en deux groupes. Un pour le calcul de l'aire des façades et l'autre pour le calcul de l'aire du gazon.

Et au sein de ces groupes, on peut encore répartir le travail. Un groupe pour chaque façade de l'immeuble (façade avant, façade arrière et façade latérale) et un groupe pour chaque partie à gazonner. La mise en œuvre de cet exercice nous fait travailler le domaine 2 du socle.

• Aire façade avant

Sur le doc. 2 :

Dimension 6 cm sur 3 cm. L'échelle est $\frac{1}{300}$.

Donc 1 cm sur le plan représente 300 cm en réalité.

3 cm représentent alors $3 \times 300 = 900$ cm en réalité.

6 cm représentent alors $6 \times 300 = 1\,800$ cm en réalité.

Le bâtiment mesure 9 m de haut sur 18 m de long.

L'aire de la façade avant est $9 \times 18 = 162 \text{ m}^2$ (c'est un rectangle).

Il possède 12 fenêtres de dimension 150 cm sur 120 cm chacune.

150 cm = 1,5 m et 120 cm = 1,2 m.

L'aire d'une fenêtre est $1,5 \times 1,2 = 1,8 \text{ m}^2$, soit :

$$12 \times 1,8 \text{ m}^2 = 21,60 \text{ m}^2.$$

Il possède également 2 doubles portes d'entrée de dimension 180 cm sur 240 cm.

180 cm = 1,8 m et 240 cm = 2,4 m.

L'aire d'une double porte est $1,8 \times 2,4 = 4,32 \text{ m}^2$, soit :

$$2 \times 4,32 = 8,64 \text{ m}^2.$$

La surface à peindre sur la façade avant est la surface totale sans la surface des fenêtres et des doubles portes.

$$\text{Soit } 162 - 21,6 - 8,64 = 131,76 \text{ m}^2.$$

• Aire façade arrière

La surface à peindre sur la façade arrière est la surface totale sans la surface des fenêtres.

$$\text{Soit } 162 - 21,6 = 140,4 \text{ m}^2.$$

• Aire façade latérale

La hauteur est de 9 m.

Sur le doc. 1 :

La largeur est de 0,6 cm.

L'échelle est de $\frac{1}{900}$.

1 cm représente 900 cm en réalité.

Donc 0,6 cm représente 540 cm en réalité. $540 \text{ cm} = 5,4 \text{ m}$.

La façade latérale mesure 9 m de haut sur 5,4 m de large.

$$9 \times 5,4 = 48,6 \text{ m}^2.$$

Il y a deux façades latérales sans aucune fenêtre.

$$48,6 \times 2 = 97,2 \text{ m}^2.$$

Pour un bâtiment, la surface à peindre est de :

$$140,4 + 131,76 + 97,2 = 369,36 \text{ m}^2.$$

Il y a 6 bâtiments, soit $6 \times 369,36 = 2\,216,16 \text{ m}^2$.

Surface à peindre (en m^2)	100	2 216,16
Quantité de peinture (en L)	10	221,616

Le coefficient de proportionnalité est 0,1.

Un pot contient 10 L de peinture. Donc il faudra 23 pots de peinture (car $23 \times 10 = 230$ L de peinture).

Voici le devis pour la peinture :

Quantité pots peinture	prix unitaire	prix
23	59,95 €	1 378,85 €

$$23 \times 59,95 = 1\,378,85 \text{ €.}$$

Pour le gazon, on calcule chaque surface : il y a 6 parties à gazonner.

D'après le doc. 1, voici les dimensions des terrains :

Terrain 1 : 2,7 cm sur 0,3 cm.

Terrain 2 : 2 cm sur 1,7 cm.

Terrain 3 : 2,8 cm sur 0,3 cm.

Terrain 4 : 0,3 cm sur 0,2 cm.

Terrain 5 : 0,2 cm sur 0,2 cm.

Terrain 6 : 2 cm sur 0,8 cm (avec un quart de disque de 0,4 cm de rayon).

L'échelle est de $\frac{1}{900}$.

1 cm sur le plan représente 900 cm en réalité. $900 \text{ cm} = 9 \text{ m}$.

Dimensions sur le plan (en cm)	0,2	0,3	0,4	0,8
Dimensions réelles (en m)	1,8	2,7	3,6	7,2

Dimensions sur le plan (en cm)	1,7	2	2,7	2,8	1
Dimensions réelles (en m)	15,3	18	24,3	25,2	9

Le coefficient de proportionnalité est 9.

On assimile chaque terrain à un rectangle.

Terrain 1 : $24,3 \times 2,7 = 65,61 \text{ m}^2$.

Terrain 2 : $18 \times 15,3 = 275,4 \text{ m}^2$.

Terrain 3 : $25,2 \times 2,7 = 68,04 \text{ m}^2$.

Terrain 4 : $1,8 \times 2,7 = 4,86 \text{ m}^2$.

Terrain 5 : $0,2 \times 0,2 = 0,04 \text{ m}^2$.

Terrain 6 : $18 \times 7,2 = 129,6 \text{ m}^2$ sur lequel on retire un quart de disque de 3,6 m de rayon soit $3,6 \times 3,6 \times \pi \div 4 \approx 10 \text{ m}^2$ soit un terrain 6 d'aire $129,6 - 10 \approx 119,6 \text{ m}^2$.

Surface à gazonner :

$$65,61 + 275,4 + 68,04 + 4,86 + 0,04 + 119,6 \approx 533,55 \text{ m}^2.$$

Quantité gazon (en kg)	1	15,25
Surface à gazonner (en m ²)	35	533,55

Le coefficient de proportionnalité est 35.

$$533,55 \div 35 \approx 15,25 \text{ kg.}$$

1 sac contient 25 kg de gazon donc 1 sac suffit.

Voici le devis pour le gazon :

	A	B	C
	Prix d'un sac de gazon	Quantité	Prix à payer
1	139,00 €	1	139,00 €
2			

Algorithmique et outils numériques

51 Au marché

- Le prix du miel est proportionnel à la quantité achetée car les grandeurs sont liées par la formule « quantité $\times 17,35$ », c'est-à-dire le prix à payer, où 17,35 représente le prix au kilogramme du miel.
- Il faut penser à créer la variable quantité.
La masse de miel est à renseigner en kilogramme.

```

quand  cliqué
demander quantité? et attendre
mettre quantité à réponse
dire quantité * 17,35 pendant 2 secondes
  
```

52 Tout doit disparaître !

Il faut penser à créer la variable prix.

```

quand  pressé
demander quantité? et attendre
mettre prix à réponse
dire prix - 70 / 100 * prix pendant 2 secondes
  
```

53 Pourcentage et tableur

- La formule à saisir en B3 est « =B2*B1 ».
La formule à saisir en B4 est « =B1+B3 ».

2. Voici différents tableaux avec des valeurs différentes pour B1 :

	A	B
1	Prix hors taxes en euros	2000
2	Pourcentage de TVA	20%
3	Montant de la TVA en euros	400
4	Prix TTC en euros	2400

	A	B
1	Prix hors taxes en euros	1000
2	Pourcentage de TVA	20%
3	Montant de la TVA en euros	200
4	Prix TTC en euros	1200

	A	B
1	Prix hors taxes en euros	800
2	Pourcentage de TVA	20%
3	Montant de la TVA en euros	160
4	Prix TTC en euros	960

	A	B
1	Prix hors taxes en euros	3000
2	Pourcentage de TVA	20%
3	Montant de la TVA en euros	600
4	Prix TTC en euros	3600

47 Soldes

	A	B	C	D	E	F
1		10%	20%	30%	40%	50%
2	79	71,1	63,2	55,3	47,4	39,5
3	89	80,1	71,2	62,3	53,4	44,5
4	99	89,1	79,2	69,3	59,4	49,5
5	109	98,1	87,2	76,3	65,4	54,5
6	119	107,1	95,2	83,3	71,4	59,5
7	129	116,1	103,2	90,3	77,4	64,5
8	139	125,1	111,2	97,3	83,4	69,5
9	149	134,1	119,2	104,3	89,4	74,5
10	159	143,1	127,2	111,3	95,4	79,5
11	169	152,1	135,2	118,3	101,4	84,5
12	179	161,1	143,2	125,3	107,4	89,5
13	189	170,1	151,2	132,3	113,4	94,5
14	199	179,1	159,2	139,3	119,4	99,5
15	209	188,1	167,2	146,3	125,4	104,5
16	219	197,1	175,2	153,3	131,4	109,5
17	229	206,1	183,2	160,3	137,4	114,5
18	239	215,1	191,2	167,3	143,4	119,5
19	249	224,1	199,2	174,3	149,4	124,5

Pour chaque prix, on calcule la réduction liée au pourcentage et on l'enlève au prix de départ.

Travailler autrement

Exercice 1

On calcule la réduction pour tous les articles (40 % de chaque prix).

Prix (en €)	10	15	20	30	35	45
Remise (en €)	4	6	8	12	14	18

Prix des articles réduits :

Tee-shirt noir : $15 - 6 = 9 \text{ €}$.

Tee-shirt blanc : $10 - 4 = 6 \text{ €}$.

Jupe : $30 - 12 = 18 \text{ €}$.

Robe : $45 - 18 = 27 \text{ €}$.

Pull : $35 - 14 = 21 \text{ €}$.

Pantalon : $20 - 8 = 12 \text{ €}$.

Si Emma veut prendre un maximum d'articles avec 90 €, elle peut tout prendre sauf un article de son choix car le total est de 93 €.

Exercice 1

On calcule la réduction pour tous les articles (pourcentage différent pour chaque article).

Prix (en €)	9,90	12,90	19,90	29,90	35	44,90
Remise (en €)	0,99	2,58	3,98	8,97	10,5	26,94

Prix des articles réduits :

$$\text{Tee-shirt noir : } 12,9 - 2,58 = 10,32 \text{ €.}$$

$$\text{Tee-shirt blanc : } 9,90 - 0,99 = 8,91 \text{ €.}$$

$$\text{Jupe : } 29,90 - 8,97 = 20,93 \text{ €.}$$

$$\text{Robe : } 44,90 - 26,94 = 17,96 \text{ €.}$$

$$\text{Pull : } 35 - 10,5 = 24,5 \text{ €.}$$

$$\text{Pantalon : } 19,90 - 3,98 = 15,92 \text{ €.}$$

Si Emma veut prendre un maximum d'articles avec 90 €, elle peut tout prendre sauf un article de son choix car le total est de 98,54 €.

Exercice 2

Marie et Clément gagnent 5 000 € à eux deux.

Ils ont une capacité d'emprunt de 35 % de leurs revenus soit

$$35\% \text{ de } 5\,000 = 35 \div 100 \times 5\,000 \\ = 1\,750 \text{ €.}$$

Ils peuvent rembourser jusqu'à 1 750 € par mois.

Exercice 2

Marie et Clément gagnent 2 500 + 3 000 = 5 500 € par mois.

Leur capacité d'emprunt est de 35 % de leurs revenus soit 35 %

$$\text{de } 5\,500 \text{ €} = 35 \div 100 \times 5\,500 \\ = 1\,925 \text{ €.}$$

Sur ces 1 925 €, ils utilisent déjà 300 € pour la voiture et 50 € pour le lave-linge.

Leur capacité d'emprunt est de :

$$1\,925 - 300 - 50 = 1\,575 \text{ €.}$$

Ils peuvent rembourser 1 575 € par mois.

Écriture d'un énoncé

Une idée d'énoncé :

Un manteau couté 50 € avant les soldes et une remise de 15 % lui sera déduite en caisse.

Quel sera le prix du manteau en caisse ?

Analyse d'une production

- 1^{re} copie : le raisonnement est correct mais il n'est pas très précis dans son approximation du temps.

On pourrait chercher à savoir combien de temps elle va mettre pour faire les derniers 80 km.

En 1 h, on fait 130 km.

Le temps et la distance sont des grandeurs proportionnelles.

Temps (en h)	1	0,62
Distance (en km)	130	80

Le coefficient de proportionnalité est 130.

$$80 \div 130 \approx 0,62$$

Pour avoir le temps en minutes, il suffit de multiplier par 60.

$$80 \div 130 \times 60 \approx 37 \text{ min}$$

Elle mettra donc 4 h et 37 min pour faire les 600 km sur autoroute.

- 2^e copie : elle a exprimé le temps pour un kilomètre.

1 km, c'est 130 fois plus petit que 130 km donc elle mettra 130 fois moins de temps pour faire 1 km.

Elle a donc une estimation précise pour les 600 km et elle convertit en heures et minutes son calcul.

Il n'y a pas d'erreur dans son raisonnement.

- 3^e copie : elle a fait un tableau sans indiquer les grandeurs.

Temps (en h)	1	?
Distance (en km)	130	600

L'égalité $\frac{1}{130} = 130$ est fausse.

Elle aurait pu préciser que le coefficient de proportionnalité est $130 \div 1 = 130$.

Et pour passer de la seconde à la première ligne, il suffit de diviser par le coefficient de proportionnalité.

Son calcul est correct mais ce n'est pas une valeur exacte mais une valeur approchée.

$$600 \div 130 \approx 4,6.$$

Son interprétation finale est fausse car 4,6 h ne correspondent pas à 4 h et 6 min mais à 4 h et 0,6 h = $0,6 \times 60 = 36$ min.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ». En cycle 3, un élève est capable d'identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs. En cycle 4, un attendu de fin de cycle est de savoir résoudre des problèmes de proportionnalité. Cette notion, essentielle à comprendre pour tous les élèves quel que soit leur avenir scolaire, doit être abordée dès le début du cycle et réinvestie sur l'ensemble du cycle pour assurer une assimilation durable. Il est ainsi proposé dans le chapitre 18 de reconnaître des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité dans un premier temps, puis de travailler, à l'aide de tableaux, sur le calcul d'une

quatrième proportionnelle sous différentes formes : passage à l'unité, coefficient de proportionnalité, linéarité et règle de trois. Un travail sur les échelles et les pourcentages permet de mobiliser la proportionnalité dans différents contextes.

Dans le chapitre 19, ces capacités seront réinvesties et enrichies par la découverte de la relation entre proportionnalité et représentation graphique ainsi que le produit en croix. Ce dernier, purement technique, est ensuite largement exploité mais sont également proposées nombre de situations qui ne le nécessitent pas et qui incitent l'élève à ne pas y recourir systématiquement. Les problèmes proposés sont tous issus de la vie courante ou font référence à des innovations ou des découvertes scientifiques.

Activités

Questions flash

- 1.** Nouveau prix : $50 \text{ €} - 5 \text{ €} = 45 \text{ €}$.
- 2.** On ne peut pas savoir, ce n'est pas une situation de proportionnalité.
- 3.** Non, car $2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h}$.
On peut rappeler quelques conversions à connaître :
 $30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$; $15 \text{ min} = 0,25 \text{ h}$; $45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$
- 4.** Cette personne marche à la vitesse de 50 m par minute, ou encore 100 m en 2 minutes, donc elle parcourt 800 m en 16 minutes.
Elle met 16 minutes pour aller au collège.

On pourra rappeler qu'il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser un tableau ou le produit en croix dans des cas simples.

- 5.** $324 \div 1\,000 = 0,324$
La maquette de Stéphane fait $0,324 \text{ m}$ de haut, soit $32,4 \text{ cm}$.
C'est l'occasion de rappeler et de poser d'autres questions flash sur les conversions de mètres en centimètres et vice-versa.
- 6.** $5 \times 10 = 50$, mais $6 \times 7,5 = 45 \neq 50$.
(calcul mental : $6 \times 7,5 = 6 \times 7 + 6 \times 0,5 = 42 + 3$)

Non, ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Promenade dans Paris

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif est de faire travailler les élèves sur l'échelle d'un plan. L'élève mesure à la règle graduée sur le plan.

- 1.** Sur le plan, le jardin mesure $0,9 \text{ cm}$ sur $2,3 \text{ cm}$.
L'échelle est de $0,5 \text{ cm}$ pour 50 m .
Donc 1 cm sur le plan représente 100 m en réalité.
Alors le jardin du Palais Royal mesure environ 90 m sur 230 m .
Un terrain de football homologué mesure 68 m sur 105 m donc Léa a raison.
- 2.** Sur le plan, on mesure environ 8 cm entre la station de métro « Palais Royal-Musée du Louvre » et la place Vendôme, il y a donc environ 800 m dans la réalité.
Luc et Léa font environ 80 m en 1 minute, ils mettront donc environ 10 minutes pour se rendre place Vendôme.
Ils partent à 15 h et doivent arriver avant $15 \text{ h } 15$, oui ils seront à l'heure au rendez-vous.

3.

Pour comparer ces deux offres, les élèves peuvent :

- calculer le prix au m^2 ;
- tenir compte de la taille du lit ;
- se contenter de regarder le prix de la nuit.

L'objectif de cette question est de faire raisonner et argumenter les élèves sur leurs choix, toutes les réponses sont possibles quand elles sont correctement argumentées.

Deux exemples de réponses :

- Ils doivent choisir la suite studio car c'est la moins chère.
- $73 \div 22 = 3,31$ et $82 \div 26 = 3,15$

La suite double supérieure coûte $3,15 \text{ €}/\text{m}^2$ alors que la suite studio coûte $3,31 \text{ €}/\text{m}^2$.

De plus, la suite double supérieure a un plus grand lit.
Donc ils devraient choisir la suite double supérieure.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de faire découvrir aux élèves le lien entre proportionnalité et représentation graphique. C'est une activité très complète dans l'utilisation d'un tableur : faire un tableau, le compléter en utilisant des formules et en les étirant sur plusieurs cellules, tracer des représentations graphiques. Cependant, sans tableur, cette activité est tout à fait réalisable. Dans ce cas, les élèves utilisent leur calculatrice.

1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	M. Marchand									
2	Prix initial (en €)	4,99	12,90	14,80	19,80	22,50	29,80	34,50	39,80	44,50
3	réduction (en €)	0,75	1,94	2,22	2,97	3,38	4,47	5,18	5,97	6,68
4	Prix soldé (en €)	4,24	10,97	12,58	16,83	19,13	25,33	29,33	33,83	37,83
5										
6	M. Remise									
7	Prix initial (en €)	4,99	12,90	14,80	19,80	22,50	29,80	34,50	39,80	44,50
8	réduction (en €)	0,00	2,00	2,00	2,00	4,00	4,00	6,00	6,00	8,00
9	Prix avec remise (en €)	4,99	10,90	12,80	17,80	18,50	25,80	28,50	33,80	36,50

2. a.

On complète la ligne « Réduction » en faisant $15 \div 100 \times \text{prix initial}$. Par exemple : $15 \div 100 \times 4,99 = 0,75$.

Avec le tableur :

Écrire dans la cellule B3 : « =15/100*B2 »

Étirer cette formule de la cellule B3 à la cellule J3.

b. Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer du prix initial à la réduction est $15/100$, c'est-à-dire 0,15.

c.

On complète la ligne « Prix soldé » en faisant $\text{prix initial} - \text{réduction}$. Par exemple : $4,99 - 0,75 = 4,24$.

Avec le tableur :

Écrire dans la cellule B4 : « =B2-B3 »

Étirer cette formule de la cellule B4 à la cellule J4.

d. Pour montrer que le prix soldé est proportionnel au prix initial, on a calculé les quotients $\frac{\text{prix soldé}}{\text{prix initial}}$ et on a toujours trouvé 0,85.

Oui, on pouvait le deviner car 0,85 est égal à 85 %, c'est-à-dire 100 % – 15 %.

On fait formuler aux élèves la règle suivante :

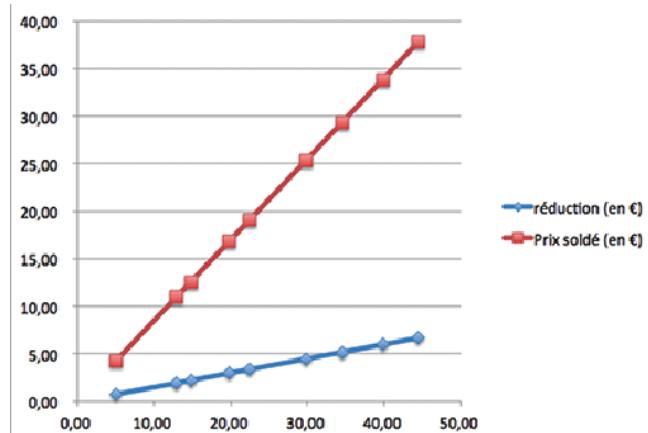
Réduire de 15 % revient à prendre 85 %, donc multiplier par 0,85.

Réduire de 20 % revient à prendre 70 %, donc multiplier par 0,7.

Etc.

e.

Il peut être difficile pour les élèves de faire un graphique avec le tableur sans l'aide de l'enseignant. On peut alors leur montrer.



Ces deux représentations graphiques semblent être des droites passant par l'origine du repère.

3. a.

On complète la ligne « Réduction » en enlevant 2 par tranche de 10 € ; il n'y a pas de formule possible sur tableur et d'ailleurs cela a peu d'intérêt puisque le calcul mental est très simple.

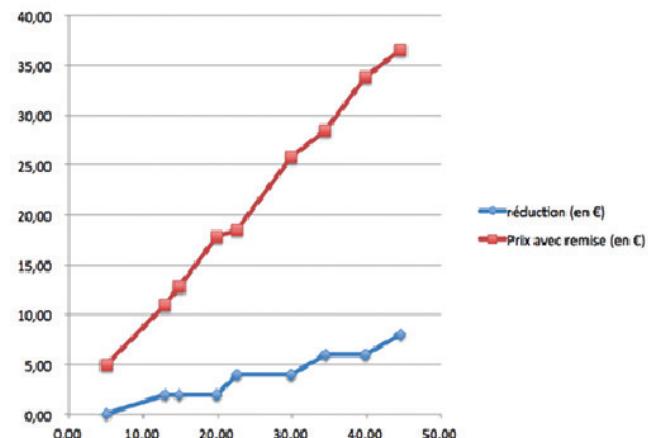
b. La réduction chez Mme Remise n'est pas proportionnelle au prix initial puisque pour les prix 12,90 € et 14,80 € la réduction est la même, 2 €.

c. Le prix avec remise n'est pas proportionnel au prix initial puisque, par exemple :

$$\frac{4,99}{4,99} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{10,97}{12,90} \neq 1$$

d.

Avec le tableur, il est plus simple de faire tracer ces deux graphiques dans une nouvelle fenêtre.



4. a. Il semble que les situations de proportionnalité correspondent à des droites passant par l'origine du repère.

b. Voir les tableaux ci-dessous.

M. Marchand										
Prix initial (en €)	4,99	12,90	14,80	19,80	22,50	29,80	34,50	39,80	44,50	
Réduction (en €)	0,75	1,94	2,22	2,97	3,38	4,47	5,18	5,97	6,68	
Prix soldé (en €)	4,24	10,97	12,58	16,83	19,13	25,33	29,33	33,83	37,83	
Mme Remise										
Prix initial (en €)	4,99	12,90	14,80	19,80	22,50	29,80	34,50	39,80	44,50	
Réduction (en €)	0,00	2,00	2,00	2,00	4,00	4,00	6,00	6,00	8,00	
Prix avec remise (en €)	4,99	10,90	12,80	17,80	18,50	25,80	28,50	33,80	36,50	

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir les propriétés d'additivité et de multiplication par un nombre dans des situations de proportionnalité ; de découvrir l'égalité des produits en croix dans une situation de proportionnalité.

1.	Masse de poulet (en kg)	3,600	0,900	2,700	1,350	1,750
	Prix (en €)	45,36	11,34	34,02	17,01	x

C'est l'occasion de rappeler que lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, ici la **masse de poulet (en kg)** et le **prix (en €)**, on peut représenter les valeurs dans un tableau à deux lignes, compléter un tableau en utilisant les propriétés d'additivité des colonnes ou de multiplication par un nombre d'une colonne.

$$1,350 \times 2 = 2,700, \text{ donc il faut faire } 17,01 \times 2 = 34,02.$$

$$2,700 \div 3 = 0,900, \text{ donc } 34,02 \div 3 = 11,34.$$

$$2,700 + 0,900 = 3,600, \text{ donc } 34,02 + 11,34 = 45,36.$$

2. a. La lettre x représente le **prix d'un poulet de 1,750 kg**.

On peut en profiter pour reparler de l'utilisation d'une lettre, en mathématiques, pour représenter une inconnue ou une variable. Ici, c'est une inconnue.

- La première égalité provient de l'égalité des quotients lorsque deux grandeurs sont proportionnelles.
- La deuxième égalité provient du calcul d'une quatrième proportionnelle en passant par l'unité.

17,01 correspond au prix de 1 kg de poulet, c'est aussi le coefficient de proportionnalité pour passer de la **ligne 1** à la **ligne 2** (de la **masse de poulet** au **prix**).

- La troisième égalité s'obtient à partir de la deuxième :

$$\begin{aligned} x &= \frac{17,01}{1,350} \times 1,750 \\ x \times 1,350 &\quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \quad x \times 1,350 = 17,01 \times 1,750 \end{aligned}$$

C'est l'occasion de faire noter aux élèves que l'égalité des quotients est équivalente à l'égalité des produits en croix, et que cela correspond aux situations de proportionnalité.

$$c. x = \frac{17,01}{1,350} \times 1,750 = 22,05$$

1,750 kg de poulet coutent 22,05 €.

Exercices

Reconnaître une situation de proportionnalité

Questions flash

1. a. La taille et la masse d'une personne ne sont pas proportionnelles.
b. L'aire et la masse d'une feuille de papier sont proportionnelles.
c. La quantité d'essence achetée et le prix à payer sont proportionnels.
d. La longueur d'une clé USB et sa capacité de mémoire ne sont pas proportionnelles.

2. a. $5 \times 2 = 10$ et $25 \times 2 = 50 \neq 100$
Non, ce n'est pas un tableau de proportionnalité.
b. $13 \times 2 = 26$; $13 \times 5 = 65$; $13 \times 8 = 104$
Oui, c'est un tableau de proportionnalité.

1.	Le prix est proportionnel à la masse.	Le prix est proportionnel à la quantité.	Il n'y a pas de proportionnalité.
	Tomates grappes Aubergines	Concombres Oignons jaunes Citrons	Avocats

2. Calcul :
 $2,50 + 1,20 + 0,90 \times 2 + 2 + 2,60 \times 2 + 3,40 \times 1,4 = 16,16$
Je dois payer 16,16 €.

4. 1. $4 \times 1,65 = 6,60 \neq 5,50$
Ce n'est pas une situation de proportionnalité.
2. $\frac{2\ 515}{17\ 605} \approx 0,14$ $\frac{1\ 031}{10\ 848} \approx 0,095$
Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Calculer une quatrième proportionnelle

Questions flash

5. 1. On ne peut pas répondre.
2. a. $12 \times 30 = 360$
En 30 min, 360 litres s'en écoulent.
b. $180 \div 12 = 15$
De tête, l'élève compte combien de fois 12 dans 180, on réinvestit le calcul mental et la division euclidienne.
Il faut 15 min pour remplir la baignoire de 180 litres d'eau.

3. Je parcours 5 km en 20 min, donc je parcours 1 km en 4 min (5 fois moins). Pour parcourir 7 km, il me faut donc 28 min (7 fois plus).

6. a. $x = \frac{12,15 \times 1,580}{0,675} = 28,44$
b. $x = \frac{5 \times 18,70}{1,70} = 55$

7. Le débit du tuyau d'arrosage est de 45 L toutes les 3 minutes, donc il débite 15 L en 1 minute.
 $660 \div 15 = 44$
Il faut 44 minutes pour remplir la piscine.

8. 1. $100 \$ = 25 \times 4 \$$
Donc on doit faire : $25 \times 3,50 \$ = 87,50 \$$
Avec 100 \$, on avait 87,50 \$.

En \$	4	x
En €	3,50	100

$$x = \frac{4 \times 100}{3,50} \approx 114,29$$

Avec 100 €, on avait environ 114,29 \$.

Exploiter une représentation graphique

Questions flash

- 9.** La température de la Terre n'est pas proportionnelle à la profondeur car la représentation graphique n'est pas une droite.
- 10.** 1. Le tarif « à la séance » est proportionnel au nombre de séances puisque la représentation graphique est une droite et elle passe par l'origine (le prix pour 0 séance est de 0 euro).
2. Pour 6 séances, il faut choisir le tarif à la séance.
Pour 10 séances, il faut choisir le tarif avec carnet.
Pour 16 séances, il faut choisir l'abonnement.
- 11.** 1. Avant l'ouverture du parachute, le graphique est une droite passant par l'origine, donc c'est une situation de proportionnalité.
2. Après l'ouverture, ce n'est plus le cas, donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Utiliser des pourcentages

Questions flash

- 12.** Elle n'a pas perdu 20 % de sa valeur initiale car la deuxième réduction de 10 % n'est pas sur le prix initial mais sur le prix déjà réduit de 10 %.
- 13.** $25 \text{ g} \times 4 = 100 \text{ g}$ et $3,1 \text{ g} \times 4 = 12,4 \text{ g}$
Dans un gâteau de 100 g, il y a 12,4 g de glucides.
Donc il y a 12,4 % de glucides dans ce gâteau.

14. $\frac{37,5}{100} \times 128 = 48$ et $128 - 48 = 80$
80 adhérents ont moins de 30 ans.

15. 1.

Or « 18 carats »	100	7
Or pur	75	x

$$x = \frac{75 \times 7}{100} = 5,25$$

Dans une bague en or de 7 g, il y a 5,25 g d'or pur.

2. $\frac{75}{100} \times 4 = 3$

On a besoin de 3 g d'or pur pour faire une bague de 4 g d'or « 18 carats ».

16. $\frac{5}{100} \times \frac{51}{100} = \frac{255}{10000} = \frac{2,55}{100} = 2,55\%$
2,55 % des capsules vendues sont à échanger parce qu'elles ont été abîmées pendant le transport.

Problèmes

Les glaçons

1. Le volume de glace est bien proportionnel au volume de l'eau liquide puisque la représentation graphique est une droite passant par l'origine.
2. Par lecture graphique, je sais qu'il faut 4,5 L d'eau liquide pour obtenir 5 L de glace.
3. Graphiquement : Avec 10 L d'eau liquide on obtient 11 L de glace.
Donc, avec 20 L d'eau liquide, on peut obtenir 22 L de glace (le double).

18

Diplôme national du brevet

Cet exercice peut permettre à l'enseignant de faire beaucoup de réinvestissement sur les notions de fractions et de proportions, y compris en considérant la fraction comme un nombre (voir 2. a.).

Il est intéressant de souligner que le recours à un tableau de proportionnalité n'est pas toujours pertinent.

- 1.** Jusqu'en 2015, le contrôle continu représente 200 points sur un total de 360 points.

Actuellement, le contrôle continu représente 400 points sur un total de 700 points.

$$\text{A-t-on } \frac{200}{360} < \frac{400}{700} ?$$

Pour comparer ces proportions il faut les ramener à des fractions de même dénominateur :

$$\text{Jusqu'en 2015 : } \frac{200}{360} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

$$\text{Actuellement : } \frac{400}{700} = \frac{4}{7} = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63}$$

$$\frac{35}{63} < \frac{36}{63}$$

Oui, actuellement le contrôle continu représente une plus grande partie que jusqu'en 2015.

- 2. a.** Actuellement, un élève doit obtenir 560 points sur un total de 700 pour avoir la mention *Très bien*.

$$\frac{560}{700} = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{16}{20}$$

Si on calculait la note du brevet sur 20, à partir de 16 un élève obtient la mention *Très bien*.

- b.** Jusqu'en 2015, un élève devait obtenir 288 points sur un total de 360 pour avoir la mention *Très bien*.

$$\frac{288}{360} = 0,8 = \frac{16}{20}$$

Oui, c'est le même résultat.

Résistance de l'air

$$131 \times 2 = 262 \neq 202$$

Donc la vitesse n'est pas proportionnelle au nombre de cônes.

Pose d'un parquet

Les 30 cm² doivent être augmentés de 10 % :

$$30 + \frac{10}{100} \times 30 = 30 + 3 = 33$$

$$33 \div 2,48 \approx 13,3$$

Il devra acheter 14 paquets.

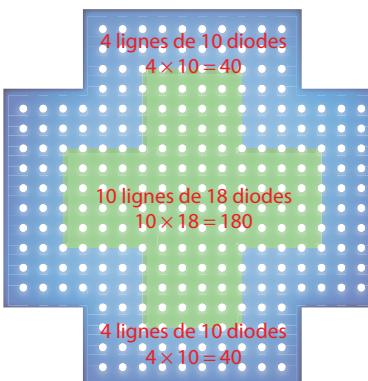
$$31,75 \times 14 = 444,50$$

Il devra payer 444,50 €.

Enseigne de pharmacie

1.

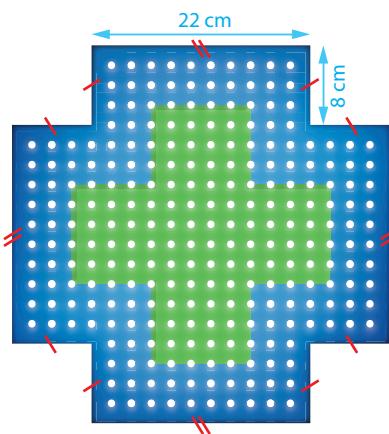
Pour trouver le nombre de diodes électroluminescentes dans cette enseigne, l'élève peut les compter une par une ou bien par paquets.



$$\text{Total : } 40 \times 2 + 180 = 260$$

Il y a 160 diodes électroluminescentes dans cette enseigne.

- 2.** Si l'espace entre deux diodes ou entre une diode et le bord de l'enseigne est de 2 cm, alors voici les dimensions que l'on peut calculer :



$$22 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 176 \text{ cm}^2$$

$$176 \text{ cm}^2 \times 4 = 704 \text{ cm}^2$$

$$22 \text{ cm} \times 22 \text{ cm} = 484 \text{ cm}^2$$

$$704 \text{ cm}^2 + 484 \text{ cm}^2 = 1188 \text{ cm}^2$$

Cette enseigne a une surface de 1188 cm^2 .

22 Big Ben

On mesure sur la photo du manuel :

Hauteur de Big Ben : 7,1 cm (en comptant la croix au sommet).
Diamètre de l'horloge : 0,5 cm.

Dimension réelle (en m)	96	<i>d</i>
Dimension sur la photo (en cm)	7,1	0,5

$$\text{Donc : } d = \frac{96 \times 0,5}{7,1} \approx 6,7$$

Le diamètre réel de l'horloge de Big Ben est compris entre 6,5 m et 7 m.

Les élèves seront sûrement étonnés de la taille de cette horloge, c'est le but : faire réfléchir sur la dimension des objets vus de loin.

Voir aussi l'exercice 39.

Sur Internet, on trouve plusieurs sources qui donnent un diamètre de 7 m. On trouve également un article sur le site de l'ENS de Lyon qui reprend des écrits d'Alfred Ungerer, horloger français du xx^e siècle. Il donne un diamètre de 6,85 m.

23 Une table en bois massif

$$10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$1,20 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 0,10 \text{ m} = 0,48 \text{ m}^3$$

Le volume du plateau est de $0,48 \text{ m}^3$.

$$4 \times (0,85 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}) = 4 \times 0,0085 \text{ m}^3 = 0,034 \text{ m}^3$$

Le volume des 4 pieds de la table est de $0,034 \text{ m}^3$.

$$0,48 \text{ m}^3 + 0,034 \text{ m}^3 = 0,514 \text{ m}^3$$

Le volume de la table est de $0,514 \text{ m}^3$.

La masse volumique du chêne est de 850 kg/m^3 , donc 1 m^3 pèse 850 kg.

Certains élèves auront recours à un tableau de proportionnalité :

Volume (en m^3)	1	0,514
Masse (en kg)	850	<i>m</i>

$$\text{Donc } m = 850 \times 0,514 = 436,9.$$

Cette table en chêne massif pèse 436,9 kg.

Pour donner un ordre de grandeur aux élèves, on peut faire remarquer que c'est environ la masse d'un cheval de selle ou encore la moitié de la masse d'une voiture citadine.

24 Running

- Yes, the graph shows a proportional relation because it is a straight line which pass through the origin.
- The point (30 ; 300) represents 300 calories burned in 30 minutes.

25 Route barrée

On rédige ici les calculs, cependant on pourrait accepter que l'élève fasse ce travail sur un brouillon et ne nous montre que la construction finale, notamment un élève en difficulté à l'écrit.

On peut leur demander de laisser visibles les traits de construction (on réinvestit ici les acquis sur les constructions à la règle et à l'équerre, sur la précision des tracés).

Sur la photo, on mesure les dimensions du panneau et de la lettre E (en mm puisque c'est l'unité utilisée) :

Longueur du panneau : 22 mm.

Largeur du panneau : 15 mm.

Hauteur de la lettre E : 3 mm.

Largeur de la lettre E : 2 mm.

Épaisseur des traits : environ 0,5 mm.

Les dimensions réelles du panneau sont :

Longueur : 880 mm ; Largeur = 600 mm

Dimensions réelles (en mm)	880	600	120	80	20
----------------------------	-----	-----	-----	----	----

Dimensions sur la photo (en mm)	22	15	3	2	0,5
---------------------------------	----	----	---	---	-----

$$15 \div 5 = 3, \text{ donc on calcule : } 600 \div 5 = 120.$$

$$22 \div 11 = 2, \text{ donc il suffit de faire : } 880 \div 11 = 80.$$

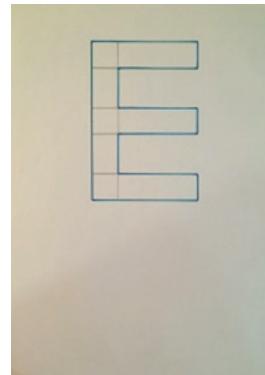
On aurait pu utiliser le produit en croix, mais il est bien plus rapide de raisonner sur les colonnes du tableau de proportionnalité et d'utiliser la division par un nombre d'une colonne pour en obtenir une autre.

On va donc dessiner une lettre E de hauteur 120 mm sur 80 mm.

L'élève complète les dimensions dont il a besoin au fur et à mesure de sa construction, notamment pour la largeur du trait du E et pour le placement de la barre centrale.

Les élèves seront sûrement étonnés de la taille de cette lettre ; on peut alors leur faire remarquer que les objets qui doivent être vus de loin sont bien plus grands qu'on le pense. On peut les faire travailler sur les échelles à partir de mobiliers urbains, par exemple. C'est aussi ce que l'on constate avec l'exercice 22.

Construction sur une feuille A4, ci-contre.



26 L'Europe

$$1. 7\ 349\ 472\ 000 - 3\ 018\ 344\ 000 = 4\ 331\ 128\ 000$$

Population mondiale		
1960	3 018 344 000	100
Augmentation	4 331 128 000	<i>x</i>

$$x = \frac{4\ 331\ 128\ 000 \times 100}{3\ 018\ 344\ 000} \approx 143,5$$

La population mondiale a augmenté de 143,5 % entre 1960 et 2015.

$$738\ 442\ 000 - 605\ 619\ 000 = 132\ 823\ 000$$

Population européenne		
1960	605 619 000	100
Augmentation	132 823 000	<i>y</i>

$$y = \frac{132\ 823\ 000 \times 100}{605\ 619\ 000} \approx 21,9$$

La population européenne a augmenté de 21,9 % entre 1960 et 2015.

2. $\frac{605\,619\,000}{3\,018\,344\,000} \approx 0,20 \approx 20\%$

$$\frac{738\,442\,000}{7\,349\,472\,000} \approx 0,10 \approx 10\%$$

En 1960, l'Europe représentait 20 % de la population mondiale ; en 2015, elle ne représente plus que 10 %.

3. La part de l'Europe a baissé.

27 Boule en bois sculpté

1. $V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 523,6$

Une boule de rayon 5 cm a un volume d'environ 523,6 cm³.

$$V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \approx 4\,188,8$$

Une boule de rayon 10 cm a un volume d'environ 4 188,8 cm³.

2. 10 cm est le double de 5 cm.

On regarde si la masse de la boule de rayon 10 cm est le double de celle de la boule de rayon 5 cm.

$$V_1 = 523,6 \text{ cm}^3 = 0,000\,523\,6 \text{ m}^3$$

$$M_1 = 700 \times 0,000\,523\,6 = 0,366\,52$$

La boule de rayon 5 cm a une masse d'environ 0,366 kg.

$$V_2 = 4\,188,8 \text{ cm}^3 = 0,004\,188\,8 \text{ m}^3$$

$$M_1 = 700 \times 0,004\,188\,8 = 2,932\,16$$

La boule de rayon 10 cm a une masse d'environ 2,932 kg.

Or 2,932 kg n'est pas le double de 0,366 kg.

Donc la masse d'une boule n'est pas proportionnelle à son rayon.

Certains élèves raisonneront directement sur les volumes car la masse est proportionnelle au volume.

3. Comme la masse volumique de la boule est en kg/m³, on va convertir 15 cm : 15 cm = 0,15 m.

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 0,15^3 \approx 0,014\,137$$

Le volume d'une boule en acajou de rayon 15 cm est d'environ 0,014 137 m³.

$$M \approx 700 \times 0,014\,137 \approx 9,896$$

La masse d'une boule de rayon 15 cm est d'environ 9,896 kg.

La sculpture de cette boule fait perdre 6 % de sa masse.

$$9,896 - \frac{6}{100} \times 9,896 \approx 9,302$$

La masse finale de la boule sculptée est d'environ 9,302 kg.

28 Voiture de collection

1. Entre 2010 et 2011, la cote de cette voiture a augmenté de

$$7\% : 28\,000 + \frac{7}{100} \times 28\,000 = 29\,960$$

La cote de cette voiture était de 29 960 € en 2011.

2. Entre 2011 et 2015, la cote de cette voiture a eu 4 hausses successives de 7 %.

$$29\,960 + \frac{7}{100} \times 29\,960 = 32\,057,2$$

$$32\,057,2 + \frac{7}{100} \times 32\,057,2 = 34\,301,204$$

$$34\,301,204 + \frac{7}{100} \times 34\,301,204 \approx 36\,702,29$$

$$36\,702,29 + \frac{7}{100} \times 36\,702,29 = 39\,271,45$$

La cote de cette voiture était de 39 271,45 € en 2015.

Enrichissement : cela peut être l'occasion de faire remarquer aux élèves que faire « prix + 7 % du prix » revient à faire « prix + 0,07 × prix » ou encore « 1,07 × prix ». Cela permet de faire plus rapidement ces calculs.

29 Fidéliser sa clientèle

1.

L'objectif de cet exercice est de faire travailler la méthode par essais. L'élève qui cherche à raisonner pour trouver de tête le bon ordre d'achat afin de n'effectuer qu'un seul calcul risque d'être dans l'impasse. Il faut le laisser en faire l'expérience pour ensuite l'interroger sur sa méthode.

- Exemple d'essai : Louise achète l'article à 15 €, celui à 50 € puis celui à 110 €.

Au 1^{er} achat, elle obtient un bon de réduction de :

$$0,20 \times 15 \text{ €} = 3 \text{ €}$$

2^e achat : l'article à 50 €, réduit de 3 €, coute 47 €.

Bon de réduction obtenu : $0,20 \times 47 \text{ €} = 9,40 \text{ €}$

3^e achat : l'article à 110 € est réduit de 9,40 €.

Bon de réduction : $0,20 \times 100,60 \text{ €} = 20,12 \text{ €}$

Ce bon de réduction n'a pas été utilisé.

Louise a dépensé : $15 \text{ €} + 47 \text{ €} + 100,60 \text{ €} = 162,60 \text{ €}$

Ces essais peuvent être faits sur la copie mais sans formalisme, c'est de la recherche. Par contre, l'élève doit détailler l'essai qui est le meilleur.

La combinaison la meilleure est l'essai suivant :

1^{er} achat : l'article à 110 €.

Bon de réduction obtenu : $0,20 \times 110 \text{ €} = 22 \text{ €}$

2^e achat : l'article à 50 € réduit de 22 € coute 28 €.

Bon de réduction obtenu : $0,20 \times 28 \text{ €} = 5,60 \text{ €}$

3^e achat : l'article à 15 €, réduit de 5,60 € coute 9,40 €.

Le bon de réduction obtenu ne servira pas.

Louise a dépensé : $110 \text{ €} + 28 \text{ €} + 9,40 \text{ €} = 147,40 \text{ €}$

2.

On demande à l'élève d'émettre une opinion argumentée.

Il est probable que le commerçant fait cette offre pour inciter les clients à revenir pour profiter du bon de réduction obtenu lors de leur achat.

30 Des éoliennes dans la tour Eiffel

1. Le graphique du doc. 3 représente la puissance électrique en fonction du vent exprimé en m/s. On va donc convertir 94 km/h.

$$94 \text{ km} = 94\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$$

$$94\,000 \div 3\,600 \approx 26,1 \text{ m/s}$$

Le lundi 24 aout 2015, les vents atteignaient 26,1 m/s.

Le doc. 1 montre qu'à partir de 25 m/s, les éoliennes ne produisent plus d'électricité, c'est-à-dire qu'elles sont à l'arrêt. Donc les éoliennes n'ont pas fonctionné ce jour-là.

2. Production des éoliennes de la tour Eiffel par an : 10 000 kWh.

Production des éoliennes bretonnes par an :

Puissance : 3 000 kW

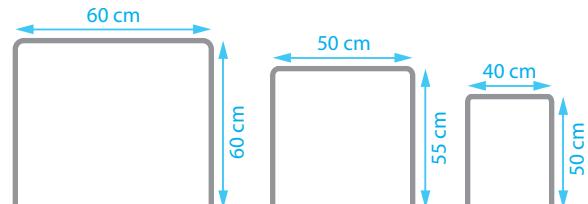
Durée de fonctionnement par an : $6 \text{ h} \times 365 = 2\,190 \text{ h}$

$$3\,000 \text{ kW} \times 2\,190 \text{ h} = 60\,570\,000 \text{ kWh}$$

À côté des éoliennes bretonnes, celles de la tour Eiffel produisent une quantité d'électricité très réduite. Cependant, cela permet de mettre en avant ce type d'énergie, d'où le mot « symbolique ».

31 Design

1.



$$3 \times 60 = 180$$

$$180 + 160 + 140 = 480$$

$$480 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 19\,200 \text{ cm}^2 = 1,92 \text{ m}^2$$

$$1,92 \times 52 \text{ €} = 99,84 \text{ €}$$

$$1,92 \times 67 \text{ €} = 128,64 \text{ €}$$

Ce ferronnier devra débourser 228,48 €.

$$2,6 \times 228,48 \text{ €} = 594,048 \text{ €}$$

Ces tables seront mises en vente à 594,05 €.

32 Chute libre d'une balle

1. Quand on regarde la chronophotographie, on voit que l'écart entre les photos augmente alors que les photos sont prises à intervalles réguliers de temps.

Donc la distance parcourue par la balle en chute libre n'est pas proportionnelle au temps écoulé.

Il est intéressant de voir ici que la preuve n'est pas apportée par un calcul (de quotients ou de produits en croix) mais par un raisonnement.

- 2.** La représentation graphique de la vitesse en fonction du temps n'est pas parfaitement une droite mais elle en est proche.

On peut donc utiliser la proportionnalité comme modèle pour trouver une valeur approchée de la vitesse de la balle au bout de 0,3 seconde, lorsqu'elle touche le sol.

En 0,1 s, la balle a atteint la vitesse de 100 cm/s.
Donc en 0,3 seconde, elle aura atteint une vitesse proche de 300 cm/s.

33 Les Temps modernes (1936)

Cet exercice est très complexe car il faut du temps pour comprendre l'énoncé. Et même une fois l'énoncé compris, le raisonnement est assez difficile et les étapes qui permettent d'arriver au résultat sont nombreuses.

Pour aider l'élève, on pourra l'encourager à :

- schématiser le problème ;
- faire des essais, par exemple si un film dure 1 h en version cinématographique, trouver sa durée en version numérique. Réfléchir au lien entre les deux durées ;
- utiliser un tableur pour faire plus d'essais et trouver la réponse.

$$3 \text{ min } 29 \text{ s} = 180 \text{ s} + 29 \text{ s} = 209 \text{ s}$$

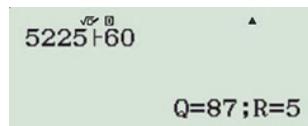
L'ancienne version durait 209 secondes de plus, avec 24 images par seconde.

$$209 \times 24 = 5\,016$$

Il y a 5 016 images qui ont été glissées en plus à chaque seconde. Donc le nombre total d'images du film est :

$$5\,016 \text{ images} \times 25 = 125\,400 \text{ images}$$

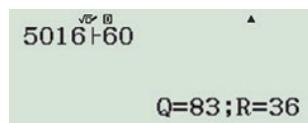
Ensuite on répartit ces images par paquets de 24 par seconde pour connaître la durée du film au format cinématographique (24 images par seconde) : $125\,400 \div 24 = 5\,225$



$$5\,225 \text{ s} = 87 \text{ min } 5 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 5 \text{ s}$$

Le film *Les Temps modernes* dure 1 h 28 min 5 s au format cinématographique.

$$\text{De même : } 125\,400 \div 25 = 5\,016$$



$$5\,016 \text{ s} = 83 \text{ min } 36 \text{ s} = 1 \text{ h } 23 \text{ min } 36 \text{ s}$$

Le film *Les Temps modernes* dure 1 h 23 min 36 s au format numérique.

Vérification :

$$1 \text{ h } 28 \text{ min } 5 \text{ s} - 1 \text{ h } 23 \text{ min } 36 \text{ s} = 3 \text{ min } 29 \text{ s}$$

La différence de durée entre les deux versions est bien de 3 min 29 s.

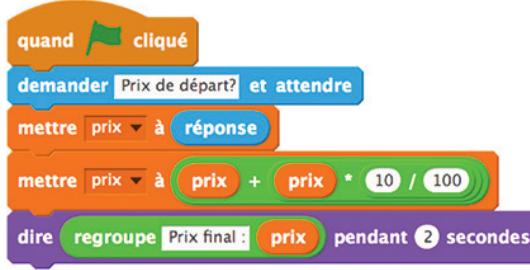
Les deux versions comptent bien le même nombre d'images : 125 400.

Algorithmique et outils numériques

34 Variations successives

- 1.** La variable **prix** représente le prix tout le long de l'activité, il prend successivement la valeur du prix initial puis la valeur du prix réduit de 10 %.

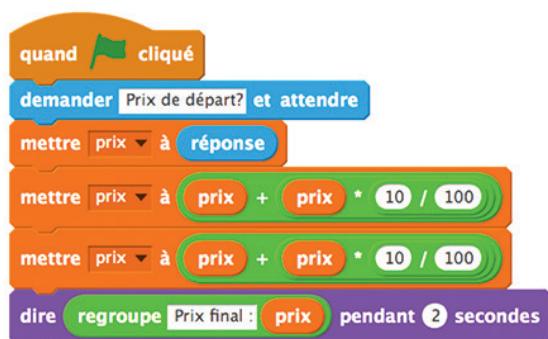
2. a.



b.

L'élève expérimente son script avec plusieurs prix, il faut qu'il essaie au moins une fois avec 100 pour vérifier qu'il obtient 110, de même avec 200 il doit obtenir 220, avec 50 il obtient 55.

3. a.

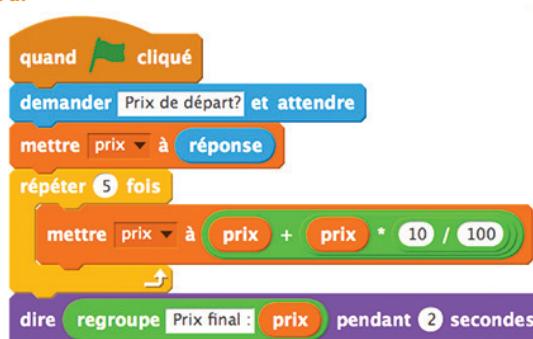


- b.** On teste le script avec 100 et on obtient 121, ce qui ne correspond pas à une hausse de 20 %.

Donc ces deux hausses successives de 10 % ne correspondent pas à une hausse de 20 %.

On peut faire trouver facilement aux élèves que cela correspond à une hausse de 21 %.

4. a.

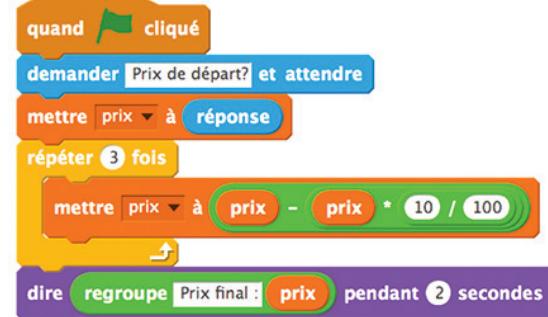


- b.** Comme à la question 3., on teste avec 100 et on obtient 161,051 qui ne correspond pas à une hausse de 50 %.

Cela correspond à une hausse de 61,051 %.

- c.** On fait des essais sur un prix de 100 mais en faisant varier le nombre de hausses successives : 6 hausses successives de 10 %, puis 7, puis 8...
On observe qu'on dépasse 200 (le double de 100) entre 7 et 8 hausses successives de 10 %.
Il faut augmenter 8 fois un prix de 10 % pour qu'il double (et même plus).

5. a.



- b.** Non, cela ne correspond pas à une baisse de 30 %.

On peut accepter ici que l'élève raisonne par analogie et répond spontanément non compte tenu des expériences similaires précédentes.

- c.** Même expérience qu'à la question 4.c.

À partir de 7 réductions successives de 10 %, le prix a diminué de moitié (et même plus).

35

Écran 16/9

Cet exercice est très complet sur l'utilisation d'un tableur et la proportionnalité.

1.

La largeur et la hauteur de l'écran sont proportionnelles, donc l'élève peut écrire dans la cellule C2 : =C1*B2/B1
Ensuite, il étend cette formule de la cellule C2 à la cellule G2.

2. Un écran de 16 cm sur 9 cm est un rectangle, donc lorsqu'on trace une diagonale, on forme deux triangles rectangles égaux.
On peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de cette diagonale :
 $d^2 = 16^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337$
Donc $d = \sqrt{337} \approx 18,4$.
La diagonale d'un écran de 16 cm sur 9 cm mesure environ 18,4 cm.

3.

Par le même raisonnement, l'élève peut écrire dans la cellule C4 : =C2*B3/B2
Puis il l'étend de C3 à G3.

4.

Comme 1 pouce = 2,54 cm, l'élève peut écrire dans la cellule C4 : =C3/2,54
Puis il étire cette formule de C4 à G4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Largeur de l'écran (en cm)	16	48,7	70,8	86,3	101,8	121,8
2	Hauteur de l'écran (en cm)	9	27,394	39,825	48,544	57,263	68,513
3	Longueur de la diagonale (en cm)	18,4	56,005	81,42	99,245	117,07	140,07
4	Longueur de la diagonale (en pouces)	7	22	32	39	46	55

36

Au cinéma

1. a. et b.

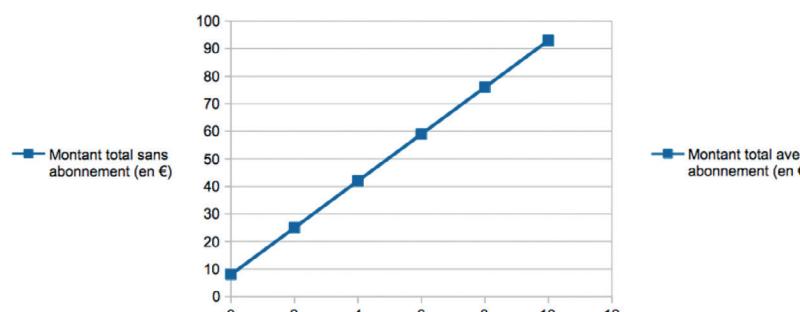
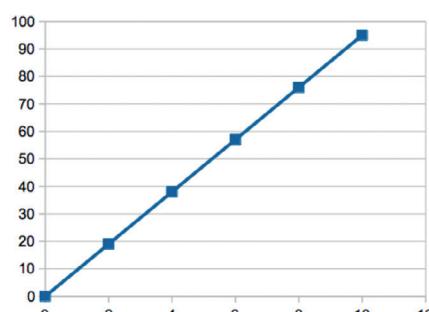
Les élèves peuvent avoir 3 niveaux de maîtrise de l'utilisation d'un tableur.

- Niveau 1 : L'élève fait les calculs de tête ou à la calculatrice et écrit les résultats dans les cellules.
Dans ce cas, il faut interroger ces élèves sur la pertinence de l'emploi d'un tableur.
Certains répondront « c'est plus propre, bien présenté, on peut se tromper et corriger sans ratures », ce qui est un atout, mais pas le seul. Le tableur peut calculer.
- Niveau 2 : L'élève a compris qu'il peut utiliser le tableur pour calculer, en employant le « = ». Mais il écrit « =2*9,50 » dans la cellule C2, « =4*9,50 » dans la cellule D2, etc.
On peut alors faire remarquer aux élèves qu'ils sont obligés d'écrire un calcul dans toutes les cellules, ce qui est long alors que la tâche est répétitive, elle peut être automatisée.
- Niveau 3 : L'élève écrit dans la cellule B2 « =B1*9,50 », puis il l'étire de B2 à G2.
Il est peut-être plus délicat de trouver la formule de la cellule B5 : « 8+B4*8,50 », à étirer de B5 à G5.

L'objectif est d'atteindre le niveau 3 pour tous d'ici la fin de l'activité (ou d'autres activités sur tableur).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de places	0	2	4	6	8	10
2	Montant total sans abonnement (en €)	0	19	38	57	76	95
3							
4	Nombre de places	0	2	4	6	8	10
5	Montant total avec abonnement (en €)	8	25	42	59	76	93

c. Pour construire les graphiques associés à ces deux tableaux, il faut préciser que les données sont en lignes.



d. Le tarif plein est proportionnel au nombre de places car la représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Le tarif abonnement n'est pas proportionnel au nombre de places car la représentation graphique est une droite mais elle ne passe pas par l'origine.

2.

On peut remonter le programme de calcul pour trouver le nombre de place que Karim peut acheter avec 150 €, avec ou sans abonnement.

Cependant, ici, on peut exploiter le tableur pour faire des essais :

On peut simplement indiquer aux élèves de faire des essais de valeurs pour les lignes « Nombre de places » et de faire calculer le prix correspondant en étirant encore les formules des lignes 2 et 5.

C'est l'occasion de préciser aux élèves que lorsqu'on change la valeur dans une cellule de la ligne 1, le tableur change automatiquement la valeur correspondante de la ligne 2.

On fait calculer pour 12, 14, 15, 16 places. On trouve que Karim peut aller 16 fois au cinéma en prenant un abonnement.

3. Si Karim garde 90 €, il reste 60 € pour le cinéma.

Il peut prendre au maximum 6 places mais c'est le plein tarif qui est le plus intéressant (Karim économise 2 €).

Voici un exemple d'utilisation du tableau pour faire les essais :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Nombre de places	0	2	4	6	7	8	14	15	16	18	20	22
2	Montant total sans abonnement (en €)	0	19	38	57	66,5	76	133	142,5	152	171	190	209
3													
4	Nombre de places	0	2	4	6	7	8	14	15	16	17	18	22
5	Montant total avec abonnement (en €)	8	25	42	59	67,5	76	127	135,5	144	152,5	161	195



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1.

L'élève écrit dans la cellule B2 : =B1*0,60

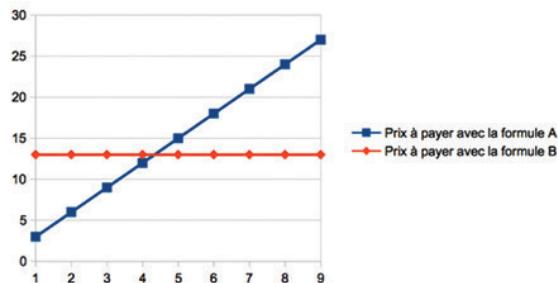
Il étire cette formule de B2 à J2.

Il écrit 13 dans les cellules B3 à J3.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1 Nombre de livres empruntés	5	10	15	20	25	30	35	40	45
2 Prix à payer avec la formule A	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3 Prix à payer avec la formule B	13	13	13	13	13	13	13	13	13

2.

Bien sûr, le graphique peut être fait avec le tableau si l'élève a commencé avec cet outil numérique.



3. La formule C est la plus intéressante à partir de 5 livres empruntés par an.

Exercice 1

1.

L'élève écrit dans la cellule B2 : « =B1*0,60 ».

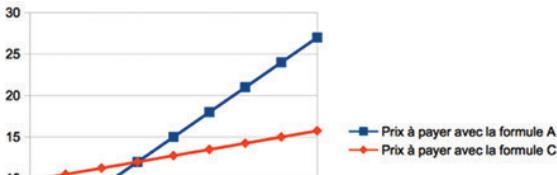
Il étire cette formule de B2 à J2.

Il écrit dans la cellule B3 : « =9+B1*0,25 ».

Il étire cette formule de B3 à J3.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1 Nombre de livres empruntés	5	10	15	20	25	30	35	40	45
2 Prix à payer avec la formule A	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3 Prix à payer avec la formule C	9,75	10,5	11,25	12	12,75	13,5	14,25	15	15,75

2.

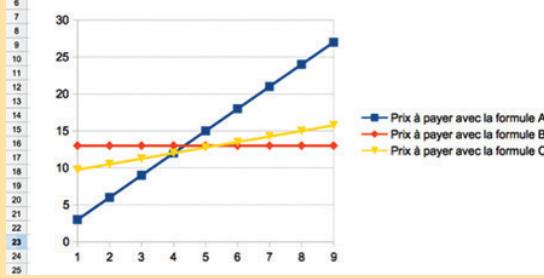


3. La formule C est intéressante à partir de 5 livres empruntés.

Mise en commun des versions verte et rose

Le professeur peut afficher sur un même graphique les trois formules et les faire comparer aux élèves.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1 Nombre de livres empruntés	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
2 Prix à payer avec la formule A	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
3 Prix à payer avec la formule B	13	13	13	13	13	13	13	13	13	
4 Prix à payer avec la formule C	9,75	10,5	11,25	12	12,75	13,5	14,25	15	15,75	



(Voir fichier tableau dans le manuel numérique ou sur le site Hachette Éducation.)

Exercice 2

1. $30 \times 100 \text{ g} \times 60 = 180 000 \text{ g} = 180 \text{ kg}$

Cet éleveur a besoin de 180 kg de blé.

$180 \text{ kg} = 9 \times 20 \text{ kg}$

Cet éleveur devra commander 9 sacs de 20 kg de blé.

2. $9 \times 6,60 \text{ €} = 59,40 \text{ €}$

$$59,60 \text{ €} - \frac{10}{100} \times 59,60 \text{ €} = 53,46 \text{ €}$$

Cet éleveur devra finalement payer 53,46 €.

Exercice 2

1. $26 \times 120 \text{ g} \times 30 = 93 600 \text{ g} = 93,6 \text{ kg}$

Cet éleveur a besoin de 93,6 kg de blé.

$$93,6 \div 25 = 3,744$$

Cet éleveur aura besoin de 4 sacs de 25 kg de blé.

$$4 \times 8,25 \text{ €} = 33 \text{ €}$$

Réduction de 6 % :

$$33 \text{ €} - \frac{6}{100} \times 33 \text{ €} = 31,02 \text{ €}$$

Cet éleveur devra payer 31,02 €.

2. Cet éleveur a acheté 100 kg de blé.

$$100 \div 100 = 0,310 \text{ 2}$$

Le kilogramme de blé lui coûte 0,310 2 €.

Écriture d'un énoncé

Exemples :

a. Tim a vu un sweat à 24 € soldé -13 %.

À combien s'élève la réduction en euros ?

On peut faire remarquer que des réductions de -13 % sont peu fréquentes...

b. Un pantalon à 29,90 € est soldé -30 %.

Quel est son prix final ?

c. Un manteau à 56,70 € est soldé -40 %.

Calculer son prix après réduction.

Analyse d'une production

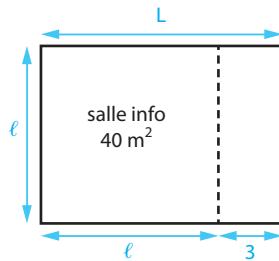
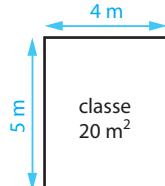
$$4 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$

$$8 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 80 \text{ m}^2$$

La salle informatique ne peut pas faire 8 m sur 10 m car, dans ce cas, sa surface n'est pas le double de celle de la classe mais le quadruple.

Cela peut être l'occasion de dire aux élèves que lorsque les dimensions sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 .

Correction :



$$5 \times 8 = 40 \text{ et } 8 = 5 + 3$$

Donc la salle informatique mesure 5 m sur 8 m.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

- Dans l'esprit du cycle, on retrouve ici toutes les notions déjà abordées plus tôt dans le cycle, dans les chapitres 18 et 19. Il reste néanmoins une nouveauté qui est la réduction et l'augmentation de pourcentages.

- Ce chapitre permet de refaire le point avec tous les élèves sur les notions acquises sur la proportionnalité : reconnaître des situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité à l'aide de graphiques, par exemple, calculer une quatrième proportionnelle par différentes méthodes dont le coefficient de proportionnalité et le produit en croix et utiliser les pourcentages.

Activités

Questions flash

1. 60 %.
2. 1 728 000 électeurs.
3. 4,50 € le kilo.

4. 5,40 € pour 300 g donc 5 € ne suffisent pas.
5. Pour une intensité de 0,006 A, la tension sera de 12 V.

À la recherche d'un terrain

Intentions des auteurs

Cette activité est ici pour mettre à profit la notion de proportionnalité dans un problème à prise d'initiative. Aucune nouveauté mais maîtrise des capacités étudiées plus tôt dans le cycle.

L'objectif de cette activité est de reconnaître une situation de proportionnalité et d'appliquer un pourcentage sous forme décimale.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des formules d'aire du carré et du rectangle, et de la notion d'échelle.

Activité 1

« chercher », « représenter » et « raisonner » et par conséquent le domaine 4 du socle : les systèmes naturels et les systèmes techniques dans lesquels on retrouve la démarche scientifique et d'investigation.

1.

Le COS est de 0,05 à Pessac soit 5 % de la surface au sol et de 0,35 sur Mérignac soit 35 % de la surface au sol. On peut remarquer que la prise au sol à Mérignac est 7 fois plus importante qu'à Pessac.

$0,05 \times 2\ 200 = 110 \text{ m}^2$ pour le terrain à Pessac et $0,35 \times 520 = 182 \text{ m}^2$ à Mérignac.

Le terrain de Mérignac permettra de construire la maison de 150 m^2 alors qu'à Pessac ce ne sera pas possible.

2. Une feuille A4 a pour format $21 \times 29,7$. Comme le terrain est rectangulaire de 20 m sur 26 m, on peut prendre 1 cm pour 1 m soit l'échelle $\frac{1}{100}$.

Pour cette question, on peut différencier le travail. Tout le monde doit trouver une échelle en adéquation avec le format de la feuille et les plus rapides peuvent se lancer dans la réalisation d'un plan de maison avec la répartition des pièces en 2D.

Intentions des auteurs

Dans cette activité, une nouvelle notion est introduite pour appliquer un taux de pourcentage. Le but est d'optimiser le calcul d'une augmentation ou d'une réduction. L'objectif de cette activité est d'appliquer un pourcentage de deux façons dont une plus rapide. Les prérequis nécessaires sont la connaissance du calcul littéral pour la dernière question ainsi que du développement et de la factorisation pour la troisième question.

Cette activité met en avant la nouveauté du chapitre : la réduction et l'augmentation d'un pourcentage. Il est important de montrer aux élèves que cette activité peut se faire de deux manières différentes et que la seconde est plus rapide. On réinvestit la notion « appliquer un pourcentage » étudiée dans les classes précédentes.

Dans cette activité, il est nécessaire d'avoir des prérequis sur le calcul littéral pour la question 4. ainsi que sur le développement et la factorisation pour la question 3..

Il est bon de s'appuyer sur différents exemples pour ceux qui ne visualisent pas avec le calcul littéral. Ici, le calcul littéral n'est pas fondamental pour expliquer la notion, donc il ne faut pas hésiter

à en faire abstraction pour les élèves en plus grande difficulté pour qu'ils puissent rentrer dans la tâche et pour qu'ils puissent comprendre le but de cette nouvelle notion.

1. $280\ 000 \times 8\% = 22\ 400\ €$: les frais de notaire sont de 22 400 €.
2. $280\ 000\ € + 22\ 400\ € = 302\ 400\ €$: le prix total de l'achat est de 302 400 €.
3. $280\ 000 \times 0,08 + 280\ 000 = 280\ 000 (0,08 + 1) = 280\ 000 \times 1,08$

On peut différencier le calcul dans les processus : on peut proposer aux élèves 2 façons différentes de faire le calcul, soit par le développement de $280\ 000 (0,08 + 1)$ et rappeler la formule de distributivité, soit par factorisation de $280\ 000 \times 0,08 + 280\ 000$ avec la même formule.

C'est le même calcul : on calcule le montant de l'achat.

4.

On réalise la même démarche que précédemment avec les nombres. On peut pour certains reprendre des nombres pour ne pas rajouter une difficulté supplémentaire.

$$x + x \times 0,08 = x \times 1,08$$

Exercices

Reconnaitre une situation de proportionnalité

Questions flash

- 1** Oui **2** Non **3** Non
- 4** 1. Non, la température d'ébullition n'est pas proportionnelle à la pression car la représentation graphique n'est pas une droite passant par l'origine.
2. Environ 1,4 bars.
- 5** $\frac{8}{1,5} = \frac{720}{135}$ donc le robinet de cuisine et le mitigeur de la salle de bains ont le même débit d'eau.
- 6** $399 + 47,89 = 446,89$
Rémi a droit à une remise de 15 € par tranche de 100 €, donc la remise est de 60 €.
Il paiera $446,89 - 60 = 386,89$ €.

Calculer une quatrième proportionnelle

Questions flash

- 7** $6 \times 20,25 \div 15 = 8,1\ €$
- 8** $0,6 \times 4,20 = 2,52\ €$
- 9** $1\ 000 \times 11,35 = 11\ 350\ g$ pour le cube
- 10** $2\ h\ 22\ min = 2 \times 60 + 22\ min = 142\ min$
Un Français passe 142 min à manger par jour.
 $\frac{1}{5} \times 142 = 28,4\ min$
 $28,4\ min = 28\ min\ 0,4 \times 60\ s = 28\ min\ et\ 24\ s$
Un Français passe 28 min et 24 s à manger devant la télé.
- 11** On suppose que la distance parcourue est proportionnelle au temps. On réalise un tableau de proportionnalité.

Distance parcourue (en m)	2 000	$3 \times 500 = 1\ 500$
Temps (en min)	7	?

$$7 \times 1\ 500 \div 2\ 000 = 5,25\ min$$

Or $5,25\ min = 5\ min\ 0,25 \times 60\ s = 5\ min\ et\ 15\ s$

Lino devrait répondre 5 min et 15 s.

- 12** 1. Léa part avec le plein donc elle peut faire 650 km.
Elle doit parcourir 1 001 km. Une fois le premier plein consommé, il lui reste $1\ 001 - 650 = 351$ km à faire.
Elle va donc faire le plein. Elle parcourt les 351 km restants.
Il lui restera $650 - 351 = 299$ km à faire avec le reste d'essence.
Si elle part avec un réservoir plein, il lui faudra faire le plein une fois sur son trajet pour faire son parcours.
2. Si elle fait un plein seulement, elle paiera : $1,35 \times 45 = 60,75\ €$
- 13** 1 mach équivaut à 340 m/s.
La vitesse du son est proportionnelle à la vitesse de l'avion ;
 $2,2$ mach = $2,2 \times 340 = 748$ m/s.
L'avion fait 748 m en 1 seconde, soit 0,748 km en 1 s.
Une heure compte 3 600 s.
Donc $3\ 600 \times 0,748 = 2\ 692,8$ km/h.
Un avion de chasse peut aller à la vitesse maximale de 2 692,8 km/h.
- 14** Dans 100 mL, il y a 9,5 g de sucres.
La bouteille contient 2 L de jus, soit 20 fois plus que 100 mL.
Donc la bouteille contient $20 \times 9,5 = 190$ g de sucres.

Utiliser des pourcentages

Questions flash

- 15** $84\% \times 125 = 105$ élèves
- 16** $60 \div 80 = 75\%$
- 17** $1\ 650 \times 1,04 = 1\ 716\ €$
Donc les réponses correctes sont :
 $1\ 650 \times 1,04 ; 1\ 716$ et $1\ 650 + 66$.
- 18** $66,3 \div 508,1 \approx 13\%$
Les Français représentent 13 % de la population européenne.

19 $40\% \times 30 = 12$

Il y a 12 filles dans la classe de 3^e A.

$50\% \times 22 = 11$

Il y a 11 filles dans la classe de 3^e B.

$12 + 11 = 33$

Il y a 33 filles dans les deux classes réunies.

$30 + 22 = 52$

Il y a 52 élèves dans les deux classes réunies.

Soit $33 \div 52 \times 100 \approx 63,5$

Elles représentent environ 63,5 % et non 45 %.

20 $2\ 500 + 3\ 600 = 6\ 100$

L'usine fabrique 6 100 biscuits par jour.

$80\% \times 2\ 500 = 2\ 000$

2 000 biscuits à la fraise sont fabriqués dans l'atelier A.

$60\% \times 3\ 600 = 2\ 160$

2 160 biscuits à la fraise sont fabriqués dans l'atelier B.

$2\ 000 + 2\ 160 = 4\ 160$

4 160 biscuits à la fraise sont fabriqués par jour.

$4\ 160 \div 6\ 100 \times 100 \approx 68,2$

Environ 68,2 % de biscuits sont à la fraise.

21 1. $85 \div 3\ 426 \times 100 \approx 2,5$ % de pannes la première année.

2. $617 \div 3\ 426 \times 100 \approx 18$ % de pannes les 5 premières années.

22 On cherche la réduction qui permet de passer de 5,3 L à 5,1 L.

Soit $5,3 \times ? = 5,1$.

Comme c'est une réduction, on cherche un taux sous la forme : $(1 - t\%)$

Soit $5,3 \times (1 - t\%) = 5,1$.

Donc $1 - 5,1 \div 5,3 = t\%$ d'où $t\% \approx 3,8$ % de réduction de consommation d'énergie.

Problèmes

23 **Guernica**

L'échelle indique que 1 cm sur le dessin représente en réalité 145 cm.

$5,35 \times 145 = 775,75$ cm et $2,41 \times 145 = 349,45$ cm

Cette œuvre mesure environ 7,8 m sur 3,5 m.

24 **Chauffage**

La pièce a pour volume $15 \times 2,6 = 39 \text{ m}^3$ et la puissance nécessaire est de $39 \times 925 \div 25 = 1\ 443$ W.

Donc le radiateur de 1 500 W est nécessaire.

25 **Fourniture détaillée**

Soit x le prix d'un pot de peinture.

Il a acheté 6 pots de peinture et il y a une TVA à 20 % sur chaque pot de peinture.

Augmenter le prix de 20 % le prix des 6 pots revient à multiplier les 6 pots de peinture par $(1 + 20\%) = 1,2$.

$6x \times 1,2 = 7,2x$

$7,2x = 540$ donc $x = 540 \div 7,2 = 75$ €.

Chaque pot de peinture coûte 75 €.

26 **Achat groupé**

Vic achète 4 brioches et 3 flans pour 9,60 €.

Rosa achète 5 brioches et 4 flans pour 12,40 €.

Donc si on additionne les dépenses de Vic et de Rosa, on aura $5 + 4 = 9$ brioches et $3 + 4 = 7$ flans pour $9,6 + 12,4 = 22$ €.

Donc si on soustrait les dépenses de Vic et de Rosa, on aura $5 - 4 = 1$ brioche et $4 - 3 = 1$ flan pour $12,4 - 9,6 = 2,8$ €.

Ainsi 10 brioches et 10 flans coûtent $2,80 \text{ €} \times 10 = 28$ €.

27 **Course à pied**

On suppose que la distance parcourue est proportionnelle au temps. On réalise un tableau de proportionnalité.

Distance parcourue (en m)	1 500	$6 \times 400 = 2\ 400$
Temps (en min)	?	$4 \times 3 = 12$

$12 \times 1\ 500 \div 2\ 400 = 7,5$ min

Or $7,5$ min = 7 min 0,5 × 60 s = 7 min et 30 s

Estelle devrait répondre 7 min et 30 s pour faire 1 500 m.

28 **Thé en vrac ou thé en boîte ?**

Le thé en boîte coûte 2,20 € les 40 g soit $2,20 \text{ €} \times 5 = 11$ € les 200 g = 40 g × 5.

Le thé en vrac coûte 2,60 € les 50 g soit $2,60 \text{ €} \times 4 = 10,40$ € les 200 g = 50 g × 4.

$10,40 \text{ €} < 11$ € donc le thé en vrac est moins cher que le thé en boîte.

Manon peut donc espérer faire changer d'avis sa grand-mère.

29 **Distance de réaction**

À 130 km/h, Léo parcourt environ $130 \div 3\ 600 \approx 36$ m en 1 seconde et Noé environ $90 \text{ m} \approx 130 \div 3\ 600 \times 2,5$.

30 **Running**

En 80 min, il fait 10 miles donc en 2,5 h = 150 min, il fait :

$$18,75 \text{ miles} = 10 \times 150 \div 80$$

$$v = \frac{d}{t} \text{ donc } v = 10 \div 80 = 0,125 \text{ miles/min soit :}$$

$$0,125 \times 60 = 7,5 \text{ miles/h.}$$

31 **Hotte et débit d'air**

Le volume de la cuisine est de $13 \times 3 = 39 \text{ m}^3$. Il faut renouveler 12 fois l'air en une heure, donc $12 \times 39 = 468 \text{ m}^3$.

La hotte doit avoir un débit de 468 m^3 par heure au minimum. Alix doit choisir une hotte dont le débit est d'au moins 468 m^3 par heure. Son choix peut se porter sur la hotte CH60S noir qui a un débit de 581 m^3 par heure.

32 **Économie d'énergie**

1. Pour la consommation actuelle :

$$(512 + 290 + 35 + 330 + 71 + 70 + 35 + 196) \times 0,14 = 215,46 \text{ €}$$

2. En changeant les 5 éléments, sa consommation sera :

$$(420 + 227 + 35 + 330 + 45 + 70 + 31 + 172) \times 0,14 = 186,20 \text{ €}$$

Il économisera $215,46 \text{ €} - 186,20 \text{ €} = 29,26 \text{ €}$

3. En changeant ses habitudes, il peut faire diminuer sa facture de 10 % sur les éléments non renouvelés. Soit $((420 + 227 + 45 + 31 + 172) + (35 + 330 + 70)) \times 0,9 \times 0,14 = (895 + 391,5) \times 0,14 = 180,11 \text{ €}$

Il économisera en plus : $6,09 \text{ €} = 186,20 \text{ €} - 180,11 \text{ €}$

4. Il économise 16,4 % de sa consommation initiale :

$$(215,86 - 180,11) \div 215,86 \times 100 = 16,4.$$

33 **Presse-papier en verre**

Faisons un tableau de proportionnalité car la masse est proportionnelle au volume.

$$2\ 650 \text{ kg} = 2\ 650\ 000 \text{ g} \text{ et } 1 \text{ m}^3 = 1\ 000 \text{ dm}^3$$

Les volumes des presse-papier sont :

$$5^3 = 125 \text{ cm}^3, 7^3 = 343 \text{ cm}^3 \text{ et } 4^3 = 64 \text{ cm}^3$$

Masse (en g)	2 650 000	x	y	z
Volume (en dm ³)	1 000	0,125	0,343	0,064

Masse du cube de 5 cm :

$$x = 2\ 650\ 000 \times 0,125 \div 1\ 000 \quad x = 331,25 \text{ g}$$

Masse du cube de 7 cm :

$$y = 2\ 650\ 000 \times 0,343 \div 1\ 000 \quad y = 908,95 \text{ g}$$

Masse du cube de 4 cm :

$$z = 2\ 650\ 000 \times 0,064 \div 1\ 000 \quad z = 169,6 \text{ g}$$

34 **Terrasse**

1. La terrasse fait $3 \times 4 = 12 \text{ m}^2$. $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$.

Marie doit faire une chape de $0,1 \times 12 = 1,2 \text{ m}^3$.

Elle aura donc besoin de $800 \times 1,2 = 960 \text{ kg}$ de sable ; $350 \times 1,2 = 420 \text{ kg}$ de ciment et $1\ 000 \times 1,2 = 1\ 200 \text{ kg}$ de gravier.

$960 \div 40 = 24$ sacs de sable de 40 kg.

$420 \div 35 = 12$ sacs de ciment de 35 kg.

$1\ 200 \div 35 \approx 34,29$ soit 35 sacs de gravier de 35 kg.

Pour les carreaux de grès : il lui faut 10 paquets de 32 carreaux, $10 \times 1,28 = 12,8 \text{ m}^2$.

Les matériaux lui coutent :

$$24 \times 1,69 + 12 \times 5,65 + 35 \times 2,49 + 12 \times 19,95 = 434,91 \text{ €}$$

2. La charge est de :

$$24 \times 40 + 12 \times 35 + 35 \times 35 + 10 \times 1,2 = 2\ 914 \text{ kg}$$

La charge est supérieure à 2 t donc elle devra faire 2 voyages.

35 **Eau potable, eau de récupération**

1. Les WC, Jardin/Lavage voiture et Lessive représentent 6 % + 20 % + 13 % = 39 % de la consommation d'eau.

$39 \% \times 150 = 58,5 \text{ m}^3 = 58\ 500 \text{ L}$. Donc le « volume besoin » de cette famille est bien de 58 500 L.

2. La capacité de la cuve sera de 4 000 L car :

$$1\ 840 + 58\ 500 \times 10 \div 365 \approx 3\ 442,7$$

soit $1\ 628 \text{ €} + 2\ 450 \text{ €} = 4\ 078 \text{ €}$ pour le prix de l'installation et de la cuve.

D'après le **doc. 1**, une consommation de 150 m^3 coûte environ 600 € par an à la famille.

La facture diminue de 39% donc elle s'élèvera à $600 \times 0,61 = 366 \text{ €}$ par an au lieu de 600 € .

Soit une réduction de $600 \text{ €} - 366 \text{ €} = 234 \text{ €}$ par an.

$4078 \div 234 \approx 17,4$: au bout de 18 ans, la famille aura amorti son investissement.

36 Toutes sortes d'or

1. L'or 18 carats : dans 1 g d'or 18 carats, il y a 750 millièmes d'or pur quel que soit l'or (jaune, rose ou blanc).

2. Un Napoléon contient $0,9 \times 6,45 \text{ g} = 5,805 \text{ g}$ d'or pur.

Soit x la quantité d'or 750 millièmes :

$$x \times 0,75 = 5,805$$

$$x = 5,805 \div 0,75 = 7,74 \text{ g}$$

On peut faire 7,74 g de 750 millièmes d'or avec un Napoléon.

37 Marchés de l'été

Il est prévu 24 jours de beau temps et 7 jours de temps pluvieux ou nuageux.

• Pour l'emplacement de Claouey :

$$24 \times 400 + 7 \times 80 - 1200 = 8960 \text{ €}$$

• Pour la boutique au Cap-Ferret :

$$24 \times 300 + 7 \times 240 - 30 \times 31 = 7950 \text{ €}$$

Camille et son frère devraient choisir l'emplacement à Claouey, qui est plus rentable.



38 Le marathon

$$4 \text{ min et } 30 \text{ s} = 4,5 \text{ min}$$

$$4,5 \times 42,195 = 189,8775 \text{ min}$$

Soit $189,8775 \text{ min} \approx 3 \text{ h } 9 \text{ min } 52 \text{ s}$

Il fera donc moins de 3 h 30 min.

39 Le cycliste

1. a. 190 km.

b. en 2 h 20 min.

c. 20 km.

2. Non, il n'y a pas de proportionnalité entre la distance parcourue et la durée de parcours car le graphique n'est pas une droite. Le cycliste ne va pas toujours à la même allure.

40 Vrai ou faux ?

• **Affirmation 1 :** vraie car $\frac{1}{4}$ des adhérents sont majeurs et $\frac{2}{3}$ des majeurs ont moins de 25 ans, ce qui représente $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ soit $\frac{1}{6}$.

• **Affirmation 2 :** fausse car la réduction de 20% ne s'applique plus sur le prix initial mais sur le prix déjà soldé, donc les pourcentages ne s'ajoutent pas.

41 La piscine

Le modèle de piscine avec la plus grande surface est le modèle B avec 32 m^2 .

Surfaces :

$3 \times 5 = 15 \text{ m}^2$ pour le modèle A

$4 \times 8 = 32 \text{ m}^2$ pour le modèle B

$8,5 \times 3,5 = 29,75 \text{ m}^2$ pour le modèle C

Pour faire le contour de la piscine avec les dalles sur 2 m de large, il faut 2 rangées de dalles.

Pour la rangée la plus proche de la piscine, il faut 8 dalles de 1 m sur la longueur et 4 dalles sur la largeur ainsi que 4 dalles dans les angles pour faire le contour complet, soit $8 \times 2 + 4 \times 2 + 4 = 28$ puis, sur la seconde rangée, il faut 10 dalles sur la longueur, 6 dalles sur la largeur et 4 dalles dans les angles, soit $10 \times 2 + 6 \times 2 + 4 = 36$, soit $28 + 36 = 64$ dalles en tout.

La promo est de 15% ; il paieront $64 \times 0,85 \times 13,9 = 756,16 \text{ €}$ pour toutes les dalles.

42 Le 7^e continent

1. $550\,000 \times 6 = 3\,300\,000 \text{ km}^2$, surface du 7^e continent.

2. $3\,300\,000 \times 1,1 = 3\,630\,000 \text{ km}^2$ dans un an.

3. $3\,630\,000 \times 1,1^3 = 4\,831\,530 \text{ km}^2$; l'affirmation est fausse.

Algorithmique et outils numériques

43 Placement

1. a. Une augmentation de 2% sur 100 € revient à multiplier 100 € par $(1 + 2\%) = 1,02$.

Soit $100 \times 1,02 = 102 \text{ €}$.

Roméo disposera de 102 € au bout d'un an.

b. Une augmentation de 2% sur 102 € revient à multiplier 102 € par $(1 + 2\%) = 1,02$.

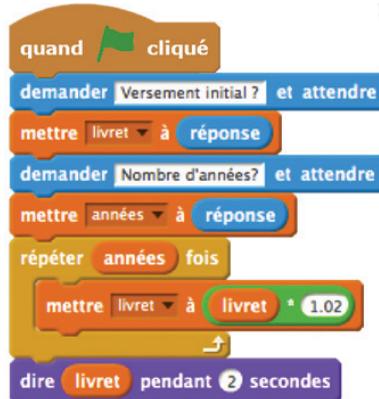
Soit $102 \times 1,02 = 104,04 \text{ €}$.

Roméo disposera de $104,04 \text{ €}$ au bout de deux ans.

2. a. **livret** représente le montant dans le livret.

années représente le nombre d'années d'épargne.

Ce sont des variables qui évoluent chaque année.



b. Avec ce script, on trouve $749,86 \text{ €}$.

3. a. Il suffit de changer 1.02 par 1.025 .

b. Il devra attendre 29 ans.

44 Rendez-vous sur la route

Temps (en min)	Distance entre Sarah et Paris (en km)	Distance entre Fatiha et Paris (en km)
0	413	0
10	396,48	16,5
20	379,96	33
30	363,44	49,5
40	346,92	66
50	330,4	82,5
60	313,88	99
70	297,36	115,5
80	280,84	132
90	264,32	148,5
100	247,8	165
110	231,28	181,5
120	214,76	198
130	198,24	214,5
140	181,72	231
150	165,2	247,5
160	148,68	264
170	132,16	280,5
180	115,64	297
190	99,12	313,5
200	82,6	330
210	66,08	346,5
220	49,56	363
230	33,04	379,5
240	16,52	396
250	0,00	412,5

Au bout de 2 h, elles risquent de se croiser à environ 200 km de Paris. Elles peuvent se donner rendez-vous à Tours vers 12 h 30.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. $80\% \times 510 = 408$ élèves mangent à la cantine
 $25\% \times 408 = 102$ élèves mangent 5 fois par semaine et
 $408 - 102 = 306$ mangent 4 jours par semaine.
 $102 \times 5 \times 36 \times 3,5 = 64\,260$
 $306 \times 4 \times 36 \times 3,5 = 154\,224$
 Soit une recette de $64\,260 + 154\,224 = 218\,484$ € sur l'année.
2. Demi-pension 5 jours pour 1 trimestre :
 $210 \text{ €} = 5 \times 3,5 \times 12$
 Demi-pension 4 jours pour 1 trimestre :
 $168 \text{ €} = 4 \times 3,5 \times 12$

Exercice 1

1. $80\% \times 500 = 400$ élèves demi-pensionnaires
 $30\% \times 400 = 120$ élèves mangent 5 fois par semaine dont
 $10\% \times 120 = 12$ élèves « boursiers 1 » ; $5\% \times 120 = 6$ élèves « boursiers 2 » et $15\% \times 120 = 18$ élèves « boursiers 3 ».
 $400 - 120 = 280$ élèves mangent 4 fois par semaine dont
 7 élèves « boursiers 3 » et 11 élèves « boursiers 1 ».
 $120 \times 5 \times 36 \times 3,5 = 75\,600$
 $280 \times 4 \times 36 \times 3,5 = 141\,120$
 $75\,600 + 141\,120 = 216\,720$ € sur l'année.
2. Demi-pensionnaire non boursier 5 jours pour 1 trimestre :
 210 €
 Demi-pensionnaire « boursiers 1 » 5 jours pour 1 trimestre :
 $210 - 28 (84 \div 3 = 28) = 182 \text{ €}$
 Demi-pensionnaire « boursiers 2 » 5 jours pour 1 trimestre :
 $210 - 77 (231 \div 3 = 77) = 133 \text{ €}$
 Demi-pensionnaire « boursiers 3 » 5 jours pour 1 trimestre :
 $210 - 120 (360 \div 3 = 120) = 90 \text{ €}$
 Demi-pensionnaire non boursier 4 jours pour 1 trimestre :
 168 €
 Demi-pensionnaire « boursiers 1 » 4 jours pour 1 trimestre :
 $168 - 28 = 140 \text{ €}$
 Demi-pensionnaire « boursiers 2 » 4 jours pour 1 trimestre :
 $168 - 77 = 91 \text{ €}$
 Demi-pensionnaire « boursiers 3 » 4 jours pour 1 trimestre :
 $168 - 120 = 48 \text{ €}$

Exercice 2

1. $2\,500 \times 300 = 750\,000$ g de pâte, soit 750 kg.
2. $60\% \text{ de } 750 \text{ kg} = 450$ kg de farine pour les $2\,500$ baguettes.

Exercice 2

1. $2\,100 \times 300 = 630\,000$ g de pâte, soit 630 kg.
2. $52\% \times 630 = 327,6$ kg de farine ;
 $36\% \times 630 = 226,8$ kg d'eau ;
 $1,2\% \times 630 = 7,56$ kg de sel ;
 $10,8\% \times 630 = 68,04$ kg de levure pour $2\,100$ baguettes.

Écriture d'un énoncé

Un couple veut vendre un appartement à $200\,000$ € et les frais d'agence s'élèvent à 6% du bien.
 Quel sera le prix affiché en agence ?

Analyse d'une production

- Julia a un raisonnement faux car elle fait une augmentation alors que c'est une diminution.
 Elle l'applique en plus sur le poids final.
- Loïc a un raisonnement faux car il applique le pourcentage sur le produit final alors que c'est sur le produit initial ; il confond masse perdue et masse initiale.
- Enzo a un raisonnement faux car il se trompe sur son développement.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

D'après le programme, le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne.

Ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres disciplines dans lesquelles interviennent les mathématiques (physique-chimie, sciences et vie de la Terre...).

Objectifs du chapitre

- Un travail particulier est mené sur les horaires et durées. Celui-ci se veut concret et efficace : il ne s'agit pas de poser des opérations reposant sur des règles abstraites mais plutôt de construire des méthodes qui s'appuient sur des représentations concrètes, notamment des schémas
- On travaille dès le début du cycle 4 sur le lien entre deux grandeurs et l'exploitation de la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. La rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations

graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui sera stabilisée en classe de 3^e, dans le chapitre 23. Aucune formalisation n'est attendue à ce niveau : on travaille sur le sens concret de ces notions, le choix et la cohérence des unités.

- De nombreux exercices et problèmes permettent de mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, en se limitant à des grandeurs simples en début de cycle et en conservant éventuellement les unités dans les calculs. Néanmoins on ne s'interdit pas de travailler avec des grandeurs produits déjà rencontrées par les élèves, comme les aires ou les volumes. Des problèmes concrets amènent les élèves à commenter des documents authentiques et à estimer l'ordre de grandeur d'une mesure (développement de l'esprit critique).

Repère de progressivité

Il serait préférable d'avoir traité la proportionnalité en amont, certains exercices nécessitant cette notion. Il est possible de résoudre des problèmes concernant ces notions tout au long de l'année, de manière transversale, et de n'en faire un bilan qu'en fin d'année.

Activités

Questions flash

1. $13 \text{ h } 40 \text{ min} + 6 \text{ h} = 19 \text{ h } 40 \text{ min}$.
Il est donc 19 h 40 à Paris.
2. Marina a payé $2,5 \text{ kg} \times 3 \text{ €/kg} = 7,5 \text{ €}$.
3. $1\ 803 - 1\ 736 = 67$.
Cet homme a vécu 67 ans.
4. $\frac{32,18688}{20} \approx 1,6$.
1 mille représente donc environ 1,6 km.

5. Réponse b., soit 1 h.
6. Pierre parcourt 50 km en $\frac{1}{2} \text{ h}$, donc 100 km en 1 h et 200 km en 2 h. Il lui reste donc 200 km à parcourir.
7. Pour faire les deux tours, Luce a mis :
 $32 \text{ s} + 43 \text{ s} = 75 \text{ s} = 60 \text{ s} + 15 \text{ s} = 1 \text{ min } 15 \text{ s}$.
8. Il y a une heure de décalage horaire entre Paris et Athènes.

Tir à l'arc

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'exploiter la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. Les prérequis nécessaires sont de savoir se repérer dans le plan. La capacité introduite est de savoir exploiter la représentation graphique d'une grandeur.

1. La courbe débute par un point d'ordonnée 1, donc la flèche est tirée d'une hauteur de 1 mètre.
2. Le point le plus haut de la courbe a une ordonnée d'environ 3, donc la hauteur maximale de la flèche est d'environ 3 mètres.
3. Quand la flèche est au sol, sa hauteur est de 0 m. Or, sur cette courbe, il y a un point d'ordonnée et il a pour abscisse 10, donc la flèche est retombée au sol à 10 mètres de Julie.

4. Au départ, la flèche a une hauteur de 1 mètre. Il y a un deuxième point sur la courbe qui a pour ordonnée 1. Celui-ci a pour abscisse 9. Donc la flèche repasse par sa hauteur de départ à 9 mètres de Julie.

Cette activité se veut concrète. C'est néanmoins l'occasion de consolider ici la notion de repérage dans le plan et le vocabulaire associé (abscisse, ordonnée, coordonnées) abordé dans le chapitre 5 « Nombres relatifs : définition ».

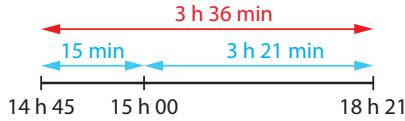
On pourra prolonger cette activité en demandant aux élèves d'inventer d'autres questions liées à cette représentation. Ceci pourrait, par exemple, se faire à l'oral, en début de séance suivante.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de calculer des horaires et des durées. C'est la capacité introduite.
Il n'y a aucun prérequis nécessaire.

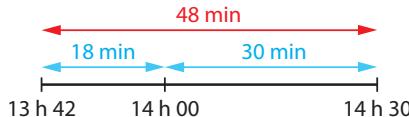
1. Il faut calculer :

$$14 \text{ h } 45 \text{ min} + 3 \text{ h } 36 \text{ min} = 14 \text{ h } 45 \text{ min} + 15 \text{ min} + 3 \text{ h } 21 \text{ min} \\ = 15 \text{ h } + 3 \text{ h } 21 \text{ min} = 18 \text{ h } 21 \text{ min}$$



Gaëlle arrivera donc à 18 h 21.

2. a.

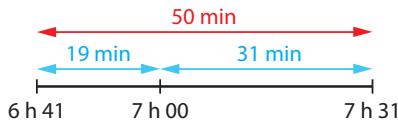


La correspondance à Marseille dure donc 48 minutes.

b. $\frac{3}{4} \text{ h} = \frac{3}{4} \times 60 \text{ min} = 45 \text{ min}.$

Il faut calculer : 17 h 02 min + 45 min = 17 h 47 min.
Maria arrivera à 17 h 47.

c.



Le taxi doit prendre Maria à 6 h 40 environ.

3. D'après les questions 1. et 2. b., c'est Maria qui arrivera la première.

L'objectif est de dégager des méthodes simples et concrètes. On pourra inciter les élèves à faire des schémas s'ils n'en ont pas l'idée. C'est aussi l'occasion de travailler les ordres des grandeurs en incitant les élèves à vérifier la cohérence de leurs résultats.

Aller-retour

Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'exploiter un graphique distance-temps.

Les prérequis nécessaires sont de savoir se repérer dans le plan. La capacité introduite est de savoir exploiter la représentation graphique d'une grandeur.

1. Lucas habite à 4 km de chez Axel car on voit qu'après avoir parcouru 4 km, la distance reste la même pendant un long moment, ce qui signifie qu'Axel est à l'arrêt.
2. Axel et Lucas ont joué ensemble de 14 h 30 à 16 h, soit 1 h 30 min.
3. Axel est arrivé chez lui à 16 h 15.
4. Il y a deux points de la courbe d'ordonnée 2 : l'un correspond à 14 h 15 et l'autre à 16 h 08 (environ). C'est donc à ces deux moments qu'Axel est passé devant son collège.

5. À l'aller, Axel a mis 30 minutes pour faire le trajet et au retour seulement 15 minutes pour la même distance. Il a donc été plus vite au retour.

Le fait que la distance représentée n'est pas la distance parcourue mais la distance séparant Axel de chez lui peut représenter une difficulté.

On laissera de l'autonomie aux élèves sur cette activité qui travaille à la fois les notions de durée, d'horaires et l'exploitation d'une représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. On évoque ici la notion de vitesse même si celle-ci n'a pas besoin d'être calculée.

On pourra prolonger cette activité en demandant aux élèves d'inventer d'autres questions liées à cette représentation. Ceci pourrait, par exemple se faire à l'oral, en début de séance suivante.

Exercices

Calculer des durées, des horaires

Questions flash

1. a. $2 \text{ min } 15 \text{ s} + 1 \text{ h } 03 \text{ min} = 1 \text{ h } 05 \text{ min } 15 \text{ s}.$
b. $3 \text{ min } 54 \text{ s} + 10 \text{ s} = 4 \text{ min } 4 \text{ s}.$
c. $5 \text{ min } 37 \text{ s} - 38 \text{ s} = 4 \text{ min } 59 \text{ s}.$
2. $1 \text{ min } 17 \text{ s} + 1 \text{ min } 28 \text{ s} = 2 \text{ min } 45 \text{ s}.$
Alicia a mis 2 min 45 s pour faire les deux tours
3. $1 \text{ min } 18 \text{ s} + 13 \text{ s} = 1 \text{ min } 31 \text{ s}.$
L'ancien record de Luca était de 1 min 31 s.
4. a. $\frac{900}{60} = 15$ donc $900 \text{ min} = 15 \text{ h}.$
b. $1 \text{ min } 253 = 20 \times 60 + 53.$
Donc $1 \text{ min } 253 = 20 \text{ h } 53 \text{ min}.$

5. a. $37 \text{ min} = 37 \times 60 \text{ s} = 2200 \text{ s}.$

b. $42 \text{ h} = 42 \times 3600 \text{ s} = 151200 \text{ s}.$

c. $3 \text{ h} = 3 \times 3600 \text{ s} = 10800 \text{ s}.$

$45 \text{ min} = 45 \times 60 \text{ s} = 2700 \text{ s}.$

Donc :

$$4 \text{ h } 45 \text{ min} = 10800 \text{ s} + 2700 \text{ s} = 13500 \text{ s}.$$

6. a. $36 \text{ min} = \frac{36}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}.$

b. $3 \text{ h } 30 \text{ min} = 3,5 \text{ h}.$

c. $4 \text{ h } 45 \text{ min} = 4,75 \text{ h}.$

7. $10 \text{ h } 50 \text{ min} - 9 \text{ h } 35 \text{ min} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}.$

Le vol dure donc 1 h 15 min.

8. $11 \text{ h } 50 \text{ min} + 3 \text{ h } 10 \text{ min} = 15 \text{ h}.$

Ma montre indiquera 15 h à l'arrivée à Athènes.

9. $3 \text{ min } 3 \text{ s} + 2 \text{ min } 49 \text{ s} + 2 \text{ min } 45 \text{ s} + 3 \text{ min } 33 \text{ s} + 3 \text{ min } 50 \text{ s} + 3 \text{ min } 12 \text{ s} = 16 \text{ min } 192 \text{ s}.$

Or $192 = 3 \times 60 + 12.$

$192 \text{ s} = 3 \text{ min } 12 \text{ s}.$

D'où $16 \text{ min } 192 \text{ s} = 19 \text{ min } 12 \text{ s}.$

Cette liste dure donc 19 min 12 s.

36 Évolution des espèces

Entre 1900 et aujourd'hui, les vitesses de course de l'homme, du cheval et du lévrier ont augmenté. C'est celle du cheval qui a augmenté la plus vite entre 1930 et 2008. Depuis 2008, les vitesses n'augmentent quasiment plus.
De tous temps, le plus rapide des trois a toujours été le lévrier et le moins rapide l'homme.

37 Taille moyenne des pieds

1. Un pied de 18,4 cm correspond à une pointure de 29.
2. Un enfant de 2 ans chausse du 22 s'il est dans la moyenne basse. Donc Angélique n'a pas de petits pieds.
3. Pour un enfant de 6 ans, la moyenne haute est la pointure 31 et la basse est 28. L'écart est donc de 3 pointures.

38 Taux d'un médicament dans le sang

1. Calculer 60 % d'un nombre revient à le multiplier par : $\frac{60}{100} = 0,6$, donc :

Heure	8 h 00	9 h 00	10 h 00	11 h 00
Pénicilline (en mg)	300	180	108	64,8

$\downarrow \times 0,6 \quad \downarrow \times 0,6 \quad \downarrow \times 0,6$

2. Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée environ 32. Donc au bout d'un jour, il reste 32 mg de substance active dans le sang de Pierre.

3. $\frac{32}{80} = 0,4 ; \frac{14}{32} = 0,4375 ; \frac{6}{14} \approx 0,43$.

C'est donc la réponse c., soit environ 40 %.

39 Fumer tue

1. $40 \text{ ans} - 16 \text{ ans} = 24 \text{ ans} = 24 \times 365 \text{ jours} = 8760 \text{ jours}$.

Mme Leplot a fumé pendant 24 ans soit 8 760 jours.
 $8760 \text{ jours} \times 20 \text{ cigarettes/jour} = 175200 \text{ cigarettes}$
Mme Leplot a fumé 175 200 cigarettes en 24 ans.

$$\frac{85}{100} \times 0,85 \text{ g} = 0,7225 \text{ g.}$$

Chaque cigarette contient 0,7 225 g de tabac.

$$175200 \text{ cigarettes} \times 0,7225 \text{ g/cigarette} = 126582 \text{ g} = 126,582 \text{ kg.}$$

Mme Leplot a donc consommé 126,582 kg de tabac durant ces 24 ans.

2. a. $175200 \text{ cigarettes} \times 11 \text{ min/cigarette} = 1927200 \text{ min.}$
Mme Leplot a donc potentiellement perdu 1 927 200 minutes de vie durant ces 24 ans.

- b. $1927200 \text{ min} = 32120 \text{ h}$
 $= 1338 \text{ jours } 8 \text{ h}$
 $= 3 \text{ ans } 243 \text{ jours } 8 \text{ h}$

3. Une personne meurt du tabagisme toutes les 8 secondes dans le monde.

$$\frac{1 \text{ h}}{8 \text{ s}} = \frac{3600}{8 \text{ s}} = 450.$$

Donc en 1 h, 450 personnes meurent des suites du tabagisme dans le monde.

450 personnes/h \times 24 h = 10 800 personnes.

Donc en 1 jour, 10 800 personnes meurent des suites du tabagisme dans le monde.

10 800 personnes/jour \times 365 jours = 3 942 000 personnes

Donc en 1 an, 3 942 000 personnes meurent des suites du tabagisme dans le monde.

40 Conversation par Internet

Les plages horaires impossibles sont les suivantes :

Horaire de Berlin	9 h - 16 h 30	0 h - 07 h 30	23 h - 7 h	14 h - 22 h
Horaire de Sydney	18 h - 01 h 30	9 h - 16 h 30	8 h - 16 h	23 h - 7 h

+ 9h

Il reste donc les plages horaires suivantes :

Horaire de Berlin	7 h 30 - 9 h	22 h - 23 h
Horaire de Sydney	16 h 30 - 18 h	7 h - 8 h

+ 9h

41 Arbres

1.

n	Nombre de conifères	Nombre de pommiers
1	8	1
2	16	4
3	24	9
4	32	16
5	40	25

2. En continuant le tableau (on ajoute 8 conifères à chaque fois et le nombre de pommiers et le carré du nombre de rangées) :

n	Nombre de conifères	Nombre de pommiers
6	48	36
7	56	49
8	64	64

On voit que pour 8 rangées, il y aura autant de conifères que de pommiers. Néanmoins, cette méthode ne prouve pas que c'est la seule valeur.

On peut représenter graphiquement le nombre de conifères et de pommiers en fonction du nombre de rangées pour s'en convaincre à l'aide d'un tableau ou argumenter en continuant le tableau et en voyant que le nombre de pommiers augmente beaucoup plus vite que le nombre de conifères (multiplication de n par n , qui est plus grand que 8 comparé à $n \times 8$).

3. Le nombre de pommiers augmente beaucoup plus vite que le nombre de conifères (multiplication de n par n , qui est plus grand que 8 comparé à $n \times 8$).

Algorithmique et outils numériques

42 Convertisseur

1. Les variables utilisées dans ce script sont h , m et s .

2. Le script d'Amélie sert à convertir une durée en heures, minutes et secondes en secondes.

3.



4. On peut tester cet algorithme, par exemple, avec 1 h 0 min 0 s, avec 0 h 1 min 0 s.

43 Bagage à main

1. Voir le fichier tableau dans le manuel numérique.

2. a. Voir le fichier tableau dans le manuel numérique.

- b. Cette formule affiche le mot « Accepté » quand la somme des dimensions du bagage est inférieure ou égale à 115 et « Non accepté » dans le cas contraire.

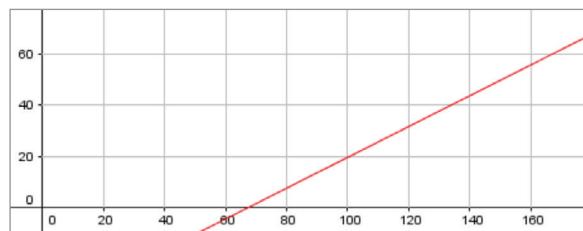
44 Poids idéal

1. $1,64 \text{ m} = 164 \text{ cm}$.

$$\text{Pour } t = 164, \text{ on a } p = \frac{3 \times 164 - 200}{5} = 58,4.$$

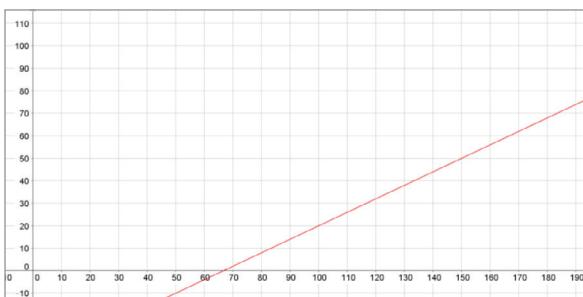
Le poids idéal pour Gabrielle est de 58,4 kg.

2.



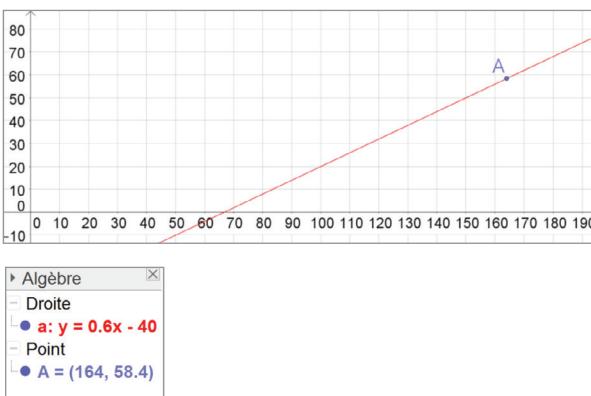
Voir le fichier logiciel dans le manuel numérique.

3.



Voir le fichier logiciel dans le manuel numérique.

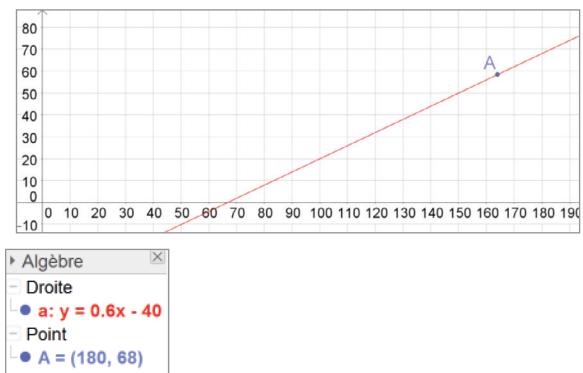
4. et 5.



Voir le fichier logiciel dans le manuel numérique.

L'ordonnée du point A de la courbe d'abscisse 164 est de 58,4. On trouve bien le même résultat que par le calcul.

6.



L'abscisse du point A de la courbe d'ordonnée 68 est de 180. C'est donc pour une femme de 1,80 m que le poids idéal est de 68 kg.

Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. Le temps du vainqueur est de :
1 h 49 min 18 s 420 millièmes ou 1 h 49 min 18,42 s.
2. L'écart de temps entre le 1^{er} et 2^e est de :
4 s 488 millièmes ou 4,488 s.
3. Le temps réalisé par S. Vettel est de :
 $1 \text{ h } 49 \text{ min } 18,42 \text{ s} + 4,488 \text{ s} = 1 \text{ h } 49 \text{ min } 22,908 \text{ s}$ ou
1 h 49 min 22 s 908 millièmes.
4. L'écart de temps entre S. Vettel et L. Hamilton est de :
6,053 s – 4,488 s = 1,565 s ou 1 s 565 millièmes.

Exercice 1

1. Le temps réalisé par C. Sainz Jr. est de :
1 h 49 min 18,42 s + 25,056 s = 1 h 49 min 43,476 s ou
1 h 49 min 43 s 476 millièmes.
2. L'écart de temps entre S. Vettel et L. Hamilton est de :
6,053 s – 4,488 s = 1,565 s ou 1 s 565 millièmes.
3. La valeur de la vitesse affichée sous le temps de N. Rosberg est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du circuit. Elle signifie que si N. Rosberg avait parcouru la même distance avec le même temps à vitesse constante, celle-ci aurait été de 143 km/h.
Elle a été calculée en divisant la distance parcourue par le temps de parcours : $v = \frac{d}{t}$.

Travail en groupe

1. a.

- ① « inch » mesure une longueur.
- ② « pound » mesure une masse.
- ③ « gallon » mesure un volume.
- ④ « Fahrenheit » mesure une température.

b.

- ① En France, on mesure une longueur en mètres.
- ② En France, on mesure une masse en kilogrammes.
- ③ En France, on mesure un volume en mètres cube.
- ④ En France, on mesure une température en degrés Celcius.

2.

- ① 1 inch = 2,54 cm donc pour convertir une mesure en inches en centimètres, on la multiplie par 2,54. Inversement, pour convertir une mesure en inches, on divise la mesure en centimètres par 2,54.
- ② 1 pound = 453,592 g ≈ 0,453 kg donc pour convertir une mesure en pounds en grammes, on la multiplie par 453,592. Inversement, pour convertir une mesure en pounds, on divise la mesure en grammes par 453,592.
- ③ 1 gallon ≈ 3,785 L donc pour convertir une mesure en gallons en litres, on la multiplie par 3,785. Inversement, pour convertir une mesure en gallons, on divise la mesure en litres par 3,785.
- ④ Pour convertir une mesure en Fahrenheit en degrés Celcius, il faut enlever 32 et diviser par 1,8. Inversement, pour convertir une mesure en degrés Celcius en Fahrenheit, il faut multiplier par 1,8 et ajouter 32.

3.

- ① Un écran de diagonale 15 pouces (15 inches) correspond à une diagonale d'environ 38 cm.
- ② Élodie pèse 17 kg soit environ 37,5 pounds.
- ③ Un réservoir qui contient 3,5 gallons contient environ 13,248 litres.
- ④ L'eau bout à 100 °C soit à 212 °F.

4.

Analyse d'une production

①

inches	1	2	3	4	5	10
cm	2,54	5,08	7,62	10,16	12,7	25,4

②

kilogrammes	1	2	5	10	50
pounds	2,20	4,41	11,02	22,05	110,23

③

litres	1	2	5	10	50
gallons	0,26	0,53	1,32	2,64	13,21

④

Degrés Celcius	0	10	37	100
Fahrenheit	32	50	98,6	212

5. Chaque groupe fait une présentation.

Bastien a trouvé un point de la courbe d'ordonnée 10 mais il y en a deux : l'un d'abscisse 12 et l'autre d'abscisse 18,3 environ. Donc il a fait 10 °C à midi et aux alentours de 18 h 20.

La réponse de Bastien est donc incomplète.
Il y a bien un seul point d'ordonnée 14, il a pour abscisse 15,5 mais 15,5 h = 15 h 30 min et non 15 h 50 min.
Bastien s'est donc trompé dans sa conversion.

Introduction

Programme

En 5^e, la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3^e, avec le vocabulaire et les notations correspondants.

En continuité avec le travail engagé au cycle 3, ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres thèmes du programme et offre de nombreux liens avec la physique-chimie ou les sciences de la vie et de la Terre. C'est aussi l'occasion d'activités de recherche (par exemple, pour déterminer la formule donnant le volume de certains solides).

Les élèves doivent disposer de références concrètes (savoir, par exemple, que la circonférence de la Terre est environ 40 000 km) et être capables d'estimer l'ordre de grandeur d'une mesure. Par ailleurs, le travail autour des formules s'inscrit parfaitement dans l'introduction du calcul littéral.

Attendus de fin de cycle

- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Comprendre et utiliser la notion de fonction.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées	
Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités. Notion de grandeur produit et de grandeur quotient. Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule.	Identifier des grandeurs composées rencontrées en mathématiques ou dans d'autres disciplines (par exemple : aire, volume, vitesse, allure, débit, masse volumique, concentration, quantité d'information, densité de population, rendement d'un terrain). Commenter des documents authentiques (par exemple : factures d'eau ou d'électricité, bilan sanguin).

Répères de progressivité :

Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Les grandeurs produits et les grandeurs quotients sont introduites dès la 4^e. L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3^e, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès.

On a travaillé dès le chapitre 21 sur le lien entre deux grandeurs et l'exploitation de la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. Les grandeurs produits et quotients sont plus particulièrement travaillées en milieu de cycle. Aucune formalisation n'est attendue à ce niveau, on travaille sur le sens concret de ces notions et la cohérence des unités. On commence également à représenter une grandeur en fonction d'une autre et on poursuit le travail d'exploitation d'une telle représentation.

La notion de fonction de manière formalisée ne sera vue qu'en 3^e. Le travail de ce chapitre a notamment pour objectif de préparer l'introduction de la notion formelle de fonction. Cette introduction pourra ainsi s'appuyer sur les exemples concrets qui auront été étudiés cette année de façon à ce que la notion de fonction n'apparaisse pas comme un objet trop abstrait pour les élèves. De même, le vocabulaire (images, antécédents...) pourra ainsi être amené plus naturellement.

Place dans la progression : Il serait préférable d'avoir traité la proportionnalité en amont, certains exercices nécessitant cette notion.

Activités

Questions flash

1. $17 \text{ h } 05 \text{ min} - 16 \text{ h } 37 \text{ min} = 28 \text{ min}$

La durée de son trajet est de 28 minutes.

2. Il leur reste 150 km à parcourir, donc au même rythme, la famille Adams mettra le même temps que pour les 150 premiers kilomètres soit 2 h. Elle arrivera donc à destination à 9 h 30.

3. a. $700 \text{ g} = 0,7 \text{ kg}$ et $2 \times 0,7 = 1,4$.

Un ananas de 700 g coutera donc 1,40 €.

b. $\frac{15}{2} = 7,5$

Avec 15 euros, on peut donc acheter au maximum 7,5 kg d'ananas.

4. a.

Durée de la publicité (en minutes)	2	3	5	7
Nombre de spectateurs qui changent de chaîne (en milliers)	20	30	50	70

b. Ces deux grandeurs sont proportionnelles car la représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de travailler sur le sens d'une grandeur quotient. Les prérequis nécessaires sont de savoir lire des informations dans un tableau, sur une carte. La capacité introduite est d'utiliser des grandeurs quotients et des grandeurs produits.

- Densité de la Belgique en 2015 (en habitants par km^2) :

$$\frac{11300\,000}{31\,000} \approx 365.$$
- Densité de la France en 2015 (en habitants par km^2) :

$$\frac{64\,400\,000}{552\,000} \approx 117.$$
- Cela signifie, qu'en moyenne, en Belgique, il y a 365 habitants par kilomètre carré et qu'en France, il y a en moyenne, 117 habitants par kilomètre carré.
- Non, on ne peut pas dire que plus la population est grande, plus

la densité est grande. Par exemple, en France, il y a beaucoup plus d'habitants qu'en Belgique mais la densité est plus petite.

4. On a $\frac{\text{nombre d'habitants en Suisse}}{41\,000} = 220.$

Donc : nombre d'habitants en Suisse = $202 \times 41\,000 = 8\,282\,000$.

5. En 2015 :

	Population en millions	Superficie en milliers de km^2	Densité
Allemagne	80,7	357	226
Belgique	11,3	31	365
Espagne	46,1	506	91
France métropolitaine	64,4	552	117
Italie	59,8	301	199
Luxembourg	0,6	3	200
Suisse	8,3	41	202

Changent de couleur : l'Italie, la Suisse.

Ben et Sandy

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de vitesse moyenne. Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la proportionnalité. La capacité introduite est d'utiliser des grandeurs quotients et des grandeurs produits.

- Le fait que Ben roule à une vitesse constante de 60 km/h signifie qu'en 1 h à cette vitesse, il parcourt 60 km et que la distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours (s'il roule deux fois plus longtemps, il parcourra deux fois plus de distance).
- 10 km, c'est 6 fois moins que 60 km donc il lui faut 6 fois moins de temps pour les parcourir soit :

$$\frac{1\text{ h}}{6} = \frac{60\text{ min}}{6} = 10\text{ min}$$

- Sandy roule à 90 km/h sur les 6 premiers kilomètres. La vitesse étant constante, la distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours.

Distance parcourue (en km)	90	6
Temps (en minutes)	60	?

On peut utiliser un coefficient de proportionnalité (1,5) ou diviser une colonne par un nombre (15) ou utiliser un produit en croix.

On trouve que Sandy a mis 4 minutes pour cette partie du parcours. Sandy roule à 40 km/h sur les 4 derniers kilomètres. La vitesse étant constante, la distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours. Or 4 km, c'est 10 fois moins que 40 km, il lui faut donc 10 fois moins de temps pour les parcourir soit :

$$\frac{1\text{ h}}{10} = \frac{60\text{ min}}{10} = 6\text{ min}$$

On trouve que Sandy a mis 6 minutes pour cette partie du parcours. Au final, Sandy aura mis 10 minutes pour arriver au travail. Ben et Sandy sont donc arrivés en même temps.

Navette

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'exploiter la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre, d'utiliser la notion de vitesse moyenne. Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la lecture graphique, de la notion de vitesse moyenne. La capacité introduite est d'exploiter la représentation graphique d'une grandeur.

- La longueur totale du parcours est de 2 800 m soit 2,8 km car le dernier point du graphique, F, a pour ordonnée 2 800.
- Entre le point A et le point B, la vitesse est constante (segment de droite donc ni accélération ni décélération). On parcourt 800 m en 60 s soit 1 min.
- Entre le point B et le point C, la vitesse est nulle. On est à l'arrêt pendant 20 s.
- Entre le point C et le point D, la vitesse est constante (segment de droite donc ni accélération ni décélération). On parcourt 500 m en 60 s soit 1 min.

Entre le point D et le point E, la vitesse est nulle. On est à l'arrêt pendant 40 s.

Entre le point E et le point F, la vitesse est constante (segment de droite donc ni accélération ni décélération). On parcourt 1 500 m soit 1,5 km en 120 s soit 2 min.

- Entre A et B, la distance parcourue est proportionnelle au temps du parcours car la représentation graphique est un segment de droite passant par l'origine du repère. La vitesse est donc constante.

- Entre le point A et le point B, la vitesse moyenne constante est de

$$v_1 = \frac{0,8\text{ km}}{1\text{ min}} = 0,8\text{ km/min} = 48\text{ km/h.}$$

Entre le point C et le point D, la vitesse moyenne constante est de

$$v_2 = \frac{0,5\text{ km}}{1\text{ min}} = 0,5\text{ km/min} = 30\text{ km/h.}$$

Entre le point E et le point F, la vitesse moyenne constante est de

$$v_3 = \frac{1,5\text{ km}}{2\text{ min}} = 0,75\text{ km/min} = 45\text{ km/h.}$$

La vitesse maximale autorisée de 50 km/h a donc été respectée à chaque étape du parcours.

Activité 3

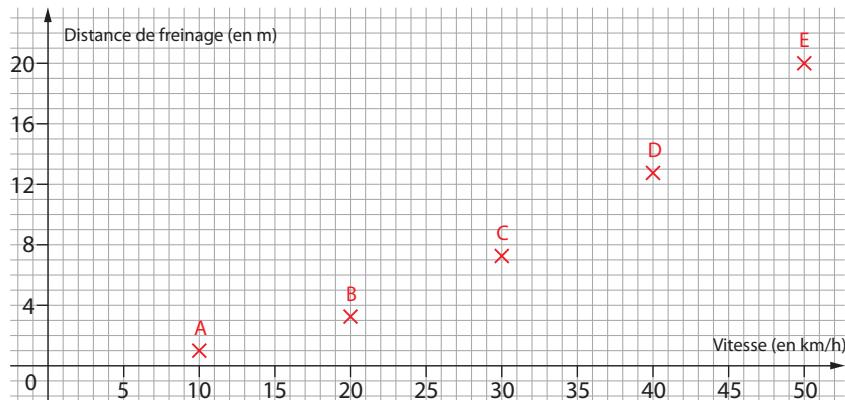
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de tracer et d'utiliser la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. Les prérequis nécessaires sont de savoir utiliser une formule, placer des points dans un repère du plan, lire des informations à partir d'une courbe. La capacité introduite est de représenter une grandeur en fonction d'une autre.

1. Si $v = 40$, alors la distance de freinage (en mètres) est $d = 0,008 \times 40^2 = 12,8$.

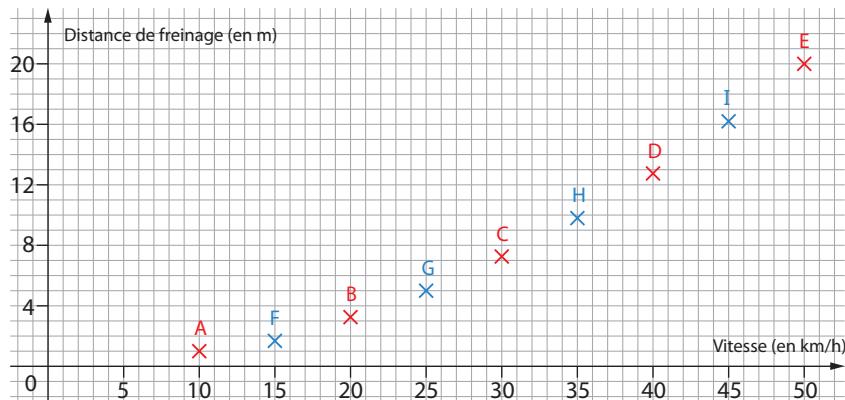
Vitesse v (en km/h)	10	20	30	40	50
Distance de freinage (en m)	0,8	3,2	7,2	12,8	20

3.



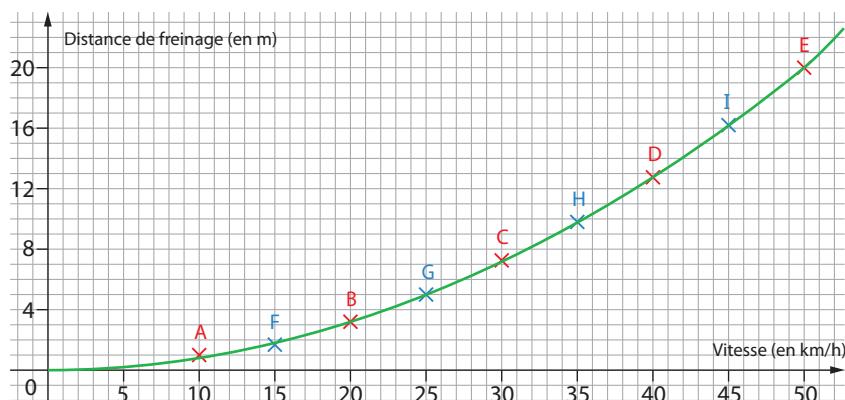
4. On pourrait relier les points mais on ne sait pas forcément comment. On peut proposer de rajouter des points intermédiaires.

Vitesse v (en km/h)	15	25	35	45
Distance de freinage (en m)	1,8	5	9,8	16,2



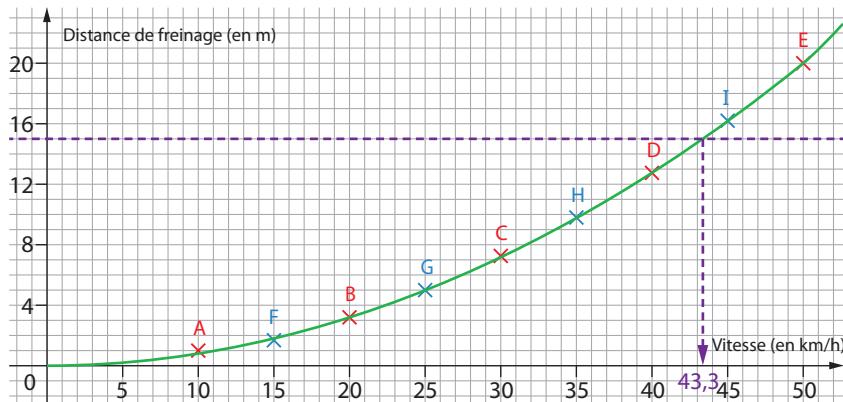
Le but est de montrer aux élèves qu'on ne doit pas relier les points « à la règle ». On peut encore rajouter des points supplémentaires, si nécessaire.

Au final, on obtient :



5. C'est le point G sur le graphique précédent.

6. On place sur le graphique le point de la courbe dont l'ordonnée vaut 15 (il s'agit ici du point J) et on lit son abscisse, ici environ 43,3 (voir graphique page suivante).



Si la distance de freinage est de 15 m, la vitesse est d'environ 43,3 km/h.

Exercices

Utiliser des grandeurs quotients et des grandeurs produits

Questions flash

1 $V = \text{A}(\text{base}) \times h$ donc $200 = 50 \times h$ d'où $h = \frac{200}{50} = 4$.

La hauteur du parallélépipède rectangle est de 4 m.

2 $500 \text{ mL} = 0,5 \text{ L}$

Donc si 1 L d'eau pèse 1 kg, 0,5 L pèse 0,5 kg.

3 $3570 \text{ Wh} = 3,57 \text{ kWh}$

4 $100 \text{ m} = 0,1 \text{ km}$ et $12,5 \text{ sec} = \frac{12,5}{3600} \text{ h}$.

Je parcours donc $0,1 \text{ km}$ en $\frac{12,5}{3600} \text{ h}$.

Ma vitesse moyenne est donc de $\frac{0,1}{\frac{12,5}{3600}} = 30 \text{ km/h}$.

Ma vitesse moyenne est donc de 30 km/h.

5 Si je cours à 12 km/h, je cours donc 12 km en 1 heure. Il me faut donc 12 fois moins de temps pour courir 1 km.

$$\frac{1 \text{ h}}{12} = \frac{60 \text{ min}}{12} = 5 \text{ min}$$

Il me faut donc 5 minutes pour parcourir 1 km.

6 $30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$

$$v = \frac{50,5 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = \frac{50,5}{0,5} \text{ km/h} = 101 \text{ km/h}$$

La vitesse moyenne de l'Eurostar dans le tunnel est de 101 km/h.

7 $2,5 \text{ tonnes/m}^3 = 2500 \text{ kg/m}^3$

Masse (en kg)	2 500	300
Volume (en m^3)	1	x

$$x = \frac{300 \times 1}{2500} = 0,12$$

Donc Stéphane a utilisé $0,12 \text{ m}^3$ de béton soit 120 dm^3 .

8 $800 \text{ m} = 0,8 \text{ km}$

$$v = \frac{d}{t} \text{ donc } 40 = \frac{0,8}{t} \text{ et par suite } t = \frac{0,8}{40} = 0,02.$$

$$\text{Or } 0,02 \text{ h} = 0,02 \times 60 \text{ min} = 1,2 \text{ min} \\ = 1 \text{ min} + 0,2 \text{ min} = 1 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s} \\ = 1 \text{ min } 12 \text{ s}$$

Il faut donc 1 min et 12 s pour parcourir 800 m à 40 km/h.

9 La masse volumique donne le volume de 1 m^3 d'essence : 1 m^3 d'essence pèse 750 kg.
Or $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$.
 1 m^3 d'essence pèse 750 kg donc 1 L ou $0,001 \text{ m}^3$ pèse 0,75 kg (1 000 fois moins).
Donc 60 L pèsent $60 \times 0,75 \text{ kg} = 45 \text{ kg}$.
La voiture pèse 45 kg de plus.

10 1. La lumière parcourt 300 000 km en 1 s donc en $\frac{1}{75}$ de seconde, elle parcourt 75 fois moins.

$$\frac{300\ 000}{75} = 4\ 000$$

La distance séparant le satellite de la Terre est donc de 4 000 km.

2. $8 \text{ min } 30 \text{ s} = 8 \times 60 \text{ s} + 30 \text{ s} = 510 \text{ s}$

En 510 secondes, la lumière parcourt 510 fois plus de distance qu'en 1 s.

$$510 \times 300\ 000 = 153\ 000\ 000$$

La distance nous séparant du Soleil est donc d'environ 153 000 000 km.

11 $v = \frac{d}{t}$ donc $8 = \frac{240}{t}$ et par suite $t = \frac{240}{8} = 30$.

Il faut donc 30 h au minimum pour effectuer le trajet en péniche sans faire de pause.

12 La mouette parcourt 4,2 km en 8 minutes donc en 1 minute, elle parcourt 8 fois moins soit $\frac{4,2 \text{ km}}{8} = 0,525 \text{ km}$.

Et en 1 h, elle parcourt 60 fois plus de distance soit : $60 \times 0,525 \text{ km} = 31,5 \text{ km}$.

Grandeurs	Grandeur simple ?	Grandeur quotient ?	Grandeur produit ?
Aire	NON	NON	OUI
Vitesse	NON	OUI	NON
Masse	OUI	NON	NON
Volume	NON	NON	OUI
Longueur	OUI	NON	NON
Temps	OUI	NON	NON
Prix au kilo	NON	OUI	NON

Exploiter la représentation graphique d'une grandeur

Questions flash

- 14 1. Si Johan voit 4 films dans l'année, il paiera environ 11 €.
2. Si Johan ne voit aucun film, il paiera 5 €.
3. Si Johan ne veut pas dépenser plus de 20 €, il pourra voir 10 films au maximum.

15. a. Faux. b. Vrai. c. Faux. d. Faux. e. Faux.

16. 1. Neuf, le véhicule vaut 10 000 €.
2. Au bout de 2 ans, le véhicule vaut 6 000 €.
3. Au bout de 5 ans, la valeur du véhicule passe en dessous de 3 000 €.

Représenter une grandeur en fonction d'une autre

Questions flash

17. a. Courbe 2. b. Courbe 3. c. Courbe 1.

18. 1. $f = 208 - (0,75 \times 40) = 178$

À 40 ans, la fréquence cardiaque maximale recommandée est de 178 battements par minute.

2. Les résultats sont arrondis à l'unité car il s'agit d'un nombre de battements par minute (donc un nombre entier).

Âge (en années)	20	30	40	50	60	70	80
Fréquence cardiaque maximale (en battements par minute)	193	186	178	171	163	156	148

3. 

19. 1. Courbe verte. 2. Courbe rouge. 3. Courbe bleue.

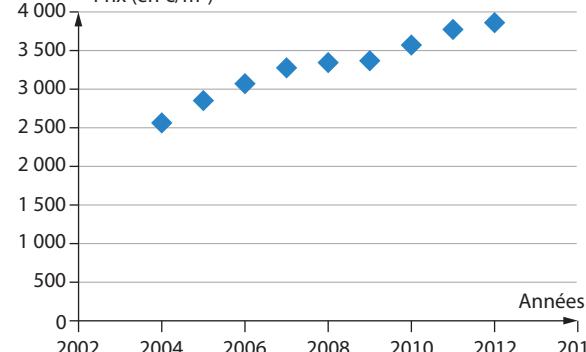
Problèmes

20. Course cycliste

1. La distance totale de cette étape est de 190 km (dernier point de la courbe d'ordonnée 190).
2. Le cycliste a parcouru les 100 premiers kilomètres en 2 h 30 min (le point de la courbe d'ordonnée 100 a pour abscisse 2,5).
3. Au bout de 4 h, le cycliste a parcouru 170 km (le point de la courbe d'abscisse 4 a pour ordonnée 170) et au bout de 4 h 30 min (fin de l'étape), il a parcouru 190 km (le point de la courbe d'abscisse 4,5 a pour ordonnée 190). Il a donc parcouru 20 km lors de la demi-heure de course.
4. Il n'y a pas proportionnalité entre la distance parcourue et la durée de parcours sur cette étape car la représentation graphique n'est pas une droite. C'est parce que le cycliste n'a pas toujours roulé à la même vitesse (peut-être roulait-il en montagne?).

On peut aussi dire qu'en 2 h, il a parcouru 70 km alors qu'en 4 h, il en a parcouru 170 et non pas 140 (le double).

21. Prix des appartements

1. 

2. Le prix des appartements au m^2 n'a cessé d'augmenter entre 2004 et 2012, presque de manière constante. Entre 2004 et 2012, ce prix a augmenté de plus de 50 %.

22. A...tension !

1. $\frac{3}{0,02} = \frac{4,5}{0,03} = \frac{6}{0,04} = \frac{12}{0,08} = 1505$

Donc ce tableau est bien un tableau de proportionnalité.

2. D'après les calculs précédents, le coefficient de proportionnalité vaut 150.

3. Si $I = 0,07$ alors la tension, en volts, vaut : $U = 0,07 \times 150 = 10,5$.

23. Poids et masse

1. a. $P = m \times g = 90 \text{ kg} \times 9,8 \text{ N/kg} = 882 \text{ N}$

Le poids d'un homme ayant une masse de 90 kg sur Terre est de 882 N.

Masse (en kg)	3	5	10	20	50
Poids (en N)	29,4	49	98	196	490

2. a. $\frac{5,1}{3} = \frac{8,5}{5} = \frac{17}{10} = \frac{34}{20} = \frac{85}{50} = 1,7$

On a donc $P = m \times 1,7$ d'où $g = 1,7 \text{ N/kg}$.

b.

Les élèves peuvent tester avec des valeurs (50 kg apparaît, par exemple, dans les deux tableaux).

Preuve : $P_{\text{Terre}} = m \times 9,8$ et $P_{\text{Lune}} = m \times 1,7$

donc $\frac{P_{\text{Terre}}}{P_{\text{Lune}}} = \frac{m \times 9,8}{m \times 1,7} = \frac{9,8}{1,7} \approx 5,76$

Donc il est vrai qu'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre.

24. Marche à pied

1. $\frac{n}{P} = 140$ donc pour Arthur $\frac{70}{P} = 140$, ce qui donne $P = \frac{70}{140} = 0,5$.

La longueur d'un pas d'Arthur est donc de 0,5 m soit environ 50 cm.

2. $\frac{n}{P} = 140$ donc pour Rémi $\frac{n}{0,80} = 140$, ce qui donne $n = 140 \times 0,80 = 112$.

Rémi fait donc 112 pas par minute. Or chaque pas fait 0,80 m, donc sa vitesse est approximativement de :

$$v = 112 \text{ pas/min} \times 0,80 \text{ m/pas} = 89,6 \text{ m/min}$$

$$89,6 \text{ m/min} = 89,6 \times 60 \text{ m/h} = 5376 \text{ m/h} = 5,376 \text{ km/h}$$

25. Excès de vitesse ?

Les limitations de vitesse en France sont les suivantes (pour un véhicule léger et par un conducteur chevronné) :

1 mile = 1,609 344 km

130 km/h = $\frac{130}{1,609 344}$ miles/heure ≈ 81 miles/heure

Pour les autres vitesses, on procède de la même manière, c'est-à-dire qu'on divise la vitesse en km/h par 1,609 344. Ce qui donne le tableau ci-dessous (arrondi à l'unité).

	Autoroute	Sur route à 2 chaussées séparées par un terre-plein central	Sur route	En agglomération (différents cas peuvent se présenter)			
				Généralement	Zones à risque (souvent avec ralentisseurs)	Route principale avec peu d'accès riverains	Sur certains boulevards
Beau temps	81 mi/h	68 mi/h	56 mi/h	31 mi/h	19 mi/h	43 mi/h	50 mi/h
Par temps de pluie	68 mi/h	62 mi/h	50 mi/h				

26 Tremblement de terre

$$v = \frac{d}{t} = \frac{320 \text{ km}}{59 \text{ s}} = \frac{320}{59} \text{ km/s} \approx 5,4 \text{ km/s}$$

Les ondes se sont donc propagées à une vitesse de 5,4 km/s.

27 Sur la paille

$$80 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 96\,000 \text{ cm}^3 = 0,096 \text{ m}^3$$

Le volume d'une botte de paille est de 0,096 m³.

$$0,096 \text{ m}^3 \times 120 \text{ kg/m}^3 = 11,52 \text{ kg}$$

Le poids d'une botte de paille est de 11,52 kg.

$$40 \text{ €/tonne} = 0,04 \text{ €/kg}$$

$$11,52 \text{ kg} \times 0,04 \text{ €/kg} = 0,4608 \text{ €}$$

Le prix d'une botte de paille est d'environ 0,46 €.

28 Histoire d'eau

Le 1^{er} aquarium a un volume de 4,071 L = 4,071 dm³ = 4 071 cm³.

$$\mathcal{V}_{\text{parallélépipède rectangle}} = A_{\text{base}} \times h$$

$$\text{Donc ici : } 4\,071 \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times h$$

c'est-à-dire : 4 071 cm³ = 300 cm² × h

$$\text{On en déduit que } h = \frac{4\,071 \text{ cm}^3}{300 \text{ cm}^2} = 14 \text{ cm.}$$

La hauteur d'eau dans le 2^d aquarium est donc de 14 cm.

29 Course automobile

a. Faux, car il y a un point de la courbe qui a une ordonnée de presque 250 à un peu moins de 6 minutes du départ.

b. On ne peut pas répondre car l'enregistrement de la vitesse s'arrête au bout de 15 km parcourus.

c. Vrai : il y a 7 points de la courbe qui ont une ordonnée de 125.

d. Vrai : la courbe de vitesse descend à 4 moments (le dernier étant après la fin de la course, mais toujours pendant l'enregistrement).

e. Faux : le point de la courbe d'abscisse 13,2 n'a pas pour ordonnée 0.

f. Faux : un conducteur doit ralentir en cas de virage, or la vitesse ne ralentit que 3 fois pendant cette course.

30 Amazonie

$$190\,000 \text{ m}^3/\text{s} = 190\,000\,000 \text{ dm}^3/\text{s} = 190\,000\,000 \text{ L/s} \\ = 6,84 \times 10^{11} \text{ L/h} \approx 1,6416 \times 10^{13} \text{ L/jour} \\ = 4,9248 \times 10^{14} \text{ L/mois}$$

(en comptant un mois de 30 jours)

$$\frac{4,9248 \times 10^{14} \text{ L / mois}}{10\,000 \text{ L / mois}} = 4,9248 \times 10^{10}$$

Ce fleuve pourrait donc alimenter $4,9\,248 \times 10^{10}$ de ces foyers (environ 50 milliards !).

31 Holidays

Part of the graph	Event	Time
A	Leave home	10 am
A to B	Motorway	From 10:00 AM to 11:30
B to C	Car breaks down	From 11:30 AM to 1:30 PM
C to D	On their way again	From 1:30 PM to 2:30 PM
D to E	Stop for lunch	From 2:30 PM to 3:00 PM
E to F	Fill tank with fuel	From 3:00 PM to 3:00 PM
F to G	Country roads	From 3:00 PM to 5:00 PM
G	Arrive, at last!	5:00 PM

2. When they started their trip, there were 40 litres in the tank.

3. The family stopped 30 minutes for lunch.

4. 45 litres were put in the tank at the garage.

5. The trip ended at 5:00 PM.

32 Radar

$$v = \frac{d}{t} \text{ donc ici } 300\,000 \text{ km/s} = \frac{d}{0,0003 \text{ s}} \text{ donc :}$$

$$d = 0,0003 \text{ s} \times 300\,000 \text{ km/s} = 90 \text{ km}$$

Donc en 0,0003 s le signal parcourt 90 km.

Or le signal fait un aller-retour.

$$\frac{90 \text{ km}}{2} = 45 \text{ km}$$

Donc l'avion se trouve à 45 km de la tour de contrôle.

33 Représentante médicale

$$1. \text{ Lorsque la vitesse est constante, on a } v = \frac{d}{t} .$$

À l'aller, elle parcourt 26 km à 78 km/h, on a donc

$$78 \text{ km/h} = \frac{26 \text{ km}}{t_1}$$

$$\text{donc } t_1 = \frac{26 \text{ km}}{78 \text{ km/h}} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min.}$$

Elle a donc mis 20 minutes à l'aller.

Au retour, elle parcourt 26 km à 65 km/h, on a donc

$$65 \text{ km/h} = \frac{26 \text{ km}}{t_2}$$

$$\text{donc } t_2 = \frac{26 \text{ km}}{65 \text{ km/h}} = 0,4 \text{ h} = 24 \text{ min.}$$

Elle a donc mis 24 minutes pour son retour.

$$13 \text{ h } 55 \text{ min} + 20 \text{ min} + 35 \text{ min} + 15 \text{ min} + 24 \text{ min}$$

heure de trajet départ attente rendez-vous trajet retour

$$= 13 \text{ h } 149 \text{ min} = 15 \text{ h } 29 \text{ min}$$

Sonia est donc rentrée chez elle à 15 h 29.

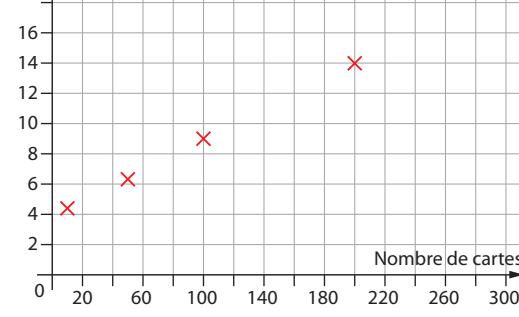
2. Elle a parcouru en tout 52 km (26 km × 2) et a mis 44 min (20 min + 24 min).

$$\text{La vitesse moyenne de Sonia est donc de } \frac{52 \text{ km}}{44 \text{ min}}$$

$$= \frac{52}{44} \text{ km/min} = \frac{13}{11} \text{ km/min} = \frac{780}{11} \text{ km/h} \approx 71 \text{ km/h}$$

34 Cartes professionnelles en ligne

1.

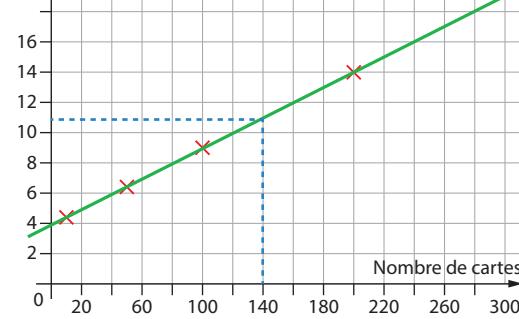


On remarque que les points sont alignés.

2.

On peut tracer la droite passant par ces points et faire une lecture graphique pour 140 cartes.

Prix (en €)



Pour 140 cartes, elle devrait payer 11 €.

Pour d'autres élèves, plus à l'aise :

+10 cartes +50 cartes +100 cartes

Nombre de cartes	10	50	100	200
Prix en €	4,50	6,50	9,00	14,00

+2 € +2,50 € +5 €

On peut donc remarquer que le prix de la carte supplémentaire est constant : 0,05 €.

On peut en déduire que c'est le prix d'une carte. Les frais d'envoi sont donc de 4 € :

$$(4,50 \text{ €} - 10 \times 0,05 \text{ €}) \text{ ou } 6,50 \text{ €} - 50 \times 0,05 \text{ €} \dots$$

Ainsi, 300 cartes coûteront $4 \text{ €} + 300 \times 0,05 \text{ €} = 19 \text{ €}$.

35

16/9

$$1. \frac{80 \text{ cm}}{45 \text{ cm}} = \frac{16}{9}$$

Cet écran est donc de format $\frac{16}{9}$.

2. En appliquant le théorème de Pythagore, on calcule la longueur de la diagonale :

$$\text{diagonale}^2 = (30,5 \text{ cm})^2 + (22,9 \text{ cm})^2 = 1\,454,66 \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où diagonale} = \sqrt{1\,454,66 \text{ cm}^2} \approx 38,14 \text{ cm}$$

$$\approx \frac{38,14 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm / pouce}} \approx 15 \text{ pouces}$$

Donc la mention « 15 pouces » est bien adaptée à cet écran.

36

Balancière

La courbe C ne convient pas, car à un même temps, correspondent plusieurs hauteurs différentes.

La courbe D ne convient pas, car la hauteur des pieds ne fait qu'augmenter sans jamais redescendre.

Il reste les courbes A et B. Or Mohammed essaie d'aller de plus en plus haut. C'est donc la courbe A qui convient (sur la courbe B, on monte à la même hauteur à chaque balancement).

37

Sous pression

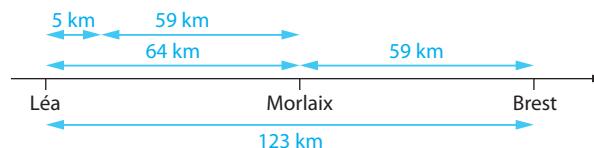
1. Graphiquement, on lit que la pression recommandée est de 2,5 bars (le point de la courbe d'abscisse 36 a pour ordonnée 2,5).

2. La distance entre Morlaix et Brest est de :

$$123 \text{ km} - 64 \text{ km} = 59 \text{ km}.$$

On cherche donc dans combien de kilomètres, Léa sera à 59 km de Morlaix.

C'est donc dans 5 km (64 km - 59 km).



38

Réservoir d'eau

Étant donné que le réservoir commence par s'élargir puis a un diamètre constant, la hauteur d'eau va d'abord monter rapidement, mais de moins en moins vite, puis continuer de monter mais de manière constante, le débit étant constant. Le graphique correspondant est donc le graphique B.

Allers-retours

1. À l'aller, on a $v_1 = \frac{d}{t_1}$, c'est-à-dire $15 \text{ km/h} = \frac{5 \text{ km}}{t_1}$ donc :

$$t_1 = \frac{5 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}.$$

Au retour, on a $v_2 = \frac{d}{t_2}$, c'est-à-dire $6 \text{ km/h} = \frac{5 \text{ km}}{t_2}$ donc :

$$t_2 = \frac{5 \text{ km}}{6 \text{ km/h}} = \frac{5}{6} \text{ h} = 50 \text{ min}.$$

Pour son trajet total, elle a parcouru une distance de 10 km (aller et retour) et son temps de parcours est de :

$$t = t_1 + t_2 = 20 \text{ min} + 50 \text{ min} = 70 \text{ min} = 1 \text{ h } 10 \text{ min}$$

$$\text{Donc } v = \frac{10 \text{ km}}{70 \text{ min}} = \frac{1}{7} \text{ km/min} = \frac{60}{7} \text{ km/h} \approx 8,6 \text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne de Paula sur l'ensemble de son parcours est d'environ 8,6 km/h.

2.

Si on change la distance, on peut refaire les mêmes calculs ou suggérer une généralisation pour les élèves les plus aguerris (voir plus loin dans l'exercice).

À l'aller, on a $v_1 = \frac{d}{t_1}$, c'est-à-dire $15 \text{ km/h} = \frac{10 \text{ km}}{t_1}$ donc :

$$t_1 = \frac{10 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} = \frac{2}{3} \text{ h} = 40 \text{ min}.$$

Au retour, on a $v_2 = \frac{d}{t_2}$, c'est-à-dire $6 \text{ km/h} = \frac{10 \text{ km}}{t_2}$ donc :

$$t_2 = \frac{10 \text{ km}}{6 \text{ km/h}} = \frac{10}{6} \text{ h} = 100 \text{ min} = 1 \text{ h } 40 \text{ min}.$$

Pour son trajet total, elle a parcouru une distance de 10 km

(aller et retour) et son temps de parcours est de :

$$t = t_1 + t_2 = 40 \text{ min} + 100 \text{ min} = 140 \text{ min} = 2 \text{ h } 20 \text{ min}$$

$$\text{Donc } v = \frac{20 \text{ km}}{140 \text{ min}} = \frac{1}{7} \text{ km/min} = \frac{60}{7} \text{ km/h} \approx 8,6 \text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne de Paula sur l'ensemble de son parcours est toujours d'environ 8,6 km/h.

La généralisation est difficile.

On appelle d la distance, en kilomètres, séparant les domiciles de Paula et d'Alexandre.

$$\text{À l'aller, on a } v_1 = \frac{d}{t_1}, \text{ c'est-à-dire } 15 = \frac{d}{t_1} \text{ donc } t_1 = \frac{d}{15}.$$

$$\text{Au retour, on a } v_2 = \frac{d}{t_2}, \text{ c'est-à-dire } 6 = \frac{d}{t_2} \text{ donc } t_2 = \frac{d}{6}.$$

Pour son trajet total, elle a parcouru une distance de $2d$ (aller et retour) et son temps de parcours est de :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{15} + \frac{d}{6} = \frac{2d}{30} + \frac{5d}{30} = \frac{7d}{30}$$

$$\text{Donc } v = \frac{2d}{t} = \frac{2d}{\frac{7d}{30}} = 2d \times \frac{30}{7d} = \frac{60}{7} \approx 8,6.$$

La vitesse moyenne de Paula sur l'ensemble de son parcours est d'environ 8,6 km/h quelle que soit la distance d séparant les deux domiciles.

40

Australie

1. D'après l'échelle, 1 000 km sont représentés par 1,2 cm.

En mesurant avec la règle, la distance séparant Melbourne de Darwin sur la carte est de 4,25 cm. On a donc :

Distance sur la carte (en cm)	1,2	4,25
Distance réelle (en km)	1 000	x

$$x \approx \frac{1000 \times 4,25}{1,2} \approx 3\,542$$

Darwin et Melbourne sont donc distantes de 3 542 km environ à vol d'oiseau.

2.

Différentes solutions sont envisageables : pavage, encadrement par des rectangles, des disques...

En voici une avec un pavage en carrés de 500 km par 500 km :



Estimation :

1^{re} ligne : entre 1 et 2 carrés

2^{re} ligne : entre 7 et 8 carrés

3^{re} ligne : entre 8 et 9 carrés

4^{re} ligne : entre 8 et 9 carrés

5^{re} ligne : entre 4 et 5 carrés

6^{re} ligne : entre 1 et 2 carrés

L'aire est donc comprise entre l'aire de 29 carrés et l'aire de 35 carrés.

Or chaque Carré a une aire de $500 \text{ km} \times 500 \text{ km} = 250\,000 \text{ km}^2$.

$$29 \times 250\,000 = 7\,250\,000 \text{ et } 35 \times 250\,000 = 8\,750\,000$$

Donc la superficie de l'Australie est comprise entre $7\,250\,000 \text{ km}^2$ et $8\,750\,000 \text{ km}^2$.

On peut améliorer cet encadrement en faisant un pavage basé sur des carrés plus petits.

Vraie valeur : $7\,692\,000 \text{ km}^2$

41

Sortie scolaire

1. $15 \text{ clients} \times 2 \text{ nuits} = 30 \text{ nuitées}$

Pour 3 jours et 2 nuits avec sa classe de 4^e 1, cela fait 30 nuitées.

$12 \text{ €/nuitée} \times 30 \text{ nuitées} = 360 \text{ €}$

Ce séjour coutera 360 €.

2. Avec un budget de 360 €, on a 30 nuitées. Or les 4^e 2 sont 28, soit 29 personnes avec le professeur.

Ils ne pourront donc payer qu'une seule nuitée soit un séjour maximum de 2 jours et 1 nuit.

3. $25 \text{ clients} \times 2 \text{ nuits} = 50 \text{ nuitées}$

Pour 3 jours et 2 nuits avec sa classe de 4^e 5, cela fait 50 nuitées.

$12 \text{ €/nuitée} \times 50 \text{ nuitées} = 600 \text{ €}$

Ce séjour coutera 600 €.

4. $14 + 28 + 24 + 1 = 67$

S'il emmène les 3 classes, cela fait 67 personnes avec lui.

$$\frac{900 \text{ €}}{12 \text{ € / nuitée}} = 75 \text{ nuitées}$$

Avec 900 €, ils pourront payer 75 nuitées.

Ils ne pourront donc payer qu'une seule nuitée soit un séjour maximum de 2 jours et 1 nuit.

42

Distance de sécurité

En utilisant la méthode indiquée, on trouve une distance de sécurité minimale de 60 m pour une vitesse de 50 km/h.

On calcule la distance réelle de réaction :

On roule à 50 km/h.

$$50 \text{ km/h} = \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{50 \text{ km}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{72} \text{ km/s} = \frac{1000}{72} \text{ m/s}$$

$\approx 13,9 \text{ m/s}$

Donc en 2 secondes, on parcourt environ 27,8 m. La distance minimale de sécurité doit donc être de : $2 \times 27,8 \text{ m} = 55,6 \text{ m}$. Cette méthode paraît donc être correcte.

On peut tester cette méthode avec d'autres vitesses ou essayer de généraliser pour les plus aguerris.

Si on appelle v la vitesse en km/h, pour la convertir en m/s, on multiplie par $\frac{1000}{3600} = \frac{5}{18} \approx 0,28$.

Si d est le chiffre des dizaines de la vitesse en km/h et u le chiffre des unités, on a $v = (10d + u)$ km/h.

Donc quand on la multiplie par $\frac{5}{18}$, on obtient :

$$v = \left(\frac{25}{9}d + \frac{5}{18}u \right) \text{ m/s} \approx (2,8d + 0,28u) \text{ m/s.}$$

Cette méthode est donc correcte de manière générale. En effet, on multiplie par 3 le chiffre des dizaines au lieu de 2,8, ce qui donne une valeur légèrement supérieure. De plus, on néglige

le chiffre des unités qui au maximum donnerait $9 \times \frac{5}{18} = 2,5$, ce qui compense l'arrondi par excès précédent.

4.

Pour faire avancer le lutin en temps réel, il est nécessaire d'utiliser le chronomètre intégré à Scratch. Le chronomètre est une variable qui donne le temps écoulé en secondes depuis qu'on a réinitialisé le chronomètre. Si les élèves n'ont pas encore rencontré cette fonctionnalité de Scratch, il est préférable de leur en indiquer l'existence.

Par ailleurs, cette question nécessite un temps de recherche conséquent pour les élèves qui doivent d'abord modéliser la situation puis la traduire en algorithme. Il faut donc prévoir ce temps de recherche et anticiper le fait qu'il faudra sans doute accompagner la classe dans ces recherches.

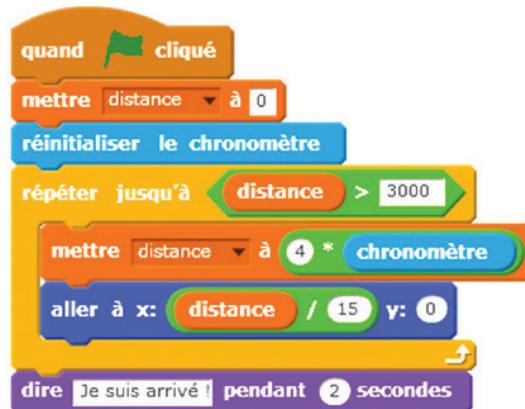
Martin parcourt 4 m/s donc sa distance parcourue en mètres est égale à : « $d = v \times t = 4 \times$ (valeur du chronomètre) ».

Il est préférable que la variable « distance » représente cette fois la distance parcourue (et non la distance qu'il reste à parcourir). La condition d'arrêt de la boucle sera « distance > 3 000 » car il y a de fortes chances pour que la distance ne soit jamais exactement égale à 3 000.

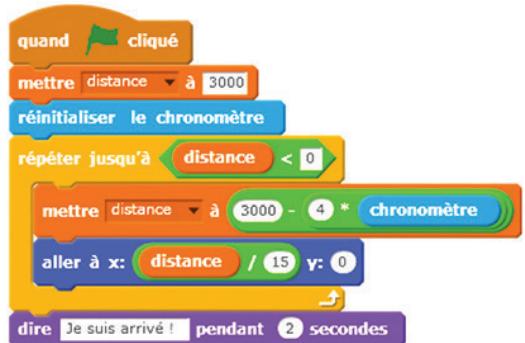
Il faut ensuite choisir une échelle appropriée pour le déplacement. Sachant que le repère de Scratch va de -240 à 240 sur l'axe des abscisses, le lutin arrivera au bord de la scène pour $x = 200$ environ. On peut donc choisir de déplacer le lutin du centre du repère (0 ; 0) au point (200 ; 0). Comme Martin parcourt 3 000 m, on peut donc prendre

$$\text{comme échelle } \frac{200}{3\,000} = \frac{1}{15}.$$

Le script suivant permet alors de répondre à la question.



Si on préfère faire jouer à la variable « distance » le même rôle que dans le script original, on peut utiliser le script suivant, dans lequel le lutin se déplace du point (200 ; 0) au point (0 ; 0).



Pour visualiser le point d'arrivée, on peut placer un second lutin au point (0 ; 0).

Il existe bien sûr de nombreuses façons de représenter ce déplacement et donc de nombreux scripts peuvent répondre correctement à cette question.

Algorithmique et outils numériques

43

Compteur

1. La variable intervenant dans ce script est la variable « distance ». Elle représente la distance qu'il reste à parcourir à Martin pour rejoindre Florian.

2. Si ce script affiche des données exactes, Martin parcourt 0,4 m à chaque dixième de seconde. Sa vitesse est donc de 4 m/s.

3. En 1 s, Martin parcourt 4 m donc, en 1 min, il parcourt 60 fois plus soit 240 m.

$$\frac{3\,000}{240} = 12,5$$

Martin mettra donc 12,5 min soit 12 minutes et 30 secondes pour rejoindre Florian.

Courbe de corpulence

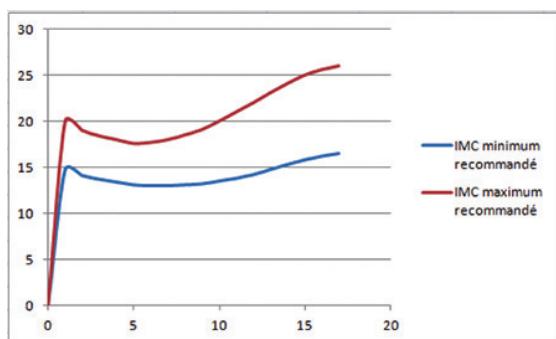
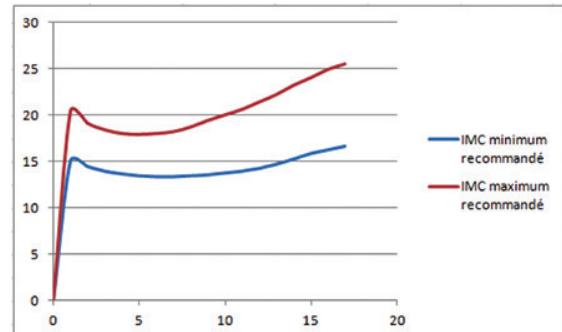
1. Tessa :

	A	B	C	D
	Age	Poids (en kg)	Taille (en m)	IMC
1	0,5	7,2	0,64	17,6
2	1	8,7	0,71	17,3
3	1,5	9	0,74	16,4
4	2	10	0,78	16,4
5	2,5	11	0,82	16,4
6	3	12	0,86	16,2
7	3,5	13	0,91	15,7
8	4	13,5	0,94	15,3
9	5	14,5	1,02	13,9
10	6	15,5	1,08	13,3
11	7	17	1,14	13,1
12	8	20,5	1,23	13,6
13	9	23	1,28	14,0
14	10	26	1,36	14,1
15	11	28	1,4	14,3
16	12	31	1,45	14,7
17	13	34	1,51	14,9
18	14	39	1,6	15,2
19	15	40	1,61	15,4

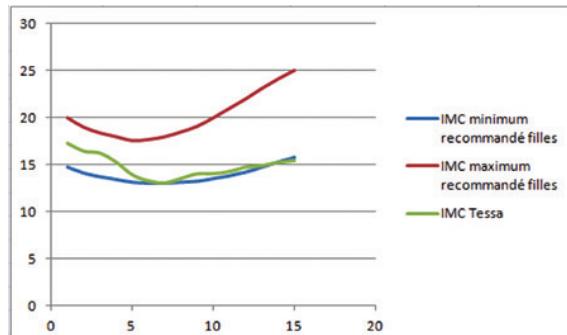
Tom :

	A	B	C	D
	Age	Poids (en kg)	Taille (en m)	IMC
1	0,5	8,3	0,68	17,9
2	1	9,6	0,75	17,1
3	1,5	11	0,83	16,0
4	2	12,2	0,89	15,4
5	2,5	13	0,93	15,0
6	3	13,8	0,95	15,3
7	3,5	14,5	0,96	15,7
8	4	15,5	1,03	14,6
9	5	18	1,12	14,3
10	6	20	1,17	14,6
11	7	23	1,24	15,0
12	8	25,5	1,29	15,3
13	9	27,5	1,32	15,8
14	10	29,5	1,37	15,7
15	11	32	1,43	15,6
16	12	36	1,48	16,4
17	13	44	1,58	17,6
18	14	51,5	1,64	19,1
19	15	62	1,7	21,5

2. Filles :

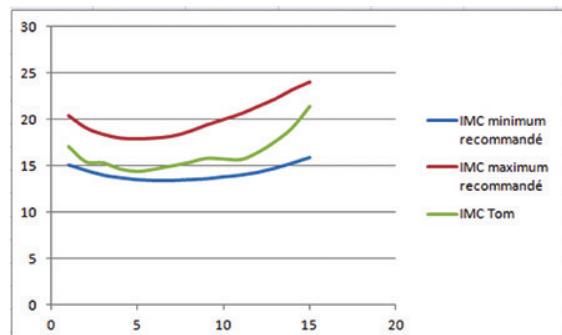
**Garçons :**

3. Courbe de corpulence de Tessa :



Tessa a frôlé l'IMC minimum recommandé vers 6 ans. Elle est restée avec un IMC faible depuis et vers 14 ans, elle passe en dessous de l'IMC minimum recommandé, ce qui peut être inquiétant pour une adolescente.

Courbe de corpulence de Tom :



Tom est resté entre l'IMC minimum et maximum recommandé pendant toute la période. Néanmoins, on voit que sa courbe monte très rapidement et risque vite de dépasser l'IMC maximum recommandé. C'est un adolescent qui doit surveiller son poids.

**Deux énoncés pour un exercice****Exercice 1**

- Temps qui sépare le médaillé d'or du médaillé de bronze :
8 min 19,73 s – 8 min 18,56 s = 1,17 s
- Temps du vainqueur :
8 min 18,56 s = 8 min + 18,56 s = 8 × 60 s + 18,56 s = 498,56 s donc 498 secondes et 56 centièmes.
- La vitesse moyenne du vainqueur est donc de :
$$\frac{3\ 000\ m}{498,56\ s} = \frac{3\ 000}{498,56}\ m/s \approx 6,02\ m/s.$$

Exercice 1

- Temps du vainqueur :
8 min 18,56 s = 8 min + 18,56 s = 8 × 60 s + 18,56 s = 498,56 s donc 498 secondes et 56 centièmes.

La vitesse moyenne du vainqueur est donc de

$$\frac{3\ 000 \text{ m}}{498,56 \text{ s}} = \frac{3\ 000}{498,56} \text{ m/s} \approx 6,02 \text{ m/s.}$$

2. Vitesse moyenne du vainqueur :

$$\begin{aligned} \frac{3\ 000}{498,56} \text{ m/s} &= \frac{3\ 000 \text{ m}}{498,56 \text{ s}} = \frac{3 \text{ km}}{498,56 \text{ s}} \\ &= \frac{3}{498,56} \text{ km/s} \\ &= 3\ 600 \times \frac{3}{498,56} \text{ km/h} \\ &= \frac{10\ 800}{498,56} \text{ km/s} \approx 21,66 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. 400 exemplaires ont été vendus en 2014 car le point de la courbe d'abscisse 4 a pour ordonnée 400.
2. Le magazine était vendu à 3 € en 2015 car le point de la courbe d'ordonnée 450 a pour abscisse 3.
3. 300 exemplaires sont vendus en 2016 car le point de la courbe d'abscisse 6 a pour ordonnée 300. La recette est donc de $300 \text{ exemplaires} \times 6 \text{ €/exemplaire} = 1\ 800 \text{ €}$.

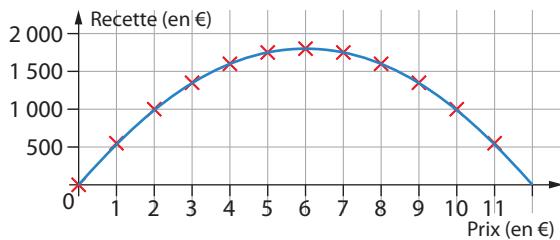
Exercice 2

1. 300 exemplaires sont vendus en 2016 car le point de la courbe d'abscisse 6 a pour ordonnée 300. La recette est donc de :
 $300 \text{ exemplaires} \times 6 \text{ €/exemplaire} = 1\ 800 \text{ €}$

Prix (en €)	1	2	3	4	5
Ventes	550	500	450	400	350
Recette (en €)	550	1 000	1 350	1 600	1 750

Prix (en €)	6	7	8	9	10	11
Ventes	300	250	200	150	100	50
Recette (en €)	1 800	1 750	1 600	1 350	1 000	550

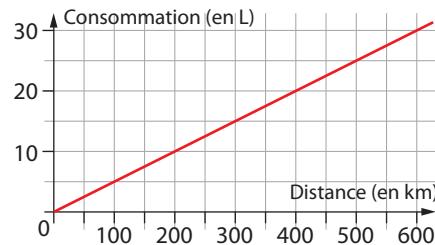
3.



Par lecture graphique, le prix de vente le plus intéressant est approximativement de 6 € (point le plus haut de la courbe).

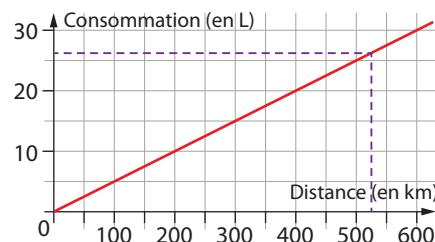
Analyse d'une production

La représentation graphique de Kilian est incorrecte : il aurait dû représenter la consommation en fonction du nombre de kilomètres et non le contraire.



Il aurait dû également relier les points (c'est une situation de proportionnalité, on sait donc que la représentation graphique est une droite).

Sa réponse est néanmoins correcte bien qu'imprécise et non argumentée.



Kilian aura besoin d'environ 26 litres d'essence pour parcourir 525 km.

Introduction

Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres disciplines dans lesquelles interviennent les mathématiques (Physique-chimie, Sciences et vie de la Terre...). On travaille tout au long du cycle 4 sur le lien entre deux grandeurs et l'exploitation de la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre. Le domaine des grandeurs et mesures a été travaillé de manière intuitive, sans formalisation, depuis le début du cycle et a préparé la découverte de la notion de fonction en 3^e. Il faut s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves afin de formaliser cette notion, tout en ayant conscience que c'est la première fois que les élèves vont formaliser cette notion de fonction ainsi que le vocabulaire qui lui est associé.

- De nombreux exercices et problèmes permettent de modéliser des phénomènes continus, de résoudre des problèmes

modélisés par des fonctions (équations, inéquations) et de faire le lien entre les différents registres : langage courant et vocabulaire mathématique lié aux fonctions.

Des problèmes concrets amènent les élèves à commenter des documents authentiques et à estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (développement de l'esprit critique).

- Place dans la progression : Ce chapitre donne l'occasion de travailler et/ou consolider des savoir-faire de calcul numérique (nombres relatifs, en écriture fractionnaire), de calcul littéral (formule, équation, inéquation) et d'exploitation de représentations graphiques. Il serait préférable de le traiter assez tôt afin de retravailler ces notions de manière régulière tout au long de l'année.

Il doit néanmoins être traité avant le chapitre 24 traitant des fonctions affines, qui doivent être considérées et travaillées comme des cas particuliers.

Activités

Questions flash

1. Si $x = 4$, alors $2(x - 5) = 2(4 - 5) = 2 \times (-1) = -2$.
2. a. Le prix de 8 kg de sucre est de 4 €.
b. Avec 3 €, j'ai acheté 6 kg de sucre.
3. L'abscisse de A vaut 2 et l'ordonnée de B vaut 6.

4. On a $5 = \frac{d}{2}$ donc $d = 5 \times 2 = 10$.
La vitesse est donc de 10 km/h.
5. a. Les coordonnées de A sont (2 ; 1).
b. L'ordonnée de B vaut 3.
c. L'abscisse de C vaut 0.

Le tractopelle

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de décrire l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre à l'aide d'une courbe. Les prérequis nécessaires sont : calcul de durée, proportionnalité, lecture d'information à partir d'une courbe. La capacité introduite est de tracer et exploiter la représentation graphique d'une fonction.

1. Le dernier point de la courbe a pour abscisse 310.
 $9 \text{ h} + 310 \text{ min} = 9 \text{ h} + 300 \text{ min} + 10 \text{ min} = 9 \text{ h} + 5 \text{ h} + 10 \text{ min}$
 $= 14 \text{ h } 10 \text{ min}$
 Donc l'entreprise arrête d'utiliser l'engin à 14 h 10.
2. Phase 1 : durée : 60 min = 1 h, baisse de 5 L, c'est un déplacement (5 L/h).
 Phase 2 : durée : 90 min = 1 h 30 min, baisse de 30 L, c'est un terrassement $\left(\frac{30 \text{ L}}{1,5 \text{ h}} = 20 \text{ L/h}\right)$.

Activité 1

Phase 3 : durée : 30 min, pas de variation du nombre de litres, c'est une pause (sans doute le déjeuner).

Phase 4 : durée : 10 min, hausse de 45 L, ils remettent de l'essence dans le réservoir.

Phase 5 : durée : 120 min = 2 h, baisse de 10 L, c'est un déplacement $\left(\frac{10 \text{ L}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ L/h}\right)$.

Il s'agit ici de procéder à des lectures graphiques et d'en donner une interprétation concrète sans aucunement formaliser la notion de fonction. Il faut laisser de l'autonomie aux élèves quant aux procédés utilisés. On peut, à cette occasion, rappeler le vocabulaire adapté (coordonnées, abscisse, ordonnée). On peut également faire le lien avec les grandeurs quotients vues dans le chapitre 22 (consommation en L/h).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de fonction, d'image et d'antécédent. Les prérequis nécessaires sont : nombres et calcul, calcul littéral. La capacité introduite est de déterminer des images et des antécédents.

1.

On donne ici un exemple avec trois nombres mais on peut collecter beaucoup plus de réponses parmi les élèves afin de faciliter les réponses aux questions suivantes (conjecture pour deviner le nombre de départ).

Nombre choisi	-1	2,5	3
On ajoute 10	9	12,5	13
On multiplie par 2	18	25	26
On soustrait 20	-2	5	6

2.

C'est aux élèves de faire leur propre conjecture et d'en déduire le nombre choisi par Séverine.

Il semble que le résultat soit toujours le double du nombre de départ. Ainsi le nombre choisi par Séverine devrait être 9.

3.

On peut procéder par étape, en s'aidant du tableau précédent afin de déterminer cette formule.

Nombre choisi	x
On ajoute 10	$10 + x$
On multiplie par 2	$(10 + x) \times 2$
On soustrait 20	$(x + 10) \times 2 - 20$

Or $(x + 10) \times 2 - 20 = 2x + 20 - 20 = 2x$. La formule est donc : $2x$.

On peut ainsi valider (ou invalider) la conjecture faite à la question précédente.

4.

Le lien entre deux grandeurs a été travaillé durant les deux années précédentes. Mais c'est la 1^{re} fois que les élèves vont formaliser la notion de fonction, les notations et le vocabulaire associés.

Nombre de départ choisi : x	0	3,5	12	-2	$\frac{3}{2}$	fonction f
Résultat final annoncé : $f(x)$	0	7	24	-4	3	

On peut noter qu'ici, $f(x) = 2x$.

5. L'image de 12 par la fonction f est 24.

On peut commencer à noter $f(12) = 24$.

6. Un antécédent de 50 par la fonction f est 25.

On peut commencer à noter $f(25) = 50$.

Le tableau de la question 4. peut être utilisé et éventuellement complété afin de travailler ce nouveau vocabulaire à l'oral.

Lancer de poids

Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de construire et d'exploiter la courbe représentative d'une fonction.

Les prérequis nécessaires sont : notion de fonction, calcul d'images, placer des points dans un repère du plan.

La capacité introduite est de tracer et d'exploiter la représentation graphique d'une fonction.

1. $h(0) = -5 \times 0^2 + 6,75 \times 0 + 2 = 2$.

À l'instant $x = 0$, le poids se trouve donc à une hauteur de 2 m.

On peut faire le lien avec le vocabulaire introduit à l'activité précédente (l'image de 0 par la fonction h est 2, un antécédent de 2 est 0 par la fonction h).

2. $h(1,6) = -5 \times 1,6^2 + 6,75 \times 1,6 + 2 = 0$

Au bout de 1,6 s, le poids se trouve à une hauteur de 0 mètre. Il est donc retombé au sol au bout de 1,6 s.

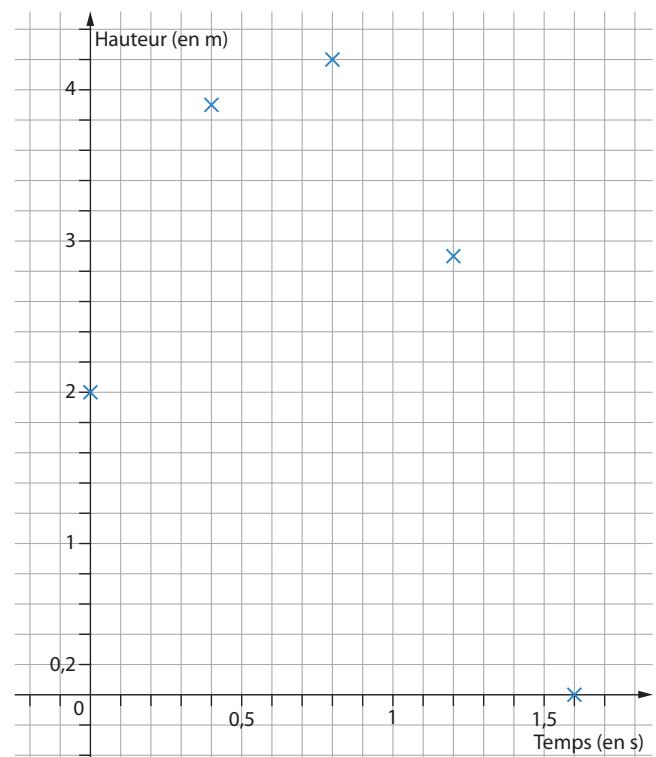
On peut faire le lien avec le vocabulaire introduit à l'activité précédente (l'image de 1,6 par la fonction h est 0, un antécédent de 0 est 1,6 par la fonction h).

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$h(x)$	2	3,9	4,2	2,9	0

On peut indiquer qu'un tel tableau est un tableau de valeurs de la fonction h mais qu'il n'est pas unique. Ce tableau peut également être utilisé et éventuellement complété afin de retravailler le vocabulaire à l'oral.

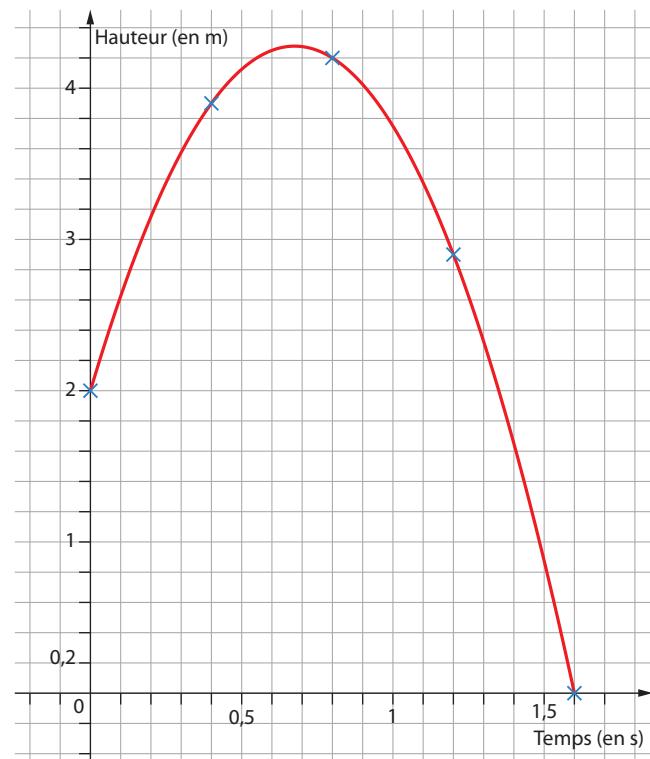
4.

Le travail sur ce type de représentation a déjà été mené dans le chapitre 22. Les unités sont indiquées pour gagner du temps car ce n'est pas l'objectif de cette activité. Ultérieurement, on pourra laisser aux élèves le soin de choisir une échelle adaptée à la représentation d'une fonction.



5.

Cette activité permet de comprendre concrètement comment on construit la courbe représentative d'une fonction. C'est aussi l'occasion de s'interroger sur la pertinence ou non de relier les points obtenus entre eux (et si oui, de quelle manière). On peut inciter les élèves à faire un nouveau tableau de valeurs pour placer des points supplémentaires (en particulier s'ils ont choisi de relier les points à la règle).



Sécurité routière

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'exploiter une représentation graphique.

Les prérequis nécessaires sont : notion de vitesse, lecture graphique d'images et d'antécédents.

La capacité introduite est de tracer et d'exploiter la représentation graphique d'une fonction.

1.

On peut faire remarquer aux élèves que lors du temps de réaction, la vitesse est constante et rappeler si nécessaire la formule donnant la vitesse en fonction de la distance et du temps dans ce cas.

Le temps de réaction est fixé à 2 secondes donc $v = \frac{D_R}{t} = \frac{D_R}{2}$ d'où $D_R = 2v$. Ainsi la distance est proportionnelle à la vitesse pour la distance de réaction. C'est donc la courbe rouge (droite passant par l'origine du repère).

On peut également calculer une valeur particulière pour identifier de quelle courbe il s'agit.

2. Par lecture graphique, la distance d'arrêt de Muriel est d'environ : $20 \text{ m} + 33 \text{ m} = 53 \text{ m}$.

Activité 4

Ce résultat est approximatif, et toute lecture donnant un résultat cohérent sera à valoriser.

3. On voit qu'à une vitesse de 90 km/h, la distance de réaction est de 50 m et la distance de freinage est de 50 m également. Cela fait donc une distance d'arrêt de 100 m. Muriel roule donc à 90 km/h. (C'est la seule solution possible car en dessous de 90 km/h, les deux distances sont inférieures à 50 donc la somme est inférieure à 100 et au-dessus de 90 km/h, les deux distances sont supérieures à 50 donc la somme est supérieure à 100.)

L'objectif n'est pas ici de chercher à trouver mathématiquement toutes les solutions, et encore moins de prouver l'unicité de cette solution. Néanmoins, on peut trouver facilement une solution et prouver par un raisonnement simple que c'est la seule possible.

4. En supposant que le temps de réaction est le même pour tout le monde (2 secondes, ici), on ne tient donc pas compte de la distance de réaction qui serait la même pour deux véhicules qui se suivraient à la même vitesse. À 130 km/h, la distance de freinage est d'environ 100 m. Or, si deux voitures ne sont séparées que d'un trait, cela fait entre 38 m et 52 m ($38 + 14$) entre elles alors que si elles sont séparées de deux traits, cela fait 90 m ($2 \times 38 + 14$) et 104 m ($2 \times 38 + 2 \times 14$). Ainsi la distance séparant deux véhicules doit être au moins de deux traits pour qu'elle soit supérieure à la distance de freinage et ainsi être en sécurité.

Exercices

Déterminer des images et des antécédents

Questions flash

- 1.** $f(3) = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- 2.** $f(2) = 4 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
L'image de 2 par la fonction f vaut 8.
- 3.** $g(-1) = -(-1)^3 + 3 = -(-1) + 3 = 1 + 3 = 4$
Sofiane a sans doute fait une erreur de signe dans le calcul de $-(-1)^3$, il a donc calculé $-1 + 3 = 2$.
- 4.** 15 est le triple de 5 et d'aucun autre nombre. En effet, $h(x) = 3x$ et $3x = 15$ donne $x = 5$ comme seule solution.
Ainsi 15 a un seul antécédent par la fonction h , c'est 5.
- 5.** a. « L'image de -3 par la fonction f est 4. » ou « 4 est l'image de -3 par la fonction f . »
b. « 4 a pour antécédent -3 par la fonction f . » ou « -3 est un antécédent de 4 par la fonction f . »
- 6.** a. $f(3) = -5$
b. $g(-4) = 7$
- 7.** $g(x) = 2x$ donc $g(-3) = 2 \times (-3) = -6$.
L'image de -3 par la fonction g vaut -6 .
- 8.** a. Faux.
b. Vrai.
c. Vrai.
d. Faux.
- 9.**

x	0	-1	2	-2
$f(x)$	0	2	8	8
- 10.** 1. L'image de $0,5$ par la fonction h est -1 .
2. L'image de -1 par la fonction h est $5,3$.
3. Un antécédent de $-3,5$ par la fonction h est 1 .
- C'est le seul dans le tableau.
- 11.** a. Vrai.
b. Faux.
c. Vrai.
d. Vrai.
- 12.**
- 13.**

Égalité	Verbe « avoir »	Verbe « être »
$f(2) = 4$	2 a pour image 4 par f . 4 a pour antécédent 2 par f .	4 est l'image de 2 par f . 2 est un antécédent de 4 par f .
$h(2,5) = -2$	2,5 a pour image -2 par h . -2 a pour antécédent 2,5 par h .	-2 est l'image de 2,5 par h . 2,5 est un antécédent de -2 par h .
$g(5) = 3$	5 a pour image 3 par g . 3 a pour antécédent 5 par h .	3 est l'image de 5 par g . 5 est un antécédent de 3 par g .
- 14.** 1. $h(x) = 2x + 5$
2. $h\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} + 5 = \frac{2}{3} + \frac{15}{3} = \frac{17}{3}$
L'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction h est $\frac{17}{3}$.

3. $h(x) = 9$ si $2x + 5 = 9$, c'est-à-dire $2x = 4$ qui a pour seule solution $x = 2$. Donc le seul antécédent de 9 par la fonction h est 2.

Tracer la représentation graphique d'une fonction

Questions flash

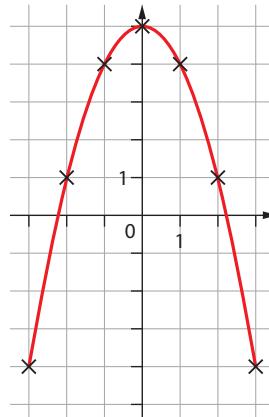
- 15.** $g(4) = \frac{4}{4} = 1$ donc A(4 ; 1) appartient à la représentation graphique de la fonction g .
 $g(1) = \frac{4}{1} = 4 \neq 0$ donc B(1 ; 0) n'appartient pas à la représentation graphique de la fonction g .

- 16.** Les courbes bleue et violette peuvent représenter des fonctions. Ce sont les seules car tout nombre a une image unique par une fonction.

- 17.** 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	1	4	5	4	1	-4

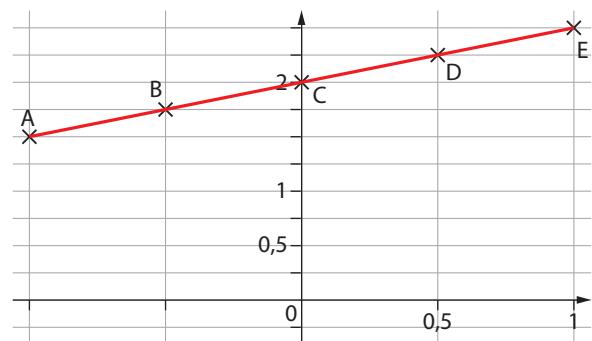
2.



- 18.** On peut faire le tableau de valeurs suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	1
$h(x)$	1,5	1,75	2	2,25	2,5

Le choix du pas est laissé aux élèves.



Exploiter la représentation graphique d'une fonction

Questions flash

- 19.** 1. L'image de 2 par la fonction f vaut 4.
2. Un antécédent de 0 par la fonction f : -6

C'est le seul visible.

3. $f(0) = 3$ $f(-2) = 2$ $f(-6) = 0$

- 20** On lit graphiquement que $g(-3) = 0$ et $g(2) = 0$ donc $g(-3) = g(2)$.
- 21**
- L'image de -1 par la fonction f est 0 .
 - Un antécédent de 2 par la fonction f est 3 (ou -2 ou $-5,5$ ou -6).

Ce sont des lectures graphiques donc approximatives.

- c. $f(-6) = 2$
d. Les antécédents de 1 sont $-6,3 ; -5 ; -3 ; -1,6 ; 2,7 ; 4$.

L'énoncé ne précise pas le nombre d'antécédents attendus. Le résultat sera donc correct si l'élève en trouve au moins deux.

- e. Il n'y a pas de nombre qui a pour image 3 par la fonction f .
f. -2 a pour antécédent 2 par la fonction f .

C'est évidemment le seul.

- g. Une solution de l'équation $f(x) = 0$ est $-6,7$ (ou -4 ou -1 ou $2,5$).

Ce sont des lectures graphiques donc approximatives. Une seule solution est attendue.

- 22** On peut, par exemple, calculer l'image de 0 (car elle est différente sur chaque courbe) par chaque fonction : $f(0) = 1$; $g(0) = -1$; $h(0) = 0$, ce qui permet d'identifier chaque courbe.
Courbe ① : c.
Courbe ② : a.
Courbe ③ : b.

Problèmes

- 23** **La rando**
- La randonnée dure 7 heures.
 - Au bout de 3 heures de randonnée, le randonneur est à une altitude de $1\,040$ m environ.
 - a. Le randonneur se trouve à $1\,000$ m d'altitude au bout d'environ $2,6$ h = 2 h 36 min et au bout d'environ $6,2$ h = 6 h 12 min.
b. Le randonneur ne se trouve jamais à 200 m d'altitude.
c. Le randonneur se trouve à $1\,400$ m d'altitude pendant (approximativement) toute la 5^{e} heure de randonnée.
- 24** **Ça monte !**
- Courbe rose : récipient C (le volume monte de manière régulière, c'est une situation de proportionnalité).
 - Courbe violette : récipient A (le volume augmente de plus en plus vite car le récipient s'élargit).
 - Courbe bleue : récipient B (le volume augmente de moins en moins vite car le récipient se rétrécit).

- 25** **Relever la température**
- À midi, la température était de 3 °C.
 - $T(17) = 3$ donc à 17 h, il faisait 3 °C.
 - $T(x) = 0$ a pour solutions 8 et 20 . Cela signifie que la température a été de 0 °C à 8 h et à 20 h et à aucun autre moment.
 - $T(x) \geq 3$ a pour solutions tous les nombres entre 12 et 17 . Cela signifie que les seuls moments où la température a été supérieure ou égale à 3 °C ont été entre midi et 17 h.
 - L'image de 0 par la fonction T vaut -2 . Cela signifie qu'à 0 h (minuit), il faisait -2 °C.
 - -6 a deux antécédents : 2 et 6 . Cela signifie qu'il y a deux moments où la température était de -6 °C : à 2 h et à 6 h.
 - La température était positive ce jour-là entre 8 h et 20 h.

- 26** **Croissance du lichen**
- $d(16) = 7 \times \sqrt{16 - 12} = 7 \times \sqrt{4} = 7 \times 2 = 14$
16 ans après la disparition de la glace, le diamètre du lichen est alors de 14 mm.
 - $d(t) = 42$ si $7 \times \sqrt{t - 12} = 42$ soit $\sqrt{t - 12} = 6$ ou encore $t - 12 = 36$ soit $t = 48$.
Le diamètre du lichen est de 42 mm 48 ans après la disparition de la glace.

Les élèves peuvent ne pas résoudre cette équation (difficile en 3^e) mais procéder par tâtonnement. On pourra alors insister sur l'importance d'une vérification pour savoir si la solution obtenue est une valeur exacte ou approchée. On pourra également débattre sur le fait que trouver une solution ne garantit pas qu'il n'y en a pas une autre et profiter ici du contexte pour justifier que celle-ci est ici unique (le lichen croît, il ne « rétrécit » donc pas et il ne peut y avoir deux moments où il a la même taille).

27 **Footing matinal**

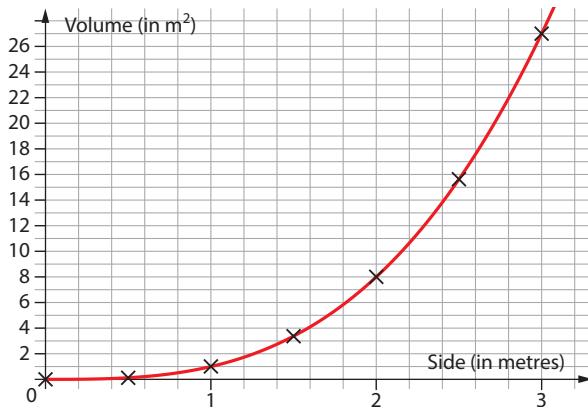
- Le GPS a représenté la vitesse en fonction du temps.
- Au bout de 15 minutes, la vitesse est $3,7$ km/h environ.
Au bout de 65 minutes, la vitesse est $3,7$ km/h environ.
- La vitesse vaut 10 km/h au bout de 43 minutes environ.
La vitesse vaut 6 km/h au bout de 30 minutes et de 61 minutes environ.
La vitesse ne vaut jamais 12 km/h.

Temps (en min)	0	15	43	50	70
Vitesse (en km/h)	0	3,7	10	8,2	0

28 **A tank**

1. $\mathcal{V}(x) = x^3$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathcal{V}(x)$	0	0,125	1	3,375	8	15,625	27



To get a volume equal to 10 m³, we read 10 on the y -axis and we read the x -coordinate of the corresponding point on the curve. x is approximately equal to 2.15 . So the side of the oil tank is around 2.15 m.

29 **Jardin d'agrément**

Les élèves qui ne parviennent pas à trouver la formule en fonction de x peuvent être incités à faire le calcul pour plusieurs valeurs de x .

1. Aire de la partie végétalisée :

$$\mathcal{A}(x) = \underbrace{(30 - 2x)}_{\substack{\text{longueur de} \\ \text{la partie} \\ \text{végétalisée}}} \underbrace{(16 - 2x)}_{\substack{\text{largeur de} \\ \text{la partie} \\ \text{végétalisée}}}$$

$$2. \mathcal{A}(2) = (30 - 2 \times 2)(16 - 2 \times 2)$$

$$= 26 \times 12 = 312$$

Cela signifie que lorsque la largeur de l'allée est de 2 m, l'aire de la partie végétalisée est de 312 m².

30 **Repas de groupe**

$$1. A(x) = \frac{20x}{\substack{\text{prix payé} \\ \text{par les } x \\ \text{personnes} \\ \text{ayant choisi le menu à } 20 \text{ €}}} + \frac{25(100 - x)}{\substack{\text{prix payé} \\ \text{par les } (100 - x) \\ \text{personnes} \\ \text{ayant choisi le menu à } 25 \text{ €}}}$$

$$A(x) = 20x + 2\,500 - 25x$$

$$A(x) = 2\,500 - 5x$$

$$2. A(x) = 2\,185 \text{ si } 2\,500 - 5x = 2\,185, \text{ c'est-à-dire } -5x = -315 \text{ ou } \text{encore } x = \frac{-315}{-5} = 63.$$

Ainsi 63 personnes ont choisi le menu à 20 €.

31 Circuit de voitures

1. La plus longue ligne droite du circuit (qui correspond à la plus longue période pendant laquelle le pilote accélère) se trouve approximativement à 1,32 km de la ligne de départ.
2. La vitesse la plus basse a été enregistrée à environ 1,32 km de la ligne de départ.
3. On peut regarder le nombre de virages (la vitesse ralentit), qui sont au nombre de 3, ce qui élimine les circuits A et E. La première ligne droite est très courte par rapport à la seconde (on ralentit assez tôt), ce qui élimine le circuit C. Sur la courbe, on voit que la voiture ralentit plus lors du 2^e virage que lors du 1^{er} donc le 2^e virage est plus serré que le 1^{er}. La voiture roulait donc sur le circuit B.

32 Volleyball

1. $h(0) = -0,05 \times 0^2 + 0,6 \times 0 + 2 = 2$
Donc la hauteur du ballon au départ de sa trajectoire était de 2 m. Ainsi OB = 2.
2. Le filet est à 10 mètres du point O. En effet, AC = 18 et donc la distance entre A et le filet vaut 9.
 $h(10) = -0,05 \times 10^2 + 0,6 \times 10 + 2 = 3 > 2,43$
Ainsi la hauteur du ballon à 10 mètres du point O est supérieure à la hauteur du filet. Le ballon passe donc au-dessus du filet.
3. Le point C est à 19 mètres du point O pour les mêmes raisons que précédemment.
 $h(19) = -0,05 \times 19^2 + 0,6 \times 19 + 2 = -4,65 < 0$
Ainsi le ballon est retombé au sol avant le point C (sinon, le résultat obtenu serait positif). Il est donc retombé au sol à l'intérieur de la partie adverse du terrain.

33 Menuiserie

1.	Longueur OM	0	1	2	3	4	5	6
	Longueur ON	6	5	4	3	2	1	0
	Aire de OMN	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

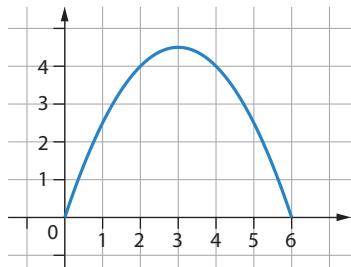
On n'a pas trouvé de solution au problème posé car l'aire de OMN n'est jamais égale à 3 dm² dans ce tableau. On peut néanmoins penser qu'il y a une solution pour une longueur OM comprise entre 1 dm et 2 dm et une autre pour une longueur OM comprise entre 4 dm et 5 dm.

2. a. Dans la cellule B2 : =6-A2
Dans la cellule C2 : =A2*B2/2 ou =(A2*B2)/2
- b. On peut maintenant faire une conjecture plus précise. On peut penser qu'il y a une solution pour une longueur OM comprise entre 1,2 dm et 1,3 dm et une autre pour une longueur OM comprise entre 4,7 dm et 4,8 dm.
3. a. x peut varier entre 0 et 6 (car M ∈ [OA]).

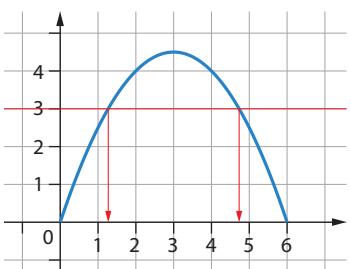
b. ON = 6 - x

c. $\mathcal{A}(x) = \frac{x(6-x)}{2}$

d.



e.

**34 Course cycliste**

- a. La distance parcourue pendant cette course est de 11 km (le dernier point de chaque courbe a une ordonnée de 11).

b. C'est Nathan qui est parti le plus vite au départ (sa courbe monte plus vite).

c. C'est Charlie qui s'est arrêté un peu au niveau de l'église (courbe rouge horizontale à un moment donné).

d. La distance entre le collège et l'église est de 6 km (au moment où Charlie s'arrête à l'église, la distance parcourue est de 6 km).

e. C'est Nathan qui était en tête au bout d'une demi-heure ou 30 minutes (la courbe bleue est au-dessus de la courbe rouge pour $x = 30$, donc Nathan a parcouru plus de distance en 30 min que Charlie).

f. Charlie a doublé Nathan au bout d'environ 44 minutes (la courbe rouge passe au-dessus de la courbe bleue à partir de $x \approx 44$).

g. C'est Charlie qui est arrivé le premier (car il a parcouru les 11 km en moins de temps que Nathan).

35 Réservoir d'eau

Il y a une « cassure » de la courbe pour $x = 4$. C'est le passage d'un cylindre à l'autre. Ainsi $h = 4$ et $h' = 8 - 4 = 4$.

Le volume d'un cylindre est donné par la formule : $V = \pi r^2 h$. Or, pour une hauteur de 4 m (1^{er} cylindre rempli), on a un volume de 120 m³.

D'où : $\pi R^2 \times 4 = 120$ ou encore $R^2 = 120/4\pi$ et $R = \sqrt{\frac{120}{4\pi}} \approx 3,09$.

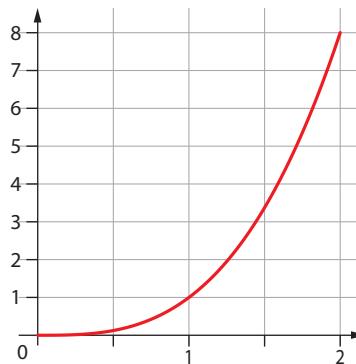
De plus, pour une hauteur de 8 m (2 cylindres remplis), on a un volume de 160 m³. Ce qui signifie que le 2nd cylindre a un volume de $160 \text{ m}^3 - 120 \text{ m}^3 = 40 \text{ m}^3$.

D'où : $\pi R'^2 \times 4 = 40$ ou encore $R'^2 = \frac{40}{4\pi}$ et $R' = \sqrt{\frac{40}{4\pi}} \approx 1,78$.

36 Une courbe pour deux problèmes

1.

Les élèves doivent prendre l'initiative de choisir des valeurs de x et de calculer leurs images afin de placer des points qui les aideront à représenter cette fonction.



2. Le volume d'un cube de côté x , en cm, est donné, en cm³, par x^3 . On a donc $x^3 = 5$. Par lecture graphique, on a $x \approx 1,7$. Le cube a donc un côté mesurant environ 1,7 cm.

3. $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$

Le volume d'une boule de rayon x dm est donné, en dm³, par $\frac{4}{3} \pi x^3$. On a donc $\frac{4}{3} \pi x^3 = 3$ soit $x^3 = \frac{3}{\frac{4}{3} \pi} = \frac{9}{4\pi} \approx 0,7$.

Par lecture graphique, on a $x \approx 0,9$.

La boule a donc un rayon mesurant environ 0,9 dm.

**37 Beaucoup de bruit pour rien**

1. À une distance de 100 mètres de la tondeuse, le niveau de bruit est d'environ 45 décibels.
2. Le niveau de bruit est de 60 décibels à une distance de 25 mètres de la tondeuse.

38 Freinage

1. $12,5 \text{ m} + 10 \text{ m} = 22,5 \text{ m}$

La distance d'arrêt du scooter roulant à 45 km/h est donc de 22,5 m.

- 2. a.** D'après le graphique, si la distance de réaction est de 15 m, la vitesse est de 53 km/h environ.
b. La distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse, car la représentation graphique de la distance de freinage en fonction de la vitesse n'est pas une droite.
c. D'après le graphique, si une voiture roule à 90 km/h, alors :
- la distance de réaction est de 23 m environ ;
 - la distance de freinage est de 40 m environ.

La distance d'arrêt est donc d'environ $40 \text{ m} + 23 \text{ m} = 63 \text{ m}$.

3. $\frac{110^2}{152,4} \approx 79$

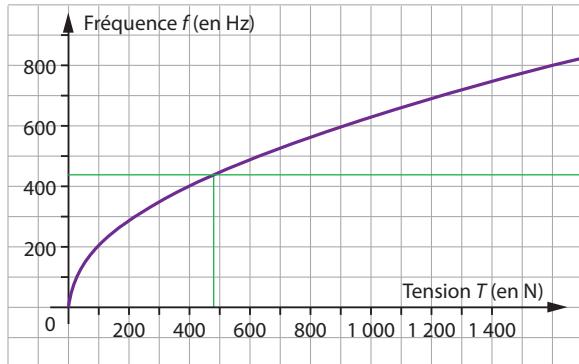
La distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h est donc d'environ 79 m.

39 En musique

- 1.** Le pas est du choix de l'élève.

T	0	200	400	600	800	1 000	1 200	1 400	1 600
f(T)	0	≈ 283	400	≈ 490	≈ 566	≈ 632	≈ 693	≈ 748	800

- 2.** Un « La3 » correspond à une fréquence de 440 Hz. On trace donc la droite horizontale contenant tous les points d'ordonnée 440, qui coupe la courbe en un point unique dont l'abscisse est environ 480. Ainsi, la tension à appliquer pour obtenir un « La3 » est d'environ 480 Newton.



- 3.** On calcule $f(220) = 20\sqrt{220} \approx 297$. Une tension de 220 N correspond donc à une fréquence d'environ 297 Hz. On obtient donc la note Ré3.

4. $f(900) = 20\sqrt{900} = 600$

Pour $T = 900$, on obtient donc une fréquence maximale de 600 Hz avant que la corde ne casse.

Algorithmique et outils numériques

40 Calcul d'image

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- 2.** On peut calculer l'image de n'importe quel nombre sauf 0. En effet, tous les nombres ont un inverse sauf 0 (ou on ne peut pas diviser par 0).

41 Tableau de valeurs

- 1.** Cet algorithme calcule et annonce les images de tous les entiers entre 0 et 10 par la fonction f définie par $f(x) = (x - 1) \times (x + 1) + 1$

Valeur de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur affichée	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

On peut simplifier l'expression de $f(x)$:

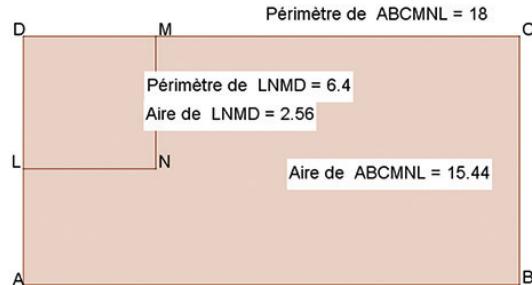
$$f(x) = (x - 1) \times (x + 1) - 1 = x^2 + x - x - 1 + 1 = x^2$$

42 Carré dans rectangle

- 1. a.** Quand x augmente, l'aire \mathcal{A}_C du carré MNLD augmente.
b. Quand x augmente, l'aire \mathcal{A}_H de l'hexagone ABCMNL diminue.
c. Quand x augmente, le périmètre \mathcal{P}_C du carré MNLD augmente.
d. Quand x augmente, le périmètre \mathcal{P}_H de l'hexagone ABCMNL reste constant.

Les conjectures des élèves peuvent évidemment être fausses. Cela n'a pas d'importance ici tant qu'ils font preuve d'esprit critique par la suite.

- 2.** Voir fichier dans le manuel numérique.



D'après ce fichier, les conjectures semblent cohérentes.

Les conjectures faites à la question 1. peuvent être fausses. Il faut insister auprès des élèves pour leur faire comprendre que le but n'est pas de les modifier mais de faire preuve dans cette question d'esprit critique.

- 3.** L'aire totale vaut : $\mathcal{A}(ABCD) = 6 \times 3 = 18$. Si Alberta veut conserver les $\frac{3}{4}$ du jardin pour de la pelouse, il faut que l'aire du carré DMNL ne dépasse pas $\frac{1}{4} \times 18 \text{ m}^2 = 4,5 \text{ m}^2$.

On peut chercher une solution approximative au tableau ou à la calculatrice. Il faut en fait que $x^2 < 4,5$ soit $x < \sqrt{4,5}$. ($\sqrt{4,5} \approx 2,12$). Le côté du potager d'Alberta ne doit donc pas dépasser 2,12 m.

Toute solution approximative obtenue par essais successifs sera bien évidemment validée, la résolution algébrique de cette inéquation étant hors programme.

43 Salle de spectacle

- 1.** $=B2*C2$
2. $=B2-0,6$ ou $=\$B\$2-A3*0,6$
3. $=C2+100$ ou $=\$C\$2+A3*100$
4. Voir fichier dans le manuel numérique.

A	B		C	D
1	Nombre de baisses	Prix du billet	Nombre de billets vendus	Recette
2	0	50	3 000	150 000
3	1	49,40	3 100	153 140
4	2	48,80	3 200	156 160
5	3	48,20	3 300	159 060
6	4	47,60	3 400	161 840
7	5	47,00	3 500	164 500
8	6	46,40	3 600	167 040
9	7	45,80	3 700	169 460
10	8	45,20	3 800	171 760
11	9	44,60	3 900	173 940
12	10	44,00	4 000	176 000
13	11	43,40	4 100	177 940
14	12	42,80	4 200	179 760
15	13	42,20	4 300	181 460
16	14	41,60	4 400	183 040
17	15	41,00	4 500	184 500
18	16	40,40	4 600	185 840
19	17	39,80	4 700	187 060
20	18	39,20	4 800	188 160
21	19	38,60	4 900	189 140
22	20	38,00	5 000	190 000
23	21	37,40	5 100	190 740
24	22	36,80	5 200	191 360
25	23	36,20	5 300	191 860
26	24	35,60	5 400	192 240
27	25	35,00	5 500	192 500

(Suite et fin du tableau page suivante.)

27	25	35,00	5 500	192 500
28	26	34,40	5 600	192 640
29	27	33,80	5 700	192 660
30	28	33,20	5 800	192 560
31	29	32,60	5 900	192 340
32	30	32,00	6 000	192 000
33	31	31,40	6 100	191 540
34	32	30,80	6 200	190 960
35	33	30,20	6 300	190 260
36	34	29,60	6 400	189 440
37	35	29,00	6 500	188 500
38	36	28,40	6 600	187 440

La recette est maximale pour 27 baisses, soit un prix de billet de $50 \text{ €} - 27 \times 0,60 \text{ €} = 33,80 \text{ €}$.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

- Sur ce graphique, on a représenté la hauteur en fonction du temps.
- a. Au bout de 2,5 secondes, la hauteur de la balle est de 1,25 mètre.
- b. La balle retombe au sol au bout de 3 secondes.
- c. La hauteur maximale de la balle est de 2,25 mètres. Celle-ci est atteinte au bout de 1,5 seconde.
- d. La balle est à une hauteur de 2 mètres au bout de 1 seconde et au bout de 2 secondes.

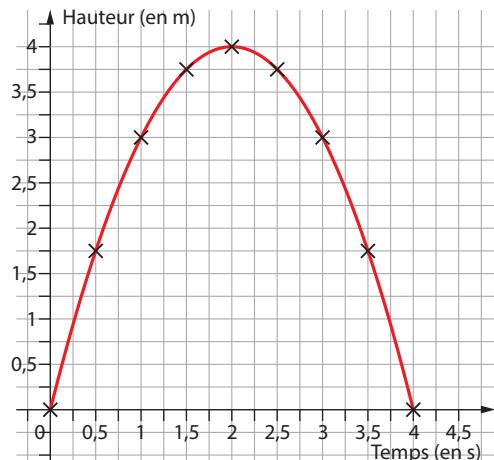
Exercice 1

1. $h(2,5) = -2,5^2 + 4 \times 2,5 = -6,25 + 10 = 3,75$

Au bout de 2,5 secondes, la hauteur de la balle est de 3,75 mètres.

2. On peut faire le tableau de valeurs suivant.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h(t)$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0



- La hauteur maximale de la balle est de 4 mètres, et celle-ci est atteinte au bout de 2 secondes.
- La balle est à une hauteur de 2 mètres au bout d'environ 0,6 seconde et au bout d'environ 3,4 secondes.
- La balle retombe au sol au bout de 4 secondes.

Exercice 2

1.	x	5	-2
	Soustraire 10	-5	-12
	Mettre au carré	25	144
	Enlever le carré du nombre de départ	0	140

2.

$$x \xrightarrow{\text{soustraire 10}} x - 10 \xrightarrow{\text{mettre au carré}} (x - 10)^2 \xrightarrow{\text{enlever le carré du nombre de départ}} (x - 10)^2 - x^2$$

$$3. (x - 10)^2 - x^2 = (x - 10)(x - 10) - x^2 \\ = x^2 - 10x - 10x + 100 - x^2 \\ = -20x + 100$$

$$x \xrightarrow{\text{multiplier par } (-20)} -20x \xrightarrow{\text{ajouter 100}} -20x + 100$$

4. Si le résultat trouvé est 20, on a :

$$-20x + 100 = 20 \text{ soit } -20x = -80 \text{ ou encore } x = 4. \\ \text{Le nombre de départ est donc 4.}$$

Exercice 2

1.	Choisir un nombre	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{5}$
	Lui soustraire 10	$-\frac{29}{3}$	$-\frac{54}{5}$
	Élever le résultat au carré	$\frac{841}{9}$	$\frac{2916}{25}$
	Soustraire au résultat le carré du nombre de départ	$\frac{840}{9}$	$\frac{580}{5} = 116$

$$2. f(x) = (x - 0)^2 - x^2 = (x - 10)(x - 10) - x^2 \\ = x^2 - 10x - 10x + 100 - x^2 = -20x + 100$$

3. Si le résultat trouvé est -5, on a :

$$-20x + 100 = -5 \text{ soit } -20x = -105 \text{ ou encore}$$

$$x = \frac{-105}{-20} = \frac{105}{20} = \frac{21}{4}.$$

Le nombre de départ est donc $\frac{21}{4}$ ou 5,25.

Écriture d'un énoncé

- Yaëlle aurait pu pratiquer son activité entre minuit et 4 h 16 du matin (peu pertinent), entre 10 h 52 et 16 h 33 ou après 23 h 20 (peu pertinent).
- Julien ne pourra rentrer qu'entre 13 h 57 et 20 h 03. Étant parti à 7 h 40, sa sortie en mer a duré entre 6 h 17 min et 12 h 23 min.
- On peut, par exemple, se demander :
 - « À quel(s) moment(s) la hauteur de la mer était-elle supérieure à 4 mètres ce jour-là ? » (Approximativement entre 6 h 05 et 9 h 05.)
 - « Quelle est la différence entre la plus petite hauteur de la mer et la plus grande ? » ($4,80 \text{ m} - 0,10 \text{ m} = 4,70 \text{ m}$)

Introduction

Dans le programme, les fonctions affines sont introduites comme cas particuliers de fonctions. Celles-ci ont des propriétés particulières qui sont étudiées dans ce chapitre (représentation graphique, proportionnalité des accroissements, rôle des paramètres). Les fonctions linéaires sont ensuite vues comme un cas particulier de fonctions affines. Le lien avec la proportionnalité est mis en évidence.

- De nombreux exercices et problèmes permettent de modéliser des phénomènes continus, de résoudre des problèmes modélisés par des fonctions affines (équations, inéquations que l'on peut résoudre algébriquement) et de faire le lien entre les

différents registres : interprétation concrète et graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

- Place dans la progression : Ce chapitre donne l'occasion de travailler et/ou consolider des savoir-faire de calcul numérique (nombres relatifs, en écriture fractionnaire), de calcul littéral (formule, équation, inéquation) et d'exploitation de représentations graphiques.

Il doit être traité après le chapitre 23 traitant des fonctions. Il serait préférable que le chapitre 20 (proportionnalité et pourcentages) soit traité en amont, afin de favoriser la modélisation de certains phénomènes par une fonction linéaire.

Activités

Questions flash

- $f(-2) = 3 \times (-2) = -6$
L'image de -2 par la fonction f est 6.
- Si x est un antécédent de 12 alors $3x = 12$ donc $x = 4$.
12 n'a qu'un seul antécédent par la fonction f : 4.
- $2 \times 4 = 8$ mais $5 \times 4 \neq 19$ donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.
- $\frac{3}{0,5} = \frac{12}{2} = \frac{36}{6} = 6$ donc c'est un tableau de proportionnalité.

- $-1 \times (-4) = 4 ; 0 \times (-4) = 0$ et $2 \times (-4) = -8$ donc c'est un tableau de proportionnalité.
- $g(-2) = 2 \times (-2) + 5 = -4 + 5 = 1$
Donc le point A appartient à la représentation graphique de la fonction g .
- Si l'intensité vaut 5 ampères, la tension vaut 6 volts.
Si la tension vaut 12 volts, l'intensité vaut 2 ampères.

Kilou-presque-tout

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir l'expression d'une fonction affine et sa représentation graphique.

Le prérequis nécessaire est la connaissance des généralités sur les fonctions (exprimer une grandeur en fonction d'une autre, représenter graphiquement une fonction).

La capacité introduite est de déterminer les coefficients d'une fonction affine.

1. $10 + 6 \times 4 = 34$

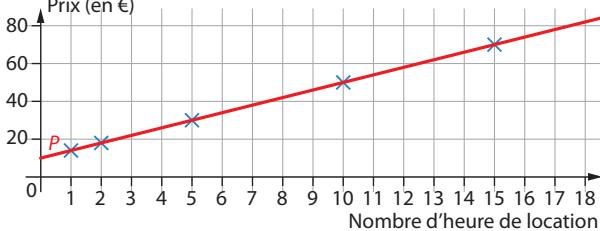
Une location de 6 h cout 34 €.

Nombre d'heures de location x	1	2	5	10	15
Prix payé $P(x)$ (en euros)	14	18	30	50	70

On peut faire remarquer aux élèves que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité, soit en le constatant après avoir fait les calculs et rempli le tableau, soit en amont (2 fois plus d'heures de location ne coutent pas 2 fois plus cher).

3. $P(x) = 10 + 4x$

4.



On remarque que les points semblent alignés.

On peut faire remarquer aux élèves que si on enlevait les frais fixes (10 €), on obtiendrait une droite parallèle à celle-ci et passant par l'origine du repère et donc on serait face à une situation de proportionnalité. Cela permet d'anticiper la compréhension de la proportionnalité des accroissements qui viendra plus tard.

5. $P(0) = 10$. Cela correspond aux frais fixes (cout pour 0 heures de location).

6. Le client paie 4 € pour chaque heure supplémentaire payée.
Sur le graphique, si on avance de 1 en abscisse (1 heure de plus), on doit monter de 4 en ordonnée pour retrouver un point de la représentation graphique (augmentation de 4 €).

Là encore, on prépare la notion de proportionnalité des accroissements mais on travaille également sur le sens concret du coefficient directeur.

Cette activité donne l'occasion de définir une fonction affine et ses coefficients. Elle permet également de commencer à réfléchir sur la représentation graphique d'une telle fonction.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de modéliser une situation avec une fonction affine. Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation concrète par une fonction, représenter graphiquement une fonction. La capacité introduite est de reconnaître et d'utiliser une fonction affine.

1. Si on note $T(x)$ le temps de cuisson en minutes pour un rôti de x kilogrammes, on a $T(x) = 45x + 30$.

On a donc :

$$T(0,8) = 45 \times 0,8 + 30 = 66$$

$$T(1) = 45 \times 1 + 30 = 75$$

$$T(1,5) = 45 \times 1,5 + 30 = 97,5$$

$$2 \text{ h } 18 \text{ min} = 2 \text{ h } + 18 \text{ min} = 120 \text{ min} + 18 \text{ min} = 138 \text{ min}$$

$$\text{Si } T(x) = 138 \text{ alors } 45x + 30 = 138 \text{ soit } 45x = 108$$

$$\text{ou encore } x = \frac{108}{45} = 2,4.$$

Poids du rôti (en kg)	0,8	1	1,5	2,4
Temps de cuisson (en minutes)	66	75	97,5	138

Ainsi, le rôti de 800 g cuit en 66 minutes soit 1 h 06 min.

Le rôti entre 1 kg et 1,5 kg a cuit entre 75 minutes et 97,5 minutes soit entre 1 h 15 min et 1 h 37 min 30 s.

Le rôti qui a cuit en 2 h 18 min pesait 2,4 kg.

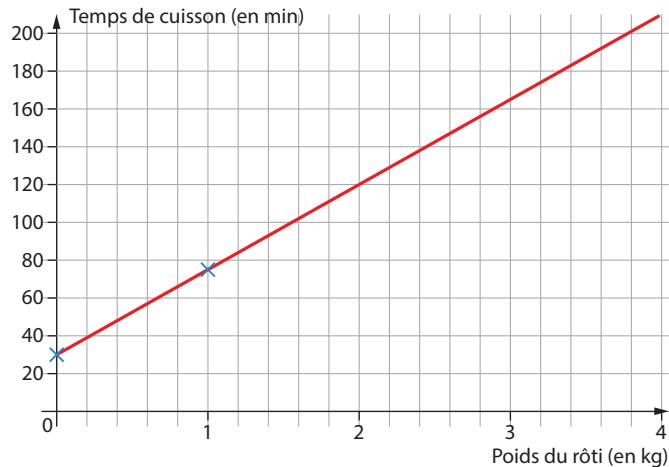
Les élèves peuvent bien évidemment effectuer ces calculs sans faire intervenir clairement la notion de fonction. C'est alors au professeur de réactiver cette notion par un questionnement permettant de faire le lien avec le chapitre 23. La présentation des résultats sous forme d'un tableau peut aider à cette réactivation.

2.

Il s'agit de représenter une fonction. Si d'autres activités amenant à la représentation d'une fonction affine ont été menées en amont (comme l'Activité 1), les élèves peuvent prendre l'initiative de relier les points à la règle même si le fait que les points sont alignés n'a pas encore été formalisé. Cela permet d'anticiper sur la suite et d'introduire les fonctions affines dans différents registres.

Si ce n'est pas le cas, en plaçant les points qui correspondent aux situations rencontrées à la première question, les élèves pourront constater l'alignement.

Il est probable que certains élèves ne feront que constater alors que d'autres auront déjà intégré ce fait. Il sera alors intéressant de confronter les différents points de vue.



Différents degrés

Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de déterminer les coefficients d'une fonction affine et d'utiliser son expression algébrique.

Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation concrète par une fonction, exploiter la courbe représentative d'une fonction.

La capacité introduite est de reconnaître et d'utiliser une fonction affine.

Les valeurs données dans le corrigé sont des valeurs exactes. Les lectures graphiques des élèves peuvent bien évidemment être moins précises.

1. 86 °F correspond à 30 °C, donc il fait chaud.
2. La glace fond à une température de 0 °C soit 32 °F.
3. D'après le graphique, si la température en °C augmente de 10, la température en °F augmente de 18.

On pourra poser d'autres questions de ce type afin de faire ressortir, de manière graphique, le rôle joué par le coefficient directeur d'une fonction affine.

4. L'ordonnée à l'origine vaut 32 et le coefficient directeur 1,8 (par lecture graphique ou utilisation de la question 3 : si on augmente de 10 °C, on augmente de 18 °F donc si on augmente de 10 fois moins, soit de 1 °C, on augmente de 1,8 °F). Ainsi $f(x) = 1,8x + 32$.

Il s'agit bien ici de retravailler sur le rôle et le sens des coefficients d'une fonction affine.

5. L'eau bout à 100 °C. Or $f(100) = 1,8 \times 100 + 32 = 212$.
Donc l'eau bout à 212 °F.
6. Si le malade a une température de 104 °F, on a $f(x) = 104$ soit $1,8x + 32 = 104$; on a donc $1,8x = 72$ soit $x = \frac{72}{1,8} = 40$.
Donc il y a lieu de s'inquiéter.

Les élèves pourront également s'appuyer sur une lecture graphique, mais on pourra faire ressortir que l'utilisation de l'expression de la fonction donne des résultats plus précis. Celle-ci sera donc préférable lorsqu'on en dispose.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'identifier et d'utiliser un cas particulier de fonction affine : une fonction linéaire. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tableaux de proportionnalité, des grandeurs quotients, de l'expression d'une grandeur en fonction d'une autre, de la fonction affine. La capacité introduite est de reconnaître et d'utiliser une fonction linéaire.

$$1. \frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{48}{4} = 12$$

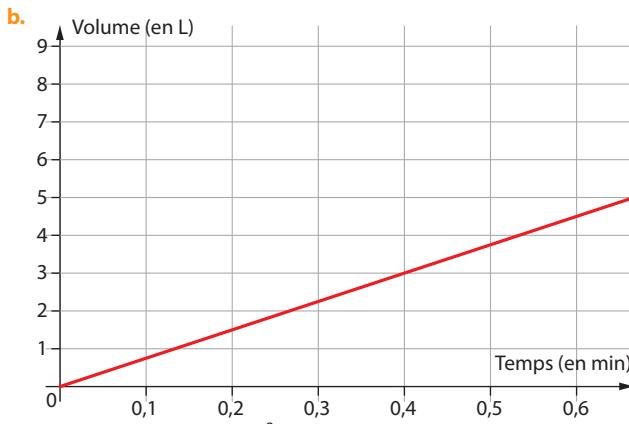
C'est donc bien un tableau de proportionnalité car on passe d'une ligne à l'autre en multipliant par 12 (coefficients de proportionnalité).

Le débit étant supposé constant, on peut également exploiter cette information ou mettre en lumière le débit constant par la constatation de cette situation de proportionnalité.

2. Le tuyau débite 1,5 L (1 bouteille) en 12 secondes donc en une minute, il débite 5 fois plus (car $5 \times 12 \text{ s} = 60 \text{ s} = 1 \text{ min}$) soit $5 \times 1,5 \text{ L} = 7,5 \text{ L}$. Cela correspond donc à un débit de 7,5 L/min.

3. a. Le tuyau d'arrosage délivre 7,5 litres par minute. Ainsi on a $V(t) = 7,5t$. V est donc une fonction affine car elle a une expression du type $V(t) = mt + p$ avec $m = 7,5$ et $p = 0$.

Les élèves peuvent avoir du mal à reconnaître une fonction affine car $p = 0$ donc il n'apparaît pas dans l'expression algébrique. Il faut faire ressortir ce cas comme un cas particulier d'une fonction affine (m et p peuvent prendre n'importe quelle valeur, y compris 0).



$$4. 8 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} = 48 \text{ m}^3$$

La piscine contient donc 48 m³ soit 48 000 L d'eau.

$$\frac{48\ 000}{7,5} = 6\ 400$$

Benoit mettra donc 6 400 minutes, soit 106 h 40 min, soit 4 jours 10 h 40 min, pour remplir sa piscine.

Cette activité permet de retravailler les grandeurs quotients abordées dans le chapitre 22.

Elle permet, au travers d'une situation très concrète, de mettre en lumière le cas particulier des fonctions linéaires, représentant des situations de proportionnalité déjà rencontrées par les élèves. On pourra alors reparler du rôle du coefficient directeur, qui, s'il est le même que pour une fonction affine, joue aussi le rôle du coefficient de proportionnalité dans ce cas-là.

Poids lourd

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de modéliser une situation de proportionnalité par une fonction linéaire. Les prérequis nécessaires sont de savoir lire des informations à partir d'un graphique, modéliser un phénomène concret par une fonction, exploiter une fonction. La capacité introduite est de modéliser une situation de proportionnalité par une fonction linéaire.

D'après la représentation graphique fournie, la distance (en km) est proportionnelle au temps (en heures) car c'est une droite passant par l'origine du repère. La fonction D donnant la distance (en km) en fonction du temps t (en heures) est donc une fonction linéaire. Or, par lecture graphique, on voit que $D(0,5) = 40$. Donc $m = \frac{40}{0,5} = 80$ et $D(t) = 80t$. Il reste au chauffeur 148 km à parcourir, on a donc $D(t) = 148$ soit $80t = 148$ ou $t = \frac{148}{80} = 1,85$.

Exercices

Reconnaitre et utiliser une fonction affine

Questions flash

1. f: oui.
g: non (on ne peut pas écrire son expression sous la forme $mx + p$).
h: oui, car $h(x) = 4x + 3$.
i: oui, car $i(x) = 2x + 9$.
2. Les fonctions affines sont représentées par des droites. Donc seules les courbes jaune, bleue et verte représentent des fonctions affines.

Activité 5

Or $1,85 \text{ h} = 1,85 \times 60 \text{ min} = 111 \text{ min} = 1 \text{ h } 51 \text{ min}$.

Patrick atteindra la sortie d'autoroute au bout de 1 h 51 min.

$14 \text{ h } 53 \text{ min} + 1 \text{ h } 51 \text{ min} = 16 \text{ h } 44 \text{ min}$

Patrick atteindra la sortie d'autoroute à 16 h 44 si il maintient ce rythme.

La notion de fonction linéaire ne sera pas forcément utilisée par les élèves. Ceux-ci peuvent également faire appel à leurs connaissances sur la proportionnalité.

Certains élèves se contenteront peut-être de prolonger la droite existante afin de procéder à une lecture graphique.

Toutes les méthodes sont à valoriser et on pourra faire se confronter les différents points de vue ayant émergé afin de mettre en lumière le fait que pouvoir déterminer le modèle permet d'accéder à des résultats beaucoup plus précis.

3. Pour f, le coefficient directeur vaut $m = 2$ et l'ordonnée à l'origine vaut $p = -1$.

Pour g, le coefficient directeur vaut $m = -3$ et l'ordonnée à l'origine vaut $p = 6$.

Pour h, le coefficient directeur vaut $m = -\frac{1}{3}$ et l'ordonnée à l'origine vaut $p = \frac{7}{3}$.

Pour i, le coefficient directeur vaut $m = -\frac{3}{7}$ et l'ordonnée à l'origine vaut $p = -7$.

4. f est une fonction affine car son expression est du type $f(x) = mx + p$ avec $m = 2$ et $p = -1$.

$g(x) = (2+x)(2-x) + x^2 = 4 - 2x + 2x - x^2 + x^2 = 4$ donc g est une fonction affine car son expression est du type $g(x) = mx + p$ avec $m = 0$ et $p = 4$.

$h(x) = \frac{1}{x-2}$; h n'est pas une fonction affine car elle ne peut pas s'écrire sous la forme $h(x) = mx + p$.

i est une fonction affine car son expression est du type $i(x) = mx + p$ avec $m = 0$ et $p = 2$.

5. 1. $f(x) = x(x - 4) = x - 4x$

f n'est pas une fonction affine car son expression ne peut pas s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$.

$$g(x) = (x - 4)(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$$

g n'est pas une fonction affine car son expression ne peut pas s'écrire sous la forme $g(x) = mx + p$.

$$h(x) = 4(x - 4) = 4x - 16$$

h est une fonction affine car son expression est du type $h(x) = mx + p$ avec $m = 4$ et $p = -16$.

La seule fonction affine est donc la fonction h .

2. $h(3) = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4$

L'image de 3 par h vaut -4 .

3. On cherche les valeurs de x telles que $h(x) = 16$ soit $4x - 16 = 16$ ou encore $4x = 32$ c'est-à-dire $x = 8$.

Donc 16 a un seul antécédent par la fonction h : 8.

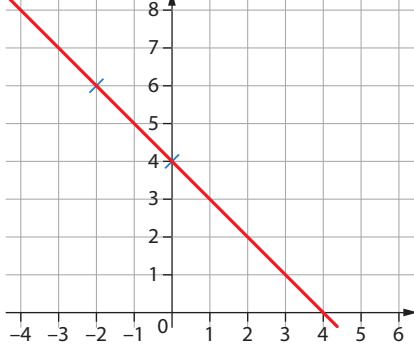
6. a. Le prix payé est proportionnel au nombre de litres, on a donc $P(\ell) = m\ell$ avec ℓ le nombre de litres achetés et $P(\ell)$ le prix payé en euros. Cette situation est donc modélisée par une fonction affine.

- b. Si $T(x)$ est la taille (en cm) au bout de x semaines, on a $T(x) = 3 + 1,5x$. Cette situation est donc modélisée par une fonction affine.

- c. Si $\mathcal{A}(x)$ est l'aire d'un disque de rayon x , on a $\mathcal{A}(x) = \pi x^2$. Cette situation n'est donc pas modélisée par une fonction affine.

7. 1. $f(-2) = -(-2) + 4 = 6$ et $f(0) = -0 + 4 = 4$

2.



8. Pour $x \mapsto 2x + 1$, points D, E, G et J.

- Pour $x \mapsto -5x$, points A, F et H.

- Pour $x \mapsto 3x - 2$, points C et I.

9. On peut se baser sur la proportionnalité des accroissements. On peut aussi placer les points dans un repère, mais cette méthode, outre le fait qu'elle soit plus longue, ne constituera pas une preuve mais une simple conjecture.

- Dans le tableau ① : Les valeurs de x augmentent de 1 à chaque fois et les ordonnées augmentent de 2 à chaque fois. C'est donc le tableau de valeurs d'une fonction affine de coefficient directeur 2.

On peut aussi prouver que ce tableau est un tableau de proportionnalité, donc le tableau de valeurs d'une fonction linéaire. Néanmoins, il faudra faire attention à ce que les élèves ne pensent pas que s'il n'y a pas proportionnalité, il ne s'agit pas d'une fonction affine.

- Dans le tableau ② : Les valeurs de x augmentent de 1 à chaque fois et les ordonnées n'augmentent pas de manière constante (+2 pour la première, puis +4 pour la deuxième). Ce n'est donc pas le tableau de valeurs d'une fonction affine.

Déterminer les coefficients d'une fonction affine

Questions flash

10. Comme $f(0) = 3$, l'ordonnée à l'origine vaut 3.

$$m = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Donc $f(x) = x + 3$.

11. Par lecture graphique, $p = 1$ et $m = -3$ donc $g(x) = -3x + 1$.

12. Le coefficient directeur vaut 3 donc $f(x) = 3x + p$.

$f(2) = 5$ donc $3 \times 2 + p = 5$ d'où $p = -1$ et finalement $f(x) = 3x - 1$.

13. $f(x) = 4x - 1,5$

noir
vert

$g(x) = -4x - 1,5$
rouge

$h(x) = -4x + 1,5$
bleu clair

$i(x) = 4x + 1,5$
orange

$j(x) = 1,5x + 4$
gris

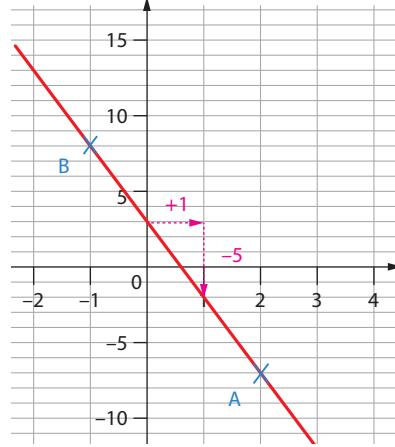
$k(x) = 1,5x - 4$
jaune

$\ell(x) = -1,5x + 4$
bleu foncé

$m(x) = -1,5x - 4$

14. 1. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 + 7}{-1 - 2} = -5$

2.



15. h est une fonction affine telle que $h(3) = 21$ et $h(-2) = -29$.

h est affine donc $h(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{h(3) - h(-2)}{3 - (-2)} = \frac{21 - (-29)}{3 + 2} = \frac{50}{5} = 10$$

Donc $h(x) = 10x + p$.

Il reste à déterminer la valeur de p .

Comme $h(3) = 21$, on a $10 \times 3 + p = 21$. En résolvant cette équation, on trouve $p = -9$.

On a finalement $h(x) = 10x - 9$.

Reconnaitre et utiliser une fonction linéaire

Questions flash

16. Les fonctions linéaires peuvent s'écrire sous la forme : $x \mapsto mx$. Il n'y a donc que la fonction f qui est linéaire.

17. Les fonctions linéaires sont représentées par des droites passant par l'origine du repère. Les courbes rouge et verte sont donc les seules à représenter des fonctions linéaires.

18. Les fonctions linéaires peuvent s'écrire sous la forme : $x \mapsto mx$. f n'est pas linéaire.

$g(x) = (x + 3)(x - 4) - x^2 = x^2 - 4x + 3x - 12 - x^2 = -x - 12$; g n'est donc pas linéaire.

$h(x) = x(x - 5) - x^2 = x^2 - 5x - x^2 = -5x$; h est donc linéaire avec $m = -5$.

$i(x) = 3(x - 2) + 6 = 3x - 6 + 6 = 3x$ donc i est une fonction linéaire avec $m = 3$.

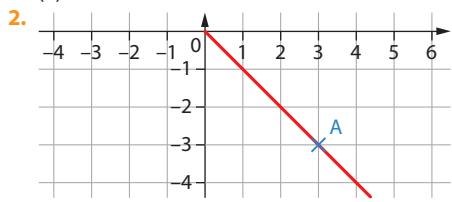
19. 1. C'est la fonction f qui est linéaire car, en développant, on a $f(x) = -2x$ et donc $m = -2$. Les autres ne peuvent pas s'écrire sous la forme $x \mapsto mx$.

2. $f(-4) = -2 \times (-4) = 8$ donc l'image de -4 par la fonction f est 8.

3. On résout $f(x) = 7$, c'est-à-dire $-2x = 7$, ce qui donne $x = -\frac{7}{2}$.

$x = -\frac{7}{2}$ a donc une seul antécédent par la fonction f :

$$-\frac{7}{2} \text{ (ou } -3,5\text{).}$$

20 1. $f(3) = -3$ **Déterminer les coefficients d'une fonction affine****Questions flash**

- 21 a. Quand l'âge d'un enfant double, sa taille ne double pas a priori. Ce n'est pas une situation de proportionnalité donc cette situation n'est pas modélisée par une fonction linéaire.
- b. On a $A(x) = x^2$ avec x le côté du carré et $A(x)$ son aire. Donc cette situation n'est pas modélisée par une fonction linéaire.
- c. Si m est le prix d'une baguette, le prix à payer pour x baguettes est $P(x) = mx$. Cette situation est donc modélisée par une fonction linéaire.
Seule la situation c. peut être modélisée par une fonction linéaire (il y a proportionnalité).

22 1. $f(x) = 4,15x$

2. Si Ali a payé 1,66 on a donc $4,15x = 1,66$ soit $x = \frac{1,66}{4,15} = 0,4$.
Ainsi Ali a acheté 0,4 kg de tomates cerises soit 400 g.

23 Par exemple : Omar se balade à la vitesse de 2,5 km/h ; la distance $f(x)$ qu'il parcourt en fonction du nombre d'heures x que dure sa randonnée est donnée par $f(x) = 2,5x$.

24 a. Courbe bleue. b. Courbe verte. c. Courbe rouge.

Problèmes**Quelle chaleur !**

1. L'eau gèle à 0 °C. Or $0 \times 1,8 + 32 = 32$. Le thermomètre indiquerait donc 32 °F.
2. On a $x \times 1,8 + 32 = 212$ avec x la température en degrés Celsius, donc $x \times 1,8 = 180$ soit $x = 100$. L'eau est donc à 100 °C, elle bout.
3. a. $f(x) = 1,8x + 32$
b. $f(10) = 1,8 \times 10 + 32 = 50$ donc 10 °C correspondent à 50 °F.

On peut faire le lien avec l'Activité 3.

De l'aire !

1. x peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 6 car $M \in [RS]$ et $RS = 6$.

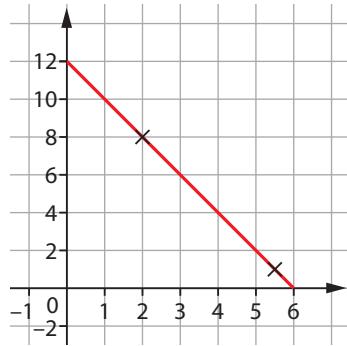
2. Pour $x = 2$: $MS = 6 - 2 = 4$, donc :

$$\mathcal{A}(MTS) = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

Pour $x = 5,5$: $MS = 6 - 5,5 = 0,5$, donc :

$$\mathcal{A}(MTS) = \frac{4 \times 0,5}{2} = 1 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

3. $\mathcal{A}(x) = \frac{4(6-x)}{2} = 2(6-x) = 12 - 2x$

**Beaucoup de monde !**

1. Entre le 1^{er} janvier 2015 et le 1^{er} janvier 2030, il s'est écoulé 15 années dont 4 bissextiles, soit :

$$365 \text{ jours} \times 11 + 366 \text{ jours} \times 4 = 5\ 479 \text{ jours.}$$

$$1 \text{ jour} = 24 \text{ h} = 24 \times 3\ 600 \text{ s} = 86\ 400 \text{ s}$$

$$\text{D'où } 5\ 479 \text{ jours} = 473\ 385\ 600 \text{ s}$$

$$\frac{473\ 385\ 600}{13} \approx 36\ 414\ 277$$

Donc, au 1^{er} janvier 2030, il y aura environ 36 414 277 habitants de plus aux États-Unis.

$$320\ 206\ 000 + 36\ 414\ 277 = 356\ 620\ 277$$

Donc, au 1^{er} janvier 2030, il y aura environ 356 620 277 habitants aux États-Unis.

2. 1 jour = 24 h = 24 × 3 600 s = 86 400 s

$$\frac{86\ 400}{13} \approx 6\ 646$$

Chaque jour, on a donc environ 6 646 habitants de plus aux États-Unis.

$$6\ 646 \times 365 = 2\ 425\ 790$$

Chaque année, on a donc environ 2 425 790 habitants de plus aux États-Unis.

On considère que toutes les années comportent 365 jours (ce qui ne change pas le résultat vu l'ordre de grandeur). On peut, par exemple, utiliser un tableau ou une calculatrice ou résoudre une (in)équation...

	A	B	C
1			Nombre d'habitants
26	1 ^{er} janvier	2039	378 424 960
27	1 ^{er} janvier	2040	380 850 750
28	1 ^{er} janvier	2041	383 276 540
29	1 ^{er} janvier	2042	385 702 330
30	1 ^{er} janvier	2043	388 128 120
31	1 ^{er} janvier	2044	390 553 910
32	1 ^{er} janvier	2045	392 979 700
33	1 ^{er} janvier	2046	395 405 490
34	1 ^{er} janvier	2047	397 831 280
35	1 ^{er} janvier	2048	400 257 070
36	1 ^{er} janvier	2049	402 682 860
37	1 ^{er} janvier	2050	405 108 650

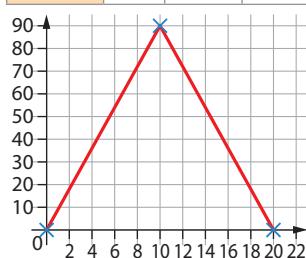
C'est en 2048 que, si cette évolution se poursuit, la population américaine dépassera pour la première fois les 400 000 000 d'habitants.

Voiture électrique

1. Chaque expression est celle d'une fonction affine : on aura donc deux segments de droites comme représentation graphique de la fonction f (voir tableau de valeurs page suivante).

Tableau de valeurs :

t	0	10	20
$v(t)$	0	90	0

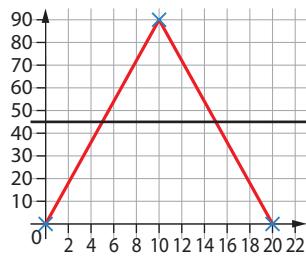


2. La vitesse la plus grande est atteinte pour $t = 10$ après l'accélération et juste avant le début du freinage. Elle est de 90 km/h.

On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en utilisant l'une ou l'autre des expressions données.

3. Le véhicule roule à 45 km/h à deux instants : au bout de 5 s et au bout de 15 s.

On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en utilisant les deux expressions données. Il faut alors résoudre les équations $9t = 45$ et $-9t + 180 = 45$.



La durée totale de cet essai est de 20 s.

On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en résolvant l'équation $-9t + 180 = 0$.

29 Bricks

- The right formula is $C(x) = 0.2x + 40$. With this formula $C(500) = 140$, $C(1\,200) = 280$ et $C(2\,000) = 440$.
- $C(5\,000) = 0.2 \times 5\,000 + 40 = 1\,040$ so the cost for a delivery of 5 000 bricks is 1 040£.
- John paid 200£, therefore $0.2x + 40 = 200$ so $0.2x = 160$ and $x = 800$. John bought 800 bricks.

30 Tour de magie

- Si on choisit 5 comme nombre de départ :

$$\begin{aligned} 5 + 4 &= 9 \\ 9 \times 2 &= 18 \\ 18 + 3 \times 2 &= 24 \\ 24 - 2 \times 5 &= 14 \\ 14 - \frac{1}{2} \times 20 &= 4 \end{aligned}$$

- On obtient la lettre D.

- Le Danemark.

- Le kiwi.

-

Avant de se lancer dans une justification mathématique, il est important, en confrontant les résultats obtenus, de faire ressortir que l'on trouve toujours le même résultat. Cela permet de générer de la curiosité à propos de ce phénomène.

Si x est le nombre de départ, on obtient, après chaque étape :

$$\begin{aligned} x + 4 \\ 2(x + 4) \\ 2(x + 4) + 3 \times 2 \\ 2(x + 4) + 3 \times 2 - 2x \\ 2(x + 4) + 3 \times 2 - 2x - \frac{1}{2} \times 20 \\ 2(x + 4) + 3 \times 2 - 2x - \frac{1}{2} \times 20 = 2x + 8 + 6 - 2x - 10 = 4 \end{aligned}$$

En simplifiant la dernière expression, on trouve 4, ce qui signifie que le résultat final est toujours 4, et ce, indépendamment du nombre x choisi au départ. On pense alors assez naturellement au Danemark et peu de nom de fruits commencent par la lettre K...

Ce problème peut montrer l'utilité du calcul littéral qui permet d'expliquer scientifiquement ce « tour de magie ».

31 Black out

La courbe est une droite, donc le prix $P(x)$ payé par le client est une fonction affine du temps d'intervention x . Par lecture graphique, on trouve que $P(x) = 25 + 15x$ (lecture graphique de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur).

Donc, pour une intervention de 6 heures, le client paiera 115 € car $P(6) = 25 + 15 \times 6 = 115$.

32 Histoire d'eau

$$900 \text{ L} = 900 \text{ dm}^3 = 0,9 \text{ m}^3$$

$$0,9 \text{ m}^3 \times 3 = 2,7 \text{ m}^3$$

En 3 jours, la chasse d'eau a donc perdu 2,7 m³ d'eau.

Une lecture graphique n'est pas aisée car l'échelle n'est pas assez précise, d'où la nécessité de recourir au modèle.

On voit que le prix payé en euros est une fonction linéaire de la consommation (droite passant par l'origine du repère).

De plus, si on appelle $P(x)$ le prix payé pour x m³ d'eau, on lit que $P(100) = 350$. Ainsi $P(x) = 3,5x$.

On a donc $P(2,7) = 3,5 \times 2,7 = 9,45$.

Cette fuite va donc coûter 9,45 € à Aurore.

33 Bactéries

- Si $f(x)$ est le nombre de bactéries au bout de x heures, on a $f(x) = mx + p$ car f est une fonction affine.

De plus, $f(0) = 3\,000$ et $f(4) = 750$.

$f(0) = 3\,000$ implique que $p = 3\,000$

$$\text{et } m = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{750 - 3\,000}{4 - 0} = -562,5.$$

On a donc $f(x) = -562,5x + 3\,000$.

- Il faut résoudre $f(x) = 0$

soit $-562,5x + 3\,000 = 0$ soit $-562,5x = -3\,000$, ce qui donne

$$x = \frac{-3\,000}{-562,5} = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Or } \frac{16}{3} \text{ h} = \frac{16}{3} \times 60 \text{ min} = 320 \text{ min} = 5 \text{ h } 20 \text{ min}.$$

Les bactéries seront donc éliminées au bout de 5 h 20 min.

34 Déménagement

- Prix avec la première société : $30 \text{ €} \times 35 = 1\,050 \text{ €}$

Prix avec la seconde société : $800 \text{ €} + 10 \text{ €} \times 35 = 1\,150 \text{ €}$

C'est donc la première société qui lui propose le meilleur tarif.

- Prix avec la première société : $30 \text{ €} \times 45 = 1\,350 \text{ €}$

Prix avec la seconde société : $800 \text{ €} + 10 \text{ €} \times 45 = 1\,250 \text{ €}$

Monsieur Montigné aurait donc mieux fait de choisir la seconde société.

- On peut regarder l'évolution des deux tarifs en fonction du nombre de m³:

A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de m ³	10	20	30	40	50	60	70
Prix avec la 1 ^{re} société	300	600	900	1200	1500	1800	2100
Prix avec la 2 ^{de} société	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500

La seconde société devrait baser sa publicité sur de gros volumes car c'est au-dessus de 40 m³ que son tarif est meilleur que celui de la première société.

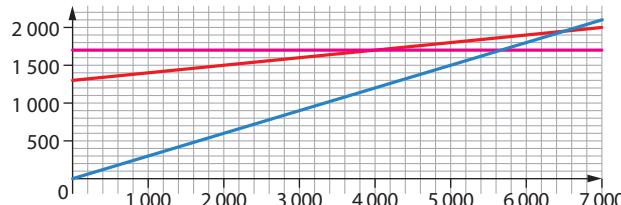
On peut également tracer les courbes représentatives des deux fonctions ou résoudre une (in)équation pour s'en apercevoir.

35

Salaires

On peut, dans un premier temps, laisser les élèves tester différentes valeurs pour s'apercevoir que la réponse n'est pas la même selon le montant des ventes réalisées. L'idée de représenter les trois courbes donnant le salaire dans chacune de ces trois sociétés en fonction du montant des ventes peut alors émerger.

On a $A(x) = 1\,300 + 0,1x$; $B(x) = 0,3x$; $C(x) = 1\,700$.



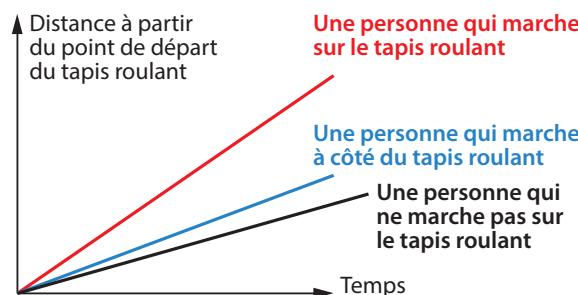
On voit que pour un montant de vente inférieur à 4 000 € environ, c'est la société C que Cindy devrait choisir.
On voit que pour un montant de vente compris entre 4 000 € et 6 500 € environ, c'est la société A que Cindy devrait choisir.
On voit que pour un montant de vente supérieur à 6 500 € environ, c'est la société B que Cindy devrait choisir.

Pour les élèves les plus aguerris : pour obtenir les valeurs exactes, on peut, par exemple, résoudre les inéquations : $C(x) > A(x)$ et $A(x) > B(x)$. On trouve les mêmes valeurs.

36

Tapis roulant

Il s'agit de soustraire la fonction représentée par la droite bleue à la fonction représentée par la droite rouge. Les fonctions représentées par les droites rouge et bleue sont linéaires. La fonction cherchée sera donc elle aussi linéaire. Il suffit donc de placer un point pour la tracer.

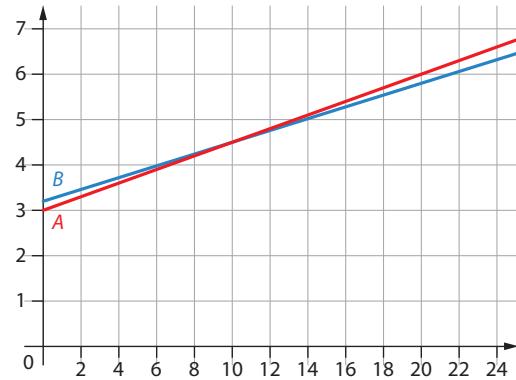


37

Taxi !

- Prix avec la compagnie A : $3 \text{ €} + 15 \times 0,15 \text{ €} = 5,25 \text{ €}$
Prix avec la compagnie B : $3,20 \text{ €} + 15 \times 0,13 \text{ €} = 5,15 \text{ €}$
Le client devrait choisir la compagnie B pour ce trajet.
- Prix avec la compagnie A : $3 \text{ €} + 20 \times 0,15 \text{ €} + 4 \text{ €} = 10 \text{ €}$
Prix avec la compagnie B : $3,20 \text{ €} + 20 \times 0,13 \text{ €} + 3 \text{ €} = 8,80 \text{ €}$
Le client devrait choisir la compagnie B pour ce trajet.
- Pour x kilomètres parcourus, sans bagages, le prix payé avec la compagnie A est de $A(x) = 3 + 0,15x$ et le prix payé avec la compagnie B est de $B(x) = 3,20 + 0,13x$.

Les élèves peuvent représenter ces courbes sans donner l'expression des fonctions. Ce n'est pas un attendu sur ce type de problème.



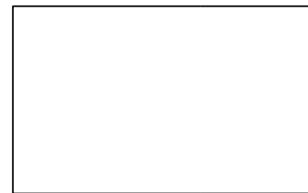
On voit que pour un trajet de moins de 10 km environ, c'est la compagnie A que ce client devrait choisir et pour un trajet de plus de 10 km environ, c'est la compagnie B.

Pour obtenir les valeurs exactes, on peut, par exemple, résoudre l'inéquation $A(x) > B(x)$.
 $3 + 0,15x > 3,20 + 0,13x$ soit $0,02x > 0,2$ ou encore $x > 10$.

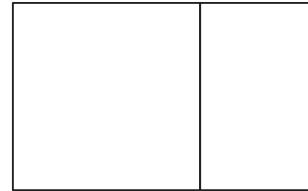
38

Spirale d'or

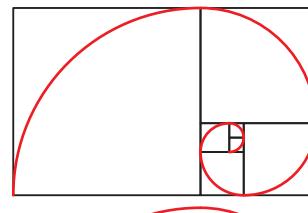
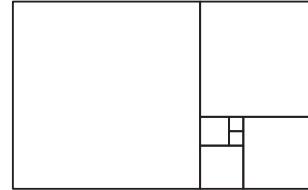
- On voit graphiquement que la longueur de ce rectangle doit être d'environ 16 cm.



2.



3.



39

Du ressort

On ne peut ici procéder à une lecture graphique puisque les unités ne sont pas indiquées sur les axes, il faut donc forcément recourir au modèle de la fonction affine représentant la longueur du ressort en fonction de la masse suspendue. On peut déterminer l'expression de cette fonction (comme dans le corrigé page suivante) ou utiliser la proportionnalité des accroissements (de façon experte ou en procédant à des essais successifs sans forcément formaliser).

La longueur du ressort $f(x)$ est une fonction affine de sa masse x (car représentée par une droite).

On a donc $f(x) = mx + p$ avec $f(50) = 30$ et $f(150) = 40$.

$$m = \frac{f(150) - f(50)}{150 - 50} = \frac{40 - 30}{100} = 0,1$$

D'où $f(x) = 0,1x + p$.

De plus, $f(50) = 30$ donc $0,1 \times 50 + p = 30$, ainsi $p = 25$.

D'où $f(x) = 0,1x + 25$.

On a donc $f(230) = 0,1 \times 230 + 25 = 48$.

Si on accroche au ressort une masse de 230 grammes, sa longueur est de 48 mm.

40 Fréquence cardiaque

1. Il faut résoudre $208 - (0,7 \times A) > 220 - A$ graphiquement ou algébriquement.

On trouve $A > 40$.

C'est donc à partir de 40 ans que la fréquence cardiaque recommandée commence à augmenter.

2. Fréquence cardiaque F_E recommandée pour que l'exercice physique soit le plus efficace :

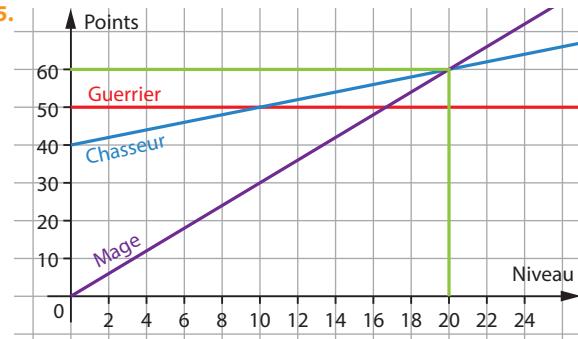
$$F_E = \frac{80}{100} \times [208 - (0,7 \times A)] = 166,4 - 0,56 \times A$$

On pourra se satisfaire de la première expression, qui répond également au problème posé.

Uniquement ce niveau-là : on pouvait lire ce résultat dans le tableau précédent mais cela ne prouvait pas que c'était le seul niveau, sauf si on ajoute l'argument que le nombre de points du chasseur ne fait qu'augmenter alors que celui du guerrier reste constant, ce qui justifie qu'une fois que le chasseur a dépassé le nombre de points du guerrier, c'est définitif.

4. $f(x)$ désigne le nombre de points du mage, $g(x)$ désigne le nombre de points du guerrier et $h(x)$ désigne le nombre de points du chasseur.

5.



6. Le mage devient le plus fort à partir du niveau 21.

Brevet

41 Taux d'alcool

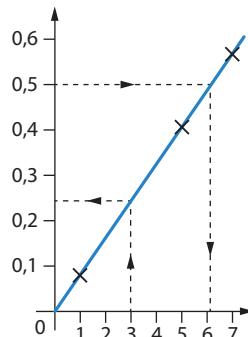
1. Le taux est égal à : $\frac{660 \times 0,05 \times 0,8}{60 \times 0,7} \approx 0,628$ soit environ 0,63 g/L au centième près.

2. Le taux dépassant 0,5 cette personne n'a pas le droit de conduire.

3.

Quantité d'alcool (en dL)	0	1	5	7
Taux d'alcool (en g/L)	0	0,08	0,41	0,57

4.



5. Pour une quantité de bière de 3 dL, le taux d'alcool est d'environ 0,25.

6. À partir de 6,1 dL de bière, l'homme n'est plus autorisé à reprendre le volant.

42 Jeu vidéo

1. Au début du jeu, le plus fort est le guerrier, le moins fort le mage.

2.

Niveau	0	1	5	10	15	25
Points du guerrier	50	50	50	50	50	50
Points du mage	0	3	15	30	45	75
Points du chasseur	40	41	45	50	55	65

3. Si x est le niveau atteint, il faut résoudre l'équation :

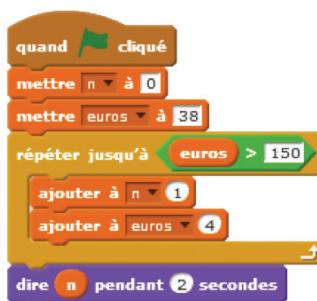
$$50 = 40 + x \text{ qui a pour solution } x = 10.$$

Le chasseur et le guerrier auront autant de points au niveau 10.

Algorithmique et outils numériques

43 Tirelire

1.



La variable « euros » indique la somme possédée par Jade et la variable n correspond au nombre de semaines écoulées.

2. C'est au bout de 29 semaines que Jade possédera plus de 150 €.

3. Jade aurait aussi pu résoudre une inéquation (ou une équation).

Si on appelle x le nombre de semaines passées, la somme possédée par Jade au bout de x semaines est de $38 + 4x$ (elle place 4 € par semaine dans sa tirelire). On souhaite donc que $38 + 4x > 150$, ce qui donne $4x > 112$ ou encore $x > 28$. C'est donc bien au bout de 29 semaines que les économies de Jade dépasseront 150 €.

44 Fonte des glaces



45

Transport en commun

1. Voir fichier dans le manuel numérique.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombr e de trajets dans le mois	0	5	10	15	20	25	30	
1	0	5	10	15	20	25	30	
2 Coût avec tarif 1	0	6	12	18	24	30	36	
3 Coût avec tarif 2	8	11	14	17	20	23	26	
4 Coût avec tarif 3	30	30	30	30	30	30	30	

2. Non, la feuille ne permet pas de connaître le tarif minimal selon le nombre de trajets car toutes les valeurs n'apparaissent pas.

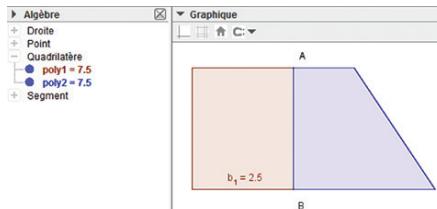
3. Voir tableau ci-dessous.

Jusqu'à 13 trajets dans le mois, c'est le tarif 1 le plus intéressant. De 14 à 36 trajets par mois, c'est le tarif 2 le plus intéressant.

À partir de 37 trajets par mois, c'est le tarif 3 le plus intéressant.

46 Chambre commune

1. Voir fichier dans le manuel numérique.



2. Conjecture : il faut que la cloison soit à 2,5 m du mur de gauche pour que les deux chambres aient la même aire.

L'aire de l'ancienne chambre, en forme de trapèze, vaut :

$$\frac{(4+6) \times 3}{2} = 15.$$

Si on appelle x la distance entre le mur de gauche et la cloison, l'aire de la chambre rose est de $3x$.

On souhaite donc que $3x = \frac{15}{2}$ soit $3x = 7,5$ qui donne $x = 2,5$. La conjecture est donc démontrée.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
Nombr e de trajets dans le mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	0	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6	10,8	12	13,2	14,4	15,6	16,8	18	19,2	20,4	21,6	22,8	24	
2 Coût avec tarif 1	0	8	8,6	9,2	9,8	10,4	11	11,6	12,2	12,8	13,4	14	14,6	15,2	15,8	16,4	17	17,6	18,2	18,8	19,4	20
3 Coût avec tarif 2	8	8	8,6	9,2	9,8	10,4	11	11,6	12,2	12,8	13,4	14	14,6	15,2	15,8	16,4	17	17,6	18,2	18,8	19,4	20
4 Coût avec tarif 3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	

A	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
Nombr e de trajets dans le mois	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
2 Coût avec tarif 1	25,2	26,4	27,6	28,8	30	31,2	32,4	33,6	34,8	36	37,2	38,4	39,6	40,8	42	43,2	44,4	45,6	46,8	48
3 Coût avec tarif 2	20,6	21,2	21,8	22,4	23	23,6	24,2	24,8	25,4	26	26,6	27,2	27,8	28,4	29	29,6	30,2	30,8	31,4	32
4 Coût avec tarif 3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. On peut tester les fonctions :

Valeur de x	1	3
$2x$	2	6
$1,5x + 0,5$	2	5
$-2x + 4$	2	-2

C'est donc la fonction b. qui convient.

2. $f(2) = 1,5 \times 2 + 0,5 = 3,5$

L'image de 2 par la fonction f est donc 3,5.

3. Si x est un antécédent de 6 par la fonction f alors $1,5x + 0,5 = 6$.

En résolvant cette équation, on obtient $x = \frac{5,5}{1,5} = \frac{11}{3}$.

Donc 6 n'a qu'un seul antécédent par la fonction f: $\frac{11}{3}$.

Exercice 1

f est une fonction affine, on a donc $f(x) = mx + p$ avec $f(1) = 2$ et $f(3) = 5$.

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{5 - 2}{2} = 1,5$$

D'où $f(x) = 1,5x + p$.

De plus, $f(1) = 2$ donc $1,5 \times 1 + p = 2$, ainsi $p = 0,5$.

D'où $f(x) = 1,5x + 0,5$.

On a donc $f(2) = 1,5 \times 2 + 0,5 = 3,5$.

Si x est un antécédent de 6 par la fonction f alors $1,5x + 0,5 = 6$.

$$\text{En résolvant cette équation, on obtient } x = \frac{5,5}{1,5} = \frac{11}{3}.$$

On a donc :

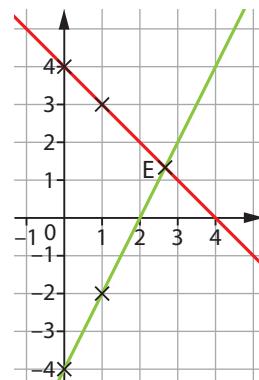
x	1	2	3	$\frac{11}{3}$
$f(x)$	2	3,5	5	6

Exercice 2

1. Ces deux fonctions sont des fonctions affines, il suffit donc de deux points pour tracer leurs représentations graphiques puisque ce sont des droites.

Tableau de valeurs :

x	0	1
$g(x)$	4	3
$h(x)$	-4	-2



2. Le point E, d'abscisse x_E , appartient aux deux droites. Donc son ordonnée est à la fois égale à $g(x_E)$ et à $h(x_E)$. Pour trouver la valeur x_E il faut donc résoudre l'équation $g(x) = h(x)$, soit $-x + 4 = 2x - 4$. On trouvera ensuite l'ordonnée du point E en calculant $g(x_E)$ ou $h(x_E)$.

3. $-x + 4 = 2x - 4$ soit $-3x = -8$ ou encore $x = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$.

$$g(x_E) = g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

Les coordonnées du point E sont donc $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Exercice 2**Travail en groupe**

1. f est une fonction affine (car représentée par une droite), on a donc $f(x) = mx + p$ avec $f(0) = 4$ et $f(2) = 2$.

$f(0) = 4$ donne $p = 4$.

$$m = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

D'où $f(x) = -x + 4$.

2. On cherche de la même manière la fonction g représentée par la droite (CD) :

g est une fonction affine (car représentée par une droite), on a donc $g(x) = mx + p$ avec $g(1) = -2$ et $g(3) = 2$.

$$m = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

D'où $g(x) = 2x + p$.

De plus, $g(1) = -2$ donc $2 \times 1 + p = -2$, ainsi $p = -4$.

D'où $g(x) = 2x - 4$.

Le point E, d'abscisse x_E , appartient aux deux droites. Donc son ordonnée est à la fois égale à $g(x_E)$ et à $h(x_E)$. Pour trouver la valeur x_E , il faut donc résoudre l'équation $g(x) = h(x)$ soit $-x + 4 = 2x - 4$. On trouvera l'ordonnée du point E en calculant $g(x_E)$ ou $h(x_E)$.

$$-x + 4 = 2x - 4 \text{ soit } -3x = -8 \text{ ou encore } x = \frac{8}{3}.$$

$$g(x_E) = g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

Les coordonnées du point E sont donc $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Le montant des impôts est toujours arrondi à l'unité.

1. et 2.

- Cas n°1 : $27\ 816 \times \frac{30}{100} - 5\ 638,84 = 2\ 705,96$

Mélodie a payé 2 706 € d'impôts en 2015.

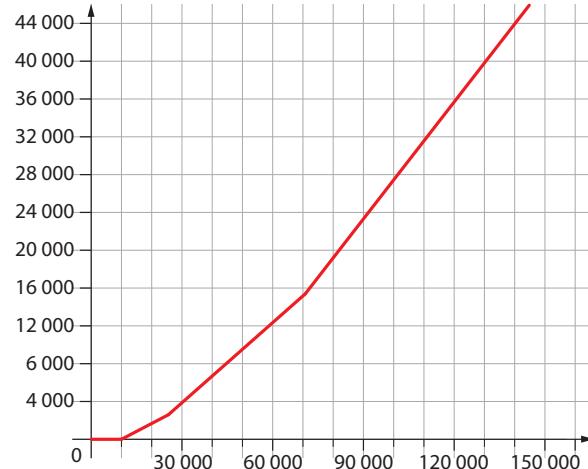
- Cas n°2 : $153\ 096 \times \frac{45}{100} - 19\ 610,02 = 49\ 283,18$

Éva a payé 49 283 € d'impôts en 2015.

- Cas n°3 : $16\ 114 \times \frac{14}{100} - 1\ 356,60 = 899,36$

Éva a payé 899 € d'impôts en 2015.

3. On peut, par exemple, représenter graphiquement le montant des impôts de 2015 en fonction des gains de 2014.



Cela permet, dans un premier temps, de savoir dans quelle tranche on se trouve.

On peut ensuite faire une lecture graphique d'antécédent, ce qui n'est pas très précis, ou résoudre l'équation correspondant à la tranche trouvée.

Exemple : si le montant d'impôt est de 17 628 € en 2015, on voit graphiquement que les revenus devaient être entre 75 000 € et 80 000 €. On est donc dans la 4^e tranche du tableau.

On résout alors $0,41x - 13\ 531,78 = 17\ 628$ et on trouve un gain pour 2014 d'environ 76 000 €.

Remarque : on ne pourra pas déterminer le revenu imposable pour des montants d'impôts de 0 € (fonction constante).

Analyse d'une production

Samantha a traité cet exercice comme si le prix était proportionnel à la distance parcourue, ce qui n'est pas le cas car la représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

Comme c'est une droite, c'est une fonction affine f qui modélise le prix (en euros) en fonction de la distance (en km).

Ainsi $f(x) = mx + p$.

Graphiquement, on voit que l'ordonnée à l'origine p vaut 5 donc $f(x) = mx + 5$.

De plus, $f(10) = 15$ donc $m \times 10 + 5 = 15$ d'où $m = 1$.

Ainsi $f(x) = x + 5$.

On a donc $f(18) = 18 + 5 = 23$.

Ainsi, pour 18 km, la facture sera de 23 €.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions » : interpréter, représenter et traiter des données. Les connaissances et compétences associées sont :

- recueillir des données, les organiser ;
- lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique ;
- calculer des effectifs, des fréquences ;
- les tableaux et les représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes) ;
- calculer et à interpréter des caractéristiques de position d'une série statistique (moyenne).

Objectifs du chapitre

Nous proposons de nombreux exemples d'activités pour :

- utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données ;
- porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web ;
- organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs (par exemple, des données mises sur l'environnement numérique de travail par les élèves dans d'autres disciplines) ; questionner.

Repère de progressivité

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique.

Activités

Questions flash

1. a. 27

b. 8

c. 5

2. Mme Rossignol.

Le planning des vacances

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire les mots de vocabulaire « fréquence » et « effectif », de les calculer et découvrir les propriétés. Les prérequis nécessaires sont de savoir écrire une proportion, un pourcentage. La capacité introduite est de calculer des effectifs et des fréquences.

1. 2. 3.

Activité	Aquagym	Surf	Ping-pong	Mini-golf	Beach Volley	Randonnée
Effectif	6	4	2	5	7	1
Fréquence (en %)	24	16	8	20	28	4

4. Oui, car $24\% + 16\% + 8\% + 20\% + 28\% + 4\% = 100\% = 1$.

Exercices

Calculer des effectifs et des fréquences

Questions flash

1. Total : 100. 2. 17% ou $\frac{17}{100}$ ou 0,17.
1. Réponse c. 2. 0,12 ou 12 % ou $\frac{12}{100}$.

Mois de naissance	Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin
Effectif	2	1	0	3	7	1
Fréquence en fraction	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{0}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$
Fréquence décimale	0,08	0,04	0	0,12	0,28	0,04

Mois de naissance	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
Effectif	2	1	0	2	4	2
Fréquence en fraction	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{0}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$
Fréquence décimale	0,08	0,04	0	0,08	0,16	0,08

4. 1. $26 - (14 + 7) = 5$; le Canada a remporté 5 médailles de bronze.
2. $\frac{14}{26} \approx 0,5384$; la fréquence des médailles d'or est d'environ 53,8 %.

5. Mammifères $\approx 0,13$; oiseaux $\approx 0,70$; reptiles $\approx 0,07$; amphibiens $\approx 0,06$; poissons $\approx 0,03$.

$$\begin{array}{lll} a = \frac{1}{18} & c = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} & e = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \\ i = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} & n = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} & p = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \\ s = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} & t = \frac{1}{18} & u = \frac{1}{18} \end{array}$$

Calculer une moyenne

Questions flash

7. a. 12 ; b. 11 ; c. 10.

8. 1. Faux (moyenne \neq médiane).
2. Faux, en général, la moyenne ne représente pas la majorité des valeurs d'une série.

9. $70 \times 30 = 2100$.
Cet exercice permet de réinvestir l'interprétation de la moyenne.

10. 1. Aucun, car ils ont chacun 10 de moyenne.
2. Matthieu a été absent à un devoir ou Pierre a rendu un devoir supplémentaire.

11.
$$\frac{2,14 + 2,03 + 1,95 + 2,03 + 1,90 + 1,99 + 2,17 + 2 + 1,99 + 2,11 + 1,85 + 2,01}{12} \approx 2,01$$

La taille moyenne d'un basketteur de l'équipe de France 2015 est d'environ 2,01 m.

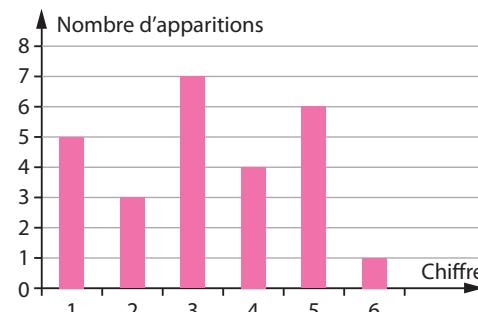
Représenter graphiquement des données numériques

Questions flash

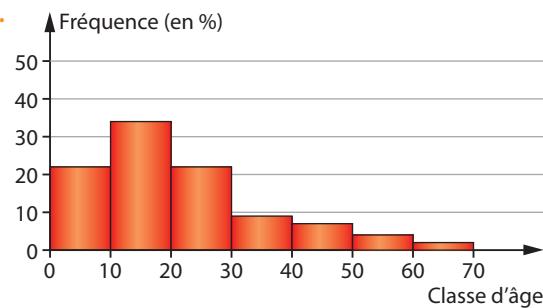
12. 1. Vrai. 2. Vrai. 3. Faux.

On fera remarquer aux élèves qu'en général la « limite inférieure » d'une classe est incluse que la « limite supérieure » est exclue.

13.



14.



2. La grippe A/H1N1 touche majoritairement les personnes jeunes (moins de 30 ans) avec une fréquence plus importante chez les 10-20 ans.

Représenter graphiquement des données non numériques

Questions flash

Les exercices 15 et 16 permettent de consolider les acquis sur la proportionnalité et les pourcentages.

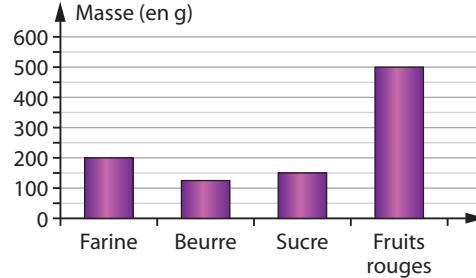
15.

- $90^\circ \rightarrow 25\%$
 $36^\circ \rightarrow 10\%$ (36° est le dixième de 360°)
 $72^\circ \rightarrow 20\%$ ($72 = 2 \times 36^\circ$)
 $162^\circ \rightarrow 45\%$ ($162^\circ = 90^\circ + 72^\circ$)

16.

- a. 10 % correspond à 4 cm ;
b. 20 % correspond à 8 cm ;
c. 40 % correspond à 16 cm ;
d. 60 % correspond à 24 cm.

17.

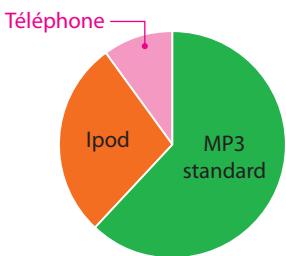


18.

	MP3	Ipod	Téléphone	Total
Pourcentages	62	28	10	100
Angles (en °)	224	100	36	360

$$\times 3,6$$

2.



Problèmes

19.

Orchestre

	Cordes	Bois	Cuivres	Percussions	Total
Effectif	74	20	18	5	117
Angle (en °)	228	62	55	15	360

$$\times \frac{360}{117}$$

- Cordes
- Bois
- Cuivres
- Percussions

20.

Jeux vidéo

- Zenia : $\approx 3,17$; Golf : $\approx 3,33$; Empire : $\approx 3,33$; War : = 3.
- War ; Zenia ; Golf est égal au jeu Empire.
- La note moyenne englobe l'ensemble des critères et ne permet pas à chacun de juger selon ses propres critères. Par exemple, si on privilégie le scénario dans un jeu, il vaut mieux ne pas prendre le golf.

21.

Baromètre

Temps	Nombre de jours	Angle (en °)
Ensoleillé	11	132
Nuageux	12	144
Pluvieux	7	84
Total	30	360

$$\times 12$$

- Ensoleillé
- Nuageux
- Pluvieux

22.

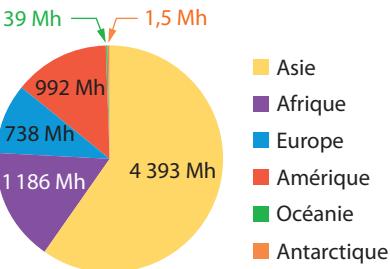
Densité de population

Cet exercice pourra également être réalisé à l'aide d'un tableau.

	Population	Angle (en °)
Asie	4 393	215
Afrique	1 186	58
Europe	738	36
Amérique	992	49
Océanie	39	2
Antarctique	1,5	0,1
Total	7349,5	360

$$\times \frac{360}{7349,5}$$

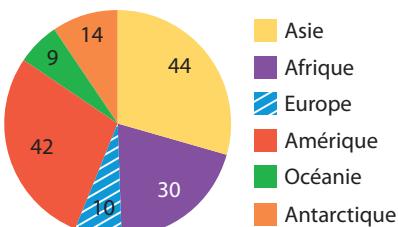
Population en millions d'habitants



	Superficie	Angle (en °)
Asie	44	106
Afrique	30	72
Europe	10	24
Amérique	42	101
Océanie	9	22
Antarctique	14	34
Total	149	360

$$\times \frac{360}{149}$$

Superficie en millions de kilomètres²



La population des continents n'est pas proportionnelle à leur superficie. L'Asie, qui représente moins d'un tiers de la superficie de l'ensemble des continents, abrite presque les deux tiers de la population mondiale.

23.

Salaire moyen

Cet exercice permet de faire comprendre aux élèves que la moyenne est un indicateur parfois insuffisant.

- Entreprise A : 18 560 € ; entreprise B : 18 560 €.
- Entreprise A : 1 personne ; entreprise B : 3 personnes.
- Le calcul de la moyenne n'est pas un indicateur suffisant car il ne permet pas de faire apparaître l'hétérogénéité des valeurs d'une série.

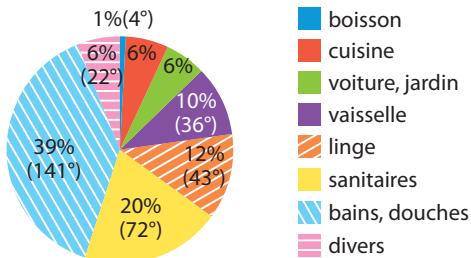
24.

Consommation d'eau

	Boisson	Cuisine	Voiture, jardin	Vaisselle	Linge
Pourcentage	1	6	6	10	12
Angle (en °)	4	22	22	36	43

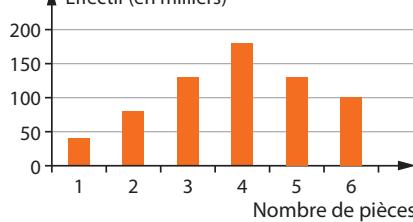
$$\times 3,6$$

	Sanitaires	Bains douches	Divers	Total
Pourcentage	20	39	6	100
Angle (en°)	72	140	22	360



25 Habitation

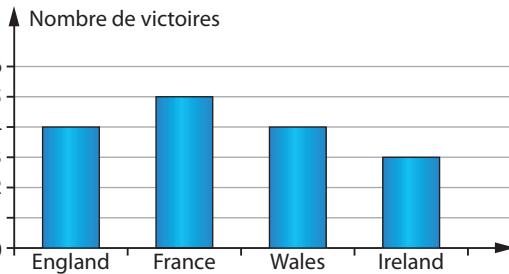
1. Effectif (en milliers)



2. $\frac{180}{660} > \frac{1}{4}$; donc les quatre pièces représentent plus du quart de l'effectif total.

26 Rugby

1. C'est la France qui a gagné le Tournoi des Six Nations le plus souvent.



2. England : 11 fois ; France : 8 fois ; Wales : 4 fois ; Ireland : 9 fois.
Mike a raison.

3. Scotland (Écosse) et Italy.

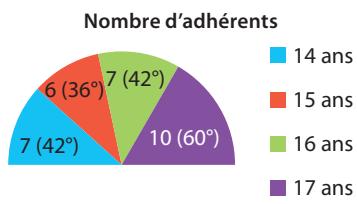
27 Pollution

1. On additionne toutes les valeurs et on divise par 12 ; le taux moyen de pollution est d'environ $52,58 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Ce n'est pas une valeur de la série.
2. Aux heures de pointe, il y a beaucoup de véhicules sur le périphérique parisien. Les gaz d'échappement contiennent de nombreuses particules polluantes.

28 Badminton

1. $30 - (7 + 6 + 10) = 7$; donc 7 adhérents ont 16 ans.
2. $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$; donc 20 % des adhérents ont 15 ans.
3.

Âge	14 ans	15 ans	16 ans	17 ans	Total
Nombre d'adhérents	7	6	7	10	30
Mesure de l'angle (en °)	42	36	42	60	180



29 La course des vendanges

Conversion en secondes, puis :
 $(1\ 980 + 2\ 012 + 2\ 016 + 2\ 023 + 2\ 042 + 2\ 127 + 2\ 132 + 2\ 137 + 2\ 152) \div 9 = 2\ 069$ secondes
 $= 34$ minutes 29 secondes.

Le temps moyen est de 34 minutes et 29 secondes.

30 Moyennes

Mettre en évidence, qu'en général, la moyenne d'une série n'est pas égale à la moyenne des moyennes de deux sous-groupes de valeurs.

1. Moyenne de Victor :

1^{er} trimestre : $40 \div 4 = 10$
2^{ème} trimestre : $50 \div 4 = 12,5$
3^{ème} trimestre : $30 \div 2 = 15$

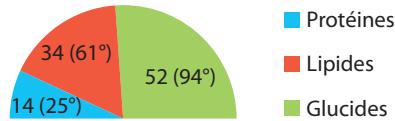
2. $(10 + 12,5 + 15) \div 3 = 12,5$

3. $(7 + 15 + 7 + 11 + 10 + 16 + 13 + 11 + 19 + 11) \div 10 = 12$

Le professeur ne trouve pas le même résultat car le nombre de contrôles n'est pas le même chaque trimestre.

31 Apports journaliers recommandés

Il faut choisir des pourcentages illustrant bien les proportions recommandées tout en gardant un total égal à 100 %. Il y a plusieurs possibilités. Par exemple :



32 Solides

Permet de réinvestir le vocabulaire sur les solides.

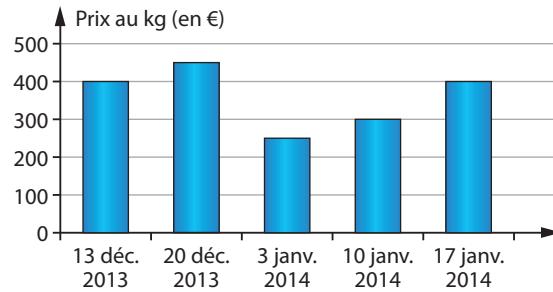
Solide	pavé droit	cylindre	pyramide	sphère	Total
Effectif	8	7	6	4	25
Fréquence (en %)	32	28	24	16	100

× 4

33 Truffe

Permet de faire rédiger une petite synthèse aux élèves.

- 1.



2. On remarque que les cours de la truffe à Carpentras varient en fonction de la qualité du produit mais également selon l'importance de l'offre. Le prix du kilo de truffe baisse lorsque l'offre augmente ou lorsque la qualité se détériore.

34 Athlétisme

$$9,83 + 9,91 + 9,92 + 9,95 + 9,96 + 9,97 + 9,99 + 9,99 + 10,0$$

10

< 9'96.

Donc le temps d'Usain Bolt est moins bon que le temps moyen de ces dix coureurs.

35

Production d'huile d'olive

	Effectif	Fréquence (en %)
Espagne	1 347 400	61,1
France	5 200	0,2
Grèce	310 000	14,1
Italie	440 000	20
Autres pays européens	102 400	4,6
Total	2 205 000	100

÷ 22 050

Les oliviers poussent essentiellement dans les pays bordant la Méditerranée et n'ayant pas de période de froid trop importante. L'Espagne est de loin le plus grand producteur d'huile d'olive en Europe. En 2012, la vague de froid en France a causé d'importants dégâts lors de la floraison des oliviers. C'est une des raisons pour laquelle la production d'huile d'olive a été aussi faible cette année-là.

36

Top secret

Il est astucieux de commencer par les lettres qui ont un nombre d'apparition que l'on ne retrouve pas pour d'autres lettres.

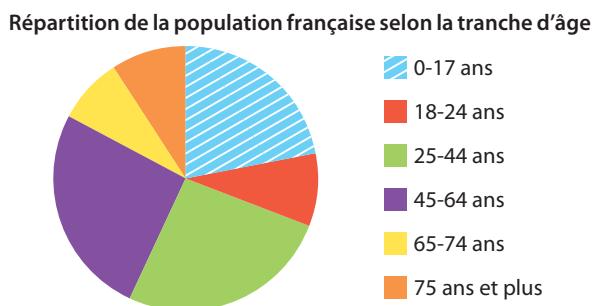
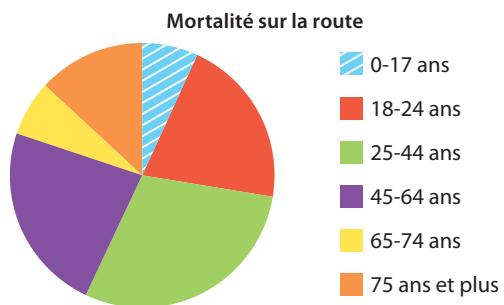
« L'essence des mathématiques, c'est la liberté »

On pourra demander aux élèves de coder un message et de construire un diagramme en barres pour le donner à déchiffrer à un autre camarade.

37

Sécurité routière

Les élèves peuvent construire un deuxième diagramme circulaire comme ci-dessous ou calculer des pourcentages en mesurant les angles, etc.



On remarque que la part des accidents mortels représentée par les 18-24 ans est plus importante que la part de cette tranche d'âge dans la population française.

Rapportés à leur nombre, les jeunes ont donc davantage d'accidents. Le même phénomène se produit pour la population âgée.

On observe la situation inverse pour les 0-17 ans qui, pour la plupart, n'ont pas encore de véhicules.

38

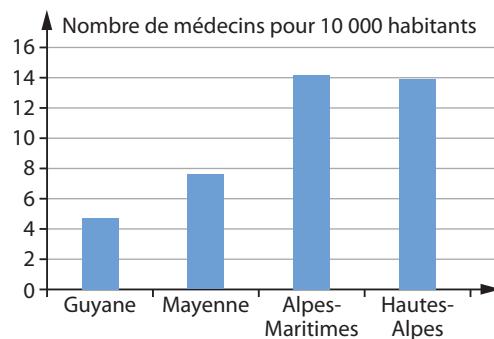
Médecins généralistes

C'est l'occasion d'aborder et d'étudier la notion de densité. Pour avoir des données assez parlantes, il est intéressant de calculer le nombre de généralistes pour 10 000 habitants.

Proportionnellement à la population du département, il y a beaucoup plus de médecins généralistes dans les Alpes-Maritimes et dans les Hautes-Alpes qu'en Guyane ou qu'en Mayenne.

	Densité de médecins généralistes
Guyane	$\frac{4,7}{10000}$
Mayenne	$\frac{7,6}{10000}$
Alpes-Maritimes	$\frac{14,2}{10000}$
Hautes-Alpes	$\frac{13,9}{10000}$

Nombre de médecins pour 10 000 habitants



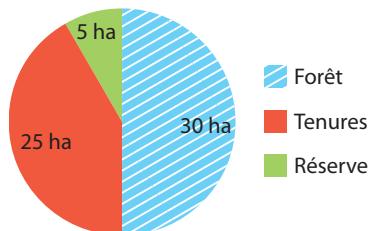
39

Les terres d'une seigneurie

Ce sera l'occasion de rappeler le vocabulaire et les connaissances médiévales étudiés en histoire-géographie (seigneurie, tenures, réserve...).

Forêt = $0,3 \text{ km}^2 = 30 \text{ hm}^2 = 30 \text{ ha}$;
tenures = $50 \times 0,5 = 25 \text{ hm}^2 = 25 \text{ h}$;
réserve = $10 \times 0,5 \text{ hm}^2 = 5 \text{ hm}^2 = 5 \text{ ha}$.

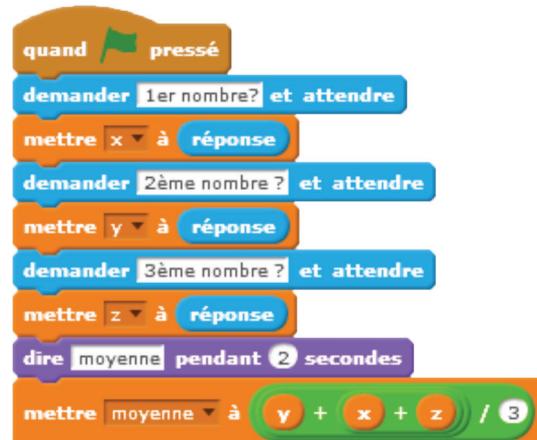
Répartition des terres d'une seigneurie



40 Méli-mélo

1. Les trois variables sont x , y et z , qui représentent chacun des nombres.

2.



41 Évolution du prix moyen

1. Dans la cellule B13, on entre : « =MOYENNE(B2:B11) ».

B13		f _x	=MOYENNE(B2:B11)
A	B	C	D
1 Références	Prix	Prix + 1€	
2 DVD R1	12,5	13,5	
3 Livre R1	10	11	
4 DVD R2	14	15	
5 DVD R3	11	12	
6 Livre R2	5,5	6,5	
7 Livre R3	15,5	16,5	
8 DVD R4	13	14	
9 Livre R5	21,5	22,5	
10 DVD R5	16	17	
11 DVD R6	13,5	14,5	
12			
13 Moyenne	13,25	14,25	

2. La formule à étendre est « =B2+1 ».

3. Le nouveau prix moyen a augmenté de 1 €.

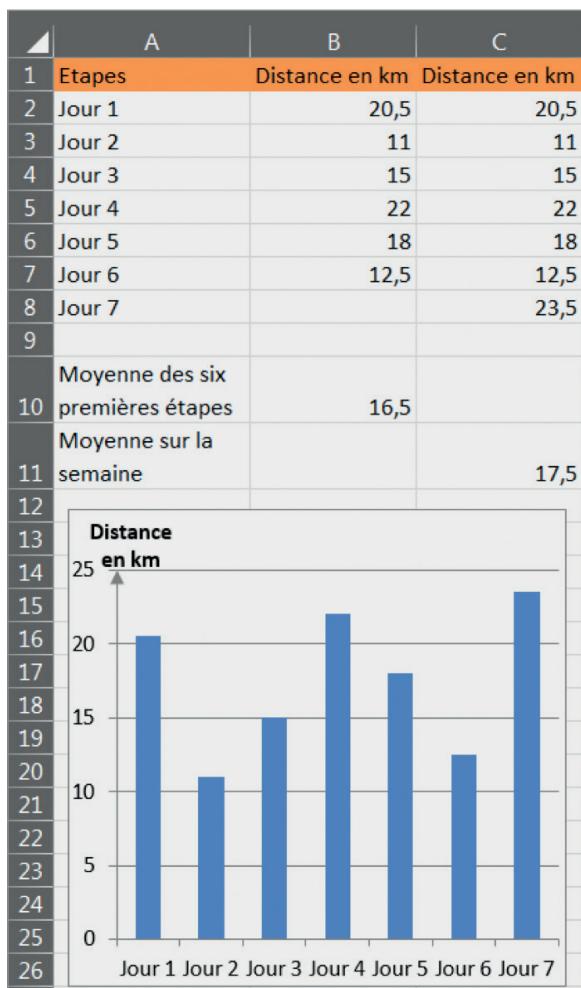
4. Il faut diminuer la somme de tous les prix de 2,50 € (par exemple, mettre le prix du DVD R1 à 10 €).

La solution n'est pas unique.

42 Objectif atteint ?

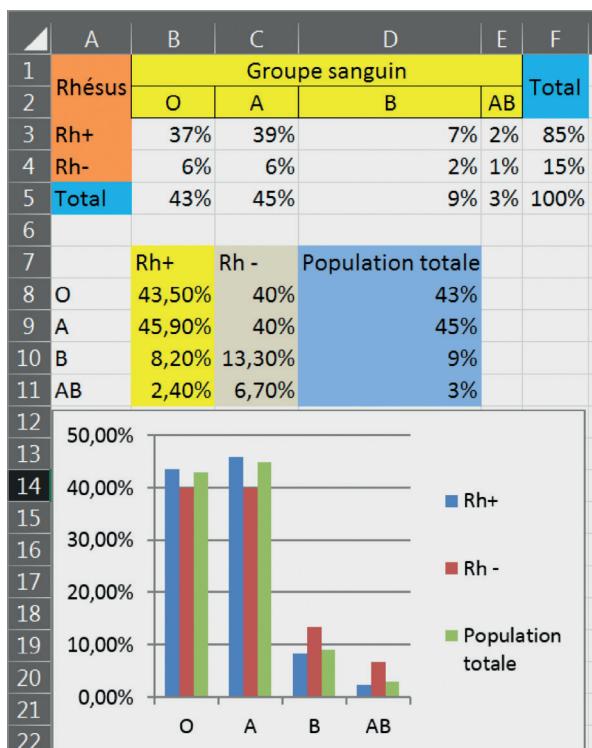
1. Dans la cellule B10, on entre : « =MOYENNE(B2:B7) ».
2. Dans la cellule B11, on entre : « =MOYENNE(B2:B8) ».

3.



43 Groupes sanguins

1. et 2.

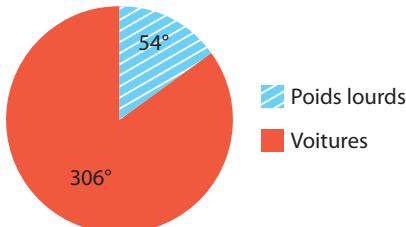


3. Il y a un peu plus de groupes B et AB et un peu moins de groupes O et A parmi les individus de rhésus négatif que dans la population totale.

Deux énoncés pour un exercice

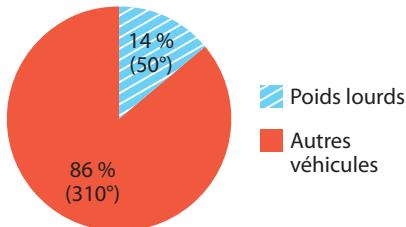
Exercice 1

Le nombre de véhicules correspond à la mesure des angles à tracer sur le diagramme circulaire.



Exercice 1

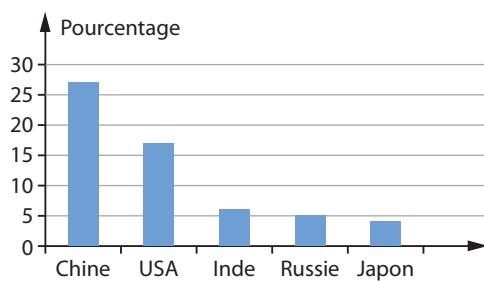
Pour tracer le diagramme circulaire, il faut calculer la mesure des angles à l'aide de la proportionnalité.



Exercice 2

La quantité totale d'émissions de CO₂ est donnée, ce qui facilite le calcul des fréquences. Il est demandé de construire uniquement un diagramme en bâtons.

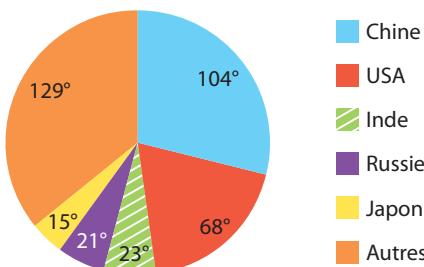
Pays	Chine	USA	Inde	Russie	Japon	...	Total
CO ₂	9 761	5 995	2 088	1 657	1 343	...	35 499
%	27	17	6	5	4		100



Exercice 2

La quantité totale d'émissions de CO₂ n'est pas donnée pour le calcul des fréquences. Il est demandé de construire un diagramme circulaire et donc d'utiliser la proportionnalité pour calculer des mesures d'angles.

Pays	Chine	USA	Inde	Russie	Japon	Autres	Total
CO ₂	8 000	5 287	1 745	1 653	1 186	9 928	27 799
%	29	19	6	6	4	36	100
Angle (en °)	104	68	22	22	14	130	360



Exercice 3

Les données de la série sont listées et leur nombre est assez faible pour faciliter le calcul de la moyenne.

1. $4,47 \div 10 = 0,447$; la moyenne est de 0,447 g/L.
2. $\frac{2}{10} = \frac{2}{100} = 20\%$; 20 % des conducteurs sont en infraction.
3. 10 % des conducteurs ont un taux d'alcoolémie délictuel.

Exercice 3

Le nombre de données de la série est important et les valeurs ne sont pas listées. L'élève doit donc penser à utiliser l'effectif donné dans la consigne pour chaque valeur.

1. $178,5 \div 850 = 0,21$;
le taux moyen est de 0,21 g/L.
2. $\frac{51}{850} = 6\%$; 6 % des conducteurs sont en infraction.
3. $\frac{8}{850} \approx 0,9\%$; 0,9 % des conducteurs ont un taux délictuel.

Écriture d'un énoncé

Par exemple :

1. 25 - 1 - 3 - 7 - 14 - 9 - 11
2. 10 - 15 - 9 - 2 - 11 - 25
3. Calculer la moyenne des séries données dans le 1. et le 2.

Rédaction d'un document

Ce tableau à double entrée permet de déterminer une couleur qui nous renseigne alors sur le pourcentage d'erreurs de multiplication commises par les enfants.

Exemples :

- 4 × 3 (entre 15 et 20 % d'erreurs) ;
11 × 12 (plus de 60 % d'erreurs).

On pourra remarquer que, par exemple, il y a plus d'erreurs commises pour 7 × 6 que pour 6 × 7. Les couleurs ne sont pas symétriques par rapport à la diagonale du tableau.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonction ».

Programme : Interpréter, représenter et traiter des données.

Les connaissances et compétences associées sont :

- recueillir des données, les organiser ;
- lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique ;
- calculer des effectifs, des fréquences : tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes) ;
- calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique (indicateurs : moyenne, médiane, étendue).
- Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève :
 - Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données.
 - Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web.
 - Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées.
 - Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique.
- Le traitement des données numériques contribue à l'acquisition de chacun des cinq domaines du socle commun à travers la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées. Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les six compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et

responsables. L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive. La mobilisation des outils informatiques trouve dans ce cadre toute sa légitimité pour accéder à des données réelles en grand nombre et les traiter en s'affranchissant de calculs fastidieux ; elle permet également d'obtenir rapidement diverses représentations d'une série de données afin de comparer leur pertinence au regard des questions posées. Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données.

• Liens avec les domaines du socle

Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques ; il étudie des relations entre des données statistiques et illes représente graphiquement, développant ainsi la compétence « comprendre, s'exprimer en utilisant des langages scientifiques » du domaine 1. La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issus de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maîtrise des techniques usuelles de l'information (domaine 2) ainsi qu'à la formation du citoyen (domaine 3). Le recueil, l'organisation et le traitement de données chiffrées sont des composantes de la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques et technologiques (domaine 4) et contribuent à l'étude des organisations et des fonctionnements des sociétés (domaine 5).

Activités

Questions flash

1. a. Non, pas le jeudi (7 h).
2. a. 90

- b. Entre 7 h et 12 h.
b. 75 %

Téléchargement d'applications

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de différencier moyenne et moyenne pondérée.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer une moyenne simple.

La capacité introduite est de calculer et interpréter une moyenne.

Activité 1

Laureline a raison : $\frac{0 \times 6 + 1 \times 8 + 2 \times 7 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4}{30} = 2$

Cette activité se fait en autonomie et est assez rapide (elle peut aussi être donnée à la maison pour préparer la séance).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire de nouveaux indicateurs de comparaison de séries (étendue et médiane) et de faire prendre conscience aux élèves que la moyenne est un indicateur insuffisant.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer une moyenne simple.

La capacité introduite est de calculer et interpréter une médiane, une étendue.

1. « On a tous les deux la même moyenne (12,2) donc on a les mêmes compétences en maths. »

2. a. Non : l'étendue de la série d'Esteban est 3,5 ; celle de Lucas est 9.
b. Non : la médiane de la série d'Esteban est 12 ; celle de Lucas est 10,5.
3. Le professeur fera remarquer que les notes d'Esteban sont plus homogènes que celles de Lucas.

Cette activité peut se faire en autonomie ; elle permet de montrer à la classe que comparer les moyennes disciplinaires d'un élève à celles des autres n'a pas beaucoup de sens. De plus, ce sera l'occasion d'insister sur le faible intérêt du calcul de la moyenne générale.

Le voyage au Futuroscope

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de médiane dans le cas où l'effectif total est pair et la calculer avec une calculatrice scientifique.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer une médiane. La capacité introduite est de calculer et interpréter une médiane, une étendue.

Dans cette activité, les élèves vont se questionner sur l'unicité de la médiane et sur la valeur centrale choisie comme définition par la calculatrice.

1. On calcule la médiane de cette série : il y a 80 participants, la médiane est donc située entre la 40^e et la 41^e valeur de la série ordonnée.

Connexion en outre-mer

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réviser les différents types de diagrammes et l'intérêt spécifique de chaque représentation graphique (évolution, répartition, comparaison...).

Les prérequis nécessaires sont de connaître les différents types de diagrammes.

La capacité introduite est de représenter graphiquement des données.

1. a. Le doc. 2.

Activité 3

$$2 + 3 + 6 + 10 + 9 + 10 = 40 ; \text{ la } 40^{\text{e}} \text{ valeur est } 18 \text{ et la } 41^{\text{e}} \text{ valeur est } 22.$$

Il faut être dans les 40 ayant obtenu le plus de points donc le score minimum est 22 points.

2. La calculatrice permet de calculer la médiane ; elle affiche 20, c'est-à-dire la valeur centrale entre 18 et 22 ($\frac{18 + 22}{2} = 20$).

En effet, toute personne ayant obtenu au minimum 20 points partira au Futuroscope, mais concrètement, personne n'a obtenu 20 points. D'où la réponse de 22 points de la 1^{re} question.

Cette activité permet de donner un sens concret à la notion de médiane et d'apprendre à utiliser la calculatrice ; on pourra demander aux élèves s'ils savent calculer les moyennes à l'aide de leur calculatrice et faire le point avec eux.

Activité 4

- b. Le doc. 3. L'évolution n'est pas visible pour Saint-Pierre-et-Miquelon car le nombre d'abonnements Internet est trop faible.

- c. Le doc. 1.

- d. Le doc. 1.

2. Le doc. 1 est un diagramme circulaire, les doc. 2 et 3 sont des diagrammes en barres.

Ce sera l'occasion de faire le point sur les différents diagrammes et en particulier sur la différence entre un diagramme en barres et un histogramme (parfois confondus dans d'autres matières ou sur Internet).

Exercices

Calculer et interpréter une moyenne

Questions flash

1. a. $35 \div 5 = 7$ b. 12 c. 1
2. $\frac{2 \times 5 + 3 \times 10}{5} = 8$
Le nombre moyen de jours passés au bord de la mer par chaque membre de cette famille est 8.
3. a. Faux : $\frac{2 \times 1 + 1048 \times 49}{2 + 1048} \approx 48,9$
b. Faux : c'est 1 050.
c. Vrai.

4. $\frac{25 + 23 + 26 + 27 + 25 + 24 + 25}{7} = 25$

La moyenne des températures est de 25 °C.

5. $\frac{12 \times 2 + 9 \times 2 + 15 \times 1 + 15 \times 1}{6} = 12$

Sa moyenne trimestrielle est 12.

6. $198 + 163 + 140 + 113 = 614$
L'effectif total de cette série est 614.

$$\frac{95 \times 198 + 100 \times 163 + 120 \times 140 + 160 \times 113}{614} = \frac{69\ 990}{614} \approx 114$$

La masse moyenne d'une pomme est d'environ 114 g.

7. La recette moyenne par entrée est de 3 € :
$$\frac{2 \times 60 + 4 \times 40 + 5 \times 10}{60 + 40 + 10} = 3$$

8. La somme des 5 valeurs données est égale à :

$$14 + 17 + 18 + 20 + 25 = 94$$

- Si on rajoute une valeur, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 6 valeurs soit égale à 120, on peut donc rajouter 26.

- Si on rajoute deux valeurs, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 7 valeurs soit égale à 140 ; il faut rajouter 46, donc les nombres 26 et 20.
- Si on rajoute trois valeurs, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 8 valeurs soit égale à 160 ; il faut rajouter 66, donc les nombres 12, 14 et 40.
- Si on rajoute quatre valeurs, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 9 valeurs soit égale à 180 ; il faut rajouter 86, donc les nombres 12, 14, 20 et 40.
- Si on rajoute cinq valeurs, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 10 valeurs soit égale à 200 ; il faut rajouter 106, ce qui n'est pas possible.
- Si on rajoute six valeurs, pour que la moyenne soit égale à 20, il faut que la somme des 11 valeurs soit égale à 220 ; il faut rajouter 126, ce qui n'est pas possible puisque la somme des nombres proposés n'est égale qu'à 122.

Quand on propose cet exercice aux élèves, il faut éviter de leur donner des indications et les laisser chercher ; même si dans la consigne, la possibilité de rajouter plusieurs nombres apparaît, ils ont tendance à ne proposer qu'une solution (celle de rajouter un seul nombre). Même s'ils ont la possibilité d'utiliser la machine pour faire des essais, il faudra les pousser à raisonner et ainsi leur montrer que la calculatrice n'est pas nécessaire pour résoudre ce problème.

Calculer et interpréter une médiane, une étendue

Questions flash

- 9.** Les séries n'étant pas ordonnées, il y a deux possibilités :
- 70 (car $45 + 25 = 70$) ou 38 (car $63 - 25 = 38$).
 - 32 (car $25 + 7 = 32$) ou -2 (car $23 - 25 = -2$).
- 10.**
 - Étendue : 8 car $15 - 7 = 8$; médiane : 11.
 - Étendue : 4 car $9 - 5 = 4$; médiane : 7.

On fera remarquer aux élèves que la médiane est très facile à déterminer car la série est déjà ordonnée.
- 11.**
 - Faux : par exemple, dans la série 2 ; 4 ; 6 ; 8, la médiane est 5.
 - Faux : il faut que la série soit ordonnée.
 - Vrai.

On demandera aux élèves d'illustrer ces réponses par des exemples simples.
- 12.** Les élèves astucieux ne chercheront pas à calculer la moyenne en premier, élimineront la valeur 81 (qui est trop grande) et pourront ainsi répondre à l'exercice très facilement sans calculatrice.
- Étendue : 60 car $75 - 15 = 60$; médiane : 40 car c'est la valeur entre la 3^e et la 4^e valeur de la série ordonnée, c'est-à-dire entre 36 et 44. On peut éliminer la valeur 81 qui est trop grande. La moyenne est donc la valeur qui reste, c'est-à-dire 44.
- 13.** On range les valeurs par ordre croissant :
0 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 5
La médiane se situe entre la 6^e et la 7^e valeur de cette série ordonnée donc la médiane est 2.
 $5 - 0 = 5$, donc l'étendue est 5.
- 14.** On range les valeurs par ordre croissant :
37 42 49 56 79 88 99 99 105 109 269
La médiane de cette série est la 6^e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 88 ; cela signifie qu'il y a autant de bracelets dont le prix est supérieur ou égal à 88 € que de bracelets dont le prix est inférieur ou égal à 88 €.
 $269 - 37 = 232$; l'étendue de la série est 232 ; cela signifie que l'écart entre le prix maximum et le prix minimum est de 232 €.
- 15.** 1. On additionne toutes les températures et on divise par 12 : la température moyenne de l'année est d'environ 18,4 °C.

On range les valeurs par ordre croissant :

13 14 14 15 15 17 18 21 21 24 24 25

2. La température médiane est située entre la 6^e et la 7^e valeur de la série ordonnée ; c'est 17,5 °C. Cela signifie qu'il y a autant de températures supérieures ou égales à 17,5 °C que de températures inférieures ou égales à 17,5 °C.
L'étendue de la série est 12 car $25 - 13 = 12$; cela signifie que l'écart entre la température maximale et la température minimale est de 12 °C.

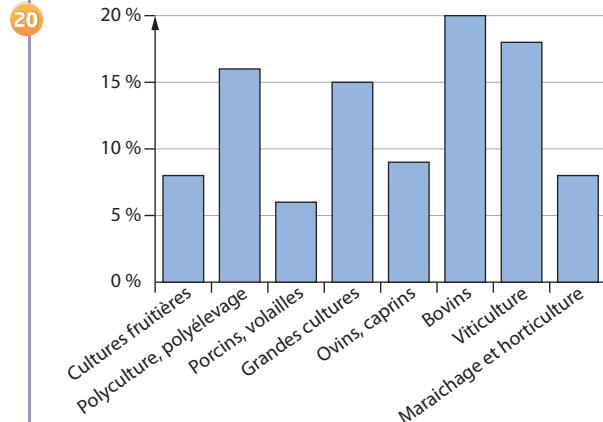
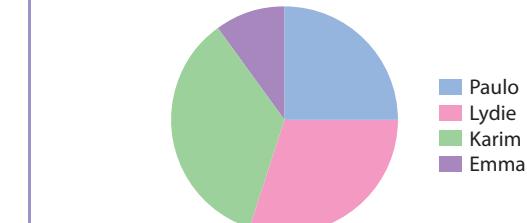
Représenter graphiquement des données

Questions flash

- 16.** En février, il est tombé 10 cm de neige.
Le mois de janvier est celui où il a le plus neigé.
Il est tombé plus de 60 cm de neige dans l'hiver.
Le mois de février est celui où il a le moins neigé.
- 17.**
 - 3 % des Canadiens travaillent dans les mines.
 - Il y a autant de Canadiens qui travaillent dans le secteur de l'assurance et de l'immobilier que dans celui de la construction.
 - Le nombre de Canadiens travaillant dans l'agriculture et forêt est le double de celui travaillant dans les mines.
 - Environ un quart des Canadiens travaillent dans le secteur du commerce et du transport.

18. 50 % → 90° 10 % → 18° 30 % → 54°

	Paulo	Lydie	Karim	Emma	Total
Nombre d'heures	2,5	3	3,5	1	10
Angle (en °)	90	108	126	36	360 $\times 36$



- 21.**
 - C'est un histogramme.
 - 300 personnes ont moins de 40 ans.
 - Plus de la moitié d'entre elles ont entre 40 et 60 ans. L'étendue de ces âges est 60 ans.

	Secteur représentant la mer	Total
Angle (en °)	85	180
Pourcentage (en %)		100 $\div 1,8$

$85 \div 1,8 \approx 47$ donc environ 47 % des élèves préfèrent passer les vacances à la mer.

- 22.**
 - Ce pourcentage d'élèves correspond également à la proportion d'élèves préférant passer des vacances à la montagne ou à la campagne ou à la ville.

Problèmes

23 Déchets consommables

$$\frac{1\ 200\ 000}{66\ 000\ 000} = 0,018 \text{ t}$$

Environ 18 kg de déchets pourraient être consommés en une année par les Français.

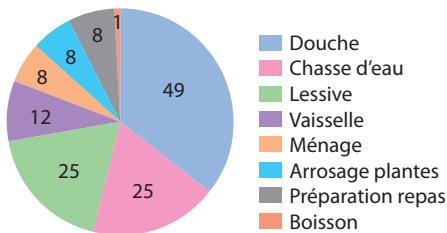
24 Consommation d'eau

1.

	Nombre de litres	Angle (en °)
Douche	49	129
Chasse d'eau	25	66
Lessive	25	66
Vaisselle	12	32
Ménage	8	21
Arrosage plantes	8	21
Préparation repas	9	24
Boisson	1	3
Total	137	360

$$\times \frac{360}{137}$$

On pourra remarquer que le total des mesures des angles est égal à 362° et non 360° ; ceci est dû aux arrondis.



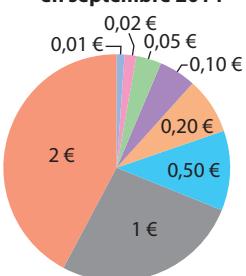
2. Oui, c'est exact car $\frac{49}{200} = \frac{24,5}{100} \approx 25\%$.

25 Pièces en euros

1. $24\ 719\ 455\ 146 \text{ €}$

Ce sera l'occasion de remarquer que la calculatrice donne une valeur approchée du résultat sous la forme d'une écriture scientifique (on pourra faire calculer le chiffre des unités aux élèves et leur montrer que c'est 6).

2. Répartition des pièces dans la zone euro en septembre 2014

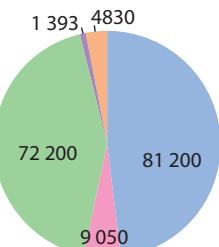


26 Chikungunya

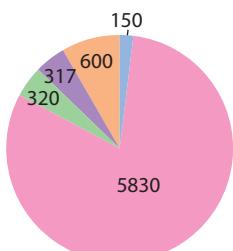
1.

Les diagrammes circulaires peuvent être vérifiés à l'aide de l'assistant graphique d'un tableur.

Nombre de cas de chikungunya en 2014



Nombre de cas de chikungunya en 2015



2. En mettant ces deux diagrammes circulaires côté à côté, on visualise essentiellement les modifications de la répartition géographique de cette épidémie. Un diagramme en barres illustrant les deux années aurait été beaucoup plus adapté pour visualiser l'évolution de l'épidémie.

27 Anniversaire

Quatre enfants ont 6 ans ; les plus nombreux ont 8 ans et sont donc au moins 5. Cela fait donc un total de 9 enfants. Il en reste 3 qui ont chacun 7, 9 et 10 ans.

Donc il y a exactement 5 enfants de 8 ans.

$\frac{6 \times 4 + 7 + 8 \times 5 + 9 + 10}{12} = 7,5$ donc la moyenne d'âge de ces douze enfants est 7 ans et demi.

28 Renaud Lavillenie

1. $\frac{6 + 6,01 + 6,02 + 6,01 + 6,04 + 5,62 + 6,05 + 5,91 + 5,85 + 5,85 + 5,92 + 6,03 + 5,7}{13} \approx 5,92$

La hauteur moyenne de ses sauts est environ 5,92 m.

On range les hauteurs par ordre croissant :

5,62 5,70 5,85 5,85 5,91 5,92 6 6,01
6,02 6,03 6,04 6,05

Il y a 13 valeurs, donc la médiane est la 7^e valeur de cette série ordonnée : la hauteur médiane est donc 6 m.

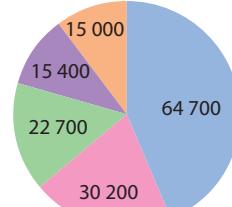
Alors qu'il y a autant de sauts inférieurs ou égaux à 6 m que de sauts supérieurs ou égaux à 6 m, la moyenne est inférieure à la médiane. Cela s'explique par le fait que deux sauts sont beaucoup plus bas que les autres (5,62 m et 5,70 m) et font baisser la moyenne.

2. La somme de ces 13 sauts est égale à 77,01 m. Pour que la moyenne soit égale à 6 m, il faut que la somme des 14 sauts soit égale à 84 m (car $84 \div 14 = 6$) et que le 14^e saut soit donc de 6,99 m. Ce qui est impossible.

29 Pour tout l'or du monde

1. $148\ 000\ 000 \text{ kg} \div 7\ 000\ 000\ 000 \approx 0,021 \text{ kg}$ soit environ 21 g par habitant.

2. Répartition (en tonnes) du stock mondial d'or en 2009 :



30 Pluviométrie

1. et 2. On additionne pour chaque ville toutes les pluviométries et on divise par 12.

Pluviométrie moyenne :

- à La Roche-sur-Yon : 75,075 mm/m²
- à Ouagadougou : 74 mm/m²

Les moyennes de pluviométrie sont très proches.

• Première série :

$$44,5 \ 46,1 \ 51,3 \ 64,5 \ 66 \ 67,9 \ 70,5 \ 73 \ 102,5 \ 103,5 \ 103,5 \\ 107,6$$

L'étendue est 63,1 car $107,6 - 44,5 = 63,1$; la médiane est située entre la 6^e et la 7^e valeur de la série ordonnée, c'est-à-dire entre 67,9 et 70,5 ; $\frac{67,9 + 70,5}{2} = 69,2$; la médiane est 69,2.

• Deuxième série :

$$0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 12 \ 14 \ 32 \ 83 \ 121 \ 144 \ 202 \ 277$$

L'étendue est 277 ; la médiane est située entre la 6^e et la 7^e valeur de la série ordonnée, c'est-à-dire entre 14 et 32 ;

$$\frac{14 + 32}{2} = 23 ; \text{ la médiane est } 23.$$

À Ouagadougou, l'étendue des pluviométries est très importante ; il y a autant de mois pour lesquels la pluviométrie est inférieure ou égale à 23 mm/m² que de mois où la pluviométrie est supérieure ou égale à 23 mm/m² alors que la moyenne est de 74 mm/m². C'est donc une ville où certains mois il pleut beaucoup et d'autres très peu ou pas du tout.

Ces deux indicateurs montrent que la moyenne ne suffit pas pour comparer deux séries.

3. La moyenne étant de 75,075 mm/m², il y a donc 4 mois (J – O – N – D) pendant lesquels la pluviométrie est plus importante que la moyenne, soit $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 33\%$.

31 Tea drinking

$$\frac{60\ 200\ 000\ 000}{64\ 100\ 000} \approx 939 ; \text{ les Britanniques boivent en moyenne } 939 \text{ tasses de thé par an.}$$

$939 \div 365 \approx 2,6$; les Britanniques boivent environ 2,6 tasses par jour !

En anglais, un billion correspond à un milliard en français.
Le billion existe aussi en français ; il est égal à mille milliards.

32 Salaires

1. Pour la moyenne, on additionne les sept salaires et on divise par 7. Les salaires étant déjà classés par ordre croissant, la médiane correspond au 4^e salaire de chaque série. L'étendue est égale à la différence entre le plus haut salaire et le plus bas salaire.

	Moyenne	Médiane	Étendue
PME A	2 359	1 420	4 389
PME B	2 359	2 359	1 000

Dans ces deux entreprises, le salaire moyen est le même mais les écarts sont plus importants dans la PME A. De plus, dans cette entreprise, la moitié des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 1 420 € alors que dans l'entreprise B, au moins la moitié des employés gagnent 2 359 € ou plus.

2. Cette différence s'explique par une très grande hétérogénéité dans les salaires et notamment par l'existence d'une minorité de salaires très élevés faisant augmenter la moyenne.

33 Lecteurs

$$\frac{30}{100} \times 0 + \frac{27}{100} \times 1 + \frac{15}{100} \times 3 + \frac{15}{100} \times 6 \\ + \frac{8}{100} \times 11 + \frac{5}{100} \times 12 = 3,1$$

Dans ce groupe, chaque personne lit en moyenne 3,1 livres par an.

34 Séismes

$$\frac{7,6 + 9,3 + 7,7 + 8 + 7,6 + 7 + 8,2 + 9 + 7,2 + 9,5}{10} = 8,11$$

La magnitude moyenne d'un séisme est de 8,11.

$$\frac{75\ 000 + 6\ 000 + 900 + 87\ 000 + 1100 + 200\ 000 + 520 + 19\ 000 + 600 + 51}{10} = 39\ 017,1$$

Le nombre moyen de morts par séisme est de 39 017,1.

35 Embarquement immédiat

	Business class	Enfants en UM	Classe éco Y	Classe éco Z	Groupe scolaire
Prix par pers. (en €)	1 200	538	452	398	371
Effectif	50	12	120	100	25
Effectif cumulé	50	62	$120 + 62 = 182$	$182 + 100 = 282$	$282 + 25 = 307$

2. L'effectif total de la série est 307.

3. Le prix moyen d'un billet est de 553 €.

$$\frac{1\ 200 \times 50 + 538 \times 12 + 452 \times 120 + 398 \times 100 + 371 \times 25}{307} = 553$$

$307 \div 2 = 153,5$ donc le prix médian d'un billet est la 154^e valeur de la série ordonnée : elle est située dans la colonne correspondant à la classe éco Y. Le prix médian est donc 452 €. Cela signifie qu'au moins la moitié des billets est vendue à un prix inférieur ou égal à 452 €.

36 Consommation automobile

Les élèves pourront travailler en groupes, proposer différentes séries de valeurs qui accréditent ou invalident leur réponse.

1. La consommation moyenne est de 5,8 L/100 km chez les deux concessionnaires.

Chez le concessionnaire A, la médiane est égale à 4,3 : cela signifie qu'il y a autant de voitures dont la consommation est inférieure à 4,3 L/100 km que de voitures dont la consommation est supérieure à 4,3 L/100 km soit cinq voitures.

Chez le concessionnaire B, la médiane est plus élevée, elle est égale à la moyenne soit à 5,8 : cela signifie qu'il y a autant de voitures dont la consommation est inférieure à 5,8 L/100 km que de voitures dont la consommation est supérieure à 5,8 L/100 km.

La série de données chez le concessionnaire B a une étendue assez faible (3 alors qu'elle est de 10,2 chez le A).

On peut donc en déduire que les données de la série B sont beaucoup plus homogènes que celles de la série A. Chez le concessionnaire B, les consommations se concentrent et se répartissent « équitablement » autour de 5,8 L/100 km.

Le concessionnaire A propose donc un plus grand choix de voitures à faible, voire très faible consommation (inférieure ou égale à 4,3 L/100 km).

$$2. \frac{4 \ 5,5 \ 5,5 \ 5,5 \ 5,8 \ 5,9 \ 6,5 \ 6,5 \ 7}{9} = 5,8$$

37 Hiti et Kalu

On calcule les moyennes pondérées dans chaque entreprise :

$$\text{Entreprise Hiti : } \frac{168\ 000 \times 50 + 120\ 000 \times 50}{100} = 144\ 000$$

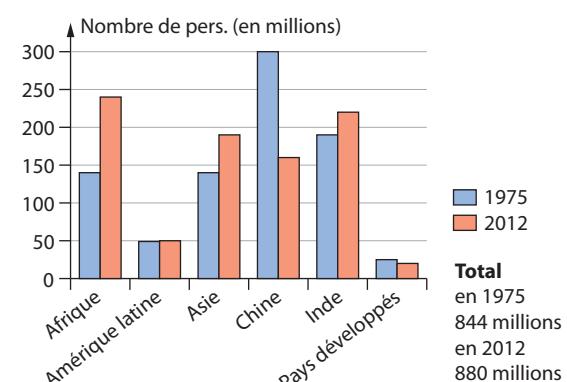
$$\text{Entreprise Kalu : } \frac{180\ 000 \times 20 + 132\ 000 \times 80}{100} = 141\ 600$$

Les salariés sont payés en moyenne 144 000 francs pacifiques chez Hiti ; ils sont payés en moyenne 141 600 francs pacifiques chez Kalu ; donc Ayrton a tort.

38 Sous-alimentation

Cet exercice peut être traité en groupe ; les élèves pourront présenter et confronter leurs représentations aux autres.

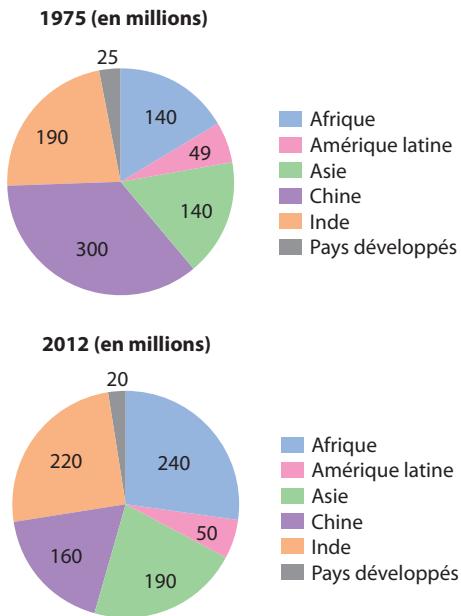
Sous-alimentation dans le monde



Ce diagramme en barres nous permet d'observer l'évolution de la sous-alimentation dans le monde entre 1975 et 2012. Globalement, le nombre de personnes sous-alimentées dans le monde a légèrement augmenté.

On observe une nette augmentation en Afrique mais aussi en Asie et en Inde ; on constate une nette diminution en Chine.

- À l'aide de deux autres diagrammes circulaires, on peut visualiser la répartition des populations sous-alimentées dans le monde selon la zone géographique, en 1975 et en 2012.



Parmi le nombre total de personnes sous-alimentées, la part de la Chine était prépondérante en 1975 (environ un tiers). Aujourd'hui, la Chine s'est développée et l'Afrique comptabilise maintenant à elle seule plus d'un quart de

40 Consommation d'énergie

- Le chauffage constituant la première cause de dépense énergétique dans le secteur résidentiel, la consommation énergétique est plus élevée dans les régions où les températures hivernales sont en moyenne les plus basses (Lorraine, Auvergne) (doc. 1) mais aussi dans des régions où les propriétés sont plus étendues (Limousin, Val de Loire) et peut-être moins bien isolées.

$$\frac{11 \times 0,55 + 5 \times 0,57 + 3 \times 0,57 + 2 \times 0,60 + 3,2 \times 0,62 + 2 \times 0,65 + 3,3 \times 0,68 + 1,6 \times 0,71 + 1,9 \times 0,74 + 0,7 \times 0,77 + 2,6 \times 0,78 + 1,4 \times 0,79 + 2,4 \times 0,89}{11 + 5 + 3 + 2 + 3,2 + 2 + 3,3 + 1,6 + 1,9 + 0,7 + 2,6 + 1,4 + 2,4} \approx 0,64$$

- En 2012, la consommation moyenne était environ 0,64 tep par habitant ; cette baisse de consommation est due d'une part à une meilleure isolation des logements (doc. 2) mais aussi à un comportement citoyen plus écologiste.
- Étendue en 2012 : $0,89 - 0,55 = 0,34$
Cependant les efforts d'économie d'énergie n'ont pas été aussi marqués selon les régions car l'étendue de la série de consommations était de 0,22 en 2002 et atteint 0,34 en 2012. Les disparités dans ce domaine se sont donc accrues.

Algorithmique et outils numériques

41 Diagramme circulaire

1. La variable n représente l'effectif total.
- 2.

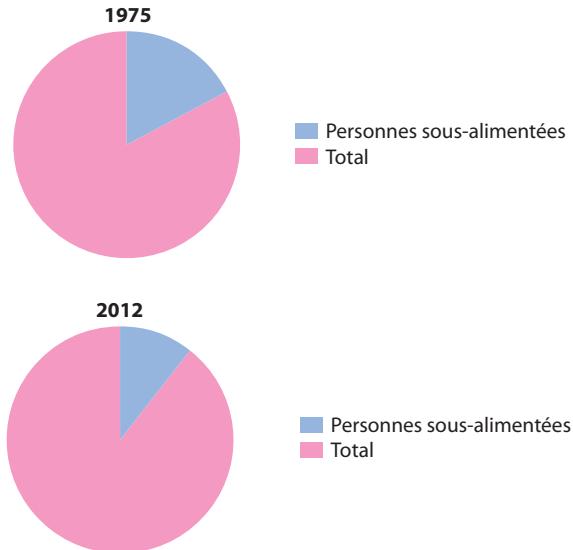
dire réponse / **n** * 360 pendant 2 secondes

42 Restaurant

- Le nombre qui apparaît est : 237 ; il représente le nombre de formules servies ce midi.
 - $=B1*B2$
 - Il faut entrer la formule « =SOMME(B3:D3) ».
- $=B5/F3$
 - On peut, par exemple, proposer la première formule à 9,8 € au lieu de 9,9 € et la deuxième formule à 11 € au lieu de 11,8 €.
 - Non, car il n'est pas sûr qu'il vendra exactement le même nombre de formules, ni la même répartition la semaine suivante.

la population sous-alimentée mondiale, suivie de près par l'Inde.

- Cependant, on remarque que la proportion du nombre de personnes sous-alimentées dans le monde a diminué.



Cet exercice pourra être également l'occasion de calculer des pourcentages.

39 Énigme

L'étendue est 14 donc on rajoute 16 comme 5^e valeur car $16 - 2 = 14$.

La médiane est 8 donc la 3^e valeur est 8.

Pour que la moyenne soit égale à 9, il faut que la somme des 5 valeurs soit égale à 45, donc la 4^e valeur est 14 car :

$$45 - (2 + 5 + 8 + 16)$$

La série est donc : 2 5 8 14 16

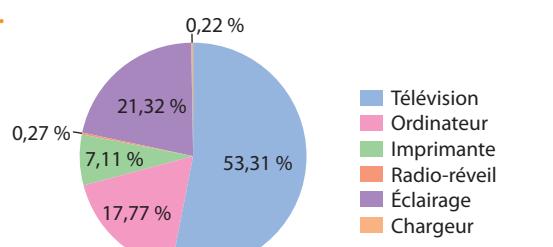
43 Consommation électrique

1. a. $\frac{200 + 100 + 800 + 15 + 60 + 5}{6} \approx 197 \text{ W}$

- b. La puissance médiane est de 80 W ; cela signifie qu'il y a autant d'appareils dont la puissance est inférieure ou égale à 80 W que d'appareils dont la consommation est supérieure ou égale à 80 W.

2. b. Dans la cellule D2, on entre la formule « =B2*C2 » ; dans la cellule E2, on entre la formule « =D2*100/SOMME(D\$2:D\$7) ».

3. a.

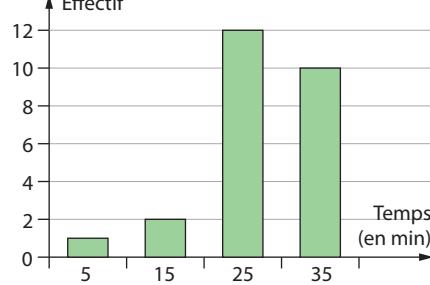


- b. Plus de la moitié de l'énergie consommée vient de l'utilisation de la télévision ; l'utilisation de l'ordinateur et de l'éclairage représentent environ 40 % de l'énergie consommée. Il faut donc penser à éteindre la télévision, l'ordinateur et les lumières quand on ne les utilise pas !

Le temps du déjeuner

1. Avec le tableur, on tape une formule en H2 pour calculer le temps moyen. On procède à des essais successifs dans la cellule E2 : 10 personnes prennent 35 min pour déjeuner.

2.



3. $22/25$ (soit 88 %) des personnes interrogées consacrent entre 25 min et 35 min à leur repas de midi. Très peu de personnes (12 %) consacrent 5 ou 15 minutes seulement à leur pause déjeuner.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. L'attente moyenne est de 9,5 min :

$$\frac{1+7+10+11+12+12+13,5}{7} = 9,5$$

C'est supérieur à l'attente moyenne.

2. $\frac{3}{7}$ sont supérieurs à 11 ; $\frac{3}{7}$ sont inférieurs à 11.

11 est la médiane de la série.

3. L'étendue est de 12,5 car $13,5 - 1 = 12,5$. Cela correspond à l'écart entre le temps minimum d'attente et le temps maximum (en minutes).

Ici les élèves calculent une moyenne simple et reviennent sur le sens de la médiane et de l'étendue.

Exercice 1

1. Le temps moyen d'attente est de 18,2 minutes :

$$\frac{7 \times 2 + 3 \times 5 + 2 \times 10 + 1 \times 23 + 11 \times 30 + 1 \times 53}{25} = 18,2$$

$18,2 \text{ min} = 18 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s} = 18 \text{ min } 12 \text{ s}$

Cette information n'est pas pertinente pour les personnes uniquement intéressées par les attractions nécessitant très peu d'attente ou par celles dont l'attente est très importante.

2. L'effectif de cette série est 25 ; la médiane est donc la 13^e valeur de la série ordonnée soit 23.

L'affichage du temps médian (23 minutes) permet de savoir qu'au moins pour la moitié des attractions le temps d'attente est inférieur ou égal à 23 minutes ; l'étendue (51 minutes) permet de savoir que sur certaines attractions, le temps d'attente pourra être très long !

Les élèves doivent calculer une moyenne pondérée à l'aide de pourcentages, convertir un temps décimal en minutes et secondes et revenir sur les sens de l'étendue et de la médiane.

Exercice 2

1. $\frac{3 \times 1 + 5 \times 2,5 + 1 \times 3 + 1 \times 5}{10} = 2,35$

La distance moyenne est d'environ 2,35 km.

2. $\frac{8}{10}$ soit 80 %.

Les élèves devront lire les données sur le graphique ; ils ont une moyenne pondérée à calculer et une proportion.

Exercice 2

1. $0,1 \times 100 + 0,3 \times 200 + 0,25 \times 500$

$$+ 0,2 \times 2\,000 + 0,15 \times 3\,000 = 1\,045$$

La distance moyenne est de 1 045 m.

$$2. \frac{1}{5} \times \frac{25}{100} = \frac{5}{100}$$

Donc les hôtels sans piscine situés à 500 m de la plage représentent 5 % de l'ensemble des hôtels.

Ici aussi les données sont à lire sur le graphique mais le fait qu'elles soient données en pourcentage complexifie l'exercice. Ils ont une moyenne pondérée plus difficile à calculer et une fraction de fraction.

Exercice 3

1. Plus de la moitié des personnes ont donné la note 8 (puisque l'angle correspondant a une mesure supérieure à 180°), donc la médiane est 8.

2. Un quart des douze personnes (l'angle correspondant mesure 90°) a donné la note 7, donc 3 personnes ont donné la note 7.

On revient ainsi sur le lien entre proportion et diagramme circulaire.

Exercice 3

$$\begin{aligned} \frac{5}{12} \times 1 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{3} \times 5 &= \frac{5}{12} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{9}{12} + \frac{20}{12} \\ &= \frac{34}{12} \approx 2,8 \end{aligned}$$

$$\text{Ou } \frac{5 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 5}{12} \approx 2,8$$

La note moyenne est d'environ 2,8.

$\frac{5}{12}$ ont donné 1 et $\frac{3}{12}$ ont donné 3 ; le milieu situé à $\frac{6}{12}$ correspond donc à la note 3 ; la note médiane est 3.

Les élèves calculent une moyenne et une médiane à partir de proportions.

Écriture d'un énoncé

1. Il est impossible de conclure car on ne connaît pas le nombre d'habitants dans chaque tour.

2. Par exemple, on peut rajouter comme donnée : « le nombre d'habitants est le même dans chaque tour ».

Ou bien donner un nombre d'habitants cohérent pour chaque tour : « Tour A : 100 habitants ; tour B : 300 habitants ; tour C : 200 habitants et tour D : 250 habitants ».

Présentation de ses recherches

Le code 1234 est beaucoup utilisé car il est très simple à retenir puisque ce sont les 4 premiers chiffres (en dehors du zéro).

Les codes avec des chiffres identiques (0000 ; 1111 ; 2222 ; 5555) ou répétition (1212).

Le code 2580 ou 0852 car c'est la colonne du milieu sur le clavier du téléphone.

Le code 5683 qui correspond au mot LOVE.

Le code 1998 correspondant à l'année de naissance de beaucoup de personnes interrogées lors de cette enquête.

Le problème est que ces codes très usités ne protègent pas les données de la personne qui les utilise et risquent d'être testés par exemple lors d'un vol de téléphone pour le débloquer.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

Programme : Interpréter, représenter et traiter des données.

Les connaissances et compétences associées sont :

- recueillir des données, les organiser ;
- lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique ;
- calculer des effectifs, des fréquences : tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes) ;
- calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique : indicateurs : moyenne, médiane, étendue.
- Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
 - Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données.
 - Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web.
 - Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées.
 - Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique.
- Objectifs

Le traitement des données numériques contribue à l'acquisition de chacun des cinq domaines du socle commun à travers la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées. Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les six compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et

responsables. L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive. La mobilisation des outils informatiques trouve dans ce cadre toute sa légitimité pour accéder à des données réelles en grand nombre et les traiter en s'affranchissant de calculs fastidieux ; elle permet également d'obtenir rapidement diverses représentations d'une série de données afin de comparer leur pertinence au regard des questions posées. Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données.

Liens avec les domaines du socle

Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques ; il étudie des relations entre des données statistiques et les représentations graphiquement, développant ainsi la compétence « comprendre, s'exprimer en utilisant des langages scientifiques » du domaine 1. La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issus de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maîtrise des techniques usuelles de l'information (domaine 2) ainsi qu'à la formation du citoyen (domaine 3). Le recueil, l'organisation et le traitement de données chiffrées sont des composantes de la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques et technologiques (domaine 4) et contribuent à l'étude des organisations et des fonctionnements des sociétés (domaine 5).

Activités

Questions flash

- 1. a.** $1\ 767 \div 235 \approx 7,52$; le nombre moyen de points marqués par Grand Prix pour Alonso est d'environ 7,52.
- b.** Alain Prost a marqué en moyenne 4,01 points par Grand Prix : $798,5 \div 199 \approx 4,01$.
- 2. a.** Son étendue est $1\ 109$ car $1\ 767 - 658 = 1\ 109$.
- b.** Sa médiane est $1\ 122,75$ car $(1\ 198 + 1\ 047,5) \div 2 = 1\ 122,75$; cela signifie que la moitié des coureurs ont obtenu un score supérieur ou égal à 1 122,75 points et l'autre moitié un score inférieur ou égal à 1 122,75 points.

- 3. a.** Son étendue est 184 car $323 - 139 = 184$.

- b.** On ordonne les valeurs de la série :

139	148	199	210	212	217	235
266	307	323				

La médiane est située entre la 5^e et la 6^e valeur de cette série ordonnée : $(212 + 217) \div 2 = 214,5$; sa médiane est donc 214,5.

Cela signifie que la moitié des coureurs ont disputé plus de 215 prix.

Les pêcheurs

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de calculer la moyenne d'une série constituée de deux groupes.

Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une moyenne.

La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une moyenne.

En effet : $(4,6 + 1,5) \div 2 = 3,05$ et $3,05 \times 25 = 76,25$; ceci est impossible car les pêcheurs ont attrapé un nombre entier de poissons.

Activité 1

$$\text{Calcul correct : } \frac{4,6 \times 5 + 1,5 \times 20}{25} = 2,12$$

C'est la pêche moyenne d'un pêcheur sur l'ensemble de ces deux ports.

On fera remarquer que si les deux groupes avaient eu le même effectif, le calcul proposé par Jade aurait été exact.

Cette activité assez rapide se déroule de façon individuelle ou par binôme.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de calculer la moyenne d'une série dont les valeurs sont regroupées en classes. Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une moyenne pondérée. La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une moyenne.

- On ne connaît pas les valeurs exactes des coefficients : on nous donne qu'un encadrement car ils ont été regroupés par classe.
- On prend le centre de chaque classe pour calculer la moyenne de chaque série.

La moyenne des coefficients de marée est égale à 71 car :

$$\frac{7 \times 45 + 3 \times 55 + 3 \times 65 + 4 \times 75 + 10 \times 85 + 1 \times 95 + 2 \times 105}{30} = 71$$

$$= \frac{2130}{30}$$

La moyenne des heures d'ensoleillement est d'environ 5,04 car :

$$\frac{11 \times 1,5 + 5 \times 4,5 + 8 \times 7,5 + 4 \times 10,5}{28} = \frac{141}{28} \approx 5,04$$

- On remarque que les moyennes sont proches mais tout de même différentes.
- Le regroupement par classes n'offre pas une aussi grande précision que la connaissance des valeurs exactes.

Lors de cette activité, on laissera les élèves (tout seuls ou en binôme) chercher une méthode pour calculer la moyenne et on confrontera leurs propositions.

Exercices

Calculer et interpréter une moyenne

Questions flash

- 1.** $7 \times 8 = 56$
- 2.** On ne peut pas savoir.

Pour cette question, on pourra demander aux élèves de proposer des séries correspondant à cette description.

- 2.** **1.** Faux (confusion médiane et moyenne). **2.** Faux.
- 3.** Faux. Par exemple, si le groupe comprend 10 élèves dont 7 mesurent 1,40 m ; 2 mesurent 1,42 m et 1 seul mesure 1,50 m ; la taille moyenne de ce groupe n'est pas 1,45 m mais 1,414 m.
- 4.** Vrai, car 10 pulls sont noirs et 140 t-shirts sont noirs : cela représente donc 150 vêtements noirs sur un total de 300.

- 3.** $\frac{32 \times 25 + 25 \times 55}{25 + 55} = \frac{2175}{80} \approx 27$; l'âge moyen est d'environ 27 ans.

- 4.** 1^{re} série : 15
2^e série : 17
3^e série : 18
4^e série : 16

- 5.** $(5 \times 2 + 4 \times 8 + 6 \times 7 + 9 \times 2 + 13 \times 1) \div 23 = 5$. En moyenne, il y a 5 biscuits brisés par paquet.

- 6.** $(1,5 \times 20 + 1,7 \times 18 + 1,9 \times 24 + 2,1 \times 16 + 2,3 \times 10 + 2,5 \times 6 + 2,7 \times 6) \div 100 = 1,94$

Le taux moyen de cholestérol de ces individus est de 1,94 g/L.

- 7.** $(25 \times 35 + 35 \times 60 + 45 \times 45 + 55 \times 10) \div 150 = 37$. Le pourcentage moyen de matières grasses est de 37 %.

- 8.** $\frac{20 \times 210 + 4 \times 7\,875}{24} = 1\,487,5$

Le prix moyen d'un deux-roues est de 1 487,50 €.

Calculer et interpréter une médiane, une étendue

Questions flash

- 9.** **1.** La série est ordonnée, donc la médiane est la 3^e valeur : 33. **2.** Comme on rajoute une valeur au début de la série ordonnée et une autre à la fin, la médiane ne change pas : c'est 33.
- 10.** **1.** 27 car $41 - 14 = 27$. **2.** 5,3 car $8,4 - 3,1 = 5,3$.

- 11.** On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 40 60 80 80 100 100 100

La puissance médiane de cette série est la 4^e valeur : 80 W. On peut proposer comme série dont la médiane est 40 W : 10 W 20 W 30 W 40 W 80 W 80W 100 W

- 12.** **1.** $4,5 - 1,9 = 2,6$; l'étendue de cette série est 2,60 €. **2.** On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 1,9 2,1 2,5 2,9 3 3,5 4,5

La médiane est la 4^e valeur de cette série ordonnée : c'est 2,9. Le prix médian de 1 kg de tomates est de 2,90 €.

- 13.** On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 37,2 38 38,2 38,6 39 39,4

La médiane est donc située entre la 3^e et la 4^e valeur de cette série ordonnée, donc entre 38,2 et 38,6.

$$(38,2 + 38,6) \div 2 = 38,4$$

La température médiane est donc 38,4 °C.

- 14.** Par exemple : 1 1 2 2 5 6 9

Représenter graphiquement des données

Questions flash

- 15.** **1.** Un histogramme. **2.** **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux, il manque les parenthèses.

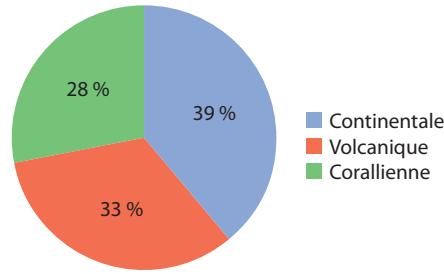
16 1. Un diagramme semi-circulaire.

$$2. \frac{167 + 147 + 72}{608} = \frac{x}{100} \text{ donc } x = \frac{386 \times 100}{608} \approx 63,5 ; \text{ le front populaire a obtenu environ } 63,5 \% \text{ des voix.}$$

17 $\frac{1198}{2336} \approx 51,3$; en 2002, la proportion de donneurs prélevés parmi les donneurs recensés était d'environ 51,3 %.

$$\frac{1655}{3547} \approx 46,7 ; \text{ en 2014, la proportion de donneurs prélevés parmi les donneurs recensés était d'environ } 46,7 \text{ %.}$$

Type	Continentale	Volcanique	Corallienne	Total
Proportion (en %)	39	33	28	100
Angle (en °)	140	119	101	360



Problèmes

19 Iles Baléares

$$1. \frac{11000 + 134000 + 860000 + 95000}{16 + 83 + 570 + 3500 + 702} = \frac{1100000}{4871} \approx 226$$

La densité moyenne sur l'archipel des Baléares est d'environ 226 habitants/km².

L'île de Cabrera n'est pas habitée.

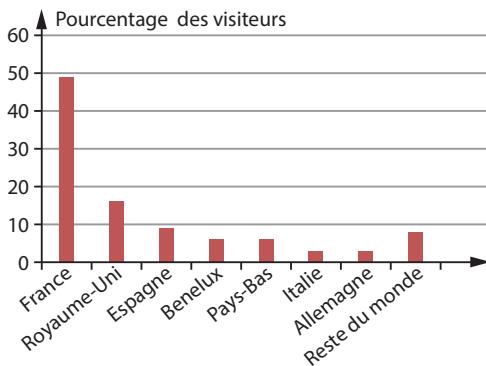
2. Cabrera : 0

$$\text{Formentera : } \frac{11000}{83} \approx 133 \text{ hab/km}^2$$

$$\text{Minorque : } \frac{95000}{702} \approx 135 \text{ hab/km}^2$$

$$\text{Ibiza : } \frac{134000}{570} \approx 235 \text{ hab/km}^2$$

$$\text{Majorque : } \frac{860000}{3500} \approx 246 \text{ habitants/km}^2$$

20 Eurodisney

$$(9 \times 14,2) \div 100 = 1,278 \text{ soit } 1\ 278\ 000 \text{ visiteurs espagnols.}$$

21 Skyscrapers

$$(182 + 425,7 + 279 + 259 + 318,9 + 381 + 541) \div 7 = 2\ 386,6 \div 7 \approx 341$$

La hauteur moyenne d'un gratte-ciel est d'environ 341 m.

$$(46 + 85 + 59 + 70 + 77 + 102 + 94) \div 7 = 533 \div 7 \approx 76$$

Le nombre moyen d'étages par gratte-ciel est d'environ 76.

Le WTC1 mesure 1 776 pieds de hauteur : 1 776 fait référence à l'année de la Déclaration de l'indépendance des États-Unis.

22 E-shopping

En 2014 comme en 2013, la France compte 52 % de cyberacheteurs et se positionne derrière la Suède (70 %) et la Grande-Bretagne (66 %).

Avec 31,2 milliards d'euros en 2014, la France est aussi le 3^e pays européen en valeur pour l'e-commerce, derrière la Grande-Bretagne et l'Allemagne.

Les prévisions de croissance sont de +17 % pour 2015 et 2016 pour la France, soit un peu en dessous des perspectives de l'Italie (+19 % en 2015 et +20 % en 2016) mais au-dessus de celles du Canada (+13 % en 2015 et +15 % en 2016).

La compétence travaillée dans cet exercice est rechercher et trier l'information ; il doit se faire en autonomie.

23 Salaires

$$1. \frac{1200 + 1300 + 1300 + 1500 + 1200}{5} = 1\ 300 ;$$

le salaire moyen est de 1 300 €.

$$1\ 200 \quad 1\ 200 \quad 1\ 300 \quad 1\ 300 \quad 1\ 500$$

Le salaire médian correspond au 3^e salaire de la série ordonnée : c'est 1 300 €.

$$2. \frac{1200 + 1300 + 1300 + 1500 + 1200 + 7\ 800 + 11\ 000}{7}$$

$$= \frac{25\ 300}{7} \approx 3\ 614 ; \text{ le salaire moyen est d'environ } 3\ 614 \text{ €.}$$

$$1\ 200 \quad 1\ 200 \quad 1\ 300 \quad 1\ 300 \quad 1\ 500 \quad 7\ 800 \quad 11\ 000$$

Le salaire médian correspond au 4^e salaire de la série ordonnée : c'est 1 300 €.

On remarque que le salaire médian n'est pas modifié alors que le salaire moyen est nettement plus élevé.

24 Différentes sortes d'or

$$1. (2 \times 1,8 + 3 \times 1,2) \div 5 = 7,2 \div 5 = 1,44$$

La masse moyenne d'or pur est de 1,44 g.

$$2. \frac{7,2}{5 \times 2,4} = 0,6 = 60 \%$$

Le pourcentage d'or pur dans ce nouvel alliage est de 60 %.

25 Chambres d'hôtel

Tarifs	Meilleur tarif : 30 €	60 €	80 €	110 €
Nombre de chambres	10	30	25	16
Effectifs cumulés	10	40	65	81

2. Le prix médian d'une chambre est le prix de la 41^e chambre lorsque les chambres sont classées de la moins chère à la plus chère, soit 80 €.

$$3. \frac{10 \times 30 + 30 \times 60 + 25 \times 80 + 16 \times 110}{81} = \frac{5\ 860}{81} \approx 72,35$$

Le prix moyen d'une chambre est d'environ 72,35 €.

4. Interprétation de la moyenne : si toutes les chambres étaient au même prix, pour obtenir la même recette, l'hôtel devrait proposer chaque chambre à environ 72,35 €.

Interprétation de la médiane : au moins la moitié des chambres sont proposées à un prix inférieur ou égal à 80 €.

Cet exercice permet d'aller plus loin en abordant la notion d'effectifs cumulés ; on montrera l'intérêt de ce calcul dans le cas où l'effectif de la série est important et où beaucoup de données se répètent.

26 Temps d'exposition au soleil

$$\frac{2 \times 2,5 + 6 \times 1,5}{8} = 1,75$$

Son temps moyen d'exposition est de 1,75 h, soit 1 h 45 min.

27 La couverture nuageuse

$$\frac{80}{360} = \frac{n}{9} \quad n = \frac{80 \times 9}{360} = 2$$

Il y a eu 2 jours à un taux de 0,7 et donc 7 jours à un taux de 0,25.

$$\frac{2 \times 0,7 + 7 \times 0,25}{9} = 0,35$$

Le taux moyen de couverture nuageuse a été de 35 %.

Le calcul de la moyenne peut se faire sans calculer auparavant le nombre de jours :

$$\frac{80 \times 0,7 + 280 \times 0,25}{360} = 0,35$$

28 De l'hémoglobine

1. Femmes et hommes

Taux t en g/L	Effectif
$105 \leq t < 115$	4
$115 \leq t < 125$	4
$125 \leq t < 135$	8
$135 \leq t < 145$	10
$145 \leq t < 155$	11
$155 \leq t < 165$	10
$165 \leq t < 175$	6
$175 \leq t < 185$	7

2. Taux moyen pour les femmes :

$$\frac{4 \times 110 + 4 \times 120 + 8 \times 130 + 6 \times 140 + 7 \times 150 + 1 \times 160}{30} \approx 133,7 \text{ g/L}$$

Taux moyen pour les hommes :

$$\frac{4 \times 140 + 4 \times 150 + 9 \times 160 + 6 \times 170 + 7 \times 180}{30} \approx 162,7 \text{ g/L}$$

Taux moyen pour les hommes et les femmes réunis :

$$\frac{4 \times 110 + 4 \times 120 + 8 \times 130 + 10 \times 140 + 11 \times 150 + 10 \times 160 + 6 \times 170 + 7 \times 180}{60} = \frac{8890}{60} \approx 148,2 \text{ g/L}$$

Le taux moyen d'hémoglobine est plus élevé chez les hommes. Le taux moyen d'hémoglobine chez les hommes et les femmes réunis est égal à la moyenne des deux autres taux moyens car il y a le même nombre de femmes que d'hommes.

29 Production de pommes

$$\frac{150 \times 58 + 50 \times x}{200} = 60 \quad x = \frac{12\,000 - 8\,700}{50} = 66$$

Le diamètre moyen des pommes doit être de 66 mm.

Certains élèves n'utiliseront pas d'équation mais procèderont par essais à l'aide de leur calculatrice. Cette méthode est très intéressante mais il faudra leur montrer qu'ils ne procèdent pas « au hasard » mais en raisonnant : les 150 premières pommes ont un diamètre de 58 mm, donc les 50 pommes restantes doivent avoir un diamètre supérieur à 62 mm.

On peut même pousser le raisonnement plus loin : les pommes restantes sont trois fois moins nombreuses, donc la différence de leur diamètre avec la moyenne 60 doit être trois fois plus importante que celle du 1^{er} lot qui était de 2 mm. Donc le lot restant doit avoir un diamètre de 6 mm de plus que 60 donc 66 mm (et la calculatrice est inutile !).

30 Salle culturelle

Les maires ont fait la moyenne des deux pourcentages mais, si les deux communes ne possèdent pas le même nombre d'habitants, ce résultat ne donne pas le pourcentage de personnes favorables au projet sur l'ensemble des deux communes. Donc ils ont tort.

On laissera les élèves argumenter entre eux ; on pourra même leur proposer de prendre un nombre d'habitants fictif pour qu'ils comprennent mieux l'erreur de raisonnement fréquemment commise.

31 La cueillette des champignons

$$\frac{5 \times 6 + 1 \times 0,3}{6} = 5,05$$

La moyenne de la famille avec le cousin est de 5,05 kg par personne.

Elle a donc baissé de 0,95 kg par personne.

$$\frac{0,95}{6} = \frac{x}{100} \text{ donc } x = \frac{0,95 \times 100}{6} \approx 16$$

Donc le cousin fait baisser la moyenne d'environ 16 %.

32 Test de gymnastique

$$\frac{70 \times 23 + 30 \times m}{100} = 20 \text{ donc } m = \frac{20 \times 100 - 70 \times 23}{30} = 13$$

La moyenne des candidats ayant échoué est de 13.

Certains élèves procèderont par essai en sachant que ceux qui ont raté ont forcément moins de 20. Et même moins de 17 (voire de 14).

33 La bière

1. • Avec le densimètre

On ajoute toutes les valeurs et on divise par 9 :

$$\frac{38,61}{9} = 4,29 \text{ donc la moyenne est } 4,29.$$

$$\frac{38,49}{9} \approx 4,28 \text{ donc la moyenne est environ } 4,28.$$

On range les valeurs par ordre croissant : 4,27 4,28 4,28 4,29 4,29 4,29 4,3 4,3 4,31

La médiane est la 5^e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 4,29.

• Avec le réfractomètre

On ajoute toutes les valeurs et on divise par 9 :

$$\frac{38,49}{9} \approx 4,28 \text{ donc la moyenne est environ } 4,28.$$

On range les valeurs par ordre croissant : 4,17 4,17 4,17 4,17 4,29 4,29 4,41 4,41 4,41

La médiane est la 5^e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 4,29.

Les moyennes et médianes obtenues avec les deux appareils lors de ces 9 mesures sont proches. L'efficacité de ces deux appareils paraît donc assez satisfaisante et assez semblable.

2. • Avec le densimètre : l'étendue est égale à 0,04 car $4,31 - 4,27 = 0,04$.

• Avec le réfractomètre : l'étendue est égale à 0,24 car $4,41 - 4,17 = 0,24$.

L'étendue de la série de mesures avec le réfractomètre est beaucoup plus importante que celle avec le densimètre, ce qui indique que le réfractomètre, dans ces conditions de mesure, est moins fiable. Il faudra donc réaliser un plus grand nombre de mesures et en faire la moyenne pour obtenir un résultat fiable avec le réfractomètre.

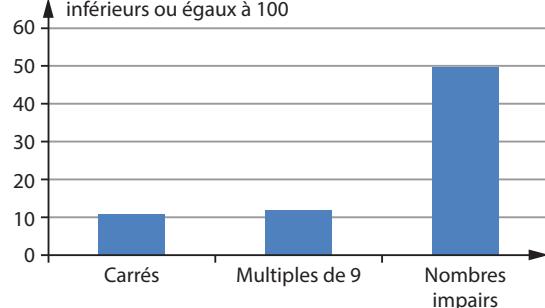
34 Nombres

a. $\frac{11}{101} \approx 10,9\%$

b. $\frac{12}{101} \approx 11,9\%$

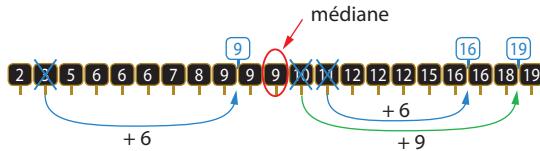
c. $\frac{50}{101} \approx 49,5\%$

Pourcentages parmi les nombres entiers



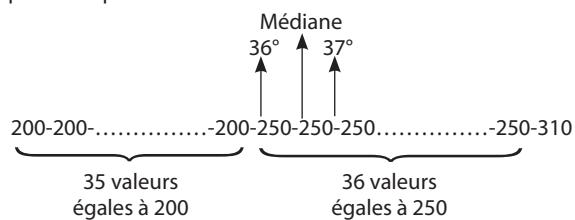
35 Miss Plouf

Le minimum de notes à changer est trois. Il y a plusieurs solutions dont celle-ci :



36 L'énergie solaire

Voici la série « minimale » qui respecte les données fournies par l'entreprise :



Production minimale annuelle :

$$200 \times 35 + 250 \times 36 + 310 = 16\ 310 \text{ kWh}$$

$$\text{Recette annuelle minimale} = 16\ 310 \times 0,58 = 9\ 459,8 \text{ €}$$

$$\text{Investissement : } 20\ 000 \times 6 = 120\ 000 \text{ €}$$

La recette annuelle représentera, au minimum :

$$\frac{9\ 459,8}{120\ 000} \approx 0,079$$

soit environ 7,9 % de l'investissement total.

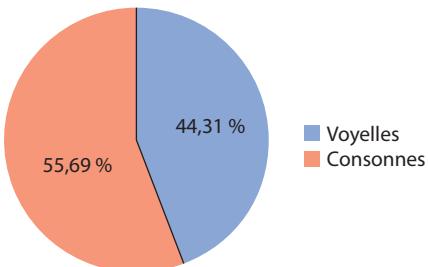
Brevet

37 Alphabet

1. E-A-S-I-N

2. On calcule le pourcentage des voyelles :

$$8,4 + 17,26 + 7,35 + 5,26 + 5,74 + 0,3 = 44,31$$



3. Comme il y a 26 lettres dans notre alphabet, la fréquence serait de $\frac{1}{26}$ soit environ 3,85 % car $\frac{1}{26} \times 100 \approx 3,85$.

38 Tombola

1. Recette :

$$(350 + 225 + 400 + 125 + 325 + 475) \times 2 = 3\ 800 \text{ €}$$

$$\text{Dépense : } 300 + 10 \times 25 + 20 \times 5 = 650 \text{ €.}$$

$$\text{Bénéfice} = 3\ 800 - 650 = 3\ 150 \text{ €.}$$

L'association pourra donc financer entièrement la sortie.

2. On appelle x le prix d'un billet.

$$\text{On a : } 1\ 900x - 650 \geqslant 10\ 000$$

$1\ 900x \geqslant 10\ 650$ soit $x \geqslant \frac{10\ 650}{1\ 900}$ donc le prix minimal d'un billet serait de 5,61 €.

3. $\frac{30}{1\ 899} = \frac{10}{633}$; la probabilité de tirer un autre ticket gagnant est donc $\frac{10}{633}$.

39 Label de qualité

$$1. 600 + 800 + 1\ 800 + 1\ 200 + 600 = 5\ 000$$

L'effectif total est de 5 000 gousses.

$$2. \frac{600 + 800 + 1\ 800}{5\ 000} = \frac{3\ 200}{5\ 000} = \frac{16}{25} = 0,64$$

Il a pu conditionner 64 % de sa production sans plier les gousses.

$$3. \frac{1}{12}$$

$= \frac{90\ 000}{5\ 000} = 18$; la longueur moyenne des gousses est de

18 cm donc supérieure à 16,5 cm.

La médiane est située entre la 2 500^e valeur et la 2 501^e valeur de la série ordonnée, donc c'est 17.

La médiane étant inférieure à 17,5 cm, le cultivateur ne pourra pas obtenir ce « label de qualité ».

40 Salaires

$$1. 1200 + 1230 + 1250 + 1310 + 1376 + 1400 + 1440 + 1500 + 1700 + 2\ 100$$

10

$$= \frac{14\ 506}{10} = 1\ 450,6$$

Le salaire moyen des femmes est de 1 450,60 €.

Le salaire moyen des hommes est de 1 769 €.

Donc le salaire moyen des hommes est plus élevé que celui des femmes.

2. $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; la probabilité pour que ce soit une femme est donc de $\frac{1}{3}$.

3. Comme l'étendue des salaires des hommes est égale à 2 400 €, le plus haut salaire chez les hommes est de 3 400 € ($1\ 000 + 2\ 400 = 3\ 400$ €), qui est aussi le salaire le plus élevé de l'entreprise puisque le salaire le plus élevé des femmes est de 2 100 €.

4. La médiane des salaires des hommes est égale à 2 000 € ; comme les salaires des hommes sont tous différents et que le nombre d'hommes est pair, on peut affirmer qu'aucun homme ne gagne exactement 2 000 €. Donc la moitié des hommes (c'est-à-dire 10) gagnent plus de 2 000 €.

Une seule femme gagne plus de 2 000 € (2 100 €).

Donc au total, 11 personnes gagnent plus de 2 000 € ($10 + 1 = 11$ personnes).

Algorithmique et outils numériques

41 Le jeu de la moyenne

1. La variable x est le nombre à deviner.

2. La variable moyenne est égale à $\frac{2x + 80}{3}$.

3. L'indice donné est la valeur de l'expression $\frac{2x + 80}{3}$; cela correspond à la moyenne de la série $x ; x ; 80$.

4. 2 car $2x + 80 = 84$; $2x = 84 - 80 = 4$; $x = 2$.

42 Salaires moyens

	A	B	C	D	E
6	204		196		1545
7	205		195		1543,75
8	206		194		1542,5
9	207		193		1541,25
10	208		192		1540
11	209		191		1538,75
12	210		190		1537,5
13	211		189		1536,25
14	212		188		1535
15	213		187		1533,75
16	214		186		1532,5
17	215		185		1531,25
18	216		184		1530
19	217		183		1528,75
20	218		182		1527,5
21	219		181		1526,25
22	220		180		1525
23	221		179		1523,75
24	222		178		1522,5
25	223		177		1521,25
26	224		176		1520
27	225		175		1518,75
28	226		174		1517,5
29	227		173		1516,25
30	228		172		1515
31	229		171		1513,75
32	230		170		1512,5
33	231		169		1511,25
34	232		168		1510

2. Dans C2, il faut saisir : « =400-A2 »

et dans E2 : « =(A2*B2+C2*D2)/400 ».

3. Donc il y a 224 femmes et 176 hommes dans cette entreprise.

43

Lancers de disques

1. a. et b.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Lancers de disque en m	Lancers dans l'ordre croissant						
2	18	18						
3	22	19,5						
4	28	19,5						
5	19,5	19,5						
6	24,5	19,5	Moyenne		Médiane			
7	21	21	22,46667		22			Etendue
8	22	22						
9	19,5	22						
10	22	22						
11	19,5	22						
12	22	22						
13	22	24,5						
14	31	26,5						
15	26,5	28						
16	19,5	31						

c. Dans D7 : « =MOYENNE(B2:B16) »

Dans F7 : « =B9 ou =MEDIANE (B2:B16) »

Dans H7 : « =B16-B2 »

d. La médiane devient 27 et la moyenne 24.

e. Il suffit, par exemple, de ne changer que les 7 dernières valeurs.

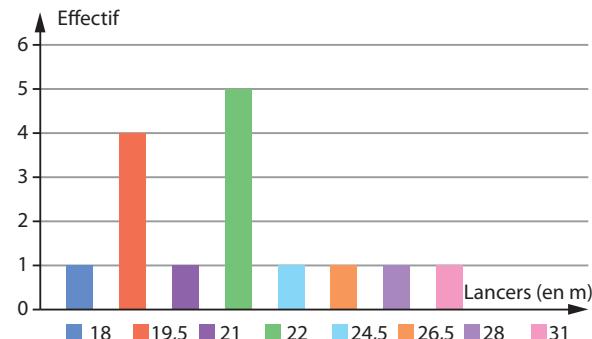
f. Il suffit, par exemple, de diminuer la 1^{re} valeur de 1 (18 devient 17) et d'augmenter la 2^e valeur de 1 (19,5 devient 20,5).

g. Le 16^e lancer doit être de 39 m.

2. a.

Longueur des lancers (en m)	18	19,5	21	22	24,5	26,5	28	31
Effectif	1	4	1	5	1	1	1	1

b.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. $150\ 000 - 35\ 000 = 115\ 000$, donc l'étendue de cette série est de 115 000 km.

$$2. \frac{150\ 000 + 16\ 000 \times 4 + 35\ 000 \times 7}{1 + 4 + 7} = 38\ 250$$

Le kilométrage moyen est de 38 250 km.

Exercice 1

$$\frac{150\ 000 + 16\ 000 \times 4 + 35\ 000 \times 7}{1 + 4 + 7} = 38\ 250$$

Le kilométrage moyen est de 38 250 km.

$$\frac{8,5 + 1 \times 4 + 2,5 \times 7}{1 + 4 + 7} = 2,5$$

L'âge moyen est de 2,5 ans.

Dans ces deux exercices, le calcul du kilométrage est identique ; dans l'exercice 1 rose, les élèves sont confrontés à un tableau où sont données plusieurs informations qu'ils vont devoir trier.

Exercice 2

Par exemple, on change la 1^{re} valeur 10 en 8.

Exercice 2

Par exemple, on peut changer le 2^e 10 en 17.

L'étendue ne doit pas changer donc on garde 10 comme minimum et 20 comme maximum.

La moyenne augmente de 1 donc la somme de toutes les valeurs doit augmenter de 7 : on ne peut donc changer qu'un 10 en 17, sinon l'étendue change (la médiane augmente alors pour atteindre 17).

Il n'y a donc qu'une seule possibilité.

Cet exercice est plus complexe car il y a une contrainte supplémentaire : on demande de trouver toutes les possibilités ; il faut donc raisonner pour répondre.

Exercice 3

$$1. \frac{8 \times 1 + 10 \times 3 + 5 \times 5 + 4 \times 7}{8 + 10 + 5 + 4} \approx 3,37$$

La hauteur moyenne de ces plongeons est d'environ 3,37 m.

$$2. \frac{8}{27} \approx 30 \text{ donc } 30\% \text{ des plongeons sont inférieurs à } 2 \text{ m.}$$

$\frac{9}{27} \approx 33 \text{ donc } 33\% \text{ des plongeons sont supérieurs ou égaux à } 4 \text{ m.}$

Exercice 3

$$1. \frac{10 \times 2,25 + 10 \times 3,75 + 3 \times 5,25 + 3 \times 6,75 + 8,25}{10 + 10 + 3 + 3 + 1} \approx 3,86$$

La hauteur moyenne de ces plongeons est d'environ 3,86 m.

La moyenne trouvée n'est pas la même car les classes ont une amplitude inférieure à celle de l'exercice 3 vert, donc la précision est plus importante.

2. Effectifs cumulés croissants :

10 20 23 26 27

La médiane M est la 14^e valeur de la série ordonnée ; on a donc : $3 \leq M < 4,5$ m.

Dans cet exercice, le centre de chaque classe est plus difficile à trouver ; lors de la correction commune, on pourra comparer ces moyennes et expliquer pourquoi elles sont différentes.

Écriture d'un énoncé

Par exemple :

pour le camarade	pour soi
2 5 5 8 8 9 9	4 25 25 64 64 81 81
Étendue : 7	Étendue : 77
Moyenne : $\approx 6,57$	Moyenne : $\approx 49,14$
Médiane : 8	Médiane : 64

On pourra remarquer que la moyenne des carrés n'est pas égale au carré de la moyenne.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

Dès le début du cycle, on commence à aborder la notion de probabilité de manière intuitive en traitant des questions liées au hasard à partir de problèmes simples et concrets.

Objectifs du chapitre

- Les premières activités ont pour objectif d'interroger les représentations initiales des élèves et d'en déconstruire certaines, souvent erronées (mémoire du dé, issues toujours équiprobables...). Elles s'appuient sur des jeux ou des situations connues des élèves. Il faut laisser un débat s'instaurer, ce qui sera également l'occasion de travailler la compétence de maîtrise de la langue. Ce travail sera poursuivi dans les chapitres suivants.
- On commence à quantifier le hasard en passant de la terminologie « 1 chance sur... » à un nombre entre 0 et 1. On exprime des probabilités sous diverses formes : décimale, fractionnaire, pourcentage mais sans aucune formalisation. Ce travail s'effectue dans des situations simples issues la plupart du temps de la vie courante (jeux, achats, structures familiales,

informations apportées par les médias, etc.) qui suscitent le débat au sein de la classe. On évite tout excès de technicité en privilégiant le sens et l'intuition.

- De nombreux problèmes permettent de calculer des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie et de régularité qui fondent le modèle équiprobable, d'autres permettent d'évaluer les chances de gain dans un jeu, voire d'élaborer une stratégie.
- Dans la partie « Algorithmique et outils numériques », quelques problèmes amènent à réfléchir sur le lien entre fréquence et probabilité. Ce point sera consolidé dans les chapitres suivants.

Repère de progressivité

Cette partie du programme peut être traitée à n'importe quel moment dans l'année car elle ne requiert pas de connaissances nouvelles et son contenu n'est pas nécessaire au traitement des autres chapitres. On peut néanmoins consolider le travail sur les nombres et leurs différentes formes à cette occasion.

On peut également aborder ces notions régulièrement pour n'en faire un bilan qu'à la fin de l'année.

Activités

Questions flash

- La proportion de lapins roses est de $\frac{2}{5}$.
- Nombre d'élèves qui viennent à pied : $\frac{10}{100} \times 340 = 34$.
- 15 représente la moitié de 30. Ainsi, dans cette classe, il y a 50 % de filles et 50 % de garçons. D'où l'expression « fifty-fifty » ou « cinquante-cinquante » en français.
- $\frac{50}{100} \times 44 = 22$.

Il y a une réduction de 22 € sur le prix. Paul paiera donc 22 €.

$$5. \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Il y a donc $\frac{2}{3}$ de filles et $\frac{1}{3}$ de garçons dans cette classe, d'où plus de filles.

6. « 12 % des gens sont gauchers » signifie, qu'en moyenne, sur 100 personnes, 12 sont gauchères.

La poisse !

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de remettre en cause l'idée qu'au bout de n répétitions de la même expérience à n issues, chacune des n issues possibles est obtenue.

Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.

La capacité introduite est d'exprimer la probabilité d'un événement

Le 6 a autant de chances de sortir que n'importe quelle autre face, et ce, à chaque tirage. Si on s'intéresse au 6, on peut avoir l'impression qu'il sort rarement mais si on s'intéresse au 2 ou au 5, on aura la même impression.

Activité 1

Si on lance 6 fois le dé, il n'est pas du tout certain d'obtenir une fois chaque numéro (c'est même peu probable). En effet, le dé n'a pas de « mémoire » et à chaque tirage, chaque numéro a autant de chances de sortir qu'au tirage précédent.

Le but est de déconstruire une idée reçue : au bout de six répétitions d'une expérience à six issues, chacune est obtenue une fois et une seule. Pour convaincre les élèves, on peut leur faire faire l'expérience et comparer les résultats des élèves de toute la classe. Très peu, voire aucun, n'aura obtenu une liste de six résultats tous différents. La manipulation aide à comprendre et à retenir.

La mémoire du dé

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de remettre en cause l'idée que les dés ont de la « mémoire ».

Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.

La capacité introduite est d'exprimer la probabilité d'un événement.

Ce n'est pas parce qu'on a déjà obtenu 4 fois le 1 qu'il ne sortira pas au prochain tirage. En effet, le dé n'a pas de « mémoire » et à chaque tirage, chaque numéro a autant de chances de sortir qu'au tirage précédent quel que soit ce qu'il s'est passé avant.

Les amis de Lila ont donc tort.

Activité 2

Le but est de déconstruire une idée reçue : si on a obtenu beaucoup de fois le même résultat, celui-ci a peu de chances de se répéter encore.

Le dé n'est pas un être vivant ni un appareil électronique, il ne garde pas le souvenir de ce qu'il s'est passé aux tirages précédents. C'est la situation de départ qui est plutôt rare : obtenir quatre fois le 1 en quatre tirages. Pour s'en convaincre, on peut faire tirer quatre fois le dé à tous les élèves et constater que peu ou aucun ont obtenu ce tirage. Une fois cela acquis, il faut insister sur le fait qu'**« on repart de 0 »** à chaque nouveau lancer de dé.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de remettre en cause l'idée que toutes les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables.

Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.

La capacité introduite est d'exprimer la probabilité d'un évènement.

Il y a beaucoup plus de cases noires que de cases vertes (18 fois plus !). On a donc beaucoup plus de chances de tomber sur une case noire que sur une verte (de même pour les cases rouges). Solène a donc raison : 3 possibilités ne veut pas dire que chacune a autant de chances de se produire que les autres.

Le but est de déconstruire une idée reçue : le fait que toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité. On peut faire sentir très facilement aux élèves que certaines issues ont plus de chances de se produire que d'autres : ici, il est clair qu'il y a beaucoup plus de chances d'obtenir le rouge ou le noir que le vert.

On peut demander en prolongement aux élèves d'inventer ou de citer des situations de la vie courante où les issues sont équiprobables (par exemple, naissance d'une fille ou d'un garçon) et d'autres où elles ne le sont pas, par exemple mettre 100 papiers dans un chapeau dont un est marqué « gagnant » et faire tirer aux élèves un papier (en remettant les papiers à chaque fois). On s'aperçoit très vite qu'on a plus de chances de perdre que de gagner.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'appréhender la notion de probabilité de façon qualitative.

Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.

La capacité introduite est d'exprimer la probabilité d'un évènement.

	Jamais	Rarement	Souvent	Toujours
1. À la plage, on se baigne.			✗	
2. Une personne pèse plus de 1 000 kg.	✗			
3. Des rollers ont des roues.				✗
4. On trouve un billet de 50 € dans la rue.		✗		
5. On obtient 7 en lançant un dé.	✗			
6. On obtient une consonne en tirant au hasard une lettre de l'alphabet.			✗	
7. On obtient un double 6 en lançant deux dés.		✗		
8. En France, à minuit, il fait nuit.				✗

Le but de cette activité est de faire le lien entre le vocabulaire courant utilisé dans la vie quotidienne des élèves afin de commencer à quantifier le hasard. Le mot « probable » peut commencer à être expliqué, voire employé. En prolongement, on peut demander aux élèves de proposer des phrases en imposant un de ces adverbes. Ceci peut être, par exemple, fait à l'oral au début de la séance suivante.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la notion d'expérience aléatoire.

Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.

La capacité introduite est de décrire une expérience aléatoire.

1. On peut obtenir : Simon, Evan, Loris, Émeline, Gaëlle ou Charles.
2. On ne peut pas savoir à l'avance qui videra le lave-vaisselle car on tire le papier au hasard. Le résultat n'est donc pas prévisible.
3. Par exemple : Dans une classe, on tire à la courte paille pour savoir qui passera au tableau...

Les élèves ont conscience que certains faits sont liés au hasard. Le but est de leur faire sentir la différence entre une expérience aléatoire (exemple : tirage au sort) et une expérience où, à priori, le hasard n'intervient pas (exemple : on achète un carnet de dix timbres et on regarde le prix payé).

On peut commencer ici à parler d'issues d'une expérience aléatoire, voire d'événements qui peuvent se réaliser (exemple : « une fille videra le lave-vaisselle », réalisé par les issues « Émeline » et « Gaëlle »).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'exprimer la probabilité d'un événement à partir d'un vocabulaire courant.
Il n'y a aucun prérequis nécessaire pour cette activité.
La capacité introduite est d'exprimer la probabilité d'un événement.

1. Si on prend un Français au hasard, la probabilité qu'il ait un portable est de $\frac{9}{10}$ (9 chances sur 10).
2. À cette tombola, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{3}$.
3. La probabilité que ma voiture ne démarre pas un matin donné est de $\frac{2}{3}$ (2 chances sur 3).

4. La probabilité d'obtenir son brevet est de $\frac{85}{100}$ ou 0,85.
5. La probabilité qu'il pleuve demain est grande.
6. La probabilité que je vienne te voir demain est faible.
7. Chaque face de ce dé n'a pas la même probabilité de sortir.

Le but est de faire le lien entre des expressions couramment utilisées et une certaine quantification du hasard.
On peut commencer à faire remarquer que cette quantité (appelé « probabilité ») s'exprime à l'aide d'un nombre entre 0 et 1. Ce nombre est d'autant plus proche de 1 que l'événement a de chances de se produire. A contrario, moins cet événement a de chances de se produire, plus cette quantité est proche de 0.

Exercices

Décrire une expérience aléatoire

Questions flash

1. 1. C'est une expérience aléatoire car le résultat ne peut pas être prévu à l'avance (lié au hasard).
2. On sait d'avance que c'est le « 1 » qui va s'afficher. Cette expérience n'est pas aléatoire.
2. Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
3. 1. Faux : le prix est fixe, on peut le connaître à l'avance.
2. Vrai : on ne peut pas savoir à l'avance si on aura un numéro gagnant (c'est lié au hasard).
3. Vrai : on ne peut pas savoir à l'avance si cette personne a acheté du pain aujourd'hui (c'est lié au hasard)
4. Résultats possibles : C, A, R, O, L, I, N et E.
5. Issues de cette expérience : bleu, blanc et rouge.
6. C'est un expérience aléatoire car comme on ne sait pas quel carburant il prend, on ne peut pas prévoir le prix que Karim va payer (c'est lié au hasard).
7. Issues de cette expérience : A, B et D.
8. Les issues réalisant l'événement « Le numéro est plus grand que 40 » sont : 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 et 49.
9. Cette expérience n'est pas aléatoire car les tarifs sont affichés donc on peut connaître à l'avance le prix payé par Emma : $1\text{ €} + 1\text{ €} + 1\text{ €} = 3\text{ €}$.
10. 1.a. Les issues de cette expérience sont : vert, bleu, noir, violet, jaune, rouge.
b. Un événement qui peut se réaliser ou non lors de cette expérience : « Obtenir une couleur primaire (rouge, bleu ou jaune) ».
2.a. Les issues de cette expérience sont : 25, 50, 100, 500, 1 000, 5 000.
b. Un événement qui peut se réaliser ou non lors de cette expérience : « Obtenir un multiple de 100 (100, 500, 1 000, 5 000) ».
11. ① : 4 issues (2, 0, 1, 6).
② : 3 issues (A, N, S).
③ : 2 issues (1, 2).

Exprimer la probabilité d'un événement

Questions flash

12. Le dé n'est pas truqué donc chaque face a autant de chances d'être obtenue que les autres. Donc on a autant de chances d'obtenir le 2 que le 6.
13. La probabilité que le bonbon sorti soit à la fraise est de $\frac{3}{5}$ (3 chances sur 5).
14. La probabilité que ce soit un élève inscrit à l'UNSS est de 12,4 % soit $\frac{12,4}{100}$ ou encore 0,124.
15. 1. La probabilité de gagner à ce jeu est de $\frac{23}{50}$ ou 0,46 ou encore 46 %.
2. Si on s'intéresse à un Français pris au hasard, la probabilité qu'il soit droitier est de 87 % soit $\frac{87}{100}$ ou encore 0,87.
3. Si on s'intéresse à un Américain pris au hasard, la probabilité qu'il ne parle pas anglais en famille est de $\frac{4}{10}$ ou 0,4 ou encore 40 %.
4. Si on s'intéresse à un étudiant pris au hasard, la probabilité qu'il ait des difficultés à trouver un logement est de $\frac{3}{5}$ ou 0,6 ou encore 60 %.
5. Si on s'intéresse à un élève de la classe de mon cousin pris au hasard, la probabilité que ce soit un garçon est de $\frac{1}{3}$ (1 garçon pour 2 filles donc 1 garçon pour 3 élèves).
16. Jean a 1 chance sur 6 de tomber sur une part contenant la fève soit une probabilité de $\frac{1}{6}$ de porter la couronne.
17. La probabilité que ce SMS ait été envoyé à ses parents est de $\frac{2}{5}$ ou 0,4 ou encore 40 %.
18. La probabilité que ce beignet soit au chocolat est de $\frac{2}{5}$ (2 au chocolat sur 5 beignets en tout) ou 0,4 ou encore 40 %.
19. La probabilité que le danseur qui a fait une chute porte un tee-shirt jaune est de $\frac{8}{20}$ (8 danseurs portent un tee-shirt jaune sur 20 danseurs en tout) ou 0,4 ou encore 40 %.
20. La probabilité que le nom tiré soit celui d'un gardien de buts est de $\frac{3}{23}$ (3 gardiens de buts sur 23 joueurs en tout).

21

	Peu probable	Probable	Très probable
① On teste une voiture neuve et celle-ci ne démarre pas.	✗		
② On mesure une femme et sa taille est inférieure à 2 m.			✗
③ On arrive à un feu tricolore et celui-ci est vert.		✗	
④ On fait tomber sa tartine et elle tombe du côté de la confiture.			✗
⑤ On fait un numéro de téléphone au hasard et la personne qui répond est une fille.		✗	
⑥ On achète du lait dans un supermarché et la date limite de consommation est dépassée.	✗		

22 La probabilité que cet élève soit venu à vélo est :

$$\frac{48}{300} = \frac{16}{100} \text{ soit } 16\%.$$

23 La probabilité que cet élève soit une fille est de $\frac{14}{25}$ (14 filles sur 25 élèves en tout) ou 0,56 ou encore 56 %.

Problèmes

24 Sans trucage

Une pièce n'a pas de mémoire. On ne peut donc pas savoir ce qu'il va se passer au prochain tirage. La pièce a toujours 1 chance sur 2 de tomber sur chaque face.

25 Histoire d'urnes (1)

Pour avoir 50 % de chances de tirer une boule noire, il faut qu'il y ait autant de boules noires que de boules rouges soit 8 de chaque. Il faut donc rajouter 3 boules rouges.

26 Loto

Ceux qui ont gagné ont forcément joué donc le slogan « 100 % des gagnants ont tenté leur chance. » s'appuie sur une réalité. Néanmoins, ce qui intéresse le joueur ce sont les chances de gagner lorsqu'on joue et non les chances d'avoir joué lorsqu'on gagne !

27 Bleu, blanc, rose !

Pour avoir le plus de chances de gagner, il faut choisir la couleur du secteur qui a la plus grande surface soit le rose. Le secteur rose a une surface qui représente la moitié de celle de la roue. Lorsqu'on choisit le rose, on a donc 1 chance sur 2 de gagner (ou 50 % ou $\frac{1}{2}$ ou 0,5).

28 Histoire d'urnes (2)

Comme $32\% < 50\%$, on a moins d'1 chance sur 2 de tirer une boule blanche. Il y a donc plus de boules noires que de boules blanches.

29 Alphabet

- Chaque lettre a autant de chances d'être tirée que les autres. On a donc 1 chance sur 26 de tirer la lettre K soit une probabilité de $\frac{1}{26}$.
- Sur les 26 lettres de l'alphabet, il y a 6 voyelles : A, E, I, O, U, Y. On a donc 6 chances sur 26 de tirer une voyelle soit une probabilité de $\frac{6}{26}$.

3. Sur les 26 lettres de l'alphabet, il y a 20 consonnes (26 lettres – 6 voyelles). On a donc 20 chances sur 26 de tirer une consonne soit une probabilité de $\frac{20}{26}$.

30 Prise de risque

Simon a obtenu 21 points donc s'il rejoue, il perdra s'il obtient le 3, le 4, le 5 ou le 6 (car il dépasserait 23). Il a donc 4 chances sur 6 de perdre en rejouant soit une probabilité de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Il vaut donc mieux qu'il ne rejoue pas.

31 Histoire d'urnes (3)

Si on veut avoir 1 chance sur 2 de tirer une boule rouge, il faut qu'il y ait dans l'urne autant de boules rouges que de boules noires. On peut proposer, par exemple, une urne contenant 10 boules rouges et 10 boules noires, mais il existe une infinité de possibilités.

32 Invention (1)

Par exemple : On met dans un sac 2 jetons jaunes et 1 jeton bleu. On tire un jeton au hasard de ce sac et on gagne s'il est jaune.

33 Au feu !

- La probabilité que cette sortie soit liée à un incendie est de 8,45 % ou 0,0845.
- La probabilité qu'une sortie de 2014 concerne des secours à la personne est de 69,69 % soit environ 70 % $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$. Le journaliste a donc raison.

34 T'sas d'beaux yeux !

$$\frac{1}{5} \text{ des élèves ont les yeux bleus soit de } 30 \text{ élèves.}$$

$$\frac{1}{5} \times 30 = 6.$$

Donc 6 élèves ont les yeux bleus dans cette classe.

35 Déboule !

Par exemple : On met ces boules dans une urne et on en tire une au hasard. On regarde la lettre qu'elle porte. Les issues de cette expérience aléatoire sont : B, I, H, O, R.

On peut aussi s'intéresser aux nombres marqués sur les boules ou à leur couleur.

36 Invention (2)

Par exemple : Dans un sac opaque, on met 3 jetons de scrabble, l'un comportant la lettre A, un autre la lettre Z et un 3^e la lettre K. On tire un jeton au hasard de ce sac. Les issues A, Z et K ont la même probabilité.

37 Bleu, blanc, rouge

$$100\% - 20\% - 30\% = 50\%$$

On a donc 50 % de chances de tomber sur la zone bleue soit une probabilité de $\frac{1}{2}$ ou encore 0,5.

38 The spinner

- Margaret is most likely to get colour yellow because the yellow part of the spinner is the biggest one.
- Margaret is wrong because the green part of the spinner is larger than the pink one.
- Margaret is right because the yellow part of the spinner represents half of its area.

39 Invention (3)

Par exemple : On observe un feu de signalisation et on regarde sa couleur.

Les issues vert, orange et rouge n'ont pas la même probabilité car le feu reste moins longtemps à l'orange qu'au vert ou au rouge.

40 Roi de cœur

- Chaque carte a la même probabilité d'être tirée : $\frac{1}{32}$. Dans le jeu, il y a 4 rois ; on a donc 4 chances sur 32 de tirer un roi soit une probabilité de $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
- Dans le jeu, il y a 8 coeurs ; on a donc 8 chances sur 32 de tirer un cœur soit une probabilité de $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

3. Dans le jeu, il y a 1 roi de cœur ; on a donc 1 chance sur 32 de tirer le roi de cœur soit une probabilité de $\frac{1}{32}$.
4. Dans le jeu, il y a 16 cartes rouges (8 coeurs et 8 carreaux) ; on a donc 16 chances sur 32 de tirer un cœur soit une probabilité de $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

41 Stupeur et tremblement

C'est la proposition 3 qui exprime le mieux ce qu'a dit le géologue ($\frac{2}{3} \approx 0,67$ donc $\frac{2}{3} > 0,5$).

42 Des jeux

On exprime pour chaque jeu la probabilité de gagner sous la même forme (ici un nombre décimal mais on pourrait choisir une fraction ou un pourcentage).

$$\text{Jeu A : } \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$\text{Jeu B : } 28\% = \frac{28}{100} = 0,28.$$

$$\text{Jeu C : } \frac{3}{10} = 0,3.$$

$0,25 < 0,28 < 0,3$, il vaut donc mieux jouer au jeu C.

43 Roues

- Pour la roue A, la partie rouge représente la moitié de la roue, on a donc 1 chance sur 2 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{2}$.
- Pour la roue B, la partie rouge représente le quart de la roue, on a donc 1 chance sur 4 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Pour la roue C, la partie rouge représente entre un quart et la moitié de la roue, on a donc entre 1 chance sur 4 et 1 chance sur 2 de gagner soit une probabilité comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.
- Il vaut donc mieux jouer avec la roue A.

44 Bonbons

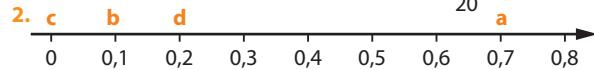
1. Des moins nombreux aux plus nombreux, il y a 0 bonbon au citron, 2 au caramel, 4 au goût cola et 14 au chocolat. Donc du moins probable au plus probable : **c, b, d, a**. Il y a 20 bonbons en tout ($14 + 2 + 4 = 20$).

$$\text{Probabilité d'avoir un bonbon au citron : } \frac{0}{20} = 0.$$

$$\text{Probabilité d'avoir un bonbon au caramel : } \frac{2}{20} = 0,1.$$

$$\text{Probabilité d'avoir un bonbon au goût cola : } \frac{4}{20} = 0,2.$$

$$\text{Probabilité d'avoir un bonbon au chocolat : } \frac{14}{20} = 0,7.$$



45 Puissance 4

Il y a 7 colonnes en tout et le joueur qui a les pions jaunes gagne uniquement s'il met son pion dans la colonne 5. Il a donc 1 chance sur 7 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{7}$.

46 Des dés

1. Par exemple : On lance 2 dés et on regarde la somme des points obtenus.
2. Un événement lié à cette expérience : « Obtenir un multiple de 4 ».

47 Chasseurs de tornades

D'après le document fourni, la probabilité de formation d'une tornade est la plus forte au mois de juin et au mois d'août. La probabilité de formation d'une tornade est plutôt faible entre novembre et avril.

On peut penser que la probabilité de formation d'une tornade est plus forte pendant les mois où les températures sont plus élevées.

Le mois où la probabilité de formation d'une tornade est la plus faible est le mois de janvier.

Toute proposition cohérente sera valorisée.

48 Simulation

1. Le nombre de « Face » est de :

$$3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 = 19$$

$$+ 2 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3 + 2 + 2 + 4 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 49$$

La fréquence de « Face » vaut donc $\frac{49}{300} \approx 0,16$.

2. Cette fréquence est très éloignée de la probabilité d'obtenir

$$« Face » \text{ avec une pièce non truquée qui vaut } \frac{1}{2} = 0,5 \text{ alors}$$

que le nombre de lancers est assez important. On peut donc penser que cette pièce est truquée.

49 Cibles

- Sur la 1^{re} cible, il y a une case verte parmi 4 : on a donc 1 chance sur 4 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Sur la 2^e cible, il y a une case verte parmi 9 : on a donc 1 chance sur 9 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{9}$.
- Sur la 3^e cible, il y a une case verte parmi 16 : on a donc 1 chance sur 16 de gagner soit une probabilité de $\frac{1}{16}$.

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} \text{ donc il vaut mieux jouer avec la 1^{re} cible.}$$

50 Jetons

1. Les issues de cette expérience aléatoire sont : bleu, noir et jaune. Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré :

$$\frac{1}{3+8+7} = \frac{1}{18}.$$

Comme il y a 3 jetons bleus, la probabilité de tirer un jeton bleu vaut $\frac{3}{18}$.

Comme il y a 8 jetons noirs, la probabilité de tirer un jeton noir vaut $\frac{8}{18}$.

Comme il y a 7 jetons jaunes, la probabilité de tirer un jeton jaune vaut $\frac{7}{18}$.

2. $\frac{3}{18} + \frac{8}{18} + \frac{7}{18} = \frac{18}{18} = 1$. La somme des probabilités des issues vaut 1.

Cette propriété sera formalisée dans le chapitre 29.

51 Bissextille

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1 Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	
2 divisible par 4 ?	NON	NON	OUI	NON	NON	NON	OUI	NON	NON	NON	NON	OUI
3 divisible par 100 ?	NON	NON										
4 divisible par 400 ?	NON	NON										
5												
6 Bissextille ?	NON	NON	OUI	NON	NON	NON	OUI	NON	NON	NON	NON	OUI

Entre 2010 et 2020, il y a donc 3 années bissextiles sur 11 années en tout.

Donc la probabilité de choisir une année bissextile entre 2010 et 2020 est de $\frac{3}{11}$.

52 Céréales

1 chance sur 3 signifie qu'en moyenne (sur un grand nombre de paquets), 1 paquet sur 3 contient un cadeau. Mais rien n'assure qu'en achetant 3 paquets au hasard, on ait un cadeau... Julie a donc tort.

53 Salaires

1. Nombre d'employés dans l'entreprise de Mario :

$$12 + 73 + 32 + 21 + 1 = 139.$$

2. $12 + 73 = 85$ donc 85 employés gagnent moins de 2 000 €. Donc la probabilité que l'employé gagne moins de 2 000 € est de $\frac{85}{139} \approx 0,61$. Or $0,61 > 0,5$.

Il y a donc plus de chances que cet employé gagne moins de 2 000 €.

54 Cartes à jouer

Parmi les cartes restantes, 3 comportent un rond et 3 comportent un nombre strictement supérieur à 3. Donc elle a autant de chances d'obtenir l'un que l'autre.

55 Fumer tue !

Cette affiche signifie que si on prend au hasard une personne de moins de 45 ans ayant eu un infarctus, la probabilité qu'elle soit fumeuse est de 80 % et celle qu'elle soit non fumeuse de 20 %. Autrement dit, une grande majorité de ces personnes sont fumeuses. On peut donc penser que fumer augmente le risque d'infarctus.

56 Œuvre aléatoire

Si on réalisait le même type de travail avec les années de naissance des élèves d'une classe de 5^e, on n'obtiendrait pas le même résultat. En effet, la plupart des élèves d'une même classe sont nés la même année, donc on n'aurait pas 50 % d'années paires et 50 % d'années impaires.

57 Pièce ou dé

On peut faire jouer les élèves à ce jeu, certains avec une pièce d'autres avec un dé, et faire calculer la moyenne des gains par partie (en cumulant les parties de toute la classe). Il faudra laisser les élèves débattre à la suite de cette expérimentation : de la conjecture au choix d'une méthode. On peut également faire une simulation d'un grand nombre de parties sur tableau pour voir qui gagne le plus de points, mais les élèves devront être accompagnés par leur professeur.

Autre solution : calculer la moyenne des points sur un grand nombre de parties, pour les plus aguerris.

Avec la pièce : en moyenne, la moitié des parties rapporteront

3 points et l'autre moitié 6 points. Donc en moyenne, avec la

pièce, on gagnera : $\frac{3+6}{2} = 4,5$ points par partie.

Avec le dé : en moyenne, 1 partie sur 6 rapportera 1 point ; 1 partie sur 6 rapportera 2 points ; 1 partie sur 6 rapportera 3 points ; 1 partie sur 6 rapportera 4 points ; 1 partie sur 6 rapportera 5 points et 1 partie sur 6 rapportera 6 point.

Donc en moyenne : $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$ points par partie.

Amandine devrait donc choisir la pièce.

58 Sans pièce

On peut, par exemple, mettre 2 papiers identiques sur lesquels on aurait marqué « Pile » et « Face » dans un sac opaque et en tirer un au hasard.

On peut également utiliser un dé et décider qu'un numéro pair correspond à « Face » et un numéro impair à « Pile ».

Toute proposition à débattre avec l'ensemble de la classe.

59 Égalité !

On peut inciter les élèves à faire des essais successifs pour essayer de trouver une solution par tâtonnement.

À eux deux, ils possèdent 54 billes loupes et 21 billes perles soit 75 billes en tout.

Donc la proportion de billes perles est de : $\frac{21}{75} = 0,28 = 28\%$.

Donc si on veut que la probabilité de tirer une bille perle soit la même dans les deux sacs, il faut qu'ils aient tous les deux 28 % de billes perles.

On peut tester toutes les possibilités, par exemple, au tableau même sans savoir que cette proportion doit être de 0,28.

A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de billes perles dans le sac d'Antoine	Nombre de billes loupes dans le sac d'Antoine	Proportion de billes perles dans le sac d'Antoine	Nombre de billes perles dans le sac de Léa	Nombre de billes loupes dans le sac de Léa	Proportion de billes perles dans le sac de Léa
2	4	1	0,04	20	30	0,4
3	5	2	0,08	19	31	0,38
4	6	3	0,12	18	32	0,36
5	7	4	0,16	17	33	0,34
6	8	5	0,2	16	34	0,32
7	9	6	0,24	15	35	0,3
8	10	7	0,28	14	36	0,28
9	11	8	0,32	13	37	0,26
10	12	9	0,36	12	38	0,24
11	13	10	0,4	11	39	0,22
12	14	11	0,44	10	40	0,2
13	15	12	0,48	9	41	0,18

Donc on voit que si Antoine donne à Léa 2 billes loupes et prend à Léa 2 billes perles, sa proportion de billes perles sera de 28 %.

Dans ce cas, Léa aura 36 billes loupes et 14 billes perles donc 14 billes perles sur 50 en tout soit une proportion de billes perles de $\frac{14}{50} = 0,28$.

60 Météo

Sur la plupart du territoire français, le risque d'orage est quasi nul en cette journée du 26 août. Néanmoins, sur le nord de la France, ce risque varie entre 5 et 25 % comme dans le sud-est et dans l'ouest de l'Angleterre ou encore sur la plupart du territoire irlandais ou le nord-est de l'Afrique.

Ce risque peut monter jusqu'à 35 % en Belgique et dans le nord-ouest de l'Allemagne.

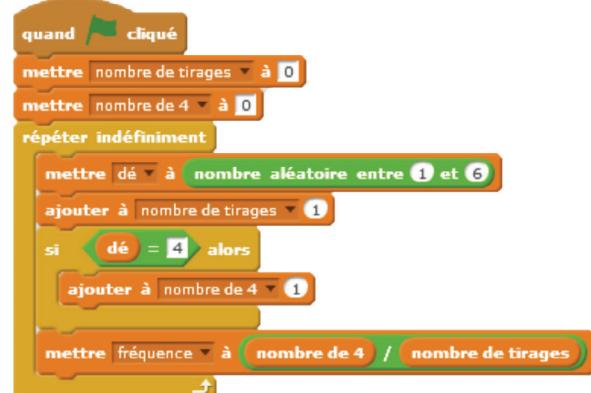
Toute autre proposition cohérente sera prise en compte.

Algorithmique et outils numériques

61 Simulation

Il faut expliquer aux élèves que l'instruction nombre aléatoire entre 1 et 6 renvoie un nombre au hasard entre 1 et 6 avec les mêmes chances pour chacun d'entre eux. Cela permet donc de simuler très facilement un lancer de dé et très rapidement un grand nombre de lancers de dés. C'est l'occasion d'expliquer le sens du mot « simulation ».

1. « nombre de tirages » représente le nombre de fois où on lance le dé.
« dé » représente le résultat d'un tirage.
« nombre de 6 » représente le nombre de 6 obtenus lors de ces tirages.
« fréquence » représente la fréquence de 6 obtenus lors de ces tirages.
2. a. Lorsqu'on lance un dé équilibré, chaque face a autant de chances d'être obtenue qu'une autre. Donc la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{6}$ (1 chance sur 6).
- b. La fréquence obtenue est proche de $\frac{1}{6} \approx 0,17$.
3. Il suffit de changer la variable nombre de 6 en nombre de 4 puis de modifier la condition pour compter le nombre de 4 obtenus au lieu du nombre de 6.



4.



62

Lancers de dés

1. La formule =NB.SI(A1:J1;5) compte le nombre de 5 dans la ligne 1 de la A^e à la J^e colonne. La fonction renverra alors 2.

2. a. Dans la cellule L1, il faut entrer =NB.SI(A1:J10;1).

b. Voir le fichier tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1	6	5	6	3	2	2	3	5	1	Nombre de 1	16	Fréquence de 1	
2	3	6	5	4	4	4	3	4	3	5	Nombre de 2	12	Fréquence de 2	
3	3	6	1	3	4	6	2	4	5	1	Nombre de 3	21	Fréquence de 3	
4	1	3	1	2	2	3	3	2	1	1	Nombre de 4	18	Fréquence de 4	
5	5	1	3	4	4	5	4	2	4	6	Nombre de 5	17	Fréquence de 5	
6	1	1	4	1	3	2	5	5	6	2	Nombre de 6	16	Fréquence de 6	
7	4	6	3	2	6	5	3	4	6	5	Total	100	Total	
8	6	5	5	3	1	3	3	5	4	4				
9	1	1	3	6	3	2	5	6	4	5				
10	5	3	6	2	4	6	1	3	6	4				

3. a. La fréquence d'apparition du chiffre 1 se calcule par $\frac{\text{nombre de } 1}{100}$.

b. Voir le fichier tableur dans le manuel numérique.

On entre en N1 la formule =L1/100.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1	6	5	6	3	2	2	3	5	1	Nombre de 1	16	Fréquence de 1	0,16
2	3	6	5	4	4	4	3	4	3	5	Nombre de 2	12	Fréquence de 2	0,12
3	3	6	1	3	4	6	2	4	5	1	Nombre de 3	21	Fréquence de 3	0,21
4	1	3	1	2	2	3	3	2	1	1	Nombre de 4	18	Fréquence de 4	0,18
5	5	1	3	4	4	5	4	2	4	6	Nombre de 5	17	Fréquence de 5	0,17
6	1	1	4	1	3	2	5	5	6	2	Nombre de 6	16	Fréquence de 6	0,16
7	4	6	3	2	6	5	3	4	6	5	Total	100	Total	1
8	6	5	5	3	1	3	3	5	4	4				
9	1	1	3	6	3	2	5	6	4	5				
10	5	3	6	2	4	6	1	3	6	4				

4. a. Lorsqu'on lance un dé équilibré, chaque face a autant de chances d'être obtenue qu'une autre. Donc la probabilité

d'obtenir 1 est de $\frac{1}{6}$ (1 chance sur 6), la probabilité d'obtenir 2 est de $\frac{1}{6}$ et la probabilité d'obtenir 6 est de également.

b. Ces probabilités de $\frac{1}{6} \approx 0,17$ sont assez proches des fréquences obtenues (0,16, 0,12, 0,16).

On peut commencer à parler de stabilisation de fréquence. Pour convaincre les élèves, on peut augmenter sensiblement le nombre de tirages (feuille simulation du fichier fourni) et faire plusieurs simulations (touche F9). On constate que malgré le côté aléatoire des tirages, la fréquence de chaque issue se stabilise autour de la valeur de la probabilité. Aucune formalisation n'est attendue à ce niveau.

63

Des pièces

1. Voir le fichier tableur dans le manuel numérique.

Attention, le côté aléatoire des tirages fait que la copie d'écran fournie dans l'énoncé ne correspond pas forcément aux résultats fournis dans le corrigé.

2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	AE	AF
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
2	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
4	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
7	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
8	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
9	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
10	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
11															Fréquence de PILES	0,54

3. Tous les élèves de la classe n'obtiendront pas les mêmes résultats, les tirages étant par définition aléatoires.

4. La probabilité d'obtenir « Pile » lors d'un lancer d'une pièce équilibrée vaut $\frac{1}{2}$ (1 chance sur 2 car chaque face a autant de chances d'être obtenue que l'autre).

La fréquence obtenue est relativement proche de cette probabilité.

5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Z/A/AE/AI	AE	AF
88	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
89	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
90	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
91	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
92	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
93	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
94	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
95	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
96	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
97	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
98	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
99	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
100	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
101															Fréquence de PILES	0,50	

Même si tous les élèves n'obtiennent pas le même résultat, la fréquence obtenue est relativement proche de cette probabilité.

On peut commencer à parler de stabilisation de fréquence. Pour convaincre les élèves, on peut leur demander de refaire des simulations (touche F9) avec 300 et 3 000 tirages. Même si la fréquence n'est pas nécessairement plus proche de 0,5 avec un nombre de tirages plus important, elle fluctue beaucoup moins d'une simulation à une autre. Aucune formalisation n'est attendue à ce niveau.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1. Les issues sont : jaune, rouge, bleu, vert.

2. Chaque boule a autant de chances d'être tirée qu'une autre soit 1 chance sur 4. La probabilité de chaque issue est donc de $\frac{1}{4}$.

Exercice 1

1. Les issues sont : jaune, rouge, bleu, vert.

- Il y a 1 boule jaune sur 8 boules en tout, donc la probabilité de tirer une boule jaune est de $\frac{1}{8}$ ou 0,125.
- Il y a 2 boules bleues sur 8 boules en tout, donc la probabilité de tirer une boule bleue est de $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ou 0,25.
- Il y a 2 boules vertes sur 8 boules en tout, donc la probabilité de tirer une boule verte est de $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ou 0,25.
- Il y a 3 boules rouges sur 8 boules en tout, donc la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ ou 0,375.

Exercice 2

Comme il y a 4 chances sur 7 que le chiot soit noir, il y a 3 chances sur 7 qu'il soit blanc. Or il y a 3 chiots blancs, donc il y a 7 chiots en tout.

Exercice 2

Comme il y a 70 % de chances que le chiot soit noir, il y en a 30 % qu'il soit blanc. Or il y a 3 chiots blancs, donc 30 % correspond à 3 chiots.

Nombre de chiots	3	?
Pourcentage	30	70

On voit que le coefficient de proportionnalité pour passer de la 1^{re} à la 2^{de} ligne vaut 10 donc 7 chiots sont noirs. Bambie a donc eu 10 chiots en tout.

Exercice 3

Dans le sac de Thibault, il y a 8 billes arc-en-ciel sur 20 billes en tout. La probabilité de tirer une bille arc-en-ciel est donc de $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ou 0,4 ou encore 40 %.

Dans le sac de Lucille, il y a 5 billes arc-en-ciel sur 29 billes en tout. La probabilité de tirer une bille arc-en-ciel est donc de $\frac{5}{29}$.

Exercice 3

Si on mélange le contenu des 2 sacs, il y a :

$$\begin{aligned} & 12 \text{ billes agates} + 24 \text{ billes agates} \\ & = 36 \text{ billes agates} \\ & 8 \text{ billes arc-en-ciel} + 5 \text{ billes arc-en-ciel} \\ & = 13 \text{ billes arc-en-ciel} \\ & 13 \text{ billes} + 36 \text{ billes} \\ & = 49 \text{ billes} \end{aligned}$$

La probabilité de tirer une bille arc-en-ciel est donc de $\frac{13}{49}$.

Écriture d'un énoncé

1. Par exemple : On fait tourner la roue et on regarde le numéro du secteur sur lequel la flèche tombe.
2. Par exemple : Quelle est la probabilité d'obtenir le 1 ? Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 13 ?

3. Chaque secteur a autant de chance d'être obtenu qu'un autre soit 1 chance sur 15 ou une probabilité de $\frac{1}{15}$.

La probabilité d'obtenir le 1 est donc de $\frac{1}{15}$.

Il y a 3 numéros supérieurs ou égaux à 13 (13, 14 et 15), il y a donc 3 chances sur 15 d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 13 ou une probabilité de $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ ou encore 0,2.

Analyse d'une production

• Copie d'Alicia :

Il y a 1 jeton jaune pour 3 jetons verts soit 4 jetons en tout. Alicia n'a pas tenu compte du nombre de jetons au total. On a en fait 1 chance sur 4 d'obtenir un jeton jaune.

• Copie de Will :

Ce que dit Will est vrai car on a bien 3 fois moins de jetons jaunes que de jetons, verts mais il ne répond pas à la question posée car il devrait calculer une probabilité qu'il ne donne pas. Sur 4 jetons en tout, un seul est jaune, donc la probabilité d'obtenir un jeton jaune vaut $\frac{1}{4}$ (et celle d'obtenir un jeton vert vaut $\frac{3}{4}$, ce qui est bien 3 fois plus élevé).

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

Dans ce chapitre, on continue le travail entamé dans le chapitre 28 en calculant des probabilités sous diverses formes : décimale, fractionnaire, pourcentage. Ce travail s'effectue dans des situations simples issues la plupart du temps de la vie courante (jeux achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.) qui suscitent le débat au sein de la classe. On commence à formaliser ces notions avec des notations comme $P(A)$. On introduit les notions d'évènements certain, impossible, contraires et incompatibles, ainsi que le calcul de leur probabilité. Ce chapitre évite tout excès de technicité et privilégie le sens des notions abordées.

- De nombreux problèmes permettent de calculer des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie et de régularité qui fondent le modèle équiprobable.
- On commence également à faire le lien avec l'approche fréquentiste des probabilités qui permet, par exemple, de calculer une probabilité inconnue. Il est important de faire constater matériellement ce phénomène de stabilisation des fréquences à partir d'expériences faites par les élèves.
- Cette partie du programme peut être traitée à n'importe quel moment dans l'année. On peut consolider le travail sur les nombres et leurs différentes formes à l'occasion du calcul sur les probabilités.

On peut également aborder ces notions régulièrement pour n'en faire un bilan qu'à la fin de l'année.

Activités

Questions flash

1. La proportion de garçons est de $\frac{4}{7}$.

2. Entre 1 et 10, il y a 10 nombres. Donc Louis a 1 chance sur 10 de trouver du 1^{er} coup le nombre choisi.

3. Le prénom de Camellia contient 9 lettres différentes dont 4 voyelles. Il y a plus de chances de tirer une consonne qu'une voyelle puisqu'il y en a plus.

Dés non truqués

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de calculer la probabilité d'un évènement dans le cadre d'une situation d'équiprobabilité. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer la probabilité d'une issue, d'un évènement.

La capacité introduite est de déterminer la probabilité d'un évènement.

- Comme le dé est équilibré, tous les numéros ont les mêmes chances de sortir.
- Comme il y a 6 issues (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) et que chacune d'entre elles a la même chance d'être obtenue, soit 1 chance sur 6, la probabilité de chacune des issues vaut $\frac{1}{6}$.
- De la même manière, si le dé a 10 faces et que chaque numéro a les mêmes chances de sortir que les autres, la probabilité de chaque issue (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10) vaut $\frac{1}{10}$.
- De la même manière, si le dé a 20 faces et que chaque numéro a les mêmes chances de sortir que les autres, la probabilité de chaque issue (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20) vaut $\frac{1}{20}$.
- De la même manière, si le dé a n faces et que chaque numéro a les mêmes chances de sortir que les autres, la probabilité de chaque issue (1 ; 2 ; 3 ; ... ; n) vaut $\frac{1}{n}$.

Les élèves ont déjà effectué dans le chapitre 28 des calculs de probabilité sans que les notions n'aient été formalisées. On introduit ici, de manière très naturelle, la formule donnant la probabilité d'une issue dans une situation d'équiprobabilité.

Activité 1

3.

On peut introduire à cette occasion la notation $P(A)$ pour la probabilité de l'évènement A.

Pour obtenir un numéro inférieur ou égal à 2, il faut obtenir le 1 ou le 2.

$$P(A) = P(1) + P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Pour obtenir un numéro supérieur ou égal à 4, il faut obtenir le 4 ou le 5 ou le 6.

$$P(B) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pour obtenir un numéro strictement inférieur à 5, il faut obtenir le 1 ou le 2 ou le 3 ou le 4.

$$P(C) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Pour obtenir un numéro pair, il faut obtenir le 2 ou le 4 ou le 6.

$$P(D) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Encore une fois, de tels calculs ont été menés en classe de 5^e sans formalisation. On amène ici le fait que pour calculer la probabilité d'un évènement, on additionne les probabilités des issues qui le réalisent.

Dans le cas de l'équiprobabilité, chacune des issues ayant la même probabilité ($\frac{1}{n}$ s'il y a n issues), la probabilité d'un évènement A

vaut donc $\frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de :

- découvrir la notion d'événements incompatibles A et B et de calculer la probabilité de « A ou B » ;
- découvrir la notion d'événements contraires.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer la probabilité d'un événement.

La capacité introduite est d'utiliser des événements incompatibles ou contraires.

$$1. P(A) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{2}{5} \quad P(C) = \frac{1}{5}$$

2. a. Les événements B et C ne peuvent pas se réaliser en même temps car il n'y a pas d'as rouge dans ce jeu.

b. « B ou C » se réalise si on tire un as ou une carte rouge. 3 cartes correspondent à un tel tirage : l'as de trèfle, l'as de pique et le 9 de carreau, chacune ayant la même probabilité d'être tirée.

$$\text{Donc } P(B \text{ ou } C) = \frac{3}{5}.$$

On peut également faire le calcul suivant :

$$P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

3. a. Les événements A et B peuvent se réaliser en même temps si on tire, par exemple, un as de pique.

b. A ou B se réalise si on tire un as ou une carte noire. 4 cartes correspondent à un tel tirage : l'as de trèfle, l'as de pique, le 8 de trèfle et le 8 de pique, chacune ayant la même probabilité d'être tirée. Donc $P(A \text{ ou } B) = \frac{4}{5}$.

$$P(A) + P(B) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

On a donc $P(A \text{ ou } B) \neq P(A) + P(B)$.

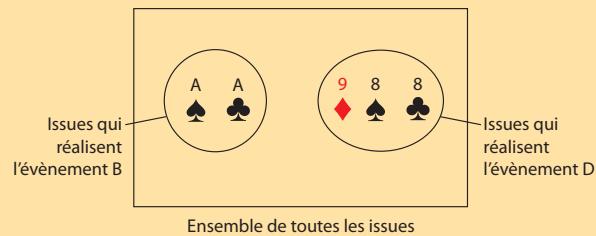
4. Si deux événements E et F sont incompatibles alors $P(E \text{ ou } F) = P(E) + P(F)$.

On pourra insister sur le fait que cette formule n'est valable que si les événements sont incompatibles, comme le prouve l'exemple précédent (question 3.). Le calcul de la probabilité d'une réunion d'événements dans le cas où ceux-ci ne sont pas incompatibles n'est pas au programme du collège. Néanmoins, certains élèves peuvent arriver à effectuer de tels calculs en fin de cycle sans qu'une formule générale n'ait été formalisée.

5. a. 3 cartes dans ce jeu de 5 ne sont pas des as, donc $P(D) = \frac{3}{5}$.

$$\text{Ou : } P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ car la somme des probabilités des issues vaut 1.}$$

On peut faire un schéma pour montrer aux élèves que les issues de D sont exactement celles qui ne sont pas dans B.



Ensemble de toutes les issues

On amène ainsi naturellement la notion d'événements contraires.

b. \bar{A} : « La carte tirée n'est pas noire » ou « La carte tirée est rouge », c'est l'événement C.

$$P(\bar{A}) = P(C) = \frac{1}{5}$$

\bar{C} : « La carte tirée n'est pas rouge » ou « la carte tirée est noire », c'est l'événement A.

$$P(\bar{C}) = P(A) = \frac{4}{5}$$

c. La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire vaut 1, soit pour un événement D :

$$P(D) + P(\bar{D}) = 1 \text{ ou } P(\bar{D}) = 1 - P(D).$$

Déterminer la probabilité d'un événement

Questions flash

10. $P(\text{arc-en-ciel}) = \frac{7}{15}$

11. La probabilité de tirer une boule rouge dans cette urne vaut $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$.

12. 1. Par exemple : on met dans un sac 3 jetons orange, 3 jetons verts, 3 jetons roses, 3 jetons bleus et 3 jetons rouges ; on tire au hasard un jeton de ce sac et on regarde sa couleur.

2. Un événement qui pourrait être réalisé lors de cette expérience :

A : « Obtenir un jeton qui n'est pas bleu ».

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

13. On lance une pièce de monnaie équilibrée.
On obtient « Pile ».

0,5

On lance un dé cubique équilibré.
On obtient un numéro inférieur à 10.

1

Dans une classe, 3 élèves sur 5 sont des filles. On choisit un élève au hasard.
C'est une fille.

0,6

Exercices

Modéliser une expérience aléatoire

Questions flash

1. La seule expérience aléatoire est la **a.**

2. Les issues de cette expérience aléatoire sont : Pile et Face.

3. Le dé étant équilibré, chaque numéro a autant de chances de sortir qu'un autre, donc on a autant de chances d'obtenir le 4 que le 12.

4. Réponse **b.**

5. La probabilité d'un événement est un nombre entre 0 et 1 donc :

a. Oui.	b. Non.	c. Non.	d. Non.
e. Oui.	f. Oui.	g. Non.	h. Oui.

6. Réponse **b.**

7. Les issues de cette expérience aléatoire sont : A ; N ; S ; T ; I.

8. Par exemple : On met dans une urne 1 boule rouge et 9 boules bleues. On tire une boule au hasard de cette urne et on regarde sa couleur.

Les issues de cette expérience aléatoire sont : rouge et bleu.

9. Situation n°1 : Tableau C (on ne peut obtenir que le 6).
Situation n°2 : Tableau A (équiprobabilité).
Situation n°3 : Tableau B (les 5 premières issues sont équiprobables et la 6^e est 2 fois plus probable que les autres).

Il y a chaque jour une chance sur quatre qu'il pleuve dans une certaine ville. On choisit un jour au hasard.
Il ne pleut pas.

0,75

On choisit une femme au hasard dans la rue.
Elle mesure 4 m.

0

14 Il y a 18 cases rouges sur 37 cases en tout. Or $\frac{18}{37} \neq \frac{1}{2}$ donc on n'a pas 50 % de chances de tomber sur le rouge.

15 Il y a 6 bonbons rouges parmi 30 donc la probabilité d'obtenir un bonbon rouge vaut $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ (réponse b.).

Utiliser des événements incompatibles ou contraires

Questions flash

16 Probabilité que ce soit un garçon :
100 % - 45 % = 55 %

17 A et B sont incompatibles donc :
 $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = 0,37 + 0,45 = 0,82$

18 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,281 = 0,719$

19 1. La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc :

$$P(3) = 1 - \frac{1}{20} - \frac{4}{20} - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} - \frac{4}{20} = \frac{3}{20}$$

2. A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir 5 » sont des événements incompatibles.

$$\text{Or } P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{4}{20} + \frac{1}{10} + \frac{4}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{3}{10}$$

$$\text{Donc } P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

20 1. $P(\text{obtenir un trèfle}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

2. $P(\text{obtenir un valet}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

3. Les événements « Obtenir un cœur » et « Obtenir une dame » ne sont pas incompatibles. En effet, les deux sont réalisés si on tire la dame de cœur.

4. Les événements A : « Obtenir un as » et B : « Obtenir un 7 » sont incompatibles (on ne peut pas obtenir les deux en même temps). D'où :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

21 $50 - 11 - 13 - 18 = 8$

8 bouteilles contiennent de l'eau parmi les 50 bouteilles.

$$\text{Donc } P(\text{bouteille d'eau}) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \text{ ou } 0,16.$$

22 1. 2 faces sur 6 portent la lettre N donc $P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. 1 face sur 6 porte la lettre S donc $P(S) = \frac{1}{6}$.

$$3 \text{ faces sur 6 portent la lettre A donc } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Les événements S « Obtenir un S » et A « Obtenir un A » sont incompatibles donc :

$$P(S \text{ ou } A) = P(S) + P(A) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$3. P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$$

Problèmes

23 Bleu, blanc, rouge

$$P(\text{zone blanche}) = 1 - P(\text{pas zone blanche}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\text{Or } P(\text{zone blanche}) + P(\text{zone bleue}) + P(\text{zone rouge}) = 1$$

$$\text{Donc } P(\text{zone bleue}) = 1 - P(\text{zone blanche}) - P(\text{zone rouge}) = 1 - 0,7 - 0,2 = 0,1$$

24 Devinez !

On peut mettre, par exemple, 3 jetons bleus et 2 jetons rouges dans ce sac. On a donc 5 jetons en tout soit 3 chances sur 5 de tirer un jeton bleu.

25 Que choisir ?

$$P(\text{coeur}) = \frac{13}{53} \quad P(\text{as}) = \frac{4}{53}$$

$$P(\text{figure}) = \frac{12}{53} \quad P(\text{joker}) = \frac{1}{53}$$

Donc le plus probable est d'obtenir une figure.

On aurait pu aussi se contenter des effectifs pour comparer les chances d'obtenir telle ou telle carte.

26 Des dés

Avec le dé bleu :

$$P(\text{pair}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10}$$

Avec le dé rouge :

$$P(\text{pair}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{4}{10}$$

Il vaut donc mieux jouer avec le dé bleu si on veut avoir le plus de chances d'obtenir un résultat pair.

27 Roland Garros 2015

$$P(\text{soin d'échauffement}) = \frac{328}{1\,852}$$

$$P(\text{traitement de maladie}) = \frac{662}{1\,852}$$

$$P(\text{massage de récupération}) = 1 - \frac{328}{1\,852} - \frac{662}{1\,852} = \frac{862}{1\,852}$$

L'acte le plus probable est donc le massage de récupération, avec une probabilité de $\frac{862}{1\,852}$.

On aurait pu aussi se contenter des effectifs pour comparer les chances d'obtention de chaque issue.

28 Le b.a-ba

$$P(\text{lettre inconnue}) = 1 - P(\text{lettre connue}) = 1 - \frac{19}{26} = \frac{7}{26}$$

La probabilité qu'Angélique ne connaît pas la lettre qu'elle prend dans le sac est de $\frac{7}{26}$.

On peut aussi commencer par calculer l'effectif des lettres inconnues.

29 Rollers

$$1. P(\text{minime}) = \frac{4\,634}{57\,260}$$

$$2. P(\text{moins de 19 ans}) = 1 - \frac{25\,692}{57\,260} = \frac{31\,568}{57\,260}$$

$$P(\text{moins de 19 ans}) = \frac{2\,969}{57\,260} + \frac{5\,895}{57\,260} + \frac{7\,059}{57\,260} + \frac{6\,216}{57\,260} + \frac{4\,634}{57\,260} + \frac{2\,946}{57\,260} + \frac{1\,849}{57\,260} = \frac{31\,568}{57\,260}$$

30 Spicy ?

- $P(\text{morceau épice}) = \frac{6+4}{6+4+8+7} = \frac{10}{25} = 0,4$

- $P(\text{aile}) = \frac{6+8}{6+4+8+7} = \frac{14}{25} = 0,56$

- $P(\text{cuisse}) = 1 - P(\text{aile}) = 1 - 0,56 = 0,44$

$$\begin{aligned} P(\text{morceau non épice}) &= 1 - P(\text{morceau épice}) \\ &= 1 - 0,4 = 0,6 \end{aligned}$$

Cindy a donc plus de chances de prendre un morceau non épice qu'une cuisse.

31 Problème d'urne

$$\text{Nombre de boules blanches : } \frac{3}{10} \times 50 = 15$$

$$\text{Nombre de boules noires : } 50 - 15 = 35$$

32 Raffle

- La probabilité que Charlie gagne la première récompense est $\frac{1}{500} = 0,002$.

- $\frac{1}{100} = \frac{5}{500}$ donc Kelly a acheté 5 billets.

33 Qui a raison ?

Élodie a tort.

$$\begin{aligned} \text{Nombre d'élèves nés en hiver : } &150 - 52 - 36 - 30 = 32 \\ \text{donc } P(\text{être né en hiver}) &= \frac{32}{150} \end{aligned}$$

34 Tant pis !

$$\text{Il y a 31 chiffres dont quatre 2. Donc } P(2) = \frac{4}{31}.$$

35 Le coup du lapin

Par exemple : Lors d'une chasse aux œufs de Pâques, les parents de Thomas cachent 3 œufs en chocolat et 7 lapins dans leur jardin. Quelle est la probabilité de trouver un lapin en premier ?

36 Y'a pas que l'école !

Loisir préféré	Musique	Sport	Cinéma	Lecture	Jeux vidéo	Total
Filles	2	4	3	4	1	14
Garçons	1	4	2	2	2	11
Total	3	8	5	6	3	25

- Il y a 25 élèves dans cette classe de 4^e.

- $\frac{14}{25} = \frac{56}{100} = 56\%$

Il y a 56 % de filles dans cette classe.

- Probabilité que son loisir préféré soit le sport : $\frac{8}{25}$

- Probabilité que ce soit un garçon dont le loisir préféré est le jeu vidéo : $\frac{2}{25}$

37 Devinette ou calcul ?

On peut calculer le nombre de boules blanches, $\frac{2}{9} \times 45 = 10$, on sait qu'il y a donc 35 boules rouges ou noires mais il n'est pas possible de savoir combien il y a de boules de chacune de ces 2 dernières couleurs.

38 T'as d'beaux yeux !

Nombre d'élèves ayant les yeux marron dans la classe de Thomas : $0,8 \times 25 = 20$

39 Voyage scolaire

Les événements A : « L'élève est parti en voyage scolaire à l'étranger » et B : « L'élève est parti en voyage scolaire en France » sont incompatibles. Donc $P(\text{L'élève est parti en voyage scolaire})$

$$= P(A) + P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

40 Fruits en vrac

- La probabilité d'obtenir un N vaut : $P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- « Obtenir une voyelle » = « Obtenir un A ou un E » donc la probabilité d'obtenir une voyelle vaut :

$$P(\text{voyelle}) = P(A) + P(E) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } 0,5$$

41 Deux sur trois

Par exemple : Dans une urne, on met 3 boules rouges, 3 boules noires et 4 boules blanches ; on tire une boule dans cette urne et on regarde sa couleur. On a alors 3 issues : rouge, noire, blanche et $P(\text{rouge}) = P(\text{noire}) = \frac{3}{10}$ et $P(\text{blanche}) = \frac{4}{10}$.

42 Touché, coulé !

- Il y a 16 cases « contenant » un bateau sur 100 cases en tout.

$$\text{Donc } P(\text{bateau touché}) = \frac{16}{100}$$

- $P(\text{Pauline tire dans l'eau}) = 1 - P(\text{bateau touché})$
 $= 1 - \frac{16}{100} = \frac{84}{100}$

- Il y a 4 cases formant le porte-avion donc :

$$P(\text{Pauline touche le porte-avion d'Alexandre}) = \frac{4}{100}$$

43 Pièce truquée

Si on appelle p la probabilité d'obtenir « Pile », on a :

Issue	Pile	Face
Probabilité	p	$2p$

Or la somme des probabilités des issues vaut 1. Donc $p + 2p = 1$.

Ainsi, $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir « Pile » vaut donc $\frac{1}{3}$ et la probabilité d'obtenir « Face » vaut $\frac{2}{3}$.

44 Bien ciblé

Les probabilités d'obtention de chaque secteur sont proportionnelles à leurs aires.

On calcule donc les aires de chaque secteur.

Aire du petit carré : $A_{\text{petit carré}} = 10^2 = 100$

Aire du carré moyen : $A_{\text{carré moyen}} = 20^2 = 400$

Aire du grand carré : $A_{\text{grand carré}} = 30^2 = 900$

Donc : $A_{\text{rouge}} = A_{\text{petit carré}} = 100$

$A_{\text{jaune}} = A_{\text{carré moyen}} - A_{\text{petit carré}} = 400 - 100 = 300$

$A_{\text{marron}} = A_{\text{grand carré}} - A_{\text{carré moyen}} = 900 - 400 = 500$

On a donc :

Nombre de points gagnés	1	5	10
Probabilité	$\frac{A_{\text{marron}}}{A_{\text{grand Carré}}} = \frac{5}{9}$	$\frac{A_{\text{jaune}}}{A_{\text{grand Carré}}} = \frac{3}{9}$	$\frac{A_{\text{rouge}}}{A_{\text{grand Carré}}} = \frac{1}{9}$

45 Parité

- La probabilité que ce soit une femme vaut $\frac{60}{100}$ ou 60 %.

- La probabilité que ce soit un ouvrier de sexe masculin vaut $\frac{22}{100}$ ou 22 %.

- La probabilité que ce soit une femme vaut $\frac{32}{50} = \frac{64}{100}$ ou 64 %.

46 Ça tourne !

- Les événements B : « La couleur obtenue est bleue » et V : « La couleur obtenue est verte » sont incompatibles. Donc :

$$P(B \text{ ou } V) = P(B) + P(V) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

- « Le numéro obtenu est plus grand que 11 »)

$$= P(12) + P(13) + P(14) + P(15) = 4 \times \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

- Il y a 3 cases orange contenant un numéro pair donc $P(\text{Le numéro obtenu est pair dans une case orange}) = \frac{3}{15}$.

47

L'orchestre symphonique

Il faut compter le nombre de musiciens au total.

		Effectifs	
Les cordes	Les premiers violons	15	62
	Les seconds violons	15	
	Les altos	12	
	Les violoncelles	10	
	Les contrebasses	8	
	Les harpes	2	
Les bois	La flute « piccolo »	1	15
	Les flutes traversières	2	
	Les hautbois	3	
	Le hautbois d'amour	1	
	Le cor anglais	1	
	La clarinette	1	
	La clarinette en si	2	
	La clarinette basse	1	
	Les bassons	2	
Les cuivres	Le contrebasson	1	15
	Les trompettes	3	
	Les cors	5	
	Les trombones	5	
	Le trombone basse	1	
Les percussions	Le tuba	1	12
	Les timbales	4	
	Les cymbales	1	
	Le triangle	1	
	Le tambour	1	
	La grosse caisse	1	
	La caisse claire	1	

- a. La probabilité que le musicien joue du xylophone vaut $\frac{1}{104}$.
- b. La probabilité que le musicien joue de la flute traversière vaut $\frac{2}{104}$.
- c. La probabilité que le musicien joue d'un instrument à cordes vaut $\frac{62}{104}$.

48 Histoire d'urnes

On souhaite que la probabilité de tirer une boule rouge soit de $\frac{1}{3}$.

Si, par exemple, on met 9 boules dans l'urne, il en faut 3 rouges et 6 noires car, dans ce cas : $P(\text{rouge}) = \frac{3}{3+6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

On peut également mettre 13 boules rouges et 26 boules noires car, dans ce cas : $P(\text{rouge}) = \frac{13}{13+26} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

Il y a donc plusieurs possibilités.

Il est intéressant de confronter les propositions des élèves afin de faire émerger une réponse.

Les élèves peuvent remarquer qu'il faut mettre à chaque fois deux fois plus de boules noires que de boules rouges. On peut aller plus loin avec les plus aguerris.

Les effectifs sont proportionnels aux probabilités, on a donc :

	Rouge	Noire	Total
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Effectif	n	$2n$	$3n$

Il faut donc choisir un nombre de boules rouges et mettre le double de boules noires.

49

Action humanitaire

Soit A l'événement « Le colis tombe en zone marécageuse ». On cherche $P(\bar{A})$.

Les probabilités sont proportionnelles à l'aire de chaque secteur.

$$P(A) = \frac{\mathcal{A}_{\text{bleue}}}{\mathcal{A}_{\text{totale}}}$$

$$\text{Or } \mathcal{A}_{\text{totale}} = 100 \times 250 = 25000$$

$$\mathcal{A}_{\text{bleue}} = \frac{100 \times 50}{2} + \frac{50 \times 50}{2} = 3750$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{3750}{25000} = \frac{3}{20}$$

$$\text{D'où } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

50 Arnaque ?

Numéro du jeton	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	1	2	3	4	5	6	21
Probabilité correspondante	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

$$\text{Donc } P(\text{Ibrahim gagne}) = P(5) + P(6)$$

$$= \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21} \approx 0,52 > 0,5.$$

Noukeo a donc raison, Ibrahim a plus de chances de gagner qu'elle.

51 Méteo

Le risque de précipitations est relativement faible en dessous d'une ligne Strasbourg-Bordeaux. Au-dessus de cette ligne, le risque de précipitations est supérieur à 40 % et augmente au fur et à mesure qu'on se déplace vers le nord-ouest. Le risque de précipitations est maximum sur le quart nord-ouest avec un risque supérieur à 90 % en Bretagne et dans les départements de la Manche et du Calvados.

52 Réseaux sociaux

Quelques exemples de commentaires possibles :

Si on prend au hasard un utilisateur de Facebook, le plus probable est qu'il ait entre 18 et 25 ans. Il est très peu probable qu'il ait plus de 55 ans.

Si on prend au hasard un utilisateur de Twitter, le plus probable est qu'il ait entre 26 et 34 ans. Il est très peu probable qu'il ait moins de 17 ans.

Si on prend au hasard un utilisateur de Google+, le plus probable est qu'il ait entre 26 et 34 ans. Il est très peu probable qu'il ait plus de 55 ans.

Si on prend au hasard un utilisateur de LinkedIn, le plus probable est qu'il ait entre 26 et 34 ans. Il est impossible qu'il ait entre 13 et 17 ans et peu probable qu'il ait plus de 55 ans.

Si on prend au hasard un utilisateur de Pinterest, il y a plus d'une chance sur deux pour qu'il ait entre 26 et 44 ans. Il est très peu probable qu'il ait entre 13 et 17 ans ou entre 18 et 25 ans.

53 Badminton

1. On peut faire l'expérience un grand nombre de fois et calculer la fréquence de l'événement « Le volant de badminton tombe debout ». On trouve ainsi une valeur approchée de cette probabilité.

2.

Il faut faire l'expérience pour avoir cette valeur, celle-ci dépend du volant utilisé.

54 Chasseur de tornades

Le département qui a la plus forte probabilité de voir une tornade se former est la Charente-Maritime suivi de près par les départements du Nord et du Pas-de-Calais.

Cinq départements ont une probabilité quasi-nulle (la fréquence est nulle mais pas la probabilité) de voir une tornade : l'Aveyron, la Lozère, la Drôme, la Haute-Savoie et la Haute-Marne.

55 Stratégie de jeu

On peut proposer aux élèves de jouer quelques parties pour bien comprendre ce qu'il se passe et mettre en place une stratégie de jeu. Plusieurs peuvent émerger. Il faut prendre en compte toutes celles qui sont argumentées avec cohérence.

On peut proposer celle-ci :

Tant que le nombre de points obtenus est inférieur strictement à 12, il faut continuer à jouer car on ne risque pas de dépasser 17. Si on a un nombre de points supérieur ou égal à 12, la probabilité de perdre n'est plus nulle. Si on veut conserver au moins une chance sur 2 de ne pas perdre, on peut continuer à jouer si on a 12, 13 ou 14 points et s'arrêter si on a plus de 14 points car alors les chances de perdre sont plus fortes que celles de ne pas perdre.

Il faut aussi tenir compte du score du joueur en face et de sa stratégie de jeu. Selon le nombre de points qu'il a, va-t-il rejouer ? Quels sont alors ses chances de dépasser son propre score, ses chances de dépasser 17 ?

56 Feu tricolore

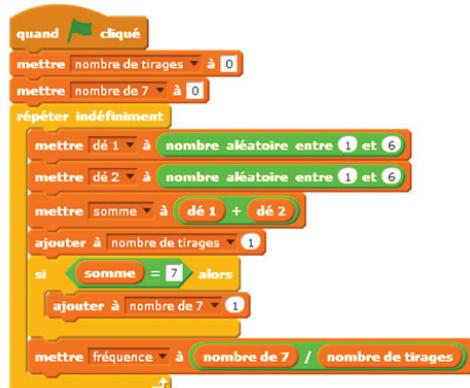
1. D'après le graphique, la probabilité de Maria d'arriver quand le feu est rouge est d'environ $0,3 < 0,5$. Elle a donc moins de 50 % de chances d'arriver lorsque le feu est rouge. Son impression n'est donc pas fondée.
2. D'après le graphique, la probabilité de Maria d'arriver quand le feu est vert est d'environ 0,6. Ainsi sur un intervalle de temps de 1 h ou 60 min, il doit y avoir environ $0,6 \times 60 \text{ min} = 36 \text{ min}$ en moyenne où le feu est vert.

Algorithmique et outils numériques

57 Simulation (1)

1. a. « nombre de tirages » représente le nombre de fois où on lance le dé.
« dé » représente le résultat d'un tirage.
« nombre de 4 » représente le nombre de 4 obtenus lors de ces tirages.
« fréquence » représente la fréquence de 4 obtenus lors de ces tirages.
- b. Yasmine calcule la fréquence de 4 obtenus lors d'un grand nombre de tirages, ce nombre n'étant pas fixé et augmentant continuellement. Cela permet d'approcher la probabilité d'obtenir un 4 lorsqu'on lance un dé équilibré.
- c. Oui, la fréquence de 4 doit se stabiliser vers un nombre qui est la probabilité d'obtenir un 4 lorsqu'on lance un dé équilibré, c'est-à-dire $\frac{1}{6} \approx 0,17$.

2. a.



b.



c. On a moins de chances d'obtenir 12 comme somme que 7. C'est plus rare (il faut avoir deux 6 alors que pour 7, on peut avoir 1 et 6 ou 3 et 4...).

On peut, par exemple, regrouper toutes les possibilités pour la somme de deux dés dans un tableau à double entrée.

		dé 1	1	2	3	4	5	6
dé 2		1	2	3	4	5	6	7
		2	3	4	5	6	7	8
		3	4	5	6	7	8	9
		4	5	6	7	8	9	10
		5	6	7	8	9	10	11
		6	7	8	9	10	11	12

On a ainsi une probabilité d'obtenir un 12 de $\frac{1}{36}$.

58 Simulation (2)

1. En cellule D2, on peut rentrer la formule =A2+B2.
2. La formule =NB.SI(A4:A9;4) compte le nombre de 4 dans la colonne A de la 4^e à la 9^e ligne. La fonction renverra alors 0.
3. a. Voir fichier tableau dans le manuel numérique.
b. Voir fichier tableau.

A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Somme	Valeur de la somme	Fréquences	
2	5	2	7	1	0	
3	6	5	11	2	0,005	
4	5	2	7	3	0,06	
5	3	6	9	4	0,11	
6	1	3	4	5	0,085	
7	5	1	6	6	0,105	
8	4	3	7	7	0,205	
9	2	1	3	8	0,14	
10	4	2	6	9	0,085	
11	4	3	7	10	0,095	
12	2	4	6	11	0,06	
13	6	1	7	12	0,03	
14	5	2	7			
15	1	6	7			
16	1	4	5			

c. D'après les résultats précédents, il vaut mieux parier sur le 7.

59 Naissance

1. Cela signifie que le 20 mai 2016 est un vendredi.
2. L'affichage de la formule =JOURSEM(DATE(2000;1;1);2) donne 6 donc le 1^{er} janvier 2000 était un samedi.

Le reste des questions dépend des dates de naissance des élèves de la classe.

Cette activité peut être menée en classe entière avec un ordinateur (il ne vaut mieux pas être en salle informatique, cela compliquerait la collecte des données). Un élève peut être désigné pour entrer les données dans le tableau. On peut utiliser la fonction NB.SI afin de compter le nombre d'élèves nés un jeudi.

Prolongements : On peut imaginer une enquête dans le collège, donc à plus grande échelle, concernant les jours de naissance (pas seulement le jeudi). Les résultats qui peuvent paraître surprenants seront l'occasion d'un débat en classe. En effet, depuis l'apparition d'accouchements programmés, les jours de naissance ne sont plus vraiment équiprobables. On peut inviter les élèves à chercher les raisons de cette répartition qui n'est pas uniforme.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Les issues sont : rouge ; noire ; bleue ; verte.

Issue	rouge	noire	bleue	verte
Probabilité	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$

Donc $P(\text{rouge ou verte}) = P(\text{rouge}) + P(\text{verte})$

$$= \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

Exercice 1

Les issues sont : rouge ; noire ; bleue ; verte.

Issue	rouge	noire	bleue	verte
Probabilité	0,3	20 %	$\frac{1}{4}$	

1. On a donc $P(\text{verte}) = 1 - 0,3 - \frac{20}{100} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ou 0,25

$$\text{Donc } P(\text{rouge ou verte}) = P(\text{rouge}) + P(\text{verte}) \\ = 0,3 + 0,25 = 0,55$$

2. On peut proposer la composition suivante :
100 boules dont 30 sont rouges, 20 sont noires, 25 sont bleues et 25 sont vertes.

Ce n'est pas la seule composition possible, on peut proposer aux élèves d'en proposer trois autres.

Dans un deuxième temps, on peut imposer 500 boules dans l'urne, par exemple.

Dans un troisième temps, et pour les plus aguerris, on peut proposer de déterminer toutes les compositions possibles. En effet, les effectifs sont proportionnels aux probabilités.

	rouge	noire	bleue	verte	Total
Probabilité	0,3	0,2	0,25	0,25	1
Effectif	$6n$	$4n$	$5n$	$5n$	$20n$

Il faut donc choisir un nombre n quelconque et mettre dans l'urne $6n$ boules rouges, $4n$ boules noires, $5n$ boules bleues et $5n$ boules vertes.

Exercice 2

1.

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	Total
Nombre de pièces acceptées après contrôle	7	81	88
Nombre de pièces rejetées après contrôle	12	0	12
Total	19	81	100

2. La probabilité que cette pièce ait un défaut vaut $\frac{19}{100}$ ou 19 %.

Exercice 2

1.

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	Total
Nombre de pièces acceptées après contrôle	100	9 500	9 600
Nombre de pièces rejetées après contrôle	400	0	400
Total	500	9 500	10 000

2. La probabilité que la pièce ait été acceptée après contrôle vaut $\frac{9600}{10000} = 0,96 = 96\%$.

Écriture d'un énoncé

Par exemple : On place dans un sac 25 jetons dont 7 sont rouges, 11 sont bleus et les autres sont jaunes ; on tire un jeton de ce sac ; quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

Analyse d'une production

Loïc a forcément faux car une probabilité est un nombre entre 0 et 1. Il a pris les deux effectifs de l'énoncé et en a calculé un quotient sans faire attention à la signification de ces valeurs.

$$\begin{aligned} P(\text{« Le bonbon est à la fraise »}) &= \frac{\text{nombre de bonbons à la fraise}}{\text{nombre total de bonbons}} \\ &= \frac{25}{25+10} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ».

Dans ce chapitre, on poursuit le travail entamé dans les chapitres 28 et 29 en calculant des probabilités d'issues, d'évènements, d'un évènement contraire et de la réunion d'évènements incompatibles. On se place dans des situations simples issues la plupart du temps de la vie courante (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.) qui suscitent le débat au sein de la classe. On continue d'éviter tout excès de formalisme en privilégiant le sens.

- De nombreux problèmes permettent de calculer des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie et de régularité qui fondent le modèle équiprobable.

On consolide également l'approche fréquentiste des probabilités qui permet, par exemple, de calculer une probabilité inconnue.

Il est important de faire constater de nouveau ce phénomène de stabilisation des fréquences à partir d'expériences faites par les élèves, ou au travers de simulations.

Pour finir, on modélise et on calcule des probabilités dans le cadre d'expériences à deux épreuves à l'aide, en particulier, d'arbres pondérés.

- Cette partie du programme peut être traitée à n'importe quel moment dans l'année car elle ne requiert pas de connaissances nouvelles de la classe de 3^e et son contenu n'est pas nécessaire au traitement des autres chapitres. On peut néanmoins consolider le travail sur les nombres et leurs différentes formes à l'occasion du calcul sur les probabilités.
On peut également aborder ces notions régulièrement pour n'en faire un bilan qu'à la fin de l'année.

Activités

Questions flash

1. $P(\text{as}) = \frac{4}{32}$ et $P(\text{rouge}) = \frac{16}{32}$ donc on a plus de chances de tirer une carte rouge.

On peut aussi simplement dire qu'il y a plus de cartes rouges que d'as.

$$2. P(\text{verte}) = \frac{\text{Nombre de boules vertes}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$$

3. a. $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ (car les évènements sont incompatibles)
Donc $P(A \text{ ou } B) = 0,3 + 0,5 = 0,8$.

b. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

4. a. $P(E) = \frac{180}{600}$

b. \bar{F} : « Ce n'est pas une fille » donc \bar{F} : « C'est un garçon ».

D'où $P(\bar{F}) = \frac{330}{600}$

c. Probabilité que ce soit une fille demi-pensionnaire : $\frac{195}{600}$.

En deux roues...

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion d'arbre de probabilités et ses règles d'utilisation.

Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer la probabilité d'un évènement, calculer une fraction d'une quantité.

La capacité introduite est de construire et utiliser un arbre de probabilité.

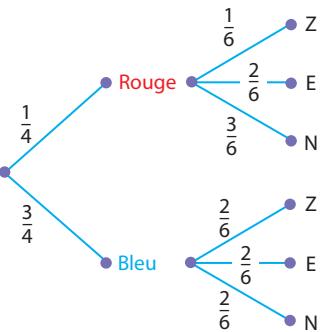
1. a. Les issues de cette expérience aléatoire sont : bleu et Z ; bleu et E, bleu et N, rouge et Z ; rouge et E, rouge et N.
b. Ces issues peuvent sembler équiprobables.

Il ne s'agit ici que d'une conjecture. Chaque élève peut avoir son idée sur la question même si celle-ci n'est pas correcte.

Activité 1

2. a. Cela signifie que, si on fait tourner la roue bleue, on a deux chances sur six d'obtenir la lettre N.

b.



Il est assez naturel, pour des élèves ayant déjà calculé des probabilités, de comprendre intuitivement comment compléter cet arbre.

- c. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- 3. a. En vertu de la stabilisation de la fréquence, 240 000 étant un nombre relativement grand, approximativement $\frac{3}{4}$ des expériences donneront Bleu. Donc le nombre d'expériences donnant Bleu à la 1^{re} épreuve est $\frac{3}{4} \times 240\ 000 = 180\ 000$.
- b. De la même manière, approximativement, parmi les expériences donnant Bleu à la 1^{re} épreuve, le nombre d'expériences donnant N à la 2^{de} épreuve est $\frac{2}{6} \times 180\ 000 = 60\ 000$.
- c. La proportion de ces expériences donnant (Bleu ; N) comme issue est alors :

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{4} \quad (\text{ou } \frac{60\ 000}{240\ 000} = \frac{1}{4}).$$

d. La probabilité d'obtenir l'issue (Bleu ; N) vaut donc $\frac{1}{4}$.

e. La probabilité d'obtenir l'issue (Rouge ; Z) vaut donc :

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

Il s'agit ici d'expliquer aux élèves, à partir d'un exemple concret, pourquoi la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin. On peut alors formaliser les règles de calcul sur les arbres découvertes par les élèves lors de cette activité.

On peut enfin faire remarquer que, finalement, les issues ne sont pas équiprobables et revenir sur la conjecture de la question 1. b. afin de la valider ou de l'invalider, ceci afin de développer l'esprit critique.

Exercices

Modéliser une expérience aléatoire

Questions flash

1. $P(17) = \frac{1}{15}$

2. $P(\text{vert}) = 1 - 0,55 - 0,07 = 0,38$

3. 1. Les issues de cette expérience sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20.

2. Toutes ces issues sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{20}$.

4. 1. La fréquence d'apparition du secteur bleu vaut $\frac{87}{200} = 0,435$.

2. Chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu, soit $\frac{1}{5}$, la probabilité d'obtenir un secteur bleu vaut :

$$\frac{2}{5} = 0,4.$$

0,435 est proche de ce résultat car, sur un grand nombre de lancers, la fréquence d'apparition d'un évènement se stabilise vers la probabilité de cet évènement.

5. Les issues possibles sont « Pile » et « Face ».

Si on note f la probabilité d'obtenir « Face », alors la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $2f$.

Or la somme des probabilités des issues vaut 1 donc $f + 2f = 1$, ce qui donne $3f = 1$ soit $f = \frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir « Face » vaut donc $\frac{1}{3}$ et celle d'obtenir

« Pile », $\frac{2}{3}$.

Déterminer la probabilité d'un évènement

Questions flash

6. Il y a 3 issues réalisant l'évènement « Obtenir un nombre plus grand que 3 » : 4, 5 et 6.

$$\text{Donc } P(\text{Nombre plus grand que } 3) = \frac{3}{6}.$$

Il y a 2 issues réalisant l'évènement « Obtenir un multiple de 3 » : 3 et 6.

$$P(\text{multiple de } 3) = \frac{2}{6}$$

Donc on a plus de chances d'obtenir un nombre plus grand que 3.

7. Entre 1 et 20, les nombres divisibles par 7 sont 7 et 14. Les issues étant toutes équiprobables, on a $P(\text{Nombre divisible par } 7) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$.

8. S'il y a 15 boules dont 10 rouges, alors 5 ne sont pas rouges. Les issues étant toutes équiprobables, on a :

$$P(\text{boule pas rouge}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire.

Les issues étant toutes équiprobables, on a :

$$P(\text{boule rouge}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{D'où : } P(\text{boule pas rouge}) = 1 - P(\text{boule rouge}) \\ = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

9. 1. Julien a calculé $P(1) + P(3) + P(5)$ (certaines parenthèses sont inutiles).

La question peut donc être « Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ? »

$$P(\text{nombre impair}) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{6}{12} \\ = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sexe Origine	Hommes	Femmes	Total
Gironde	29	78	107
Lot-et-Garonne	17	34	51
Total	46	112	158

1. $P(A) = \frac{46}{158}$

(se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux, sinon il faut calculer : $\frac{29 + 17}{158}$).

2. \bar{A} : « La personne choisie n'est pas un homme » ou « La personne choisie est une femme ».

$P(\bar{A}) = \frac{112}{158}$

(se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux ou se calcule en utilisant le 1. : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$).

3. $P(B) = \frac{51}{158}$

(se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux, sinon il faut calculer : $\frac{17 + 34}{158}$).

4. A et B ne sont pas incompatibles car on peut choisir un homme originaire du Lot-et-Garonne (il y en a 17), ce qui réalise les deux événements simultanément.

11. 1. La moitié des cartes sont rouges et chaque carte a la même probabilité d'être obtenue que les autres donc :

$$P(\text{Carte rouge}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0,5$$

On peut répondre directement 0,5 ; 50 % ou $\frac{1}{2}$ en utilisant le fait que la moitié des cartes sont rouges.

2. Il y a un valet dans chaque catégorie soit 4 valets en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que

$$\text{les autres : } P(\text{Valet}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Il y a deux valets rouges (coeur et carreau) en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les autres : $P(\text{Valet rouge}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

12. • Sac A : $P(\text{Jetons jaunes}) = \frac{28}{28 + 22} = \frac{28}{50} = 0,56$

Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser.

Par exemple : une probabilité est un nombre entre 0 et 1 donc soit 0,44 ou 0,56. Or il y a plus de boules jaunes donc c'est 0,56.

- Sac B : si n est le nombre de jetons non jaunes, on a $P(\text{Jetons jaunes}) = \frac{40}{40 + n}$ et on sait que $P(\text{Jetons jaunes}) = \frac{2}{5}$.

$$\text{D'où } \frac{40}{40 + n} = \frac{2}{5} \text{ soit } 40 \times 5 = 2(40 + n) \text{ ou encore } 200 = 80 + 2n$$

$$\text{d'où } n = \frac{120}{2} = 60.$$

Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser.

Par exemple : $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$ donc il y a 100 boules, donc 60 non jaunes.

On peut également tester les réponses proposées sachant que le nombre de boules non jaunes ne peut être qu'un nombre entier soit 60 ou 27.

- Sac C : si n est le nombre de jetons jaunes, on a $P(\text{Jetons jaunes}) = \frac{n}{n + 36}$ et on sait que $P(\text{Jetons jaunes}) = \frac{3}{7}$.

D'où $\frac{n}{n + 36} = \frac{3}{7}$ soit $7n = 3(n + 36)$ ou encore $7n = 3n + 108$
d'où $4n = 108$ et par suite $n = \frac{108}{4} = 27$.

Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser.

On peut, par exemple, tester les réponses proposées sachant que le nombre de boules jaunes ne peut être qu'un nombre entier, soit 60 ou 27, ou procéder par élimination si on a trouvé la réponse pour le sac B.

• Sac D : $P(\text{Jeton jaune}) = \frac{22}{22 + 28} = \frac{22}{50} = 0,44$

Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser.

Par exemple : une probabilité est un nombre entre 0 et 1 donc soit 0,44 ou 0,56 ; or, il y a moins de boules jaunes, donc c'est 0,44. Ou on peut procéder par élimination si on a trouvé la réponse pour le sac A.

	Nombre de jetons jaunes	Nombre de jetons non jaunes	Probabilité d'obtenir un jeton jaune
Sac A	28	22	0,56
Sac B	40	60	$\frac{2}{5}$
Sac C	27	36	$\frac{3}{7}$
Sac D	22	28	0,44

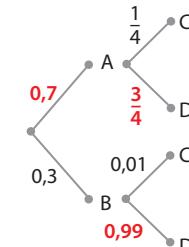
13. 1. 3 jetons portent la lettre A. Chaque jeton ayant la même probabilité d'être tiré : $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
2. 4 jetons sont ronds. Chaque jeton ayant la même probabilité d'être tiré : $P(\text{Jetons ronds}) = \frac{4}{9}$.
3. 2 jetons sont carrés et portent la lettre B. Chaque jeton ayant la même probabilité d'être tiré :

$$P(\text{Jetons carrés avec lettre B}) = \frac{2}{9}.$$

Construire et utiliser un arbre de probabilités

Questions flash

14. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 donc :



15. 1. La probabilité que la personne choisie soit vaccinée vaut 0,4 (cette probabilité se lit directement sur l'arbre).

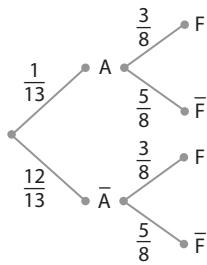
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin, donc la probabilité que la personne choisie soit à la fois saine et vaccinée vaut $0,4 \times 0,8 = 0,32$.

16. Il y a un as dans chaque catégorie soit 4 as en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les autres :

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ et } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{12}{13}.$$

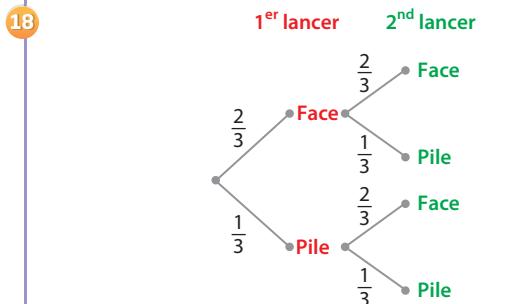
Quoiqu'on ait tiré à la 1^{re} épreuve, cela n'influe pas sur la 2^{de} épreuve. Dans tous les cas, il y a 3 figures dans chaque catégorie soit 12 figures en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les autres :

$$P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \text{ et } P(\bar{F}) = 1 - P(F) = \frac{5}{8}.$$



17. 1. Réponse b. (la réponse se lit directement sur l'arbre).

$$2. P(A \text{ et } B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \text{ Donc réponse c.}$$



$$\text{La probabilité d'obtenir deux « Pile » vaut donc } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Problèmes

19. Salaires

Probabilité que l'employé gagne entre 1 000 et 2 000 € :

$$\frac{73}{12 + 73 + 32 + 21 + 1} = \frac{73}{139} \approx 0,53 > 0,5.$$

On a donc plus d'une chance sur deux que cet employé gagne entre 1 000 et 2 000 €.

20. Voyage scolaire

Les événements A « L'élève est parti en voyage scolaire à l'étranger » et B « L'élève est parti en voyage scolaire en France » sont incompatibles car chaque élève ne peut partir en voyage scolaire qu'une seule fois au cours de sa scolarité. Donc $P(\text{L'élève est parti en voyage scolaire})$

$$= P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

D'où $P(\text{L'élève n'est pas parti en voyage scolaire})$

$$= 1 - P(A \text{ ou } B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

21. Infections nosocomiales

Soit A l'événement « Le patient a 65 ans ou plus ».

$$\text{Alors } P(A) = 67,24\% = 0,6724$$

Donc la probabilité que le patient infecté ait moins de 65 ans vaut : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$\begin{aligned} &= 1 - 0,6724 \\ &= 0,3276 \text{ ou } 32,76\% \end{aligned}$$

On peut également faire la somme des probabilités des événements « Le patient a entre 0 et 1 an », « Le patient a entre 1 et 15 ans » et « Le patient a entre 15 et 65 ans ».

22. Harry Potter

$$P(R) = \frac{\text{nombre de R}}{\text{nombre de cartons}} = \frac{3}{11}$$

23. Faites tourner !

Deux secteurs sont gagnants : le bleu et le vert. La probabilité d'obtention de chaque secteur est proportionnelle à l'angle du secteur correspondant, donc :

$$P(\text{Gagner}) = \frac{30 + 120}{360} = \frac{150}{360} = \frac{5}{12}$$

24. Sur terre ou sur mer

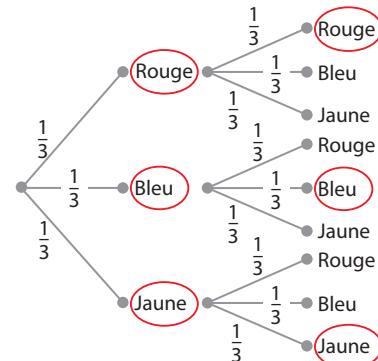
La probabilité de planter l'épingle dans une zone donnée est proportionnelle à sa surface. Ainsi, la probabilité de planter l'épingle dans un océan vaut 71 %.

25. Au feu !

$$P(\text{S'arrêter}) = 1 - P(\text{Le feu est au vert}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

On pourrait également calculer la probabilité que le feu soit orange en utilisant le fait que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1, puis additionner les probabilités des issues « rouge » et « orange ».

26. À table



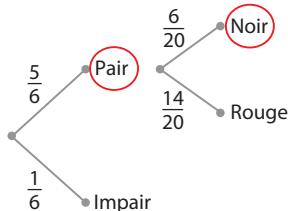
D'après l'arbre précédent, la probabilité d'avoir deux bavoirs de la même couleur vaut : $3 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$.

27. The spinner

1. The probability of the spinner landing on red or blue is 0.7.
The probability of the spinner landing on red is 0.2.
So the probability of the spinner landing on blue is $0.7 - 0.2 = 0.5$.

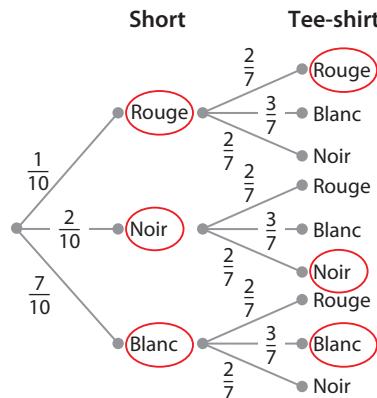
2. The probability of the spinner landing on white is $1 - 0.7 = 0.3$.

28. C'est la foire !



D'après l'arbre précédent, la probabilité que Suzy gagne un prix vaut : $\frac{5}{6} \times \frac{6}{20} = \frac{1}{4}$. Donc : réponse b. (peu probable).

29. Au soleil



D'après l'arbre précédent, la probabilité que Yoann s'habille avec une tenue d'une seule couleur vaut :

$$\frac{1}{10} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{27}{70}.$$

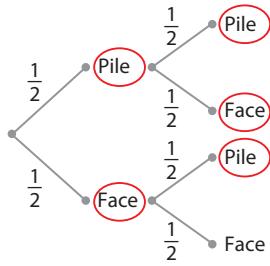
30 Jetons-les !

1. $P(\text{rouge ou bleu}) = P(\text{rouge}) + P(\text{bleu}) = 20\% + 10\% = 30\%$
2. $P(\text{pas vert}) = P(\text{rouge ou bleu ou jaune ou noir}) = P(\text{rouge ou bleu}) + P(\text{jaune ou noir}) = 30\% + 40\% = 70\%$

On peut aussi calculer la probabilité de l'événement contraire $P(\text{vert})$ en calculant d'abord $P(\text{noir})$ à l'aide de $P(\text{jaune})$ et de $P(\text{jaune ou noir})$.

3. $P(\text{vert}) = 1 - P(\text{pas vert}) = 1 - 70\% = 30\%$
 $P(\text{vert ou bleu}) = P(\text{vert}) + P(\text{bleu}) = 30\% + 10\% = 40\%$

31 Pile ou face ?

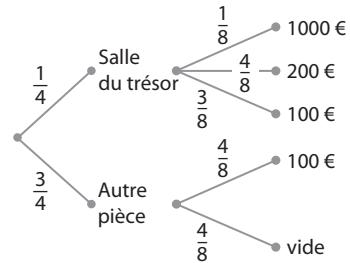


D'après l'arbre précédent, la probabilité d'avoir un « PILE » en deux lancers vaut : $3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

On peut aussi calculer la probabilité de l'événement contraire : obtenir deux « FACE ».

32 À la télé

On peut résumer les données à l'aide d'un arbre :



1. La probabilité que le candidat accède à la salle du trésor est de $\frac{1}{4}$.

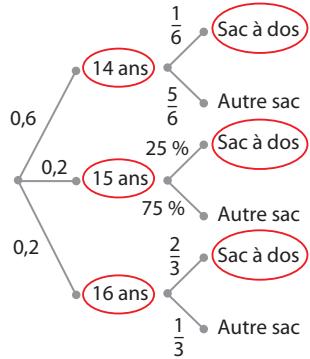
2. Dans la salle du trésor, la probabilité que le candidat gagne au moins 200 € vaut : $\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

(ou $1 - \frac{3}{8}$ en utilisant l'événement contraire).

3. Dans l'autre pièce, la probabilité que le candidat ne gagne rien vaut : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

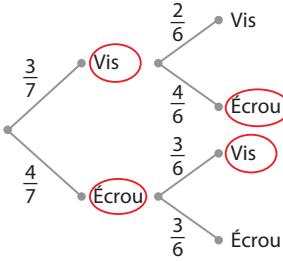
33 Rentrée scolaire

1.



2. D'après l'arbre précédent, la probabilité que l'élève ait un sac à dos vaut : $0,6 \times \frac{1}{6} + 0,2 \times 0,25 + 0,2 \times \frac{2}{3} = \frac{17}{60}$.

34 Jeu de construction



D'après l'arbre précédent, la probabilité que Martin obtienne ce dont il a besoin vaut : $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{4}{7}$.

35 Carrément ciblé !

1. Les probabilités sont proportionnelles aux surfaces de chaque zone.

Aire du petit carré : $\mathcal{A}_{\text{petit carré}} = 1^2 = 1$

Aire du carré moyen : $\mathcal{A}_{\text{carré moyen}} = 2^2 = 4$

Aire du grand carré : $\mathcal{A}_{\text{grand carré}} = 3^2 = 9$

Donc : $\mathcal{A}_{\text{zone 10 points}} = \mathcal{A}_{\text{petit carré}} = 1$

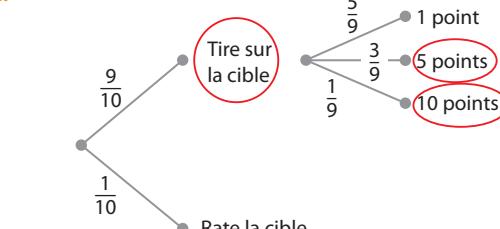
$\mathcal{A}_{\text{zone 5 points}} = \mathcal{A}_{\text{carré moyen}} - \mathcal{A}_{\text{petit carré}} = 4 - 1 = 3$

$\mathcal{A}_{\text{zone 1 point}} = \mathcal{A}_{\text{grand carré}} - \mathcal{A}_{\text{carré moyen}} = 9 - 4 = 5$

On a donc :

Nombre de points gagnés	1	5	10
Probabilité	$\frac{\mathcal{A}_{\text{zone 1 point}}}{\mathcal{A}_{\text{grand carré}}} = \frac{5}{9}$	$\frac{\mathcal{A}_{\text{zone 5 points}}}{\mathcal{A}_{\text{grand carré}}} = \frac{3}{9}$	$\frac{\mathcal{A}_{\text{zone 10 points}}}{\mathcal{A}_{\text{grand carré}}} = \frac{1}{9}$

2.



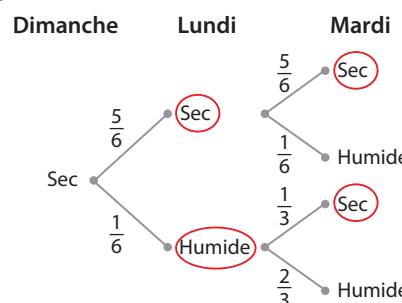
D'après l'arbre précédent, la probabilité que le tireur gagne 5 points ou plus vaut :

$$\frac{9}{10} \times \left(\frac{3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{5} \text{ ou } 40\% \text{ de chances.}$$

36 Truqué ou non

On peut lancer ce dé un grand nombre de fois et compter le nombre d'apparitions de chaque face. Si la fréquence d'apparition de chaque face ne se stabilise pas autour de $\frac{1}{6} \approx 0,167$, alors le dé n'est pas équilibré.

37 Un temps de chien !



D'après l'arbre précédent, la probabilité qu'il fasse sec mardi vaut :

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \text{ ou } 75\% \text{ de chances.}$$

38

Gommettes

Couleur des gommettes selon les tirages :

dé 1 dé 2	1	2	3	4	5	6
1	bleu	vert	bleu	vert	bleu	vert
2	vert	jaune	vert	jaune	vert	jaune
3	bleu	vert	bleu	vert	bleu	vert
4	vert	jaune	vert	jaune	vert	jaune
5	bleu	vert	bleu	vert	bleu	vert
6	vert	jaune	vert	jaune	vert	jaune

- La probabilité de prendre une gommette bleue vaut :

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

- La probabilité de prendre une gommette jaune vaut :

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

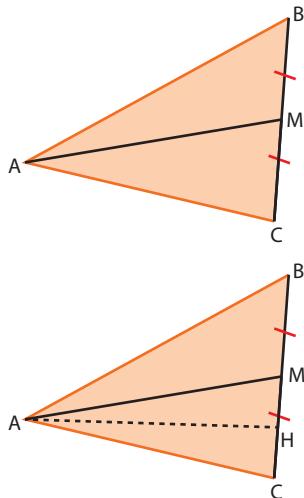
- La probabilité de prendre une gommette verte vaut :

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Comme les fréquences d'apparition de chaque couleur se stabilisent vers la probabilité correspondante au bout d'un grand nombre de tirages, les proportions de gommettes bleues et de gommettes jaunes devraient se rapprocher de $\frac{1}{4}$ et celle de gommettes vertes de $\frac{1}{2}$.

39

Sauts de puce



Les probabilités que la puce retombe dans une partie du plan étant proportionnelles à l'aire de chacune de ces surfaces, on va s'intéresser à l'aire du triangle AMB.

Si on considère le point H, pied de la perpendiculaire à (BC) passant par A, alors (AH) est la hauteur issue de A du triangle AMC mais également celle du triangle AMB.

$$\text{Ainsi } \text{Aire(AMB)} = \frac{MB \times AH}{2} \text{ et } \text{Aire(AMC)} = \frac{MC \times AH}{2}.$$

Comme $MB = MC$, les triangles AMB et AMC ont la même aire. Ainsi la probabilité que la puce retombe dans le triangle AMB vaut $\frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50 %.

40

Nombres aléatoires

Il faut lister les nombres considérés et compter ceux qui contiennent le chiffre 1 ou le chiffre 4.

A	B	C	D	E
Y a-t-il un 1 ?	Y a-t-il un 4 ?	Y a-t-il un 1 ou un 4 ?	Nombre de nombres contenant un 1 ou un 4	
1	OUI	NON	OUI	37
2	NON	NON	NON	
3	NON	NON	NON	
4	NON	NON	NON	
5	NON	OUI	OUI	
6	NON	NON	NON	
7	NON	NON	NON	
8	NON	NON	NON	
9	NON	NON	NON	
10	NON	NON	NON	
11	OUI	NON	OUI	
12	OUI	NON	OUI	
13	OUI	NON	OUI	
14	OUI	OUI	OUI	
15	OUI	NON	OUI	
16	OUI	NON	OUI	
17	OUI	NON	OUI	
18	OUI	NON	OUI	
19	OUI	NON	OUI	
20	OUI	NON	OUI	
21	NON	NON	NON	
22	NON	NON	OUI	
23	NON	NON	NON	
24	NON	NON	NON	
25	NON	OUI	OUI	
26	NON	NON	NON	
27	NON	NON	NON	
28	NON	NON	NON	
29	NON	NON	NON	
30	NON	NON	NON	
31	NON	NON	NON	
32	OUI	NON	OUI	
33	NON	NON	NON	
34	NON	NON	NON	
35	NON	OUI	OUI	
36	NON	NON	NON	
37	NON	NON	NON	
38	NON	NON	NON	
39	NON	NON	NON	
40	NON	NON	OUI	

Donc $P(\text{Le nombre contient un 1 ou un 4}) = \frac{37}{100} = 0,37$ ou 37 %.

Stratégie de jeu

Avec deux dés, on liste les résultats possibles et on compte ceux dont la somme est supérieure ou égale à 10 :

dé 1 dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Donc $P(\text{Gagner 1 point}) = \frac{5}{36}.$

Avec un dé, on liste les résultats possibles et on compte ceux dont la somme est supérieure ou égale à 10 :

Dé	1	2	3	4	5	6
Points	6	7	8	9	10	11

Donc $P(\text{Gagner 1 point}) = \frac{2}{6} = \frac{12}{36}.$

Il vaut donc mieux que Leïla choisisse de jouer avec un seul dé.

On peut également penser à écrire un script simulant des parties de ce jeu et observer les fréquences de parties gagnantes pour chacun des joueurs, pour un grand nombre de parties.

Roulette

- Comme on double la mise à chaque fois, si le rouge sort, on gagnera plus que ce qu'on a perdu. De plus, si la roulette n'est pas truquée, la fréquence d'apparition du rouge devant se stabiliser vers $\frac{18}{37}$, on peut penser que le rouge finira bien par sortir...
- Si le rouge sort au 1^{er} coup : il a misé 1 € et gagné 2 € donc il a gagné 1 €.

- Si le rouge sort au 5^e coup :

1^{er} coup : il perd 1 € ; 2^e coup : il perd 2 € ;

3^e coup : il perd 4 € ; 4^e coup : il perd 8 € ;

5^e coup : il a misé 16 € et a gagné 32 €.

Donc, en tout, il a perdu : $1€ + 2€ + 4€ + 8€ + 16€ = 31€$.

Ainsi, il a gagné 1 €.

- Si le rouge sort au 10^e coup :

1^{er} coup : il perd 1 € ;

2^e coup : il perd 2 € ;

3^e coup : il perd 4 € ;

4^e coup : il perd 8 € ;

5^e coup : il perd 16 € ;

6^e coup : il perd 32 € ;

7^e coup : il perd 64 € ;

8^e coup : il perd 128 € ;

9^e coup : il perd 256 € ;

10^e coup : il a misé 512 € et a gagné 1 024 €.

Donc, en tout, il a perdu :

$$1€ + 2€ + 4€ + 8€ + 16€ + 32€ + 64€ + \\ 128€ + 256€ + 512€ = 1\ 023€.$$

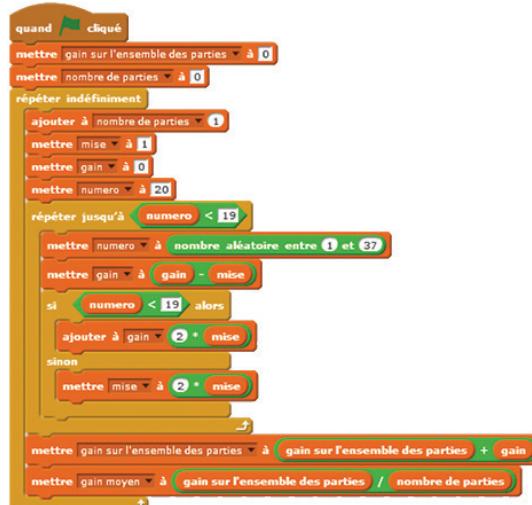
Ainsi, il a gagné 1 €.

On comprend que quel que soit le rang de sortie du premier rouge, on ne gagnera qu'un euro. On a donc de grandes chances de gagner peu contre une petite chance de perdre beaucoup !

3. a. Ce script simule plein de parties, calcule le gain à chaque tirage, puis le gain de chaque partie, les gains cumulés au fil des parties ainsi que le gain moyen par partie avec une limitation de mise à 100 €.

b. On voit qu'avec la limitation de mise, le gain moyen par partie est d'environ -0,20 €, donc le casino est gagnant en moyenne.

En modifiant le script (on enlève la condition de limitation de mise à 100 €) :



On obtient un gain moyen par partie de 1 €, le casino serait donc perdant.

Néanmoins, cette méthode n'est pas très réaliste car il faut accepter un risque (faible) de perdre beaucoup pour être quasiment certain de gagner 1 € ! On pourrait miser plus dès le départ mais l'éventuelle perte serait plus importante.

43 Trois couleurs

1. a. La couleur la plus présente dans le sac est le jaune (sa fréquence d'apparition est clairement plus élevée que celle des autres couleurs).

b. La fréquence d'apparition d'un jeton vert semble se stabiliser autour de 0,25. La probabilité d'obtenir un jeton vert vaut donc environ 0,25.

c. La formule saisie dans la cellule C2 avant de la recopier vers le bas est : =B2/A2.

La probabilité de tirer un jeton rouge est de $\frac{1}{5}$.

Il y a équiprobabilité (chaque jeton a la même probabilité d'être tiré), d'où :

$$\frac{\text{Nombre de jetons rouges}}{\text{Nombre total de jetons}} = \frac{1}{5} = \frac{4}{20}.$$

Comme il y a 20 jetons au total, il y a 4 jetons rouges dans le sac.

44 Dés tétraédriques

1. La fréquence d'apparition de la somme 3 est 15 % (lecture graphique).

2. La fréquence d'apparition de la somme 1 est 0 % (lecture graphique) ; en effet, il est impossible d'obtenir 1, la plus petite somme possible étant 2 (1 sur chaque dé).

3. a. Il y a deux cas menant à une somme de 3 :

- dé 1 : 1 et dé 2 : 2
- dé 1 : 2 et dé 2 : 1

b. Il y a $4 \times 4 = 16$ tirages différents dont deux donnent 3 comme somme. Donc la probabilité d'obtenir la somme 3 vaut : $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.

Ce résultat est différent du résultat à la question 1, car la fréquence fluctue autour de la valeur de la probabilité. C'est une valeur approchée de cette probabilité.

45 Pour passer le temps

1. Comme le dé est équilibré, la probabilité d'obtenir un « 1 » est la même que celle d'obtenir un « 5 » et vaut $\frac{1}{6}$ car chaque numéro a autant de chances d'être tiré qu'un autre.

2. Pour une issue rouge, il y a 6 issues jaunes. Comme il y a 6 issues rouges, le nombre d'issues possibles quand Jules lance ses deux dés est de $6 \times 6 = 36$.

3. Possibilités du 3^e lancer de Paul :

Dé jaune \ Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	1 000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

Il ne reste plus à Paul qu'à obtenir au moins 350 points pour gagner la partie, soit à obtenir 400, 500, 600 ou 1 000 points, c'est-à-dire une paire de 4, de 5, de 6 ou de 1. La probabilité

qu'il gagne vaut donc : $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

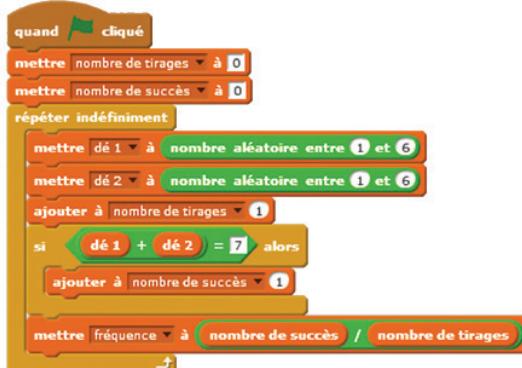
46 Somme de dés

1. Les issues de cette expérience aléatoire sont tous les nombres entiers entre 2 et 12 (compris).

2. a. Les variables intervenant dans ce script sont :

- « nombre de tirages », qui représente le nombre de fois où on lance le dé ;
- « dé1 », qui représente le résultat d'un tirage du 1^{er} dé ;
- « dé2 », qui représente le résultat d'un tirage du 2^d dé ;
- « nombre de succès » (ce qu'elle représente dépend de ce qu'on met dans la condition) ;
- « fréquence » (ce qu'elle représente dépend de ce qu'on met dans la condition).

b.



c. La fréquence de 7 doit se stabiliser vers un nombre qui est la probabilité d'obtenir un 7 lorsqu'on lance deux dés équilibrés. Cette probabilité vaut environ 0,166.

3.

Chacun obtiendra des résultats différents car chaque simulation aura des fréquences différentes. Néanmoins, on doit obtenir des valeurs proches de celles dans le tableau suivant.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,166	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

4. a. On a, par exemple, moins de chances d'obtenir 12 comme somme que 7. C'est plus rare (il faut avoir deux 6 alors que pour 7, on peut avoir 1 et 6 ou 3 et 4...).

b. On peut, par exemple, regrouper toutes les possibilités pour la somme de deux dés dans un tableau à double entrée :

dé 1 \ dé 2		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	

4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\text{Donc } P(2) = \frac{1}{36} ; P(3) = \frac{2}{36} ; P(4) = \frac{3}{36} ; P(5) = \frac{4}{36} ; \\ P(6) = \frac{5}{36} ; P(7) = \frac{6}{36} ; P(8) = \frac{5}{36} ; P(9) = \frac{4}{36} ; P(10) = \frac{3}{36} ; \\ P(11) = \frac{2}{36} ; P(12) = \frac{1}{36}$$

47 Des dés tétraédriques

1. Voir manuel numérique.

2. Voir manuel numérique.

3. Voir fichier tableau :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme				
2	1	1	4	6				
3	2	3	1	6				
4	4	4	1	9				
5	3	4	1	8				
6	2	2	3	7				
7	1	3	3	7				
8	2	2	1	5				
9	3	3	4	10				
10	4	2	1	7				
11	4	1	1	6				
12	4	2	2	8				

fréquence de 7 0,184

La fréquence se stabilise vers la probabilité d'obtenir un 7 vaut environ 0,18.

4. Voir fichier tableau :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme					
2	4	3	2	9				fréquence de 3 0,013	
3	2	1	4	7				fréquence de 4 0,051	
4	3	2	3	8				fréquence de 5 0,098	
5	1	1	1	3				fréquence de 6 0,163	
6	4	1	2	7				fréquence de 7 0,171	
7	4	1	1	6				fréquence de 8 0,191	
8	1	2	2	5				fréquence de 9 0,159	
9	1	2	3	6				fréquence de 10 0,1	
10	4	4	2	10				fréquence de 11 0,039	
11	2	2	1	5				fréquence de 12 0,015	
12	3	2	4	9					

D'après les résultats précédents, il vaut mieux parier sur le 8.

48 Distance entre deux nombres

1. La conjecture peut être qu'on a une chance sur deux d'obtenir une distance plus petite que 0,5 (ou autre conjecture).

2. Voir manuel numérique, fichier 10-p181-ex34-prof-excel.

3. Dans les cellules B2 et C2 : « =ALEA() ».

4. Dans la cellule D2 : « =MAX(B2:C2)-MIN(B2:C2) ».

5. Cette formule renvoie « OUI » si la distance entre les deux nombres est strictement inférieure à 0,5 et « NON » sinon.

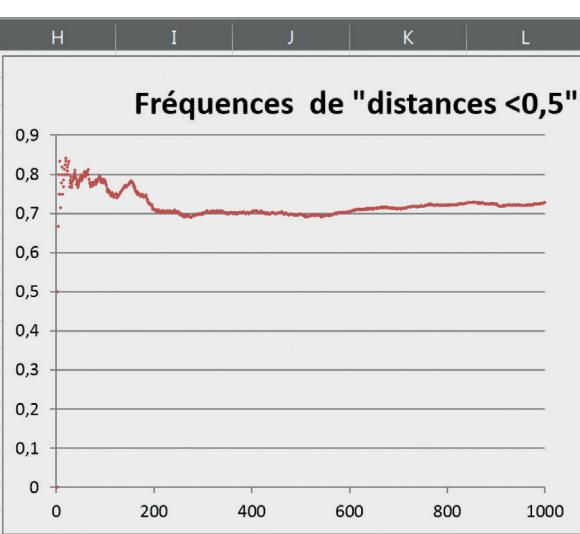
6. On simule cette expérience un grand nombre de fois et on regarde vers quelle valeur se stabilise la fréquence d'apparition de distances inférieures à 0,5.

Voir fichier tableau en bas de page.

La probabilité d'obtenir une distance inférieure à 0,5 est d'environ 0,75.

Penser à invalider ou valider la conjecture faite au début.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n° simulation	1er nombre	2nd nombre	Distance	< 0,5 ?	Fréquence	
2	1	0,35410511	0,96594058	0,611835	NON	0	
3	2	0,80393964	0,76953236	0,034407	OUI	0,5	
4	3	0,02913105	0,09666538	0,067534	OUI	0,66666667	
5	4	0,52793616	0,78234899	0,254413	OUI	0,75	
6	5	0,8512184	0,5127952	0,338423	OUI	0,8	
7	6	0,80507036	0,78497259	0,020098	OUI	0,83333333	
8	7	0,25646926	0,83709584	0,580627	NON	0,7142857	
9	8	0,01192463	0,03233264	0,020408	OUI	0,75	
10	9	0,36820842	0,38003736	0,011829	OUI	0,77777778	
11	10	0,05832501	0,53508843	0,476763	OUI	0,8	
12	11	0,854669384	0,75201164	0,102682	OUI	0,8181818	
13	12	0,00064726	0,67258232	0,671935	NON	0,75	
14	13	0,47363862	0,54587913	0,072241	OUI	0,7692308	
15	14	0,60466762	0,79184574	0,187178	OUI	0,7857143	
16	15	0,57447825	0,77895052	0,204472	OUI	0,8	
17	16	0,18447342	0,12830326	0,05617	OUI	0,8125	
18	17	0,9711919	0,89551716	0,075675	OUI	0,8235294	



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Appelons C l'événement « L'osselet retombe sur une face dont le nom commence par la lettre C », c'est-à-dire « L'osselet retombe sur chèvre ou sur chameau ou sur cheval ».

$$P(C) = P(\text{Chèvre}) + P(\text{Chameau}) + P(\text{Cheval}) \approx 33\% + 17\% + 17\% \approx 67\%$$

La probabilité que l'osselet retombe sur une face commençant par la lettre C vaut 67 % ou 0,67.

On peut également calculer la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 1

Les positions « chèvre » et « mouton » sont équiprobables et $P(\text{Chèvre ou mouton}) = \frac{2}{3}$.

Or $P(\text{Chèvre ou mouton}) = P(\text{Chèvre}) + P(\text{Mouton})$. Donc chacune de ces deux positions a une probabilité de $\frac{1}{3}$.

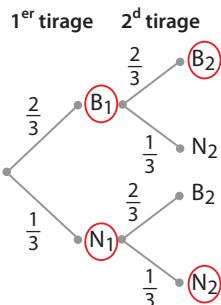
Appelons C l'événement « L'osselet retombe sur une face dont le nom commence par la lettre C ».

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\text{Mouton}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La probabilité que l'osselet retombe sur une face commençant par la lettre C vaut $\frac{2}{3}$.

Exercice 2

1.



$$2. P(2 \text{ boules noires}) = P(N_1 \text{ et } N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

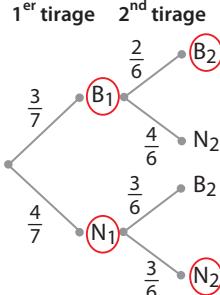
$$3. P(2 \text{ boules blanches}) = P(B_1 \text{ et } B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Les événements « Obtenir 2 boules noires » et « Obtenir 2 boules blanches » sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} & P(2 \text{ boules de la même couleur}) \\ &= P(2 \text{ boules noires ou 2 boules blanches}) \\ &= P(2 \text{ boules noires}) + P(2 \text{ boules blanches}) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Exercice 2

1.



$$2. P(2 \text{ boules de la même couleur}) = P(B_1 \text{ et } B_2) + P(N_1 \text{ et } N_2)$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{7}$$

$$3. P(2 \text{ boules couleurs différentes}) = 1 - P(2 \text{ boules de la même couleur}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Écriture d'un énoncé

1. Par exemple : On place dans une urne 25 boules dont 7 sont rouges, 5 sont bleues, 2 sont noires, 8 sont blanches et les autres sont jaunes ; on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ?

$$2. P(\text{Jaune}) = 1 - P(\text{Rouge}) - P(\text{Bleue}) - P(\text{Noire}) - P(\text{Blanche})$$

$$= 1 - \frac{7}{25} - \frac{5}{25} - \frac{2}{25} - \frac{8}{25} = \frac{3}{25}$$

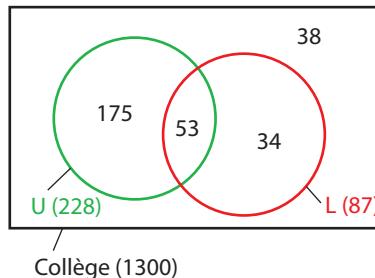
Analyse d'une production

Jorick s'est effectivement trompé dans son calcul car les deux événements qu'il considère, L et U (qu'il n'a pas bien défini), ne sont pas incompatibles (des élèves font à la fois du latin et du sport à l'UNSS). Il s'est rendu compte de son erreur car une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, ce qui n'est pas le cas de son résultat.

Comme 228 élèves font du sport à l'UNSS et que 53 font à la fois du sport à l'UNSS et du latin, alors le nombre d'élèves ne faisant que du sport à l'UNSS est de $228 - 53 = 175$.

Comme 87 élèves font du latin et que 53 font à la fois du sport à l'UNSS et du latin, alors le nombre d'élèves ne faisant que du latin est de $87 - 53 = 34$.

On peut résumer ces résultats sous forme d'un schéma :



La probabilité que l'élève choisi fasse du latin ou du sport à l'UNSS vaut donc :

$$\frac{175 + 53 + 34}{300} = \frac{262}{300} = \frac{131}{150}.$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Il permet d'aborder les points suivants du programme :

- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ;
- comprendre l'effet d'une translation, d'une **symétrie (axiale et centrale)**, d'une rotation, d'une homothétie sur une figure ;
- construire des frises, des pavages, des rosaces ;
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, **symétrie**, rotation, homothétie.

Repère de progressivité

La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4.

Lien avec les domaines du socle

- La construction de figures géométriques codées pour modéliser une situation concrète, la découverte et l'utilisation des propriétés de la symétrie centrale contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).
- Observer une figure, formuler des hypothèses puis utiliser les propriétés de la symétrie centrale pour démontrer amènent l'élève à rentrer dans une démarche scientifique qui contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4).
- L'utilisation de l'outil informatique pour découvrir les effets de la symétrie centrale sur une figure, puis pour créer des projets artistiques (belles figures, pavages, frises) contribue à l'acquisition de méthodes et outils pour apprendre (domaine 2) et à l'étude du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on poursuit la découverte des transformations. Après la symétrie axiale étudiée au cycle 3, on introduit la symétrie centrale en 5^e.

- On peut commencer par quelques rappels sur la symétrie axiale qui n'est pas toujours bien acquise par les élèves. Puis la suite du cours se consacre pleinement à la symétrie centrale, la définition, les propriétés puis le centre de symétrie d'une figure.
- La définition de la symétrie centrale se fait dans un premier temps de manière générale (demi-tour autour d'un point) puis rapidement de manière ponctuelle. Les élèves doivent être capables de construire le symétrique d'une figure point par point puis on les amènera à utiliser les propriétés de conservation des alignements, des longueurs et des angles pour être plus efficaces dans leurs réalisations de figures. On comparera progressivement ces propriétés avec celles de la symétrie axiale.
- De nombreux exercices pourront être faits « à la main » ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, les élèves devront maîtriser les deux techniques à la fin du cycle 4.
Les temps de construction peuvent être très variables selon les élèves, on pourra donc différencier les exercices dans ce type de séance.
- Enfin, les élèves pourront utiliser avec modération les propriétés de la symétrie pour démontrer. La maîtrise de la démonstration est un attendu de fin de cycle mais on peut initier les élèves de manière progressive à cet exercice en leur proposant des exercices simples nécessitant l'utilisation de ces propriétés.

Prérequis pour aborder ce chapitre

Les prérequis pour aborder ce chapitre sont :

- la symétrie axiale ;
- l'utilisation du rapporteur pour construire et mesurer un angle.

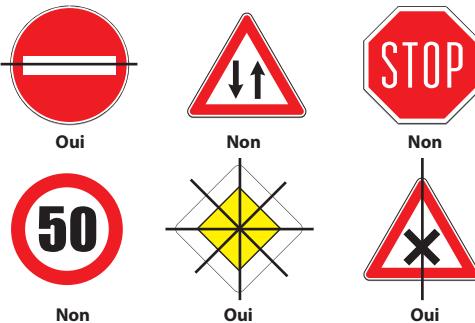
Activités

Questions flash

1. Image ① : Non, car le robot est trop éloigné de l'axe de symétrie.
 Image ② : Oui.
 Image ③ : Non, car l'axe de symétrie est oblique et non pas vertical.
 Image ④ : Non, car le robot est trop haut.

Ces questions sont l'occasion de reparler de la définition des deux figures symétriques : deux figures sont symétriques par rapport à une droite si elles se superposent lorsque l'on plie le long de cette droite.

2.



Ici, on reparle de l'axe de symétrie d'une figure.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de rappeler aux élèves les rudiments de la symétrie axiale, du symétrique d'une droite par rapport à une droite et de la médiatrice d'un segment. Cette activité peut se faire en groupe pour que les élèves échangent sur leurs souvenirs de la symétrie axiale.

Au moment de la mise en commun, ne pas hésiter à questionner les élèves sur tout ce qu'ils connaissent sur la symétrie axiale.

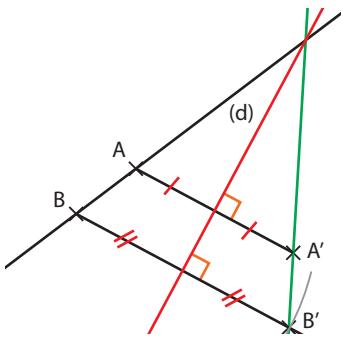
La capacité introduite est de reconnaître et d'utiliser la symétrie axiale.

Si A et A' sont symétriques par rapport à une droite alors (d) est la médiatrice de [AA'].

On commence donc par construire la médiatrice (d) de [AA'].

Ensuite on trace le symétrique B' de B par rapport à (d). Pour cela :

- on trace la perpendiculaire à (d) passant par B ;
- on reporte le longueur BO à partir du point O pour obtenir le point B'.



Que fait cocotte ?

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'approcher de façon intuitive de la symétrie centrale. Dans cette activité, les élèves sont confrontés à de nouvelles transformations (symétrie centrale et translation) et ils reconnaîtront la symétrie axiale.

Cette approche très intuitive doit permettre d'instaurer une image mentale de la symétrie centrale. Il n'est pas utile ici de formaliser de manière institutionnelle cette notion : on pourra se contenter de parler de demi-tour autour d'un objet (le puits) ou d'un point.

La capacité introduite est de reconnaître de manière intuitive la symétrie centrale.

Pour passer de ① à ②, la cocotte se retourne.

On pourra s'attendre à ce que les élèves disent que les poules sont symétriques par rapport à une droite verticale.

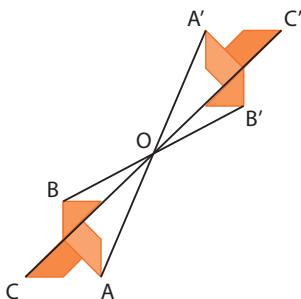
Où est le centre ?

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de situer le centre de symétrie d'une figure et de formaliser la définition de deux points symétriques par rapport à un point.

S'il est compliqué de faire manipuler les élèves, cette activité peut être faite par l'enseignant et vidéo projetée car il y a peu de choses à construire avec le logiciel de géométrie dynamique.

La capacité introduite est de reconnaître et d'utiliser la symétrie centrale (position du centre de symétrie).



4. On remarque que les cocottes bougent mais que le centre de symétrie O reste fixe et que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en C.

- Rappeler ici la définition de la médiatrice d'un segment ainsi que les différentes propriétés.
- Faire remarquer aux élèves que deux droites symétriques par rapport à une droite se coupent sur l'axe de symétrie, sauf cas particulier (cas où l'axe de symétrie et la droite sont parallèles).
- On peut continuer l'activité en demandant aux élèves, sur la même figure, de placer un point C et un point D et de construire leurs symétriques par rapport à (d).
- On pourra leur faire remarquer que les droites (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles : lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles (les élèves observeront ensuite que, dans le cas de la symétrie centrale, les droites (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes).
- Transformer une figure par symétrie axiale, c'est la retourner en pliant le long d'une droite.

Conclusion :

- Si deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d), alors les droites qui passent par un point et son image sont parallèles.
- Si deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d), alors (d) est la médiatrice du segment [AB].
- Deux droites symétriques par rapport à une droite se coupent sur l'axe de symétrie, sauf cas particulier (cas où l'axe de symétrie et la droite sont parallèles).
- L'axe de symétrie est invariant (il est son propre symétrique).

Activité 2

Pour passer de ② à ③, la cocotte fait un demi-tour autour du puits.

Pour passer de ③ à ④, la cocotte fait un demi-tour autour du sommet de sa tête.

On peut ici parler de symétrie centrale par rapport à un point.

Pour passer de ④ à ⑤, la cocotte avance tout droit.

On peut parler de translation, en expliquant que ce déplacement sera étudié en 4^e.

On dit que les cocottes ② et ③ sont symétriques par rapport au centre du puits.

On dit que les cocottes ③ et ④ sont symétriques par rapport au sommet de leur tête.

Conclusion : deux figures sont symétriques par rapport à un point si elles se superposent lorsque l'on fait un demi-tour autour de ce point.

Activité 3

On pourra évoquer le cas où le point O est l'un des « sommets » de la cocotte : le symétrique de O est lui-même.

On peut refaire le parallèle avec la symétrie axiale où les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

On remarque aussi que O est au milieu des segments [AA'], [BB'], [CC']. Pour déterminer la position du point O centre de symétrie :

Méthode 1 :

- On trace deux droites passant par deux points et leurs images ;
- O est le point d'intersection de ces deux droites.

Méthode 2 :

- On trace un segment ayant pour extrémités un point et son image.
- O est le milieu de ce segment.

Conclusion :

Si deux figures sont symétriques par rapport à un point O, alors les droites qui passent par un point et son image sont concourantes en O.

Si deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O, alors O est le milieu du segment [AB].

Le symétrique de O par rapport à O est O lui-même.

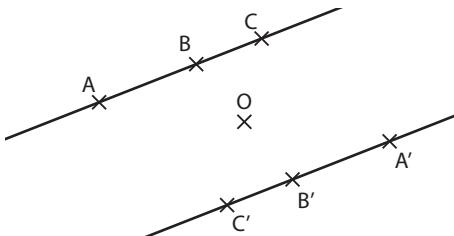
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire des propriétés de la symétrie centrale : conservation de l'alignement et symétrie d'une droite.

Cette activité est simple et permet aux élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Les prérequis nécessaires sont l'utilisation d'un logiciel de géométrie.

La capacité introduite est d'utiliser les propriétés de la symétrie centrale (symétrique d'une droite).



1. Les droites sont parallèles.

Conclusion : deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.

2. Le point C' est sur la droite (AB).

Conclusion : on dit que la symétrie centrale conserve les alignements.

Le lotissement

Activité 5

Intentions des auteurs

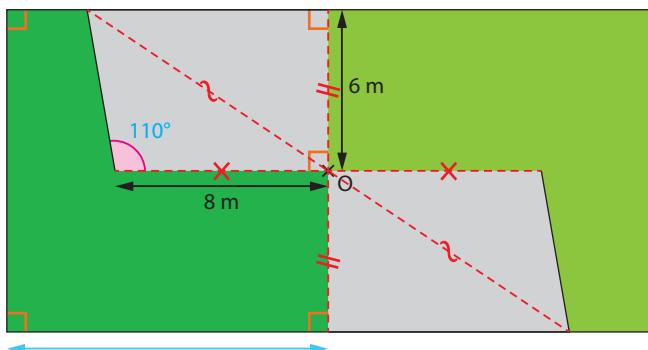
L'objectif de cette activité est d'introduire des propriétés de la symétrie centrale : conservation des longueurs et des angles. Les prérequis nécessaires sont de construire le symétrique d'un point par rapport à un point.

La capacité introduite est d'utiliser les propriétés de la symétrie centrale (propriétés de conservation des longueurs, des angles...).

1. Dessin à réaliser par l'élève (1 cm correspond à 1 m).

- 2.

La construction doit se faire point par point pour vérifier l'égalité des angles et des longueurs.



3. Les angles et les longueurs de la deuxième maison sont égaux à ceux de la première maison.
4. La symétrie centrale conserve les longueurs et les mesures des angles.

Qui est l'intrus ?

Activité 6

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir le centre de symétrie d'une figure.

Activité qui peut être faite en groupe pour que les élèves confrontent leurs idées (5 min d'observation individuelle, puis 5 min en groupe). On explique aux élèves qu'ils devront faire un choix motivé pour un intrus.

Durant la mise en commun en classe entière, on interrogera les groupes en gardant la « bonne solution pour la fin ». La capacité introduite est de reconnaître le centre de symétrie d'une figure.

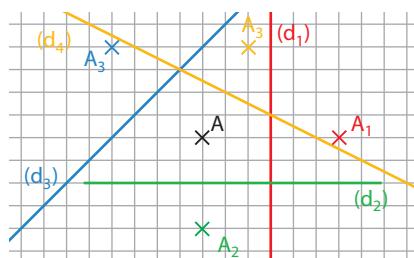
Exercices

Reconnaitre et utiliser la symétrie axiale

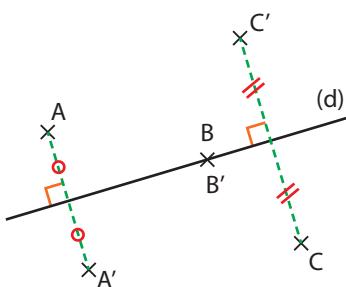
Questions flash

1. a. Faux, car il n'y a pas d'angle droit.
b. Vrai, (d) est bien la médiatrice du segment rouge.
c. Faux, car (d) ne passe pas au milieu du segment.
2. a. Vrai.
b. Faux, les droites ne se coupent pas sur l'axe de symétrie.
c. Vrai.

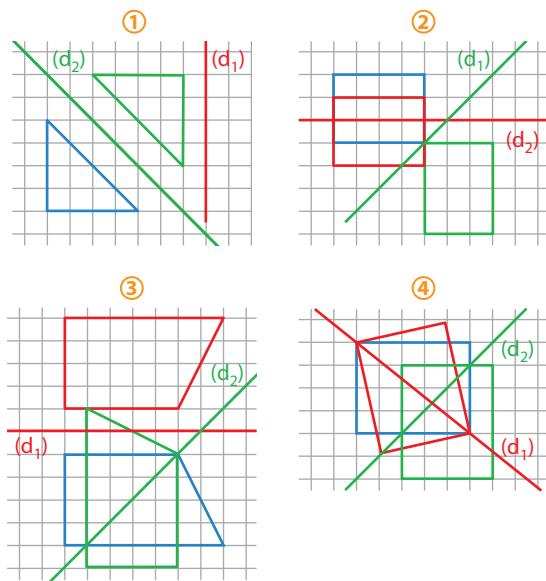
3



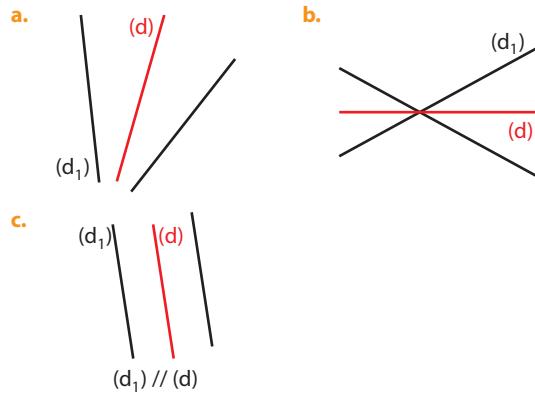
4



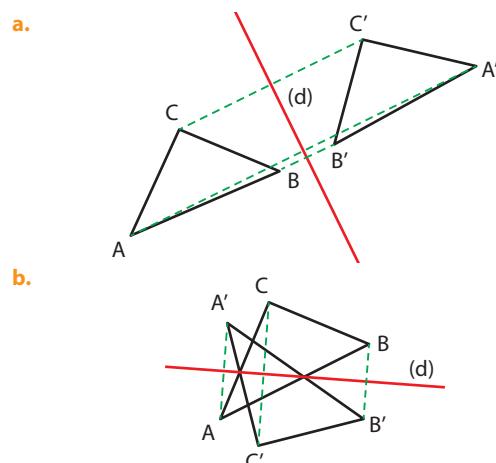
5



6



7



Reconnaitre et utiliser la symétrie centrale

Questions flash

8

- a. Non.
b. Oui.
c. Non.
d. Non.
e. Oui.

9

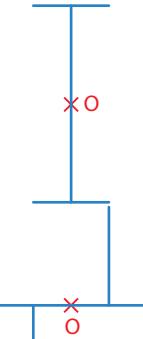
- a. Le point B.
b. Le point C.
c. Le point C.

10

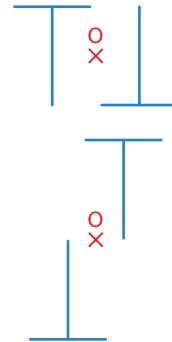
- a. Le symétrique du point A par rapport à H est C.
b. H est le symétrique de J par rapport à G.
c. E et F sont symétriques par rapport à H.
d. Le symétrique de H par rapport à C est D.
e. C est le milieu du segment [BG].

11

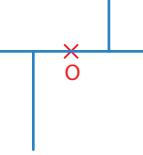
a.



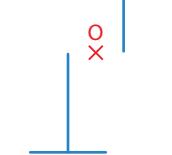
b.



c.



d.



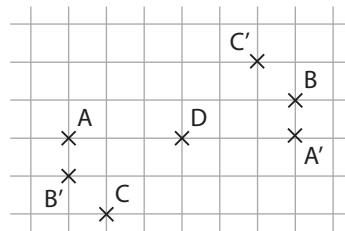
12

M

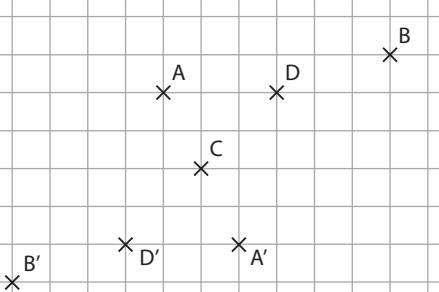
O

N

13 Symétriques par rapport à D :

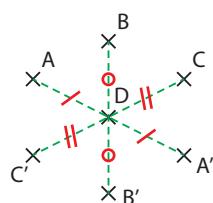


Symétriques par rapport à C :

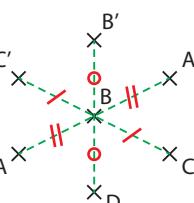


14

Avec D centre de symétrie :



Avec B centre de symétrie :

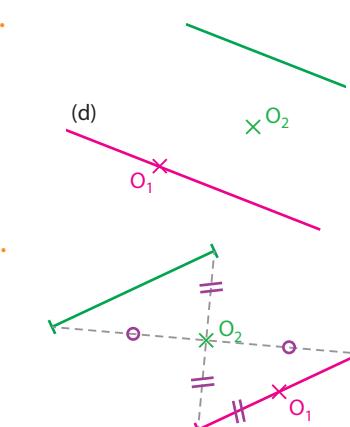


Utiliser les propriétés de la symétrie centrale

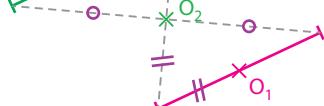
Questions flash

- 15 Dans le cas n°2 (orange), car les deux droites sont parallèles et à la « même distance du point O ».
- 16 \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont symétriques.
La symétrie centrale conserve les longueurs, donc \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont le même rayon.
Le diamètre du cercle \mathcal{C}' est égal à 3 cm.

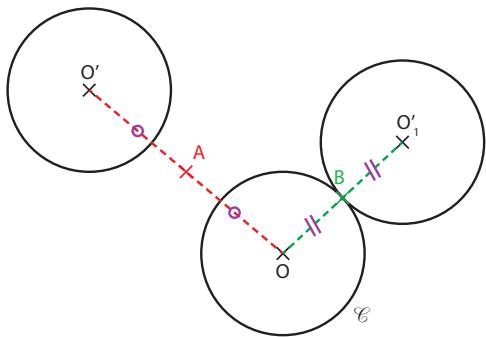
17 a.



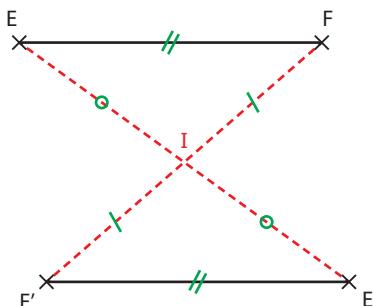
b.



18



19



[EF] et [E'F'] sont symétriques par rapport à I.
La symétrie centrale conserve les longueurs, donc $E'F' = EF = 4 \text{ cm}$.

20 a. Le côté $[A'B']$ mesure 1,5 cm.

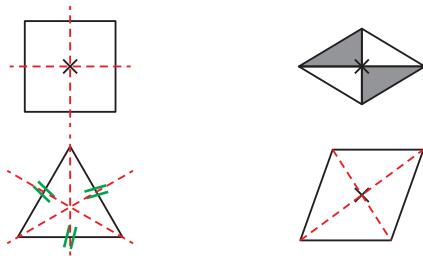
b. La mesure de l'angle $A'B'C'$ est égale à la mesure de l'angle ABC .
c. Le périmètre du triangle $A'B'C'$ est égal à 6 cm.
d. Le triangle $A'B'C'$ est un triangle rectangle.

Reconnaitre un axe ou un centre de symétrie

Questions flash

1. 1 centre, 2 axes.
2. 0 centre, 1 axe.
3. Pas de centre, 1 axe.
4. Pas de centre, 1 axe.
5. 1 centre, 4 axes.
6. Pas de centre, pas d'axe.

22

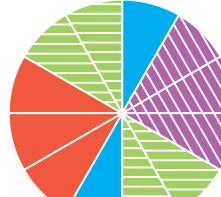


Problèmes

23 Quelle heure est-il ?

Voilà ce qu'il peut lire : **12:05**.

24 Le gâteau



- Part de Louis
- Part de Guillaume
- Part de Fanny
- Part d'Elise

Guillaume et Elise auront du gâteau chacun.

25 Les symétries dans la nature



26 Quelle voiture ?



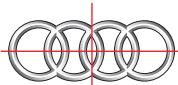
3 axes, 1 centre



0 axe, 0 centre



1 axe, 0 centre

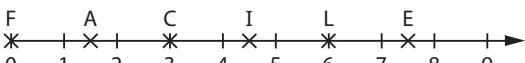


2 axes, 1 centre

Le logo de la voiture de Carla est le dernier logo.

27 Sur une demi-droite graduée

1., 2. et 5.



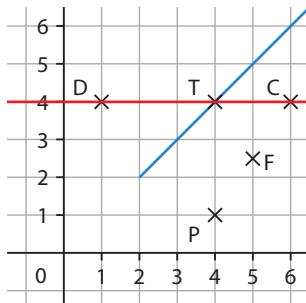
3. L'abscisse du point L est $3 + 3 = 6$.

4. I est au milieu de C(3) et L(6) donc l'abscisse du point I est 4,5.

28 Les pavages d'Escher

- a. Symétries axiales : les axes passant par la tête et les pieds des anges, l'un est vertical, l'autre est horizontal.
- b. Symétries centrales : le point de contact des ailes des anges et le point de contact des pieds des anges.

29 Chasse au trésor

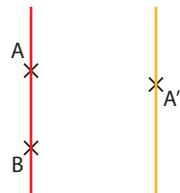


Le trésor a pour coordonnées (4 ; 4).

30 La disparition

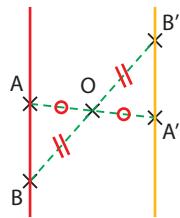
• Méthode d'Arthur

(AB) et (A'B') sont symétriques par rapport à O donc les deux droites sont parallèles. Il suffit donc de tracer la droite passant par A' et parallèle à (AB).

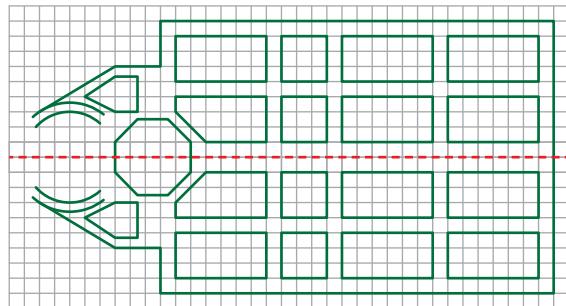


• Méthode de Julia

A et A' sont symétriques par rapport à O donc O est au milieu de [AA']. Une fois O placé, je construis le symétrique B' de B par rapport à O et je trace la droite (A'B').



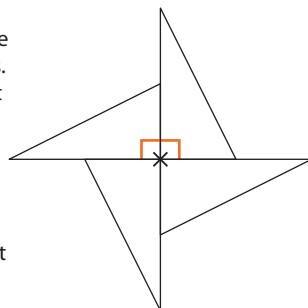
31 Un peu d'histoire



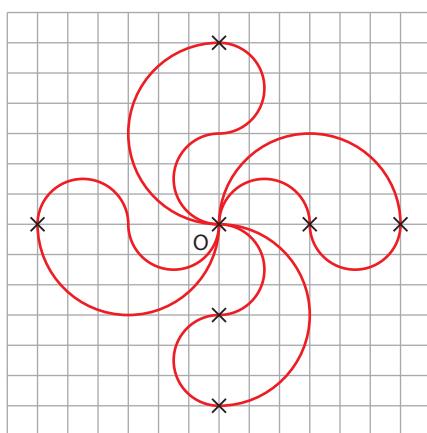
Cet exercice peut aussi être fait avec un logiciel de géométrie dynamique : les élèves reproduisent le plan puis construisent son symétrique par rapport à l'axe en pointillés.

32 Le moulin

1. et 2. Les pales d'origine sont des triangles rectangles. Les pales qui manquent sont les symétriques des deux pales d'origine. Or la symétrie centrale conserve les mesures des angles. Donc les pales qui manquent sont aussi deux triangles rectangles.

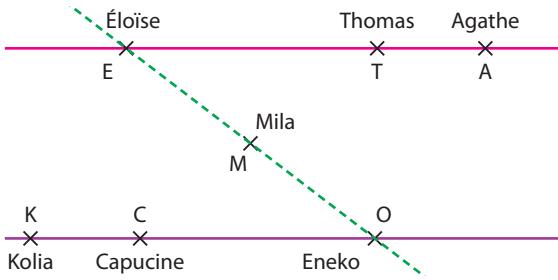


33 La croix basque



Cet exercice peut aussi être fait avec un logiciel de géométrie dynamique : les élèves reproduisent la figure puis la complètent avec les outils qui conviennent (symétrie centrale).

34 Spectacle



Pour simplifier l'explication, on peut dire aux élèves qu'ils peuvent donner des noms aux points qui représentent chaque enfant.

Les points E, T et A sont alignés.

K, C et O sont les symétriques respectifs par rapport à M de A, T et E.

Utiliser et (ré)expliquer le mot « respectif » que les élèves sont amenés à retrouver dans certains exercices.

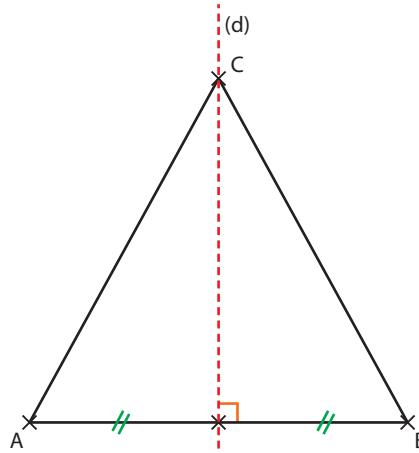
Or la symétrie centrale conserve les alignements, donc O est sur la droite (KC).

E et O sont aussi symétriques par rapport à M donc O aussi est sur (EM).

O se trouve donc à l'intersection des droites (KC) et (EM).

35 Démonstration d'une propriété connue

1. et 2.



3. (d) est la médiatrice de [AB], donc B et A sont symétriques par rapport à (d).

C est sur (d) donc son symétrique par rapport à (d) est lui-même.

Donc le symétrique du segment [AC] par rapport à (d) est le segment [BC].

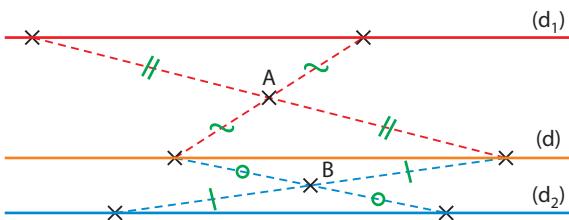
Or la symétrie centrale conserve les longueurs.

Donc AC = BC.

4. Le milieu de [AB] est aussi sur (d) donc nous venons de démontrer que tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des deux extrémités de ce segment.

36 Avec trois droites

1. et 2.



- 3.

- (d) et (d1) sont symétriques par rapport à A.

Or, lorsque deux droites sont symétriques par rapport à un point, elles sont parallèles.

Donc (d) et (d1) sont parallèles.

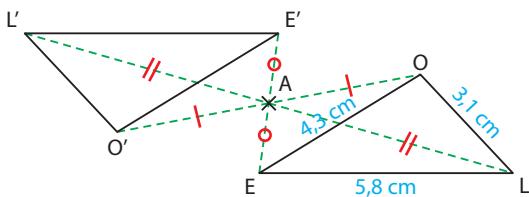
De même, (d) et (d2) sont symétriques par rapport à B.

Donc (d) et (d2) sont parallèles.

- (d_1) est parallèle à (d) . (d_2) est parallèle à (d) .
Or, lorsque deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.
Donc (d_1) et (d_2) sont parallèles.

37 Périmètre

1. à 3.



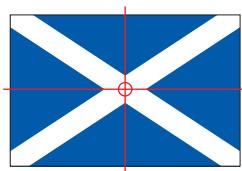
4. Le triangle $L'E'O'$ est le symétrique du triangle LEO par rapport à A . Or la symétrie centrale conserve les longueurs, donc les périmètres.

Donc le périmètre du triangle $L'E'O'$ est égal au périmètre du triangle LEO .

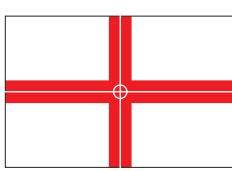
$$P_{L'E'O'} = P_{LEO} = 4,3 + 3,1 + 5,8 = 13,2 \text{ cm.}$$

Le périmètre du triangle $L'E'O'$ est égal à 13,2 cm.

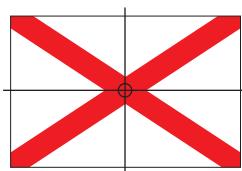
38 Union Flag (Union Jack)



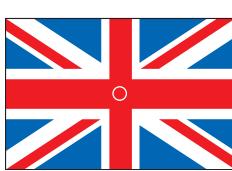
2 axes, 1 center



2 axes, 1 center



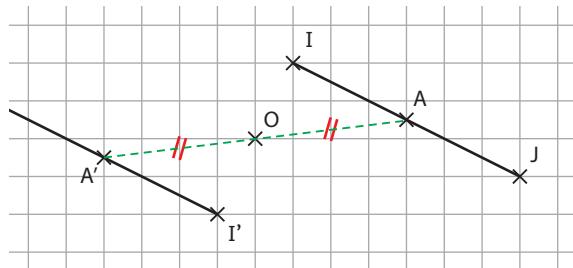
2 axes, 1 center



0 axe, 1 center

39 Où est le milieu ?

1.



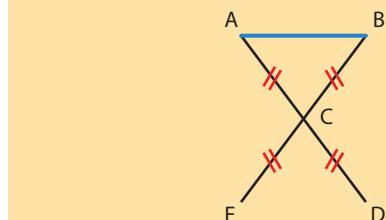
2. $[IJ]$ et $[I'J']$ sont symétriques par rapport à O .

A est le milieu de $[IJ]$. Or la symétrie centrale conserve les longueurs et les alignements.

Donc le symétrique A' de A par rapport à O sera le milieu du segment $[I'J']$.

40 Le tabouret

Présenter aux élèves un schéma avec des points pour permettre une démonstration plus claire.



1. C'est le milieu du segment $[AD]$ donc D est le symétrique de A par rapport à C .

C'est le milieu du segment $[BE]$ donc E est le symétrique de B par rapport à C .

Le segment $[CD]$ est donc le symétrique du segment $[AC]$ par rapport à C .

Or la symétrie centrale conserve les longueurs.

Donc $DC = AB = 52 \text{ cm}$.

L'écartement entre les pieds du tabouret est égal à 52 cm.

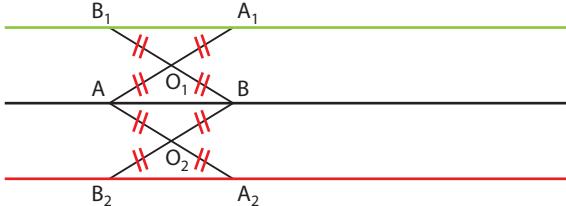
2. D'après la question 1., on peut dire que la droite (ED) est la symétrique de la droite (AB) par rapport à C .

Or deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

Oui, l'assise est bien parallèle au sol.

41 Caténaires



O_1 est le milieu de $[AA_1]$ et de $[BB_1]$ donc A_1 et B_1 sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O_1 .

Donc la droite (AB) est la symétrique de la droite (A_1B_1) par rapport à O_1 .

Or, lorsque deux droites sont symétriques par rapport à un point, elles sont parallèles entre elles.

Donc (AB) et (A_1B_1) sont parallèles.

De même, on montre que (AB) et (A_2B_2) sont symétriques par rapport à O_2 et donc parallèles.

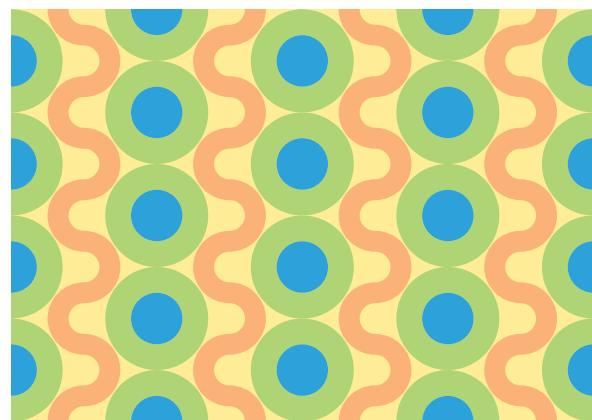
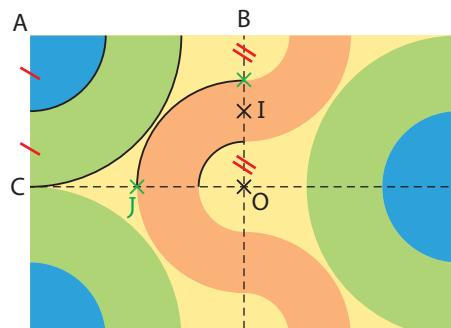
(A_1B_1) est parallèle à (AB) .

(A_2B_2) est parallèle à (AB) .

Or, lorsque deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.

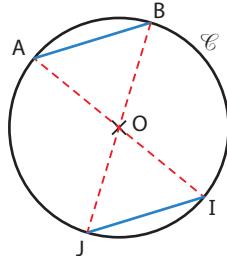
Donc (A_1B_1) et (A_2B_2) sont parallèles et les deux caténaires ne se couperont pas.

42 Pavage



Un coloriage au feutre donnera un rendu plus contrasté qu'au crayon de couleur.

43 Cordes égales 1. et 2.



3. [AI] et [BJ] sont deux diamètres du cercle de centre O. Donc O est le milieu de [AI] et [BJ].

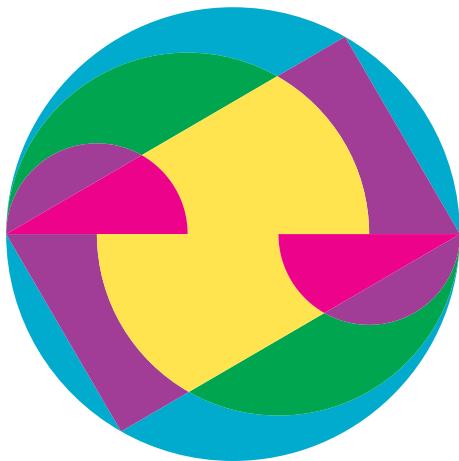
On peut donc dire que I et J sont les symétriques respectifs de A et B. Les droites (AB) et (IJ) sont donc symétriques par rapport à O.

Or deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles. Donc (AB) et (IJ) sont parallèles.

4. De même, on peut dire que les segments [AB] et [IJ] sont symétriques par rapport à O.

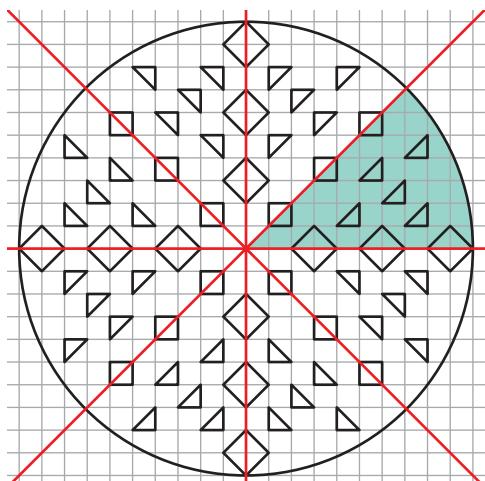
Or la symétrie centrale conserve les longueurs donc $AB = IJ$. Les segments [AB] et [IJ] ont la même longueur.

44 Vitrail cassé



Cet exercice peut être fait en accompagnement personnalisé : les bons élèves mesureront sur la figure et feront un dessin à l'échelle ; on peut demander aux élèves en difficulté de simplement faire une figure semblable et de la compléter.

45 Le napperon



Le napperon a 4 axes de symétrie qui le partagent en 8 secteurs identiques à une symétrie près.

Il suffit donc à Leïla de plier son napperon trois fois puis de découper les motifs de la partie bleue.

46 Le patchwork

Le gabarit qui va servir à Suzanne est le numéro 1.

Il faudra ensuite le reproduire par symétrie par rapport aux côtés en pointillés noirs pour obtenir les six losanges de l'étoile centrale.

Enfin, pour le contour, il faut faire la symétrie par rapport aux côtés bleus.



Ici, il faut veiller à ce que les élèves utilisent les propriétés de la symétrie pour compléter la figure, chaque symétrique étant un losange superposable au précédent.

47 Peinture

Les deux façades sont symétriques par rapport au mur mitoyen, elles ont donc la même aire.

La peinture coûte 2,50 € le kg.

Le pot pèse 15 kg, donc 1 pot coutre : $2,5 \times 15 = 32,5$ €.

Les deux façades ont la même aire et le voisin de M. Pierre a utilisé 5 pots de peinture, donc lui aussi devra utiliser 5 pots.

Prix de revient du crépi : $5 \times 132,5 = 662,5$.

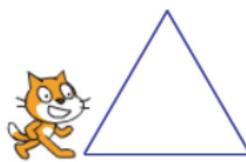
M. Pierre paiera 162,5 €.

Certains élèves calculeront la superficie de la façade ; il faut leur faire remarquer que la symétrie leur évite ce calcul.

Algorithmique et outils numériques

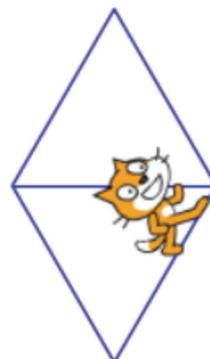
48 Symétrique (1)

1.



La figure dessinée est un triangle équilatéral de côté 100.

2.

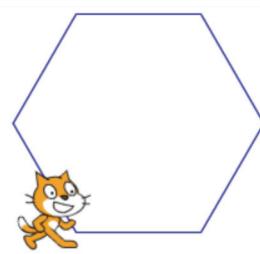


3. La nouvelle figure a deux axes de symétrie (le côté commun aux deux triangles et sa médiatrice).

Elle a aussi un centre de symétrie, le milieu du côté commun.

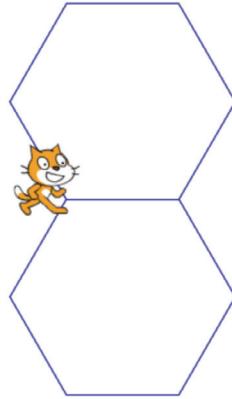
49 Symétrique (2)

1.



La figure dessinée est un hexagone.

2.



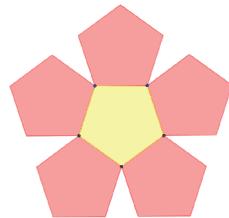
3. La nouvelle figure a deux axes de symétrie (le côté commun aux deux hexagones et sa médiatrice). Elle a aussi un centre de symétrie, le milieu du côté commun.

50 La fleur

- On commence par construire un hexagone régulier avec l'outil .



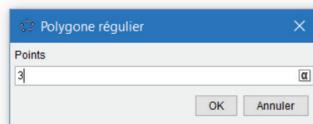
- Puis, avec l'outil symétrie axiale , on construit le symétrique du polygone de départ par rapport à chacun de ses côtés.



- On termine la figure en la coloriant et en cachant chaque point (clic droit sur le point puis afficher).



51 Reproduction

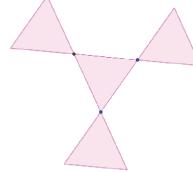


- On construit d'abord le triangle équilatéral au centre avec l'outil .

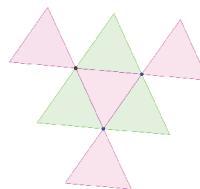
- On valide pour obtenir le triangle équilatéral que l'on peut ensuite changer de couleur.



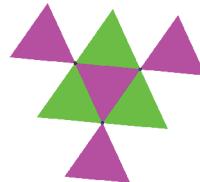
- Avec l'outil , on construit les symétriques du triangle rose par rapport à chacun de ses sommets.



- Avec l'outil , on construit le symétrique du triangle de départ par rapport à chacun de ses côtés.

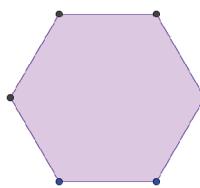


- On termine le travail en coloriant la figure.

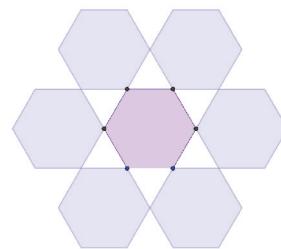


52 Étoile

- On commence par construire un hexagone régulier avec l'outil .



- Puis, avec l'outil symétrie axiale , on construit le symétrique du polygone de départ par rapport à chacun de ses côtés.



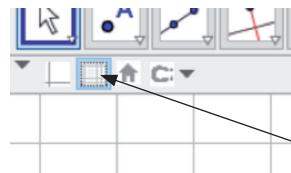
- On termine la figure en la coloriant et en cachant chaque point (clic droit sur le point puis afficher).



53

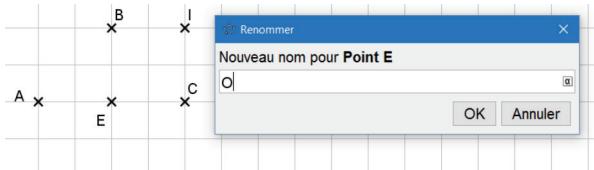
La frise

1. a.

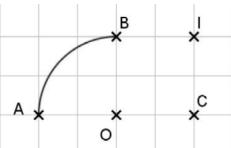


Afficher le quadrillage.

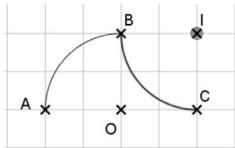
- Pour renommer un point : Clic droit : renommer.



- b. Avec l'outil , tracer l'arc de cercle de centre O passant par B et A.

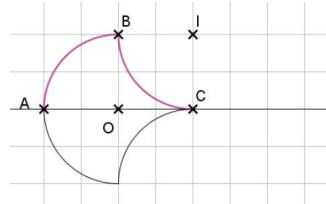


- c. Avec l'outil , tracer l'arc de cercle de centre I passant par B et A.

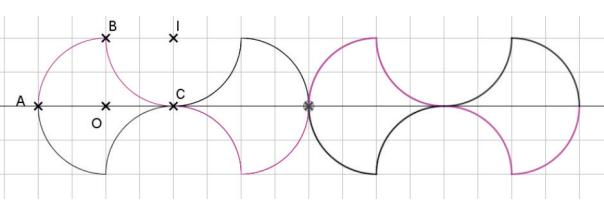
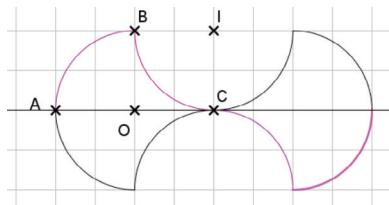


2.

- Tracer la droite (AC), puis construire les symétriques des deux arcs de cercle par rapport à (AB).



- Construire le symétrique de chacun des arcs de cercle précédents par rapport à la symétrie de centre C.

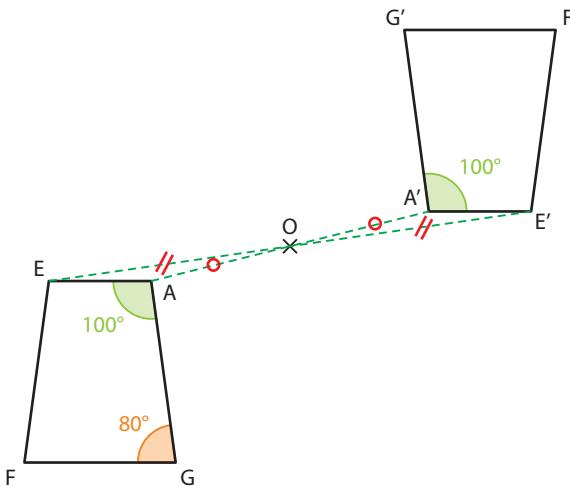


- Placer un point ici, puis construire le symétrique de la partie précédente par rapport à ce nouveau point.

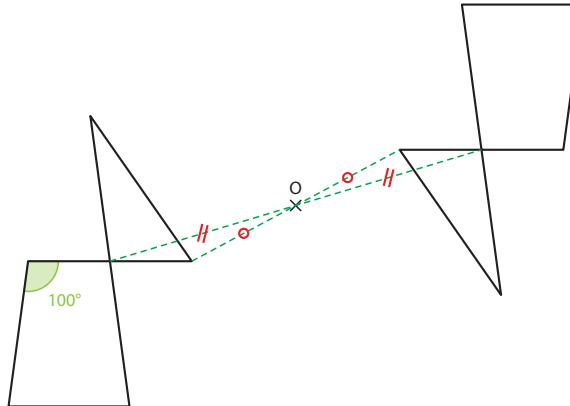
54

À toi de créer

Réalisation à l'initiative de l'élève.

Travailler autrement**Deux énoncés pour un exercice****Exercice 1**

On commence par tracer les symétriques de A et de E, puis on complète la figure en utilisant les propriétés de conservation de la symétrie centrale (angles et longueurs).

Exercice 1**Exercice 2**

On calcule l'aire de la 1^{re} partie de la figure :

Le carré est percé d'un cercle de diamètre 8 cm donc de rayon 4 cm.

$$12 \times 12 - 4 \times 4 \times \pi = 144 - 16\pi \approx 94 \text{ cm}^2.$$

Les deux parties sont symétriques par rapport au sommet commun donc elles ont la même aire.

$$\text{Aire}_{\text{totale}} \approx 94 \times 2 \approx 186 \text{ cm}^2.$$

Exercice 2

Les deux parties de la figure sont symétriques par rapport à leur sommet commun.

Or la symétrie centrale conserve les longueurs et les aires.

Les deux parties ont donc les mêmes dimensions et la même aire.

Aire de la première partie :

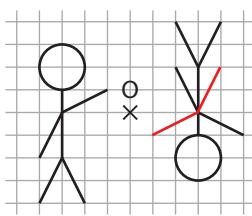
Le carré est percé d'un cercle de diamètre $14 - 2 \times 2 = 10$ cm donc de rayon $10 \div 2 = 5$ cm.

$$\text{Aire}_{\text{1re partie}} : 14 \times 14 - 5 \times 5 \times \pi = 196 - 25 \times \pi \text{ cm}^2.$$

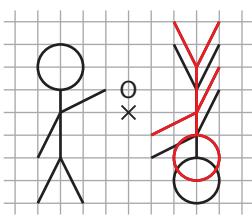
$$\text{Donc Aire}_{\text{totale}} = 2 \times (196 - 25 \times \pi) \approx 235 \text{ cm}^2.$$

Analyse d'une production

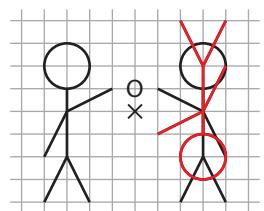
- Séléné a mal orienté les bras du bonhomme.



- Le symétrique que Malik a tracé est trop bas.

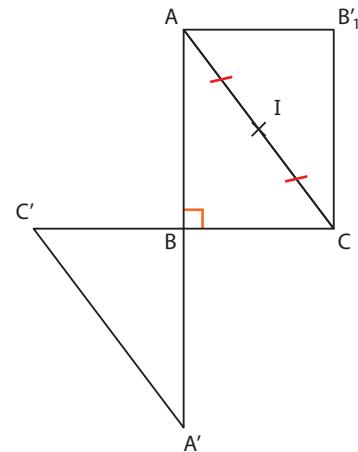


- Julien a construit le symétrique par rapport à une droite verticale passant par O.



Écriture d'un énoncé

1. et 2.



- Construire le symétrique $B'C'D'$ de ABC par rapport à B .
Construire le symétrique de ABC par rapport à I .

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ».

Il permet d'aborder les points suivants du programme :

- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ;
- coder une figure ;
- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.

Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

• **Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève :**

- construire des frises, des pavages, des rosaces ;
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie ;
- faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.

• **Repères de progressivité :**

La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations, sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3^e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

• Ce chapitre revêt auprès des élèves un aspect attractif grâce à l'introduction de nouvelles transformations. Il est donc intéressant de le traiter tôt dans l'année. Cela permettra également de réinvestir les symétries dans l'étude des triangles et des parallélogrammes et de réactiver rapidement la réalisation de figures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Durant l'année de 5^e, les élèves ont appris à reconnaître et à utiliser les symétries axiale et centrale. Ils ont utilisé leurs propriétés pour construire mais aussi pour commencer à démontrer. Un travail a été également porté sur la recherche d'axe ou de centre de symétrie. Il peut être nécessaire pour les plus fragiles de poursuivre et d'enrichir ce travail en milieu de cycle avant d'aborder de nouvelles transformations.

S'ensuivra une première approche des translations et des rotations, dont les objectifs seront les suivants :

- former et dégager des concepts et des images mentales. Cela sera utile pour percevoir globalement les figures et leurs images par ces nouvelles transformations, et cela permettra d'anticiper et de contrôler les effets de ces transformations ;
- reconnaître et identifier une translation ou une rotation ;
- construire globalement, et non point à point, l'image d'une figure en utilisant les images mentales et les propriétés de ces transformations.

Comme cela est bien précisé dans les programmes, aucune définition de l'image d'un point par une translation et une rotation n'est proposée. Elles seront définies par le mouvement physique le plus simple (le plus économique et sans lever la main) permettant de passer d'une figure à une autre. Ainsi :

- la translation est associée à un glissement rectiligne. Ce déplacement est caractérisé par une flèche, sans qu'il soit nécessaire de définir la notion de vecteur ;
- la rotation est associée à l'action de tourner autour d'un point et sera caractérisée par un centre, un angle et un sens de rotation.

Les constructions à l'aide des instruments de tracés seront essentiellement réalisées à l'aide de quadrillage et demeureront très simples, notamment pour le choix des angles des rotations (90° et 45°).

Un auto-contrôle avec un calque sera souhaitable, notamment pour la rotation.

• Dans ce chapitre, l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique est fortement recommandé et souvent nécessaire à la réalisation des activités et des problèmes. En plus de permettre aux élèves de se familiariser avec les fonctionnalités du logiciel, ces nombreuses utilisations auront l'avantage de favoriser une bonne imprégnation d'images mentales (avec ou sans quadrillage) et permettront la réalisation de belles constructions comme des frises ou des rosaces.

Pour aborder sereinement ce chapitre, les élèves devront :

- connaître la notion d'angle, maîtriser les calculs d'angles ;
- reconnaître et repérer des droites parallèles à l'aide d'un quadrillage ou sur papier blanc ;
- savoir décrire une direction à l'aide d'un quadrillage.

Activités

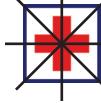
Questions flash



1. Deux axes de symétrie, un centre de symétrie.



Un axe de symétrie, pas de centre de symétrie.



Quatre axes de symétrie et un centre de symétrie.



Un axe de symétrie, pas de centre de symétrie.



Trois axes de symétrie et un centre de symétrie.



Pas d'axe, pas de centre.

2. Les droites (d) et (k) sont dans la même direction sur la figure F_1 .

3. Il a tourné de 360°.

4. La grande aiguille de Léa a tourné de 90° et celle de Tom, de 180°.

5. Chaque secteur mesure 72° ($360 \div 5 = 72$).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la translation et la notion de frise.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des notions d'axe et de centre de symétrie.

La capacité introduite est de transformer une figure par translation, d'analyser et construire une frise.

Cette activité permet une première approche de la translation dans un cas simple à travers l'analyse d'une frise.

On pourra commencer par demander aux élèves de définir une frise et travailler ainsi sur le vocabulaire associé. La notion de motif minimal qui se répète dans une même direction avec régularité devra émerger.

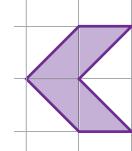
Il est également intéressant de faire remarquer qu'une frise est illimitée dans les deux sens.

1.

Cette première question est l'occasion de réactiver les symétries, la notion d'axe et de centre de symétrie et donc de figure invariante par une transformation.

Il y a un axe de symétrie, mais pas de centre de symétrie.

2. Ci-contre, le motif de la frise qui permet de construire cette frise.



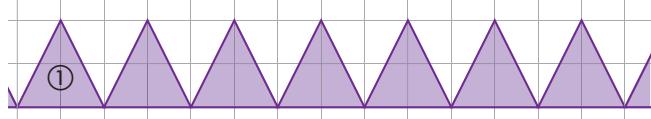
3. Cette frise est obtenue en répétant successivement sur le motif ci-dessus le déplacement suivant :

Faire glisser sans tourner la flèche violette horizontalement de deux carreaux vers la droite.

Ici, l'introduction de la flèche pour schématiser le déplacement n'est pas vraiment nécessaire, car le déplacement est simple et très naturel pour les élèves.

On pourra demander aux élèves comment on peut obtenir ce motif et parler ainsi de motif élémentaire.

4. En faisant glisser le triangle 1 horizontalement de deux carreaux vers la droite, on obtient la frise ci-dessous.



Il est important de faire remarquer que la frise se superpose à elle-même par ce glissement.

Le ciel et la mer Prévoir du papier calque.

Activité 2

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir et caractériser les translations à travers un pavage.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des notions d'axe et de centre de symétrie.

La capacité introduite est de transformer une figure par translation, d'analyser et construire un pavage.

Le travail est plus difficile que le précédent, il pourra être intéressant de proposer un travail de groupe à partir de la question 4.

Ici, la réflexion des élèves part d'un pavage, ils vont découvrir et définir deux translations différentes dans des directions moins naturelles que pour l'Activité 1 et sans quadrillage, ce qui motivera la schématisation par une flèche.

1.

Là encore, on commencera par demander de définir un pavage et on fera émerger qu'un pavage est constitué d'un motif qui se répète dans deux directions avec régularité, sans trou ni superposition.

Ce pavage n'a ni axe ni centre de symétrie.

2. Le poisson I se superpose au poisson III.

3. En suivant ce même glissement, on observe que l'oiseau ③ se superpose à l'oiseau ⑤, que l'oiseau ④ se superpose à l'oiseau ⑥ et le poisson II au poisson situé sous l'oiseau ⑧.

4.

On pourra demander à chaque groupe de donner leur description de ce déplacement, puis débattre de la formulation la plus appropriée. On retiendra que :

On fait glisser parallèlement à (AE), de A vers E et d'une distance AE. On peut schématiser ce glissement par une flèche allant de A vers E.

On fera remarquer aux élèves l'intérêt de schématiser ce glissement par une flèche en notant que les trois informations précédentes sont contenues dans la « flèche » allant de A vers E. Il doit ressortir clairement que l'on a complètement défini ce glissement, en donnant une direction, un sens et une longueur. À ce moment-là, on peut poser la définition d'une translation et dire que l'oiseau ⑤ est image de l'oiseau ③, que l'oiseau ⑥ est l'image de l'oiseau ④... par cette translation.

5.

Il y a ici plusieurs translations possibles.

On peut obtenir l'oiseau ⑦ en faisant glisser l'oiseau ⑨ parallèlement à (AB), de A vers B et d'une distance AB. On peut schématiser ce déplacement par une flèche allant de A vers B.

On pourra demander aux élèves de décrire d'autres déplacements et de les schématiser par des flèches (par exemple, décrire le déplacement permettant de superposer l'oiseau ① à l'oiseau ⑧...), puis de formuler des phrases avec le mot « image ».

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir et caractériser les rotations.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance des mesures d'un angle plein, du calcul d'angles.
La capacité introduite est de transformer une figure par rotation, d'analyser et construire une rosace.

1.

Certains élèves pourront manipuler, en utilisant du papier calque, et pointer le compas sur le centre afin de faire tourner le motif décalqué.

Tom a décalqué le motif constitué d'un triangle et d'un arc de cercle, puis il l'a fait tourner autour du point O d'un angle de 72° ($360^\circ \div 5$) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, par exemple.

On amènera les élèves à définir cette nouvelle transformation et ses caractéristiques et à formuler des phrases avec le mot « image ».

On insistera sur l'angle minimal et sur le fait qu'il y a deux sens de rotation possibles mais qu'ici le sens de rotation n'a pas d'importance.

Le curseur

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser un logiciel de géométrie pour transformer une figure par rotation et d'en observer les effets.

Les prérequis nécessaires sont de savoir utiliser un logiciel de géométrie, connaître la symétrie centrale et savoir caractériser une rotation.

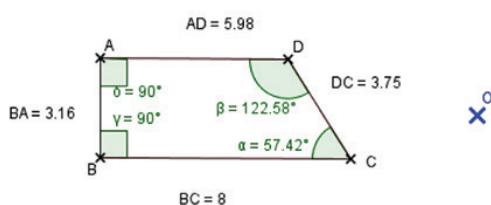
La capacité introduite est de transformer une figure par rotation.

Cette activité peut être faite individuellement ou en binôme. Cependant, cela ne pose aucun problème de la proposer en classe entière.

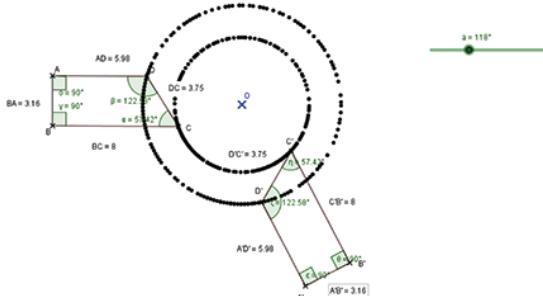
Elle permettra aux élèves de se créer leurs premières images mentales de la rotation, d'associer clairement cercle et rotation et d'en observer les propriétés de conservation.

Ce sera également l'occasion pour eux (ou pour beaucoup d'entre eux) de découvrir l'utilisation d'un curseur.

1. Il sera nécessaire pour certains élèves de bien revoir les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique.



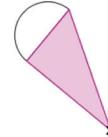
2.



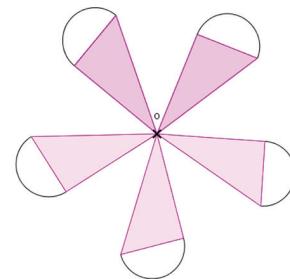
2. Pour obtenir ce logo, Tom a utilisé l'outil suivant :



3. On commence par tracer le motif de base :

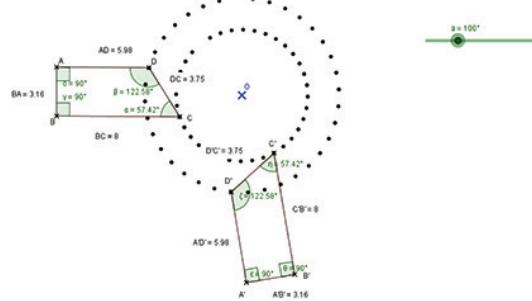


Ensuite on sélectionne l'outil rotation de la question 2., le motif ci-dessus puis le centre O et enfin, on note 72° pour l'angle de la rotation. Puis on choisit, par exemple, le sens anti-horaire. On applique successivement 4 fois cette même rotation et on obtient le logo suivant :

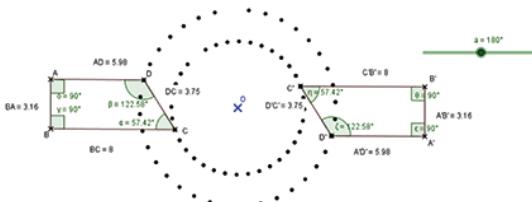


Activité 4

3.



- a. Le point C se déplace sur le cercle de centre O et de rayon OC. Le point D se déplace sur le cercle de centre O et de rayon OD. Il est très important d'insister sur le lien entre cercle et rotation.
- b. On reconnaît la symétrie centrale de centre O : c'est la rotation de centre O et d'angle 180° .



- c. On observe qu'une figure et son image sont superposables : les longueurs et les angles sont conservés.

On pourra préciser qu'il existe des transformations qui n'ont pas ces propriétés.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'analyser un pavage, reconnaître et caractériser des symétries, des translations et des rotations. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des notions de symétrie, translation, rotation.

La capacité introduite est de transformer une figure par symétrie, translation, rotation, analyser des pavages et des rosaces.

Cette activité est posée sous forme ouverte. Elle permet ainsi de reprendre toutes les capacités de ce chapitre.

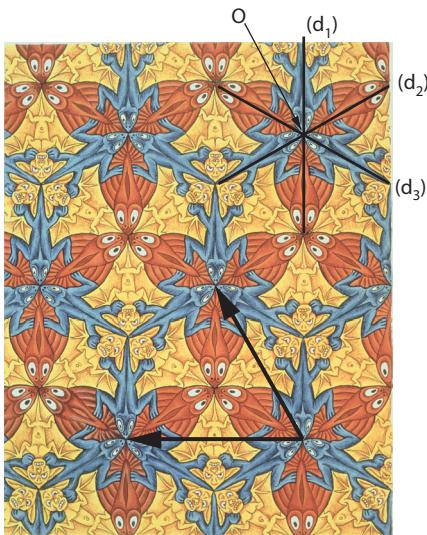
Ci-dessous, le motif de ce pavage. Les deux flèches sur l'œuvre, à droite, schématisent les deux translations permettant d'obtenir le pavage.



Sur ce motif, on observe :

- 3 symétries axiales d'axes (d_1) , (d_2) et (d_3) .
- 1 rotation de centre O et d'angle 120° ($360 \div 3$).

Le sens, ici, n'a pas d'importance.

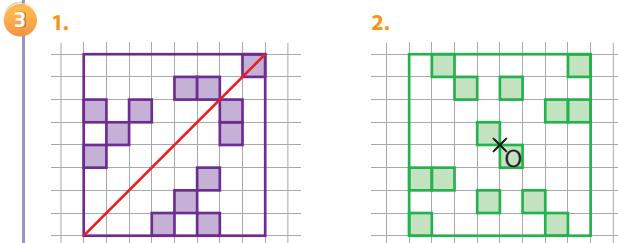
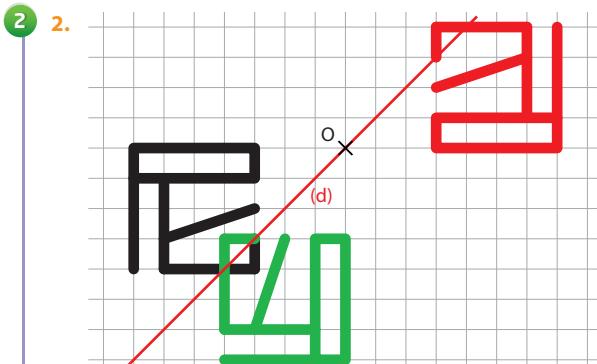


Exercices

Transformer une figure par symétrie

Questions flash

1. **1. a.** Le robot de droite n'est pas retourné.
b. Les pieds du robot de droite sont trop haut.
c. Le robot de droite est trop grand.
d. Le robot de droite est trop éloigné de l'axe.
2. **a.** Le robot de droite n'est pas inversé.
b. Le robot de droite est trop éloigné du centre.
c. Le robot de droite est trop petit.

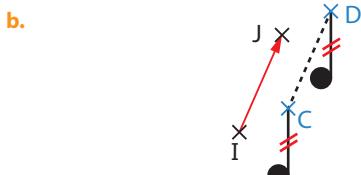
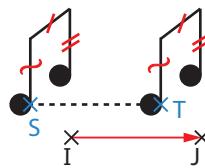


Transformer une figure par translation

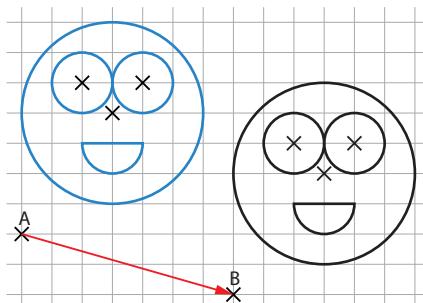
Questions flash

4. **a.** \mathcal{F}_2 est l'image de \mathcal{F}_1 par la translation qui transforme A en B.
b. \mathcal{F}_2 n'est pas l'image de \mathcal{F}_1 par la translation qui transforme A en B, car la tête a tourné.
c. \mathcal{F}_2 n'est pas l'image de \mathcal{F}_1 par la translation qui transforme A en B, car \mathcal{F}_2 est plus grosse que \mathcal{F}_1 . Les deux figures ne sont donc pas superposables.
d. \mathcal{F}_2 n'est pas l'image de \mathcal{F}_1 par la translation qui transforme A en B, car \mathcal{F}_2 est trop éloignée de \mathcal{F}_1 .

5. **a.** On construit l'image du point S dans la même direction, le même sens et tel que $ST = IJ$.
On poursuit la figure en respectant les propriétés de conservation des translations de sorte que les deux figures se superposent par ce glissement.



6. On commence par tracer l'image du centre du cercle, puis on complète la figure en utilisant les propriétés de la translation et le quadrillage.



Transformer une figure par rotation

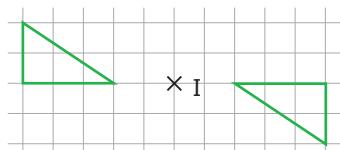
Questions flash

7. a. 4^e bateau trop éloigné du centre.
b. 2^e triangle du mauvais côté.
c. 3^e bouche dans le même sens, elle n'a pas tourné.
d. 2^e triangle trop petit.

8. a. b.



9. 1.



2. C'est la symétrie de centre I.

- 10.** 1. C'est Roméo qui a raison, Eneko s'est trompé de sens de rotation.
2. L'image du carré ABCD par la rotation de centre O, d'angle 90° et dans le sens anti-horaire est le carré ABCD lui-même. Ils n'ont donc aucune construction à faire.
- 11.** 1. L'image de ALOB par la rotation de centre O et d'angle 120° est IHOJ.
2. C'est la rotation de centre O et d'angle 240° (60° × 4).

Analyser et construire des frises, des pavages et des rosaces

Questions flash

- 12.** a. C'est une frise, le motif qui se répète régulièrement dans une même direction est le robot.
b. Ce n'est pas une frise, aucun motif ne se répète.
c. C'est une frise. Voici le motif qui se répète régulièrement dans une même direction :



On pourra parler ici du motif élémentaire et demander quelle transformation permettra d'obtenir le motif du dessus.

- 13.** 1. C'est un demi-cercle de diamètre [AB].
2. On trace un demi-cercle de rayon AB, on effectue successivement 8 rotations de centre A et d'angle 45°.



- 14.** 1. Motif :
2. Motif obtenu par une rotation de centre O, d'angle 120° dans le sens anti-horaire.

Problèmes

Constructions

a. Léa a tracé la bonne image. Tom a fait un déplacement de 6 carreaux et non de 3. Lucie a tracé une figure qui n'est pas aux bonnes dimensions.

b. Lucie a tracé la bonne figure. Tom n'a pas conservé la bonne orientation. Léa a fait un déplacement de 2 carreaux et non de 4.

c. Léa a tracé la bonne figure. Tom a fait un déplacement de 1 carreau vers la droite mais de 4 vers le bas au lieu de 3 vers le bas.

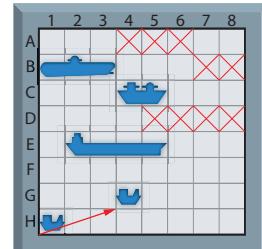
Un drôle de tour

Samuel devra utiliser une translation.

(et non une rotation comme pourrait le suggérer la figure.)

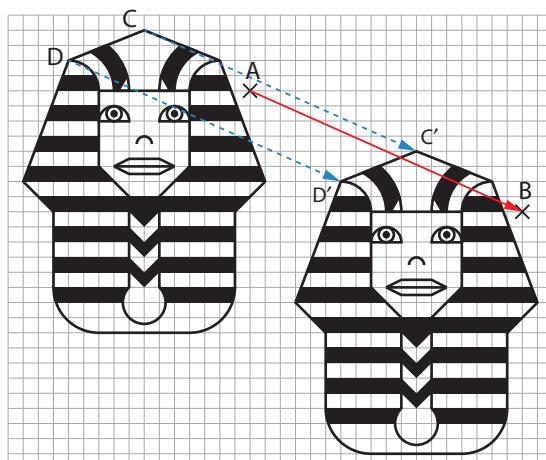
Bataille navale

La translation est définie par la flèche.



Le pharaon

On commence par appliquer la translation aux points C et D, on obtient leur image C' et D', on complète en construisant une figure superposable.



On peut également proposer aux élèves de faire cet exercice

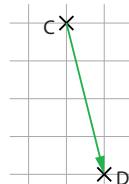
à l'aide d'un logiciel, en utilisant l'outil

L'ancêtre de la grande roue

a. La nacelle 3 est l'image de la nacelle 1 par la translation décrite par la flèche suivante :



b. La nacelle 6 est l'image de la nacelle 8 par la translation décrite par la flèche suivante :



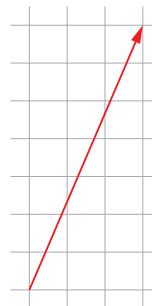
Un triangle dans tous ses états

La figure 3 est l'image de la figure 1 par la symétrie d'axe (KH).

La figure 2 est l'image de la figure 1 par la translation définie par la flèche ci-contre.

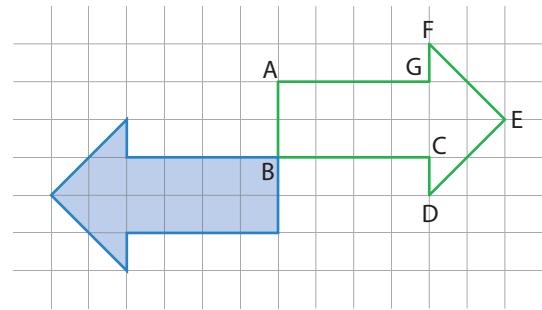
La figure 5 est l'image de la figure 1 par la symétrie de centre H.

La figure 4 est l'image de la figure 1 par la rotation de centre H, d'angle 90° et dans le sens anti-horaire.

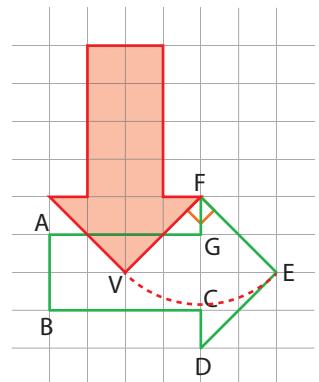


21 Cocktail de transformations

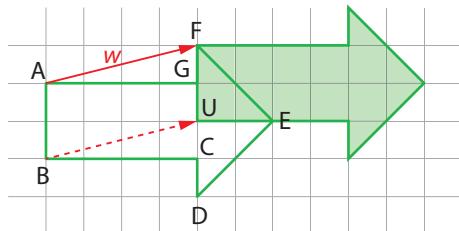
2. a.



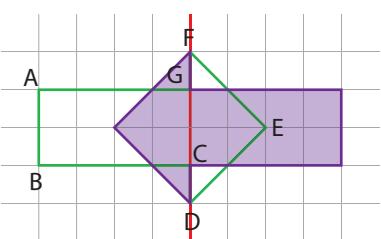
b.



c.



d.



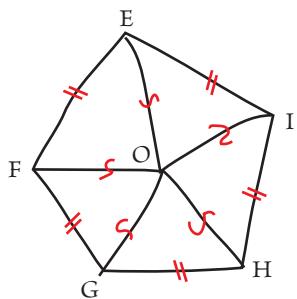
22 Polygones réguliers

1. Un polygone régulier à 4 côtés s'appelle un carré.
- 2.

On peut préciser aux élèves qu'un polygone régulier est toujours inscrit dans un cercle et les inciter le cas échéant à commencer par construire une figure à main levée.

Un pentagone régulier est un polygone régulier à 5 cotés, ces 5 sommets appartiennent à un même cercle.

On commence par tracer une figure à main levée comme ci-dessous :



On peut donc dire qu'un tel pentagone est formé de 5 triangles isosèles de même sommet et superposables.

On peut donc calculer l'angle $\widehat{EOI} = 360 \div 5 = 72^\circ$.

On constate donc que chaque sommet est l'image de celui qui le précède par la rotation de centre O et d'angle 72° .

On peut donc construire un tel polygone en effectuant 4 fois de suite la rotation de centre O et d'angle 72° .

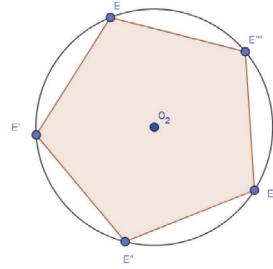
On peut faire remarquer aux élèves qu'un pentagone régulier est invariant par une telle rotation et que le sens de la rotation n'a pas d'importance ici.

On pourra aussi parler avec les élèves les plus avancés d'angle au centre.

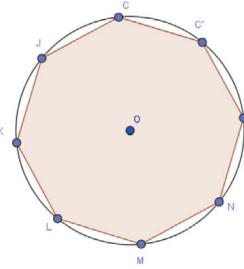
Un octogone régulier est un polygone régulier à 8 sommets, on peut donc l'obtenir en effectuant plusieurs fois la rotation de centre O et d'angle 45° ($360 \div 8$).

Un dodécagone régulier est un polygone régulier à 12 cotés, on peut donc l'obtenir en effectuant plusieurs fois la rotation de centre O et d'angle 30° ($360 \div 12$).

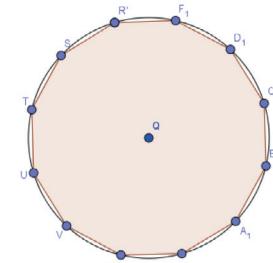
Pentagone régulier



Octogone régulier



Dodécagone régulier



On pourra rappeler aux élèves l'utilisation d'un curseur qui permettra de construire plus rapidement de tels polygones.

23 Crédit de papier cadeau

1. Le motif de ce pavage est le suivant :

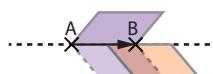


2. Voici le motif élémentaire qui permet d'obtenir le motif ci-dessus :

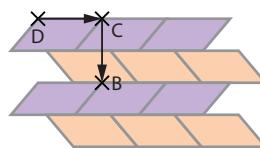


On doit lui appliquer une symétrie axiale suivie d'une translation dans la même direction.

On peut préciser qu'il s'agit d'une symétrie glissée.

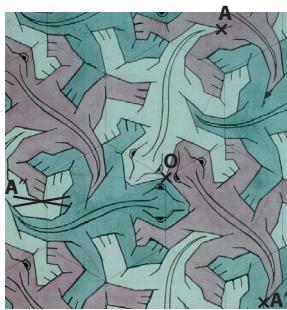


3. On obtient le pavage en effectuant sur le motif du 1. 7 translations successives définies par la translation qui transforme D en C et 4 translations par la translation qui transforme C en E.



24 Les reptiles

Un motif de cette œuvre est constitué d'un reptile blanc, d'un rouge et d'un vert, comme ci-contre :



Ce motif peut être construit à partir d'un seul reptile en effectuant successivement deux rotations de centre O et d'angle 120° .

25 The stencil (Le pochoir)

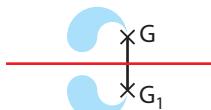
Voici le motif de cette frise :



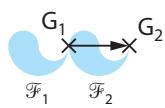
Il est obtenu à partir du motif élémentaire suivant :

On note \mathcal{F} ce motif élémentaire.

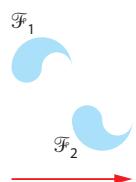
1. Construire l'image \mathcal{F}_1 de \mathcal{F} par la symétrie d'axe rouge.



2. Construire l'image \mathcal{F}_2 de \mathcal{F}_1 par la translation définie par la flèche noire.



3. Appliquer plusieurs fois de suite sur \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 la translation définie par la flèche rouge.



26 La croix basque

1. Tracer un segment $[AB]$. Noter I le milieu de $[AB]$.

Tracer le cercle de rayon $[AB]$.

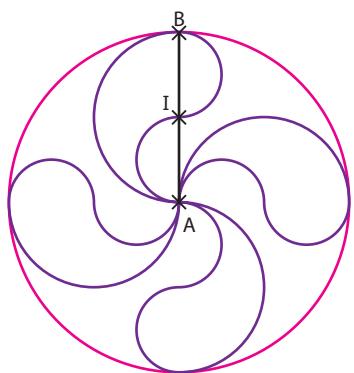
Tracer un demi-cercle de diamètre $[AB]$.

Tracer le demi-cercle de diamètre $[AI]$ situé du même côté que l'arc AB .

Tracer le demi-cercle de diamètre $[IB]$ situé de l'autre côté de l'arc AB .

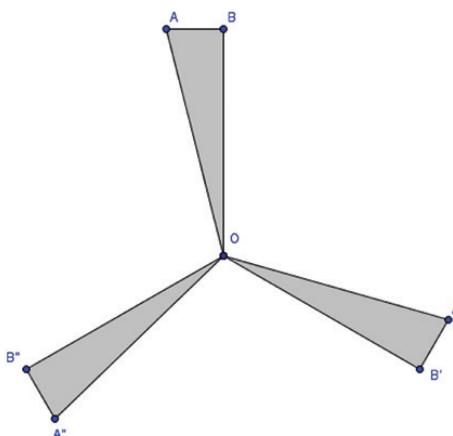
Effectuer 3 rotations successives de centre A, d'angle 90° dans le sens anti-horaire sur chacun des arcs AB , AI et IB .

2. Pour cette construction, on a utilisé les outils suivants :



27 Une éolienne

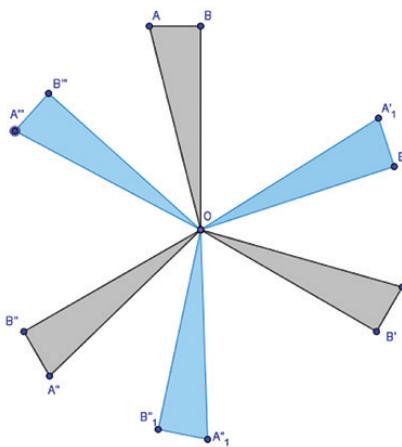
1. On commence par construire un triangle ABO rectangle en B tel que $\widehat{BOA} = 15^\circ$, puis on effectue successivement 2 rotations de centre O et d'angle 120° dans le sens horaire. Pour cette construction, on a utilisé les outils suivants :



2. Chaque pale fait 12 tours en 1 minute, elles tournent donc de 4320° (360×12) en 60 secondes.

$$4320 \div 60 = 72. \text{ Elles tournent donc de } 72^\circ \text{ en 1 seconde.}$$

On effectue donc une rotation de centre O, d'angle 72° dans le sens horaire sur chacune des 3 pales. On obtient la figure suivante :



28 Vitrail cassé

Il sera intéressant d'inciter les élèves à faire des figures à main levée afin d'en tirer des propriétés pour la construction.

Ce vitrail est une rosace, il peut donc être construit à partir d'un motif auquel on appliquera plusieurs fois une même rotation.

On peut faire remarquer que le motif de cette rosace peut être obtenu en effectuant une symétrie axiale sur un motif élémentaire.

Voici le programme de construction permettant de construire ce motif :

Tracer deux cercles de centre A et de rayons respectifs 10 cm et 20 cm.

Placer un point B sur le cercle de rayon 20 cm.

Placer le milieu D de $[AB]$.

Placer le point C sur le cercle de rayon 10 cm tel que $\widehat{BAC} = 22,5^\circ$ ($360 \div 16 = 22,5^\circ$).

Construire les symétriques D' et B' des points D et B par rapport à la droite (AC).

Tracer $[AB']$, $[DD']$ et $[BB']$.

Noter E le point d'intersection de $[AC]$ et $[BB']$.

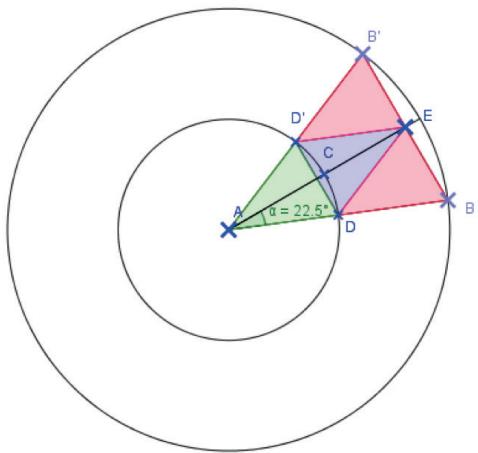
Tracer le triangle DD'E, le colorier en bleu.

Tracer le triangle ADD', le colorier en vert.

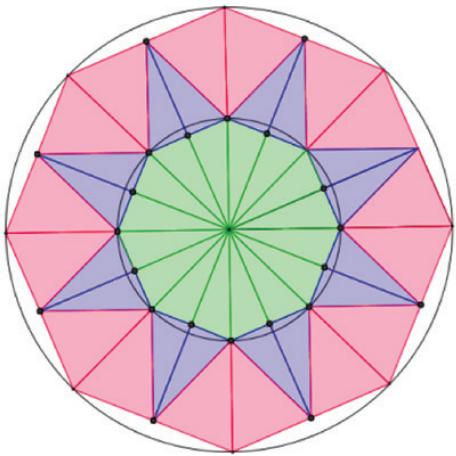
Tracer les triangles D'B'E et DBE, les colorier en rouge.

Tracer $[AE]$.

Embellir le motif en enlevant les étiquettes des points et des segments.



Pour obtenir la rosace, on effectue sur ce motif 7 rotations successives de centre A, d'angle 45°. Le sens est sans importance ici. On obtient le vitrail suivant :



29 L'étoile de Pompéi

Il sera intéressant d'inciter les élèves à faire des figures à main levée afin d'en tirer des propriétés pour la construction.

Pour réaliser cette étoile, on va supposer que les triangles sont équilatéraux. L'angle de la rotation permettant d'obtenir cette étoile sera de 60°.

Voici le programme de construction permettant de construire le motif à partir duquel sera obtenue l'étoile de Pompéi :
Tracer un triangle équilatéral OAB.

Construire le carré ABCD de l'autre côté du point O par rapport à la droite (AB).

Construire l'image C' de C par la rotation de centre O, d'angle 60°, dans le sens anti-horaire.

Tracer le triangle équilatéral DCE de l'autre côté du point A par rapport à la droite (DC).

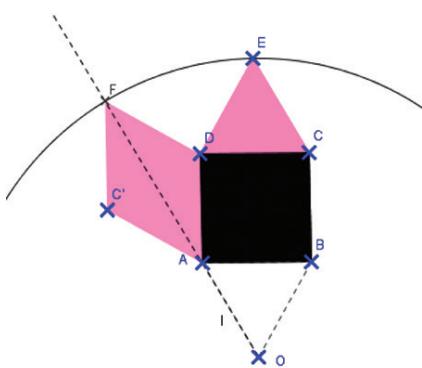
Construire le cercle de centre O et de rayon OE.

Noter F le point d'intersection de ce cercle et de [OA].

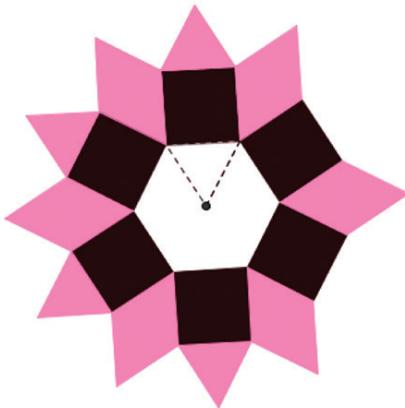
Construire le quadrilatère ADFC'.

Embellir le motif en enlevant les étiquettes des points et des segments et en coloriant les 3 polygones.

On pourra ici utiliser l'outil  pour gagner du temps.

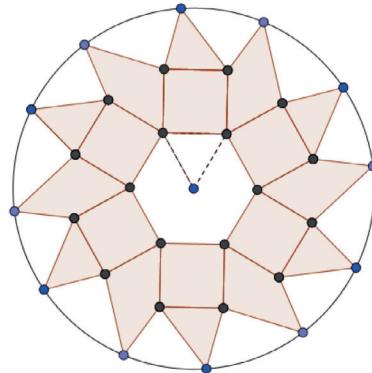


2. On applique ensuite 5 rotations successives de centre O et d'angle 60°. Là encore, le sens n'a pas d'importance. On obtient l'étoile ci-dessous :



Remarques :

- On peut demander aux élèves les plus avancés de démontrer que si on suppose que les triangles sont équilatéraux, les quadrilatères roses sont des losanges.
- Si on ne suppose pas que les triangles sont équilatéraux, on obtient d'autres rosaces comme ci-dessous, qui sont moins ressemblantes à la photo.



30 La rosace de Saint-Pierre

La résolution de ce problème nécessite l'utilisation du théorème de Pythagore, la connaissance des racines carrées et de la factorisation.

On note O le point d'intersection de (B₃B₁) et (B₄B₂).

Pour construire cette rosace, il suffit de construire un des cercles inscrits et d'appliquer successivement 3 rotations de centre O et d'angle 45°.

On va donc commencer par chercher le rayon r de ces cercles. Le triangle OA₁A₂ est rectangle en O, on a donc d'après le théorème de Pythagore :

$$OA_1^2 + OA_2^2 = A_1A_2^2, \text{ on sait que } OA_1 = 4 - r \text{ et } A_1A_2 = 2r.$$

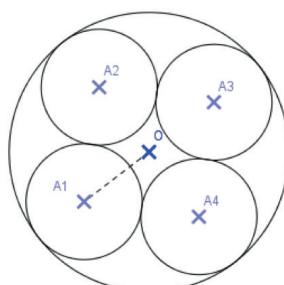
On obtient donc : $2(4 - r)^2 = (2r)^2$ soit $2(4 - r)^2 = 4r^2$
soit $(4 - r)^2 = 2r^2$, vu que r est un nombre positif, on a donc :

$$4 - r = \sqrt{2} \times r \text{ soit } r + \sqrt{2} \times r = 4 \text{ soit } r(\sqrt{2} + 1) = 4.$$

$$\text{On obtient donc : } r = \frac{4}{1 + \sqrt{2}} \approx 1,66 \text{ cm}$$

On a donc $OA_1 \approx 2,34 \text{ cm}$.

Pour tracer la rosace de Saint-Pierre, il suffit donc de construire un cercle de centre O et de rayon 4 cm, de placer le point A₁. De construire ensuite le cercle de centre A₁ de rayon 1,66 cm. Enfin d'appliquer 3 rotations successives de centre O et d'angle 90°.

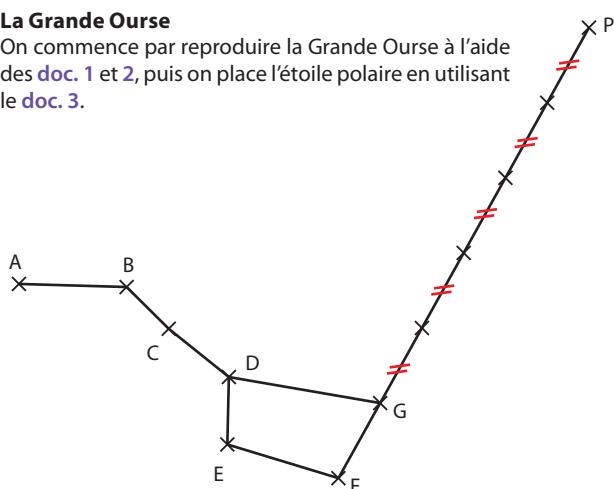


Ce problème est l'occasion de voir une définition de cercles tangents.

31

La Grande Ourse

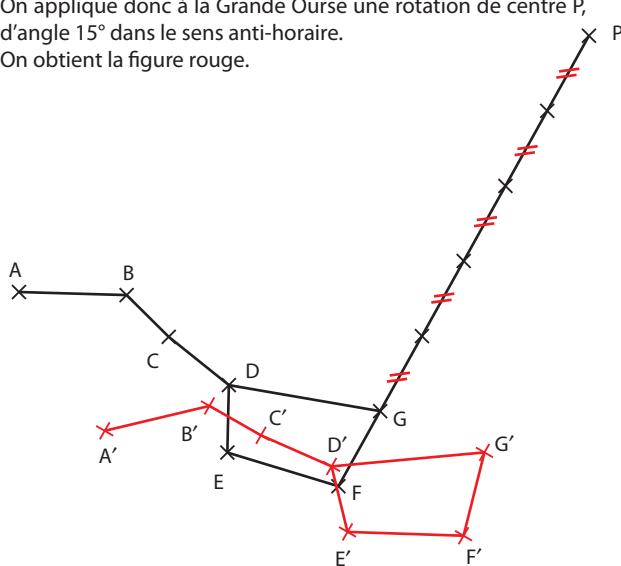
On commence par reproduire la Grande Ourse à l'aide des doc. 1 et 2, puis on place l'étoile polaire en utilisant le doc. 3.



D'après le doc. 3, on sait que la Grande Ourse fait un angle de 360° en 24 heures. Elle tourne donc de 15° en 1 heure.

On applique donc à la Grande Ourse une rotation de centre P, d'angle 15° dans le sens anti-horaire.

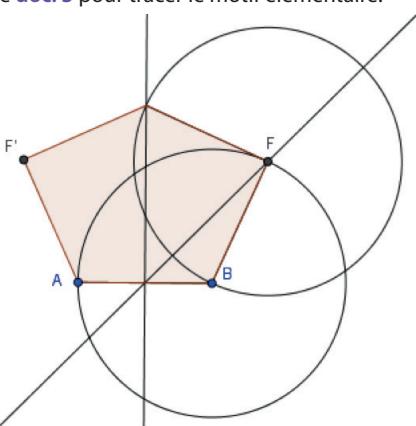
On obtient la figure rouge.



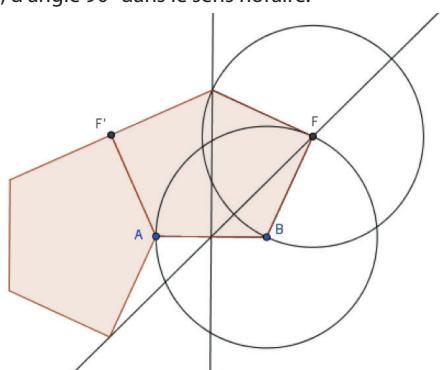
32

Le pavage du Caire

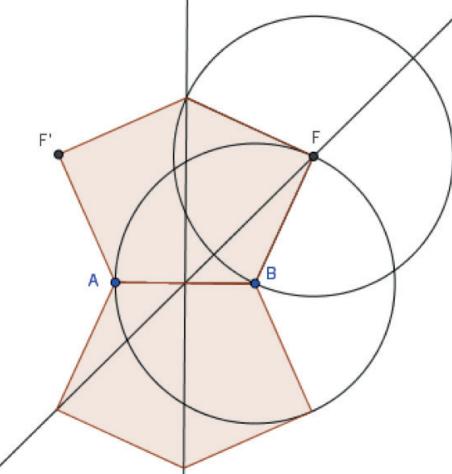
On utilise le doc. 3 pour tracer le motif élémentaire.



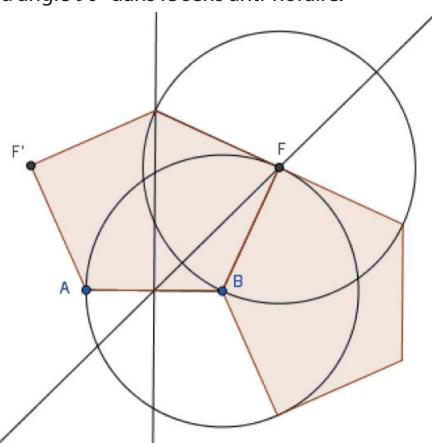
On obtient le pentagone rose en effectuant une rotation de centre F', d'angle 90° dans le sens horaire.



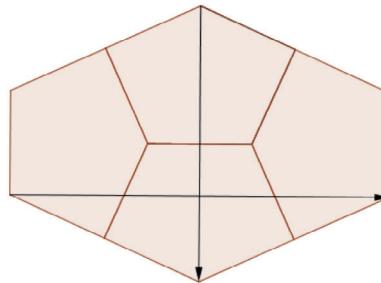
On obtient le polygone vert en effectuant une symétrie d'axe (AB) sur le pentagone bleu.



On obtient le pentagone violet en effectuant une rotation de centre F, d'angle 90° dans le sens anti-horaire.



On obtient le motif du pavage :



Afin d'obtenir un pavage du Caire, on effectue plusieurs fois de suite les 2 translations définies par les flèches ci-dessus.

Algorithmique et outils numériques

33

Ça tourne !

- Maéva a tracé \mathcal{F}_1 car elle a tracé 12 segments.
- Voici les modifications de script pour obtenir chacune des trois autres figures :

Pour \mathcal{F}_2 :

```
répéter 20 fois
  avancer de 15
  tourner ↗ de 18 degrés
```

Pour \mathcal{F}_3 :

```
répéter 6 fois
  avancer de 60
  tourner ↗ de 60 degrés
```

Pour \mathcal{F}_4 :

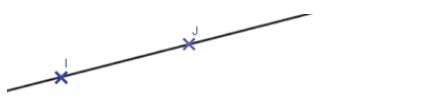
répéter 3 fois
avancer de 120
tourner ⚡ de 120 degrés

34 Droite et translation

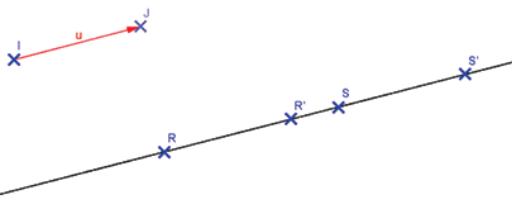
1.



2.



3.

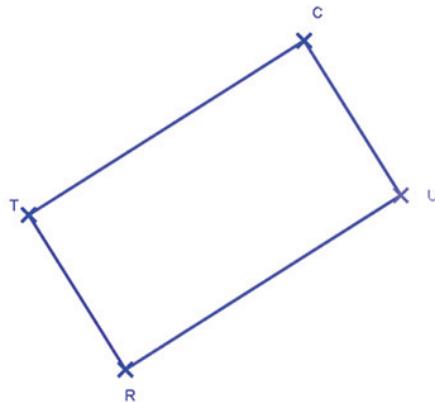


4. Les droites $(R'S')$ et (RS) sont confondues.

Pour aller plus loin, on peut demander aux élèves les plus avancés de donner une justification de ce constat.

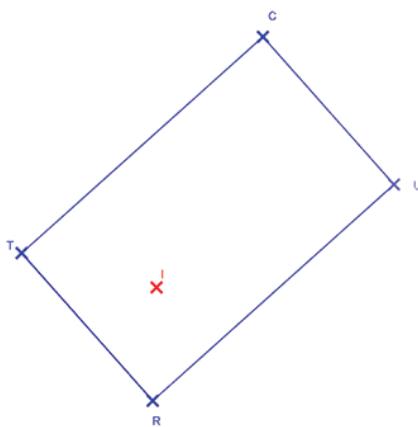
35 Rectangle et translation

1.



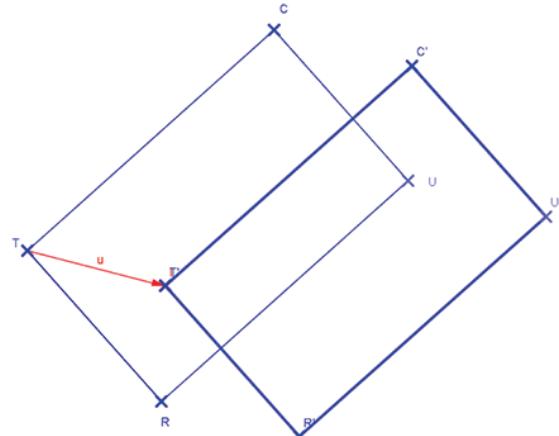
2.

Il faut penser à utiliser l'outil pour placer le point I afin qu'il reste à l'intérieur du rectangle lorsque l'on déplace ce rectangle.



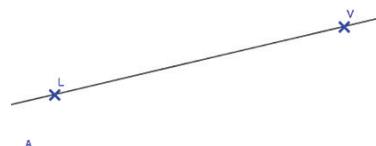
3.

Pour obtenir directement l'image du rectangle TRUC, il suffit de cliquer sur le polygone TRUC et de lui appliquer directement la translation (il n'est pas nécessaire de faire la construction point à point).

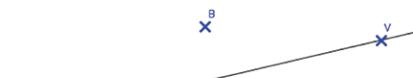


36 Une propriété des translations

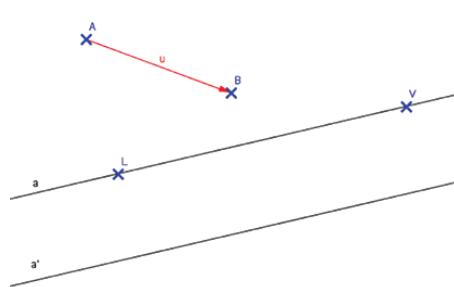
1.



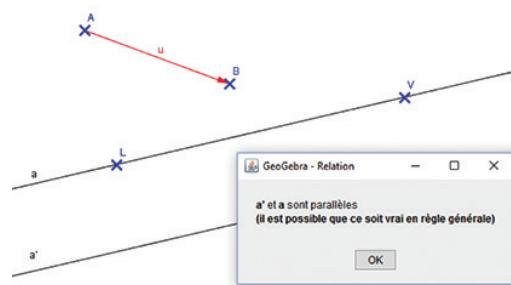
2.



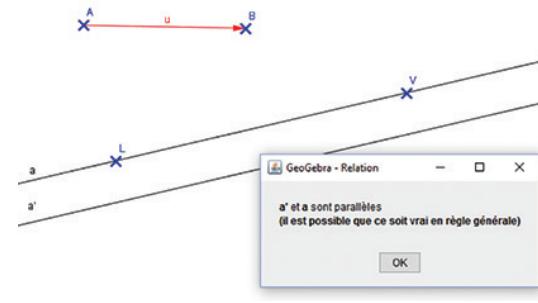
3.



4. Comme l'indique l'outil $a' = b$, la droite (LV) et son image sont parallèles.



5. Les deux droites sont encore parallèles.



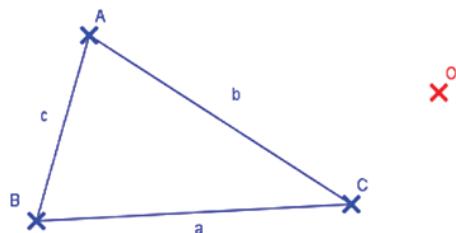
6.

On peut proposer aux élèves de changer plusieurs fois de direction et d'observer la position de (LV) et de son image dans chaque cas avant de conjecturer les propriétés afin de leur apprendre à ne pas faire de déductions hâtives.

On observe que l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.

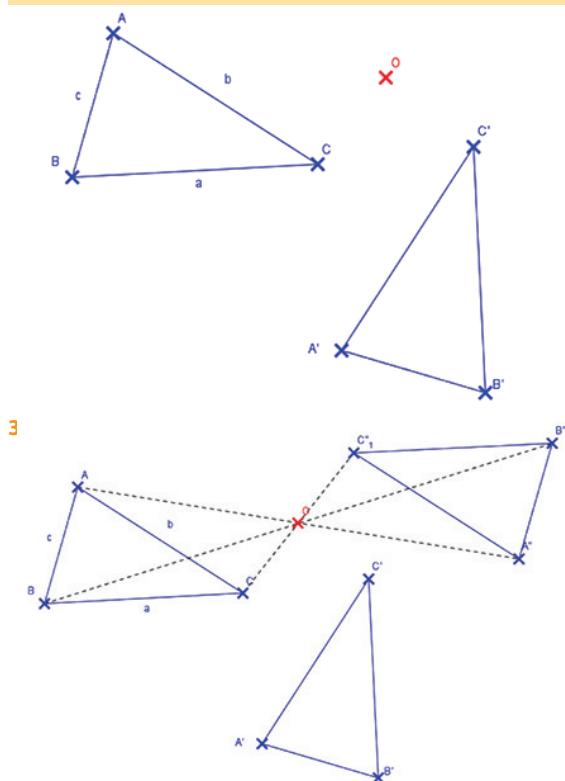
37 Triangle et rotation

1.



2.

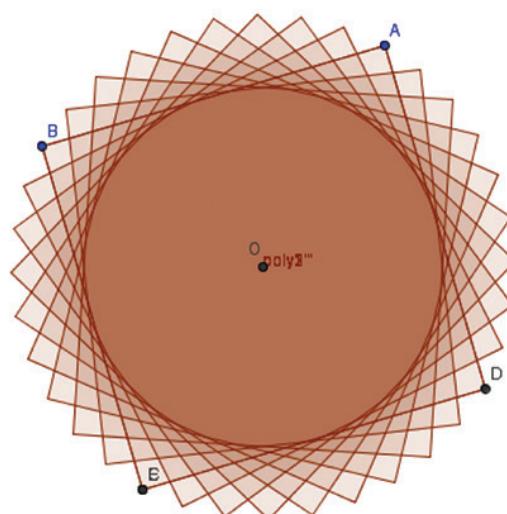
Là encore, on appliquera l'outil rotation au polygone ABC.



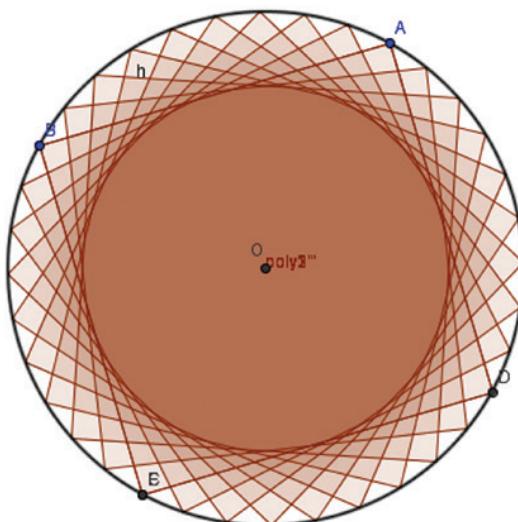
Les triangles $A''B''C''$ et ABC sont symétriques par rapport au point O.

38 Carré tournant

- En appliquant 9 fois de suite la rotation de centre O et d'angle 10° au carré ABCD, on peut obtenir ce logo.
- On commence par construire un carré ABCD et on applique successivement 9 fois la rotation définie ci-dessous. On obtient le logo ci-dessous.



- Les sommets des carrés appartiennent au cercle de centre O passant par A. On peut demander aux élèves de le faire apparaître sur leur figure.

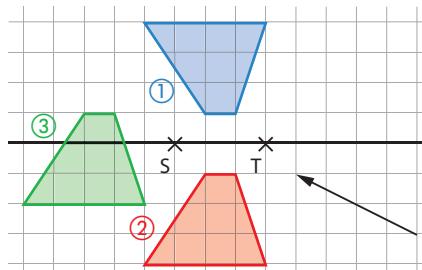


Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

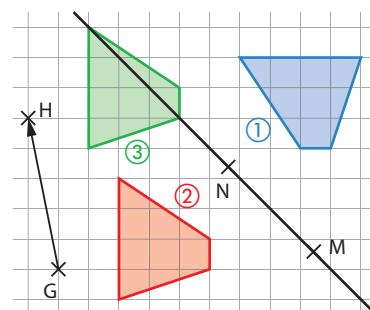
Exercice 1

Éric a effectué une symétrie par rapport à la droite (ST) pour obtenir la figure 2, puis une translation décrise par la flèche ci-dessous pour obtenir la figure 3.



Exercice 1

Éric a effectué une symétrie par rapport à la droite (MN) pour obtenir la figure 2, puis une translation décrise par la flèche ci-dessous pour obtenir la figure 3.



Exercice 2

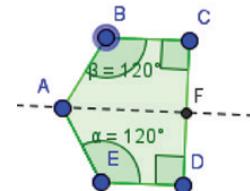
1. Cette rosace verte est constituée de 3 branches. Elle est donc obtenue à partir d'une rotation d'angle 120° ($360 \div 3$) et de centre A.

Le motif de base est un pentagone possédant un axe de symétrie qui peut être obtenu par symétrie axiale à partir d'un trapèze.

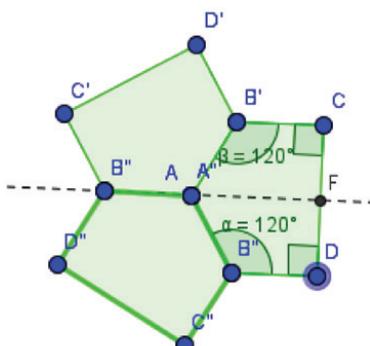
B est l'image de E par la rotation de centre A et d'angle 120° . Donc $\widehat{BAE} = 120^\circ$, soit $\widehat{BAF} = 60^\circ$.

La somme des angles du trapèze ABCF est de 360° (2 triangles), on obtient donc la mesure de $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

On obtient le pentagone suivant comme motif de base :



2. En effectuant, à partir de ce motif, 3 rotations successives de centre A et d'angle 120° , on obtient la rosace suivante :



Exercice 2

Cette rosace bleue est constituée de 12 branches. Elle est donc obtenue à partir d'une rotation d'angle 30° ($360 \div 12$) et de centre O.

Le motif de base est hexagonal et possède un axe de symétrie.

Par cette rotation :

- A est l'image de I ;
- J est l'image de A.

Donc $\widehat{AOJ} = 30^\circ$ et $AO = OJ$.

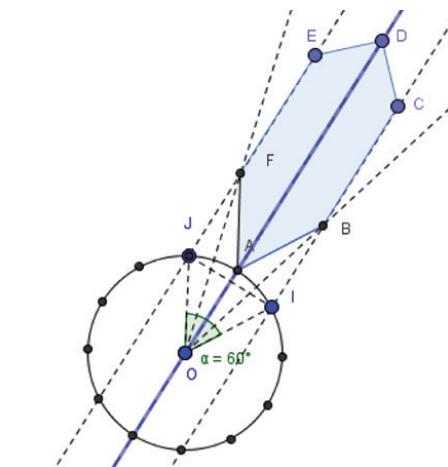
L'angle $\widehat{IOJ} = 60^\circ$ et comme $OI = OJ$, le triangle OIJ est un triangle équilatéral.

On peut commencer par :

- tracer OIJ ;
- tracer son axe de symétrie ;
- construire l'image de I par la rotation.

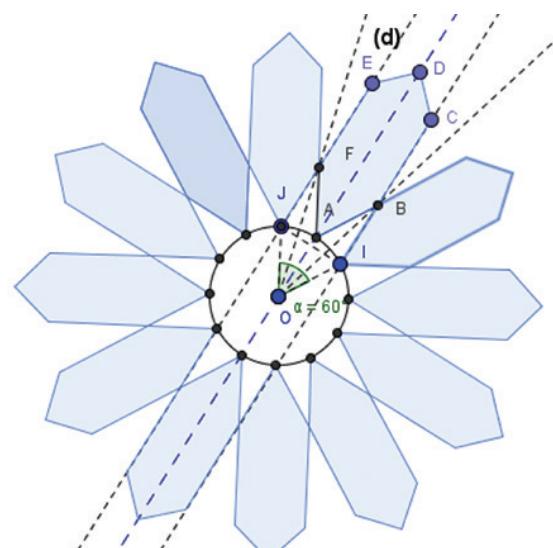
L'image de B par cette rotation est le point F, donc $\widehat{BOF} = 30^\circ$ et $\widehat{AOF} = 15^\circ$, on peut ainsi placer le point F sur (d).

On place également un point E sur (d) et un point D sur l'axe. On trace ensuite les symétriques de E et D par rapport à l'axe (OA).



2. On effectue ensuite successivement 12 rotations de centre O et d'angle 30° à partir de l'hexagone ABCDEF.

On obtient ainsi la rosace ci-dessous :

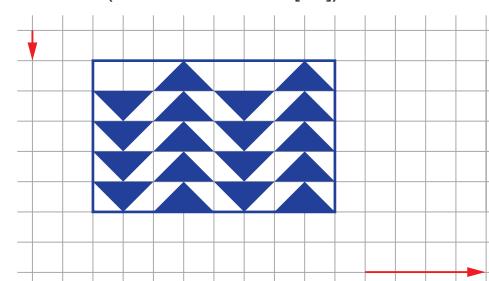


Écriture d'un énoncé

1. Le côté d'un carreau désigne l'unité de longueur.

- En utilisant le quadrillage, tracer un triangle ABC isocèle en A tel que $BC = 2u$, et de hauteur 1 unité.
- Tracer l'image de ABC par la symétrie de centre B.
- On appelle motif la figure constituée de ces deux triangles.
- Construire l'image de ce motif par la translation définie par un déplacement horizontal allant de C vers B et de 4 unités.
- Appliquer ensuite sur le motif et son image 3 translations successives définies par un déplacement vertical allant de A vers I (I étant le milieu de [BC]) de 1 unité.

3.



Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ».

Il permet d'aborder les points suivants du programme :

- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure ;
- comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les angles ;
- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.

Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

- Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève :

- Construire des frises, des pavages, des rosaces.
- Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie.

- Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.

- Repères de progressivité

La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations, sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3^e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquette)

Bénéficiant auprès des élèves d'un aspect attractif grâce à l'introduction d'une nouvelle transformation, ce chapitre peut être traité tôt dans l'année.

Cela permettra de réinvestir les symétries dans l'étude des triangles et des parallélogrammes et de réactiver rapidement la construction de figures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. De plus, les homothéties permettront aux élèves de créer des images mentales comme prémisses au théorème de Thalès.

- Dès le début du cycle, les élèves ont appris à reconnaître et à utiliser les symétries axiale et centrale.

Ils ont utilisé leurs propriétés pour construire mais aussi pour démontrer.

Un travail a été également porté sur la recherche d'axe ou de centre de symétrie.

- En milieu de cycle, deux nouvelles transformations leur ont été présentées sans définition formelle en tant qu'application ponctuelle : la translation et la rotation.

Elles ont été définies par le mouvement physique le plus simple (le plus économique et sans lever la main) permettant de passer d'une figure à une autre.

Ainsi :

- La translation est associée à un glissement rectiligne. Ce déplacement est caractérisé par une flèche (le mot vecteur n'est pas employé).

- La rotation est associée à l'action de tourner autour d'un point et est caractérisée par un centre, un angle et un sens de rotation. Il peut être nécessaire pour les plus fragiles de poursuivre et d'enrichir le travail sur ces transformations en classe de 3^e avant d'aborder les homothéties.

Elles seront introduites dans la même logique que la translation et la rotation, à savoir sans définition formalisée en tant qu'application ponctuelle mais définies par le mouvement le plus simple permettant de passer d'une figure à une autre et modélisant ainsi les agrandissements et les réductions.

Une homothétie sera caractérisée par un centre et un rapport k .

- L'objectif de cette première approche des homothéties sera, comme pour la translation et la rotation :

- de former et de dégager des concepts et des images mentales. Cela sera utile pour percevoir globalement les figures et leurs images par ces nouvelles transformations. Cela permettra également d'anticiper et de contrôler les effets de ces transformations ;
- de la reconnaître et de l'identifier par un centre et un rapport ;
- de construire globalement, et non point à point, l'image d'une figure en utilisant les images mentales et les propriétés de ces transformations.

Par ailleurs, les homothéties donnent l'occasion aux élèves de rencontrer pour la première fois une transformation qui ne conserve pas les longueurs et permettent une première approche du théorème de Thalès.

- Les constructions à l'aide des instruments de tracé seront essentiellement réalisées à l'aide de quadrillages et demeureront très simples, notamment pour le choix des angles des rotations (90° et 45°).

Pour les homothéties, mis à part le cas particulier de $k = -1$, qui donne l'occasion de donner une troisième définition de la symétrie centrale, on pourra réservé les constructions dans le cas où le rapport est négatif aux élèves les plus avancés.

- Dans ce chapitre, l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique est fortement recommandé et souvent nécessaire à la réalisation des activités et des problèmes. En plus de permettre aux élèves de se familiariser avec ses fonctionnalités, ses nombreuses utilisations auront l'avantage de favoriser une bonne imprégnation d'images mentales (avec ou sans quadrillage) et permettront la réalisation de belles constructions comme des frises, des pavages et des rosaces.

- Pour aborder sereinement ce chapitre, les élèves devront :
 - connaître la notion d'angles, maîtriser les calculs d'angles ;
 - reconnaître et repérer des droites parallèles à l'aide d'un quadrillage ou sur papier blanc ;
 - savoir décrire une direction à l'aide d'un quadrillage ;
 - reconnaître un agrandissement, une réduction et en calculer le coefficient ;
 - savoir calculer des aires.

1. • On a utilisé une symétrie axiale dans le cas **b**.
• On a utilisé une symétrie centrale dans le cas **d**.
• On a utilisé une rotation dans le cas **c**.
• On a utilisé une translation dans le cas **a**.
2. • L'outil  sert à construire l'image par une symétrie axiale.
• L'outil  sert à construire l'image par une symétrie centrale.
• L'outil  sert à construire l'image par une rotation.
• L'outil  sert à construire l'image par une translation.

3. Pour aller de A vers B, on se déplace de 4 carreaux vers la droite et on monte de 1 carreau.
4. $1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; 4^2 = 16 ; 5^2 = 25 ; 6^2 = 36 ; 7^2 = 49 ; 8^2 = 64 ; 9^2 = 81 ; 10^2 = 100$.
5. Les dimensions du second rectangle sont 9 cm et 12,6 cm.
6. Diviser par 5, c'est multiplier par $\frac{1}{5}$, cela revient donc à multiplier par 0,2.

Jeu vidéo

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir l'homothétie. Les prérequis nécessaires sont de reconnaître et caractériser des symétries, des translations et des rotations, connaître la notion d'agrandissement, les coordonnées d'un point, savoir calculer avec des nombres relatifs.

La capacité introduite est de transformer une figure par homothétie.

Les constructions des quatre portes ainsi que la modélisation des déplacements par les trois premières transformations ne posent pas de problème pour les élèves.

Cependant, parler de transformation pour la porte 4 peut être perturbant pour certains.

C'est une rupture pour les élèves avec toutes les transformations qu'ils connaissent et pratiquent depuis plusieurs années, car c'est la première fois qu'ils rencontrent une transformation qui ne conserve pas les longueurs.

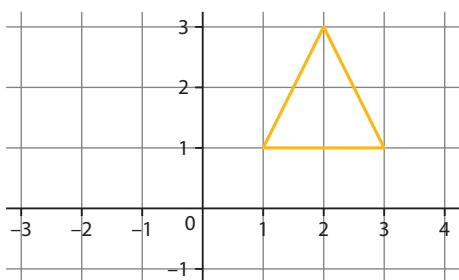
Cependant, étant familiarisés avec les agrandissements et les réductions depuis le début du cycle, ils iront vers cette nouvelle transformation naturellement.

Il devra émerger les deux éléments qui caractérisent une homothétie : un centre et un rapport.

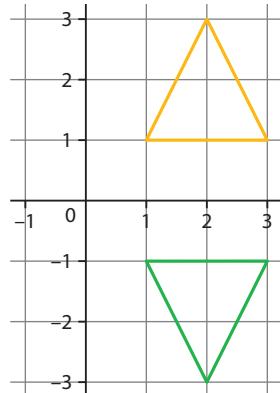
La formalisation d'une définition n'est pas nécessaire à ce stade si les élèves n'en éprouvent pas le besoin.

Un travail de groupe précédé d'un travail individuel permettra de construire plus efficacement cette nouvelle transformation.

1.

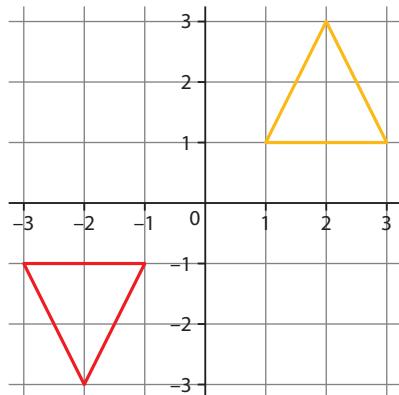


2. Niveau 1



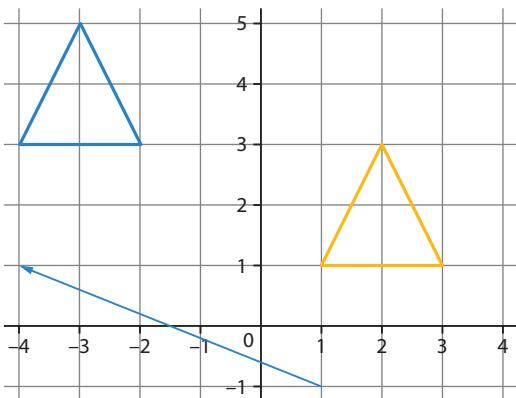
Le triangle vert est le symétrique du triangle jaune par rapport à l'axe des abscisses.

Niveau 2



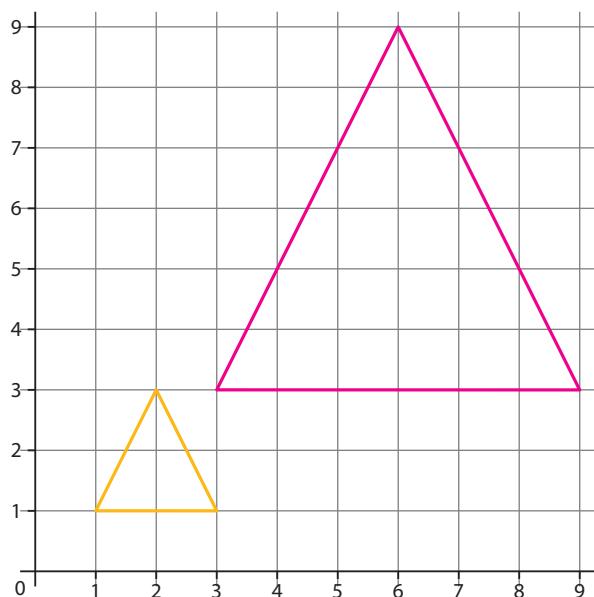
Le triangle rouge est le symétrique du triangle jaune par rapport au centre du repère.

Niveau 3



Le triangle bleu est l'image du triangle jaune par la translation définie par la flèche bleue.

Niveau 4

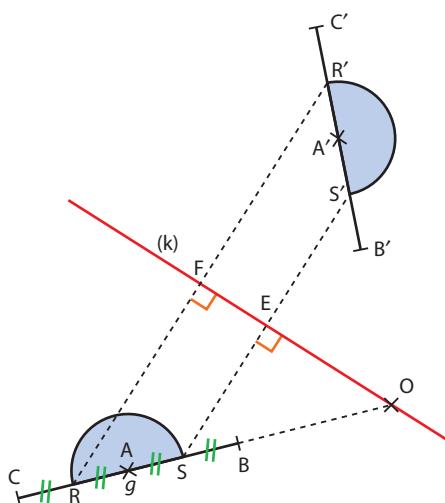
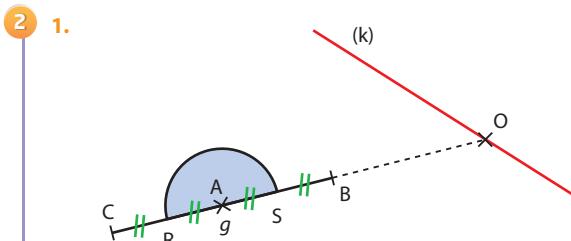


Exercices

Transformer une figure par symétrie, translation ou rotation

Questions flash

- 1.**
- Les triangles rose et violet sont symétriques par rapport à un axe.
 - Les triangles rose et bleu sont symétriques par rapport à un point.
 - Le triangle bleu est l'image du triangle beige par une translation.
 - Le triangle rose est l'image du triangle vert par une rotation.



Pour obtenir le triangle rose, on agrandit le triangle jaune dans un rapport (ou un coefficient) égal à 3 tout en faisant glisser ces sommets le long de droites passant par O, l'origine du repère.

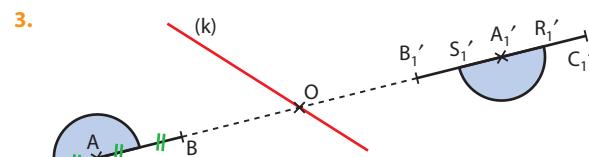
On définit ainsi une nouvelle transformation caractérisée par un centre et un nombre.

Cette transformation est appelée l'*homothétie de centre 0 et de rapport 3*.

Il est naturel pour les élèves de parler de coefficient ; par contre le centre peut être un peu plus difficile à faire émerger.

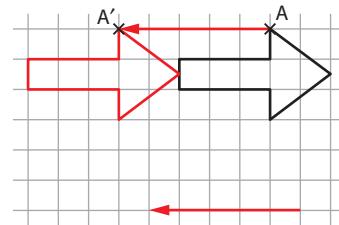
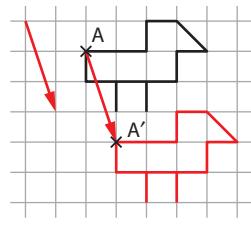
On pourra amener les élèves vers une réflexion suivant la position de cet agrandissement par rapport au triangle jaune et faire ainsi apparaître la nécessité d'introduire un point pour caractériser cette nouvelle transformation.

Il est important d'insister sur le fait que l'on a défini une transformation qui ne conserve pas les dimensions d'une figure. On peut demander aux élèves de construire l'image des triangles vert, rouge et bleu par cette nouvelle transformation.

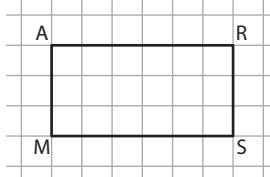


- 3.**
- L'image du point A est le point D.
 - L'image du point E est le point H.
 - L'image du point F est le point G.

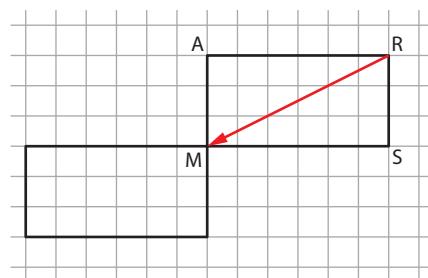
- 4.**
-



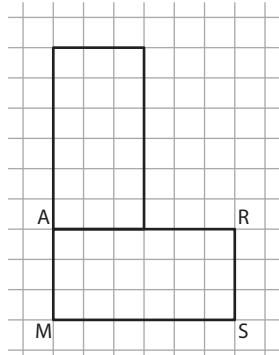
- 5. 1.**



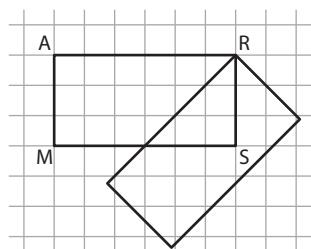
- 2.**



3.



4.



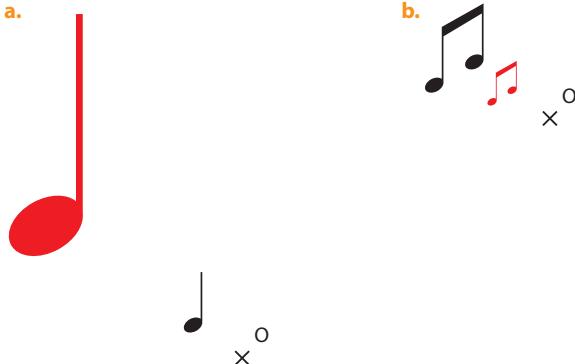
Transformer une figure par homothétie

Questions flash

6.

- a. La figure bleue n'est pas correcte car elle est dans le mauvais sens.
- b. La figure verte n'est pas correcte car elle est trop basse.
- c. La figure bleue n'est pas correcte car elle est mal placée (pas alignée avec les deux autres).
- d. La figure verte n'est pas correcte car elle est penchée.

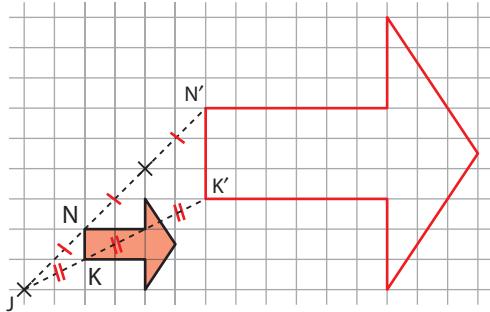
7.



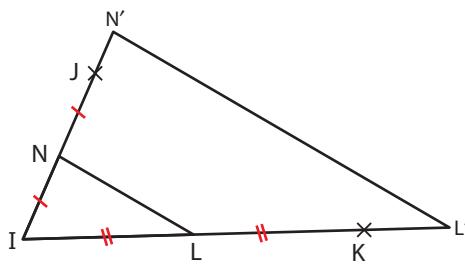
Remarque : Pour les exercices de construction 8, 9 et 10, on pourra proposer aux élèves les plus fragiles de les effectuer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique afin qu'ils puissent davantage se concentrer sur le concept et sur les images mentales que sur la manipulation des instruments.

8.

On peut commencer par construire l'image des points K et N, puis compléter en utilisant les propriétés de l'homothétie.

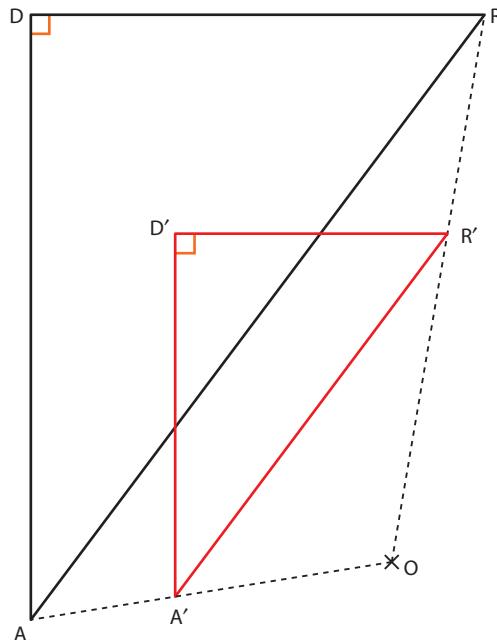


9.



10.

1. et 2. Pour construire l'image de DRA par l'homothétie de centre O et de rapport 0,6, on peut tracer les images D' et R'. On trace la demi-droite [OR], puis on place le point R' tel que $OR' = 0,6 \times OR$. On recommence pour le point D puis on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont inchangés et les longueurs multipliées par 0,6.



11.

- Par une homothétie de rapport 4, les longueurs sont multipliées par 4 donc les périmètres également :
 $\mathcal{P}_{R'H'I'N'} = (3,5 + 2) \times 2 \times 4 = 44 \text{ cm}$.
- Par une homothétie de rapport 4, les aires sont multipliées par 4^2 soit par 16 donc :
 $\mathcal{A}_{R'H'I'N'} = (3,5 \times 2) \times 16 = 7 \times 16 = 112 \text{ cm}^2$.

12.

12. Par une homothétie de rapport k , les aires sont multipliées par k^2 . Donc :
- $\mathcal{A}_{\text{fig.1}} = 1,5 \times 0,5^2 = 0,375 \text{ cm}^2$
 - $\mathcal{A}_{\text{fig.2}} = 1,5 \times 0,3^2 = 0,135 \text{ cm}^2$
 - $\mathcal{A}_{\text{fig.3}} = 1,5 \times 0,2^2 = 0,06 \text{ cm}^2$

13.

- Im 1 est l'image du robot par H4.
- Im 2 est l'image du robot par H5.
- Im 4 est l'image du robot par H1.
- Im 3 est l'image du robot par H2.
- Im 5 est l'image du robot par H3.

Analyser et construire des frises, des pavages et des rosaces

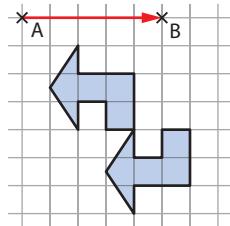
Questions flash

14.

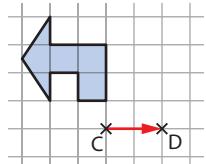
- a. On obtient le motif du pavage en effectuant une symétrie centrale de centre O.
- b. On obtient le motif du pavage en effectuant deux rotations successives de centre I et d'angle 120° .
- c. On obtient le motif du pavage en effectuant une symétrie axiale.
- d. On obtient le motif du pavage en effectuant cinq rotations successives de centre O et d'angle 60° .



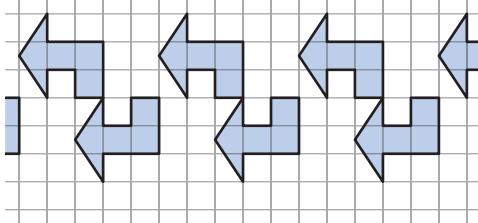
- 15** 1. La translation qui transforme A en B permet d'obtenir la frise à partir du motif ci-dessous.



2. En effectuant à partir du motif ci-dessous une symétrie axiale suivie d'une translation dans la même direction, on obtient le motif élémentaire précisé à la question 1.



3.



Problèmes

- 16** Fête foraine

$$180 \div 4 = 45$$

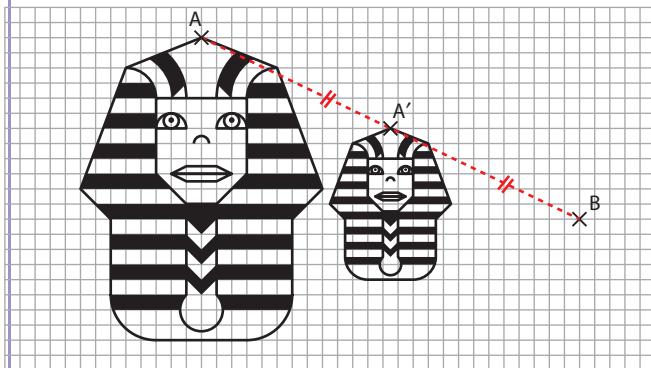
Donc chaque secteur angulaire mesure 45° .

$$4 \times 45 = 135$$

Julia va donc gagner 3 points.

- 17** Le pharaon

1. et 2. On peut commencer par construire l'image du point A, puis on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont conservés et les longueurs divisées par 2.



- 18** Les Daltons

1. Lili pense à la symétrie axiale et à l'homothétie.

2. Antone a raison, il n'y a ni symétrie ni homothétie.

Par exemple, il manque les gouttes de sueur de Joe sur son image sur l'eau pour la symétrie.

Les proportions pour le nez de William, Jack et Averell ne sont pas respectées.

On pourra bien sûr faire constater d'autres arguments à l'oral et les noter sur la figure : alignements de points non respectés...

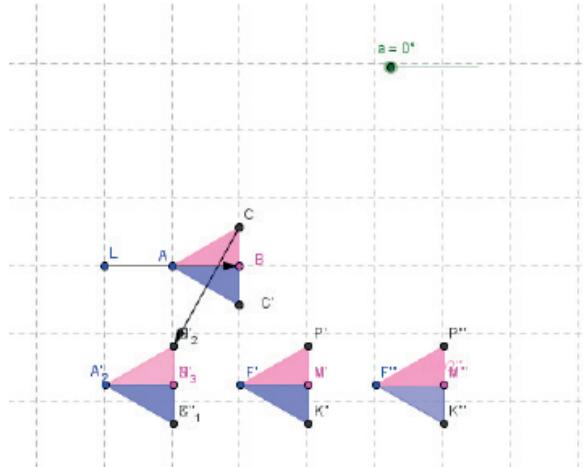
- 19** Le bijou

1. • Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

- Construire le symétrique ABC' de ABC par rapport à la droite (AB).
- Effectuer 5 rotations successives sur les triangles ABC et ABC' de centre B et d'angle $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ et 300° (ou bien 5 rotations de même angle sur les images successives).

Remarque : ici, le sens n'a pas d'importance.

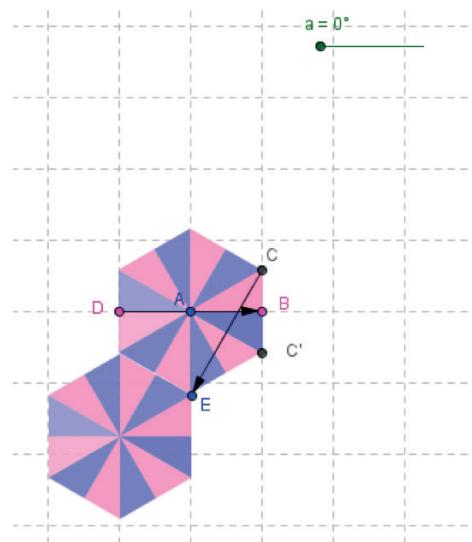
- On trace ensuite l'image de chacun des 12 triangles par la translation qui transforme C en E.
- On obtient ainsi le motif de base ci-dessous.



Pour obtenir la frise représentant le modèle du bijou, on applique successivement 5 translations sur ce motif de base.

2. On utilisera donc les outils suivants : ; ; .

On peut également utiliser un curseur en affichant les traces des deux triangles.



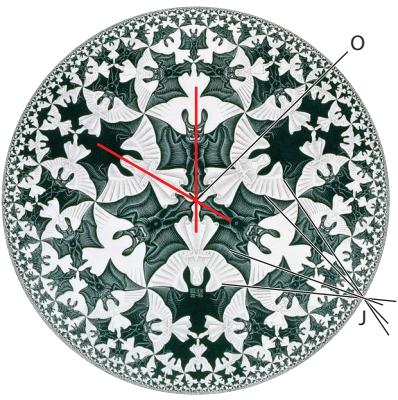
- 20** Hygiène et sécurité

Panneau 1 : symétrie axiale et homothétie.

Panneau 2 : symétrie axiale et rotation.

- 21** Transformations artistiques

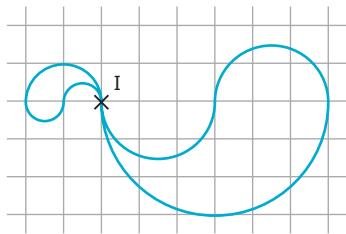
- La rosace centrale est construite à partir d'un motif composé d'une chauve-souris imbriquée dans un ange sur lequel on applique successivement des rotations de centre O et d'angle 120° .
- Cet ange et cette chauve-souris ont chacun un axe de symétrie.
- On observe également que certaines chauve-souris ont subi une homothétie par rapport à d'autres. Il en est de même pour certains anges. Sur la figure ci-dessous, on observe une homothétie de centre J.



22 The torn page

- Zoé a effectué une homothétie de centre I et de rapport -2.
-

Ici, le rapport de l'homothétie est négatif, cela peut poser des problèmes à certains élèves.
On insistera sur le fait que lorsque l'on fait glisser les points de la figure de l'autre côté du centre, la figure effectue un demi-tour autour de ce centre.
Pour les élèves plus fragiles, il peut être intéressant de leur proposer d'utiliser un logiciel pour tracer les images des arcs de cercle.



23 La Lune et le Soleil

Les points T, L et S sont alignés. Les points T, L' et S' sont alignés :

$$\frac{TL}{TS} = \frac{LL'}{SS'} = 2,5 \times 10^{-3}$$

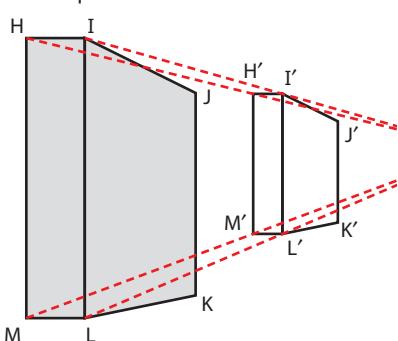
La transformation permettant de passer du disque représentant le Soleil à celui représentant la Lune est une homothétie de centre T et de rapport $2,5 \times 10^{-3}$.

24 La tache d'encre

Pour poursuivre le travail de Pierre on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont inchangés et les longueurs divisées par 2.

On commence donc par construire l'angle $\widehat{I'T'J'}$ tel qu'il ait la même mesure que l'angle \widehat{LIJ} et tel que $I'J' = IJ \div 2$.

On trace ensuite l'angle $\widehat{I'L'K'}$ tel qu'il ait la même mesure que l'angle \widehat{ILK} et tel que $L'K' = LK \div 2$.



25 La piste aux étoiles

On aura besoin de la trigonométrie pour la question 3.

-

Attention ! La construction du losange n'est pas évidente, elle nécessite l'analyse d'une figure à main levée.

Comme ce losange est le motif de la rosace obtenue par une même rotation de centre C appliquée 4 fois, on obtient que l'angle $\widehat{BCD} = 72^\circ$. On a donc $\widehat{BCA} = 36^\circ$.

De plus, B appartient à la médiatrice de [AC] et (AC) est un axe de symétrie du losange.

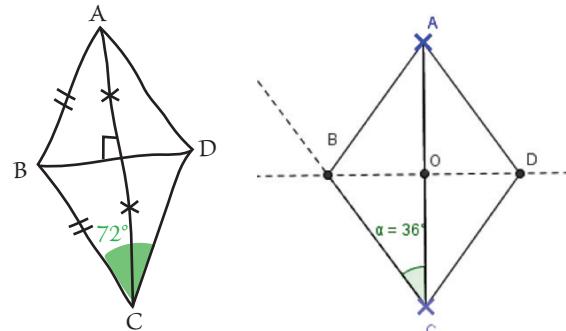
On peut donc commencer par construire le triangle ABC :

- tracer [AC] tel que $AC = 4 \text{ cm}$;
- tracer l'angle \widehat{ACx} tel que $\widehat{ACx} = 36^\circ$;
- tracer la médiatrice de [AC] ;
- noter B à l'intersection de cette médiatrice et de [Cx].

On construit ensuite le symétrique de ABC par rapport à la droite (AC).

On obtient la figure ci-dessous.

L'étoile est obtenue en effectuant 4 rotations de centre C et d'angle 72° sur les images successives de ce losange.



-



3. • Calculons l'aire du losange ABCD :

Le losange ABCD est constitué de 4 triangles rectangles superposables ; calculons l'aire d'un de ces triangles.

Pour cela, on commence par calculer la longueur OB.

Dans le triangle OCB rectangle en O, on a :

$$\tan 36^\circ = \frac{OB}{OC} = \frac{OB}{2}, \text{ donc } OB = \tan 36^\circ \times 2 \approx 1,46 \text{ cm.}$$

Donc $\mathcal{A}_{BOC} = (2 \times OB) \div 2 \approx (2 \times 1,46) \div 2 \approx 1,46 \text{ cm}^2$.

Donc l'aire du losange ABCD est environ :

$$1,46 \times 4 = 5,84 \text{ cm}^2$$

• Calculons l'aire de l'étoile de base :

La rotation conserve les aires donc : $5,84 \times 5 = 29,2 \text{ cm}^2$. L'aire de l'étoile de base est donc $29,2 \text{ cm}^2$.

• Calculons l'aire des 6 étoiles :

Chaque étoile est l'image de l'étoile de base par une homothétie de rapport 0,7 ; 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1.

Or, par une homothétie de rapport k ($k > 0$), les aires sont multipliées par k^2 .

$$\mathcal{A} \approx 29,2 \times (1 + 0,7^2 + 0,5^2 + 0,3^2 + 0,2^2 + 0,1^2) \approx 54,9 \text{ cm}^2$$

Chacune de ces étoiles est agrandie dans un rapport de 10.

Caroline devra donc peindre une surface de :

$$54,9 \times 10^2 = 5490 \text{ cm}^2 \text{ soit environ } 0,6 \text{ m}^2$$

Or sa bombe peut couvrir $1,5 \text{ m}^2$.

Elle aura donc assez de peinture avec cette bombe.

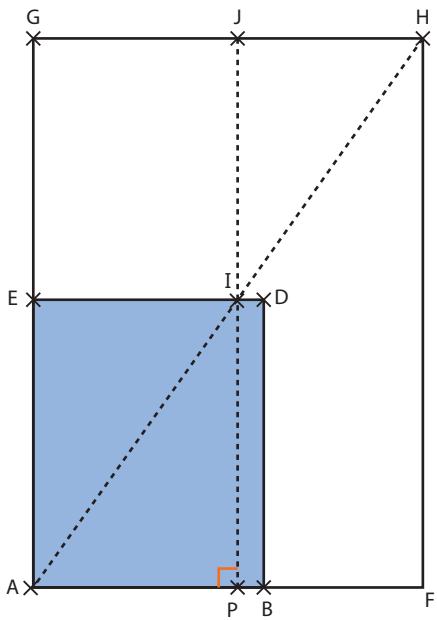
26 Le recadrage

- Un rectangle de dimensions $21 \times 29,7$ n'est pas un agrandissement d'un rectangle de $10 \times 12,5$ car :

$$\frac{21}{10} = 2,1 \text{ et } \frac{29,7}{12,5} = 2,376.$$

Hervé devra donc rogner sa photo de départ.

- On va rogner le rectangle ABDE de sorte que AFHG soit l'image du nouveau rectangle dans une homothétie de centre A.



27 Pont à haubans

Remarques : pour la question 3., on se sert de la propriété démontrée dans l'exercice 15 :

« L'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle ».

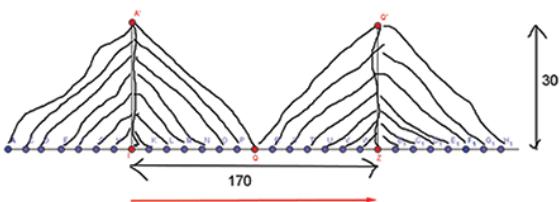
Cette propriété est démontrée en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.

La réalisation d'un schéma à main levée est indispensable pour réaliser la figure demandée.

1. On commence par étudier le doc. 1 :

- sachant qu'il y a 14 haubans par pylône, il y a 7 points d'ancre régulièrement espacés sur chaque pylône;
- sachant qu'il y a 27 points de fixation sur le tablier et que les haubans partent symétriquement des pylônes, il y a 13 points d'ancre entre les deux pylônes et 7 autres de chaque côté des pylônes.

On obtient le schéma suivant que l'on complète grâce au doc. 2 :



Comme les points de fixation sont régulièrement espacés, chaque hauban est l'image d'un autre hauban par une homothétie.

- Construction d'une réduction à l'échelle 1/1 000 :
 - on commence par construire le segment $[IZ]$ de longueur 0,170 m = 17 cm ;
 - on place le milieu Q de $[IZ]$;
 - on construit le segment $[IA']$ de longueur 0,03 m = 3 cm ;
 - on trace $[QA']$;
 - on construit ensuite les images successives de $[QA']$ par des homothéties de centre I et de rapport :

$$\frac{6}{7} ; \frac{5}{7} ; \frac{4}{7} ; \frac{3}{7} ; \frac{2}{7} ; \frac{1}{7}$$

- on construit le symétrique des 7 segments par rapport à la droite (IA') ;
- on construit l'image du pylône et des 14 haubans par la translation définie par la flèche rouge.

Voir figure en bas de page.

2. Calculons la longueur du hauban $[QA']$:

- Le triangle QIA' est rectangle en I ; d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$QA'^2 = IQ^2 + IA'^2$$

$$QA'^2 = 85^2 + 30^2$$

$$QA'^2 = 8\,125 \text{ donc } QA' \approx 90,14 \text{ cm.}$$

- Une homothétie de rapport positif multiplie les longueurs par son coefficient.

Donc la longueur nécessaire à la construction de 7 haubans est :

$$90,14 \times \left(1 + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = 90,14 \times \frac{28}{7}$$

$$= 90,14 \times 4$$

$$= 350,56 \text{ cm}$$

- La longueur totale d'acier nécessaire est donc :

$$350,56 \times 4 = 1\,442,24 \text{ cm.}$$

3. On a démontré dans l'ex. 31 que l'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle.

On peut donc dire que les 7 haubans situés du même côté d'un pylône sont parallèles.

28 Fabrication d'un pantographe

1. $[OB]$ est l'image du segment $[OA]$ par l'homothétie de centre O et de rapport 0,4.

Donc $OB = 0,4 \times OA = 0,4 \times 54 = 21,6$; B est donc le point de $[OC]$ tel que $OB = 21,6$ cm.

$[BM']$ est l'image du segment $[AM]$ par l'homothétie de centre O et de rapport 0,4.

Donc $BM' = 0,4 \times AM = 0,4 \times 54 = 21,6$.

De plus, $M'CAB$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont donc de même longueur.

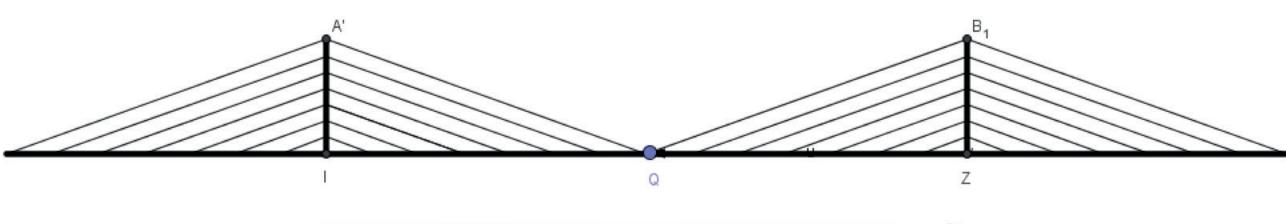
Donc $AC = BM' = 21,6$ cm et C est le point de $[AM]$ tel que $AC = 21,6$ cm, et dans ce cas $CM' = AB = 54 - 21,6 = 32,4$ cm.

2. Pour obtenir des agrandissements, il suffit de placer le stylo guide en M' .

Sachant que $OM' = 0,4 \times OM$, on a :

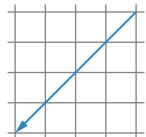
$$OM = \frac{1}{0,4} \times OM' = 2,5 \times OM'.$$

Ainsi le triangle OAM sera l'image du triangle OBM' dans l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.



29 Un triangle dans tous ses états

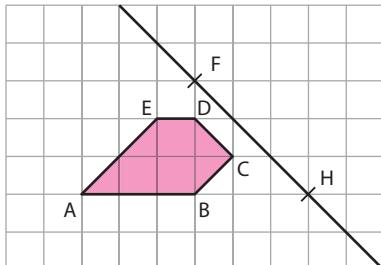
- Le triangle ② est l'image du triangle ① par la rotation de centre le sommet commun à ces deux triangles, d'angle 135° dans le sens antihoraire.
- Le triangle ③ est l'image du triangle ① par la symétrie d'axe (AB).
- Le triangle ④ est l'image du triangle ① par la translation définie par la flèche suivante :



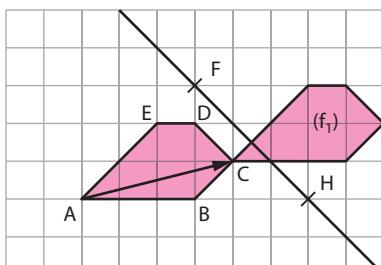
- Le triangle ⑤ est l'image du triangle ① par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
- Le triangle ⑥ est l'image du triangle ① par la symétrie de centre A.

30 Une foule de transformations

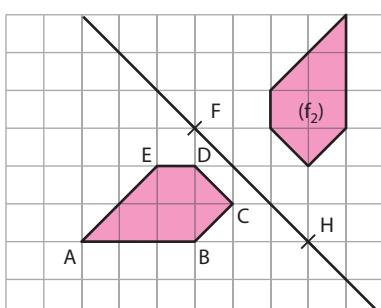
1.



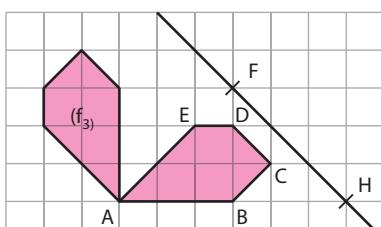
2. a.



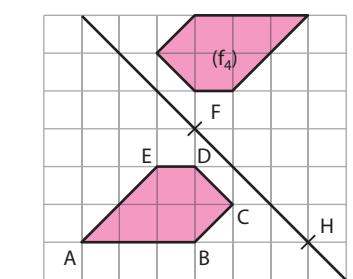
b.



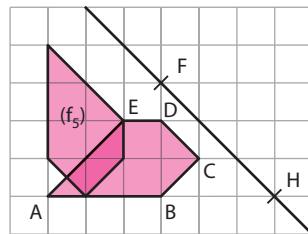
c.



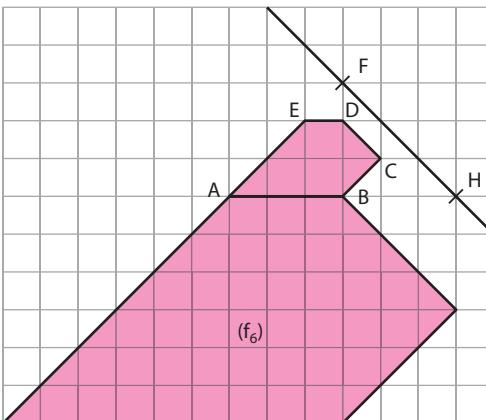
d.



e.



f.



31 La chambre noire

Cet exercice donne aux élèves la possibilité de bien visualiser une homothétie de rapport négatif comme étant un agrandissement ou une réduction suivie d'un demi-tour.

On commence par calculer le rapport de la réduction :

$$OA \times \text{coef} = OB, \text{ donc coef} = \frac{OB}{OA} = \frac{50}{1500} = \frac{1}{300}.$$

Pour les élèves les plus avancés, on peut demander quel est le rapport de l'homothétie.

$$\text{Le rapport de l'homothétie est : } -\frac{1}{300}.$$

Lors d'une réduction de rapport $\frac{1}{300}$, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{300}$.

$$12 \times \frac{1}{300} = 0,04$$

Donc la hauteur de l'image du sapin sur l'écran de Sarah sera de 0,04 m soit 4 cm.

32 La mini-rampe

1. On commence par étudier le doc. 1 :

- La face avant peut être modélisée par un rectangle auquel on a enlevé un demi-disque de rayon R et un rectangle de longueur R .

Calculons R , le rayon du disque sur le schéma :

$$R = (BE - CD) \div 2 - AJ = (25 - 5) \div 2 - 3 = 7$$

- Les dimensions du rectangle sont donc 7 cm sur 5 cm.

L'aire du demi-disque est $\frac{\pi \times 7^2}{2} \approx 76,96 \text{ cm}^2$.

L'aire du petit rectangle est $5 \times 7 = 35 \text{ cm}^2$.

L'aire de la face avant est donc environ :

$$25 \times 8 - 76,96 - 35 = 88,04 \text{ cm}^2.$$

Le schéma est une réduction à l'échelle 1/20 donc la face avant peut être considérée comme un agrandissement de rapport 20.

L'aire de la face avant est donc environ :

$$88,04 \times 20^2 = 35 216 \text{ cm}^2 = 3,521 6 \text{ m}^2.$$

Donc la surface des faces avant et arrière est :

$$3,521 6 \times 2 = 7,043 2 \text{ m}^2.$$

- Grâce au document 2, on sait que 1 litre de peinture couvre 12 m^2 donc 0,5 litre couvre $6,5 \text{ m}^2$. Il faudra deux bidons de 0,5 litre. Le père de Baptiste devra donc payer au minimum 42,34 €.

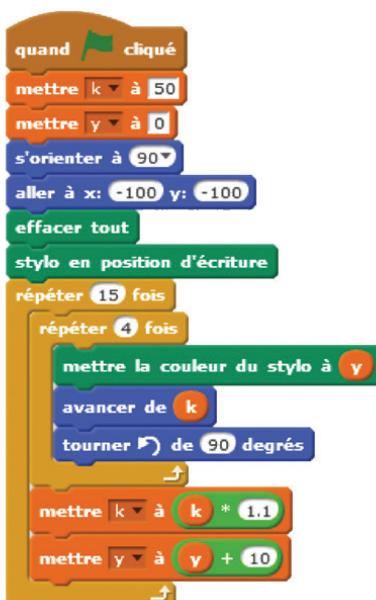
2. Grâce au doc. 2, on sait que le temps de séchage de la peinture est de 2 heures.

33 Effet tunnel

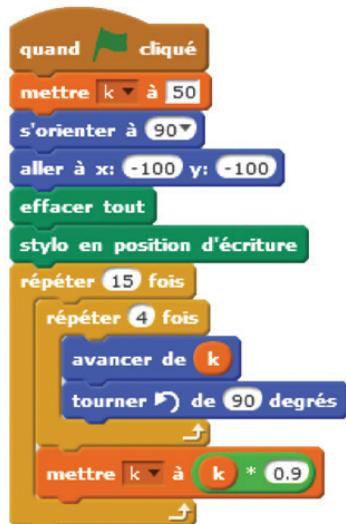
1. Ce script permet de tracer un carré.
2. a. Au début de l'exécution du script, la variable k vaut 50.
- b. Avant que la variable k ne change de valeur, la longueur est 50 unités.
- c. Quand la variable k change de valeur pour la première fois, sa nouvelle valeur est $50 \times 1,1$ soit 55.
- d. Ce script permet de tracer 15 carrés.
- e. C'est une homothétie de centre le point de coordonnées $(-100; -100)$ et de rapport 1,1.
- f. Par une homothétie de rapport 1,1 les longueurs sont multipliées par 1,1.
La longueur du dernier carré tracé est donc $50 \times 1,1^{14}$ soit 189,874 916 8 unités soit environ 190 unités.
Son aire vaut donc :

$$189,874\ 916\ 8^2 \approx 36\ 052 \text{ unité}^2.$$

3. a. Il est possible de donner une variable à la couleur du stylo et ainsi de faire varier le ton de la couleur allant de rouge à magenta.

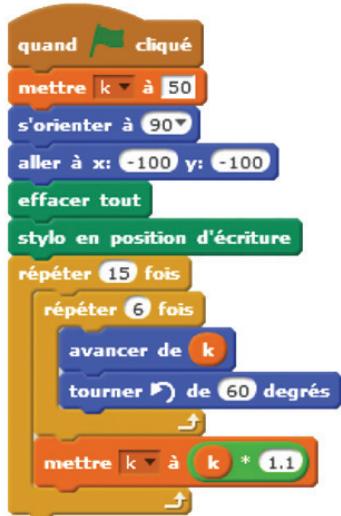


- b. Pour avoir une réduction, il faut que le rapport de l'homothétie soit inférieur à 1.



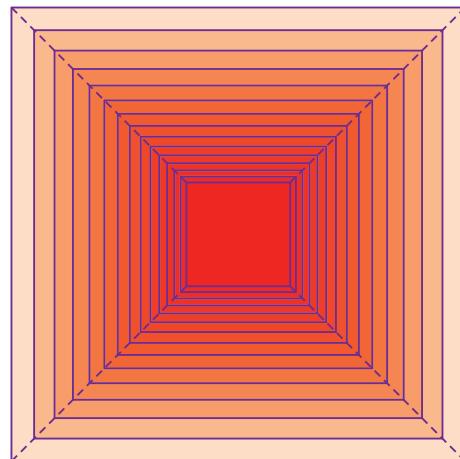
c.

Attention ! On tourne dans le sens antihoraire donc on tourne de 60° par rapport à l'horizontale et non de 120°.



34 De la profondeur

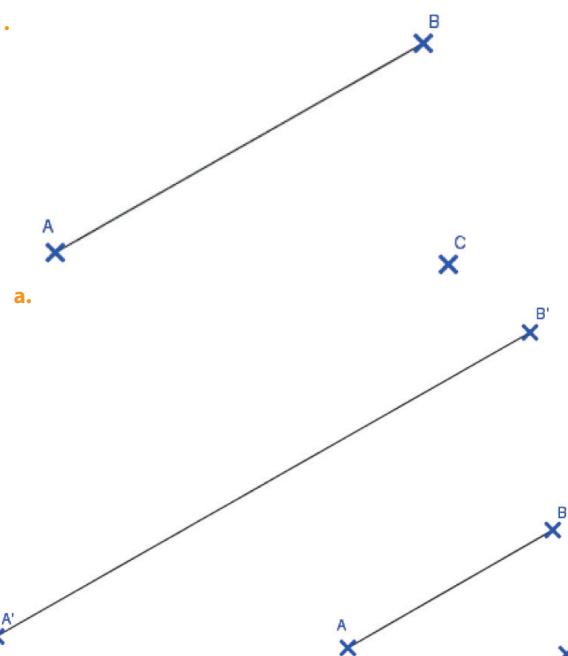
1. Le centre de cette homothétie est le centre du grand carré.
2. Pour réaliser cette figure, on commence par tracer un carré, puis on applique 14 fois l'homothétie de rapport 0,9 et de centre le centre du carré de départ.
On obtient la figure ci-dessous.



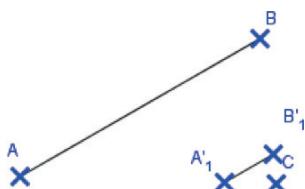
35 Une propriété des homothéties

L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle. Pour cela, on peut utiliser les propriétés sur les angles correspondants (cas rapport positif) alternes-internes (cas du rapport négatif) ou bien utiliser la réciproque du théorème de Thalès si la notion a déjà été traitée.

1.



b.



- c. Ces deux segments sont parallèles avec le segment [AB].
d. Il semble que l'image d'un segment par une homothétie soit un segment parallèle.

2. a. Pour démontrer cette conjecture, on peut utiliser les propriétés sur les angles alternes-internes ou bien la réciproque du théorème de Thalès.

b. **Démonstration utilisant les angles :**

L'angle $\widehat{CB'A'}$ est l'image de l'angle \widehat{CBA} .

Or, l'homothétie conserve les mesures des angles donc $\widehat{CB'A'} = \widehat{CBA}$.

Les angles $\widehat{CB'A'}$ et \widehat{CBA} sont de même mesure.

Les droites (AB) et (A'B') sont coupées par la sécante (BB'). Or, si deux droites sont coupées par une sécante en formant des angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

Donc (AB) et (A'B') sont parallèles.

Démonstration utilisant la réciproque du théorème de Thalès :

Les droites (AA') et (BB') sont sécantes en C.

A' et B' sont les images des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport k.

On a alors $CA' = k \times CA$ soit $\frac{CA'}{CA} = k$,

de même $\frac{CB'}{CB} = k$ et $\frac{A'B'}{AB} = k$.

On a donc $\frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$.

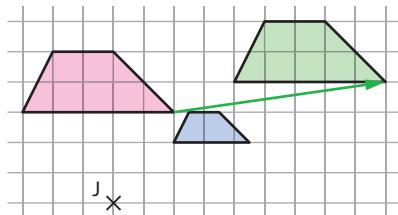
De plus, les points C, B, B' et C, A, A' sont alignés dans le même ordre. L'égalité de Thalès est vérifiée, on peut donc affirmer que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

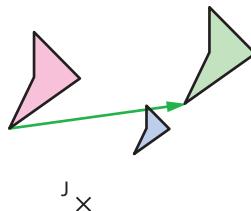
- Lucien a obtenu la figure en construisant l'image de la figure rose par une translation définie par la flèche suivante :



- Il a obtenu la bleue en construisant l'image de la figure verte par une homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{2}$.

Exercice 1

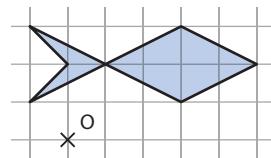
- Lucien a obtenu la figure en construisant l'image de la figure rose par une translation définie par la flèche verte.



- Il a obtenu la bleue en construisant l'image de la figure verte par une homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{2}$.

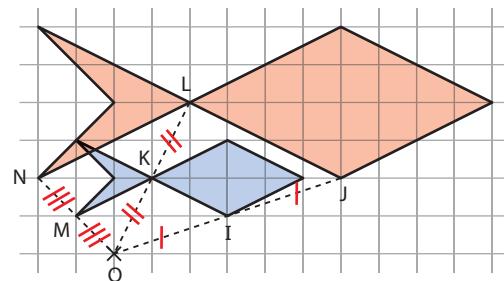
Exercice 2

1.



2.

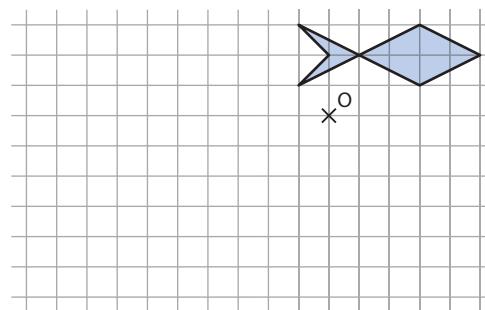
On peut tracer l'image M, K et I puis utiliser les propriétés des homothéties : conservation des angles et multiplication des longueurs par 2.



Exercice 2

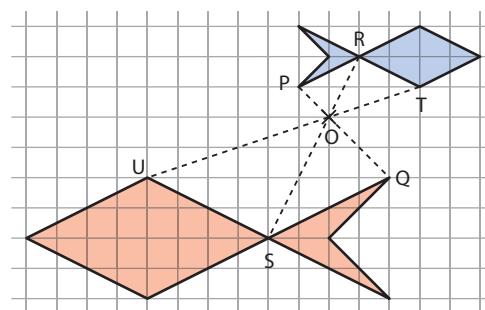
1.

On peut rappeler que le coefficient étant négatif, la figure va être agrandie puis va effectuer un demi-tour autour du point O.



2.

Les longueurs OT, OP et OR sont doublées.



Écriture d'un énoncé

1. Les questions sont les suivantes :
 - a. Calculer la longueur BC.
 - b. Calculer le coefficient de l'homothétie (de la réduction).
 - c. Calculer le périmètre du triangle A'B'C'.
 - d. Calculer l'aire du triangle A'B'C'.
 2. Les réponses sont les suivantes :
 - a. Le triangle ABC est rectangle en B ; d'après le théorème de Pythagore, on a :
$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \text{ donc } BC = 4 \text{ cm.}$$
 - b. [A'B'] est une réduction de [AB] de coefficient k . On a donc :
- $$A'B' = k \times AB, \text{ donc } k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$
- c. Par une homothétie de rapport 0,6 les longueurs sont multipliées par 0,6 donc les périmètres également :
$$\mathcal{P}_{A'B'C'} = 0,6 \times \mathcal{P}_{ABC} = 0,6 \times (3 + 4 + 5) = 0,6 \times 12 = 7,2 \text{ cm.}$$
 - d. Par une homothétie de rapport 0,6 les aires sont multipliées par $0,6^2$:
$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = 0,6^2 \times \mathcal{A}_{ABC} = 0,6^2 \times 6 = 2,16 \text{ cm}^2$$

Analyse d'une production

- La construction de Valentin n'est pas correcte car il a tourné de 45° et non de 90° , et dans le mauvais sens.
- La construction d'Hédi n'est pas correcte car la rotation conserve la mesure des angles ; le triangle A'B'C' doit donc être un triangle rectangle, et ce n'est pas le cas.
- La construction de Cali est correcte.
- La construction de Louis n'est pas correcte car il a tourné dans le mauvais sens.

Introduction

Au cycle 3, l'élève a déjà rencontré la notion d'angle et la mesure d'un angle. Ce chapitre sera l'occasion de réinvestir ces capacités du cycle 3 sur la mesure et la construction d'un angle.

Les parties du programme traitées dans le chapitre sont :

- la caractérisation angulaire du parallélisme ;
- les angles alternes-internes.

Dans ce chapitre, ces capacités seront travaillées à travers des problèmes de construction mais aussi des exemples concrets d'utilisation des angles, comme par exemple en optique ou pour l'estimation de la circonférence de la Terre.

Des problèmes de construction nécessiteront des outils numériques, un logiciel de géométrie dynamique permettra de conjecturer des propriétés.

Le problème de la croix de Malte montre l'intérêt d'utiliser une boucle dans un algorithme pour construire des figures régulières ou répétitives.

Activités

Questions flash

1. \widehat{BAH} et \widehat{CMG} .
2. \widehat{DEF} est aigu.
3. $\widehat{zOy} = 90 - 37 = 53^\circ$

4. a. $\widehat{JOL} = 180^\circ$, c'est un angle plat.
- b. $\widehat{IOK} = 180 - (41 + 56) = 83^\circ$

Des couples d'angles

Intentions des auteurs

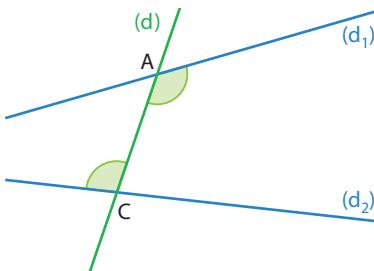
L'objectif de cette activité est de découvrir les angles alternes-internes.

Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion d'angle et le vocabulaire sur les angles.

La capacité introduite est de reconnaître des angles alternes-internes.

Activité 1

1. et 2.



3. Sur la figure b sont représentés des angles alternes-internes.

Avec deux droites parallèles

Activité 2

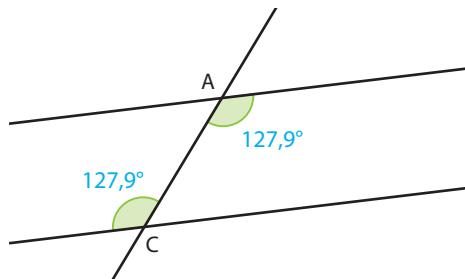
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la propriété des angles alternes-internes avec des droites parallèles.

Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion d'angles alternes-internes, la mesure d'un angle.

La capacité introduite est de déterminer un angle à l'aide de deux droites parallèles.

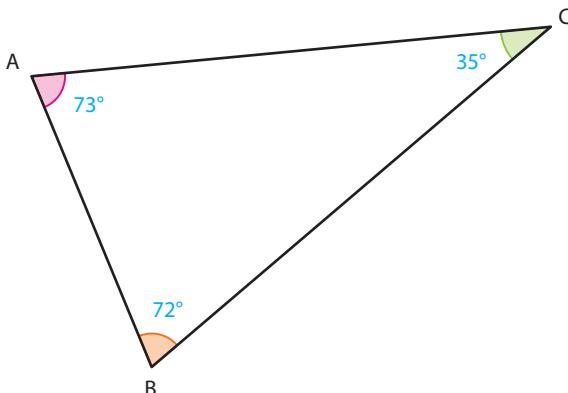
1.



2. On remarque que les angles alternes-internes sont égaux quand on déplace les points de la figure.
3. Lorsque les droites sont parallèles, il semble que les angles alternes-internes soient égaux.
4. a. B est le symétrique de A par rapport à I.
- b. Les angles \widehat{IAx} et $\widehat{IBx'}$ sont symétriques, donc ils sont égaux.

L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer la propriété de la somme des angles d'un triangle. Les prérequis nécessaires sont de connaître la mesure d'un angle, un angle plat. La capacité introduite est de déterminer un angle dans un triangle.

1. a.

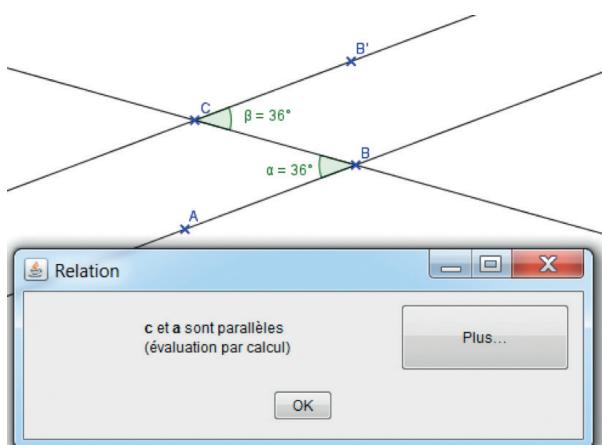
b. $73 + 72 + 35 = 180^\circ$.Avec un triangle différent, on trouve aussi que la somme des angles mesure 180° .2. b. En juxtaposant les trois angles, on constate qu'ils forment un angle plat, donc la somme de leurs mesures est égale à 180° .c. Il semble que pour n'importe quel triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180° .

Avec des angles de même mesure

Activité 4

L'objectif de cette activité est de découvrir la réciproque de la propriété des angles alternes-internes. Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion d'angles alternes-internes, la mesure d'un angle. La capacité introduite est de reconnaître des droites parallèles.

1. à 6.



7. Il semble que si deux droites sont coupées par une autre droite et que deux angles alternes-internes sont de même mesure alors les deux droites sont parallèles.

Exercices

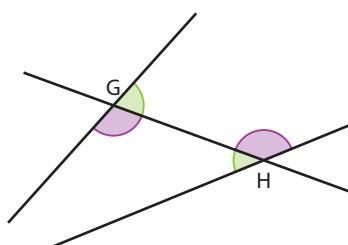
Reconnaitre des angles alternes-internes

Questions flash

- 1 Dans les cas **b** et **d**, les angles rouges et verts ont le même sommet.
- 2 Dans les cas **b** et **d**, les angles bleus et roses sont de part et d'autre de la droite (s).
- 3 Dans les cas **a** et **b**, les angles orange et violets sont entre les droites (d) et (d').
- 4 • Dans le cas **a**, les angles ne sont ni de part et d'autre du côté commun ni entre les deux côtés non communs.

- Dans le cas **b**, les angles ne sont pas entre les deux côtés non communs.
- Dans le cas **c**, les angles sont bien alternes-internes, ils sont situés de part et d'autre de leur côté commun et ils sont entre les deux autres droites.

5



6

- \widehat{xAv} et \widehat{uBz} sont alternes-internes.
 \widehat{yAv} et \widehat{uBt} sont alternes-internes.

Déterminer un angle à l'aide de deux droites parallèles

Questions flash

7.

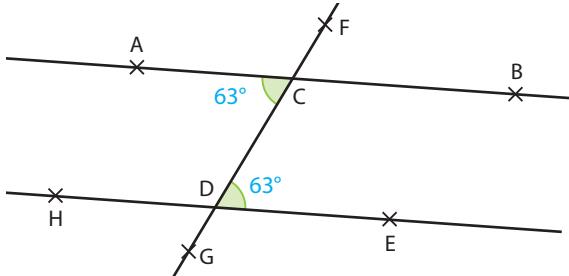
- a. 57° .
- b. 63° .

8.

- a. Oui.
- b. Non.

9. Comme les droites (AL) et (TO) sont parallèles, les angles alternes-internes \widehat{ALT} et \widehat{LTO} sont de même mesure, donc $\widehat{LTO} = 97^\circ$.

10. 1.



2. $\widehat{BCD} = \widehat{FCA} = \widehat{HDC} = \widehat{GDE} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.

$\widehat{HDG} = \widehat{FCB} = 63^\circ$.

11. Figure c : propriété 1.

Figure b : propriété 2.

Figure c : propriété 1 et propriété 2.

Déterminer un angle dans un triangle

Questions flash

12. 1. a. 100 b. 220 c. 100 d. 140

2. Les calculs a. et c. permettent de déterminer le troisième angle d'un triangle.

a.

62°	33°	85°
55°	90°	35°

b.

60°	60°	60°
116°	32°	32°

14. a. $\widehat{OCT} = 180^\circ - (75 + 40) = 65^\circ$.

b. $\widehat{OTR} = 180^\circ - (90 + 47) = 43^\circ$.

15. a. $91 + 56 + 33 = 180$, donc la figure est possible.

b. $90 + 56 + 33 = 179 \neq 180$, donc la figure est impossible.

Reconnaitre des droites parallèles

Questions flash

16. a. Les droites sont parallèles.

b. Les droites ne sont pas parallèles.

17. Figure a : propriété 1.

Figure b : propriété 1 et propriété 2.

18. Les angles marqués en rose sont alternes-internes et égaux, donc les droites rouges sont parallèles.

19. $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$; donc le supplémentaire de l'angle rose, qui est alterne-interne avec l'angle vert, mesure aussi 55° . Donc les droites vertes sont parallèles.

Problèmes

20. Dans un rectangle

ABCD est un rectangle, donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

De plus, les angles \widehat{AEF} et \widehat{EFC} sont alternes-internes et $\widehat{EFC} = 46^\circ$.

Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes qu'elles forment ont même mesure.

Donc $\widehat{AEF} = \widehat{EFC} = 46^\circ$.

21. Dans un triangle rectangle

1. Le triangle BCD est isocèle en B, les angles à la base ont donc même mesure. Ainsi $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 25^\circ$.

2. Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc, dans le triangle BCD :

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - (\widehat{CBD} + \widehat{CDB})$$

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ)$$

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - 50^\circ$$

$$\widehat{BCD} = 130^\circ.$$

3. • \widehat{BAC} :

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc, dans le triangle ABD :

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - (\widehat{ABD} + \widehat{BDA})$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ)$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 115^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 65^\circ$$

Ainsi $\widehat{BAC} = 65^\circ$.

• \widehat{ACB} :

\widehat{ACB} est un angle plat et $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = \widehat{ACB}$, donc :

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BCD}$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 50^\circ$$

• \widehat{ABC} :

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc, dans le triangle ABC :

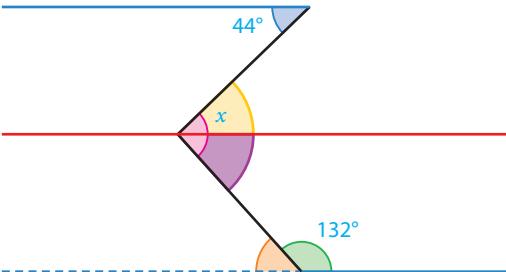
$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB})$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ)$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 115^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 65^\circ.$$

22. Obtenir des droites parallèles



On trace la droite rouge comme sur la figure ci-dessus. Elle coupe l'angle x en deux angles : l'un jaune et l'autre vert. L'angle jaune et l'angle à 44° sont alternes-internes.

L'angle vert et l'angle rouge sont aussi alternes-internes.

Pour que les droites bleues soient parallèles, il suffit qu'elles soient parallèles à la rouge.

Or, la droite rouge et la droite bleue définissant l'angle à 44° seront parallèles si l'angle jaune et l'angle à 44° ont même mesure, car ils sont alternes-internes.

De même, la droite rouge et la droite bleue définissant l'angle rouge seront parallèles si l'angle vert et l'angle rouge ont même mesure.

On en déduit donc que les droites bleues seront parallèles lorsque la mesure de x sera égale à 44° plus la mesure de l'angle rouge.

Enfin, l'angle rouge mesure 48° ($180^\circ - 132^\circ$).

On en conclut donc que $x = 44^\circ + 48^\circ = 92^\circ$ pour que les droites bleues soient parallèles.

La rédaction de ce problème n'étant pas aisée, il peut être envisagé de le travailler plus dans une idée de communication orale, d'échange et débat autour de la valeur de x possible. Il est aussi possible de faire conjecturer la valeur de x à l'aide d'une construction utilisant un logiciel de géométrie dynamique et de demander ensuite aux élèves de démontrer qu'avec cette valeur conjecturée, les droites bleues sont bien parallèles.

23 On passe ?

1. Les trois angles d'un triangle équilatéral ayant même mesure et la somme des trois mesures donnant 180° , chaque angle mesure donc 60° .

\widehat{PEI} est un angle plat, $\widehat{PEI} = \widehat{PIS} + \widehat{SIE} + \widehat{EID}$ et $\widehat{PIS} = \widehat{EID}$

Donc :

$$\widehat{PIS} = (180^\circ - \widehat{SEI}) \div 2$$

$$\widehat{PIS} = (180^\circ - 60^\circ) \div 2$$

$$\widehat{PIS} = 60^\circ.$$

Ainsi $\widehat{PIS} = \widehat{EID} = 60^\circ$.

2. PEDS étant un rectangle, $\widehat{IPS} = 90^\circ$.

De plus, dans le triangle PIS, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{ISP} = 180^\circ - (\widehat{IPS} + \widehat{IPS})$$

$$\widehat{IPS} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$$

$$\widehat{IPS} = 30^\circ.$$

3. Ce panneau signale à l'automobiliste un passage piéton.

24 Everest

Les points M, O, N et T étant alignés, les angles \widehat{MON} et \widehat{ONT} sont plats.

Or $\widehat{MON} = \widehat{MOE} + \widehat{EOH}$ et $\widehat{ONT} = \widehat{ONE} + \widehat{ENT}$.

Donc $\widehat{EOH} = 180^\circ - \widehat{MOE}$ et $\widehat{ONE} = 180^\circ - \widehat{ENT}$.

Ainsi $\widehat{EOH} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ et $\widehat{ONE} = 180^\circ - 159^\circ = 21^\circ$.

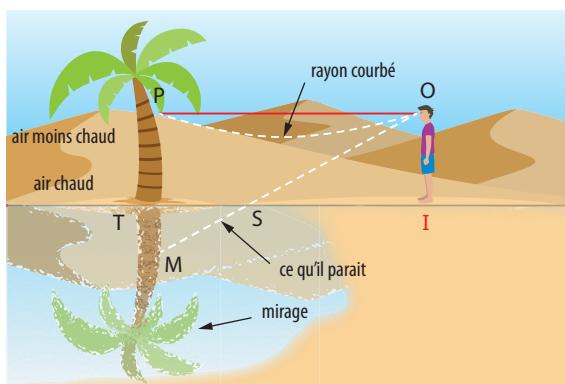
Enfin, dans le triangle EON, la somme des angles est égale à 180° .

Ainsi : $\widehat{OEN} = 180^\circ - (\widehat{EOH} + \widehat{ONE})$

$$\widehat{OEN} = 180^\circ - (45^\circ + 21^\circ)$$

$$\widehat{OEN} = 114^\circ.$$

25 Mirage



- a. On note I le point correspondant aux pieds de l'observateur (voir dessin).

Les droites (PO) et (ST) sont parallèles, donc les angles alternes-internes \widehat{POS} et \widehat{OSI} ont même mesure.

De plus, les angles \widehat{OSI} et \widehat{TSM} sont symétriques par rapport à S, donc ils ont même mesure.

On en déduit que \widehat{POS} et \widehat{TSM} ont même mesure.

Ainsi $\widehat{TSM} = 28^\circ$.

- b. M, S et O sont alignés, donc \widehat{MSO} est un angle plat.

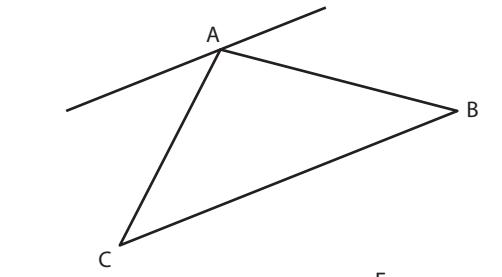
Ainsi $\widehat{TSO} = 180^\circ - \widehat{TSM}$.

$$\widehat{TSO} = 180^\circ - 28^\circ$$

$$\widehat{TSO} = 152^\circ.$$

26 Somme des angles d'un triangle

1.



2. Les angles en rouge ont même mesure car alternes-internes et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

De même pour les angles en vert.

3. L'angle en B est égal à l'angle rouge, l'angle en C est égal à l'angle vert. Or la somme de l'angle en A, de l'angle rouge et de l'angle vert donne l'angle \widehat{DAE} . De plus, D, A et E sont alignés donc forment un angle plat. Donc la somme des mesures de l'angle A, de l'angle en B et de l'angle en C est égale à 180° . Soit : la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

27 Parallèles ?

On prolonge la droite (CB) et on prend un point F sur la demi-droite [BC) comme sur le dessin ci-dessous.

- On détermine la mesure de l'angle \widehat{ACB} :

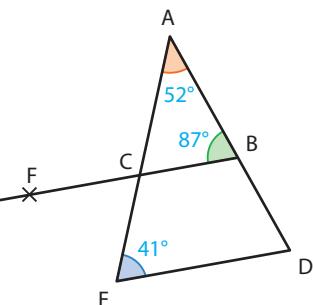
Dans le triangle ACB, la somme des mesures des angles est égale à 180° .

Donc :

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{CAB} + \widehat{ABC})$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (52^\circ + 87^\circ)$$

$$\widehat{ACB} = 41^\circ.$$



- On en déduit la mesure de \widehat{FCE} :

Les angles \widehat{ACB} et \widehat{FCE} sont symétriques par rapport à C, donc ils ont même mesure.

Ainsi $\widehat{FCE} = 41^\circ$.

- On conclut pour les droites (CB) et (ED) :

Les droites (CB) et (ED) forment les angles \widehat{FCE} et \widehat{CED} qui sont alternes-internes et qui ont même mesure. Donc elles sont parallèles.

28 Construction d'une figure

2. • Dans le triangle BCD, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - (\widehat{CBD} + \widehat{BCD})$$

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ)$$

$$\widehat{BCD} = 90^\circ.$$

- Le triangle ABD est équilatéral, donc $\widehat{ADB} = 60^\circ$.

E, D et C sont alignés, donc \widehat{EDC} est un angle plat.

$$\text{Ainsi } \widehat{EDA} = 180^\circ - \widehat{ADB} - \widehat{BCD}$$

$$\widehat{EDA} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ$$

$$\widehat{EDA} = 75^\circ.$$

Dans le triangle ADE, la somme des mesures des angles est égales à 180° . Donc :

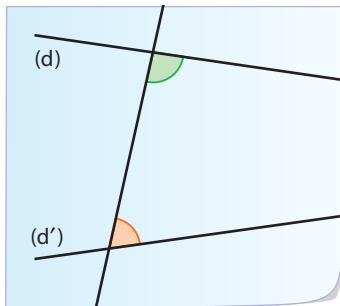
$$\widehat{AED} = 180^\circ - (\widehat{EDA} + \widehat{EAD})$$

$$\widehat{AED} = 180^\circ - (75^\circ + 15^\circ) = 90^\circ.$$

3. $\widehat{BCD} = 90^\circ$ donc (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
 AED = 90° donc (AE) et (ED) sont perpendiculaires.
 Et les points E, D et C sont alignés.
 Ainsi, (BC) et (AE) sont perpendiculaires à la même droite (EC).
 Elles sont donc parallèles.

29 Sans sortir du cadre

Il suffit de tracer une droite sécante à (d) et (d') et de mesurer avec le rapporteur les angles marqués en jaune et rouge (voir dessin ci-dessous).



Ensuite, en utilisant le fait que dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° , on peut, par un calcul, déterminer la mesure de l'angle en A.

30 Un trapèze ?

Le triangle IJL est isocèle, donc les angles à la base ont même mesure. De plus, la somme des angles est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{IJL} = (180^\circ - \widehat{JIL}) \div 2$$

$$\widehat{IJL} = (180^\circ - 124^\circ) \div 2$$

$$\widehat{IJL} = 28^\circ.$$

Dans le triangle JLK, la somme des angles est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{JLK} = 180^\circ - (\widehat{LJK} - \widehat{JKL})$$

$$\widehat{JLK} = 180^\circ - (114^\circ + 38^\circ)$$

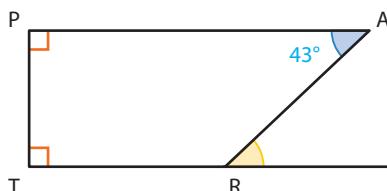
$$\widehat{JLK} = 28^\circ.$$

Les droites (IJ) et (LK) forment deux angles \widehat{IJL} et \widehat{JLK} alternes-internes et de même mesure.

Elles sont donc parallèles.

Valentin a donc raison : IJKL a deux côtés opposés parallèles, les côtés (IJ) et (LK).

31 Un autre trapèze



Les droites (AP) et (TR) sont perpendiculaires à la même droite (PT), elles sont donc parallèles.

Les angles alternes-internes qu'elles forment ont donc même mesure.

Ainsi, l'angle jaune mesure 43° .

Enfin, l'angle \widehat{TRA} et l'angle jaune forment un angle plat. Donc :

$$\widehat{TRA} = 180^\circ - 43^\circ$$

$$\widehat{TRA} = 137^\circ.$$

32 Aligned or not?

Dans le triangle EAF, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{EAF} = 180^\circ - (\widehat{AEF} + \widehat{AFE})$$

$$\widehat{EAF} = 180^\circ - (90^\circ + 61^\circ)$$

$$\widehat{EAF} = 29^\circ.$$

ABCD est un rectangle, donc $\widehat{CAE} = 90^\circ$.

ABC est un triangle équilatéral, donc :

$$\widehat{BAC} = 60^\circ.$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} + \widehat{EAF}$$

$$\widehat{BAF} = 60^\circ + 90^\circ + 29^\circ$$

$$\widehat{BAF} = 179^\circ.$$

Donc BAF n'est pas un angle plat, donc les points B, A et F ne sont pas alignés.

33 Déviation d'un rayon lumineux par deux miroirs

1. L'angle d'incidence et de réflexion ayant même mesure,

l'angle en I dans le triangle OIJ est égal à $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

De plus, la somme des mesures des angles est égale à 180° .
 Donc :

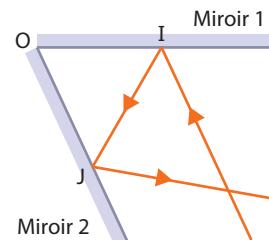
$$\widehat{OJI} = 180^\circ - (\widehat{JOI} + \widehat{OIJ})$$

$$\widehat{OJI} = 180^\circ - (65^\circ + 60^\circ)$$

$$\widehat{OJI} = 55^\circ.$$

Et donc, l'angle de réflexion du miroir 2 mesure $90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

2.



3. Si les miroirs forment un angle droit, le rayon lumineux initial et celui obtenu après les deux réflexions sont parallèles.

Cela se voit très simplement avec un tracer, par exemple à l'aide d'un logiciel de géométrie.

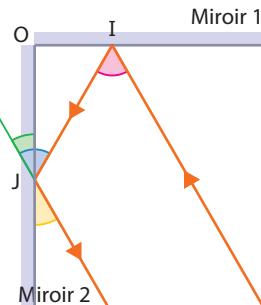
En appliquant le même raisonnement que dans la question **1.**, on obtient que l'angle $OJI = 30^\circ$.

Par symétrie axiale avec la normale passant par J, l'angle jaune mesure aussi 30° .

Et par symétrie centrale de centre J, l'angle vert aussi.

Ainsi l'angle bleu mesure 60° .

Or cet angle et l'angle marqué en rouge (qui mesure 60°) sont alternes-internes, donc les droites qui les forment sont parallèles.



34 Fibre optique

$$1. a = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

2. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion ont même mesure, donc l'angle vert a la même mesure que l'angle a . Il mesure donc 55° .

De plus, dans le triangle formé par la normale et le rayon réfléchi, la somme des mesures des angles est égale à 180° .

Donc :

$$b = 180^\circ - (90^\circ + \text{angle vert})$$

$$b = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ)$$

$$b = 35^\circ.$$

35 Calcul de la circonférence de la Terre

1. Comme les rayons du Soleil sont supposés parallèles, les angles alternes-internes qu'ils forment sont égaux. Donc l'angle au centre de la Terre \widehat{OCS} et l'angle \widehat{HOA} formé par l'obélisque sont égaux.

Ce qui a permis à Ératosthène de déterminer que l'angle \widehat{OCS} mesurait $7,2^\circ$.

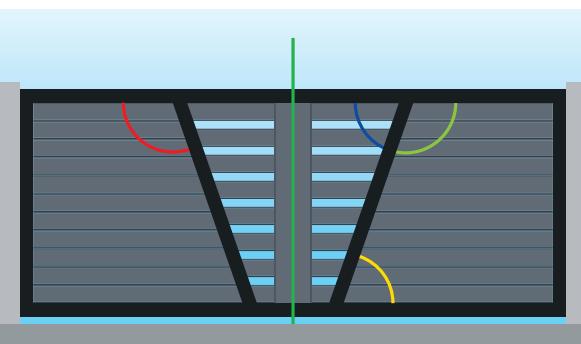
2. Vu la mesure trouvée par le bématiste (5 000 stades) et l'angle au centre déterminé par Ératosthène, on peut en déduire que la circonférence de la Terre est de :

$$\frac{360 \times 5000}{7,2} = 250\,000 \text{ stades},$$

soit $250\,000 \times 157,5 = 39\,375\,000$ mètres,
 c'est-à-dire 39 375 kilomètres.

3. De nos jours, la circonférence de la Terre est évaluée à 40 075 kilomètres. L'estimation d'Ératosthène est donc très proche de l'estimation actuelle.

36



L'axe vert étant un axe de symétrie du portail, l'angle marqué en vert a même mesure que l'angle rouge. Il mesure donc 123° . De plus, l'angle bleu et l'angle vert forment un angle plat, donc :

$$\text{angle bleu} = 180^\circ - \text{angle vert}$$

$$\text{angle bleu} = 180^\circ - 123^\circ$$

$$\text{angle bleu} = 57^\circ.$$

Or l'angle jaune mesure aussi 57° .

On en déduit donc que les barres horizontales forment deux angles alternes-internes de même mesure : l'angle bleu et l'angle jaune.

Donc les barres horizontales sont bien parallèles, le portail est bien construit.

37



L'angle bleu mesure 37° car c'est le symétrique du premier angle marqué en jaune.

De plus, les droites blanches sont parallèles donc les angles alternes-internes qu'elles forment ont même mesure. Donc l'angle marqué en marron mesure $2 \times 37^\circ = 74^\circ$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° . Donc :

$$\text{angle noir} = 180^\circ - (90^\circ + 37^\circ)$$

$$\text{angle noir} = 53^\circ.$$

On déduit donc de ces deux points que :

$$\text{angle violet} = 180^\circ - (74^\circ + 53^\circ) = 53^\circ.$$

Et donc, en utilisant de nouveau la somme des angles d'un triangle, on obtient :

$$\text{angle rouge} = 180^\circ - (90^\circ + \text{angle violet})$$

$$\text{angle rouge} = 180^\circ - (90^\circ + 53^\circ)$$

$$\text{angle rouge} = 37^\circ.$$

Il a donc même mesure que l'angle jaune : Lucy va gagner sa partie.

38

Les angles d'un polygone

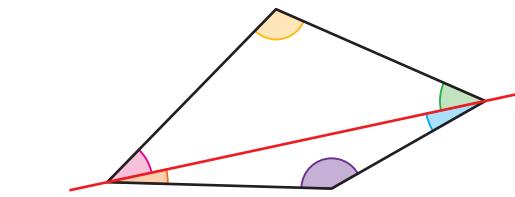
La propriété est conjecturée par dessins successifs.

- Pour un triangle :** la somme des mesures des angles est égale à 180° .

- Pour un quadrilatère :**

Il peut être partagé en deux triangles, comme le montre la figure ci-dessous.

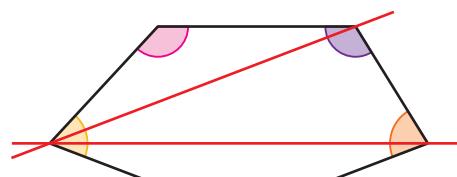
Donc la somme des mesures de ses angles est égale à $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.



- Pour un pentagone :**

Il peut être partagé en trois triangles, comme le montre la figure ci-dessous.

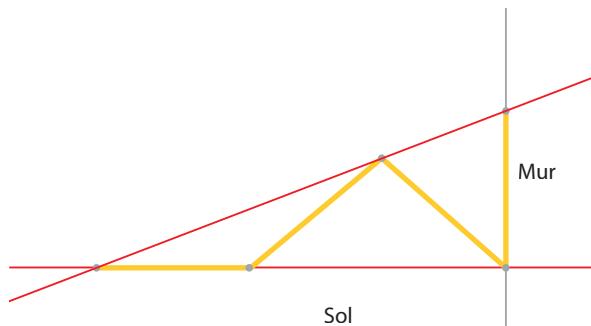
Donc la somme des mesures de ses angles est égale à $3 \times 180^\circ = 1080^\circ$.



- On peut donc en déduire que pour un polygone n côtés, la somme des mesures de ses angles sera égale à $(n - 2) \times 180^\circ$ car il sera partagé en $n - 2$ triangles.

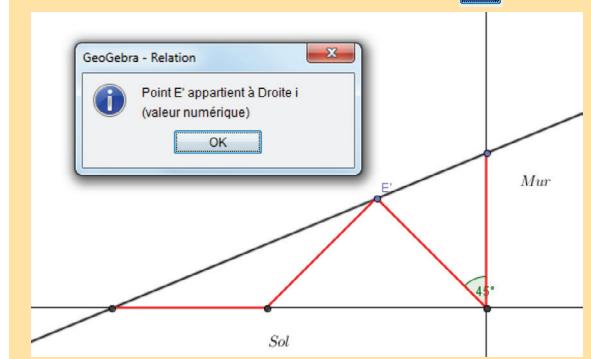
39

Le mètre pliant

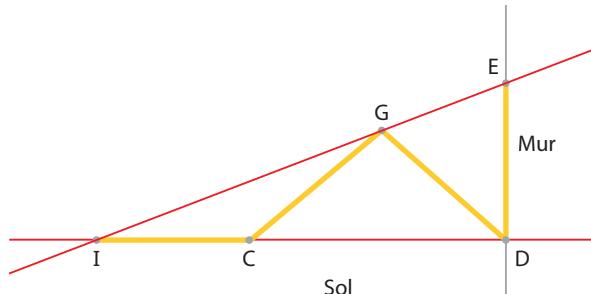


- En mesurant l'angle indiqué, on peut conjecturer qu'il doit mesurer 45° .

Avoir la valeur exacte est très difficile vu la précision du logiciel de géométrie dynamique. On peut donc construire la figure avec cette condition et vérifier ensuite l'alignement avec la macro « relation entre deux objets » : $a = b$.



- Il faut démontrer que si l'angle mesure 45° , les points correspondant aux graduations 0, 40 et 80 sont alignés. On nomme les points pour faciliter la démonstration.



On suppose que $\widehat{EDG} = 45^\circ$.

- Comme le triangle EDG est isocèle en D, les angles à la base ont même mesure. Donc :

$$\widehat{EDG} = (180^\circ - \widehat{GDE}) \div 2$$

$$\widehat{EDG} = (180^\circ - 45^\circ) \div 2$$

$$\widehat{EDG} = 67,5^\circ.$$

- $\widehat{GDF} = 90^\circ - \widehat{EDG} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Comme le triangle FDG est isocèle en G, les angles à la base ont même mesure. Donc :

$$\widehat{FGD} = (180^\circ - 2 \times \widehat{GDF})$$

$$\widehat{FGD} = (180^\circ - 2 \times 45^\circ)$$

$$\widehat{FGD} = 90^\circ.$$

- $\widehat{IFG} = 180^\circ - \widehat{GFD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Comme le triangle IFG est isocèle en F, les angles à la base ont même mesure. Donc :

$$\widehat{IGF} = (180^\circ - \widehat{GFI}) \div 2$$

$$\widehat{IGF} = (180^\circ - 135^\circ) \div 2$$

$$\widehat{IGF} = 22,5^\circ.$$

Ainsi, $\widehat{IGE} = \widehat{IGF} + \widehat{FGD} + \widehat{EGD}$

$$= 22,5^\circ + 90^\circ + 67,5^\circ = 180^\circ.$$

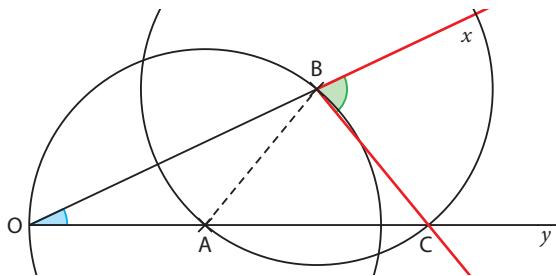
L'angle est plat, les points I, G et E sont donc alignés.

Ainsi, pour un angle entre le mur et la droite passant par les graduations 20 et 40 de mesure 45° , les trois graduations 0, 40 et 80 sont alignées.

40 Multiplication d'un angle

1. \widehat{xBC} semble être le triple de \widehat{xOy} .

2. On note α l'angle \widehat{xBC} .



- Le triangle AOB est isocèle en A, donc $\widehat{OBA} = \alpha$ (les angles à la base ont même mesure).

$\widehat{OAB} = 180^\circ - 2\alpha$ (la somme des mesures des angles du triangle est égale à 180°)

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{OAB} = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

- Le triangle ABC est isocèle en B, donc

$\widehat{BCA} = 2\alpha$. (les angles à la base ont même mesure).

$\widehat{ABC} = 180^\circ - 4\alpha$ (la somme des mesures des angles du triangle est égale à 180°).

$$\widehat{xBC} = 180^\circ - \widehat{OAB} - \widehat{ABC}$$

$$\widehat{xBC} = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 4\alpha)$$

$$\widehat{xBC} = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 4\alpha$$

$$\widehat{xBC} = 3\alpha.$$

Ainsi \widehat{xBC} est bien égal au triple de \widehat{xOy} .

Algorithmique

et outils numériques

41 Ligne de crête



42 La croix de Malte

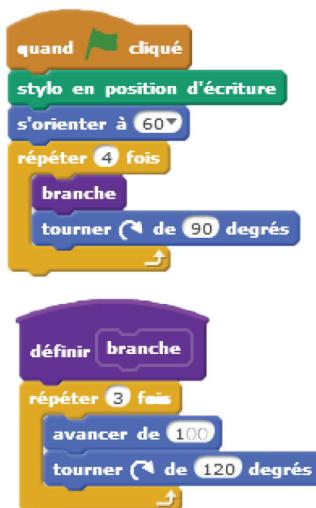
1.



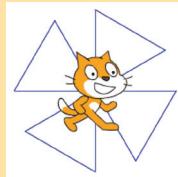
L'instruction « s'orienter à 30 degrés » permet d'orienter la branche comme dans l'énoncé.

2.

Il peut être intéressant ici de parler de la notion de procédure, on peut présenter le script suivant.



Si l'on ne met pas l'instruction « s'orienter à 60 degrés », la croix apparaîtra ainsi :



43



44 Angles opposés par le sommet

2. Les angles \widehat{AOC} et \widehat{BOD} ont même mesure.

3. En déplaçant les points, on constate que les angles ont toujours la même mesure, on peut donc conjecturer que des angles opposés par le sommet ont même mesure.

45 Angles complémentaires

4. $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

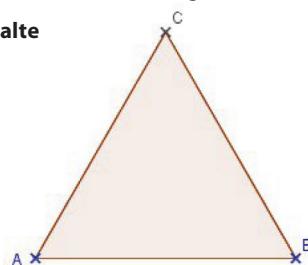
5. En déplaçant les points de la figure, on constate que la somme de la mesure des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} est égale à 90° .

46 Angles supplémentaires

4. En déplaçant les points de la figure, on constate que la somme de la mesure des angles \widehat{EOF} et \widehat{FOH} est égale à 180° .

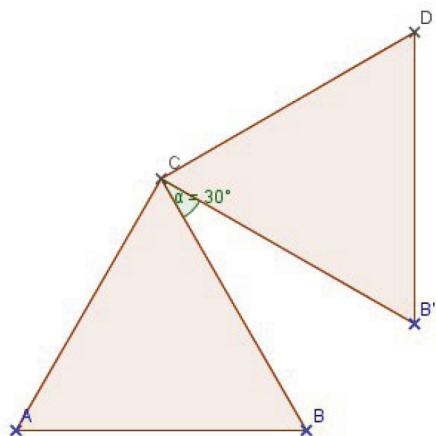
47 Les angles de la croix de Malte

1. On peut commencer par construire le triangle équilatéral du bas avec l'outil « polygone régulier ». On obtient la figure ci-contre :

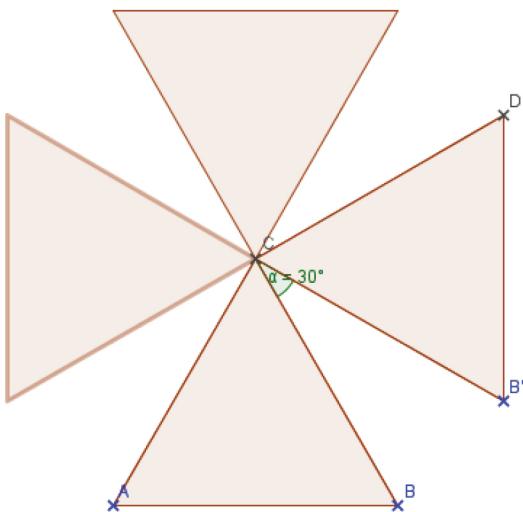


Ensuite on utilise l'outil « angle de mesure donnée » pour construire l'angle $\widehat{BCB'}$ de 30° .

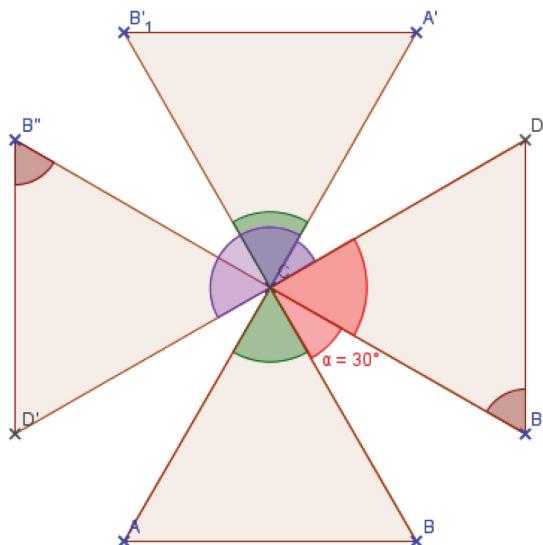
On construit comme précédemment le triangle équilatéral $CB'D$ à partir du segment $[CB']$. On obtient la figure suivante :



Puis on termine la construction en faisant le symétrique de ces deux triangles par rapport au point C.



Remarque : dans la progression, les rotations sont traitées en 4^e, on aurait pu faire la construction en les utilisant sur le premier triangle, cela évite la construction du deuxième avec l'angle de 30° .



Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

Pour savoir si le triangle est rectangle, Jade a dû calculer la mesure du 3^e angle, sachant que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° . Donc ici :

$$\widehat{VSP} = 180^\circ - \widehat{SVP} + \widehat{SPV}$$

$$\widehat{VSP} = 180^\circ - (63^\circ + 26^\circ)$$

$$\widehat{VSP} = 91^\circ.$$

Comme dans ce triangle, aucun angle n'a pour mesure 90° , Jade a conclu que le triangle n'était pas rectangle.

Exercice 1

Pour savoir si le triangle est rectangle, Jade a dû calculer la mesure du 3^e angle, sachant que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Mais, dans un premier temps, il a fallu qu'elle détermine la mesure de l'angle vert \widehat{SEV} . Or cet angle a même mesure que l'angle rose \widehat{PSE} , c'est-à-dire 40° , car ils sont alternes-internes et les droites (VE) et (SP) qui les forment sont parallèles.

Ainsi :

$$\widehat{VSP} = 180^\circ - (\widehat{SVP} + \widehat{SPV})$$

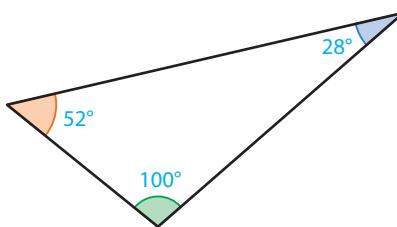
$$\widehat{VSP} = 180^\circ - (51^\circ + 40^\circ)$$

$$\widehat{VSP} = 89^\circ.$$

Comme dans ce triangle, aucun angle n'a pour mesure 90° , Jade a conclu que le triangle n'était pas rectangle.

Exercice 2

1.

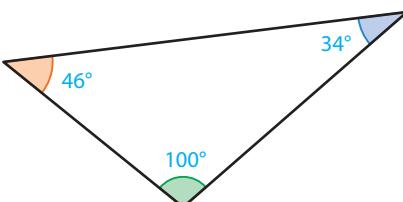


Le troisième angle mesure 100° .

2. Dans ce triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° . Ainsi :
 $180^\circ - 52^\circ - 28^\circ = 100^\circ$.
 Le troisième angle mesure 100° .

Exercice 2

1. En utilisant le codage de la figure (égalité d'angles), on déduit que l'angle contre le grand miroir est égal à $23^\circ \times 2 = 46^\circ$, et que l'angle contre le petit miroir a pour mesure $17^\circ \times 2 = 34^\circ$.



Le troisième angle mesure 100° .

2. Dans ce triangle, la somme des angles est égale à 180° .
 Ainsi :
 $180^\circ - 46^\circ - 34^\circ = 100^\circ$.
 Le troisième angle mesure 100° .

Analyse d'une production

- **Réponse d'Arthur :** les angles \widehat{xDB} et \widehat{ABC} ne sont pas alternes-internes donc la conclusion est fausse, \widehat{ABC} n'est pas égal à 112° .
- **Réponse de Zoé :** la valeur trouvée est la bonne, mais le raisonnement comporte deux erreurs.
La première : \widehat{BDE} et \widehat{ADE} ne sont pas alternes-internes.
La deuxième : deux angles alternes-internes n'ont pas

toujours même mesure. Il faut que les droites qui les forment soient parallèles.

- **Raisonnement correct :**

Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et les angles \widehat{yDB} et \widehat{CBD} sont alternes-internes, donc ils ont même mesure.

Ainsi $\widehat{CBD} = \widehat{yDB} = 112^\circ$.

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CBD}$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 112^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 68.$$

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Il met l'accent sur la construction de figures et sur l'appréhension des propriétés de la médiatrice, des triangles isocèle, équilatéral et rectangle. La pratique du raisonnement se fait sous différentes formes : par déduction, par analogie et par disjonction de cas.

Ce chapitre permet de réinvestir les chapitres sur les transformations telles que la symétrie axiale ou encore sur les angles avec la somme des angles d'un triangle.

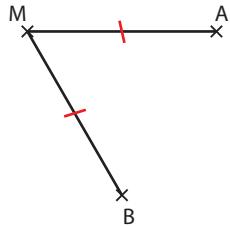
Pour mieux asseoir les bases du raisonnement et conduire les élèves à appréhender l'abstraction avec progressivité, plusieurs travaux permettent des manipulations avec du papier calque, par exemple.

Le logiciel de programmation et le logiciel de géométrie dynamique permettent de réaliser des figures plus complexes et permettent de diversifier les raisonnements sur les constructions de figures.

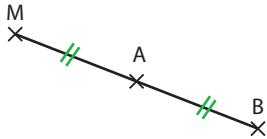
Activités

Questions flash

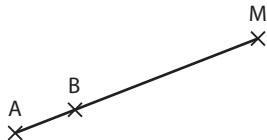
- 1.** a. A est le centre du cercle.
b. [AC], [AE] et [AD] sont des rayons du cercle.
c. [DC] est un diamètre du cercle.
d. AD = 3 cm.
e. CD = 6 cm.
- 2.** a. Vrai. b. Faux. c. Faux.
3. Les solides qui ont des faces triangulaires sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'isocaèdre.
4. a. Faux.



- b. Faux.



- c. Faux.



Plongée sous-marine

Activité 1

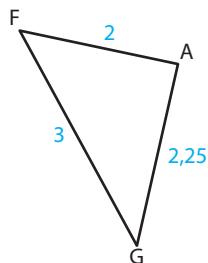
Intentions des auteurs

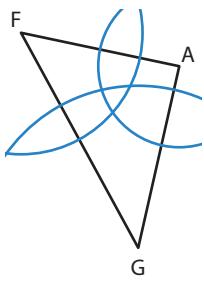
L'objectif de cette activité est de se repérer dans le plan et de construire des cercles. Il s'agit d'une activité de régionnement du plan et d'évaluation de distance.

1. Un nautique vaut 1 852 m.
Soit F la position de *Globe-flotteur*, A la position de l'archipel et F la position de *Ged*.
En mesurant : FA = 4 cm, GA = 4,5 cm et FG = 6 cm.
De plus, on a l'indication que 0,5 nautique = 1 cm sur la carte.
Donc 4 cm représentent $4 \times 0,5 = 2$ nautiques.
4,5 cm représentent $4,5 \times 0,5 = 2,25$ nautiques.
6 cm représentent $6 \times 0,5 = 3$ nautiques.
- a. La distance entre *Globe-flotteur* et l'archipel est de 2 nautiques.
b. La distance entre *Ged* et l'archipel est de 2,25 nautiques.
c. La distance entre *Globe-flotteur* et *Ged* est de 3 nautiques.

- 2.

Les mesures sont en nautiques sur la figure.





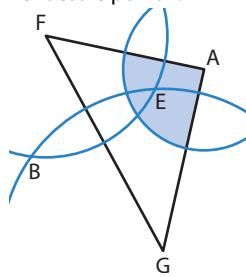
L'épave se trouve à 1,5 nautique de *Globe-flotteur* donc elle se trouve sur le cercle de centre F et de rayon 1,5 nautique.

L'épave se trouve à 2 nautiques de *Ged* donc elle se trouve sur le cercle de centre G et de rayon 2 nautiques.

Par conséquent, c'est l'un des deux points d'intersection des 2 cercles de centre G et F.

De plus, l'épave se trouve à moins de 1 nautique de l'archipel, soit dans le disque de centre A et de rayon 1 nautique.

Le seul point qui convient est le point E.



Triangle, où es-tu ?

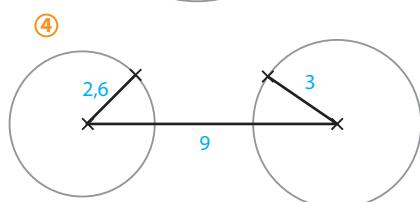
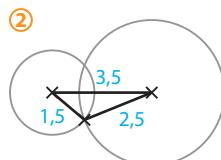
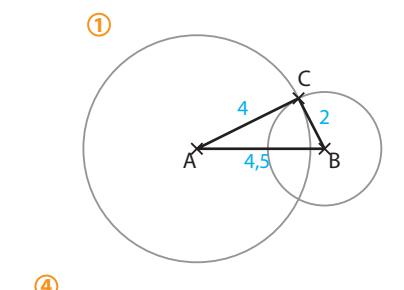
Activité 2

Intentions des auteurs

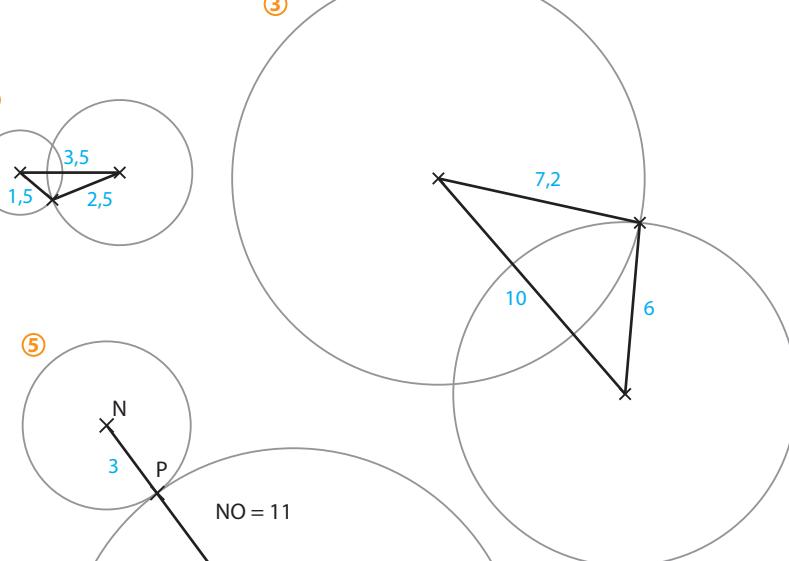
L'objectif de cette activité est de définir l'inégalité triangulaire qui est la base de toute construction géométrique. Les figures ne sont pas en vraie grandeur.

Les élèves cherchent à savoir si avec trois longueurs, il est toujours possible de construire un triangle.

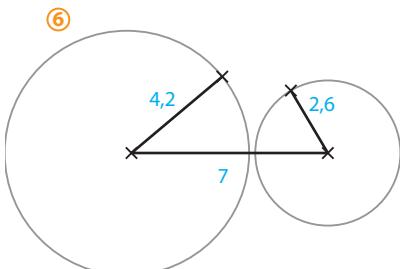
2.



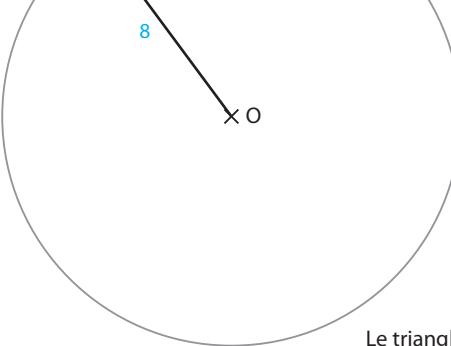
Le triangle n'existe pas



NO = 11



Le triangle n'existe pas



Le triangle n'existe pas

3. Pour qu'un triangle soit constructible, il faut que les cercles se croisent.

Et pour ce faire, il suffit que chaque longueur soit plus petite que la somme des deux autres.
Soit $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$ et $BC < AC + AB$.

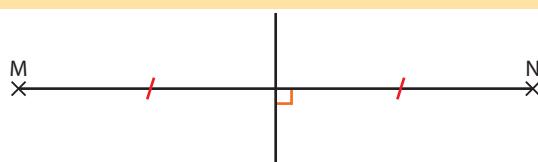
Exercices

Construire et utiliser des cercles et des médiatrices

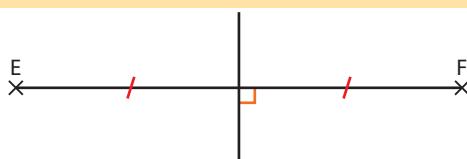
Questions flash

- 1** **a.** (d) n'est pas la médiatrice, car la droite ne passe pas par le milieu du segment.
b. (d) n'est pas la médiatrice, car la droite n'est pas perpendiculaire au segment.
c. (d) est la médiatrice, car la droite est perpendiculaire au segment et passe par son milieu.
- 2** **1.** Le cercle bleu a pour rayon 3 cm.
2. H est le centre du cercle violet.
3. Le diamètre du cercle rose est 3 cm.
4. E est le centre du cercle vert.

- 3** On trace le segment de 6,8 cm et ensuite on place le milieu avec la règle à 3,4 cm d'une des extrémités.
Ensuite on prend l'équerre et on pose un côté de l'angle droit sur le segment, puis on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que le second côté de l'angle droit arrive au milieu du segment, puis on trace.



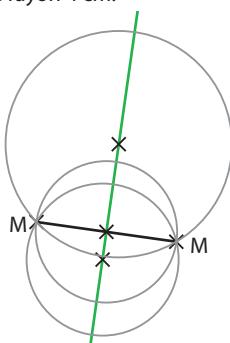
- 4** On trace le segment de 5,9 cm et ensuite on prend le compas avec une ouverture supérieure à la moitié de la longueur du segment.
On pointe sur chaque extrémité et on trace un arc de cercle de part et d'autre du segment.
Les arcs de cercle se coupent en deux points que l'on rejoint : c'est la médiatrice du segment.



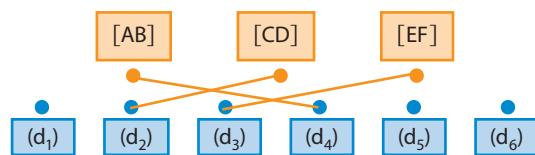
- 5** Placer un point C.
Construire un cercle de centre C et de rayon 2 cm.
Placer 2 points A et B sur le cercle, diamétralement opposés.
Construire le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

- 6** On construit la médiatrice du segment [HD].

On place trois points sur la médiatrice et on trace le cercle de centres respectifs les trois points passant par H et D.



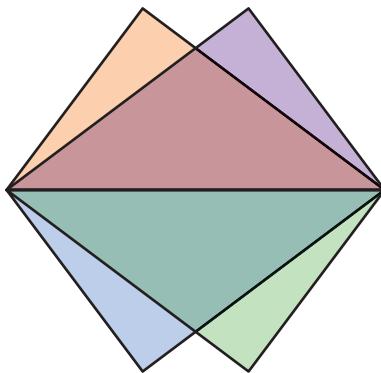
- 7** On cherche les médiatrices des trois segments. Il faut se repérer dans le plan et ensuite retrouver les caractéristiques de la médiatrice.



Utiliser l'inégalité triangulaire

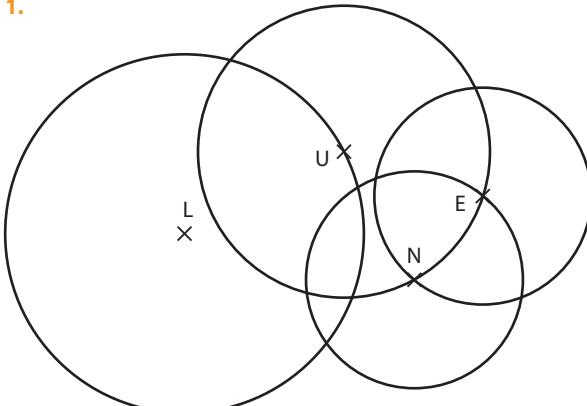
Questions flash

- 8** **1.** 6 est la plus grande longueur. La somme des deux autres longueurs est égale à 5,9.
 $2,5 + 3,4 = 5,9$.
 $6 > 2,5 + 3,4$.
Donc le triangle n'est pas constructible.
- 2.** FG = 7 est la plus grande longueur.
La somme des deux autres longueurs est égale à 8,4.
 $3 + 5,4 = 8,4$.
 $7 < 3 + 5,4$.
Donc le triangle EFG est constructible.
- 9** 5 cm est la plus grande longueur.
La somme des deux autres longueurs est égale à 7 cm.
 $3 + 4 = 7$.
 $5 < 3 + 4$.
Donc le triangle est constructible et il existe 4 points qui permettent d'obtenir ce triangle.



- 10** **a.** EF = 12,1 cm.
EF est la plus grande longueur.
La somme des deux autres longueurs est égale à 11,1 cm.
 $FG + EG = 4,7 + 6,4 = 11,1$ cm.
 $EF > FG + EG$.
Donc le triangle EFG n'est pas constructible.
- b.** LM = 7,8 cm.
LM est la plus grande longueur.
La somme des deux autres longueurs est égale à
 $KM + KL = 3,7 + 3,7 = 7,4$ cm.
 $LM > KM + KL$.
Donc le triangle KLM n'est pas constructible.

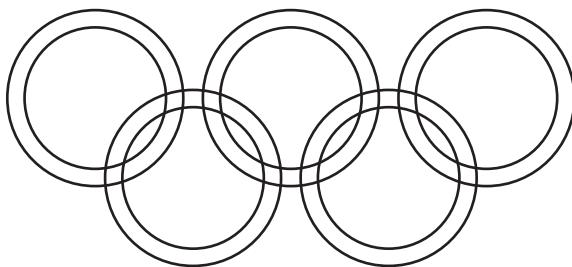
- 11** **1.**



2.

Pour trouver l'endroit idéal et à la même distance des trois villes, il suffit de tracer les trois médiatrices du triangle BLS. Le point d'intersection sera à équidistance des trois villes. Il semble que Châteauroux soit un bon choix pour passer le week-end entre amies.

20 Le symbole mystère



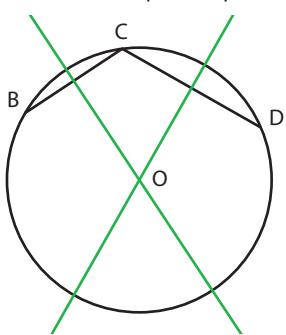
On reconnaît le symbole des Jeux olympiques, il ne manque que les couleurs qui représentent chacune un continent.

21 Petit guéridon

Pour trouver le centre d'un cercle, on place dans un premier temps 3 points B, C et D sur le cercle.

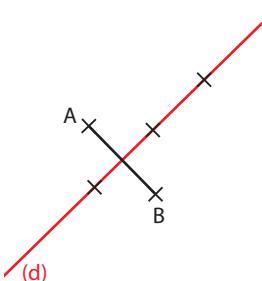
Ensuite on trace les médiatrices de 2 segments tels que [BC] et [DC].

Le point d'intersection sera à la même distance de ces 3 points donc ce sera le centre du cercle passant par ces 3 points.



22 Patrouille de France

1.

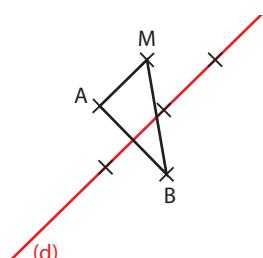


L'axe de symétrie est modélisé par la droite (d) et représenté par les trois points associés à chaque avion sur l'image. La médiatrice du segment [AB] est l'axe de symétrie de la figure.

2. Le point M modélise le 6^e avion. Étudions sa position sur le plan.

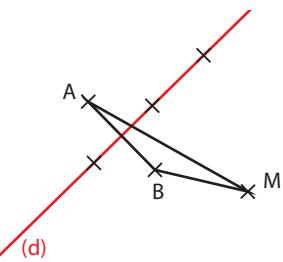
- Si M est à gauche de la médiatrice, $AM < BM$.

M est plus proche de A que de B.

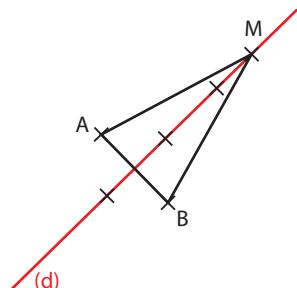


- Si M est à droite de la médiatrice, $AM > BM$.

M est plus proche de B que de A.



- Si M est sur la médiatrice, $AM = BM$.

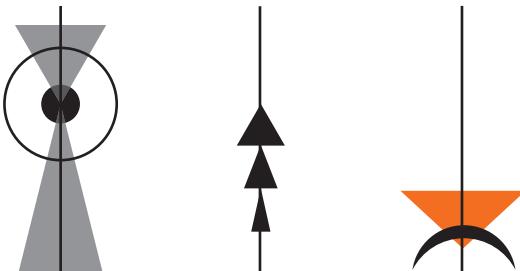


- M est à égale distance des points A et B et ainsi la figure reste symétrique.

23 Molle rudesse

1. Dans son tableau, Kandinsky représente des triangles dont des triangles équilatéraux, rectangles et isocèles mais également des cercles et arcs de cercle ainsi que des quadrilatères tels que des rectangles et carrés.

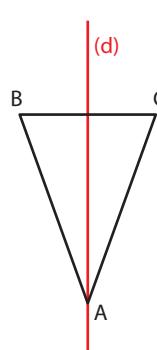
2. Dans chaque figure, il y a un axe de symétrie.



- L'axe de symétrie représente la médiatrice des bases des triangles, car un triangle isocèle possède un axe de symétrie.

24 Angles et triangle isocèle

1.



$AB = AC$ car ABC est un triangle isocèle en A.

Or, si $AB = AC$, alors A est sur la médiatrice du segment [BC].
Donc $A \in (d)$.

2. Un triangle isocèle a un axe de symétrie : la médiatrice de sa base.
Donc (d) est l'axe de symétrie de la figure.

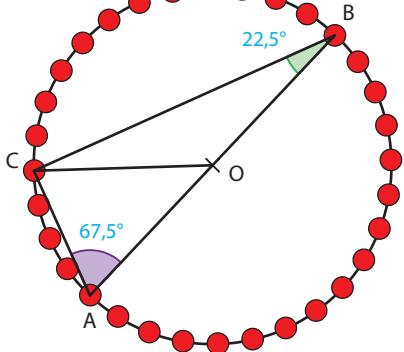
A est son propre symétrique par rapport à (d), B a pour symétrique C par rapport à (d) et réciproquement.

3. ABC est un triangle isocèle en A et (d) est son axe de symétrie.
Or la symétrie conserve les mesures d'angle.

Donc le symétrique de l'angle \widehat{ABC} est l'angle \widehat{ACB} et ils sont de même mesure.

Par conséquent, les angles à la base dans un triangle isocèle sont de même mesure.

25 London Eye



La roue de Londres est modélisée par un cercle de centre O et de rayon OC.

A, B et C sont sur le cercle, donc $OA = OB = OC$ et ce sont des rayons du cercle.

Comme $OA = OC$ alors le triangle OAC est un triangle isocèle en O. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

Donc $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 67,5^\circ$.

Par analogie, comme $OB = OC$ alors le triangle OBC est un triangle isocèle en O.

Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

Donc $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 22,5^\circ$.

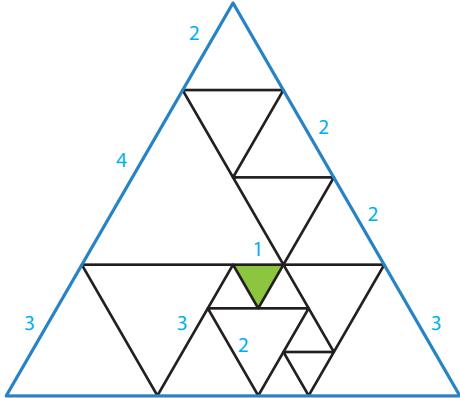
On calcule l'angle $\widehat{ACB} = \widehat{OCA} + \widehat{OCB}$

soit $\widehat{ACB} = 67,5^\circ + 22,5^\circ = 90^\circ$.

On en conclut que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

26 Quelle pagaille !

1.



Par déduction et comptage, les longueurs des côtés sont indiquées sur la figure.

Pour connaître la longueur du côté du triangle équilatéral bleu, il suffit d'ajouter les longueurs indiquées : $3 + 4 + 2 = 9$ cm.

2. À l'élève de faire la figure en vraie grandeur.

27 Dessin industriel

1. L'angle $\widehat{DBC} = 90^\circ$ et $\widehat{CBA} = 40^\circ$.

$$\widehat{DBC} = \widehat{CBA} + \widehat{DBA}$$

$$90^\circ = 40^\circ + \widehat{DBA}$$

$$\widehat{DBA} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Les triangles ABD et ABC sont des triangles isocèles en B. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

Donc $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.

De plus, dans un triangle la somme des angles est toujours égale à 180° .

$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

$$2 \times \widehat{CAB} + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{CAB} = 70^\circ = \widehat{ACB}$$

$$2 \times \widehat{BAD} + 50^\circ = 180^\circ$$

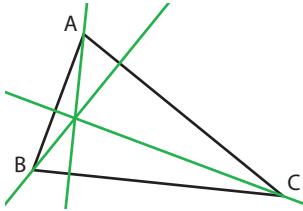
$$\widehat{BAD} = 65^\circ = \widehat{BDA}.$$

2. $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{DBA}$

$$\widehat{CAD} = 70^\circ + 65^\circ = 135^\circ.$$

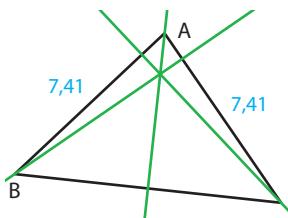
28 Hauteurs

1.



Les trois droites sont concourantes en un point appelé orthocentre.

2.

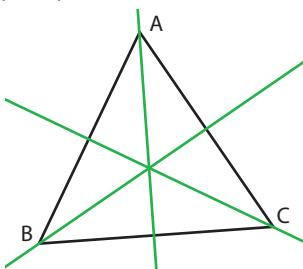


Dans le cas d'un triangle isocèle, la hauteur issue de A, soit du sommet principal, est également la médiatrice du segment [BC].

Ce n'est pas le cas pour les autres hauteurs.

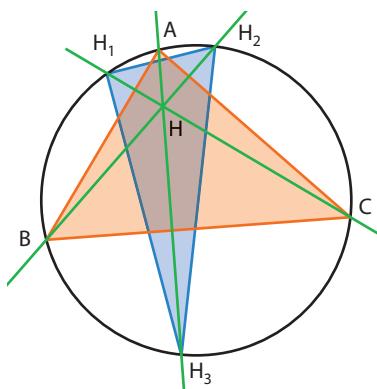
Un triangle isocèle possède un axe de symétrie qui est la médiatrice de sa base et elle coïncide avec la hauteur issue du sommet principal.

3.



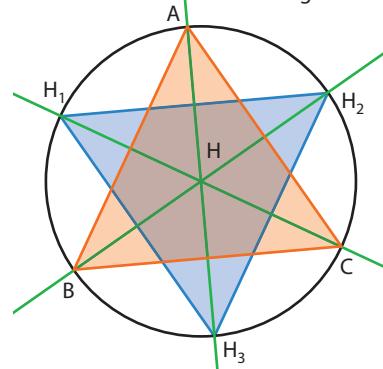
Dans le cas d'un triangle équilatéral, les hauteurs sont confondues avec les médiatrices des côtés.

4.



Le cercle passe par les 3 sommets des 2 triangles construits. C'est le cercle circonscrit aux deux triangles.

5.



Dans le cas d'un triangle équilatéral, l'orthocentre est confondu avec le centre du cercle circonscrit.

29 Défi

- Dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} = 48^\circ$ et $\widehat{CAB} = 107^\circ$.

Or, dans un triangle, la somme des angles est toujours égale à 180° .

$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

$$107^\circ + \widehat{ACB} + 48^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} + 155^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ.$$

- ADC est un triangle isocèle en D avec $\widehat{ADC} = 60^\circ$.
Or, si un triangle isocèle a un angle de 60° alors c'est un triangle équilatéral.
Donc $\widehat{ACD} = 60^\circ$.
- L'angle $\widehat{BCE} = 157^\circ$, $\widehat{ACD} = 60^\circ$
et $\widehat{BCE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} + \widehat{BCA}$.
Donc $157^\circ = 60^\circ + 25^\circ$.
 $\widehat{DCE} = 157^\circ - 60^\circ - 25^\circ = 72^\circ$.
- Le triangle DEC est un triangle isocèle en E.
Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.
Donc $\widehat{DCE} = \widehat{CDE} = 72^\circ$.
Et la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180° .
 $\widehat{DCE} + \widehat{CDE} + \widehat{DEC} = 180^\circ$.
 $72^\circ + 72^\circ + \widehat{DEC} = 180^\circ$.
 $\widehat{DEC} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

30 Art contemporain

1. Le périmètre d'un cercle s'obtient avec la formule : $2\pi r$.
Comme le périmètre est proportionnel à la mesure de l'angle au centre, réalisons un tableau de proportionnalité.

Angle au centre (en°)	360	x
Périmètre(en cm)	$2\pi r$?

Comme c'est un tableau de proportionnalité, le périmètre pour x à l'angle au centre est égal à : $\frac{2\pi rx}{360} = \frac{\pi rx}{180}$

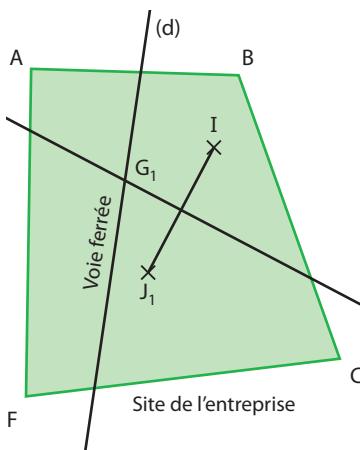
$$2. L = \frac{\pi \times 23,95 \times 115,5}{180} \approx 48,3 \text{ m}$$

L'arc de cercle mesure environ 48,3 m.

31 Productivité et efficacité

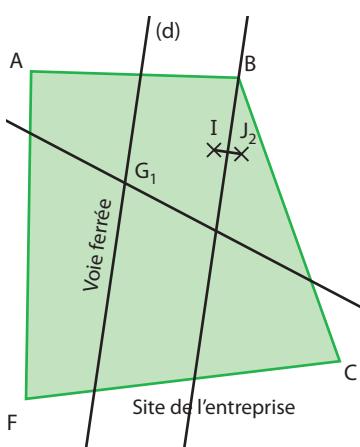
1. Pour cette question, il faut un quadrilatère ABCF, une droite (d) et un point I dans le quadrilatère.

2.



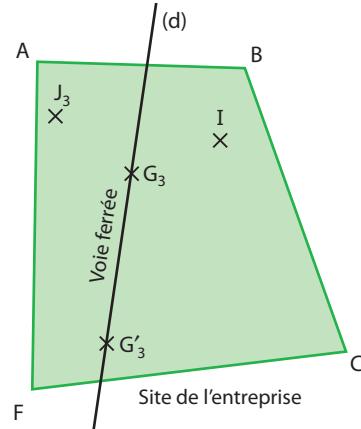
Pour trouver un point à égale distance de I et J, il suffit de tracer la médiatrice de [IJ] et ensuite on prend le point sur la médiatrice et sur la droite (d) représentant la voie ferrée.

3.



Pour que G n'existe pas, il suffit qu'il n'existe pas de point d'intersection entre la médiatrice de [IJ] et (d).

4.



Pour qu'il y ait plusieurs possibilités pour G, il suffit que les médiatrices de [IJ] et (d) soit confondues.

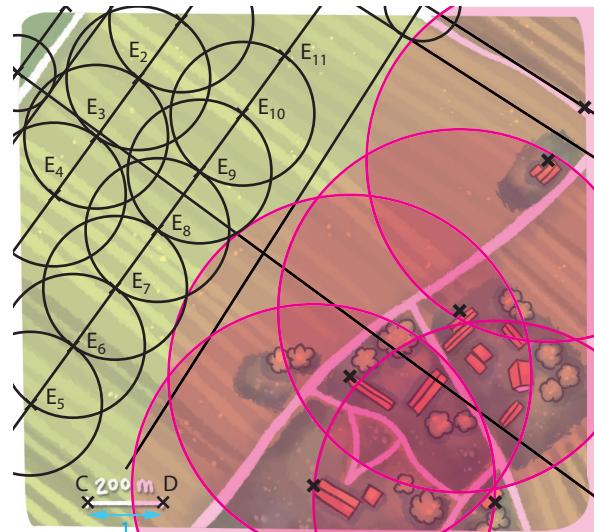
32 Installation d'éoliennes

En fonction des contraintes techniques et d'urbanisation, voici une proposition d'implantation de 11 éoliennes.

Les zones rouges représentent les zones à moins de 500 m d'une habitation donc inaccessibles pour l'implantation des éoliennes. Pour les cercles roses, deux éoliennes ne peuvent se retrouver dans un même cercle, car il faut une distance de 200 m entre chaque éolienne.

Au-delà des droites bleues, on ne peut pas installer d'éolienne non plus, car elles doivent être à plus de 50 m d'une route ou d'un chemin.

Par souci d'esthétique, la zone a été quadrillée par des droites parallèles et perpendiculaires pour que les éoliennes soient alignées et dans l'éventualité d'en rajouter pour optimiser l'espace.



Les éoliennes sont représentées par des points numérotés de E1 à E11.

Pour les élèves les plus à l'aïse, on peut proposer de chercher le nombre maximal d'éoliennes que l'on peut installer sur cet emplacement.

33 Aspiration centralisée

Cet exercice peut faciliter la différenciation.

Ce travail peut se faire en groupe avec, dans un premier temps, la réalisation du plan à l'échelle avec ou sans ordinateur. Puis, dans un second temps, partager le plan.

Si le travail principal consiste à partager le plan en plusieurs régions, on peut éventuellement donner un plan aux élèves en difficulté.

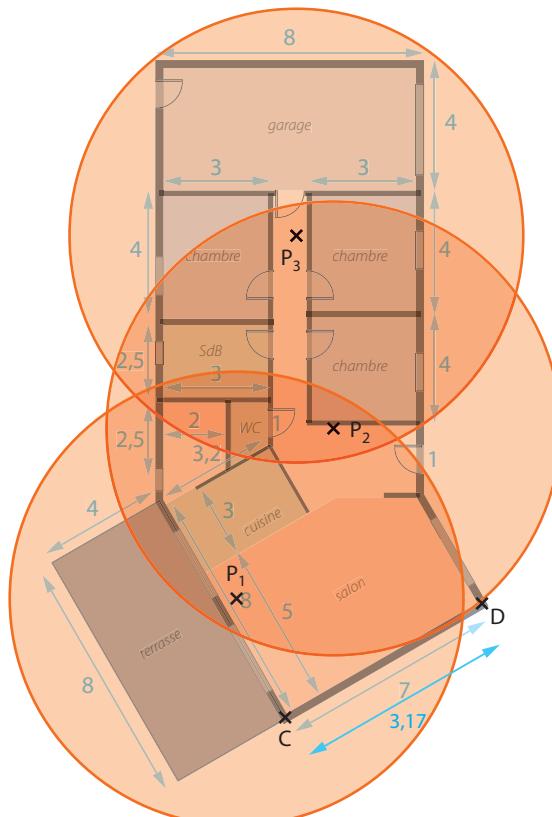
Ensuite il y a deux phases dans la gestion du plan, l'accès aux portes, puis l'accès dans toutes les zones de chaque pièce.

Tous les élèves n'iront peut-être pas jusqu'à l'optimisation complète de l'espace. On peut mettre l'accent sur l'accessibilité des zones.

Pour optimiser le nombre de prises, il faut que toutes les zones de la maison soient accessibles avec l'une d'entre elles. Les zones vertes représentent les entrées de pièces accessibles par l'une des 3 prises proposées.

Ensuite, à l'entrée de chaque porte, il faut vérifier qu'avec la longueur de tuyau restante, toutes les zones de chaque pièce sont atteintes.

Dans la configuration ci-après, c'est le cas.



Par conséquent, avec 3 prises seulement, la surface de la maison est prise en compte dans sa totalité en comptant la terrasse et le garage.

Algorithmique et outils numériques

34 Triangle particulier

```
a.
quand flag pressé
aller à x: 0 y: 0
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 50
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de 50
aller à x: 0 y: 0
```

Pour que le triangle soit isocèle, le lutin doit avancer d'une même longueur.

b.

```
quand flag pressé
aller à x: 0 y: 0
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 70
tourner ⚡ de 120 degrés
avancer de 70
aller à x: 0 y: 0
```

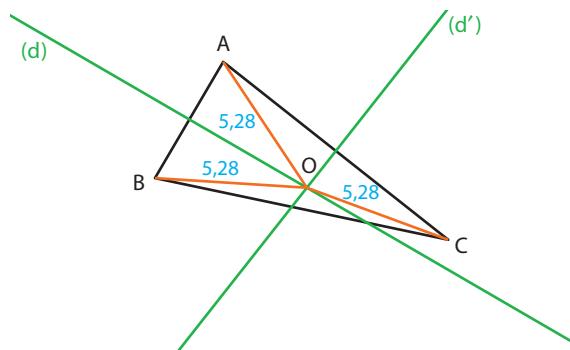
Pour que le triangle soit équilatéral, le lutin doit avancer de la même longueur. L'angle est égal à 120° car le lutin doit tourner par rapport à sa direction initiale.

35 Le bon script

- Figure ④ > script ① : on tourne de 90° donc il y a un angle droit, on cherche un triangle rectangle.
- Les déplacements sont différents donc les longueurs des côtés ne sont pas égales.
- Figure ③ > script ② : on tourne de 60° donc cela exclut les triangles rectangles et le triangle équilatéral.
- Figure ② > script ③ : on répète trois fois le fait d'avancer de 50, donc on reconnaît le triangle équilatéral.
- Figure ① > script ④ : on retrouve l'angle de 90° donc on cherche un triangle rectangle et les déplacements sont identiques donc le triangle est isocèle également.

36 Cercle circonscrit

1. a. à d.



e. Les segments ont la même longueur. $OA = OB = OC$.

2. a. Dans le triangle ABC, (d) est la médiatrice du segment [AB] et (d') est la médiatrice du segment [AC].

O est le point d'intersection des droites (d) et (d').

Or tout point situé sur la médiatrice d'un segment est à équidistance de ses extrémités.

Donc $OA = OB$, d'une part, et $OA = OC$, d'autre part.

b. D'après la question précédente, $OA = OB$ et $OA = OC$.

On obtient ainsi $OB = OC$.

Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment alors il est sur sa médiatrice.

Donc O est sur la médiatrice du segment [BC].

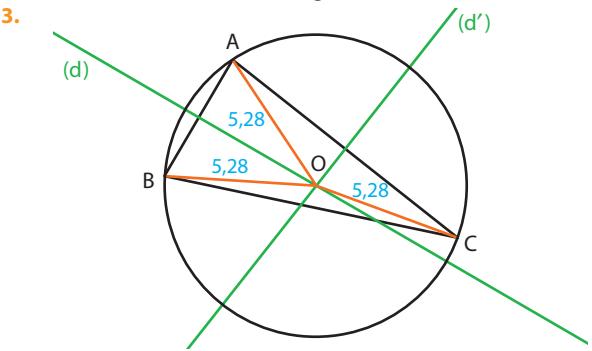
c. On vient de démontrer que $OA = OB = OC$.

Cela sous-entend deux choses :

– les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point ;

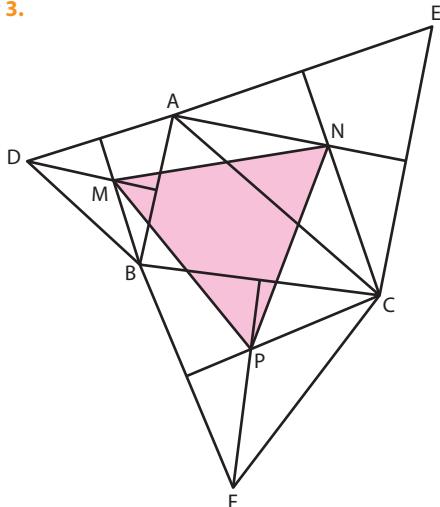
– ce point est à la même distance des 3 sommets, donc il existe un cercle de centre O passant par A, B et C : ce cercle est le cercle circonscrit au triangle.

3.



Le théorème de Napoléon

1., 2. et 3.



Pour construire les médianes, on doit placer les milieux, puis tracer les segments qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés.

- 4.** Le triangle MNP semble être un triangle équilatéral.

**Deux énoncés pour un exercice****Exercice 1**

On décompose le parcours.

On reconnaît un triangle équilatéral AED et un triangle isocèle ABC.

Le triangle équilatéral mesure 400 m de côté et le triangle isocèle 200 m sur les côtés de même longueur et 300 m sur sa base.

$$\begin{aligned}P_{ABCDEA} &= AB + BC + CD + DE + EA \\&= 200 + 300 + 200 + 400 + 400 \\&= 1\,500 \text{ m}\end{aligned}$$

Le parcours fait 1 500 m.

Exercice 1

On décompose le parcours.

AED est un triangle avec tous ses angles de même mesure donc c'est un triangle équilatéral de côté 500 m.

ABC est un triangle avec deux angles de même mesure donc c'est un triangle isocèle en A, car $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

On reconnaît un triangle équilatéral AED et un triangle isocèle ABC.

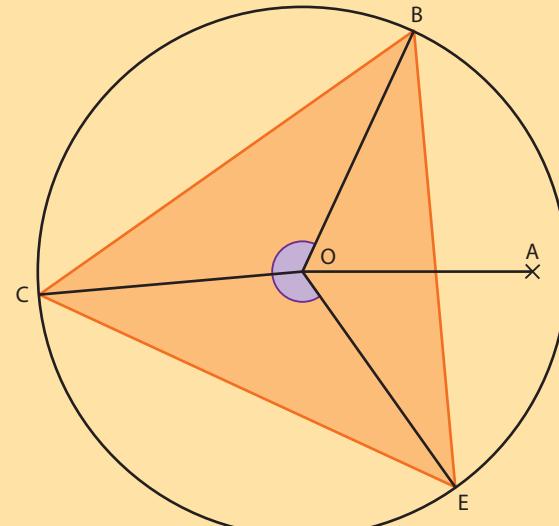
Le triangle équilatéral mesure 500 m de côté et le triangle isocèle 250 m sur les côtés de même longueur et 400 m sur sa base.

$$\begin{aligned}P_{ABCDEA} &= AB + BC + CD + DE + EA \\&= 250 + 400 + 250 + 500 + 500 \\&= 1\,900 \text{ m}\end{aligned}$$

Le parcours fait 1 900 m.

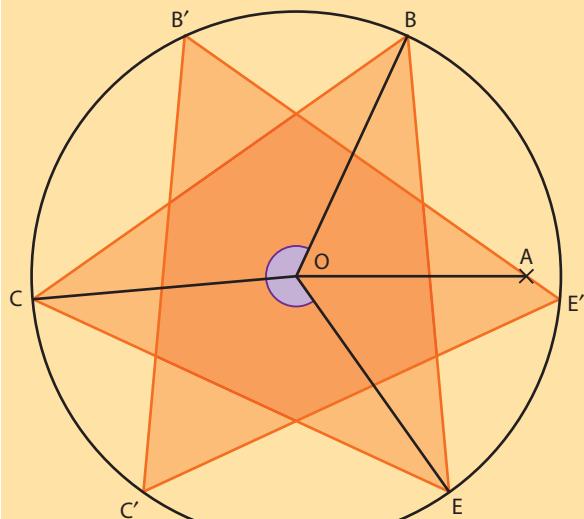
Exercice 2

Pour cet exercice, il est souhaitable de faire un travail au préalable sur les angles dans un triangle équilatéral. Faire construire le point d'intersection des médiatrices et remarquer que les angles au centre sont tous égaux à 120° . Ensuite faire la figure.



On peut en profiter pour parler de triangles égaux sans pour autant les définir.

La suite de l'exercice peut se faire avec du papier calque et une attache parisienne pour faire tourner le triangle autour du point O pour que l'un de ses côtés passe par le point A.



Même chose, on peut parler de rotation sans la définir.

- 2.** On commence par construire un cercle de centre O et de rayon 7 cm.

On place un point A tel que $OA = 6 \text{ cm}$.

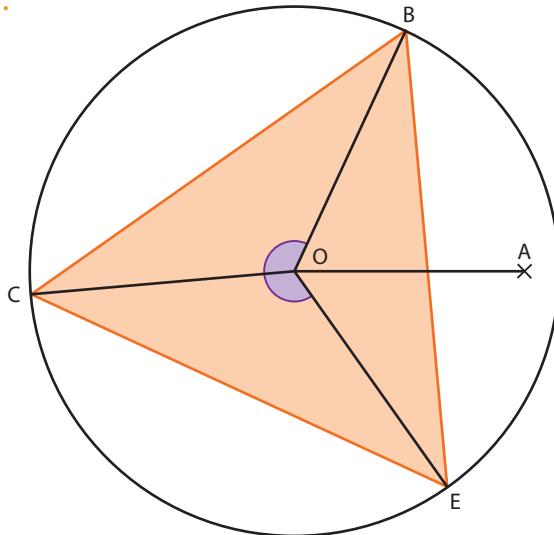
On place un point B sur le cercle.

On construit un angle $\widehat{BOC} = 120^\circ$, puis un angle $\widehat{COE} = 120^\circ$. Les points d'intersection d'un côté de l'angle et du cercle définissent les sommets du triangle équilatéral BCE.

Ensuite on décalque le triangle BCD et, avec une attache parisienne, on pique en O afin de faire tourner la figure autour de celui-ci jusqu'à ce que l'un des côtés passe par A.

Exercice 2

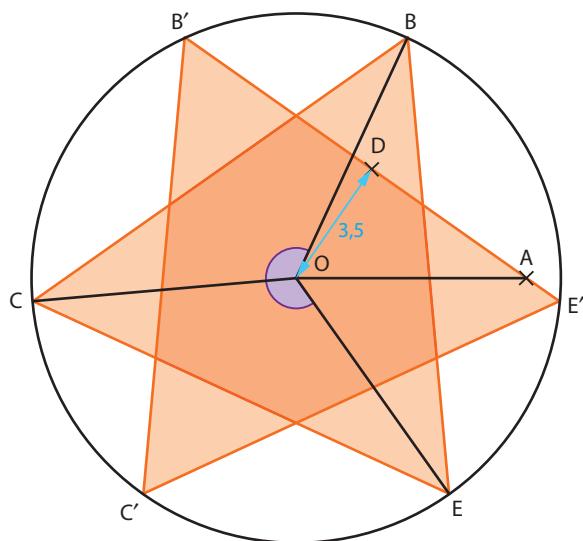
1.



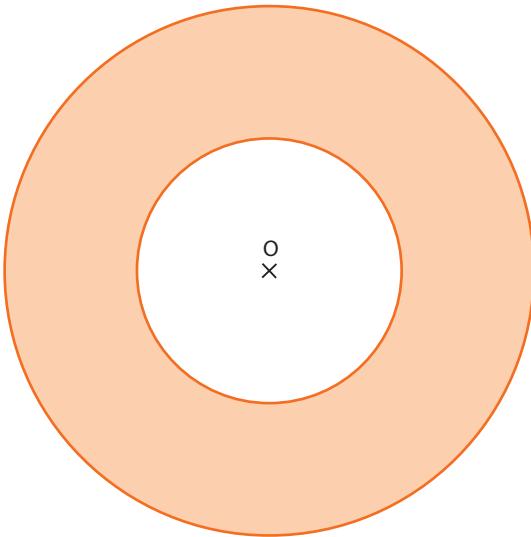
2. et 3. Si $OA > 7$, le triangle n'existe pas.

Si $3,5 < OA < 7$, le triangle existe et la méthode est décrite dans l'exercice 2 précédent.

Si $OA < 3,5$, le triangle n'existe pas car 3,5 cm est la distance minimale entre O et un des côtés.



4. Les points pour lesquels il est possible de construire un triangle passant par A sont dans la couronne de rayon compris entre 3,5 et 7 cm.



Analyse d'une production

- Mélanie

Mesurer est le premier degré d'expertise.
Elle se trompe néanmoins dans la conclusion.
ADC est isocèle en A.

- Zoé

Elle se trompe de droite, c'est (d_1) qui est la médiatrice de [CD] et A \in (d_1).
Elle utilise les données du texte, c'est un deuxième degré d'expertise.

On peut inciter à faire trois étapes :

- mesurer ;
- lire (données) ;
- interpréter (caractérisation de la médiatrice).

Triangles égaux, triangles semblables

Introduction

Dans les chapitres 34 et 35, on a consacré du temps à la construction des triangles, à d'autres notions proches comme les angles, les médiatrices et les hauteurs. Dans ce chapitre, on réinvestit ces connaissances tout en découvrant les notions de triangles égaux et de triangles semblables, dans un

premier temps avec des constructions puis dans un second temps avec des raisonnements et des démonstrations. Les triangles semblables permettent de débuter le travail sur l'agrandissement et la réduction des triangles qui sera poursuivi en 3^e avec le théorème de Thalès et les homothéties.

Activités

Questions flash

1.	AB	AC	BC	Constructible ?
3	4	2		Oui
11	5	4		Non
6	3	9		Aplat
7	8	10		Oui
12	3	8		Non
13	4	9		Aplat

2. $OA = OB = OC$ car tout point situé sur une médiatrice d'un segment est à équidistance des deux extrémités.
3. BC peut prendre les valeurs 8, 9 ou 10 sachant que pour 10 le triangle sera aplati.
4. a. Les droites sont les médiatrices des côtés du triangle car elles passent par le milieu d'un côté et sont perpendiculaires à celui-ci.
b. $OB = OC = OA$ car tout point situé sur une médiatrice d'un segment est équidistant des deux extrémités.

Un nouveau jeu

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est la découverte des triangles égaux avec le réinvestissement de notions telles que l'inégalité triangulaire, les constructions de triangles et les symétries centrale et axiale.

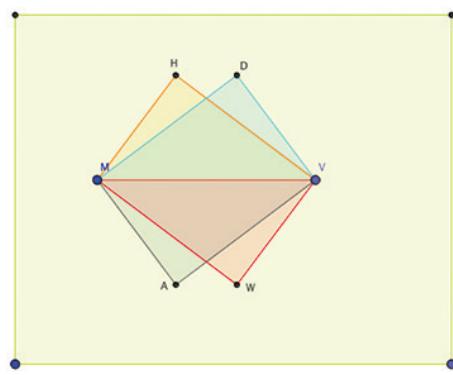
1.

Pour le rectangle, il est possible de le fournir à certains élèves dès le début de l'activité et d'en avoir en réserve car il faut qu'il optimise l'espace.

On peut aussi envisager la réalisation de figure pour certains élèves avec un logiciel de géométrie dynamique.

1. et 2. Le schéma n'est pas à l'échelle. Le rectangle doit mesurer 8 cm sur 10 cm.

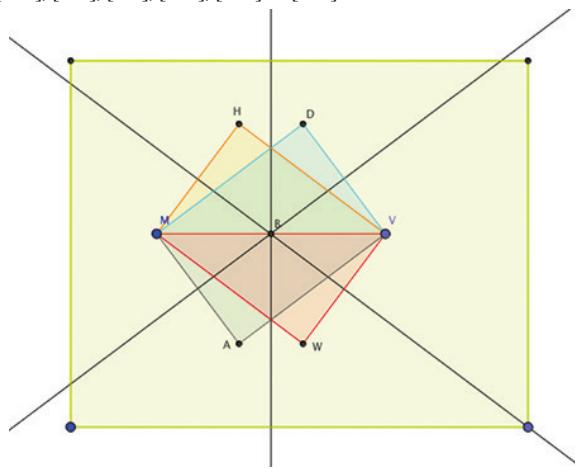
Les longueurs des triangles sont 4, 5 et 3 cm.



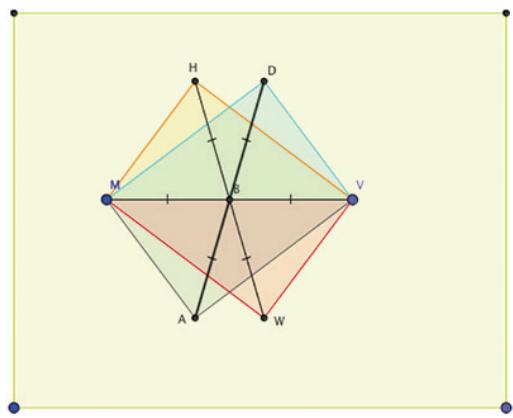
Activité 1

Les 4 triangles ont les longueurs égales deux à deux : on dit que ce sont des triangles égaux.

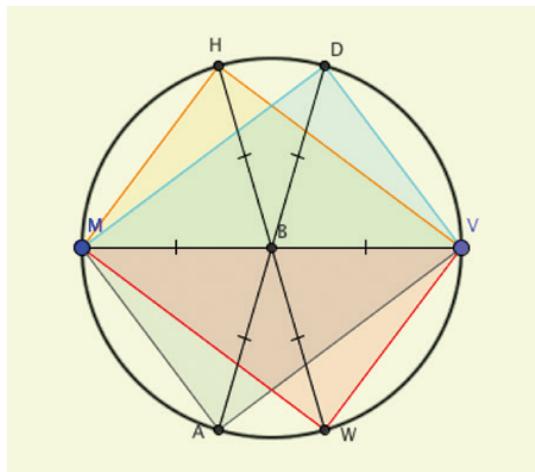
3. Pour passer du triangle orange au triangle bleu, il existe une symétrie axiale d'axe la médiatrice du segment [MV]. C'est la même symétrie pour passer du triangle gris au triangle rouge.
- Il existe une symétrie centrale qui permet de passer du triangle bleu au triangle gris et du triangle orange au triangle rouge, c'est la symétrie centrale de centre le milieu du segment [MV].
4. Le ballon doit se situer à la même distance de tous les joueurs. Donc il doit se trouver sur les médiatrices de tous les segments [MH], [HD], [DV], [WA], [WV] et [MA].



5. B est situé à équidistance des 6 joueurs.



Donc il existe un cercle qui passe par ces 6 positions de centre le ballon B.



Waël a donc raison de penser qu'ils forment une belle ronde avec le ballon.

Raisonnements

Activité 2

Intentions des auteurs

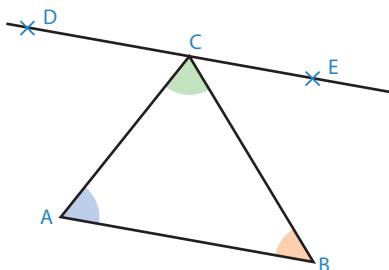
L'objectif de cette activité est de réinvestir la propriété sur la somme des mesures des angles d'un triangle.

Il est possible de faire une différenciation sur le raisonnement choisi par groupe.

Il est possible de mesurer les angles de chaque triangle dans un groupe et de faire une conjecture pour se rappeler la propriété. Il est possible, dans un autre groupe, de réaliser une figure avec le découpage des trois angles de chaque triangle et la réalisation d'un angle plat.

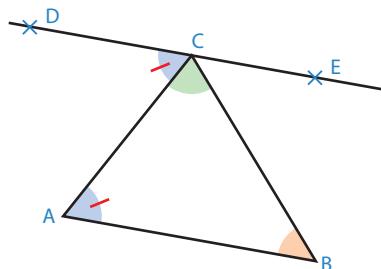
Enfin, dans un autre groupe, il est possible de faire une démonstration avec le réinvestissement des angles alternes-internes.

Soit ABC un triangle quelconque avec $C \in (DE)$ et $(DE) \parallel (AB)$.



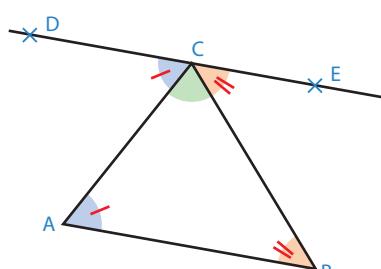
Dans la figure ci-dessus, les droites (AB) , (DE) et (CA) définissent des angles alternes-internes \widehat{DCA} et \widehat{CAB} .

Or les droites (DE) et (AB) sont parallèles donc les angles \widehat{DCA} et \widehat{CAB} ont même mesure. Donc $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$



Dans la figure ci-dessus, les droites (AB) , (DE) et (CB) définissent des angles alternes-internes \widehat{ECB} et \widehat{CBA} .

Or les droites (DE) et (AB) sont parallèles donc les angles \widehat{ECB} et \widehat{CBA} ont même mesure. Donc $\widehat{FCB} = \widehat{CBA}$



Les points D, C et E sont alignés donc l'angle $\widehat{DCE} = 180^\circ$.

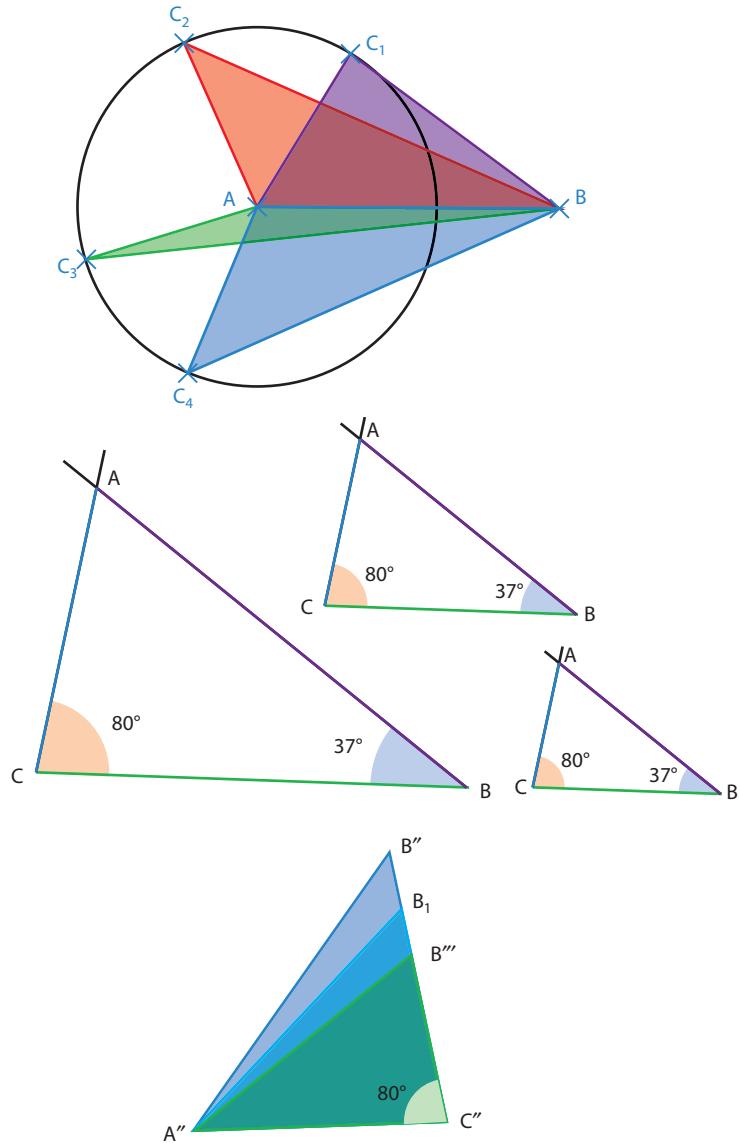
$$\text{D'où } \widehat{\text{DCA}} + \widehat{\text{ACB}} + \widehat{\text{ECB}} = 180^\circ.$$

Comme $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{ECB} = \widehat{CBA}$, on peut conclure que :
 $\widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de caractériser les triangles égaux. On appuie l'essentiel de l'activité sur la construction de triangles et la comparaison avec les élèves.

1. a.



b. Il existe une infinité de triangles avec les conditions $AC = 2,7 \text{ cm}$ et $AB = 4,5 \text{ cm}$.

Les longueurs des côtés ne sont pas égales deux à deux.

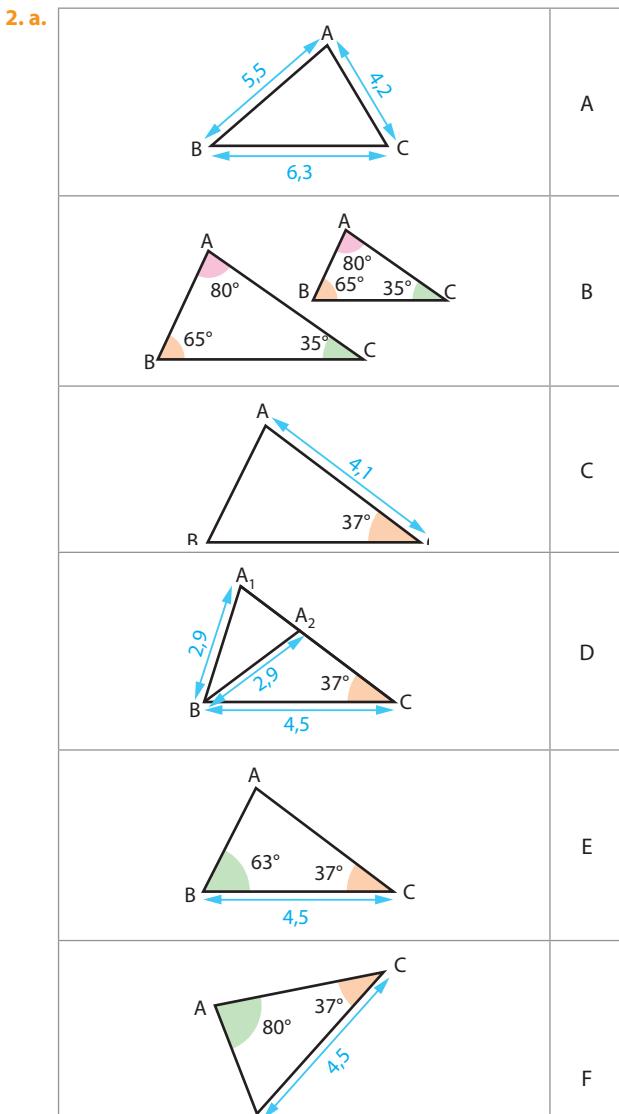
Il existe une infinité de triangles avec les conditions $\widehat{CBA} = 37^\circ$ et $\widehat{ABC} = 80^\circ$.

Les longueurs des côtés ne sont pas égales deux à deux.

Il existe une infinité de triangles avec les conditions $AC = 2,7 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 80^\circ$.

Les longueurs des côtés ne sont pas égales deux à deux.

2. a.



Pour avoir un triangle, il faut passer par le calcul du dernier angle et se ramener au cas E.

- b. Les figures sont identiques pour tous les élèves lorsque l'on a les trois longueurs, un angle compris entre 2 longueurs et 1 longueur comprise entre 2 angles. Soit dans les figures A, C et E.
c. Et pour les mêmes conditions, on trouve les longueurs égales deux à deux.

À la manière de Sierpinski

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de mettre en place la notion de triangles semblables. Le but est de conjecturer que les longueurs de triangles semblables sont proportionnelles.

1. Tous les triangles bleus sont des triangles égaux.

Tous les triangles verts sont des triangles égaux.

2. Les longueurs du triangle rouge sont : 4,8 cm, 12 cm et 12,8 cm.

Les longueurs du triangle jaune sont : 2,4 cm, 6 cm et 6,4 cm.

Toutes les longueurs du triangle jaune sont égales à la moitié de celles du triangle rouge.

3. Les longueurs du triangle jaune sont : 2,4 cm, 6 cm et 6,4 cm.

Les longueurs du triangle vert sont : 1,2 cm, 3 cm et 3,2 cm.

Toutes les longueurs du triangle vert sont égales à la moitié de celles du triangle jaune.

4. Les longueurs du triangle vert sont : 1,2 cm, 3 cm et 3,2 cm.
Les longueurs du triangle bleu sont : 0,6 cm, 1,5 cm et 1,6 cm.
Toutes les longueurs du triangle bleu sont égales à la moitié de celles du triangle vert.
5. Les longueurs du triangle jaune sont : 2,4 cm, 6 cm et 6,4 cm.
Les longueurs du triangle bleu sont : 0,6 cm, 1,5 cm et 1,6 cm.
Toutes les longueurs du triangle bleu sont égales au quart de celles du triangle jaune.
6. On dit que deux triangles sont semblables si les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles deux à deux.

Exercices

Utiliser les propriétés des angles et des triangles

Les questions flash (exercices 1 à 3) sont des questions de réflexion rapide, aucune justification n'est demandée. Ce sont des applications directes du cours.

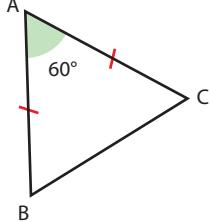
Questions flash

1. $180^\circ - 157^\circ = 23^\circ$

2. Les angles vert et violet sont de même mesure.

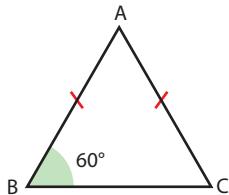
3. $180^\circ - 78^\circ \times 2 = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$

4. • 1^{er} cas :



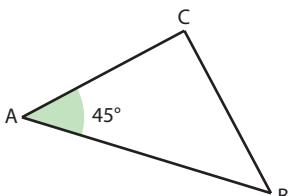
Dans le triangle ABC isoscele en A, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Or dans un triangle isoscele, les angles à la base sont de même mesure.
De plus, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .
Soit $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
 $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$
Comme les trois angles du triangle ont la même mesure, on peut conclure que le triangle ABC est équilatéral.

- 2^e cas :



Dans le triangle ABC isoscele en A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
Or dans un triangle isoscele, les angles à la base sont de même mesure.
Donc $\widehat{ACB} = 60^\circ$.
De plus, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
Soit $180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$.
Donc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Comme les trois angles du triangle ont la même mesure, on peut conclure que le triangle ABC est équilatéral.

5.



Dans le triangle ABC isoscele en C, $\widehat{CAB} = 45^\circ$.
Or dans un triangle isoscele, les angles à la base sont de même mesure.
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$.
De plus, la somme des angles dans un triangle est égale à 180° .
 $\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$
 $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
Le triangle ABC est un triangle rectangle isoscele en C.

6. 1. Les droites (AB), (EF) et (AC) définissent des angles alternes-internes \widehat{BAC} et \widehat{ACE} .

Or les droites (AB) et (EF) sont parallèles, donc les angles \widehat{BAC} et \widehat{ACE} ont même mesure. Donc $\widehat{ACE} = \widehat{BAC} = 42^\circ$.

2. Les droites (AB), (EF) et (BC) définissent des angles alternes-internes \widehat{ABC} et \widehat{BCF} .

Or les droites (AB) et (EF) sont parallèles, donc les angles \widehat{ABC} et \widehat{BCF} ont même mesure. Donc $\widehat{BCF} = \widehat{ABC} = 65^\circ$.

3. Dans le triangle ABC, $\widehat{BAC} = 42^\circ$ et $\widehat{ABC} = 65^\circ$.

Or la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 42^\circ - 65^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 73^\circ$$

Reconnaitre des triangles égaux

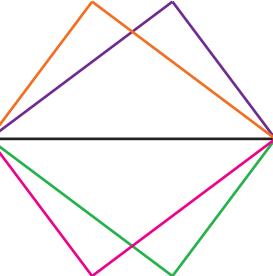
Questions flash

7. Les deux triangles ABC et RST ont une même longueur entre 2 angles de même mesure donc les deux triangles sont égaux.

8. 1. Pour que le triangle soit constructible, il suffit que le plus grand côté soit inférieur à la somme des deux autres côtés.
Or $10 < 6 + 8$.

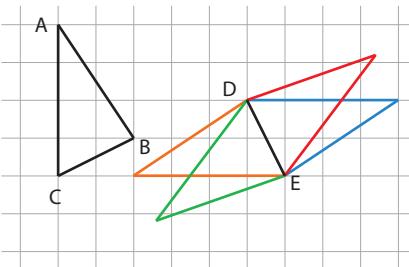
Donc le triangle est constructible.

2.



3. Les 4 triangles sont tous égaux car ils ont les côtés deux à deux de même longueur.

9.



10. 1.

On cherche des côtés de même longueur et des angles de même mesure dans les deux triangles.

Les triangles ABC et BKL sont des triangles rectangles donc $\widehat{ABC} = \widehat{BKL} = 90^\circ$.

D'après le codage, AB = BK et $\widehat{CAB} = \widehat{BKL}$.

Les deux triangles ont un côté de même longueur entre deux angles de même mesure donc ce sont des triangles égaux.

2. AB = BK

3. AC = KL

4. BC = BL

5. $\widehat{C} = \widehat{L}$

11. Les droites (EB), (EC) et (HC) définissent des angles alternes-internes \widehat{BEF} et \widehat{FCH} .

Or les droites (EB) et (HC) sont parallèles, donc les angles \widehat{BEF} et \widehat{FCH} ont même mesure. Donc $\widehat{BEF} = \widehat{FCH}$.

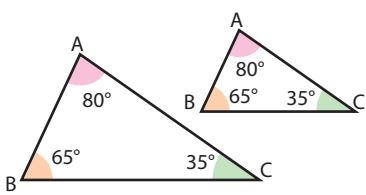
Les triangles EBF et FCH ont un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur donc ce sont des triangles égaux.

Les triangles égaux ont les côtés deux à deux de même longueur donc BE = FC, EF = CH et BF = FH.

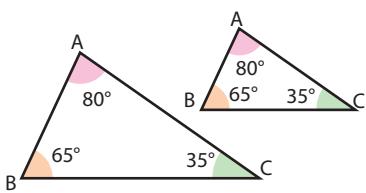
Reconnaitre des triangles semblables

Questions flash

12 a. Faux.



b. Vrai.



c. Vrai.

d. Faux.

13 On cherche des angles de même mesure dans les deux triangles. Calculons les angles \widehat{ACB} et \widehat{EGF} .

- Dans le triangle ABC, $\widehat{CAB} = 27^\circ$ et $\widehat{CBA} = 54^\circ$. Or dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° . Donc $\widehat{CAB} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 180^\circ$. Soit $27^\circ + 54^\circ + \widehat{ACB} = 180^\circ$. D'où $\widehat{ACB} = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$.
- Dans le triangle EFG, $\widehat{EFG} = 27^\circ$ et $\widehat{GEF} = 99^\circ$. Or dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° . Donc $\widehat{EFG} + \widehat{GEF} + \widehat{EGF} = 180^\circ$. Soit $27^\circ + 99^\circ + \widehat{EGF} = 180^\circ$. D'où $\widehat{EGF} = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.
- On a donc $\widehat{EFG} = \widehat{CAB} = 27^\circ$, $\widehat{ACB} = \widehat{GEF} = 99^\circ$ et $\widehat{EGF} = \widehat{CBA} = 54^\circ$. Les triangles ABC et EFG ont les angles deux à deux de même mesure, donc ce sont des triangles semblables.

14 On cherche à savoir si les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

Pour cela, on réalise un tableau avec les longueurs des côtés, de la plus petite à la plus grande.

Longueurs du triangle ABC	4	5	6
Longueurs du triangle MNP	6,4	8	9,6

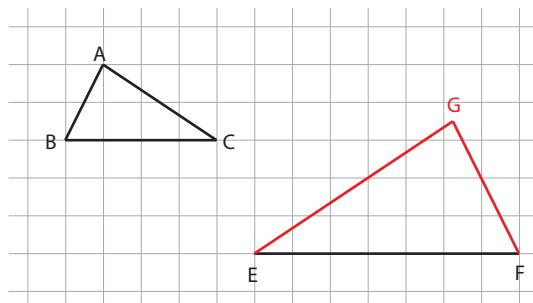
On calcule les rapports de longueurs pour voir si c'est un tableau de proportionnalité.

$$\frac{6,4}{4} = \frac{8}{5} = \frac{9,6}{6} = 1,6$$

Les rapports de longueurs sont égaux donc c'est bien un tableau de proportionnalité.

Donc les triangles ABC et MNP sont des triangles semblables.

15



16 1. Les triangles MON et LES sont des triangles semblables donc les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles.

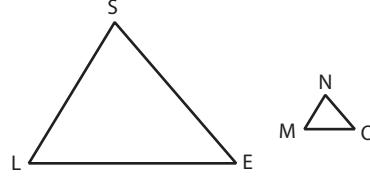
MON est une réduction de LES de rapport $\frac{1}{4}$ donc

$$MO = \frac{1}{4} LE, MN = \frac{1}{4} LS \text{ et } NO = \frac{1}{4} SE.$$

Car $\widehat{L} = \widehat{M}$ et $\widehat{E} = \widehat{O}$.

Calculons les longueurs : $MO = 8,4 \div 4 = 2,1 \text{ cm}$, $MN = 6,8 \div 4 = 1,7 \text{ cm}$ et $NO = 7,6 \div 4 = 1,9 \text{ cm}$.

2.



17

On cherche à vérifier que les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

D est le milieu de [AC] donc $AC = 2 CD$.

E est le milieu de [BC] donc $BC = 2 CE$.

Et $AB = 2 DE$.

Les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles.

Les triangles ABC et CED sont des triangles semblables.

18

Les triangles ABC et ADE sont des triangles semblables donc les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

$$AB = \frac{3}{4} AD \text{ donc } AC = \frac{3}{4} AE \text{ soit } AC = \frac{3}{4} \times 7 = 5,25 \text{ cm.}$$

Problèmes

19 Tour de Pise

1. Dans le triangle SET, $SE = ET = 56 \text{ m}$ donc SET est un triangle isocèle en E.

Or dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

$$\text{D'où } \widehat{EST} = \widehat{STE} = 47,1^\circ.$$

Enfin, dans un triangle, la somme des angles est toujours égale à 180° .

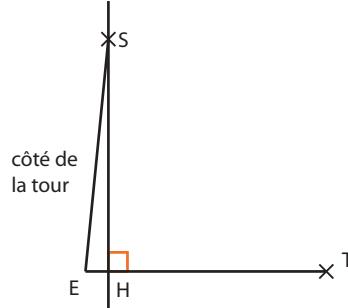
$$\text{Soit } \widehat{EST} + \widehat{STE} + \widehat{SET} = 180^\circ$$

$$47,1 \times 2 + \widehat{SET} = 180^\circ$$

$$\widehat{SET} = 180^\circ - 94,2^\circ = 85,8^\circ.$$

L'angle d'inclinaison de la tour avec le sol est de $85,8^\circ$.

2.



Dans le triangle ESH, $\widehat{SEH} = 85,8^\circ$ et $\widehat{EHS} = 90^\circ$.

Or dans un triangle, la somme des angles est toujours égale à 180° .

$$\text{Soit } \widehat{ESH} + \widehat{SHE} + \widehat{SEH} = 180^\circ$$

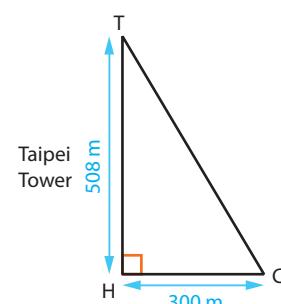
$$\widehat{SHE} + 90^\circ + 85,8^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{SHE} = 180^\circ - 175,8^\circ = 4,2^\circ.$$

L'angle d'inclinaison de la tour avec la verticale est de $4,2^\circ$.

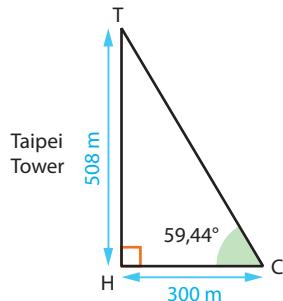
3. Le guide indique que la tour est penchée de 6° avec la verticale et Tiphanie ne trouve que $4,2^\circ$. La tour de Pise a subi des travaux afin de réduire l'angle d'inclinaison pour éviter sa chute. Tiphanie a donc raison de penser que la tour est moins penchée que ce qu'indique le guide.

20 So high



Voici la situation modélisée. On connaît un angle entre deux longueurs alors tous les élèves auront la même figure.

TH représente la hauteur de la tour et C la position de Clark. On doit mesurer l'angle entre le sol et le haut de la tour soit \widehat{HCT} .



Si les élèves mesurent avec leur rapporteur, ils devraient trouver $\widehat{HCT} \approx 60^\circ$.

21 Éolienne

On reconnaît 2 quarts de cercles de rayon respectif :

$$8 \times 200 \text{ m} = 1\,600 \text{ m} \text{ et } 9 \times 200 \text{ m} = 1\,800 \text{ m.}$$

La surface est représentée par la différence des deux aires des deux quartiers de cercles.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{éolienne}} &= \mathcal{A}_{1800} - \mathcal{A}_{1600} \\&= \pi \times 1,8^2 \div 4 - \pi \times 1,6^2 \div 4 \\&= 0,17 \pi \text{ km}^2 \\&\approx 0,53 \text{ km}^2\end{aligned}$$

22 Manhattan

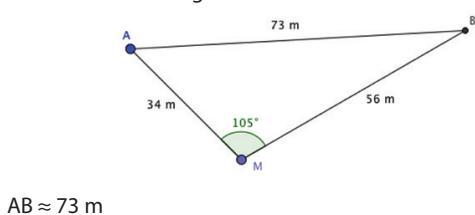
- 1.** Les rues notées St sont toutes parallèles.
Les avenues notées Ave sont toutes parallèles.
La 5th avenue est perpendiculaire à la W 37th Street.
Or si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Donc la 5th avenue est perpendiculaire à toutes les rues.
Et la W 37th Street est perpendiculaire à toutes les avenues.

2. Les rues et Broadway sont modélisées par des droites.
Elles définissent des angles alternes-internes.
Un angle de 108° est un angle obtus.
Or les rues sont parallèles, donc les angles alternes-internes en vert sur le schéma sont tous égaux à 108° .



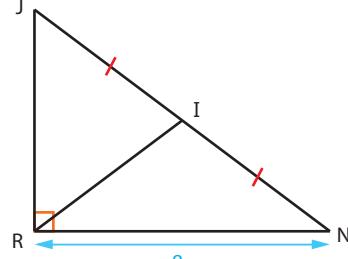
23 Taille d'un bois

1. Avec les données, on peut définir un triangle car on a un angle entre deux longueurs.
 2. Voici la représentation de ce triangle modélisant le bois de monsieur Roumegou :

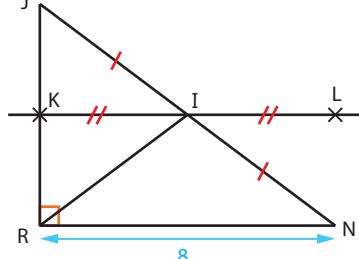


24 Cercle circonscrit

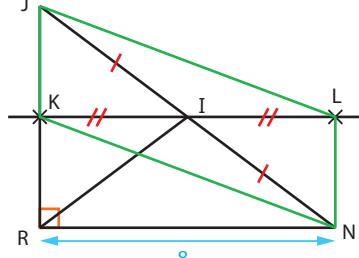
- 1



- 1



- 1



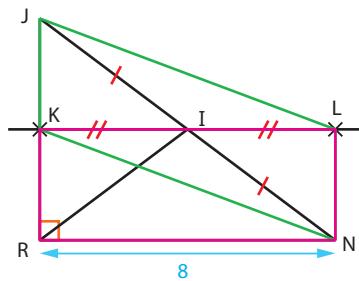
Dans le quadrilatère LJKN, I milieu de [NJ] et I milieu de [KL] par symétrie.

Or si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

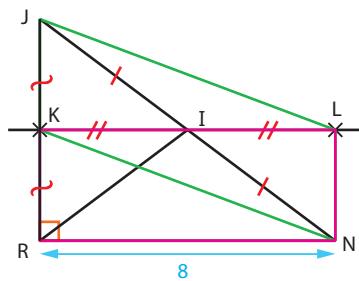
Donc LJKN est un parallélogramme.

- 4.** LJKN est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
Donc $(JK) \parallel (LN)$.

5. Dans le quadrilatère KLRN, $(JK) \parallel (LN)$ d'après la question précédente.
Comme $K \in [RJ]$, $(KR) \parallel (LN)$.
Et $(KL) \parallel (RN)$ par construction.
Or si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.
Donc KLRN est un parallélogramme.



- 6.** $LJKN$ et $KLNR$ sont des parallélogrammes.
Or les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
Donc $KJ = LN$ et $KR = LN$ soit $KJ = KR$ et $K \in [RJ]$.
On en conclut que K est le milieu de $[RJ]$.



7. NRJ est un triangle rectangle en R soit $(RN) \perp (RJ)$. $(KL) \parallel (RN)$
Or si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc $(KL) \perp (RJ)$.

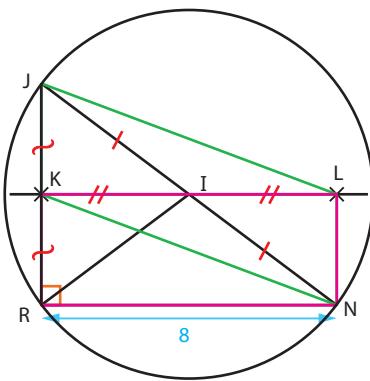
On cherche des côtés de même longueur dans les 2 triangles.
 $\widehat{JKI} = \widehat{RKI} = 90^\circ$, les triangles KIR et KIJ ont un côté commun [KI] et $KJ = KR$ car K milieu de [RJ].

Les triangles KIJ et KIR ont un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur, donc les triangles sont égaux.

8. Les triangles KIJ et KIR sont égaux, donc les côtés sont deux à deux de même longueur.

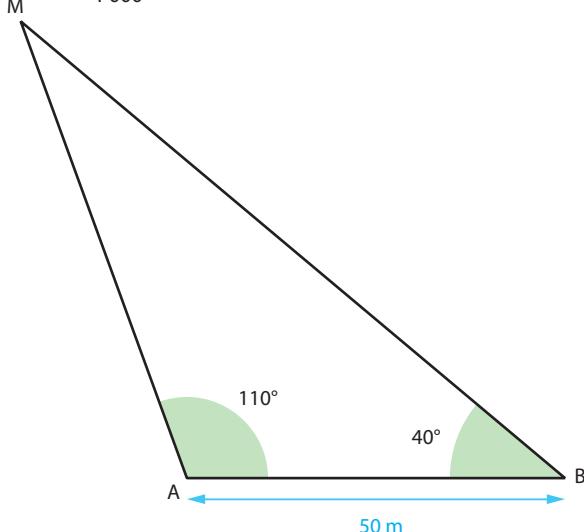
Soit $JI = RI$.

De plus, I milieu de [NJ] donc $IJ = IN = 5$ cm car $NJ = 10$ cm.
En conclusion, $JI = RI = IN = 5$ cm.



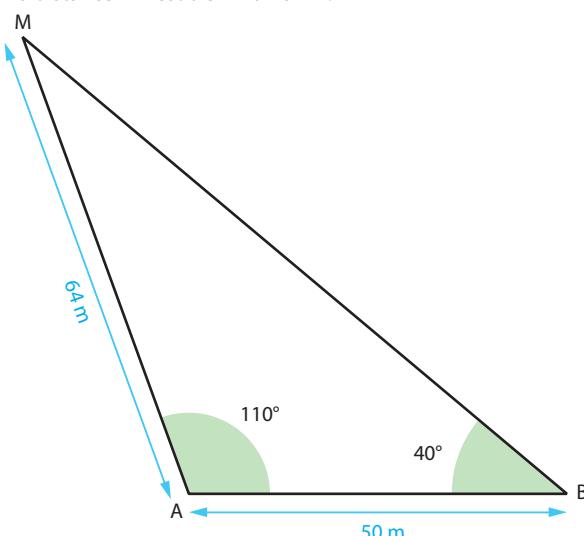
25 Projet de pont

On modélise la situation par un triangle. On fait une figure à l'échelle $\frac{1}{1000}$.



Tout triangle vérifiant les mêmes conditions que celui-ci sera un triangle isométrique car ils ont un côté de même longueur entre deux angles de même mesure.

La distance AM est d'environ 64 m.



26 Carré et triangles isocèles

1. Les triangles rose et orange sont égaux.

Les triangles vert et bleu sont égaux.

Les triangles violet et marron sont égaux.

Les triangles gris et rouge sont égaux.

Car la symétrie axiale conserve les longueurs.

2. Comme le quadrilatère est un carré, les angles mesurent 90° .

$$\widehat{ADO} + \widehat{ODC} = 90^\circ \text{ soit } 30^\circ + \widehat{ODC} = 90^\circ.$$

Donc $\widehat{ODC} = 60^\circ$.

(d) est un axe de symétrie de la figure. Le symétrique de \widehat{ODC} par rapport à (d) est \widehat{DCO} .
Or la symétrie conserve la mesure d'angle.

Donc $\widehat{DCO} = 60^\circ$.

De plus, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc $\widehat{DOC} = 60^\circ$.

Tous les angles du triangle jaune sont égaux à 60° .

Or si un triangle a tous ses angles égaux à 60° alors c'est un triangle équilatéral.

Donc le triangle jaune DOC est un triangle équilatéral.

Les triangles rose et orange sont isocèles et symétriques par rapport à (d) et $\widehat{ADO} = 30^\circ$ et $\widehat{OCB} = 30^\circ$ par symétrie.

Or les angles à la base sont de même mesure dans un triangle isocèle.

Donc les angles à la base des deux triangles ont pour mesure $(180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$.

$$3. \widehat{AOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COB} + \widehat{BOP'} + \widehat{P'OA} = 360^\circ$$

$$75^\circ + 60^\circ + 75^\circ + \widehat{BOP'} + \widehat{P'OA} = 360^\circ$$

$$\widehat{BOP'} + \widehat{P'OA} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

Les triangles bleu et vert sont symétriques et isocèles respectivement en F et F'.

Or les angles à la base sont de même mesure dans un triangle isocèle.

$$\text{Donc } \widehat{BOP'} = \widehat{P'OA} = 150^\circ \div 2 = 75^\circ.$$

$$\text{Et } \widehat{P'OA} = \widehat{OP'F'} = 75^\circ.$$

Le triangle bleu OP'F' est isocèle en F.

Or la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\text{Donc } \widehat{OF'P'} = 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ.$$

Les triangles rose et bleu ont les angles deux à deux de même mesure donc les triangles sont semblables.

4. Les triangles vert et bleu sont symétriques par rapport à la droite (d) (ce sont des triangles égaux).

Or la symétrie conserve les mesures d'angle.

Donc les angles du triangle vert sont de même mesure que les angles du triangle bleu.

$$\widehat{OP'} = \widehat{OF'P'} = 30^\circ; \widehat{P'OA} = \widehat{P'OB} = 75^\circ \text{ et}$$

$$\widehat{OP'F'} = \widehat{OP'F} = 75^\circ.$$

5.

La figure n'est pas simple à réaliser, surtout le pentagone. On peut laisser les élèves prendre des initiatives et réaliser des figures et calculer des angles pour placer les points. Ils peuvent aussi utiliser les outils angle et distance pour tracer des triangles isocèles. Voici un programme de construction pour réaliser la figure :

Construire un carré ABCD de côté 10 cm.

Construire (d) la médiatrice du segment [DC].

Placer le point O sur (d) tel que $\widehat{ADO} = 30^\circ$.

Tracer le triangle ADO puis son symétrique par rapport à (d).

Placer un point F sur le segment [AO] tel que $\widehat{OF'P'} = 30^\circ$, P' sur la droite (d) et OF'P' est un triangle isocèle.

Construire le symétrique de OF'P' par rapport à (d).

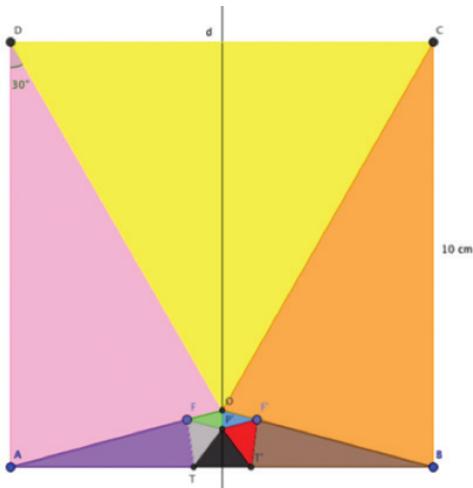
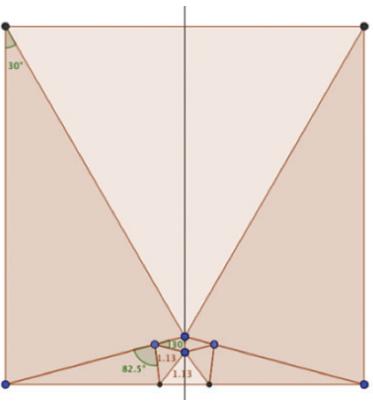
Placer le point T sur le segment [AB] tel que AFT soit un triangle isocèle en T.

Construire le symétrique du triangle ATF par rapport à (d).

Tracer les triangles FP'T et TT'P'.

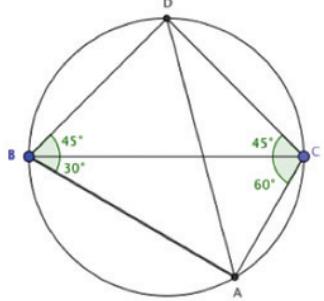
Il ne reste plus qu'à colorer les triangles comme on le souhaite.

Voir figures page suivante.

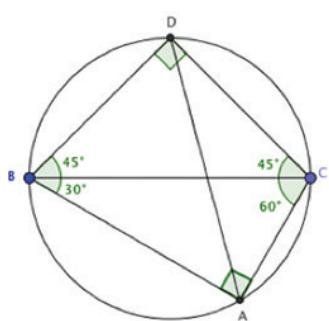


27 La Vierge aux rochers

1.



2.



3. Dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} = 30^\circ$ et $\widehat{BCA} = 60^\circ$.
Or dans un triangle, la somme des mesures des angles est toujours égale à 180° .

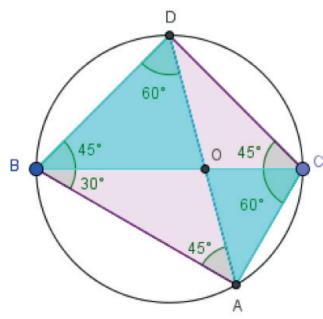
Donc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

4. Dans le triangle BCD,

$\widehat{DBC} = 45^\circ$ et

$\widehat{DCB} = 45^\circ$.



Or dans un triangle, la somme des mesures des angles est toujours égale à 180° .

Donc l'angle $\widehat{BDC} = 90^\circ$.

Donc le triangle BCD est rectangle en D.

De plus, si dans un triangle les angles à la base sont de même mesure alors le triangle est isocèle.

Donc le triangle BCD est rectangle isocèle en D.

5. Les droites (AD) et (BC) définissent des angles opposés par le sommet.

Donc $\widehat{DOC} = \widehat{BOA}$.

Dans les deux triangles, $\widehat{OAB} = \widehat{DCO} = 45^\circ$.

Or si deux triangles ont 2 couples d'angles de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles DOC et BOA sont des triangles semblables.

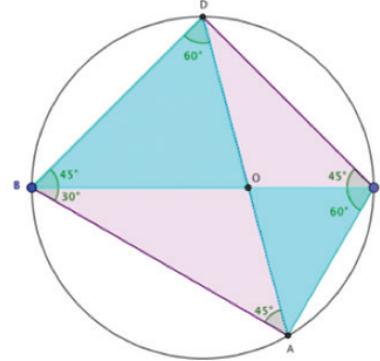
6. Les droites (AD) et (BC) définissent des angles opposés par le sommet.

Donc $\widehat{DOB} = \widehat{COA}$.

Dans les deux triangles, $\widehat{OCA} = \widehat{BDO} = 60^\circ$.

Or si deux triangles ont 2 couples d'angles de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles DOB et COA sont des triangles semblables.



28 Angles et triangles

1. Les droites (FC), (AB) et (AC) définissent des angles alternes-internes \widehat{CAB} et \widehat{FCB} .

Or les droites (AB) et (FC) sont parallèles, donc les angles \widehat{CAB} et \widehat{FCB} ont même mesure. Donc $\widehat{CAB} = \widehat{FCB}$.

2. Les droites (FE), (BC) et (AC) définissent des angles alternes-internes \widehat{ACB} et \widehat{FEC} .

Or les droites (FE) et (BC) sont parallèles, donc les angles \widehat{ACB} et \widehat{FEC} ont même mesure. Donc $\widehat{ACB} = \widehat{FEC}$.

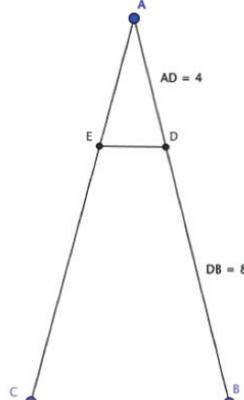
3. Dans les triangles ABC et FEC, $\widehat{CAB} = \widehat{FCB}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{FEC}$.

Or si deux triangles ont 2 couples d'angles de même mesure alors ils sont semblables.

Donc les triangles ABC et FEC sont des triangles semblables.

29 Compas à molette

1.



2. Le compas est modélisé par les deux triangles AED et ABC, avec $(ED) \parallel (BC)$.

Les droites (ED), (BC) et (AC) définissent des angles correspondants \widehat{AED} et \widehat{ACB} .

Or les droites (ED) et (BC) sont parallèles, donc les angles \widehat{AED} et \widehat{ACB} ont même mesure. Donc $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

Les triangles AED et ABC ont un angle commun et $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

Or si deux triangles ont 2 couples d'angles de même mesure alors ils sont semblables.

Donc les triangles AED et ABC sont des triangles semblables.

AED et ABC sont des triangles semblables.

Or les longueurs des côtés de 2 triangles semblables sont proportionnelles.

$$\text{Donc } \frac{4}{12} = \frac{x}{6} = \frac{1}{3} \text{ d'où } x = 2.$$

Pour réaliser un cercle de diamètre 12 cm, il faudra que la tige mesure 2 cm.

30 TP de physique

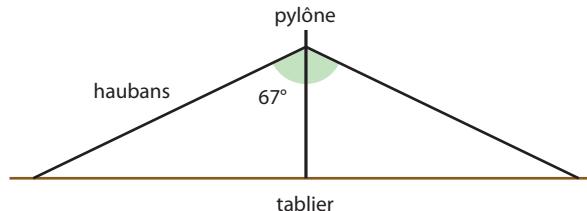
ABO et A'BC' sont des triangles semblables.

Or les longueurs des côtés de 2 triangles semblables sont proportionnelles.

$$\text{Donc } \frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BO} = \frac{A'C'}{AO} \text{ soit } \frac{0,137}{2} = \frac{0,191}{BO}.$$

$$\text{Donc } BO = 2 \times 0,191 \div 0,137 \approx 2,8 \text{ m.}$$

31 Viaduc de Millau



1. Dans les 2 triangles constitués du pylône, du câble et du tablier, le pylône est commun aux 2 triangles. Ce dernier est un axe de symétrie. Or comme la symétrie conserve les longueurs et les mesures d'angle, la longueur des haubans est égale et les angles d'inclinaison des 2 haubans avec le pylône sont de même mesure.

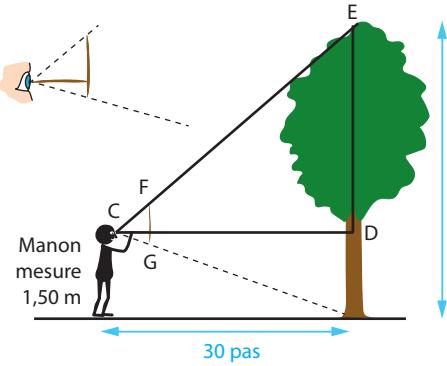
Les deux triangles ont donc un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur, donc les triangles sont égaux. Calculons la longueur de câble nécessaire pour un pylône :

$$2 \times 182 + 2 \times 165 + 2 \times 144 + 2 \times 130 + 2 \times 119 + 2 \times 108 + 2 \times 95 + 2 \times 84 + 2 \times 74 + 2 \times 66 + 2 \times 55 = 2\,444 \text{ m}$$

Il y a 7 pylônes sur le viaduc soit $7 \times 2\,444 = 17\,108 \text{ m.}$

Il est nécessaire d'avoir environ 17 km de câbles pour rénover intégralement les haubans du viaduc.

32 Nature et mesure



$$(ED) \perp (CD) \text{ et } (FG) \perp (CD) \text{ donc } \widehat{CGF} = \widehat{CDE} = 90^\circ.$$

Les triangles CGF et CDE ont un angle en commun : $\widehat{ECD}.$

Or si deux triangles ont 2 couples d'angles de même mesure alors ils sont semblables.

Donc les triangles CGF et CDE sont des triangles semblables.

Les longueurs des côtés des 2 triangles sont proportionnelles.

$$\frac{CG}{CD} = \frac{CF}{CE} = \frac{FG}{DE} \text{ soit } CG = GF = x \text{ car les brindilles ont la même taille.}$$

$$\frac{x}{30} = \frac{x}{DE} \text{ donc } DE = 30 \text{ pas.}$$

Or $0,8 \text{ m} < 1 \text{ pas} < 1 \text{ m}$ donc $30 \times 0,8 \text{ m} < 30 \text{ pas} < 30 \times 1 \text{ m}$ soit $24 \text{ m} < 30 \text{ pas} < 30 \text{ m.}$

Donc la hauteur de l'arbre est comprise entre 25,5 m et 31,5 m, car il ne faut pas oublier la taille de Manon.

Algorithmique et outils numériques

33 Triangles semblables

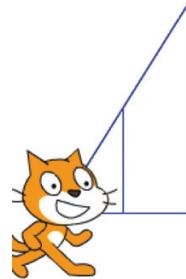
1.

Commandes	Description
	Évènement : commande qui enclenche le script.
	Mouvement : le lutin prend la position qui s'oriente vers l'est.
	Mouvement : le lutin se rend aux coordonnées indiquées sur la scène.
	Stylo : commande qui efface tout ce qui est dans la scène.
	Stylo : commande qui met le stylo en position d'écriture pour visualiser tout déplacement du lutin.
	Mouvement : le lutin se déplace de 50 sur la scène.
	Mouvement : le lutin tourne de 90° vers la gauche par rapport à sa position précédente.
	Mouvement : le lutin se déplace de 80 sur la scène.

2. Voici un script qui permet d'obtenir deux triangles semblables et voici la figure obtenue avec le logiciel scratch :

```

quand [bouton pressé]
[s'orienter à 90°]
[aller à x: -200 y: -100]
[effacer tout]
[stylo en position d'écriture]
[avancer de 50]
[tourner ⚡ de 90 degrés]
[avancer de 80]
[aller à x: -200 y: -100]
[s'orienter à 90°]
[avancer de 100]
[tourner ⚡ de 90 degrés]
[avancer de 160]
[aller à x: -200 y: -100]
[s'orienter à 90°]
```



Pour ne pas faire apparaître le lutin, on peut utiliser la commande « cacher » en fin de script.

3.

```

quand [ ] pressé
  s'orienter à 90°
  aller à x: -200 y: -100
  effacer tout
  stylo en position d'écriture
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 90 degrés
  avancer de 80
  aller à x: -200 y: -100
  s'orienter à 90°
  avancer de 100
  tourner ⚡ de 90 degrés
  avancer de 160
  aller à x: -200 y: -100
  s'orienter à 90°
  avancer de 150
  tourner ⚡ de 90 degrés
  avancer de 240
  aller à x: -200 y: -100
  s'orienter à 90°
  cacher

```

On remarque que l'on recommence à chaque fois la même procédure, il est donc envisageable de faire une boucle pour optimiser le script avec l'introduction d'un « compteur » dans la boucle. Cette procédure « experte » peut être réservée aux élèves déjà à l'aise avec ce genre d'algorithme.

```

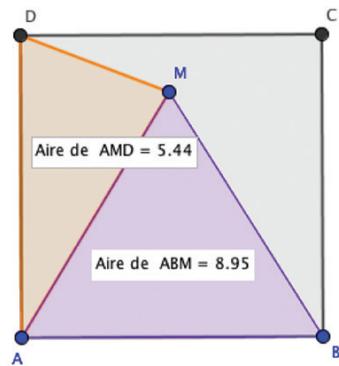
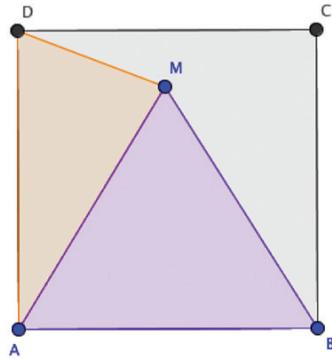
quand [ ] pressé
  s'orienter à 90°
  aller à x: -200 y: -100
  effacer tout
  stylo en position d'écriture
  mettre i à 1
  répéter jusqu'à i > 2
    avancer de i * 50
    tourner ⚡ de 90 degrés
    avancer de i * 80
    aller à x: -200 y: -100
    s'orienter à 90°
    ajouter à i 1
  cacher

```

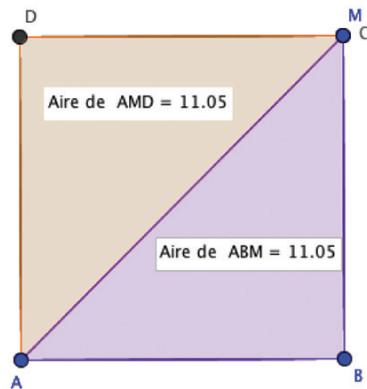
34

Des triangles de même aire

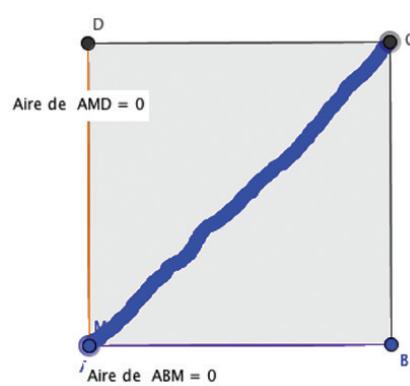
1.



2.



3.



En affichant la trace, il semble que les points où les aires des triangles sont égales sont situés sur la diagonale du carré.

4. On suppose que M appartient au segment [AC]. Les triangles AMD et AMB ont un côté commun [AM]. De plus, ABCD est un carré donc $AD = AB$.

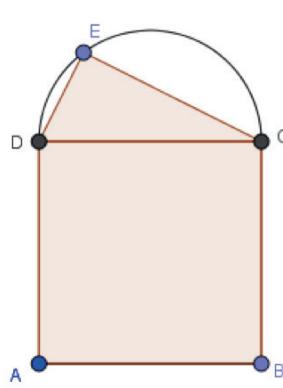
Enfin, la diagonale du carré portée par [AC] coupe l'angle DAB en deux angles de même mesure de 45° . Soit $DAM = MAB = 45^\circ$.

Par conséquent, les triangles AMD et AMB ont un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur. On en déduit que les triangles AMD et AMB sont des triangles égaux.

35

Optimisation

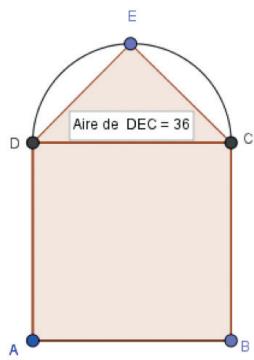
1.



La figure n'est pas à l'échelle mais il faut que le carré fasse 12 cm de côté pour que son aire soit de 144 cm^2 .

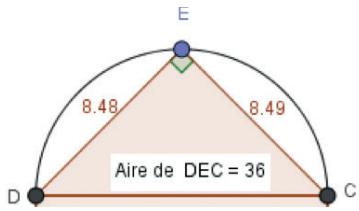
Travailler autrement

2.



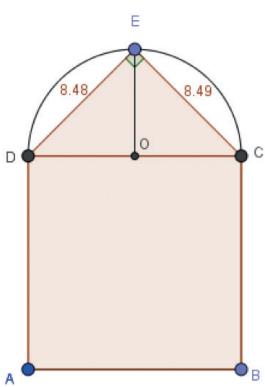
En déplaçant le point E sur le demi-cercle, il semble que l'aire de la terrasse soit maximale dans la configuration ci-jointe.

3.



On remarque que le triangle est isocèle rectangle en E.

4.



On cherche des côtés de même longueur et des angles de même mesure.

Dans les triangles EOD et EOC, [OE] est un côté commun aux deux triangles.

De plus, O est le milieu de [DC] donc $DO = OC$.

Enfin, dans le triangle ECD isocèle en E, (\widehat{EO}) est la hauteur issue de E et la médiatrice de [DC]. Donc $\widehat{EOD} = \widehat{EOC} = 90^\circ$. Donc les triangles EOD et EOC ont un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur. On peut conclure que les triangles EOD et EOC sont des triangles égaux.

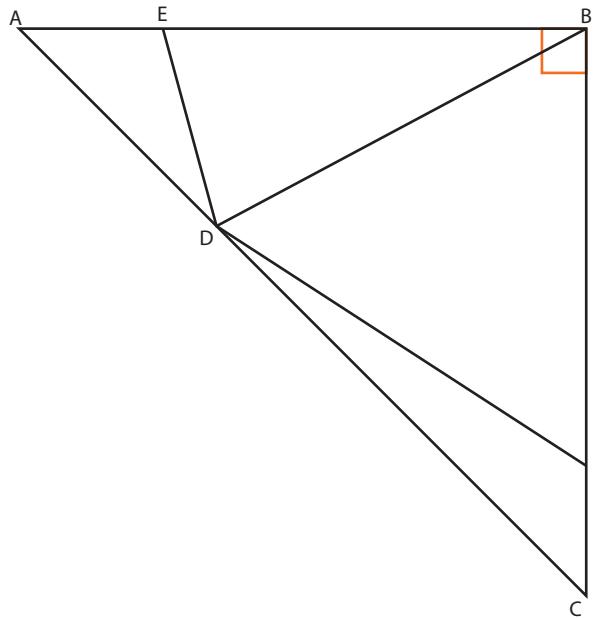
5. DEC est un triangle isocèle en E car si les triangles DEO et CEO sont des triangles égaux alors ils ont les côtés deux à deux de même longueur soit $ED = EC$.

$EO = 6 \text{ m}$ car EDC est un demi-carré et que les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et sont de même longueur. $A_{EDC} = B \times H \div 2$ soit $A_{EDC} = 12 \times 6 \div 2 = 36 \text{ m}^2$.

Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1.



2. Les 2 triangles AED sont semblables.

Les 2 triangles ABC sont semblables.

Les 2 triangles EDB sont semblables.

Les 2 triangles DBF sont semblables.

Les triangles sont semblables donc les longueurs sont proportionnelles.

Pour passer de 5 à 7,5, il suffit de multiplier 5 par 1,5. Donc le rapport d'agrandissement est de 1,5.

3. $FC = 1 \text{ cm}$ et $AE = 1,5 \text{ cm}$.

Les longueurs agrandies de FC et AE sont 1,5 fois plus grandes donc :

$$FC_{\text{agrandie}} = FC \times 1,5 \text{ soit } FC_{\text{agrandie}} = 1,5 \text{ cm.}$$

$$AE_{\text{agrandie}} = AE \times 1,5 \text{ soit } AE_{\text{agrandie}} = 1,5 \times 1,5 = 2,25 \text{ cm.}$$

Exercice 1

1. $AB = 3,9 \text{ cm}$, $AE = 0,6 \text{ cm}$, $AD = 1,5 \text{ cm}$ et $FC = 0,9 \text{ cm}$.

Les longueurs agrandies de ces longueurs sont $\frac{5}{3}$ fois plus grandes donc :

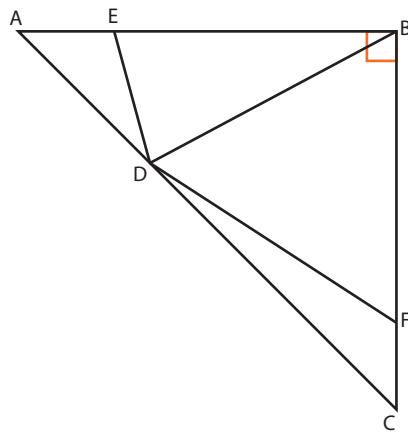
$$AB_{\text{agrandie}} = 3,9 \times \frac{5}{3} = 6,5 \text{ cm}$$

$$AE_{\text{agrandie}} = 0,6 \times \frac{5}{3} = 1 \text{ cm}$$

$$AD_{\text{agrandie}} = 1,5 \times \frac{5}{3} = 2,5 \text{ cm}$$

$$FC_{\text{agrandie}} = 0,9 \times \frac{5}{3} = 1,5 \text{ cm}$$

2.



3. Les 2 triangles AED sont semblables.
 Les 2 triangles ABC sont semblables.
 Les 2 triangles EDB sont semblables.
 Les 2 triangles DBF sont semblables.
 Les triangles sont semblables donc les longueurs sont proportionnelles.
- Pour passer de 3 à 5, il suffit de multiplier 3 par $\frac{5}{3}$.
- Donc le rapport d'agrandissement est de $\frac{5}{3}$.

Exercice 2

1. ABC est un triangle équilatéral donc tous ses angles sont égaux à 60° .
 $CD = BF = AE = 1 \text{ cm}$ et $EB = CF = AD = 3 \text{ cm}$ car ABC est équilatéral.
 Les triangles DFC, DAE et EBF ont 1 angle de même mesure entre 2 côtés de même longueur, donc ce sont des triangles isométriques.
2. Comme les triangles DFC, DAE et EBF sont égaux, tous leurs côtés sont de même longueur, donc $DF = EF = ED$.
 On en conclut que le triangle EDF est un triangle équilatéral.

Exercice 2

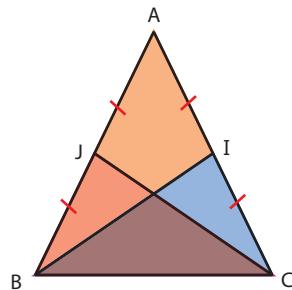
1. ABC est un triangle équilatéral donc tous ses angles sont égaux à 60° .
 $CD = BF = AE = x \text{ cm}$ et $EB = CF = AD = 4 - x \text{ cm}$ car ABC est équilatéral.
 Les triangles DFC, DAE et EBF ont 1 angle de même mesure entre 2 côtés de même longueur, donc ce sont des triangles isométriques.
2. Comme les triangles DFC, DAE et EBF sont égaux, tous leurs côtés sont de même longueur, donc $DF = EF = ED$.
 On en conclut que le triangle EDF est un triangle équilatéral.

Écriture d'un énoncé

1. Montrer que les triangles BOC et OGF sont des triangles isométriques.
2. [BF] et [CG] sont des diamètres du cercle de centre O donc $BO = OF$ et $OC = OG$.
 De plus, $\widehat{BOC} = \widehat{GOF} = 45^\circ$.
 Les triangles BOC et OGF ont un angle de même mesure entre deux côtés de même longueur donc ce sont des triangles égaux.

Analyse d'une production

Il est toujours intéressant de faire une figure pour illustrer et comprendre un exercice.



Le raisonnement de Loïc est correct mais il ne cite pas les 2 côtés de même longueur.
 $BJ = IC$ car I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], et le triangle ABC est isocèle en A donc $AB = AC$.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie », dont le but est d'utiliser les notions de géométrie plane à des fins de démonstrations. La connaissance associée est le théorème de Pythagore (sens direct et réciproque). La compétence associée est de résoudre des problèmes de géométrie plane, en particulier dans le cadre de problèmes relevant de la vie courante et de situations concrètes, de prouver un résultat général, de valider ou réfuter une conjecture.

- Ce chapitre s'inscrit aussi dans le thème « Nombres et calculs ». Les nombres sont utilisés pour résoudre des problèmes avec la définition de la racine carrée, introduite comme un moyen de trouver certaines longueurs dont on connaît le carré, et les carrés parfaits entre 1 et 144 permettant de calculer mentalement certaines longueurs à l'aide du théorème de Pythagore. Les élèves ont déjà des connaissances sur les triangles et les quadrilatères. Cela a permis de nourrir la mise en œuvre d'un raisonnement qui va être étendu. Les élèves, qui connaissent ainsi la définition du triangle rectangle, la somme des angles d'un triangle et savent calculer l'aire d'un carré, vont découvrir le théorème de Pythagore et sa réciproque. Le théorème de Pythagore est introduit dès la classe de 4^e et est réinvesti tout au long du cycle 4 dans des situations variées du plan mais aussi de l'espace. Les élèves vont ainsi effectuer des calculs mais ils valident aussi désormais par le raisonnement et la démonstration grâce à de nouveaux outils.
- Ce chapitre s'inscrit dans le développement du raisonnement et la maîtrise de la démonstration, le plus souvent dans des situations

concrètes afin de faire sens. Les élèves doivent être capables de visualiser la figure de référence du théorème de Pythagore qu'est le triangle rectangle et très rapidement de l'identifier dans un problème contextualisé. Grâce à l'image visuelle reposant sur les aires des carrés formés sur les côtés d'un triangle rectangle, l'élève doit être capable d'écrire l'égalité de Pythagore. Il doit également être capable d'utiliser cette égalité pour montrer qu'un triangle est rectangle ou non. Dans ce dernier cas, on n'attend pas nécessairement que les élèves sachent distinguer l'utilisation de la réciproque et la contraposée du sens direct. On pourra simplement invoquer l'égalité de Pythagore (vraie dans un triangle rectangle, fausse dans un triangle non rectangle). On peut aussi considérer le théorème de Pythagore comme une équivalence, comprenant à la fois le sens direct et le sens réciproque, et invoquer le théorème de Pythagore sans autre précision pour montrer qu'un triangle est rectangle ou non.

- La notion de racine carrée est étroitement liée au théorème de Pythagore et permet de donner une valeur approchée d'une longueur après utilisation du théorème de Pythagore. La racine carrée est définie dans ce chapitre mais aucune technicité opératoire ou propriété n'est abordée sur la racine carrée. Ce thème sera de nouveau abordé dans le chapitre 44 avec les solides et la géométrie dans l'espace, mais également dans le chapitre sur la trigonométrie, après un rappel sur le théorème de Pythagore, et dans le chapitre 45 sur les solides, permettant ainsi de varier les contextes d'utilisation du théorème de Pythagore.

Activités

Questions flash

1. [BC] est l'hypoténuse.
2. Marie s'est trompée car l'hypoténuse [EF] devrait être le plus long côté.
3. a. Faux, car $5^2 = 5 \times 5 = 25$.
b. Faux, car $6,1^2 = 6,1 \times 6,1$.
c. Vrai.
- d. Faux, car $2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68$.
e. Faux, car $7^2 = 7 \times 7$.
f. Vrai, car $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$.
4. Le nombre manquant est c. 24 – 8.
5. L'aire totale est $5^2 + 7^2 = 5 \times 5 + 7 \times 7 = 25 + 49 = 74 \text{ cm}^2$.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de donner une représentation mentale de l'égalité de Pythagore en lui apportant du sens : les carrés dans l'égalité sont ainsi en lien avec les aires des carrés formés sur chacun des côtés du triangle rectangle.

Les prérequis nécessaires sont de connaître la définition d'un triangle rectangle, le terme « hypoténuse » et de savoir calculer l'aire d'un carré.

La capacité introduite est d'énoncer l'égalité de Pythagore (théorème de Pythagore dans le sens direct).

Cette activité est intéressante à réaliser en groupes, avec ensuite une mise en commun du travail de recherche.

Cette activité permettra aussi à l'élève de mieux utiliser par la suite cette égalité pour calculer la longueur d'un côté. L'enseignant pourra ainsi faire remarquer que l'aire du carré formé sur l'hypoténuse s'obtient en additionnant les aires des deux autres carrés et que l'aire d'un carré formé sur un côté de l'angle droit s'obtient en soustrayant l'aire du carré formé sur l'autre côté de l'angle droit à l'aire du carré formé sur l'hypoténuse.

1. L'aire du grand carré est égale à $5 \times 5 = 25$ unités d'aire (un petit carreau). La somme des deux autres aires est égale à $4 \times 4 + 3 \times 3 = 16 + 9 = 25$ unités d'aire.
2. On constate que l'aire du carré formé sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres carrés construits, eux, sur les côtés de l'angle droit.

Longueur de poutres

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour calculer une longueur dans un triangle rectangle. L'activité permet de distinguer le cas du calcul de la longueur de l'hypoténuse et le cas du calcul de la longueur de l'un des côtés de l'angle droit.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance de l'égalité de Pythagore et l'utilisation de la calculatrice pour trouver une valeur par essais successifs.

La capacité introduite est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour calculer une longueur.

Cette activité est une première approche de l'utilisation du théorème de Pythagore. Le calcul de EF se fait assez facilement, mentalement. En revanche, le calcul de IG nécessite l'usage de la calculatrice. L'élève trouvera une valeur approchée en procédant par essais successifs. Cette activité soulève surtout la nécessité d'un outil permettant de trouver plus rapidement un nombre dont on connaît le carré (ce qui sera vu dans l'activité suivante).

Dans le triangle EGF rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

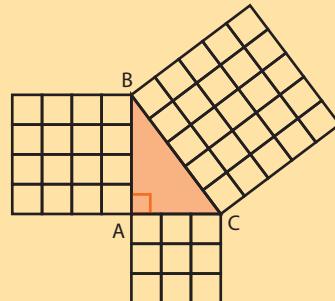
On aboutit, après avoir remplacé les valeurs connues, à $EF^2 = 100$. L'élève reconnaît que 100 est le carré de 10 et en conclut que

3. Les élèves sont amenés à construire d'autres triangles rectangles et à faire la même conjecture.

L'enseignant précisera qu'il s'agit là d'une conjecture, en aucun cas d'une preuve.

L'enseignant pourra demander de nommer les sommets du triangle rectangle et d'écrire l'égalité qui en découle.

On arrivera ainsi à :



$BC^2 = AB^2 + AC^2$, égalité qui s'appelle « égalité de Pythagore », qu'on généralisera à tous les triangles rectangles.

L'enseignant peut alors énoncer le sens direct du théorème de Pythagore sous la forme : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés », propriété qui sera admise dans le cours sans démonstration.

Activité 2

$$EF = 10 \text{ m.}$$

Dans le triangle IGF rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore : $GF^2 = IG^2 + IF^2$

Après avoir remplacé les valeurs connues, on obtient $64 = IG^2 + 40,96$. On peut faire remarquer que c'est une opération à trous, ou une équation si les élèves ont déjà travaillé cette notion, dont la solution est $IG^2 = 64 - 40,96 = 23,04$.

L'élève remarquera que ce n'est pas un carré qu'il connaît, il pourra néanmoins donner un premier encadrement de IG en remarquant que $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$. IG est donc compris entre 4 et 5 cm. Il pourra ensuite, par essais successifs à la calculatrice, donner un encadrement plus précis ; par exemple : $4,5^2 = 20,25$ et $4,9^2 = 24,01$. IG est compris entre 4,5 et 4,9. Puis il aboutira à $4,8^2 = 23,04$, donc $IG = 4,8 \text{ cm}$.

L'enseignant pourra faire remarquer que le calcul de EF, qui revient à calculer la longueur de l'hypoténuse, utilise une addition alors que le calcul de IG, qui revient à calculer la longueur d'un côté de l'angle droit, utilise une soustraction.

Il pourra faire remarquer qu'il est important, une fois le calcul fini, de vérifier que l'hypoténuse est bien le côté le plus long du triangle et qu'il est donc possible de trouver une erreur éventuelle de calcul.

La recherche de IG amène l'élève à se questionner sur la façon de trouver un nombre connaissant son carré, la méthode par essais successifs pouvant s'avérer longue.

Une touche spéciale...

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de montrer qu'il est facile de trouver un nombre connaissant son carré dans certains cas (carrés de nombres entiers petits), mais plus difficile dans d'autres. Il s'agit également de découvrir la touche « racine carrée de la calculatrice ».

Les prérequis nécessaires sont le calcul du carré d'un nombre, la notation « $\sqrt{}$ », la connaissance de carrés de nombres entiers petits (entre 0 et 10).

La capacité introduite est de découvrir la racine carrée.

Cette activité permet très rapidement de découvrir la touche de la calculatrice permettant de trouver un nombre positif dont on connaît le carré.

Activité 3

1. Son aire est $8^2 = 64 \text{ cm}^2$.

2. Son aire est $3,2^2 = 10,24 \text{ cm}^2$.

3. Son côté mesure 5 cm car $5^2 = 25$.

4. Son côté mesure 9 cm car $9^2 = 81$.

5. Il s'agit de la touche « racine carrée » : $\sqrt{x^2}$ précédée de 2nde .

Il s'affiche $\sqrt{31,36} \quad 5,6$. Le côté du carré mesure 5,6 cm.

6. On tape : $2\text{nde} \quad \sqrt{x^2} \quad 6 \quad 5 \quad =$. Il s'affiche :

$\sqrt{65} \quad 8,062257748$. On ne peut donner qu'une valeur approchée. Le côté mesure environ 8,1 cm.

Les questions 1., 3. et 4. pourront être faites mentalement en faisant remarquer qu'elles font intervenir des carrés de nombres entiers (des carrés parfaits).

Pour la question 2., montrer à l'élève qu'il peut procéder de deux façons : soit en tapant sur sa calculatrice :

3 , 2 x 3 , 2 entrer ;

soit en tapant : 3 , 2 $\sqrt{x^2}$ entrer .

Pour la question 5., l'élève pourra d'abord donner un encadrement, puis une valeur approchée par essais successifs en émettant des critiques sur cette méthode, avant de chercher la touche « racine carrée de la calculatrice ». La racine carrée sera présentée comme étant « l'opération inverse du carré », la touche de la calculatrice permettant de déterminer un nombre ou sa valeur approchée connaissant son carré.

On pourra faire référence à l'activité 2 dans laquelle l'élève n'avait pu donner qu'un encadrement ou une valeur approximative de la longueur de [IG].

L'enseignant pourra également faire remarquer que lorsque la calculatrice affiche $\sqrt{65} \quad 8,062257748$, 8,062 257 748 n'est qu'une valeur approchée et en aucun cas la valeur exacte, qui est $\sqrt{65}$.

Four à micro-ondes

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de modéliser une situation et de calculer une longueur d'un triangle rectangle grâce à l'égalité de Pythagore.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Pythagore.

La capacité introduite est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour résoudre un problème, calculer une longueur.

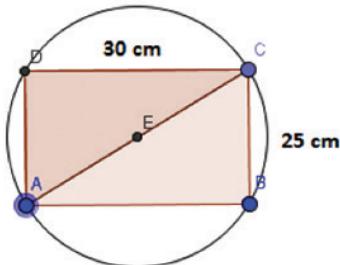
En apparence, le plat rentre, aussi bien en largeur (25 cm est inférieur à la largeur intérieure et à la profondeur intérieure du four) qu'en longueur (30 cm est inférieur à la largeur intérieure et à la profondeur intérieure du four).

Mais quand le plat va tourner, la diagonale du plat ne doit pas dépasser la profondeur du four.

On calcule donc cette longueur ; dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

On trouve alors : $AC^2 = 1\ 525$ puis $AC \approx 39,1$ cm avec la calculatrice. La longueur de la diagonale est supérieure à la profondeur du four : le plat ne pourra donc pas tourner.



Il est possible de mieux visualiser ce qui se passe en représentant la situation grâce à un logiciel de géométrie dynamique (représenter l'intérieur du four, le plat, puis le faire tourner).

Avec un logiciel de géométrie dynamique

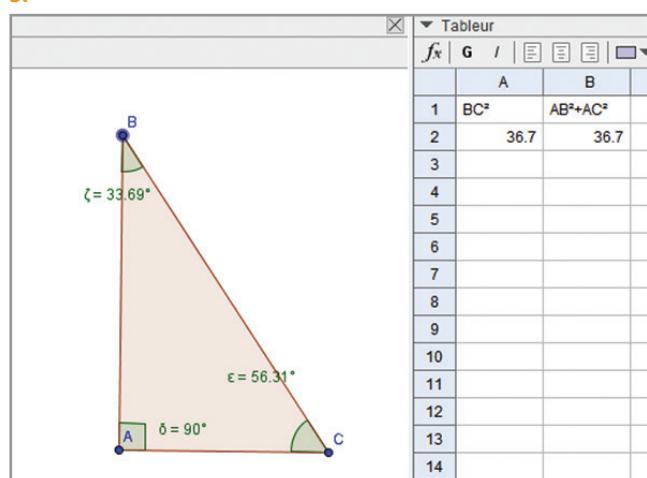
Activité 5

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de faire observer aux élèves, grâce à un logiciel de géométrie dynamique, que l'égalité de Pythagore semble caractériser les triangles rectangles.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance de l'égalité de Pythagore et la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique. La capacité introduite est de caractériser un triangle qui vérifie l'égalité de Pythagore (théorème de Pythagore : sens réciproque).

1. L'élève trace un triangle ABC puis fait afficher ses angles (attention à faire afficher la valeur comprise entre 0° et 180°).
2. Dans A2, il faut saisir « $=BC^2$ » et dans B2 « $=AB^2+AC^2$ ».
- 3.



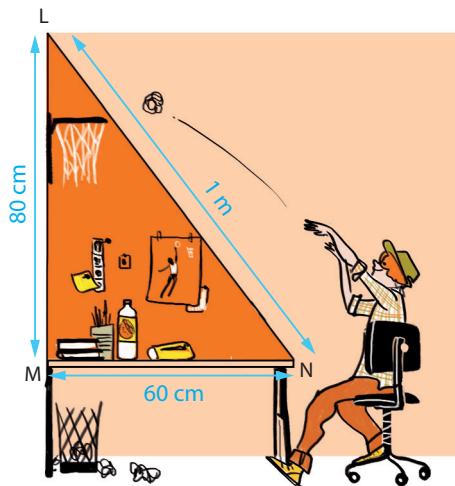
L'élève remarque que, lorsque $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A. Autrement dit, si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore, alors il est rectangle.

L'enseignant expliquera que cette propriété sera admise dans le cours sans démonstration et que l'égalité de Pythagore se révèle être une propriété caractéristique des triangles rectangles (elle n'est valable que dans les triangles rectangles). Il pourra également faire remarquer que si l'égalité n'est pas vérifiée, alors le triangle n'est pas rectangle, et l'expliquer en utilisant un raisonnement par l'absurde : si l'on suppose que le triangle est rectangle, alors on devrait avoir l'égalité de Pythagore ; or, ce n'est pas le cas, c'est donc que l'hypothèse émise au début « le triangle est rectangle » est fausse.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour reconnaître un triangle rectangle. Les prérequis nécessaires sont de savoir que l'égalité de Pythagore caractérise le triangle rectangle. La capacité introduite est de modéliser et mettre en œuvre dans une situation concrète l'égalité de Pythagore comme un outil permettant de reconnaître un triangle rectangle.

En coup de pouce, l'enseignant invitera l'élève à repérer le plus long côté du triangle et lui demandera de calculer séparément le carré de la longueur du plus grand côté (préciser qu'on ne peut pas parler d'hypoténuse tant qu'on ne sait pas que le triangle est rectangle) et la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

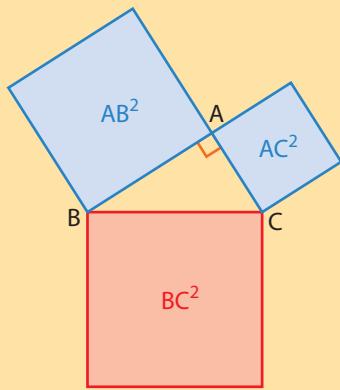


- $160 \text{ cm} = 1,6 \text{ m}$ et $120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m}$.
On repère le plus long côté qui est [LN].
On a d'une part : $\text{LN}^2 = 2^2 = 4$.
Et d'autre part : $\text{LM}^2 + \text{MN}^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 2,56 + 1,44 = 4$.
On constate que $\text{LN}^2 = \text{LM}^2 + \text{MN}^2$; l'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle LMN est rectangle en M ([LN] étant le plus long côté, il s'agit de l'hypoténuse).

Exercices

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Ces premiers exercices permettent aux élèves de se familiariser avec le théorème de Pythagore : leur but est de repérer rapidement l'hypoténuse d'un triangle rectangle et de savoir écrire l'égalité de Pythagore, notamment en la visualisant ainsi : aire du Carré construit sur l'hypoténuse = somme des aires des Carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit. C'est la 47^e proposition d'Euclide, illustrée de la manière suivante :



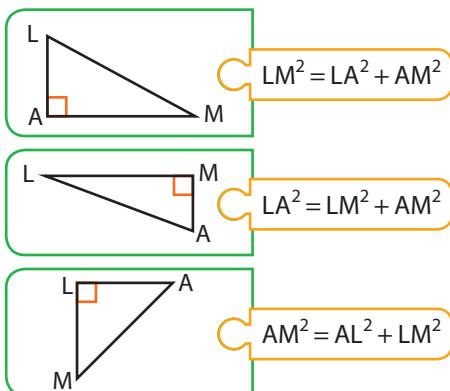
$$\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$$

Cela permet aussi facilement aux élèves de remarquer que, dans le cas de la recherche de l'hypoténuse, il s'agit d'effectuer une addition, mais que, dans le cas de la recherche d'un côté de l'angle droit, il s'agit d'effectuer une soustraction.

Ces premiers exercices permettent de mettre en œuvre le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les longueurs des deux autres côtés, dans des cas simples ; les calculs peuvent être faits mentalement et ne font intervenir que des Carrés parfaits (pas de connaissance nécessaire à ce stade de la racine carrée d'un nombre).

Questions flash

- Dans GHI, on peut écrire l'égalité car $\widehat{\text{HGI}} = 180^\circ - (53 + 37^\circ) = 90^\circ$, donc il est rectangle en G : $\text{IH}^2 = \text{GI}^2 + \text{GH}^2$
Dans LMK rectangle en K, on peut écrire l'égalité : $\text{LM}^2 = \text{LK}^2 + \text{MK}^2$.
Dans GCT rectangle en C, on peut écrire l'égalité : $\text{GT}^2 = \text{GC}^2 + \text{CT}^2$.
KIJ et DEF ne sont pas rectangles, on ne peut donc pas écrire l'égalité de Pythagore.
- L'hypoténuse du triangle rectangle est le côté rouge. D'après le théorème de Pythagore :
l'aire du Carré rouge = l'aire du Carré bleu + l'aire du Carré vert.
Donc l'aire du Carré vert = $68 \text{ mm}^2 - 15 \text{ mm}^2 = 53 \text{ mm}^2$.
- Dans ABC rectangle en A : l'hypoténuse est [BC].
Dans EBD rectangle en E : l'hypoténuse est [BD].
Dans BAD rectangle en D : l'hypoténuse est [AB].
Dans ADC rectangle en D : l'hypoténuse est [AC].
Dans AED rectangle en E : l'hypoténuse est [AD].
1. LMN est rectangle en N. D'après le théorème de Pythagore : $\text{LM}^2 = \text{LN}^2 + \text{NM}^2$.
2. PRS est rectangle en T (car l'hypoténuse est [RS]). D'après le théorème de Pythagore : $\text{RS}^2 = \text{RP}^2 + \text{PS}^2$.
- Dans ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2$.
Dans ACD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore : $\text{AD}^2 = \text{AC}^2 + \text{CD}^2$.



- Dans ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2$.
Dans ACD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore : $\text{AD}^2 = \text{AC}^2 + \text{CD}^2$.

- b. Dans PMO rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OP^2 + PM^2$.
 Dans ONM rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = ON^2 + NM^2$.
 Dans NMR rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore : $NR^2 = NM^2 + MR^2$.

- 7 D'après le théorème de Pythagore :
 $BC^2 = BA^2 + AC^2$
 $BC^2 = 3^2 + 4^2$
 $BC^2 = 9 + 16$
 $BC^2 = 25$
 $BC = 5 \text{ cm}$ (car $5^2 = 25$)

- 8 D'après le théorème de Pythagore :
 $NP^2 = NM^2 + MP^2$
 $NP^2 = 6^2 + 8^2$
 $NP^2 = 36 + 64$
 $NP^2 = 100$
 $NP = 10 \text{ dm}$ (car $10^2 = 100$)

- 9 D'après le théorème de Pythagore :
 $DL^2 = DS^2 + SL^2$
 $13^2 = 12^2 + SL^2$
 $169 = 144 + SL^2$
 $SL^2 = 169 - 144$
 $SL^2 = 25$
 $SL = 5 \text{ cm}$ (car $5^2 = 25$)

- 10 D'après le théorème de Pythagore :
 $KC^2 = KF^2 + FC^2$
 $20^2 = 16^2 + FC^2$
 $400 = 256 + FC^2$
 $FC^2 = 400 - 256$
 $FC^2 = 144$
 $FC = 12 \text{ cm}$ (car $12^2 = 144$)

- 11 On pourra faire remarquer que les questions 1. et 2. peuvent être inversées ; dans chacun des deux triangles rectangles, deux longueurs sont connues, il est donc possible de trouver la troisième longueur à l'aide du théorème de Pythagore.

1. Dans AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
 $AB^2 = AH^2 + HB^2$
 $13^2 = 12^2 + HB^2$
 $169 = 144 + HB^2$
 $HB^2 = 169 - 144$
 $HB^2 = 25$
 $HB = 5 \text{ cm}$ (car $5^2 = 25$)

2. Dans AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
 $AC^2 = AH^2 + HC^2$
 $AC^2 = 12^2 + 9^2$
 $AC^2 = 144 + 81$
 $AC^2 = 225$
 $AC = 15 \text{ cm}$ (car $15^2 = 225$)

Calculer une racine carrée

Les exercices suivants permettent de travailler les automatismes d'utilisation du théorème de Pythagore et l'utilisation de la calculatrice pour calculer des carrés de nombres décimaux ou pour déterminer la valeur exacte ou une valeur approchée de la longueur d'un côté dont on connaît le carré, lorsque celui-ci n'est plus un carré parfait simple.

Questions flash

12 A = 25 B = 49 C = 64
 D = 6 E = 0,9

- 13 a. $AB^2 = 36$ donc $AB = 6$.
 b. $EF^2 = 49$ donc $EF = 7$.

- 14 Son côté mesure 9 cm car l'aire d'un carré se mesure en calculant côté \times côté soit côté² et $9^2 = 81$.

- 15 1. A = 11 B = 10 C = 7
 2. $5 < A < 6$ car $25 < 27 < 36$, c'est-à-dire $5^2 < 27 < 6^2$.
 $6 < B < 7$ car $36 < 41 < 49$, c'est-à-dire $6^2 < 41 < 7^2$.
 $9 < C < 10$ car $81 < 89 < 100$, c'est-à-dire $9^2 < 89 < 10^2$.
 $11 < D < 12$ car $121 < 144 < 144$, c'est-à-dire $11^2 < 122 < 12^2$.

a	3,3	1,52	3,74	5,8	3,16	50	2,41
a^2	10,89	2,3	14	33,64	10	2 500	5,8

- 16 D'après le théorème de Pythagore :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $BC^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04$
 $BC^2 = 36$
 $BC = 6 \text{ cm}$ (car $6^2 = 36$)

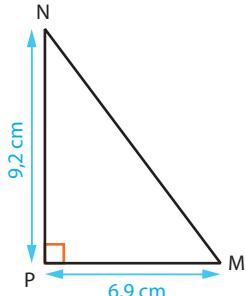
- 17 LMN est rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore :
 $LN^2 = LM^2 + MN^2$
 $14^2 = LM^2 + 9^2$
 $196 = LM^2 + 81$
 $LM^2 = 196 - 81$
 $LM^2 = 115$
 $LM = \sqrt{115}$ $LM \approx 10,7 \text{ cm}$

Donner une valeur approchée au millimètre près lorsque le résultat est en centimètres, signifie donner une valeur approchée au dixième près.

- 18 D'après le théorème de Pythagore :
 $GI^2 = GH^2 + HI^2$
 $6,5^2 = 6^2 + HI^2$
 $42,25 = 36 + HI^2$
 $HI^2 = 42,25 - 36$
 $HI^2 = 6,25$
 $HI = \sqrt{6,25}$ $HI = 2,5 \text{ cm}$

- 19 D'après le théorème de Pythagore :
 $GH^2 = GK^2 + KH^2$
 $GH^2 = 9^2 + 8^2$
 $GH^2 = 81 + 64$
 $GH^2 = 145$
 $GH = \sqrt{145}$ $GH \approx 12 \text{ cm}$

Donner une valeur approchée au millimètre près lorsque le résultat est en centimètres, signifie donner une valeur approchée au dixième près.

- 20 D'après le théorème de Pythagore :
 $NM^2 = MP^2 + NP^2$
 $MN^2 = 6,9^2 + 9,2^2$
 $MN^2 = 47,61 + 84,64$
 $MN^2 = 132,25$
 $MN = \sqrt{132,25}$ $MN = 11,5 \text{ cm}$
- 

- 21 1. D'après le théorème de Pythagore :

$$MN^2 = MP^2 + NP^2 \quad (92 \text{ mm} = 9,2 \text{ cm})$$

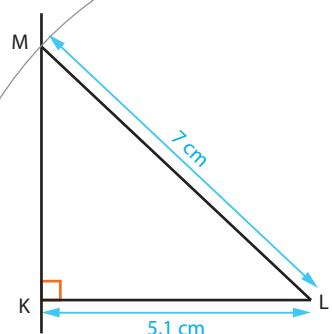
$$MN^2 = 6,9^2 + 9,2^2$$

$$MN^2 = 47,61 + 84,64$$

$$MN^2 = 132,25$$

$$MN = \sqrt{132,25}$$

$$MN = 11,5 \text{ cm}$$

- 22 1. D'après le théorème de Pythagore :
- 

2. D'après le théorème de Pythagore :

$$LM^2 = LK^2 + KM^2$$

$$7^2 = 5,1^2 + KM^2$$

$$49 = 26,01 + KM^2$$

$$KM^2 = 49 - 26,01$$

$$KM^2 = 22,99$$

$$KM = \sqrt{22,99}$$

$$KM \approx 4,8 \text{ cm}$$

$$(51 \text{ mm} = 5,1 \text{ cm})$$

Donner une valeur approchée au millimètre près lorsque le résultat est en centimètres, signifie donner une valeur approchée au dixième près.

23 D'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$9^2 = 6,75^2 + FG^2$$

$$81 = 45,5625 + FG^2$$

$$FG^2 = 81 - 45,5625$$

$$FG^2 = 35,4375$$

$$FG = \sqrt{35,4375}$$

$$FG \approx 5,95 \text{ m}$$

Donner une valeur approchée au centimètre près lorsque le résultat est en mètres, signifie donner une valeur approchée au centième près.

Reconnaitre si un triangle est rectangle

Questions flash

24 a. Faux, il est rectangle en A.
b. Vrai.
c. Vrai.
d. Faux, il est rectangle en A.
e. Vrai.

25 $29 + 55 = 84$: l'aire du carré rouge est égale à la somme de l'aire du carré vert et de l'aire du carré bleu ; le carré de la longueur du plus grand côté du triangle gris est donc égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés : l'égalité de Pythagore est donc vérifiée. Par conséquent, le triangle gris est rectangle (et le côté rouge est l'hypoténuse).

26 [AP] est le plus grand côté.

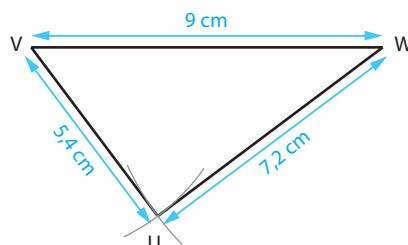
$$AP^2 = 17,5^2 = 306,25$$

$$AM^2 + MP^2 = 10,5^2 + 14^2 = 110,25 + 196 = 306,25$$

$$AP^2 = AM^2 + MP^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc AMP est rectangle en M : Ousmane a raison.

27 1.



2. [VW] est le plus grand côté.

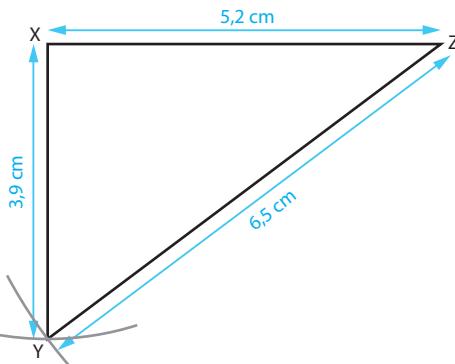
$$VW^2 = 9^2 = 81$$

$$VU^2 + UW^2 = 5,4^2 + 7,2^2 = 29,16 + 51,84 = 81$$

$$VW^2 = VU^2 + UW^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc UVW est rectangle en U.

28 1.



2. [YZ] est le plus grand côté.

$$YZ^2 = 6,5^2 = 42,25$$

$$YX^2 + XZ^2 = 3,9^2 + 5,2^2 = 15,21 + 27,04 = 42,25$$

$$YZ^2 = YX^2 + XZ^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc YXZ est rectangle en X.

29

On convertit toutes les longueurs dans la même unité. Par exemple en dm : UF = 42 cm = 4,2 dm.

[PF] est le plus grand côté.

$$PF^2 = 5,5^2 = 30,25$$

$$PU^2 + UF^2 = 3,6^2 + 4,2^2 = 12,96 + 17,64 = 30,6$$

$$PF^2 \neq PU^2 + UF^2$$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc PFU n'est pas rectangle.

30

[LF] est le plus grand côté.

$$LF^2 = 6^2 = 36$$

$$LD^2 + DF^2 = 2,3^2 + 5,6^2 = 5,29 + 31,36 = 36,65$$

$$LF^2 \neq LD^2 + DF^2$$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc LFD n'est pas rectangle.

Problèmes

31 L'échelle

Faire un schéma quand c'est nécessaire.

En posant l'échelle contre l'arbre, on obtient un triangle rectangle dont l'échelle est l'hypoténuse.

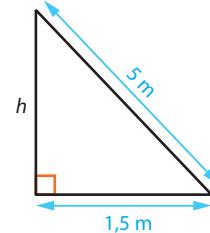
On note h la hauteur pouvant être atteinte. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$5^2 = h^2 + 1,5^2$$

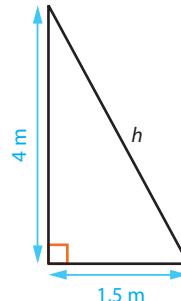
$$h^2 = 5^2 - 1,5^2 = 22,75$$

$$h = \sqrt{22,75} \approx 4,8 \text{ m}$$

Elle pourra donc atteindre le drone.



Il est également possible de calculer la longueur de l'hypoténuse h du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 4 m (hauteur du drone dans l'arbre) et 1,50 m.



D'après le théorème de Pythagore :

$$h^2 = 4^2 + 1,5^2$$

$$h^2 = 18,25$$

$$h = \sqrt{18,25} \approx 4,3 \text{ m.}$$

Il faut une échelle de 4,30 m au moins pour atteindre le drone. Or, l'échelle mesure 5 m : Juliette pourra donc atteindre son drone.

32 **Une aire**

On cherche la largeur du rectangle. On a un triangle rectangle dont l'hypoténuse h est la diagonale du rectangle. Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$40^2 = h^2 + 32^2$$

$$h^2 = 40^2 - 32^2 = 576$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ mm}$$

La largeur du rectangle est de 24 mm.

L'aire du rectangle est $A = 24 \times 32 = 768 \text{ mm}^2$.

33 **Trajet maison-collège**

Le stade est un rectangle formé de deux triangles rectangles dont l'hypoténuse commune est la diagonale d du stade. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$d^2 = 105^2 + 68^2 = 15\,649$$

$$\sqrt{15\,649} \approx 125,1$$

La diagonale du stade mesure donc environ 125,1 m.

En contournant le stade, il parcourt $105 + 68 = 173$ m.

$$173 - 125,1 = 47,9 \text{ m}$$

Il diminue son trajet de 47,9 m environ en passant par la diagonale du stade.

34 **Tempête**

L'arbre cassé peut être assimilé à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, le tronc forme un angle droit avec le sol. Soit d la longueur de la partie inclinée de l'arbre.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$d^2 = 7^2 + 2,5^2 = 55,25$$

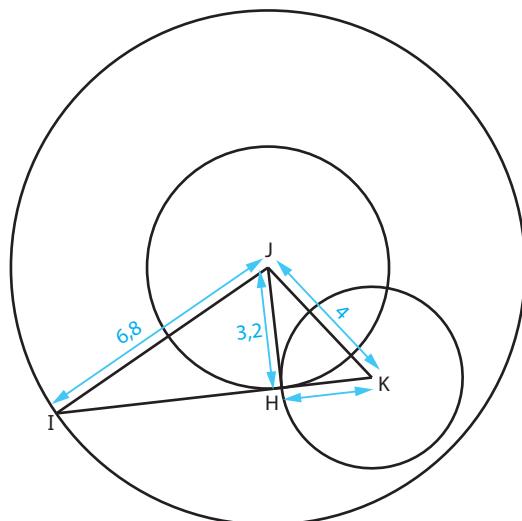
$$d = \sqrt{55,25} \approx 7,4 \text{ m}$$

$$7,4 + 2,5 = 9,9 \text{ m}$$

L'arbre avait au départ une hauteur d'environ 9,9 m.

35 **Au brevet**

1.



2. On veut démontrer que le triangle IHK est rectangle en H.

$$JK^2 = 4^2 = 16 \quad (\text{côté le plus long})$$

$$HK^2 + HJ^2 = 2,4^2 + 3,2^2 = 16$$

On a bien $JK^2 = HK^2 + HJ^2$. L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle est rectangle en H.

On a utilisé le théorème de Pythagore (sens réciproque).

Les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.

3. Le triangle IHJ est donc rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IJ^2 = IH^2 + JH^2$$

$$IJ^2 = 6,8^2 - 3,2^2 = 36$$

$$IJ = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

36 **Maçonnerie**

Pour vérifier si sa construction est perpendiculaire, il utilise le théorème de Pythagore (sens réciproque).

$$15^2 = 225 \quad (\text{côté le plus long})$$

$$9^2 + 12^2 = 225$$

$$15^2 = 9^2 + 12^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée.

Le triangle est donc un triangle rectangle, sa construction sera correcte.

37 **Aménagement de jardin**

Pour savoir si les bordures sont perpendiculaires au sol, on cherche si l'égalité de Pythagore est vérifiée. Le côté plus long : $90^2 = 8\,100$

La somme des carrés des deux autres côtés : $55^2 + 72^2 = 8\,209$
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée. Les bordures ne sont donc pas perpendiculaires au sol.

38 **L'arbre**

On peut assimiler la figure à un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 10 m.

On utilise le théorème de Pythagore. Soit h la hauteur de l'arbre.

$$10^2 = h^2 + 7^2$$

$$h^2 = 10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$$

$$h = \sqrt{51} \approx 7,1 \text{ m}$$

La hauteur de l'arbre est de 7,1 m environ.

39 **Prisme droit**

Le triangle ABC est rectangle en A. Pour trouver AC, on utilise le théorème de Pythagore.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AC^2 = 6,5^2 - 5,6^2 = 10,89$$

$$AC = \sqrt{10,89} = 3,3 \text{ cm}$$

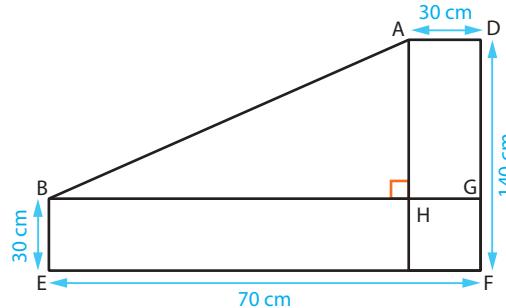
$$\text{On calcule l'aire de la base : } B = \frac{5,6 \times 3,3}{2} = 9,24 \text{ cm}^2$$

On calcule le volume du prisme :

$$V = B \times h = 9,24 \times 8 = 73,92 \text{ cm}^3$$

40 **Plomberie**

On peut faire le schéma suivant de la situation.



Le triangle AHB est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = (140 - 30)^2 + (70 - 30)^2 = 110^2 + 40^2 = 13\,700$$

$$AB = \sqrt{13\,700} \approx 117 \text{ cm}$$

$$EB + AB + AD = 30 + 117 + 30 = 177 \text{ cm}$$

La longueur totale du tube est d'environ 177 cm.

41 **Big Ben**

Pour savoir si le tube rentre dans la valise, il faut calculer la diagonale de la face avant du pavé droit comme représenté ci-contre.

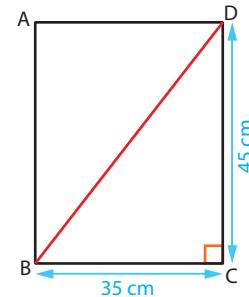
Le triangle BCD est rectangle. On utilise le théorème de Pythagore.

$$BC^2 + DC^2 = BD^2$$

$$BD^2 = 35^2 + 45^2 = 1\,225 + 2\,025 = 3\,250$$

$$BD = \sqrt{3\,250} \approx 57 \text{ cm}$$

John pourra donc mettre le tube dans sa valise.

**42** **Avec plusieurs triangles**

Le triangle ABG est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore.

$$AG^2 = AB^2 + BG^2$$

$$AG^2 = 6^2 + 8^2$$

$$AG^2 = 100$$

$$AG = 10 \text{ cm}$$

Le triangle AFG est rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AG^2 = AF^2 + FG^2$$

$$FG^2 = AG^2 - AF^2 = 100 - 9 = 91$$

$$FG = \sqrt{91} \approx 9,5 \text{ cm}$$

43 Quadrilatère

1. Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$AH = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

2. Le triangle AHB est rectangle en H. On peut écrire l'égalité de Pythagore.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$HB^2 = AB^2 - AH^2 = 31,2^2 - 12^2 = 829,44$$

$$HB = \sqrt{829,44} = 28,8 \text{ cm}$$

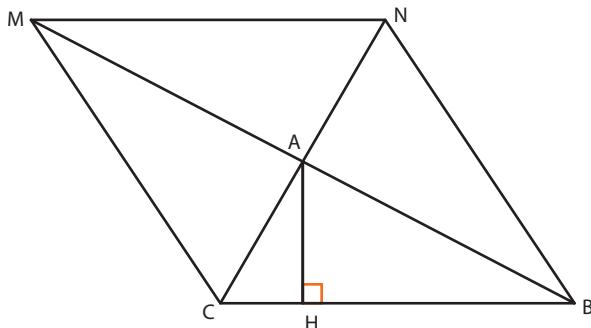
3. On utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

$$BC^2 = (5 + 28,8)^2 = 1\,142,44$$

$$AC^2 + AB^2 = 13^2 + 31,2^2 = 1\,142,44$$

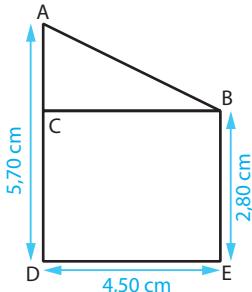
L'égalité est vérifiée. Le triangle est rectangle en A.

4. Dans le quadrilatère MNBC, les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. C'est un losange.



44 L'appentis

On a le schéma suivant.



On cherche AB. Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (5,70 - 2,80)^2 + 4,50^2 = 28,66$$

$$AB \approx 5,4 \text{ m}$$

La surface à couvrir est de $5,4 \times 6 = 32,4 \text{ m}^2$ environ.

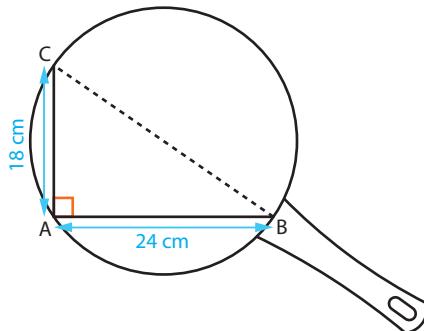
$$32,4 \times 9,30 = 301,32$$

Elle va payer 301,32 €.

45 Les cuisses cuisent

Il faut d'abord faire réfléchir les élèves sur l'orientation de la poêle avant de démarrer.

La casserole est représentée par un cercle. Les directions sont perpendiculaires.



Le triangle ABC, rectangle en A, a pour hypoténuse le diamètre de la casserole. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 24^2 + 18^2$$

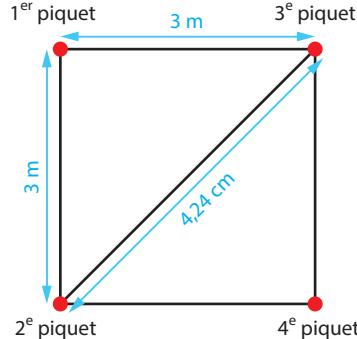
$$BC^2 = 900$$

$$BC = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$$

Le diamètre de la casserole mesure 30 cm.

46 Enquête policière

On obtient le schéma suivant.



On veut démontrer que le triangle formé par les trois premiers piquets est rectangle.

On utilise le théorème de Pythagore (sens réciproque).

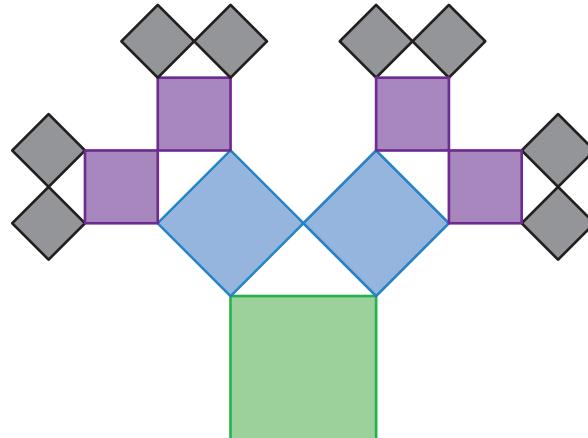
$$3^2 + 3^2 = 18$$

$$4,24^2 \approx 18$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée. Le triangle est bien rectangle. Le quadrilatère formé de deux triangles rectangles isosèles est bien un carré.

47 L'arbre de Pythagore

1. On obtient la figure suivante.



2. D'après le théorème de Pythagore :

Aire du carré vert = $2 \times$ aire d'un carré bleu

Aire d'un carré bleu = $2 \times$ aire d'un carré violet

Aire d'un carré violet = $2 \times$ aire d'un carré noir

En conclusion, l'aire du carré noir est égale à $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré vert.

48 Une démonstration du théorème de Pythagore

Il faut d'abord démontrer que IJKL est un carré.

La somme des angles d'un triangle étant égale à 180° :

$$\widehat{AIL} + \widehat{ALI} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Or $\widehat{AIL} = \widehat{KLD}$ donc $\widehat{KLD} + \widehat{ALI} = 90^\circ$

$$\widehat{ALD} = 180^\circ$$

$$\text{donc } \widehat{ILK} = \widehat{ALD} - (\widehat{KLD} + \widehat{ALI}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$IJ = JK = LK = KL$ et $\widehat{ILK} = 90^\circ$

IJKL est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et qui a un angle droit, donc IJKL est un carré.

AEFG et FHCM sont des quadrilatères qui ont leurs quatre côtés de même longueur et qui ont un angle droit, donc ce sont des carrés.

On note c la longueur du côté du carré IJKL.

Les deux carrés ABCD ont la même aire. Les quatre triangles rectangles sont identiques dans les deux figures.

L'aire du carré IJKL est égale à la somme de l'aire du carré AEFG et du carré FHCM.

$$\text{On a donc } c^2 = a^2 + b^2.$$

On retrouve l'égalité du théorème de Pythagore.

49 **L'escalier**

Les marches de l'escalier peuvent être assimilées à un triangle rectangle. Il y a 14 marches.

On cherche l'hypoténuse :

$$457 \div 14 \approx 32,6 \text{ cm}$$

On note h la hauteur d'une marche.

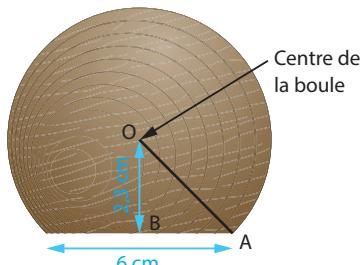
On applique le théorème de Pythagore.

$$27,3^2 + h^2 = 32,6^2$$

$$h^2 = 32,6^2 - 27,3^2 = 317,47$$

$$h = \sqrt{317,47} \approx 17,8 \text{ cm}$$

L'escalier respecte les normes de confort.

50 **Rampe d'escalier**

Le triangle OAB est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore.

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$OA^2 = 2,3^2 + 3^2$$

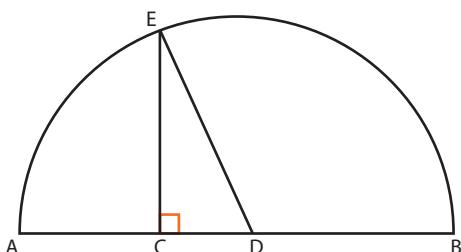
$$OA^2 = 14,29$$

$$OA = \sqrt{14,29} \approx 3,8 \text{ cm}$$

Le diamètre de la boule est de 7,6 cm environ.

$$6 \times 24,6 = 147,6 \text{ €}$$

M. Dubreuil devra payer 147,60 €.

51 **Dans le tunnel**

Le triangle ECD est rectangle en C.

ED est le rayon du demi-cercle.

$$CD = AD - AC = 15 - 12 = 3 \text{ cm}$$

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$ED^2 = EC^2 + CD^2$$

$$EC^2 = 15^2 - 3^2 = 216$$

$$EC = \sqrt{216} \approx 14,7 \text{ m}$$

La poutre mesure 14,7 m environ.

52 **Corde à treize nœuds**

On obtient :



On utilise le théorème de Pythagore (sens réciproque).

$$5^2 = 25$$

$$4^2 + 3^2 = 14 + 9 = 25$$

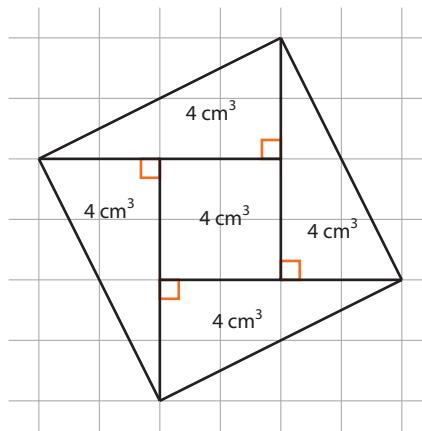
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle est rectangle.

53 **Que de carrés !**

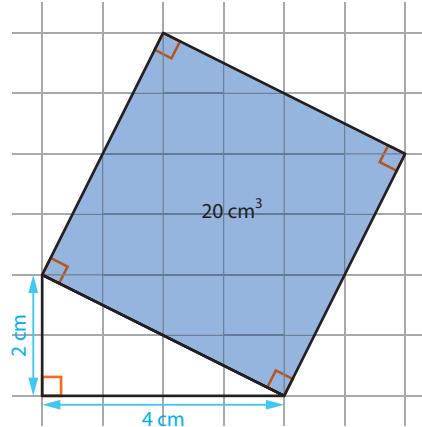
On a $20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

On trace 1 carré de côté 2 cm et 4 triangles rectangles d'aire 4 cm^2 dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 et 2 cm.



On pourra aussi faire remarquer que $20 = 16 + 4$.

Il faut donc construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 cm et 2 cm ; l'hypoténuse mesure alors $\sqrt{20}$ cm, d'après le théorème de Pythagore. Le carré de côté cette longueur a alors pour aire 20 cm^2 . Pour tracer le carré, on tracera au préalable un quadrillage de 1 cm de côté.

**54** **Patron**

Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$$

$$AC = \sqrt{74} \approx 8,6 \text{ cm}$$

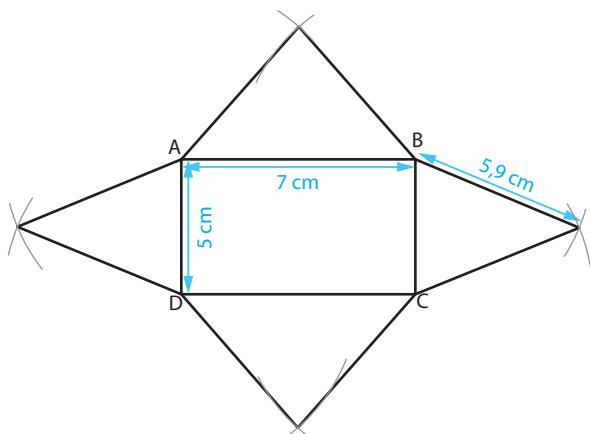
Donc $AO = 8,6 \div 2 = 4,3 \text{ cm}$.

Le triangle SOC est rectangle en O. On utilise le théorème de Pythagore.

$$SC^2 = SO^2 + OC^2$$

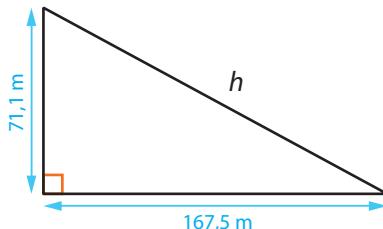
$$SC^2 = 4^2 + 4,3^2 = 34,49$$

$$SC = \sqrt{34,49} \approx 5,9 \text{ cm}$$



55

Le viaduc de Millau



Soit h la longueur du plus grand hauban. On utilise le théorème de Pythagore.

$$h^2 = 71,1^2 + 167,5^2$$

$$h^2 = 5\ 055,21 + 28\ 056,25 = 33\ 111,46$$

$$h = \sqrt{33\ 111,46} \approx 182 \text{ m}$$

Le hauban suivant est diminué de 10 % donc il mesure $182 \times 0,9 = 163,8 \text{ m}$.

On recommence pour les haubans suivants.

C'est l'occasion de faire un lien avec les pourcentages et de rappeler que diminuer de 10 %, c'est multiplier par 0,9, diminuer de 12 %, c'est multiplier par 0,88 et diminuer de 15 %, c'est multiplier par 0,85.

Hauban 1	Hauban 2	Hauban 3	Hauban 4	Hauban 5	Hauban 6
182 m	163,8 m	147,7 m	132,7 m	119,4 m	107,5 m
Hauban 7	Hauban 8	Hauban 9	Hauban 10	Hauban 11	
96,8 m	85,2 m	75 m	66 m	56,1 m	

La somme des longueurs donne environ 1 049,9 m.

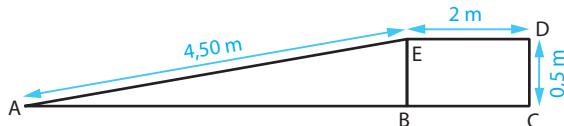
Il y a 7 pylônes, avec à chaque fois les 11 mêmes paires de haubans, soit une longueur totale de :

$$1\ 049,9 \times 2 \times 6 = 14\ 698,6 \text{ m environ.}$$

Il faudra 14,7 km de câbles environ.

56

La rampe



Le triangle ABE est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore.

$$AE^2 = EB^2 + AB^2$$

$$AB^2 = AE^2 - EB^2$$

$$AB^2 = 4,5^2 - 0,5^2 = 20,25 - 0,25 = 20$$

$$AB = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ m}$$

On calcule le volume de la rampe (qui est un prisme de hauteur 1,5 m et dont l'aire de la base est égale à la somme de l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4,47 m et 0,5 m et de l'aire d'un rectangle de longueur 2 m et de largeur 0,5 m) :

$$V = \left(\frac{4,47 \times 0,5}{2} + 0,5 \times 2 \right) \times 1,5 \approx 3,176 \text{ m}^3$$

$$\approx 3\ 176 \text{ L}$$

$$3\ 176 \div 90 \approx 35,3$$

Il faut 36 bétonnières pour faire cette rampe.

On calcule le prix de revient :

On cherche d'abord la quantité nécessaire de chaque matériau, puis leur cout :

Il faudra 36 sacs de ciment, soit un cout de $36 \times 6 = 216 \text{ €}$.

$36 \times 45 = 1\ 620$. Il faut 1 620 kg de sable.

$1\ 620 \div 35 \approx 46,3$. Il faut 47 sacs de sable, soit un cout de $47 \times 7,25 = 340,75 \text{ €}$.

$36 \times 85 = 3\ 060$. Il faut 3 060 kg de graviers.

$3\ 060 \div 35 \approx 87,4$. Il faut 88 sacs de graviers, soit un cout de $88 \times 7,31 = 643,28 \text{ €}$.

$36 \times 12 = 432$. Il faut 432 L d'eau, soit $0,432 \text{ m}^3$.

$0,432 \times 2,26 = 0,98 \text{ €}$.

$216 + 340,75 + 643,28 + 0,98 = 1\ 201,01$.

Le cout pour réaliser la rampe sera de 1 201,01 € environ.

Algorithmique et outils numériques

57 Algorithmique et calculs de longueurs

1. Nathanaël a créé les variables « côté 1 », qui représente la longueur de l'un des côtés de l'angle droit et « côté 2 », qui représente la longueur de l'autre côté de l'angle droit.

2. Il faut compléter le script dans la bulle dire racine de

par côté 1 * côté 1 + côté 2 * côté 2 .

3.



Par exemple :

côté 1 3
côté 2 4

5



4.

Il faut créer deux variables : « hypoténuse », qui représente la longueur de l'hypoténuse et « côté 1 », qui représente la longueur d'un côté de l'angle droit. Cette fois, il faut effectuer une soustraction.



58 Triplets pythagoriciens

1. Oui, Axel a déjà trouvé un triangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers à la ligne 7 : $AB = 3$; $AC = 4$ et $BC = 5$.

On peut faire remarquer la présence fréquente dans les exercices de ce triplet 3 ; 4 ; 5 et de ses multiples.

2. Dans la cellule B4, il a saisi la formule :

« =RACINE(B\$1*B\$1+A4*A4) »

ou « =RACINE(B\$1^2+A4^2) ».

Dans une formule, lorsqu'on fait référence à une cellule précise qui doit être employée dans tous les cas, même lorsqu'on copie la formule dans une autre colonne ou une autre ligne, il faut rajouter le symbole \$ devant la référence de ligne et de colonne.

Ici, il suffit juste de rajouter le symbole \$ devant la référence de la ligne puisque la formule est écrite dans la même colonne B.

Si on ne saisissait pas le symbole \$ devant la référence de la ligne, dans la cellule B5, on verrait apparaître la formule : «=RACINE(B2*B2+A5*A5)», ce qui serait faux.

3. On trouve, par exemple : 6 ; 8 ; 10 ou 5 ; 12 ; 13 ou 12 ; 16 ; 20.

Il faut modifier la valeur de la cellule B1 et la remplacer par d'autres valeurs entières et chercher des valeurs entières dans la colonne B.

	A	B
1	AB :	6
2		
3	AC	BC
4	1	6,083
5	2	6,325
6	3	6,708
7	4	7,211
8	5	7,81
9	6	8,485
10	7	9,22
11	8	10
12	9	10,82
13	10	11,66
14	11	12,53
15	12	13,42
16	13	14,32
17	14	15,23
18	15	16,16

	A	B
1	AB :	5
2		
3	AC	BC
4	1	5,099
5	2	5,385
6	3	5,831
7	4	6,403
8	5	7,071
9	6	7,81
10	7	8,602
11	8	9,434
12	9	10,3
13	10	11,18
14	11	12,08
15	12	13
16	13	13,93
17	14	14,87
18	15	15,81

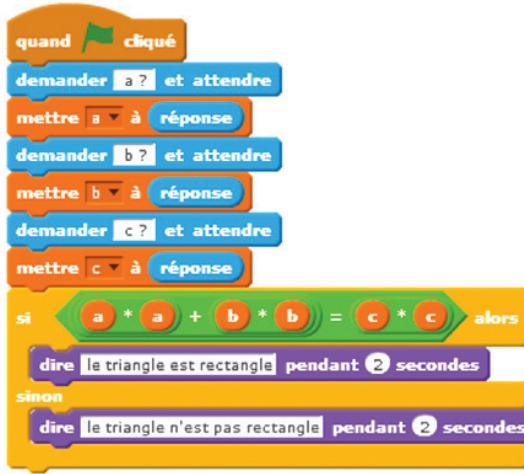
	A	B
1	AB :	12
2		
3	AC	BC
4	1	12,04
5	2	12,17
6	3	12,37
7	4	12,65
8	5	13
9	6	13,42
10	7	13,89
11	8	14,42
12	9	15
13	10	15,62
14	11	16,28
15	12	16,97
16	13	17,69
17	14	18,44
18	15	19,21

Sur le dernier tableau, on remarque qu'il y a aussi : 9 ; 12 et 15.

59 Algorithme et test

1. Jérémy a écrit ce script pour savoir si un triangle, dont on connaît les longueurs des trois côtés, est rectangle.

Script complété :



2. Le programme affiche « le triangle est rectangle ».

a 6
b 8
c 10

le triangle est rectangle



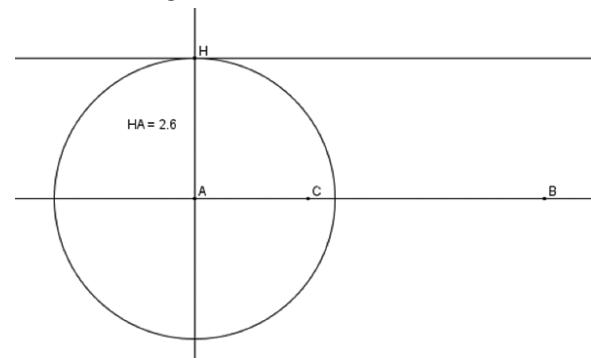
3. Oui, le message affiché est correct car $c^2 = 10^2 = 100$ et $a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. $c^2 = a^2 + b^2$: l'égalité de Pythagore est alors vérifiée. Par conséquent, le triangle est rectangle.

60 Installation d'armoire

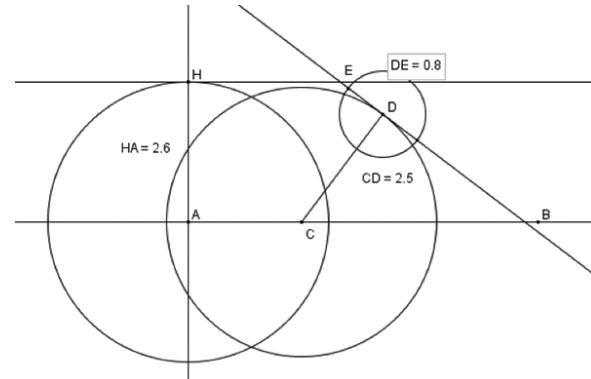
1. Objectif : Placer un point C sur (AB) puis un point D sur le cercle de centre C et de rayon 2,50, de façon à pouvoir faire pivoter l'armoire.

Programme de construction détaillé :

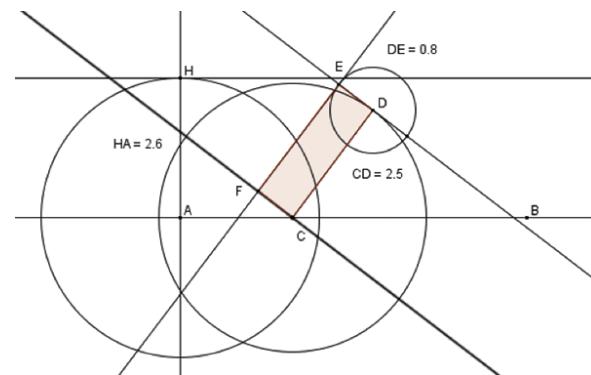
- Tracer une droite (AB), puis la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.
- Placer un point C sur (AB).
- Tracer le cercle de centre A et de rayon 2,6 ; placer les points d'intersection de ce cercle et de la perpendiculaire à (AB) en A. Nommer H le point situé au-dessus de (AB).
- Tracer la perpendiculaire à (AH) passant par H : il s'agit de la modélisation du plafond.
- Afficher la longueur AH.



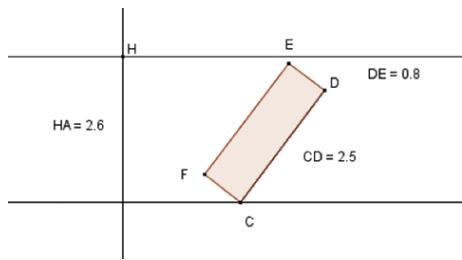
- Tracer le cercle de centre C et de rayon 2,5. Placer un point D sur ce cercle. Afficher CD.
- Tracer le cercle de centre D et de rayon 0,8.
- Tracer la perpendiculaire à (CD) passant par D. Placer les deux points d'intersection de cette droite avec le cercle précédent. Nommer E le point situé le plus à gauche des deux. Afficher ED.



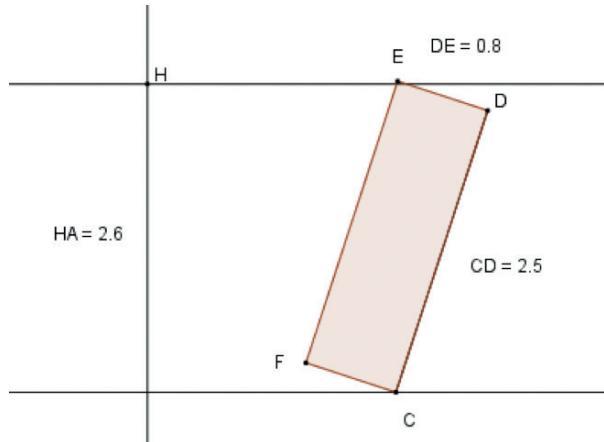
- Tracer la perpendiculaire à (DE) passant par E et la perpendiculaire à (CD) passant par C.
- Les deux droites se coupent en F. Tracer le quadrilatère CDEF.



Supprimer les objets inutiles.



On remarque, en déplaçant le point D sur le cercle de centre C et de rayon 2,50, que l'armoire ne passera pas.



- 2.** On utilise le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle de côtés de l'angle droit 80 cm et 250 cm (diagonale de l'armoire) :

Armoire vue de face, fond au sol



ABC est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 2,5^2 + 0,8^2 \\ AC^2 &= 6,25 + 0,64 \\ AC^2 &= 6,89 \\ AC &= \sqrt{6,89} \\ AC &\approx 2,625 \text{ m} \end{aligned}$$

On trouve que la diagonale de l'armoire mesure environ 262,58 cm. Le plafond doit être au minimum à une hauteur de 262,6 m pour installer l'armoire.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

- La distance horizontale parcourue est le double de l'altitude de laquelle il s'élance, c'est-à-dire 600 m.
Soit d la distance parcourue.
Le triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore :
$$d^2 = 300^2 + 600^2$$

$$d^2 = 90\,000 + 360\,000$$

$$d^2 = 450\,000$$

$$d = \sqrt{450\,000}$$

Il parcourt environ 671 m.
- Il lui faut environ $\frac{671}{20} = 33,6$ s pour descendre cette piste.

Exercice 1

La distance horizontale correspondante est égale à $300 \div 0,75 = 400$ m.

Soit d la distance parcourue.

Le triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore :

$$d^2 = 300^2 + 400^2$$

$$d^2 = 90\,000 + 160\,000$$

$$d^2 = 250\,000$$

$$d = \sqrt{250\,000}$$

$$d = 500 \text{ m}$$

Il parcourt environ 500 m.

Le rider parcourt 70 km = 70 000 m en 1 h = 3 600 s.

Sa vitesse est donc de $\frac{3\,600 \times 500}{70\,000} \approx 25,7$ s.

Exercice 2

ABH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$13^2 = AH^2 + 12^2$$

$$169 = AH^2 + 144$$

$$AH^2 = 169 - 144$$

$$AH^2 = 25$$

Donc $AH = 5$ cm.

BHC est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = CH^2 + BH^2$$

$$BC^2 = 16^2 + 12^2$$

$$BC^2 = 256 + 144$$

$$BC^2 = 400$$

Donc $BC = 20$ cm.

L'aire de ABC est égale à $\frac{AC \times BH}{2} = \frac{(5 + 16) \times 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$.

Exercice 2

ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2$$

$$BC^2 = 64 + 36$$

$$BC^2 = 100$$

Donc $BC = 10$ cm.

L'aire de ABC est égale à :

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

On calcule l'aire de ABC d'une autre façon :

$$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{10 \times AH}{2} = 24$$

Donc $5 \times AH = 24$. Donc $AH = 4,8$ cm.

Analyse d'une production

Exercice 3

Marie a fait des erreurs de calcul : elle écrit que $9^2 = 18$ au lieu de $9^2 = 81$ et $6^2 = 12$ au lieu de $6^2 = 36$.

Pablo n'a pas commencé par écrire l'hypoténuse : tout le calcul est faux.

Exercice 4

John a oublié d'écrire la propriété qu'il a utilisée et de préciser l'angle droit du triangle rectangle.

Samira applique l'égalité de Pythagore alors qu'elle ne sait pas si le triangle est rectangle : elle doit également effectuer les calculs de OR^2 et $OP^2 + PR^2$ séparément.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie », dont le but est d'utiliser les notions de géométrie plane à des fins de démonstrations.

Les connaissances associées sont le théorème de Pythagore et sa réciproque et les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle.

La compétence associée est de résoudre des problèmes de géométrie plane, en particulier dans le cadre de problèmes relevant de la vie courante et de situations concrètes, de prouver un résultat général, de valider ou réfuter une conjecture.

Ce chapitre s'inscrit aussi dans le thème « Nombres et calculs ». Les nombres sont utilisés pour résoudre des problèmes avec la définition de la racine carrée et dans le thème « Organisation de données », pour traiter une situation de proportionnalité et résoudre des problèmes de recherche de la quatrième proportionnelle.

- Les élèves ont déjà vu le théorème de Pythagore et sa réciproque en 4^e, il s'agit donc de réinvestissement dans ce chapitre.
- Ils connaissent la définition d'un triangle rectangle, la somme des angles d'un triangle et connaissent le théorème de Thalès et/ou ont déjà travaillé sur des situations de proportionnalité et

d'agrandissement/réduction. Ils doivent utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des mesures des angles aigus. Les élèves vont ainsi effectuer des calculs mais valider aussi par le raisonnement et la démonstration grâce à de nouveaux outils.

- Ce chapitre s'inscrit dans le développement du raisonnement et la maîtrise de la démonstration, le plus souvent dans des situations concrètes afin pour eux de faire sens et de leur permettre la construction du sens du cours.
- Les élèves doivent être capables de visualiser la figure de référence qu'est le triangle rectangle et très rapidement de l'identifier dans un problème contextualisé. Ils doivent être capables d'identifier les mesures connues et de choisir la formule adaptée à chaque cas. Ils pourront mettre en place des stratégies de vérification des résultats trouvés.
- Ce thème sera de nouveau abordé avec les solides et la géométrie, permettant ainsi de varier les contextes d'utilisation du théorème de Pythagore et des formules de trigonométrie.

Activités

Questions flash

1. réponse **b.** La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
2. L'hypoténuse est le côté [AC] du triangle.

On peut faire remarquer qu'on repère l'hypoténuse de deux façons : c'est le côté opposé à l'angle droit et c'est aussi le côté le plus long dans un triangle rectangle.

3. La somme des angles d'un triangle est égale à 180° :

$$\widehat{MNP} = 39^\circ \text{ et } \widehat{MPN} = 90^\circ.$$

$$\text{Donc } \widehat{NMP} = 180 - 90 - 39 = 51^\circ.$$

On peut faire remarquer que la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est toujours égale à 90° : on les appelle des angles complémentaires.

$$4. \text{ a. } \frac{2,1}{0,3} = 7 \quad \text{b. } \frac{14,4}{4} = 3,6$$

On peut trouver les nombres manquants à l'aide d'un coefficient multiplicateur ou à l'aide de la propriété des produits en croix.

Des carrés

Intentions des auteurs

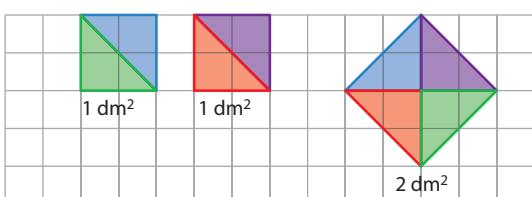
L'objectif de cette activité est de réactiver le théorème de Pythagore.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la racine carrée et du théorème de Pythagore.

La capacité introduite est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour calculer une longueur et d'utiliser la racine carrée.

Cette activité permet de retrouver le théorème de Pythagore à travers une énigme. On peut proposer ce site pour aller plus loin : maths.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/mathsf/Faire_des_maths/rallye/corriges_culture/2013_racine_de_deux_corriges.pdf.

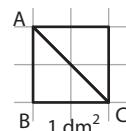
1. Il faut découper les deux carrés en deux sur une diagonale. On peut ensuite reconstituer un carré d'aire 2 dm².



Activité 1

2. On démontre de cette façon que l'on obtient un carré d'aire 2 dm² et qui a donc pour côté $\sqrt{2}$ dm.

En discussion collective, on reprendra l'égalité de Pythagore et ses conditions d'utilisation.



Le triangle ABC est rectangle en B.

On retrouve bien l'égalité de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

En effet : $AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = AC^2$.

Cette situation est inspirée d'une situation décrite dans l'ouvrage d'Annie Berté, *Mathématique dynamique*.

Intentions des auteurs

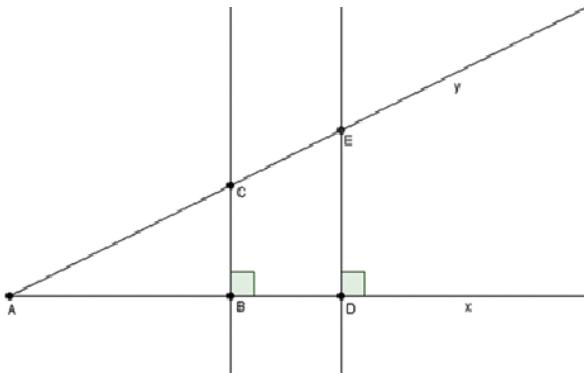
L'objectif de cette activité est d'introduire les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle : le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu.

Le prérequis nécessaire est de savoir utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

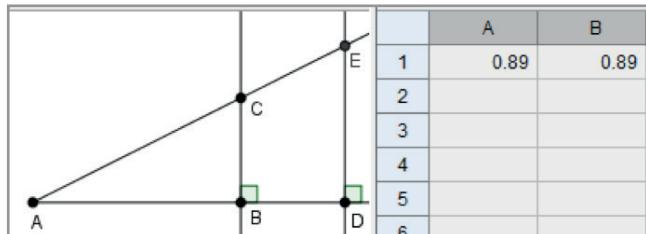
La capacité introduite est de connaître les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle et de savoir les utiliser pour calculer une longueur d'un des côtés du triangle ou la mesure d'un des angles aigus.

Dans cette activité, les élèves vont apprendre que l'on peut connaître les mesures d'un angle quand on connaît les longueurs de deux côtés du triangle.

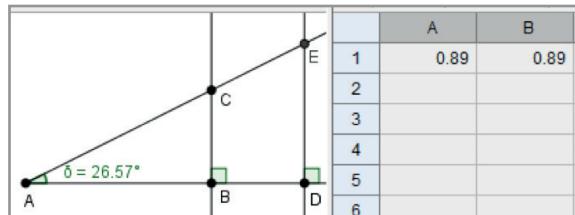
1. et 2.



3. Dans la cellule A1, on tape AB/AC puis entrée.
Dans la cellule B1, on tape AD/AE puis entrée.



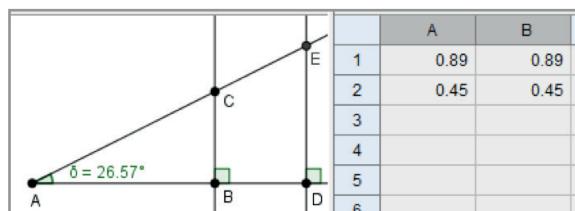
4. Quand on fait bouger le point D le long de la demi-droite [Ax), les rapports restent égaux.
5. On utilise l'icône pour afficher la mesure d'un angle.



$$\cos \widehat{CAB} = \cos 26,57^\circ \approx 0,89$$

On retrouve la valeur affichée en A1 et B1.

6. On affiche BC/AC en A2 et DE/AE en B2.

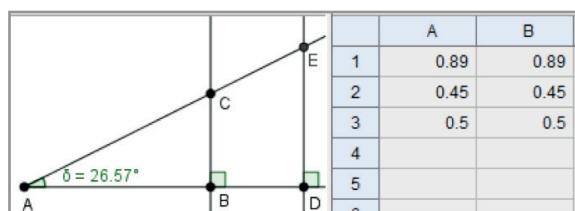


On constate que les rapports sont là-aussi égaux.

$$\sin \widehat{CAB} = \sin 26,57^\circ \approx 0,45$$

On retrouve la valeur affichée en A2 et B2.

7. On affiche BC/AB en A3 et DE/AD en B3.



On constate que les rapports sont là-aussi égaux.

$$\tan \widehat{CAB} = \tan 26,57^\circ \approx 0,5$$

On retrouve la valeur affichée en A3 et B3.

On pourra ainsi définir le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu \widehat{A} dans un triangle rectangle de la façon suivante :

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}$$

et faire allusion au moyen mnémotechnique SOH CAH TOA permettant de mémoriser ces définitions.

Une démonstration

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de démontrer et d'établir que le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ne dépend que de cet angle.

Le prérequis nécessaire est la connaissance du théorème de Thalès.

La capacité introduite est de définir le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle comme quotient de deux longueurs ne dépendant que de la mesure de cet angle.

1. Les droites (BC) et (B'C') sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).

« Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. »

Les points A, B, C et A', B', C' sont alignés.

On peut donc utiliser l'égalité du théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Activité 3

$$\text{On a bien } \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

2. On a $\frac{AB}{AB'} \times \frac{AC}{AC'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$, donc en utilisant le produit en croix, on obtient bien $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.

3. On a démontré que le rapport $\frac{AB}{AC}$ ne varie pas quand on déplace le point B sur la droite (AB').

Les seules valeurs dans le triangle rectangle ABC qui ne varient pas lorsqu'on déplace le point B sont les valeurs des angles \widehat{CAB} et \widehat{ACB} . On a démontré que le quotient de la longueur du côté adjacent à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur de son hypoténuse ne dépend que de la mesure de cet angle.

Ce quotient appelé le cosinus de cet angle et noté $\cos(\text{angle})$.

On a ainsi :

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{CAB}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

De la même façon, on montrerait que le quotient de la longueur du côté opposé à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur de son hypoténuse ne dépend que de la mesure de cet angle ; ce quotient est alors appelé sinus de cet angle et noté $\sin(\text{angle})$.

On a ainsi :

$$\sin \widehat{CAB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{CAB}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

De la même façon, on montrerait que le quotient de la longueur du côté opposé à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur du côté adjacent à cet angle ne dépend que de la mesure de cet angle ; ce quotient est alors appelé la tangente de cet angle et noté $\tan(\text{angle})$.

On a ainsi :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{CAB}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{CAB}} = \frac{BC}{AB}$$

Une avalanche de propriétés

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir les relations trigonométriques.

Les prérequis nécessaires sont de connaître les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu, connaître le théorème de Pythagore.

La capacité introduite est d'utiliser les formules de trigonométrie pour établir des relations trigonométriques.

Dans cette activité, les élèves vont conjecturer puis démontrer des relations trigonométriques en utilisant les règles de calcul sur les fractions et le théorème de Pythagore.

1. Les valeurs sont ici des valeurs approchées au millième près.

Mesure de l'angle \hat{a}	5°	30°	45°	60°	85°
$\cos \hat{a}$	0,996	0,866	0,707	0,5	0,087
$\sin \hat{a}$	0,087	0,5	0,707	0,866	0,996
$\tan \hat{a}$	0,087	0,577	1	1,732	11,430
$(\cos \hat{a})^2$	0,992	0,75	0,5	0,25	0,008
$(\sin \hat{a})^2$	0,008	0,25	0,5	0,75	0,992
$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2$	1	1	1	1	1
$\frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}}$	0,087	0,577	1	1,732	11,430

Le tableau précédent a été obtenu avec une calculatrice.

On peut également l'obtenir avec un tableur :

	A	B	C	D	E	F
Mesure de l'angle \hat{a} (en $^\circ$)	5	30	45	60	85	
2 $\cos \hat{a}$	0,99619	0,86603	0,70711	0,5	0,08716	
3 $\sin \hat{a}$	0,08716	0,5	0,70711	0,86603	0,99619	
4 $\tan \hat{a}$	0,08749	0,57735	1	1,73205	11,4301	
5 $(\cos \hat{a})^2$	0,9924	0,75	0,5	0,25	0,0076	
6 $(\sin \hat{a})^2$	0,0076	0,25	0,5	0,75	0,9924	
7 $(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2$	1	1	1	1	1	
8 $\sin \hat{a}/\cos \hat{a}$	0,08749	0,57735	1	1,73205	11,4301	

Les fonctions COS, SIN et TAN permettent de calculer respectivement le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle dont la mesure est en radians, et la fonction RADIANS permet de convertir la mesure d'un angle en radians en degrés.

Le radian est une unité de mesure d'angle utilisée au lycée.

Les formules saisies sont alors :

$$\text{En B2 :=COS(RADIANS(B1)) En B3 :=SIN(RADIANS(B1))}$$

$$\text{En B4 :=TAN(RADIANS(B1)) En B5 :=B2*B2}$$

$$\text{En B6 :=B3*B3 En B7 :=B5+B6 En B8 :=B3/B4}$$

2. En observant le tableau, on peut conjecturer les propriétés suivantes :

$$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = 1 (*) \text{ et } \tan \hat{a} = \frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}} \quad (**)$$

On peut faire noter que les valeurs 0° et 90° n'apparaissent pas dans le tableau car, dans un triangle rectangle, les angles différents de l'angle droit sont aigus.

On peut néanmoins calculer le cosinus et le sinus de 0° et 90° avec la calculatrice.

On fera remarquer que le cosinus et le sinus sont des nombres strictement compris entre 0 et 1 (car on divise par l'hypoténuse et que l'hypoténuse est le côté le plus grand d'un triangle rectangle), tandis que la tangente est un nombre strictement positif mais peut être supérieur à 1 (l'hypoténuse n'intervenant pas dans son calcul, le côté opposé à l'angle concerné pouvant être supérieur ou inférieur à son côté adjacent).

On peut aussi faire remarquer que $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$ et que $\cos \hat{A} = \sin (90^\circ - \hat{A})$. De même que $\sin \hat{A} = \cos (90^\circ - \hat{A})$.

3. Dans le triangle ABC rectangle en B on a les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos \hat{a} = \frac{AB}{AC} \quad \sin \hat{a} = \frac{BC}{AC} \quad \tan \hat{a} = \frac{BC}{AB}$$

4. On peut écrire les relations suivantes :

$$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 + \left(\frac{BC}{AC} \right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

Or le triangle ABC est rectangle en B, on peut utiliser l'égalité de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

On remplace dans notre égalité, on obtient :

$$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

La propriété (*) est démontrée.

On peut faire noter que $(\cos \hat{a})^2$ se notera aussi $\cos^2 \hat{a}$.

De même que $(\sin \hat{a})^2$ se notera aussi $\sin^2 \hat{a}$.

$$\frac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}} = \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \tan \hat{a}$$

La propriété (**) est démontrée.

Intentions des auteurs

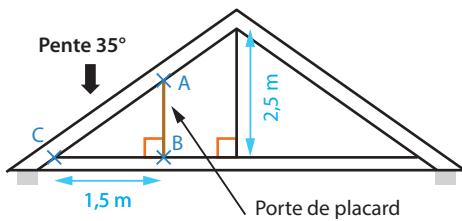
L'objectif de cette activité est de savoir utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un des côtés du triangle et plus particulièrement choisir la bonne relation trigonométrique.

Les prérequis nécessaires sont de connaître les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, de savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu, d'utiliser la propriété des produits en croix pour calculer une quatrième proportionnelle.

La capacité introduite est de calculer la longueur du côté opposé à l'un des angles aigus dans un triangle rectangle en utilisant la tangente.

On est dans la modélisation d'une situation concrète.

On suppose que les portes des placards sont posées perpendiculairement au sol du grenier.



Au secours

Intentions des auteurs

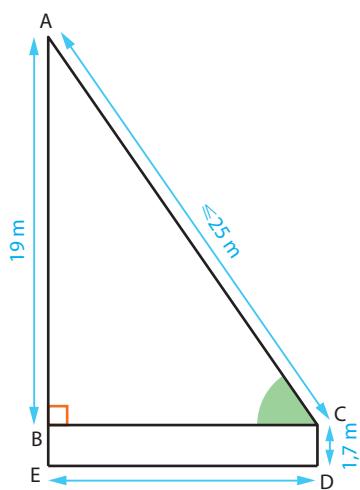
Les objectifs de cette activité sont de savoir utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer la mesure d'un des angles aigus du triangle et plus particulièrement choisir la bonne relation trigonométrique, d'utiliser la calculatrice pour calculer la valeur exacte (ou approchée) de la mesure d'un angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

Les prérequis nécessaires sont de connaître les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, de savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu.

La capacité introduite est de calculer la valeur d'un des angles aigus d'un triangle rectangle en utilisant une fonction trigonométrique.

On est dans la modélisation d'une situation concrète.

On suppose que le mur de l'immeuble est perpendiculaire au sol.



Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de trigonométrie.

On connaît la longueur du côté opposé à l'angle aigu \widehat{ACB} , la longueur du côté adjacent à l'angle aigu \widehat{ACB} et on cherche la valeur de l'angle aigu \widehat{ACB} .

Le triangle ABC est rectangle en B. On peut donc utiliser les formules de trigonométrie.

On a :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}} = \frac{BC}{AB}$$

On connaît la longueur du côté adjacent à l'angle \widehat{ACB} et la mesure de l'angle \widehat{ACB} . On cherche la longueur du côté opposé à l'angle aigu \widehat{ACB} .

On va donc utiliser la formule de la tangente (TOA).

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}} = \frac{BC}{AB}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\tan 35^\circ = \frac{BC}{1,5}$$

On utilise le produit en croix : $BC = 1,5 \times \tan 35^\circ$

Avec la calculatrice, on obtient : $BC \approx 1,05$ m

Catherine devra commander des portes d'environ 1,05 m de hauteur.

Activité 6

On utilise donc la formule de la tangente (TOA) :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}} = \frac{AB}{BC}$$

On remplace par les valeurs connues :

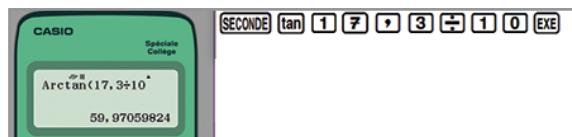
$$\tan \widehat{ACB} = \frac{19 - 1,7}{10}$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{17,3}{10}$$

On cherche la mesure d'un angle connaissant sa tangente.

On introduit ici les touches « arccos », « arcsin » et « arctan » de la calculatrice.

Le parallèle pourra être fait avec la touche « carrée » et la touche « racine carrée » de la calculatrice, l'une étant l'inverse de l'autre.



On a donc : $\widehat{ACB} \approx 60^\circ$ au degré près.

Les pompiers devront donner une inclinaison de 60° par rapport à l'horizontale.

On peut aussi vérifier que la longueur de l'échelle est suffisante pour atteindre la fenêtre.

Le triangle ABC est rectangle en B, on cherche la longueur du côté [AC].

On utilise l'égalité de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (19 - 1,7)^2 + 10^2$$

$$AC^2 = 17,3^2 + 10^2 = 299,29 + 100 = 399,29$$

$$AC = \sqrt{399,29} \approx 20 \text{ m}$$

Il faut donc que l'échelle soit dépliée sur 20 m environ, ce qui est possible puisque l'échelle peut mesurer au maximum 25 m.

Exercices

Utiliser l'égalité de Pythagore

Questions flash

- 1 • Le triangle ABE est rectangle en A, on peut écrire l'égalité de Pythagore : $BE^2 = AB^2 + AE^2$
 • Le triangle BCD est rectangle en D, on peut écrire l'égalité de Pythagore : $BC^2 = BD^2 + DC^2$
 • Le triangle BDE est rectangle en B, on peut écrire l'égalité de Pythagore : $ED^2 = BE^2 + BD^2$

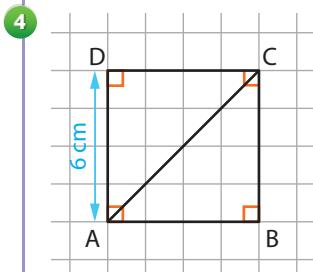
- 2 Pour chaque triangle, on regarde si l'égalité de Pythagore est vérifiée.
 • $11^2 + 9^2 = 202$ et $15^2 = 225$; l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle.
 • $3^2 + 4^2 = 25$ et $5^2 = 25$; l'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle est rectangle.
 • $12^2 + 16^2 = 400$ et $20^2 = 400$; l'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle est rectangle.

- 3 Le triangle ABC est rectangle en A, on peut écrire l'égalité de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 \\ BC^2 &= 3,6^2 + 2,7^2 = 20,25 \\ BC &= \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

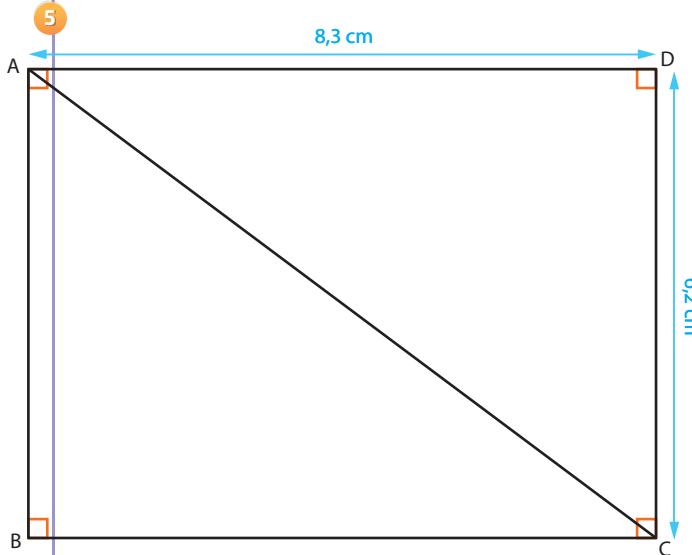
Le triangle BCD est rectangle en C, on peut écrire l'égalité de Pythagore :

$$\begin{aligned} BD^2 &= DC^2 + BC^2 \\ DC^2 &= BD^2 - BC^2 \\ DC^2 &= 11,7^2 - 4,5^2 = 116,64 \\ DC &= \sqrt{116,64} = 10,8 \text{ cm} \end{aligned}$$



Dans le carré ABCD, le triangle ABC est rectangle en B.
 On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ BC^2 &= 36 + 36 = 72 \\ BC &= \sqrt{72} \approx 8,5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Dans le rectangle ABCD, le triangle ABC est rectangle en B.
 On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ BC^2 &= 6,2^2 + 8,3^2 \\ BC &= \sqrt{107,33} \approx 10,4 \text{ cm} \end{aligned}$$

- 6 • Dans le triangle ABE, [AB] est le plus grand côté :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 1,5^2 = 2,25 \\ AE^2 + BE^2 &= 1,2^2 + 0,9^2 = 2,25 \\ AB^2 &= AE^2 + BE^2 \end{aligned}$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ABE est rectangle en E.

- Dans le triangle ADC, [AC] est le plus grand côté :

$$\begin{aligned} AC^2 &= (1,5 + 0,625)^2 = 4,51 \\ AD^2 + DC^2 &= (1,2 + 0,5)^2 + 1,275^2 = 4,51 \\ AC^2 &= AD^2 + DC^2 \end{aligned}$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ADC est rectangle en D.

Les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires à la même droite (AD), elles sont donc parallèles.

Calculer des rapports trigonométriques

Questions flash

- 7 [BC] est le côté opposé à l'angle \widehat{CAB} .

[AC] est le côté adjacent à l'angle \widehat{CAB} .

[KI] est le côté opposé à l'angle \widehat{KJI} .

[IJ] est le côté adjacent à l'angle \widehat{KJI} .

- 8 Le triangle ABC est rectangle en A, on peut utiliser les formules de trigonométrie.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \quad \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

- 9 Le triangle JIK est rectangle en I, on peut utiliser les formules de trigonométrie.

$$\sin \widehat{IKJ} = \frac{IJ}{JK} \quad \sin \widehat{IJK} = \frac{IK}{JK}$$

- 10 Les triangles sont rectangles. On peut utiliser les formules de trigonométrie.

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \cos \beta = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

- 11 a. $\cos 27^\circ \approx 0,891$ b. $\sin 65^\circ \approx 0,906$ c. $\tan 56^\circ \approx 1,483$

- 12 • [BH] est le côté adjacent à l'angle \widehat{ABC} dans le triangle ABH rectangle en H.
 • [AH] est le côté opposé à l'angle \widehat{ABC} dans le triangle ABH rectangle en H.
 • [AC] est le côté opposé à l'angle \widehat{ABC} dans le triangle ABC rectangle en A.
 • [AB] est le côté adjacent à l'angle \widehat{ABC} dans le triangle ABC rectangle en A.

- 13 Un cosinus ne peut pas être supérieur à 1.

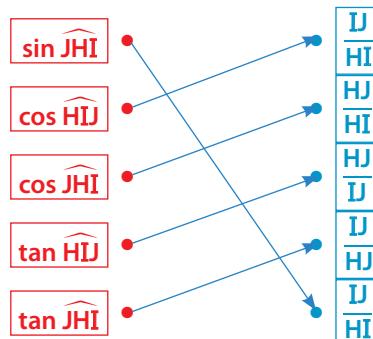
- 14 • Premier triangle :

$$\cos \widehat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{5,1}{8,5} = 0,6 \text{ et } \tan \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{5,1}{6,8} = 0,75$$

- Second triangle :

$$\cos \widehat{K} = \frac{IK}{KJ} = \frac{4,16}{5,2} = 0,8 \text{ et } \tan \widehat{J} = \frac{IK}{IJ} = \frac{4,16}{3,12} = \frac{4}{3}$$

- 15



Utiliser les rapports trigonométriques

Questions flash

- 16 a. $\arccos 0,75 \approx 41^\circ$ donc $\hat{a} \approx 41^\circ$.
 b. $\arcsin 0,58 \approx 35^\circ$ donc $\hat{b} \approx 35^\circ$.
 c. $\arctan 1,29 \approx 52^\circ$ donc $\hat{c} \approx 52^\circ$.

17 a. $\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$ b. $\tan \widehat{ACB} = \frac{3}{4}$ c. $\sin \widehat{ACB} = \frac{3}{5}$

- 18 En regardant la figure, on a les mesures du côté opposé à l'angle \widehat{A} et de l'hypoténuse. C'est dans la formule du sinus que l'on utilise ces deux longueurs, c'est Yvan qui a raison.

- 19 • 1^{er} triangle : on connaît la mesure de l'hypoténuse et on cherche la mesure du côté opposé à l'angle \widehat{UOT} , on utilise donc le sinus.

$$\sin \widehat{UOT} = \frac{TU}{OT}$$

- 2^e triangle : on connaît la mesure du côté opposé à l'angle \widehat{UOT} et on cherche la mesure du côté adjacent, on utilise donc la tangente.

$$\tan \widehat{UOT} = \frac{OT}{TU}$$

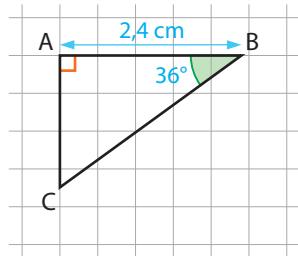
- 3^e triangle : on connaît la mesure du côté adjacent à l'angle \widehat{UOT} et on cherche la mesure du côté opposé, on utilise donc la tangente.

$$\tan \widehat{UOT} = \frac{TU}{OU}$$

- 4^e triangle : on connaît la mesure du côté adjacent à l'angle \widehat{UOT} et on cherche la mesure de l'hypoténuse, on utilise donc le cosinus.

$$\cos \widehat{UOT} = \frac{OU}{UT}$$

20 1.



2. Le triangle ABC est rectangle en A.

- On cherche la longueur BC. On utilise les formules de trigonométrie.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \quad \cos 36^\circ = \frac{2,4}{BC}$$

$$BC = \frac{2,4}{\cos 36^\circ} \approx 3 \text{ cm}$$

- On cherche la longueur AC. On utilise les formules de trigonométrie.

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \quad \tan 36^\circ = \frac{AC}{2,4}$$

$$AC = 2,4 \times \tan 36^\circ \approx 1,7 \text{ cm}$$

- 21 • Dans le triangle OMT, rectangle en O, on utilise les formules de trigonométrie.

$$\sin \widehat{OMT} = \frac{OT}{MT} \quad \sin \widehat{OMT} = \frac{4,3}{5,6}$$

$$\widehat{OMT} = \arcsin \left(\frac{4,3}{5,6} \right) \approx 50^\circ$$

- Dans le triangle ITO, rectangle en I, on utilise les formules de trigonométrie.

$$\cos \widehat{IOT} = \frac{IO}{TO}$$

$$\cos \widehat{IOT} = \frac{3,1}{4,5}$$

$$\widehat{IOT} = \arccos \left(\frac{3,1}{4,5} \right) \approx 46^\circ$$

- Dans le triangle PTO, rectangle en T, on utilise les formules de trigonométrie.

$$\tan \widehat{TOP} = \frac{PT}{TO} \quad \tan \widehat{TOP} = \frac{6,2}{4,5}$$

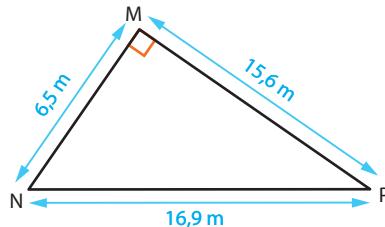
$$\widehat{TOP} = \arctan \left(\frac{6,2}{4,5} \right) \approx 54^\circ$$

- 22 Le triangle OQP est rectangle en Q. On cherche la mesure de l'angle \widehat{OPQ} . On connaît la mesure du côté opposé à l'angle \widehat{OPQ} et celle de l'hypoténuse. On utilise donc la formule du sinus.

$$\sin \widehat{OPQ} = \frac{PT}{OP}$$

C'est donc Thomas qui a tapé la bonne séquence.

23



Le triangle NPM est rectangle en M. On peut utiliser les formules de trigonométrie.

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{MN}{NP}$$

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{6,5}{16,9}$$

$$\widehat{MNP} = \arccos \left(\frac{6,5}{16,9} \right) \approx 67^\circ$$

$$\sin \widehat{MPN} = \frac{MN}{NP} = \frac{6,5}{16,9}$$

$$\widehat{MPN} = \arcsin \left(\frac{6,5}{16,9} \right) \approx 23^\circ$$

On peut aussi calculer \widehat{MPN} en utilisant la somme des angles d'un triangle égale à 180° .

24

1. Le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6,3^2 + 4,7^2$$

$$AC^2 = 61,78$$

$$AC = \sqrt{61,78}$$

$$AC \approx 7,9 \text{ cm}$$

Le triangle ADC est rectangle en C. On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AC^2 + DC^2$$

$$AD^2 = 61,78 + 3,1^2$$

$$AD^2 = 71,39$$

$$AD = \sqrt{71,39}$$

$$AD \approx 8,4 \text{ cm}$$

2. Le triangle ACD est rectangle en C. On peut utiliser les formules de trigonométrie.

$$\cos \widehat{DAC} = \frac{AC}{AD} + \frac{7,9}{8,4}$$

$$\widehat{DAC} = \arccos \left(\frac{7,9}{8,4} \right) \approx 20^\circ$$

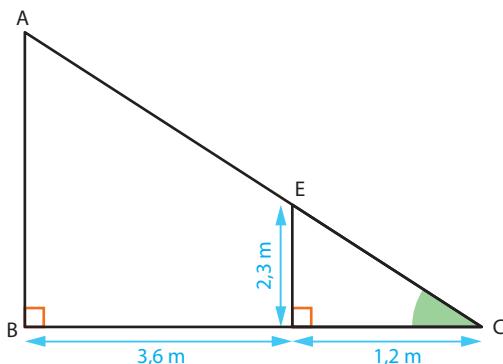
Pour plus de précision, on remplacera AC et AD par leurs valeurs respectives exactes $\sqrt{61,78}$ et $\sqrt{71,39}$.

On trouve alors $\widehat{DAC} \approx 22^\circ$.

Problèmes

25 L'horloge du village

On schématise la situation avec la figure suivante :



[AB] représente l'horloge et [DE] le lampadaire.

Coup de pouce : déterminer d'abord la mesure de l'angle \widehat{ECD} , puis la longueur AB.

Le triangle EDC est rectangle en D. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connaît la mesure du côté opposé et du côté adjacent, on va utiliser la formule de la tangente.

$$\tan \widehat{ECD} = \frac{ED}{DC}$$

$$\tan \widehat{ECD} = \frac{2,3}{1,2}$$

$$\arctan\left(\frac{2,3}{1,2}\right) \approx 62^\circ$$

donc $\widehat{ECD} \approx 62^\circ$

Le triangle ACB est rectangle en B. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connaît la mesure du côté adjacent et de l'angle \widehat{ACB} et on cherche la mesure du côté opposé. On va utiliser la formule de la tangente :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{BA}{BC}$$

$$BC = BD + DC = 3,6 + 1,2 = 4,8 \text{ m}$$

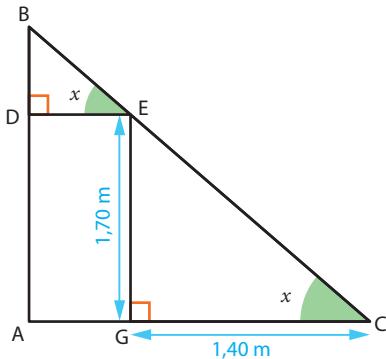
$$\tan 62^\circ = \frac{BA}{4,8}$$

$$BA = 4,8 \times \tan 62^\circ \approx 9 \text{ m}$$

La hauteur de l'horloge est de 9 m environ.

26 L'ombre

On schématise la situation avec la figure suivante :



Le triangle ECG est rectangle en G. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connaît la mesure du côté opposé et du côté adjacent, on va utiliser la formule de la tangente :

$$\tan \widehat{ECG} = \frac{EG}{GC}$$

$$\tan \widehat{x} = \frac{1,7}{1,4}$$

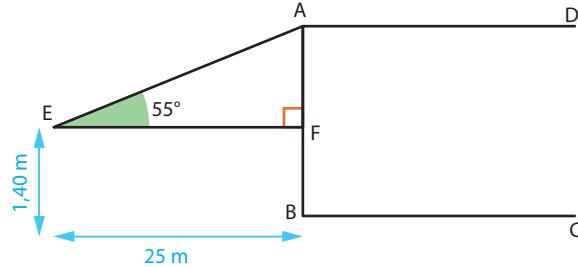
$$\arctan\left(\frac{1,7}{1,4}\right) \approx 51^\circ$$

$$\widehat{x} \approx 51^\circ$$

L'angle d'élévation est de 51° environ.

27 Nouveau stade de Bordeaux

On schématise la situation avec la figure suivante :



Le triangle EFA est rectangle en F. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connaît la mesure de l'angle \widehat{AEF} et du côté adjacent à cet angle. On cherche la mesure du côté opposé. On va utiliser la formule de la tangente :

$$\tan \widehat{AEF} = \frac{AF}{EF}$$

$$\tan 55^\circ = \frac{AF}{25}$$

$$AF = 25 \times \tan 55^\circ \approx 35,7 \text{ m}$$

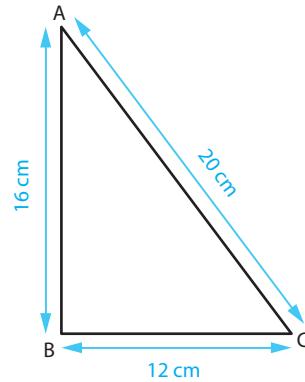
$$AB = AF + FB$$

$$AB \approx 35,7 + 1,4$$

$$AB \approx 37,1 \text{ m}$$

Le stade de Bordeaux mesure 37,1 m environ de hauteur.

28 Un outil



Pour vérifier si cet outil peut servir d'équerre, on regarde si l'égalité de Pythagore est vérifiée.

[AC] est le plus grand côté.

$$AC^2 = 20^2 = 400$$

$$AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$$

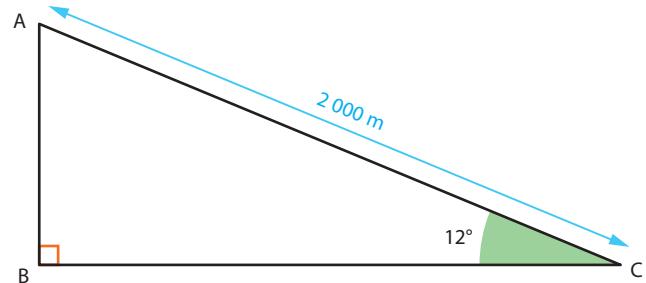
L'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle ABC est rectangle en B.

Pierre peut donc utiliser son outil comme équerre.

29 Au ski

Attention à ne pas confondre distance et altitude.

On schématise la situation avec la figure suivante :



Le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connaît la mesure de l'angle \widehat{ACB} et de l'hypoténuse. On cherche la mesure du côté opposé. On va utiliser la formule du sinus :

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \quad \sin 12^\circ = \frac{AB}{2 000}$$

$$AB = 2 000 \times \sin 12^\circ \approx 415,8 \text{ m}$$

L'altitude de l'arrivée est d'environ $1 800 - 415,8 = 1 384,2 \text{ m}$.

30

L'abri de voiture

Cet exercice permet d'utiliser le théorème de Pythagore et les formules de trigonométrie.
Coup de pouce : Quelle est la forme du toit à recouvrir ?
Représenter la situation.

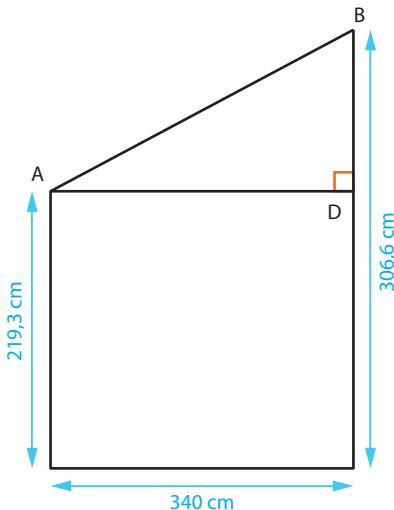
1. On cherche la surface du toit. C'est un rectangle.

$$\mathcal{A} = L \times \ell$$

$$L = 548 \text{ cm}$$

Il manque la largeur.

On schématisera la vue de côté de l'abri par la figure suivante :



Le triangle ADB est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$BD = 306,6 - 219,3 = 87,3 \text{ cm}$$

$$AB^2 = 340^2 + 87,3^2 = 123\,221,29$$

$$AB = \sqrt{123\,221,29} \approx 351 \text{ cm}$$

La largeur du rectangle est d'environ 351 cm.

L'aire \mathcal{A} d'un rectangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \text{longueur} \times \text{largeur}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = 351 \times 548 = 192\,348 \text{ cm}^2 \approx 19,2 \text{ m}^2$$

$$12 \times 19,2 = 230,4$$

Il faut 231 tuiles pour couvrir le toit du garage.

2. On cherche la mesure de l'angle \widehat{BAD} . On connaît la mesure des côtés opposé et adjacent et de l'hypoténuse à cet angle. On peut utiliser les trois formules de trigonométrie.

$$\tan \widehat{BAD} = \frac{BD}{AD}$$

$$\tan \widehat{BAD} = \frac{87,3}{340}$$

$$\arctan \left(\frac{87,3}{340} \right) \approx 14^\circ \text{ ou } \cos \widehat{BAD} = \frac{AD}{AB}.$$

$$\cos \widehat{BAD} = \frac{340}{351}$$

$$\arccos \left(\frac{340}{351} \right) \approx 14^\circ$$

$$\text{ou } \sin \widehat{BAD} = \frac{BD}{AB}$$

$$\sin \widehat{BAD} = \frac{87,3}{351}$$

$$\arcsin \left(\frac{87,3}{351} \right) \approx 14^\circ$$

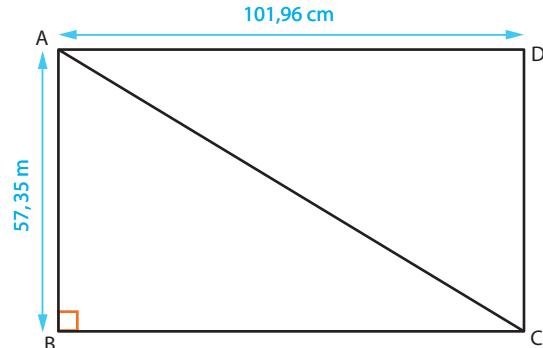
L'angle \widehat{BAD} mesure environ 14° . La construction est conforme, car l'angle ne dépasse pas 17° .

31

Bien regarder la télévision

Coup de pouce : faire un schéma.

On schématisera la situation avec la figure suivante : ABCD représente l'écran de télévision.



On cherche la longueur de la diagonale du rectangle ABCD. Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 57,35^2 + 101,96^2 = 13\,684,864 \text{ 1}$$

$$AC = \sqrt{13\,684,864} \approx 117 \text{ cm}$$

La diagonale de l'écran mesure environ 117 cm.

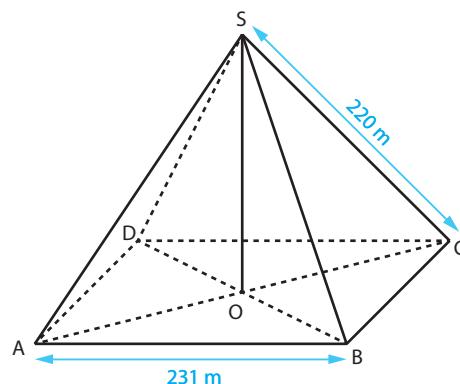
La distance entre l'écran et le canapé doit être de $117 \times 2,5 = 292,5$ cm environ.

32

La pyramide de Khéops

Coup de pouce : faire un schéma.

On schématisera la situation avec la figure suivante :



Le triangle ABC est rectangle en B, car ABCD est un carré.

On utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 231^2 + 231^2 = 106\,722$$

$$AC = \sqrt{106\,722} \approx 326,7 \text{ m}$$

Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu donc $AO = OC = 326,7 \div 2 = 163,35 \text{ m}$.

Le triangle SOC est rectangle en O. On utilise le théorème de Pythagore :

$$SC^2 = SO^2 + OC^2$$

$$220^2 = SO^2 + 163,35^2$$

$$SO^2 = 220^2 - 163,35^2 = 21\,716,777 \text{ 5}$$

$$SO = \sqrt{21\,716,777} \approx 147,4 \text{ m}$$

La hauteur de la pyramide est d'environ 147,4 m.

La difficulté est de bien distinguer le triangle rectangle dans lequel on travaille.

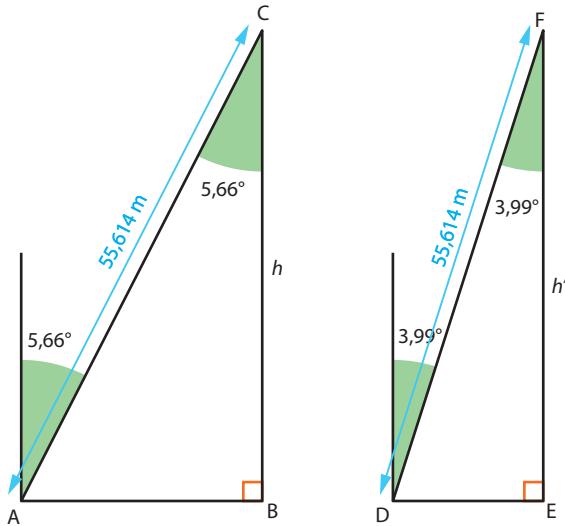
33

Tour de Pise

Coup de pouce : faire un schéma.

Il faut bien évidemment comprendre que les angles d'inclinaison sont donnés par rapport à la verticale.

On schématise la situation avec les figures ci-après.



Sur chaque figure, les angles verts sont alternes-internes, déterminés par une sécante et deux droites parallèles, donc de même mesure.

Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de trigonométrie. On connaît la mesure de l'angle \widehat{ACB} et la longueur de l'hypoténuse. On cherche le côté adjacent à \widehat{ACB} ; on utilise donc le cosinus.

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} \quad \cos 5,66^\circ = \frac{h}{55,614}$$

$$h = 55,614 \times \cos 5,66^\circ \approx 55,34 \text{ m}$$

Le triangle DEF est rectangle en E. On utilise les formules de trigonométrie. On connaît la mesure de l'angle \widehat{DFE} et la longueur de l'hypoténuse. On cherche le côté adjacent à \widehat{DFE} ; on utilise donc le cosinus.

$$\cos \widehat{DFE} = \frac{FE}{DF} \quad \cos 3,99^\circ = \frac{h'}{55,614}$$

$$h' = 55,614 \times \cos 3,99^\circ \approx 55,48 \text{ m}$$

$$55,48 - 55,34 = 0,14 \text{ m} = 14 \text{ cm}$$

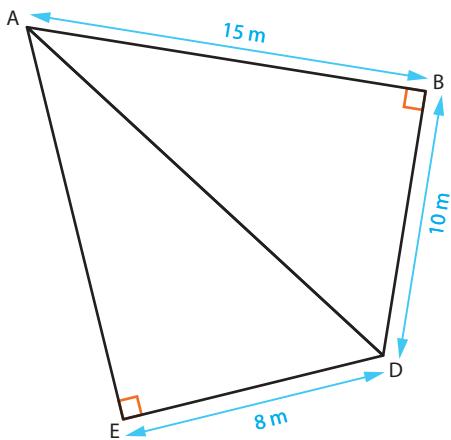
La hauteur de la tour par rapport au sol a augmenté d'environ 14 cm.

34 Zone inaccessible

Cet exercice permet de retravailler le théorème de Pythagore dans un problème à deux étapes.

On pourra faire remarquer l'intérêt de garder les valeurs exactes de la racine carrée.

Coup de pouce : trouver d'abord AE.



Le triangle ABD est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$AD^2 = 15^2 + 10^2$$

$$AD^2 = 325$$

$$AD = \sqrt{325} \approx 18 \text{ m}$$

Le triangle AED est rectangle en E. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AE^2 + ED^2$$

$$AE^2 = AD^2 - ED^2$$

$$AE^2 = 18^2 - 8^2 = 260$$

$$AE = \sqrt{260} \approx 16,1 \text{ m}$$

La distance entre les deux arbres est d'environ 16,1 m.

Pour plus de précision, on peut aussi remplacer AD^2 par sa valeur exacte 325, on obtient alors :

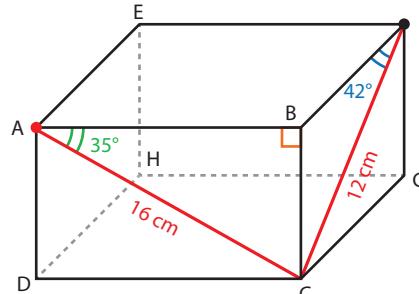
$$AE^2 = 325 - 8^2$$

$$AE^2 = 325 - 64 = 261$$

$$AE = \sqrt{261} \approx 16,2 \text{ m}$$

35 Coccinelle et fourmi

Cet exercice permet de travailler la visualisation dans l'espace.



Le chemin le plus court entre la coccinelle en A et la fourmi en F est le segment [AF].

Il faut donc trouver les longueurs AB et BF pour ensuite trouver la longueur AF.

Le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \quad \cos 35^\circ = \frac{AB}{16}$$

$$AB = 16 \times \cos 35^\circ \approx 13,1 \text{ cm}$$

Le triangle FBC est rectangle en B, on a :

$$\cos \widehat{BFC} = \frac{FB}{FC} \quad \cos 42^\circ = \frac{FB}{12}$$

$$FB = 12 \times \cos 42^\circ \approx 8,9 \text{ cm}$$

Le triangle ABF est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AF^2 = AB^2 + BF^2$$

$$AF^2 = 13,1^2 + 8,9^2$$

$$AF^2 = 250,82$$

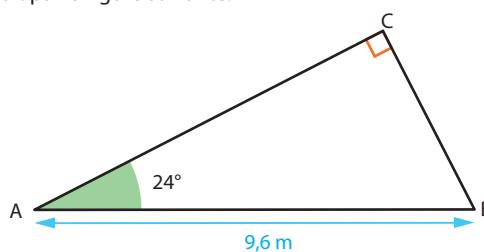
$$AF = \sqrt{250,82}$$

$$AF \approx 15,8 \text{ cm}$$

La distance la plus courte entre les deux est donc d'environ 15,8 cm.

36 Panneaux solaires

On cherche la largeur du toit. On représente une vue de droite du toit par la figure suivante.



ABC est un triangle rectangle en C, on a :

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos 24^\circ = \frac{AC}{9,6}$$

$$AC = 9,6 \times \cos 24^\circ \approx 8,77 \text{ m}$$

Attention à ne pas donner une valeur approchée par excès !

Le toit est donc un rectangle de 1 400 cm sur 877 cm. On veut mettre un maximum de panneaux rectangulaires de 150 cm sur 80 cm.

Première possibilité :

$$1 400 \div 150 \approx 9,3$$

$$877 \div 80 \approx 10,9$$

On peut donc mettre 9 panneaux sur la longueur et 10 sur la largeur, soit un total de $9 \times 10 = 90$ panneaux.

Seconde possibilité :

$$1400 \div 80 = 17,5$$

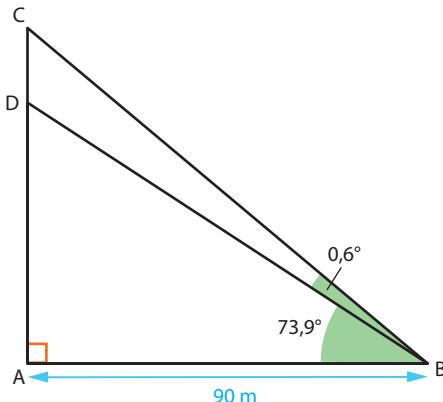
$$877 \div 150 \approx 5,8$$

On peut donc mettre 17 panneaux sur la longueur et 5 sur la largeur, soit un total de $17 \times 5 = 85$ panneaux.

C'est la première solution qui permet de poser le maximum de panneaux solaires sur le toit, soit 90 panneaux. Les panneaux sont alors placés en mode « portrait » sur le toit.

37 The Eiffel Tower

Cet exercice peut permettre de montrer l'importance de la précision dans les mesures d'angles.



Coup de pouce : il faut trouver la longueur AD et AC, pour ensuite déterminer DC.

Le triangle ABC est rectangle en A, on cherche la longueur AD.

$$\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB} \quad \tan 73,9^\circ = \frac{AD}{90}$$

$$AD = 90 \times \tan 73,9^\circ \approx 311,8 \text{ m}$$

On cherche maintenant la longueur AC :

$$\widehat{ABC} = 73,9^\circ + 0,6^\circ = 74,5^\circ$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \quad \tan 74,5^\circ = \frac{AC}{90}$$

$$AC = 90 \times \tan 74,5^\circ \approx 324,5 \text{ m}$$

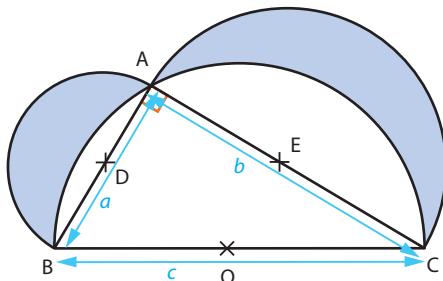
$$DC = AC - AD$$

$$DC = 324,5 - 311,8 = 12,7 \text{ m}$$

L'antenne de la tour Eiffel mesure environ 12,7 m.

38 Les lunules d'Hippocrate

Cet exercice permet de voir une propriété connue des mathématiciens en faisant réviser les formules de l'aire d'un disque et d'un triangle tout en utilisant le calcul littéral. On pourra apporter des coups de pouce en décomposant les étapes du raisonnement.



L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \pi R^2.$$

L'aire du demi-disque blanc de centre O et de rayon $\frac{c}{2}$ est :

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi \frac{c^2}{4} = \frac{\pi c^2}{8}.$$

L'aire du demi-disque de centre D et de rayon $\frac{a}{2}$ est :

$$\mathcal{A}_a = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

L'aire du demi-disque blanc de centre E et de rayon $\frac{b}{2}$ est :

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi \frac{b^2}{4} = \frac{\pi b^2}{8}.$$

L'aire d'un triangle est donnée par la formule : produit des longueurs des deux côtés de l'angle droit divisé par 2.

L'aire du triangle ABC rectangle en A est égale à :

$$\mathcal{A} = \frac{a \times b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

L'aire des deux lunules bleues est égale à :

Aire du demi-disque de centre D et de diamètre a + aire du demi-disque de centre E et de diamètre b + aire de ABC – aire du demi-disque blanc de centre O et de diamètre c , soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{lunules}} &= \mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b - \mathcal{A}_c \\ \mathcal{A}_{\text{lunules}} &= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{ab}{2} - \frac{\pi c^2}{8} \\ \mathcal{A}_{\text{lunules}} &= \frac{\pi(a^2 + b^2 - c^2)}{8} + \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Or le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :

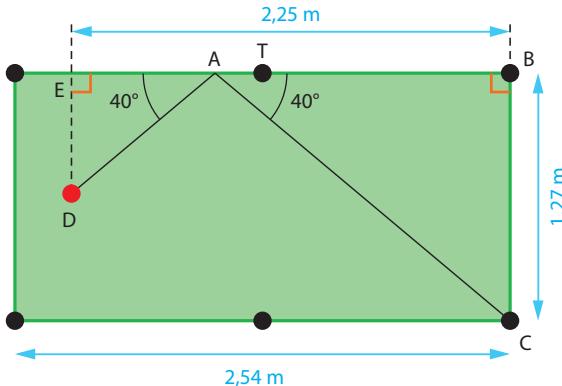
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ donc } a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$\text{On obtient ainsi : } \mathcal{A}_{\text{lunules}} = \frac{ab}{2}$$

L'aire des deux lunules d'Hippocrate est donc égale à l'aire du triangle rectangle.

39 Le billard



Le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} \quad \tan 40^\circ = \frac{1,27}{AB}$$

$$AB = \frac{1,27}{\tan 40^\circ} \approx 1,51 \text{ m}$$

T désigne le trou du milieu.

$$TA = AB - TB$$

$$\text{Or } TB = 2,54 \div 2 = 1,27 \text{ m}$$

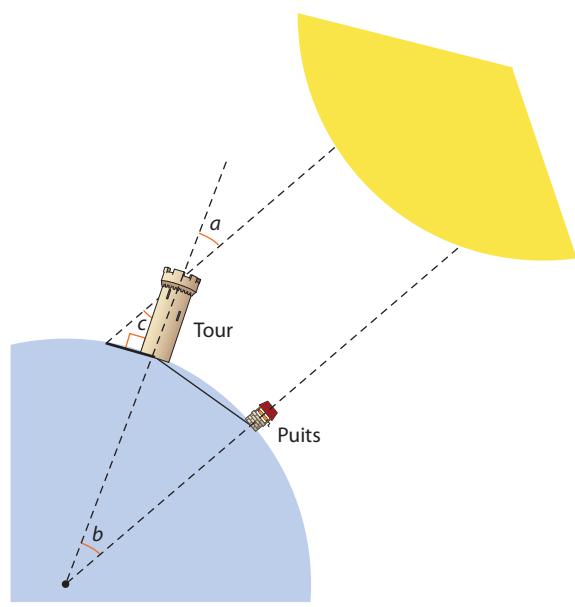
$$\text{Donc } TA \approx 1,51 - 1,27$$

$$TA \approx 0,24 \text{ m}$$

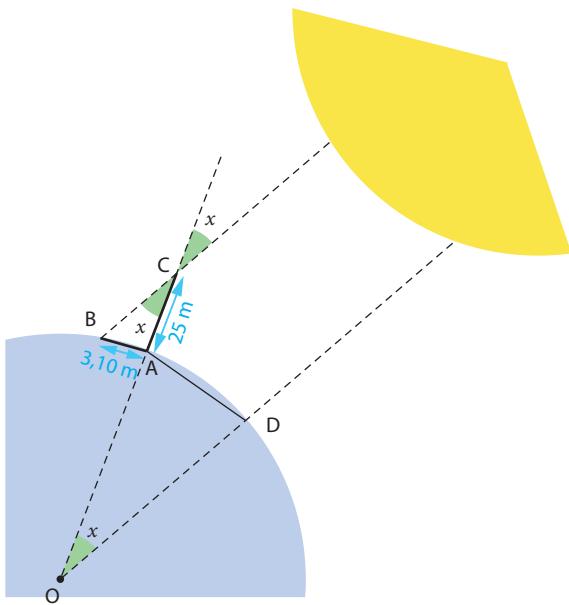
Justine doit taper avec sa boule de billard à 24 cm du trou du milieu pour faire rentrer sa boule.

40 Le périmètre de la Terre

Dans ce problème, on utilise la propriété des angles alternes-internes et le calcul de la longueur d'un arc de cercle.



On considère que les rayons du Soleil sont parallèles.
Les angles a et c sont symétriques par rapport à un point donc de même mesure.
Les angles b et c sont deux angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles et une sécante donc ils ont la même mesure.
Ainsi les trois angles a , b et c ont la même mesure, qu'on notera x .



Le triangle ABC est rectangle en A.

$AB = 3,1$ m et $AC = 25$ m.

On a donc :

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{3,1}{25}$$

$$x = \widehat{BCA} \approx 7,1^\circ$$

On connaît la longueur du petit arc de cercle d'extrémités A et D qui est de 800 km.

Il y a proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle correspondant.

Mesure de l'angle (en °)	360	7,1
Longueur de l'arc correspondant (en km)	y	800

À l'aide des produits en croix, on trouve :

$$y = \frac{360 \times 800}{7,1} \approx 40\,563 \text{ km}$$

Le périmètre de la Terre trouvée par Ératosthène est d'environ 40 563 km.

Le périmètre réel est de 40 075 km ; Ératosthène avait donc trouvé une valeur très approchée de ce périmètre correcte. Les erreurs peuvent venir de plusieurs sources, mesure de la distance entre les deux villes, approximation de la forme de la Terre...
On peut également trouver une valeur approchée du rayon de la Terre.
La longueur d'un cercle de rayon R étant donnée par la formule $2 \times \pi \times R$, on trouve un rayon d'environ $40\,563 \div 2\pi \approx 6\,455$ km.

41 Courbes de niveaux

Il faut mesurer la distance entre A et B sur le dessin, on obtient 1,7 cm.

On a le tableau de proportionnalité suivant :

Distance sur le dessin (en cm)	0,8	1,7
Distance réelle (en m)	50	x

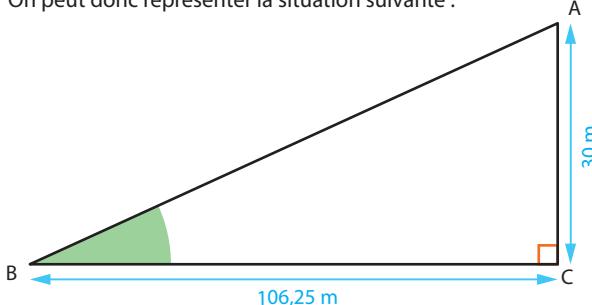
La distance horizontale entre A et B est donc

$$d = \frac{50 \times 1,7}{0,8} = 106,25 \text{ m.}$$

On cherche l'altitude des points A et B.

A est à 150 m d'altitude, B est à 120 m d'altitude, d'après les lignes de niveau.

Le dénivelé entre les deux points est de $150 - 120 = 30$ m.
On peut donc représenter la situation suivante :



Le triangle ABC est rectangle en C, on a :

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

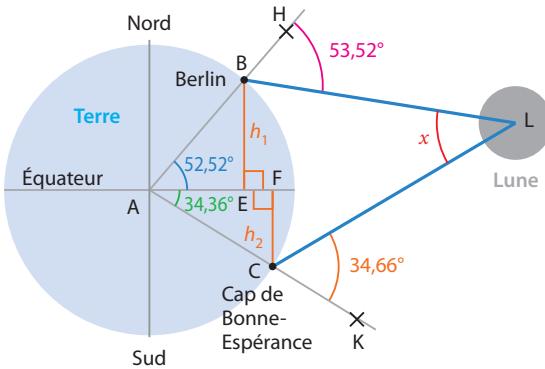
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{30}{106,25}$$

$$\widehat{ABC} \approx 16^\circ$$

L'angle d'inclinaison est donc de 16° environ.

42 La distance Terre-Lune

1.



Coup de pouce : on cherche les mesures des angles du quadrilatère ABCL.

\widehat{ABH} est un angle plat, on a donc :

$$\widehat{ABL} = 180^\circ - 53,52^\circ = 126,48^\circ.$$

De la même manière, $\widehat{ACL} = 180^\circ - 34,66^\circ = 145,34^\circ$.

On sait que $\widehat{BAC} = 52,52^\circ + 34,36^\circ = 86,88^\circ$.

La somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360° , donc :

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= 360^\circ - \widehat{ABL} - \widehat{BAC} - \widehat{ACL} \\ &= 360^\circ - 126,48^\circ - 86,88^\circ - 145,34^\circ = 1,3^\circ \end{aligned}$$

2. Dans la figure précédente, on a :

- ABE triangle rectangle en E, on peut utiliser les formules de trigonométrie :

$$\sin \widehat{BAE} = \frac{BE}{AB}$$

AB est un rayon de la Terre, on a donc :

$$h_1 = BE = AB \times \sin \widehat{BAE} = 6\,370 \times \sin 52,52^\circ \approx 5\,055,01 \text{ km}$$

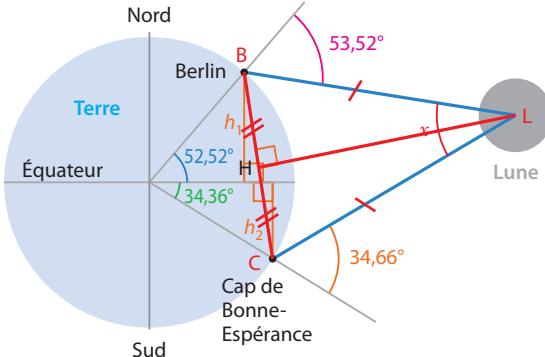
- ACF triangle rectangle en F, on peut utiliser les formules de trigonométrie :

$$\sin \widehat{CAF} = \frac{CF}{AC}$$

AC est un rayon de la Terre, on a donc :

$$h_2 = CF = AC \times \sin \widehat{CAF} = 6\,370 \times \sin 34,36^\circ \approx 3\,595,2 \text{ km}$$

On a posé que $BC = h_1 + h_2 = 5\,055 + 3\,595 = 8\,650,21 \text{ km}$.



Le triangle BCL est considéré isocèle en L, il possède donc un axe de symétrie passant par L qui est aussi une hauteur du triangle et une bissectrice de l'angle \widehat{x} .

Le triangle BHL est rectangle en H.

On a donc :

$$\tan \widehat{BLH} = \frac{BH}{HL}$$

$$HL = \frac{BH}{\tan \widehat{BHL}} = \frac{8\,650,21 \div 2}{\tan(1,3^\circ \div 2)} = \frac{4\,325,105}{\tan 0,65^\circ} \approx 381\,230 \text{ km}$$

On trouve une distance d'environ 381 230 km entre la Terre et la Lune.

En réalité, cette distance est de 384 400 km. On remarque que cette méthode de calcul est donc assez précise.

Brevet

43 Le passage piéton

Si Julien passe par le passage piéton, il parcourt $8 + 15 = 23$ m.

S'il traverse la route du point J au point F :

FKJ est un triangle rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$FJ^2 = FK^2 + KJ^2$$

$$FJ^2 = 8^2 + 15^2$$

$$FJ^2 = 64 + 225 = 289$$

$$FJ = \sqrt{289} \approx 17 \text{ m}$$

$23 - 17 = 6$ m, il a gagné 6 m.

$v = 10 \text{ m/s}$

Distance (en m)	10	6
Temps (en s)	9	t

$$t = \frac{6 \times 9}{10} = 5,4 \text{ s} ; \text{ il a gagné } 5,4 \text{ s.}$$

On peut aussi calculer le temps qu'il met s'il traverse sur le passage piéton : $t = \frac{23 \times 9}{10} = 20,7 \text{ s.}$

Puis le temps qu'il met s'il traverse imprudemment :

$$t' = \frac{17 \times 9}{10} = 15,3 \text{ s.}$$

$$20,7 - 15,3 = 5,4$$

On retrouve le même résultat ; il a gagné 5,4 s.

44 Panneaux routiers

1. Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de trigonométrie :

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} \quad \tan \widehat{BCA} = \frac{10}{100}$$

donc $\widehat{BCA} \approx 6^\circ$

2. On a $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, c'est-à-dire 20 %.

C'est le panneau B qui indique la pente la plus forte.

45 Trottoir roulant

Le triangle PCH est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PC^2 = CH^2 + PH^2$$

$$PC^2 = 25^2 + 4^2 = 625 + 16 = 641$$

$$PC = \sqrt{641} \approx 25,318 \text{ m}$$

D'après les formules de trigonométrie, on a :

Modèle 1 :

$$\tan \widehat{CPH} = \frac{CH}{CP} = \frac{4}{25}$$

$$\widehat{CPH} \approx 9^\circ$$

Pour le modèle 1, l'angle de 9° est bon.

Pour parcourir la pente, il faut :

$$t = \frac{25,318}{0,5} \approx 50,6 \text{ s} < 1 \text{ min}$$

Le modèle 1 convient.

Le modèle 2 ne convient pas, l'angle d'inclinaison est trop grand.

46 Les arbres

1. Le triangle OAS est rectangle en A, on a :

$$\tan \widehat{AOS} = \frac{AS}{OA} \quad \tan 45^\circ = \frac{AS}{15}$$

$$AS = 15 \times \tan 45^\circ = 15 \text{ m}$$

Le triangle APO est rectangle en A, on a :

$$\tan \widehat{OAP} = \frac{AP}{OA} \quad \tan 25^\circ = \frac{AP}{15}$$

$$AP = 15 \times \tan 25^\circ$$

$$AP \approx 7 \text{ m}$$

$$\text{Donc } h = SA + AP = 22 \text{ m.}$$

L'arbre mesure environ 22 m.

2. a. En M2, il faut écrire la formule =SOMME(B2:L2)

$$d = \frac{30 \times 2 + 35 \times 4 + 40 \times 8 + 50 \times 10 + 55 \times 12 + 60 \times 14 + 65 \times 15 + 70 \times 11 + 80 \times 3}{2 + 4 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 11 + 4 + 3} = \frac{5210}{92} \approx 57 \text{ cm}$$

Le diamètre moyen du lot est d'environ 57 cm = 0,57 m.

3. On calcule le volume commercial des 92 pins :

$$92 \times \frac{10}{24} \times 0,57^2 \times 22 = 273,999 \text{ m}^3$$

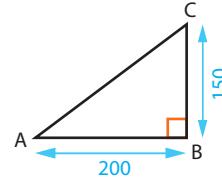
$$70 \times 273,999 = 19\,179,93$$

La vente rapportera environ 19 180 €.

Algorithmique et outils numériques

47 Construction de triangle

1. et 2.



Le premier angle correspond à l'angle droit \widehat{B} , soit 90° . Il faut donc compléter les premiers pointillés par :

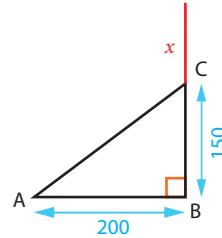
tourner de 90 degrés

Le deuxième angle est l'angle \widehat{C} .
ABC est un triangle rectangle.

$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{200}{150}$$

Attention, le lutin doit tourner d'un angle de valeur x :



C'est-à-dire $180^\circ - \widehat{C}$.

Il faut donc compléter les deuxièmes pointillés par :

tourner de 180 - atan de 200 / 150 degrés

Il faut ensuite avancer de la longueur AC.

ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 200^2 + 150^2$$

$$AC^2 = 40\,000 + 22\,500$$

$$AC^2 = 62\,500$$

$$AC = \sqrt{62\,500}$$

$$AC = 250$$

Il faut donc compléter les troisièmes pointillés par :

avancer de 250

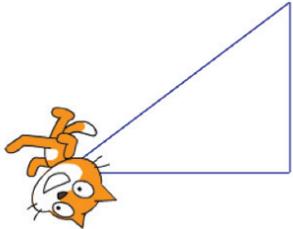
Voici le programme complété :

```

quand  cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 200
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de 150
tourner ⚡ de 180 - atan de 200 / 150 degrés
avancer de 250

```

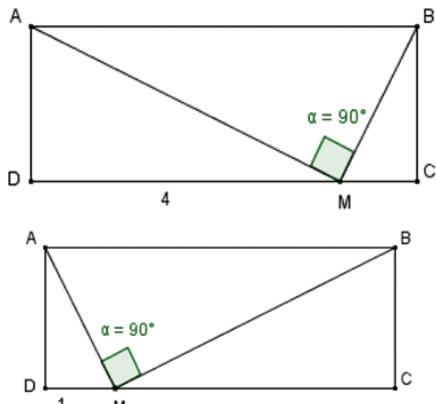
On vérifie qu'on obtient bien la figure souhaitée :



48 Triangle rectangle

1. On trace un rectangle ADCB de longueur 5 et de largeur 2. On place sur [DC] un point M. On trace les segments [AM] et [MB]. On affiche la mesure de l'angle \widehat{AMB} et la longueur DM.

On bouge le point M pour que \widehat{AMB} soit rectangle en M, c'est-à-dire pour que \widehat{AMB} mesure 90° . On note alors qu'il existe deux positions du point M : lorsque $DM = 4$ ou $DM = 1$.



2. On note $DM = x$.

D'après le théorème de Pythagore :

Dans ADM rectangle en D :

$$\begin{aligned} AM^2 &= DM^2 + AD^2 \\ AM^2 &= x^2 + 2^2 \\ AM^2 &= x^2 + 4 \end{aligned}$$

Dans MBC rectangle en C :

$$\begin{aligned} MB^2 &= MC^2 + BC^2 \\ MB^2 &= (5-x)^2 + 2^2 \\ MB^2 &= (5-x)^2 + 4 \end{aligned}$$

On saisit dans la feuille de calcul les formules suivantes :

Dans B2 := A2*A2+4, dans C2 := (5-A2)*(5-A2)+4 et dans D2 := B2+C2.

Pour afficher les valeurs de 0 à 5 dans la colonne A, de 0,5 en 0,5 : soit on saisit 0 dans A1, puis la formule =A1+0,5 dans A2 puis on étire la formule jusqu'en A12, soit on saisit 0 dans A1 et 0,5 dans A2, on sélectionne A1 et A2 puis on étire jusqu'en A12.

On obtient :

	A	B	C	D
1	DM (en cm)	AM ²	MB ²	AM ² +MB ²
2	0	4	29	33
3	0,5	4,25	24,25	28,5
4	1	5	20	25
5	1,5	6,25	16,25	22,5
6	2	8	13	21
7	2,5	10,25	10,25	20,5
8	3	13	8	21
9	3,5	16,25	6,25	22,5
10	4	20	5	25
11	4,5	24,25	4,25	28,5
12	5	29	4	33

On cherche pour quelles valeurs de $DM = x$ (dans la colonne A), la valeur présente dans la colonne D est égale à $AB^2 = 25$ pour que l'égalité de Pythagore soit vérifiée et que le triangle AMB soit rectangle en M.

On trouve grâce aux lignes 4 et 10 que $x = DM = 1$ ou 4 .

Le résultat est bien vérifié.

49 Tableur et fonctions trigonométriques

Dans les cellules B5, B6 et B7, il faut saisir respectivement les formules : =B1/B3, =B2/B3 et =B2/B1.

Dans les cellules D5, D6 et D7, il faut saisir respectivement les formules : =B2/B3, =B1/B3 et =B1/B2.

On obtient alors :

	A	B	C	D
1	AB		3	
2	AC		4	
3	BC		5	
4				
5	$\cos \widehat{B}$	0,6	$\cos \widehat{C}$	0,8
6	$\sin \widehat{B}$	0,8	$\sin \widehat{C}$	0,6
7	$\tan \widehat{B}$	1,33333333	$\tan \widehat{C}$	0,75

50 Tables trigonométriques

1. Dans la cellule C2, il faut saisir la formule = RACINE(1-B2*B2) (car $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$) et dans la cellule D2 := C2/B2 (car

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}). On obtient alors la feuille de calcul suivante :$$

	A	B	C	D
1	\widehat{A}	$\cos \widehat{A}$	$\sin \widehat{A}$	$\tan \widehat{A}$
2	5	0,9961947	0,08715574	0,08748866
3	10	0,9840775	0,17364818	0,17632698
4	15	0,96592583	0,25881905	0,26794919
5	20	0,93969262	0,34202014	0,36397023
6	25	0,90630779	0,42261826	0,46630766
7	30	0,8660254	0,5	0,57735027
8	35	0,81915204	0,57357644	0,70020754
9	40	0,76604444	0,64278761	0,83909963
10	45	0,70710678	0,70710678	1
11	50	0,64278761	0,76604444	1,19175359
12	55	0,57357644	0,81915204	1,42814801
13	60	0,5	0,8660254	1,73205081
14	65	0,42261826	0,90630779	2,14450692
15	70	0,34202014	0,93969262	2,74747742
16	75	0,25881905	0,96592583	3,73205081
17	80	0,17364818	0,9840775	5,67128182
18	85	0,08715574	0,9961947	11,4300523

2. Dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC}$$

Donc $\sin 42^\circ = \frac{BC}{7}$, ainsi $BC = 7 \times \sin 42^\circ$.

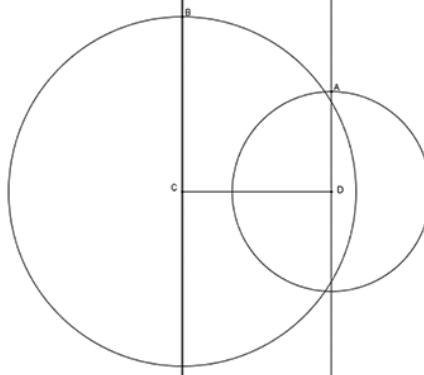
D'après le tableau de la question 1. :

$$0,642\,787\,61 < \sin 42^\circ < 0,707\,106\,78$$

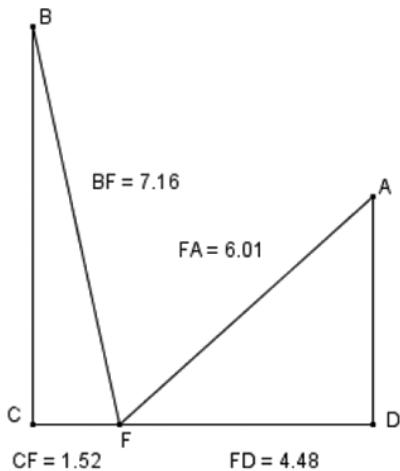
donc $4,49 \text{ cm} < BC < 4,94 \text{ cm}$.

51 Les deux tours

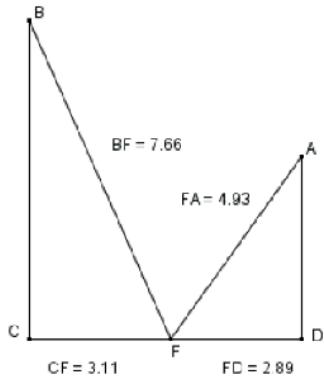
1. On trace un segment [CD] de longueur 6. On trace un segment [CB] perpendiculaire à [CD] et de longueur 7, puis un segment [DA] perpendiculaire à [CD] et de longueur 4.



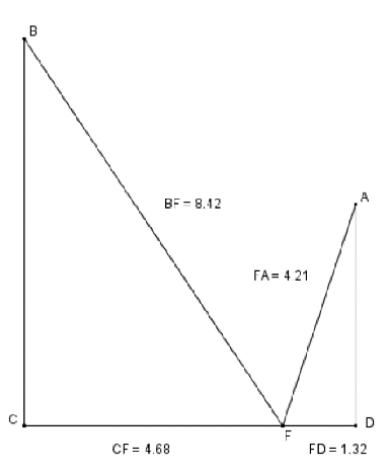
On place un point libre F sur [CD], on trace [BF] et [AF], puis on affiche les longueurs CF, DF, AF et FB. On efface les objets inutiles.



On ouvre ensuite le tableur et on affiche dans la cellule A1 la longueur BF (soit BF) et dans la cellule B1 la longueur 2AF (soit $2 \times AF$).



On déplace F sur [CD] de sorte que $BF = 2AF$ et on note alors les longueurs CF et DF correspondantes.



On trouve que la fontaine est à 46,8 toises de la tour de 70 toises de hauteur et à 13,2 toises de la tour de 40 toises.

2. Soit d la distance en toises entre la tour de 70 m de hauteur et la fontaine.

Le triangle BCF est rectangle en C.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BF^2 &= BC^2 + CF^2 \\ BF^2 &= 70^2 + d^2 \\ BF &= \sqrt{70^2 + d^2} = \sqrt{4900 + d^2} \end{aligned}$$

De même :

Le triangle AFD est rectangle en D.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AF^2 &= AD^2 + DF^2 \\ AF^2 &= 40^2 + (60 - d)^2 \\ AF &= \sqrt{40^2 + (60 - d)^2} = \sqrt{1600 + (60 - d)^2} \end{aligned}$$

On souhaite que $BF = 2AF$.

On va donc faire varier d de 1 en 1 dans la colonne A, afficher BF dans la colonne B et 2AF dans la colonne C.

On saisit en cellule B2 la formule « =RACINE(4900+A2*A2) » et dans la cellule C2 la formule :

« =2*RACINE(1600+(60-A2)*(60-A2)) ».

	A	B	C
1	d (en toises)	BF (en toises)	2AF (en toises)
2	0	70	144,222051
3	1	70,00714249	142,5622671
4	2	70,0285656	140,9113196
5	3	70,06425622	139,2695229
6	4	70,11419257	137,6372043
7	5	70,17834424	136,0147051
8	6	70,25667228	134,4023809
9	7	70,34912935	132,8006024
10	8	70,45565982	131,2097557
11	9	70,57619995	129,6302434
12	10	70,71067812	128,0624847
13	11	70,85901495	126,5069168
14	12	71,02112362	124,9639948
15	13	71,19691005	123,434193
16	14	71,38627319	121,9180052
17	15	71,58910532	120,4159458
18	16	71,80529228	118,92855
19	17	72,03471385	117,4563749
20	18	72,277244	116
21	19	72,53275122	114,5600279
22	20	72,80109889	113,137085
23	21	73,08214556	111,7318218
24	22	73,37574531	110,3449138
25	23	73,68174808	108,9770618
26	24	74	107,6289924
27	25	74,33034374	106,3014581
28	26	74,67261881	104,995238
29	27	75,02666193	103,7111373
30	28	75,3923073	102,4499878
31	29	75,76938696	101,2126474
32	30	76,15773106	100
33	31	76,55716818	98,81295462
34	32	76,96752562	97,65244493
35	33	77,38862966	96,5194281
36	34	77,82030583	95,41488354
37	35	78,26237921	94,33981132
38	36	78,71467462	93,29523032
39	37	79,17701687	92,28217596
40	38	79,64923101	91,30169768
41	39	80,13114251	90,35485598
42	40	80,62257748	89,4427191
43	41	81,12336285	88,5663593
44	42	81,63332653	87,7268488
45	43	82,15229759	86,92525525
46	44	82,68010643	86,16263691
47	45	83,21658489	85,44003745
48	46	83,76156637	84,7584804
49	47	84,31488599	84,11896338
50	48	84,8763807	83,52245207
51	49	85,44588931	82,96987405
52	50	86,02325267	82,46211251
53	51	86,60831369	82

Grâce aux lignes 48 et 49 de cette feuille de calcul, on trouve que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est comprise entre 46 et 47 toises.

On reprend la même feuille de calcul en faisant varier d entre 46 et 47 toises, de 0,1 en 0,1, par exemple. On obtient alors :

	A	B	C
1	d (en toises)	BF (en toises)	2AF (en toises)
2	46	83,76156637	84,7584804
3	46,1	83,81652582	84,69262069
4	46,2	83,87156848	84,62718239
5	46,3	83,9266942	84,56216648
6	46,4	83,98190281	84,49757393
7	46,5	84,03719415	84,43340571
8	46,6	84,09256804	84,36966279
9	46,7	84,14802434	84,30634614
10	46,8	84,20356287	84,24345672
11	46,9	84,25918348	84,18099548
12	47	84,31488599	84,11896338

On trouve alors que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est égale à environ 46,8 toises et donc celle entre le sommet de la tour la plus basse et la fontaine est d'environ $60 - 46,8 = 13,2$ toises.

On retrouve le même résultat que précédemment.

On peut recommencer avec plus de précision et faire varier d entre 46,8 et 46,9 de 0,01 en 0,01 (voir feuille de calcul page suivante) :

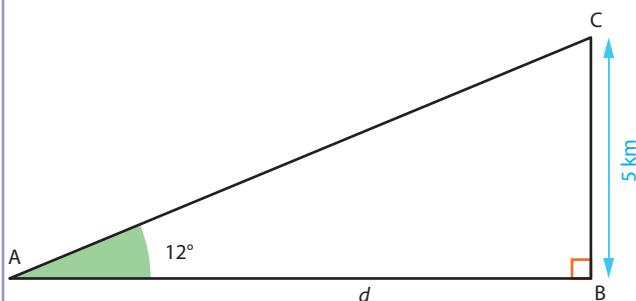
	A	B	C
1	d (en toises)	BF (en toises)	2AF (en toises)
2	46,8	84,20356287	84,24345672
3	46,81	84,20912124	84,23719131
4	46,82	84,21468043	84,23093019
5	46,83	84,22024044	84,22467334
6	46,84	84,22580127	84,21842079
7	46,85	84,23136292	84,21217252
8	46,86	84,23692539	84,20592853
9	46,87	84,24248869	84,19968884
10	46,88	84,2480528	84,19345343
11	46,89	84,25361773	84,18722231
12	46,9	84,25918348	84,18099548

On trouve alors que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est égale à environ 46,83 toises.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1



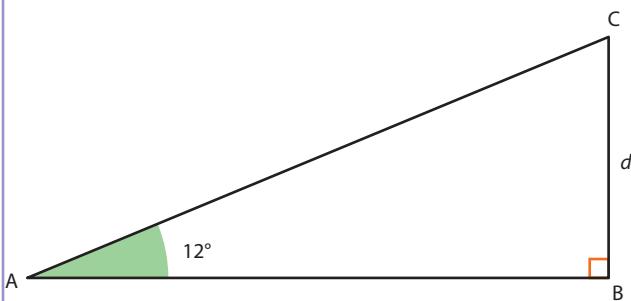
Le triangle CAB est rectangle en B. On a :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \quad \tan 12^\circ = \frac{5}{d}$$

$$d = \frac{5}{\tan 12^\circ} \approx 23,5 \text{ km}$$

L'avion a parcouru 23,5 km environ depuis le décollage.

Exercice 1



On cherche la distance AC :

$v = 200 \text{ km/h}$; donc au bout de 15 min, il aura parcouru :

$$15 \times \frac{200}{60} = 50 \text{ km.}$$

Le triangle CAB est rectangle en B. On a :

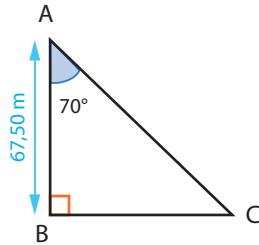
$$\sin \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \quad \sin 12^\circ = \frac{d}{50}$$

$$AB = 50 \times \sin 12^\circ \approx 10,4 \text{ km}$$

L'avion est à une hauteur de 10,4 km environ au bout de 15 min.

Exercice 2

1.



Le triangle ABC est rectangle en B. On a :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \quad \tan 70^\circ = \frac{BC}{67,5}$$

$$BC = 67,5 \times \tan 70^\circ \approx 185,5 \text{ m}$$

Le chaland est à environ 185,5 m du pied du phare.

2. $v = 9 \times 1,852 = 16,668 \text{ km/h}$

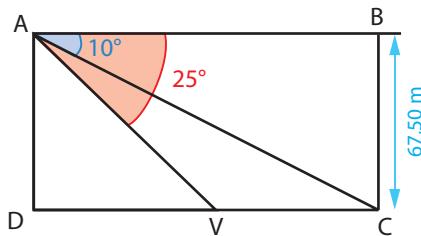
$$= 16,668 \text{ m/3 600 s}$$

$$= 4,63 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{185,5}{4,63} \approx 40$$

Il mettra 40 s pour rejoindre le phare.

Exercice 2



On cherche d'abord la distance entre le chaland et le phare.

Le triangle ABC est rectangle en B. On a :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \quad \tan 10^\circ = \frac{67,5}{AB}$$

$$AB = \frac{67,5}{\tan 10^\circ} \approx 382,8 \text{ m}$$

On cherche maintenant la distance entre le voilier et le phare.

Le triangle ADV est rectangle en D et l'angle \widehat{DAV} a une valeur de $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

$$\tan \widehat{DAV} = \frac{DV}{AD} \quad \tan 65^\circ = \frac{DV}{67,5}$$

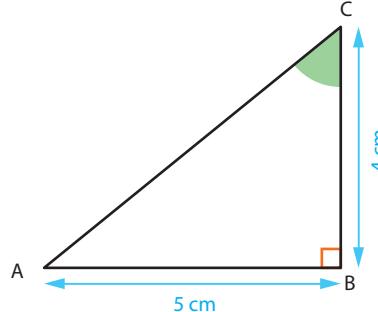
$$DV = 67,5 \times \tan 65^\circ \approx 144,8 \text{ m}$$

$$382,8 - 144,8 = 238 \text{ m}$$

La distance entre le voilier et le chaland est d'environ 238 m.

Exercice 3

On cherche la longueur de la diagonale du rectangle de 5 cm sur 4 cm.



Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$$

$$AC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$

Pour trouver la valeur de l'angle, on utilise les formules de trigonométrie.

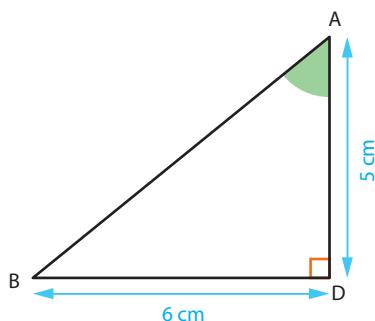
$$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{5}{4}$$

donc $\widehat{ACB} \approx 51^\circ$

Exercice 3

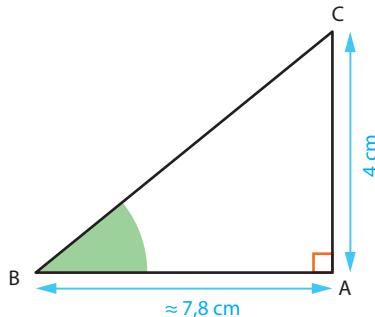
On cherche la longueur de la diagonale du rectangle de 6 cm sur 5 cm.



On cherche d'abord la longueur AB. Le triangle ABD est rectangle en D ; d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}AB^2 &= BD^2 + AD^2 \\AB^2 &= 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61 \\AB &= \sqrt{61} \approx 7,8 \text{ cm}\end{aligned}$$

On cherche maintenant la longueur BC, qui est la diagonale du cube.



Le triangle ABC est rectangle en A ; d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\BC^2 &= 61 + 4^2 = 61 + 16 = 77\end{aligned}$$

On remplace AB^2 par sa valeur exacte, 61 ; on peut aussi remplacer AB par 7,8 qui est une valeur approchée, le calcul sera alors moins précis.

$$BC = \sqrt{77} \approx 8,8 \text{ cm}$$

Dans le triangle ABC, on a :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AH} \quad \tan \widehat{CAB} = \frac{4}{7,8}$$

$$\text{donc } \widehat{CAB} \approx 27^\circ$$

Écriture d'un énoncé

Les élèves peuvent, par exemple, donner une des longueurs du triangle rectangle et demander de calculer une autre longueur.

Analyse d'une production

- Éva n'a pas utilisé la touche « arccos » pour trouver la valeur de l'angle. Elle a donné directement le résultat du quotient et assimilé le cosinus à la valeur de l'angle.
- Jules s'est trompé de formule de trigonométrie. On ne peut pas utiliser la tangente, on ne connaît pas le côté opposé. Il faut utiliser le cosinus de l'angle.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ».

Repères de progressivité

Au cycle 3, les élèves sont passés progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par le recours à des instruments, à une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation. Ils ont appris à reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter et construire des figures et solides usuels ainsi que reconnaître et utiliser quelques relations géométriques (alignement, appartenance, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueur, d'angles, distance entre deux points, symétrie, agrandissement et réduction).

Au cycle 4, un attendu de fin de cycle est d'utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer. Les élèves valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les problèmes de construction occupent une large place, avec les instruments de géométrie comme avec un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation.

Objectifs du chapitre

Le choix a été fait dans ce chapitre de se concentrer plus particulièrement sur le parallélogramme et ses propriétés. On travaille d'abord les constructions, puis on commence l'initiation à la démonstration dans des situations simples et des raisonnements à un pas.

Enfin, les problèmes se situent dans des champs très divers : mathématique, scientifique, technologique ou artistique. Ils permettent aux élèves de faire des constructions plus complexes, en lien avec l'art ou le graphisme. Ils amènent à des raisonnements de plus en plus difficiles et avec davantage de pas.

Dans l'esprit du programme, on pourra donner la priorité aux raisonnements plus qu'à la maîtrise de la démonstration formalisée en ce début de cycle, notamment pour les derniers problèmes, qui peuvent s'avérer difficiles à rédiger correctement pour tous les élèves. Le travail en groupe pourra s'avérer particulièrement propice à des échanges riches entre élèves afin d'améliorer la communication de leurs idées et la rédaction de leurs justifications. Il est également utile de mutualiser les productions entre les groupes et de les commenter de façon constructive.

Activités

Questions flash

- 1.** Lorsque l'on croise deux bandes de papier transparentes de couleur, il se forme un parallélogramme à leur intersection.
2. a. Tous les quadrilatères, sauf le **②** et le **⑨**, semblent avoir leurs côtés opposés parallèles deux à deux.

- b.** Les quadrilatères **①**, **③**, **④** et **⑥** semblent avoir leurs quatre côtés de même longueur.
c. Les quadrilatères **①**, **④**, **⑤** et **⑧** semblent avoir quatre angles droits.

Un quadrilatère connu

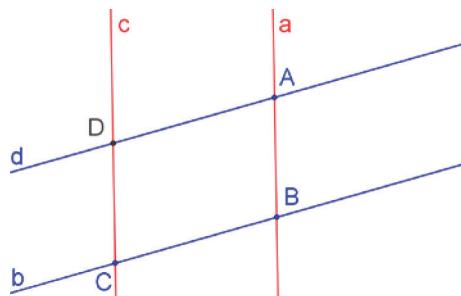
Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de définir un parallélogramme et ses propriétés. Les prérequis nécessaires sont la connaissance et la notion de droites parallèles.

1.

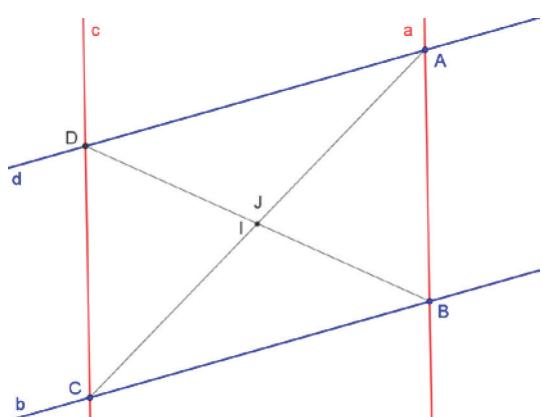
L'objectif est de faire construire un parallélogramme à partir de droites parallèles. L'élève peut faire bouger les points de sa construction et ainsi voir une grande variété de parallélogrammes.



- a.** ABCD est un parallélogramme.
b. Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

2.

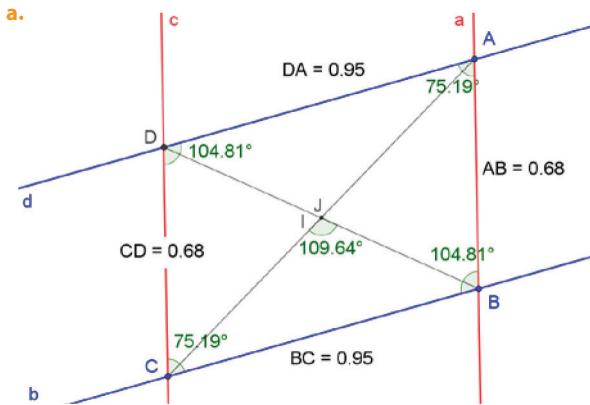
L'objectif est de faire constater aux élèves que les milieux des diagonales sont confondus, quelle que soit la forme du parallélogramme ABCD.



- b.** Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
c. Le milieu des deux diagonales est le centre de symétrie du parallélogramme.

3.

En faisant apparaître les longueurs et les angles, l'élève peut constater que lorsqu'il fait bouger les points, des égalités demeurent vraies.



- b.** Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.

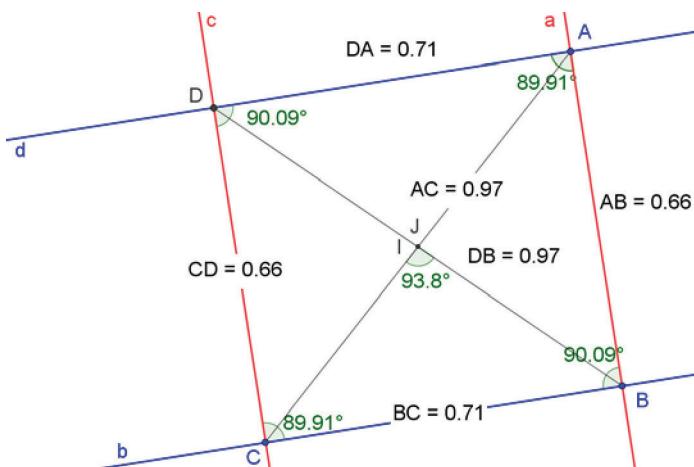
4.

Les élèves auront du mal à obtenir exactement des angles droits. Il faut leur demander une précision au dixième ou même à 0,05° près (réalisable s'ils zooment sur la figure).

Cela ne les empêche pas de conjecturer le lien avec les égalités de longueurs (des diagonales en **a.**, des quatre longueurs des côtés en **b.**).

On peut accepter des formulations du type « un parallélogramme peut être un rectangle, dans ce cas les diagonales semblent être de même longueur ».

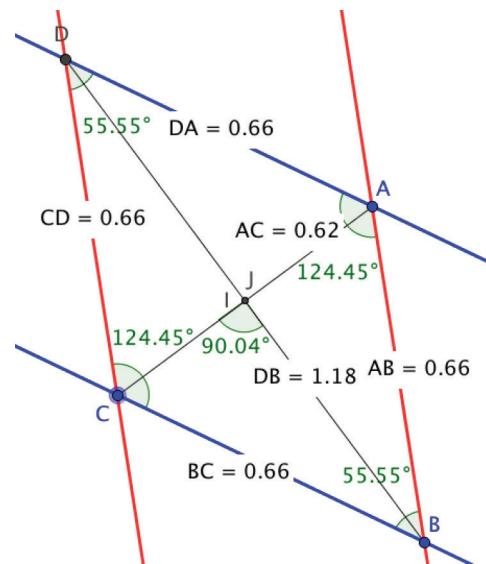
a.



Le rectangle est un parallélogramme, il a les mêmes propriétés mais, en plus, ses diagonales sont de même longueur.

b.

Pour rendre plus lisible la construction, on peut proposer aux élèves de masquer certaines mesures.



Le losange est un parallélogramme, il a les mêmes propriétés mais, en plus, ses diagonales sont perpendiculaires.

Avec ou sans quadrillage

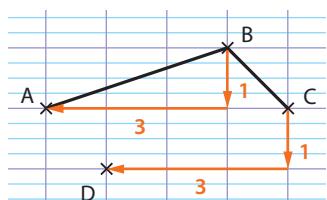
Partie A – Constructions de figures sur un quadrillage

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de permettre aux élèves de travailler le repérage sur un quadrillage afin de construire un parallélogramme.

Les prérequis nécessaires sont d'avoir déjà exploité des quadrillages pour compléter des figures, ce qui a été travaillé au cycle 3, notamment avec la symétrie axiale.

1. et 2.



On a compté les carreaux horizontalement et verticalement pour aller de B vers A et on a reporté de C vers D.

3. On peut voir 30 parallélogrammes (1 de 3 sur 3, 4 de 3 sur 2, 4 de 2 sur 2, 12 de 1 sur 2 et 9 de 1 sur 1).

Activité 2

Partie B – Constructions de figures sur une feuille blanche

Intentions des auteurs

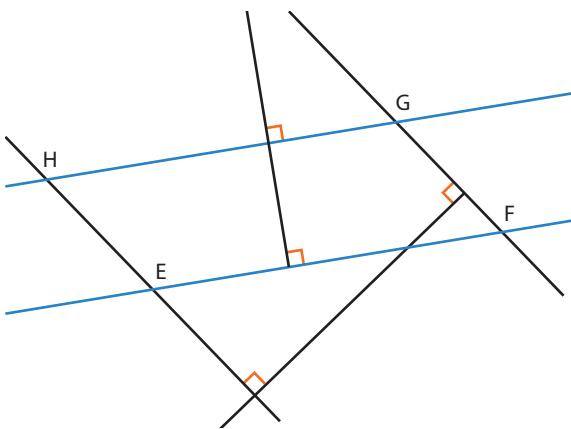
L'objectif de cette activité est de permettre entre autres de rappeler deux propriétés qui peuvent être exploitées dans des démonstrations.

Les prérequis nécessaires sont de savoir construire des parallèles à la règle et à l'équerre (travaillé en cycle 3).

C'est l'occasion de faire écrire deux propriétés sur les parallèles et les perpendiculaires.

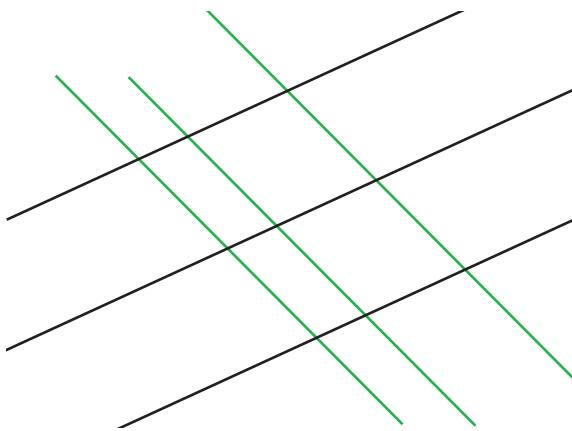
4. et 5.

Propriété 1 : Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.



6. EFGH est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles.

7.



Propriété 2 : Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

On peut tracer 9 parallélogrammes à partir de ces droites.

Des diagonales spéciales

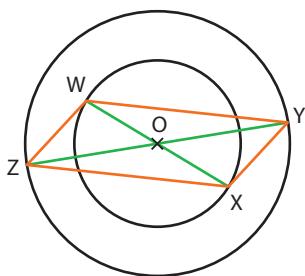
Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la propriété caractéristique du parallélogramme suivante : « Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. »

Les prérequis nécessaires sont de connaître le cercle ainsi que la définition du diamètre.

1. WYZX semble être un parallélogramme.



2.

Les élèves constatent que leurs constructions sont différentes, cependant ils font tous la même conjecture.

On observe la même chose.

3. Formulation de la propriété qui semble se dégager : « Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. »

On peut exploiter la symétrie centrale pour démontrer cette propriété. Pour cela, l'élève doit disposer de la propriété suivante : Deux segments symétriques par rapport à un point sont parallèles.

Pailles et bâtonnets

Activité 4

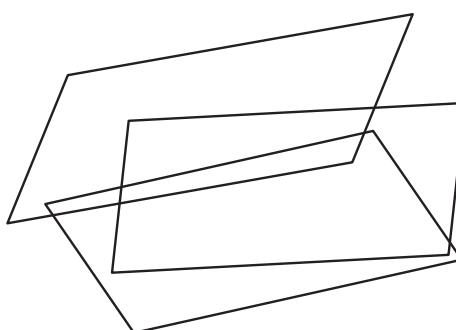
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la propriété caractéristique suivante : « Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont de même longueur, alors c'est un parallélogramme » ; de savoir modéliser une situation concrète par un dessin géométrique.

Les prérequis nécessaires sont de savoir construire un point situé à une certaine distance de deux autres points grâce au compas.

Certains élèves vont tout de suite représenter les pailles et les bâtonnets par des segments, d'autres vont faire des dessins plus proches de la réalité. Cela peut être l'occasion de parler de la schématisation en mathématiques : quels objets mathématiques peuvent représenter un bâton, une boîte, une roue, etc. ?

1.



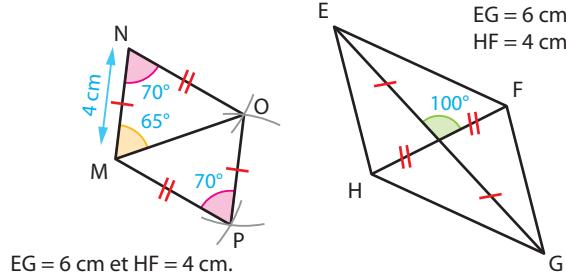
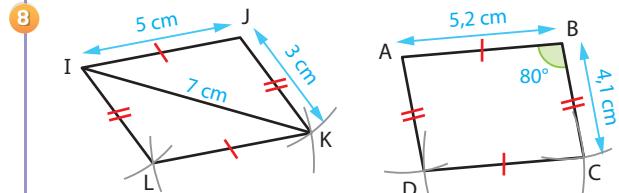
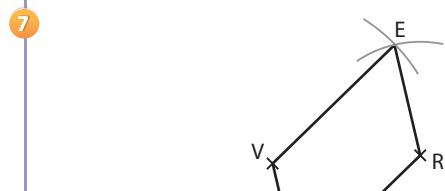
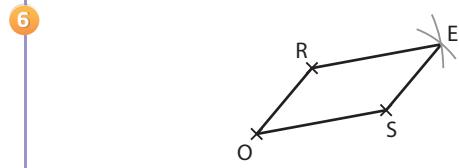
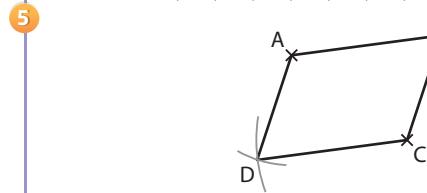
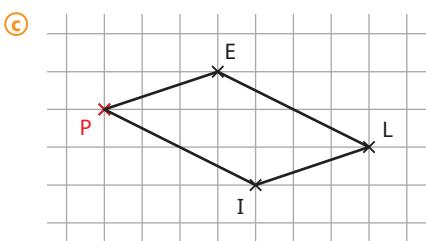
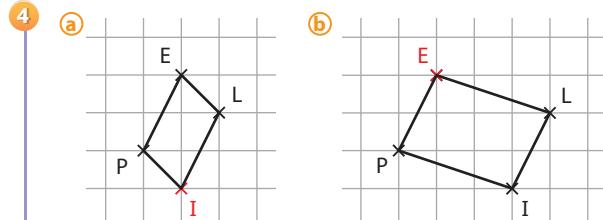
2. « Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme. »

Exercices

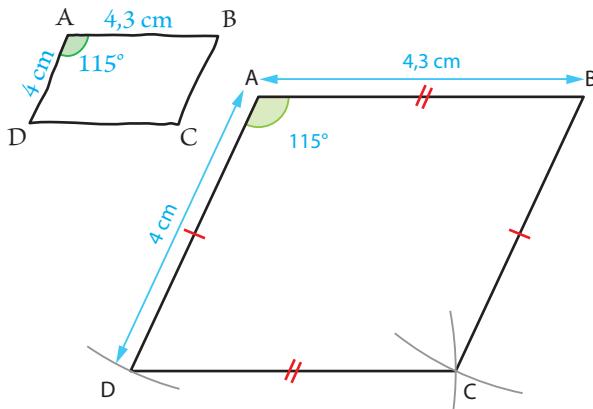
Construire un parallélogramme

Questions flash

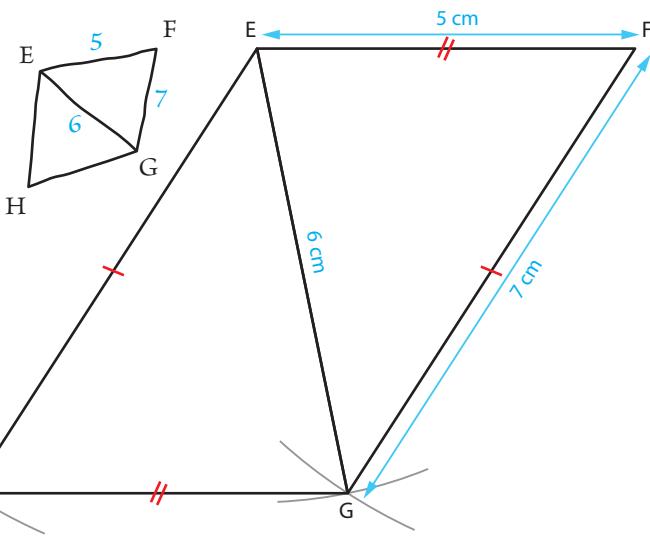
- 1 a. Point A₃.
 2 Case U9.
 3 Non, le croquis n'est pas correct car le quadrilatère tracé se nomme IJLK.



9



10



Reconnaitre un parallélogramme

Questions flash

- 11 Les quadrillatères ABCD, EFGH, MNOP et IJKL semblent être des parallélogrammes.
 12 Les quadrillatères ABCD, UVWX, MNOP et IJKL sont des parallélogrammes.
 13 On peut demander aux élèves de trouver les longueurs demandées sans justifier.

Ce sont tous des parallélogrammes.

- a. Les côtés opposés sont de même longueur.
 Donc RA = IV = 3 cm et IR = AV = 2 cm.
 b. Les diagonales se coupent en leur milieu.
 Donc LV = 2 × LM = 2 × 5 cm = 10 cm.
 c. ECFG a quatre angles droits, donc c'est un rectangle.
 Les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur.
 Donc EC = FG = 6,7 m.
 D est un point de [EC] avec ED = 1 m.
 Donc DC = 6,7 m - 1 m = 5,7 m.
 ABCD est un parallélogramme.
 Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. Donc AB = DC = 5,7 m.

- 14 On voit 10 parallélogrammes.

- 15 On voit 3 parallélogrammes.

- 16 1. D'après le codage, on a VE = OL et VO = LE. Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc VOLE est un parallélogramme.
 2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc I est le milieu de [OE]. Donc IE = IO = 4,2 cm.

- 17** 1. On peut affirmer que TRUC est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu A.
2. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. Donc $CU = TR = 4,3 \text{ cm}$.
- 18** 1. VRAI est un parallélogramme.
Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. Donc $AI = RV = 5,4 \text{ dm}$ et $RA = VI = 4 \text{ dm}$.
2. Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure. VRAI est un parallélogramme donc $\widehat{RAI} = \widehat{VI} = 75^\circ$.

Ici, on dit que VRAI est un parallélogramme après avoir cité la propriété.

Problèmes

Ruban adhésif

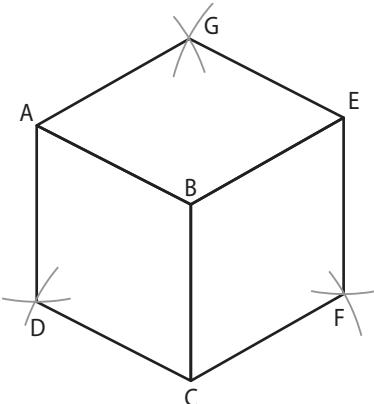
1. Là où les rubans adhésifs se chevauchent, on observe un parallélogramme, car les côtés opposés sont les bords parallèles de l'adhésif.
2. Il faut placer les deux rubans perpendiculairement pour former un rectangle.

Raisonner en rond

Les points O et D appartiennent aux cercles de centre R et N et de même rayon.
Donc $RO = RD = NO = ND$.
Donc ROND est un losange.

Trompe-l'œil

1. et 2.

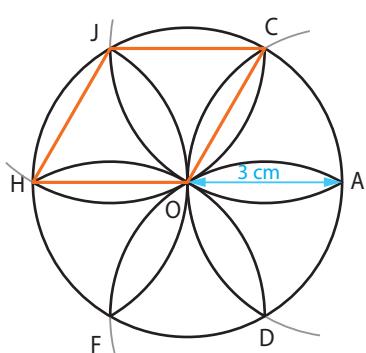


3. La figure obtenue ressemble à un cube.

C'est l'occasion de faire observer aux élèves qu'un dessin d'un cube en perspective est constitué de parallélogrammes, alors que l'on « voit » un cube.

Rosace

- 1.



2. Les points J et A appartiennent à l'arc de cercle de centre C passant par O.
Les points H et C appartiennent à l'arc de cercle de centre J passant par O.
Donc $CO = CJ = JH = HO$.
Donc $HOCJ$ est un losange.
3. On peut tracer 4 losanges et 3 rectangles.

En parallèle

• Première façon

Avec le compas on reporte la distance LI en partant de M et la distance IM en partant de L. On obtient le point A à l'intersection des deux arcs. On trace LIMA.

On a utilisé la propriété suivante : « Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. »

• Deuxième façon

Avec la règle et l'équerre on trace la parallèle à (LI) passant par m et la parallèle à (IM) passant par L. On place le point A à l'intersection des deux droites. On trace LIMA.

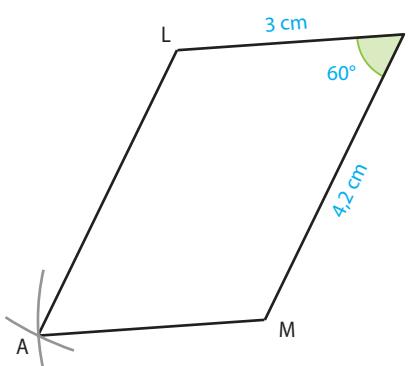
On a utilisé la propriété suivante : « Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles. »

• Troisième façon

On trace la diagonale [LM] et on place son milieu en utilisant le compas et la règle (en traçant la médiatrice de [LM]). Le point A est le symétrique du point I par rapport au milieu de [LM]. On trace LIMA.

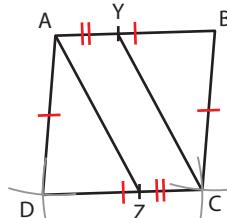
On a utilisé la propriété suivante : « Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. »

- 2.



Dans un losange

- 1.



2. Les segments [AY] et [CZ] sont situés sur les côtés [AB] et [CD] du losange ABCD.

Les côtés opposés d'un losange sont parallèles.

Donc $[AY] \parallel [CZ]$.

De plus, $AY = CZ$.

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc AYCZ est un parallélogramme.

L'étiquetage évolue

Non, le règlement CLP utilise toujours un carré puisque les côtés sont de même longueur et les angles sont droits, il a simplement été tourné.

Raisonner sur l'un et l'autre

On peut proposer cet exercice à l'oral, pour entraîner les élèves à verbaliser leurs idées, à employer un vocabulaire et un langage adaptés, à réciter les définitions et les propriétés.

VRAI et TRAC sont deux parallélogrammes.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur.

Donc $TC = RA = VI$ et $(TC) \parallel (RA) \parallel (VI)$.

Alors les côtés $[TC]$ et $[VI]$ du quadrilatère VICT sont de même longueur et parallèles.

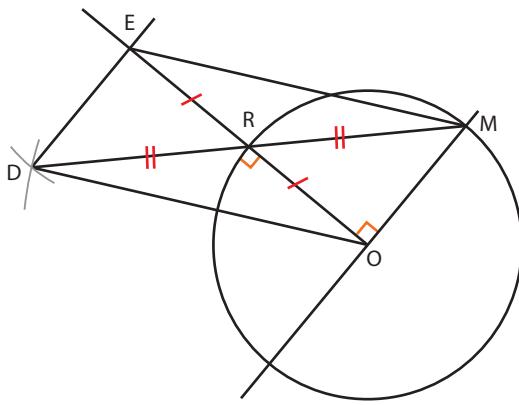
Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc VICT est un parallélogramme.

27

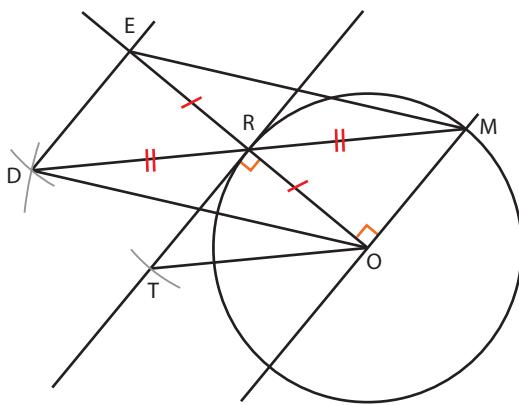
Programme de construction

1.



2. E est le symétrique de O par rapport à R.
D est le symétrique de M par rapport à R.
Donc R est le milieu des segments [EO] et [DM].
Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc MODE est un parallélogramme.

3.

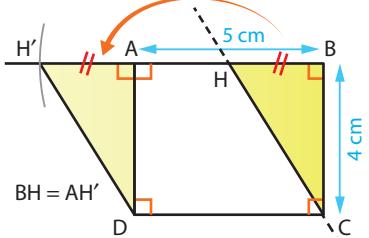


4. $(RT) \perp (RO)$ et $(RO) \perp (OM)$.
Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.
Donc $(RT) \parallel (OM)$.
De plus, $RT = OM$.
Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc RMOT est un parallélogramme.

28 Coup de ciseaux

L'avantage de ce problème, c'est qu'il peut donner lieu à de la manipulation. On peut apporter des post-it et laisser les élèves couper, recoller, observer.
Cela permet aussi de différencier, les élèves en difficulté pouvant manipuler.

1.



On nomme ABCD le post-it rectangulaire, avec $AB = 5 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$.

Luc coupe selon un segment $[CH]$.

On nomme $H'HCD$ le quadrilatère obtenu.

Comme ABCD était un rectangle, alors :

$(H'A) \perp (AD)$ et $(DA) \perp (AH)$.

Donc H', A et H sont alignés.

$H'A + AH = AB$

$(AH) \parallel (DC)$.

Donc les côtés $[H'H]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur.

Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc Luc a bien obtenu un parallélogramme.

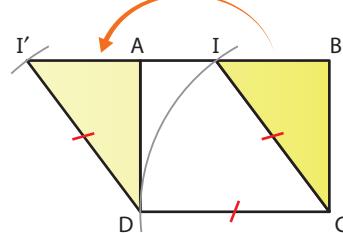
2. Le raisonnement n'a pas utilisé le fait que les dimensions étaient 5 cm et 4 cm. Donc Luc aurait toujours raison.

3. a. Il faut couper le post-it de façon à ce que $HC = DC$.

Au compas, Luc doit tracer l'arc de cercle de centre C passant par D, il coupe le côté $[AB]$ en I.

Luc doit alors couper le long de $[CI]$.

b.



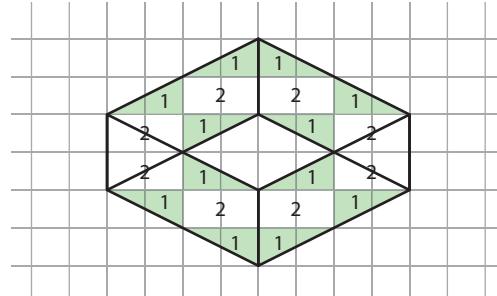
29 Logo

1. Les quatre quadrilatères ont tous deux côtés opposés verticaux et de longueur 2.

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc ce sont quatre parallélogrammes.

2.

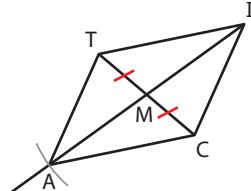


Le dessin permet de justifier la réponse. On peut aussi demander aux élèves de justifier à l'oral, en passant au tableau, par exemple.

La partie coloriée de ce logo a pour aire 28 cm^2 .

30 TIC et TAC

1.



2. Les triangles TIC et TAC sont symétriques par rapport au point M puisque T est le symétrique de C et que A est le symétrique de I par rapport à M.

3. Les diagonales $[TC]$ et $[AI]$ du quadrilatère TICA se coupent en leur milieu M, donc TICA est un parallélogramme.

4. Lucas a raison. Si le quadrilatère que Tim a dessiné semble être un rectangle, c'est que son triangle TIC devait être un triangle rectangle en I.

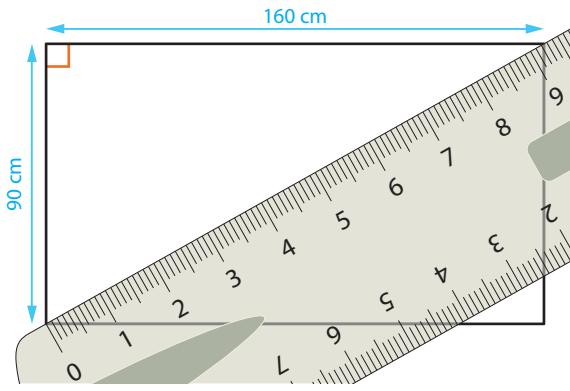
31 Télévision

1. Lorsqu'on trace une diagonale, elle partage le téléviseur en deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont de même longueur deux à deux. Donc ces triangles sont superposables.

Donc leurs troisièmes côtés sont de même longueur. Donc les deux diagonales du téléviseur sont de même longueur.

2. $90 \text{ cm} \div 20 = 4,5 \text{ cm}$; $160 \text{ cm} \div 20 = 8 \text{ cm}$.

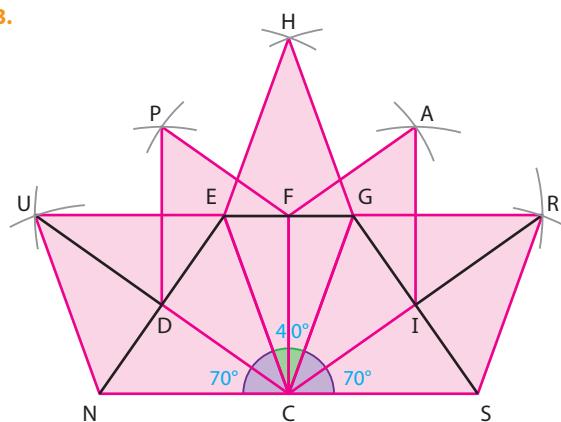
À l'échelle $\frac{1}{20}$, 90 cm est représenté par 4,5 cm et 160 cm est représenté par 8 cm.



3. On mesure une diagonale, on trouve environ 9,2 cm sur le dessin à l'échelle $\frac{1}{20}$.
 $9,2 \text{ cm} \times 20 = 184 \text{ cm}$.
La diagonale de l'écran est d'environ 184 cm.
4. 1 pouce = 2,54 cm.
 $184 \div 2,54 \approx 72$.
La diagonale de cet écran fait 72 pouces.
5. En proportion, 160 cm pour 90 cm est équivalent à 16 pour 9, soit $\frac{16}{9}$.

32 Nénuphar

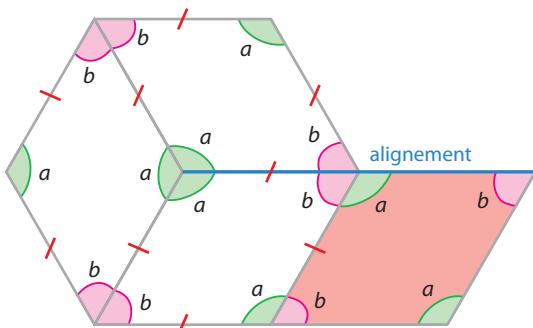
1. NCEU, ECGH et CSRG sont des parallélogrammes, donc leurs côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
De plus, NC = CE, EC = CG et CG = CS.
Donc les quatre côtés de ces parallélogrammes sont de même longueur.
Donc ce sont des losanges.
2. Les points N, C et S sont alignés.
Donc $\widehat{NCS} = 180^\circ$.
De plus, $\widehat{NCE} = 70^\circ$ et $\widehat{ECG} = 40^\circ$.
Donc $\widehat{GCS} = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 70^\circ$.



33 Assembler

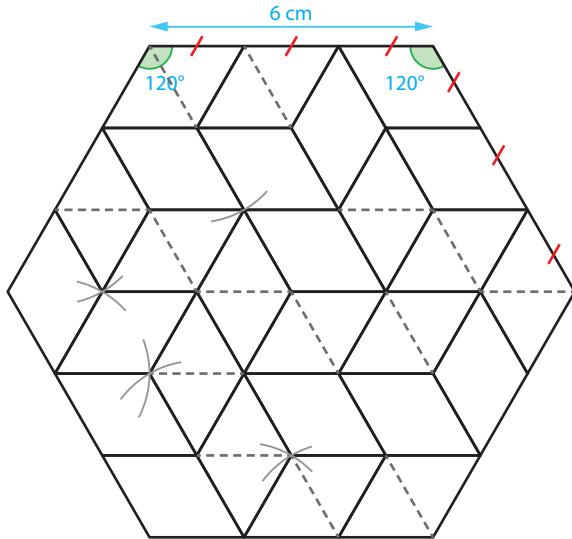
1. Un losange est un parallélogramme donc les angles opposés sont de même mesure. On nomme a et b les angles opposés de même mesure deux à deux.

Schéma du centre de l'hexagone



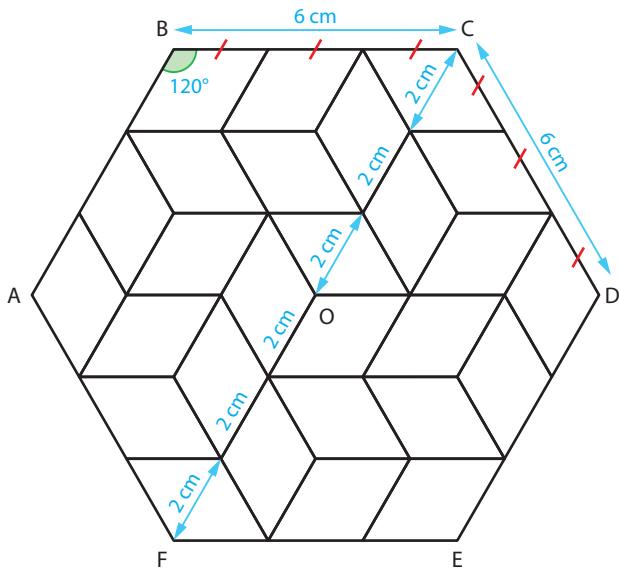
Au centre : $3a = 180^\circ$ donc $a = 60^\circ$.
À l'alignement : $a + b = 180^\circ$ donc $b = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Chaque losange a deux angles opposés de 120° et deux angles opposés de 60° .

2.



3. Si on trace la plus petite diagonale de chaque losange, elle le partage en deux triangles dont les trois angles mesurent 60° , ce sont donc des triangles équilatéraux.

Alors cette diagonale mesure 2 cm.



On a $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 6 \text{ cm}$.

Donc les six sommets de l'hexagone sont situés sur le même cercle de centre O et de rayon 6 cm.

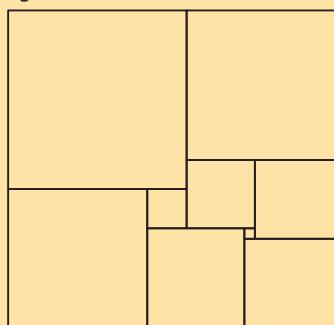
34 Parallélogram

In a parallelogram, opposite sides are congruent.

perimeter = $(17 \text{ m} + 12 \text{ m}) \times 2 = 58 \text{ m}$.

35 Carré contre carré

Il est très facile de faire reproduire cette figure sur du papier quadrillé aux élèves, en prenant un carreau pour 1 cm. En faisant la construction, les élèves trouvent l'ordre dans lequel on peut calculer les longueurs des côtés des carrés : le noir, le gris, le bleu clair, le violet, le vert, le orange, le jaune, le rouge, le bleu foncé.



Dans ce cas, la construction reposant sur un quadrillage, la réponse est donnée par la construction.

En voici la rédaction :

Lorsque deux carrés sont adjacents, leurs sommets sont alignés, ce qui nous permet d'affirmer que ABCD est un rectangle obtenu par un pavage constitué de 9 carrés. On peut additionner ou soustraire des longueurs connues pour en obtenir d'autres : le gris a pour côté 10 cm et le noir 1 cm. Donc :

- le bleu clair a pour côté $10\text{ cm} - 1\text{ cm} = 9\text{ cm}$;
- le violet a pour côté $9\text{ cm} - 1\text{ cm} = 8\text{ cm}$;
- le vert a pour côté $8\text{ cm} - 1\text{ cm} = 7\text{ cm}$;
- le orange a pour côté $8\text{ cm} + 7\text{ cm} = 15\text{ cm}$;
- le jaune a pour côté $10\text{ cm} - (7\text{ cm} - 1\text{ cm}) = 4\text{ cm}$;
- le rouge a pour côté $10\text{ cm} + 4\text{ cm} = 14\text{ cm}$;
- le bleu foncé a pour côté $14\text{ cm} + 4\text{ cm} = 18\text{ cm}$.

Donc ABCD est un rectangle avec :

$$AD = 18\text{ cm} + 15\text{ cm} = 33\text{ cm}.$$

$$AB = 18\text{ cm} + 14\text{ cm} = 32\text{ cm}.$$

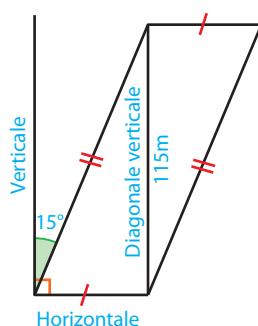
36 La porte de l'Europe

1. La face avant de chaque tour est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur.

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

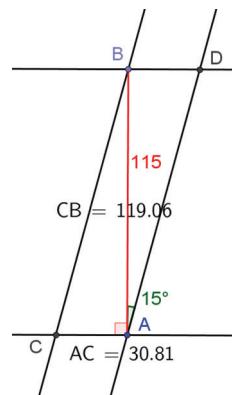
Donc la face avant de l'immeuble est un parallélogramme.

2. Dessin à main levée :



Avec un logiciel de géométrie dynamique, les élèves peuvent utiliser les mesures exactes, il faudra juste qu'ils fassent un zoom arrière pour visualiser la figure en entier. Voilà un programme de construction :

- tracer un segment de longueur 115 (il se nomme [AB] par défaut) ;
- tracer les perpendiculaires à [AB] passant par A et B ;
- tracer deux angles de 15° de sommet A et B dans le sens anti-horaire ;
- tracer les demi-droites d'origine A et B ainsi obtenues et nommer C et D leurs points d'intersection avec les deux perpendiculaires à [AB].



La face avant est un parallélogramme dont les côtés mesurent environ 31 m et 119 m.

3. La tour penchée en Italie est la tour de Pise.

37 L'art des objets impossibles

1. Son tableau représente des objets impossibles à construire dans la réalité.

2.

Les élèves font un tableau librement inspiré du tableau d'Oscar Reutersvård. Pour les élèves en difficulté, on peut donner du papier quadrillé ou pointé pour simplifier la tâche.

On peut aussi proposer ce travail sur ordinateur, avec un logiciel de géométrie dynamique. L'avantage étant que l'élève peut faire bouger son tableau, ce serait une œuvre en mouvement ! On pourrait aussi imaginer qu'il fasse une capture vidéo de l'écran afin de conserver un film de sa réalisation artistique.

38 Plaques et boulons

Là aussi, on peut imaginer faire manipuler les élèves, qu'ils soient ou non en difficulté.

1. Comme les trous sont régulièrement espacés, on a DC = AB = 6 espacements, DA = CB = 4 espacements.

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc ABCD est un parallélogramme.

2. Un carré : on fixe deux tiges métalliques de la même longueur en leur milieu et perpendiculairement, puis on tend une corde entre les quatre coins.

Un losange : on fixe deux tiges de longueur différente par leur milieu perpendiculairement, puis on tend une corde entre les quatre coins.

Un rectangle : on prend deux paires de tiges de même longueur et on les fixe en quadrilatère en formant 4 angles droits et en mettant face à face celles qui sont identiques.

39 Lampe accordéon

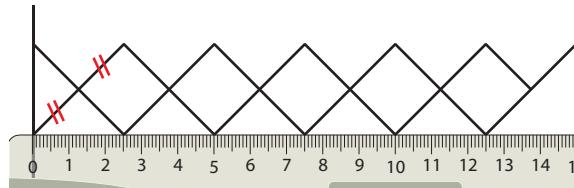
L'accordéon de cette lampe est assez facile à faire avec un logiciel de géométrie dynamique, ce qui permet d'obtenir très rapidement des réponses aux questions.

1. Les tiges ont la même longueur et sont fixées en leur milieu et leurs extrémités. Donc les quadrilatères formés ont les quatre côtés de même longueur. Ce sont donc des losanges.

2.

Méthode 1 : l'élève s'aide d'un croquis ou d'un dessin à l'échelle 1/5 (par exemple), puis il mesure à la règle la distance entre A et B.

Dessin à l'échelle 1/5 :



On mesure environ 12,7 cm sur mon dessin à l'échelle 1/5.
 $AB = 5 \times 12,7 \text{ cm} = 63,5 \text{ cm}$.

Méthode 2 : il trace un carré de côté 9 cm sur une feuille et il mesure une diagonale qu'il va ensuite multiplier par 5.

On a tracé un carré de côté 9 cm en vraie grandeur.

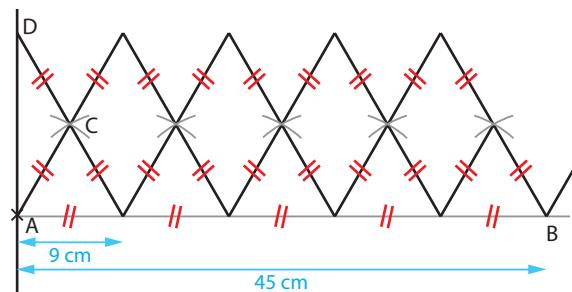
On a mesuré sa diagonale : elle fait environ 12,7 cm.

La distance AB est égale à 5 fois cette diagonale (la rédaction de la justification est un peu longue et peut ne pas être demandée).

$$AB = 5 \times \text{diagonale} = 5 \times 12,7 \text{ cm} = 63,5 \text{ cm}.$$

Lorsque l'accordéon forme des carrés, la distance entre les rivets A et B est d'environ 63,5 cm.

3. On s'aide d'un dessin à l'échelle 1/5.



On constate que $45 \text{ cm} = 5 \times 9 \text{ cm}$.

Les quatre losanges qui forment l'accordéon ont 4 côtés de 9 cm et une diagonale de 9 cm. Donc ces losanges sont formés de deux triangles équilatéraux de côté 9 cm.

Donc les trois angles de ces triangles mesurent 60° .

Donc chaque losange a deux angles de 60° et deux angles de 120° .

Le triangle ADC est isocèle en C, donc $\widehat{DAC} = \widehat{CDA}$.

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\text{Donc } \widehat{DAC} = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ.$$

Lorsque la distance entre les rivets A et B est de 45 cm, les tiges font un angle de 30° avec la verticale.

Algorithmique et outils numériques

40. Les bonnes valeurs

1.

```
quand drapeau cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 80
tourner ⌂ de 60 degrés
avancer de 50
tourner ⌂ de 120 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 60 degrés
avancer de 50
```

2. Voici les scripts qui permettent d'obtenir :

a. un losange

```
quand drapeau cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 80
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 50
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 50
```

b. un rectangle

```
quand drapeau cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 80
tourner ⌂ de 60 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 120 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 60 degrés
avancer de 80
```

c. un carré

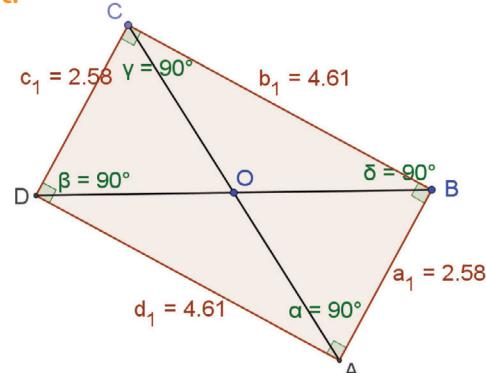
```
quand drapeau cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 80
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ⌂ de 90 degrés
avancer de 80
```

41. Le bon script

Figure	1	2	3	4
Script	d	a	c	b

42. Parallélogramme particulier (1)

1. a. à c.



Lorsqu'on déplace les points :

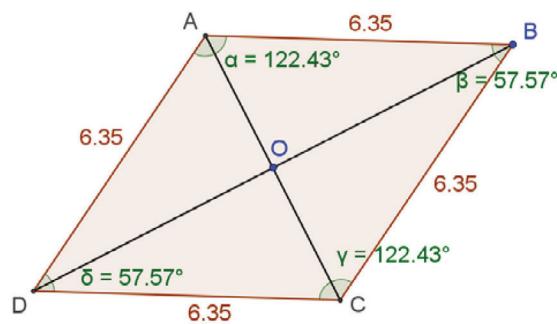
– les angles du quadrilatère ABCD restent droits ;

– les côtés opposés sont de même longueur.

d. Propriété mise en évidence :

« Si les diagonales d'un quadrilatère sont de même longueur et se coupent en leur milieu, alors c'est un rectangle. »

2. a. à c.



Lorsqu'on déplace les points :

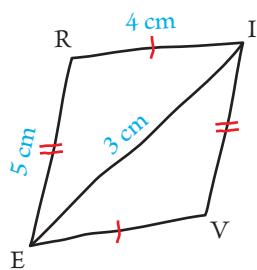
– les angles opposés du quadrilatère ABCD sont de même mesure ;

– les côtés sont de même longueur.

Exercice 2

Cet exercice réinvestit la construction au compas d'un triangle puis d'un parallélogramme. Ensuite il permet d'exploiter la propriété sur les diagonales d'un parallélogramme dans un cas simple.

1.

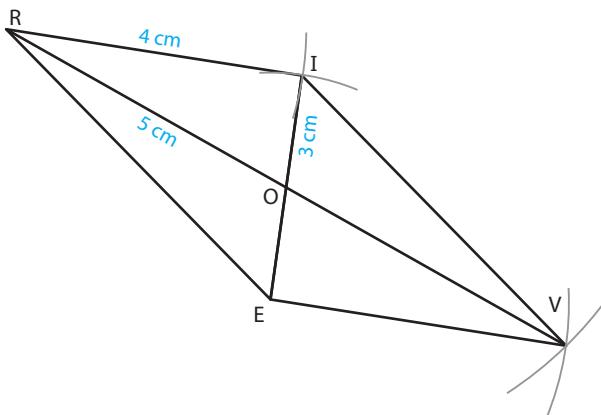


Il peut être perturbant pour les élèves d'avoir un dessin à main levée peu réaliste : ici [IE] devrait être plus petit que [RE] et [RI]. On peut conseiller aux élèves de refaire un dessin plus réaliste.

2. RIVE est un parallélogramme. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Donc $EV = RI = 4 \text{ cm}$ et $IV = RE = 5 \text{ cm}$.

3. et 4.



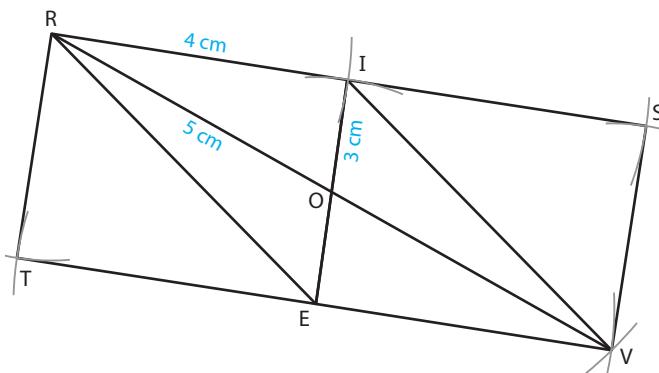
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc $EO = EI = 1,5 \text{ cm}$.

Exercice 2

La construction est plus complexe, notamment pour le placement des points T et S. On peut conseiller aux élèves de faire des essais à main levée pour ces deux points.

La question 5. demande un raisonnement à plusieurs étapes, la rédaction est difficile.

1., 3. et 4.



2. RIVE est un parallélogramme de centre O. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Donc $RE = IV = 5 \text{ cm}$ et $EV = RI = 4 \text{ cm}$.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Donc $EI = 2 \times 1,5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

5. TRIE, RIVE et VEIS sont des parallélogrammes, donc $(RI) // (TE)$, $(RI) // (EV)$ et $(EV) // (IS)$.

Lorsque deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Donc $(RI) // (IS)$.

Donc R, I et S sont alignés.

Écriture d'un énoncé

Il peut être intéressant de faire écrire la moitié de la classe sur les énoncés de cette page 461 et l'autre moitié sur les énoncés de la page 367 ou de la page 35. Ensuite, les deux moitiés échangent leurs énoncés.

Écriture d'un énoncé (1)

1.

Voici un exemple d'énoncé :

RISC est un parallélogramme tel que $SC = 5 \text{ cm}$.

Déterminer la longueur RI .

Écriture d'un énoncé (2)

1. On peut calculer les longueurs IO , QI , RO et QO .

2.

Voici un exemple d'énoncé :

QUOI est un parallélogramme de centre R tel que $QU = 3,6 \text{ cm}$, $UO = 4,1 \text{ cm}$ et $QR = 3 \text{ cm}$.

1) Faire une construction en vraie grandeur de QUOI.

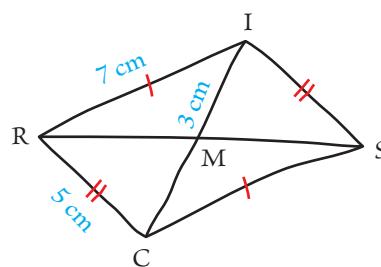
2) Déterminer les longueurs IO , QI , RO et QO . Justifier.

Analyse d'une production

1. $IS = 5 \text{ cm}$ et $CS = 7 \text{ cm}$ car les côtés opposés du parallélogramme RISC sont de même longueur.

2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Donc $CI = 6 \text{ cm}$ car M est le milieu de $[CI]$.



Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ».

- Prérequis : les élèves doivent avoir largement pratiqué des problèmes de construction, avec les instruments de géométrie comme avec un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation. Ils ont appris à valider leurs conjectures par le raisonnement et l'argumentation.
- Dans les activités et quelques problèmes, on utilise les triangles égaux, il vaut donc mieux les avoir vus avant.
- En cycle 4, un attendu de fin de cycle est d'utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer. Les élèves valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les problèmes de construction occupent une large place, avec les instruments de géométrie comme avec un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation.
- Le choix a été fait au dans le chapitre 39 de se concentrer plus particulièrement sur le parallélogramme et ses propriétés. Dans ce chapitre, le travail est poursuivi dans l'esprit du cycle. Ensuite viennent les parallélogrammes particuliers : losanges, rectangles, carrés. Ce n'est pas l'accumulation de propriétés qui

est ici visée. Le choix a été fait d'en étudier un nombre restreint – les propriétés liées aux diagonales – afin de se concentrer sur la pratique du raisonnement et l'apprentissage de la démonstration.

Les problèmes se situent dans des champs très divers tels que les champs mathématique, scientifique, technologique ou artistique. On poursuit le travail sur les constructions, en lien avec l'art ou le graphisme. Les problèmes amènent à des raisonnements parfois difficiles et avec plusieurs pas. Ils sont indiqués plus loin. Dans ces problèmes, afin de respecter l'esprit du programme, on pourra favoriser le fait de ne pas attendre de démonstration formalisée de la part de tous les élèves. On pourra augmenter progressivement les attentes sur la forme, éventuellement en les différenciant selon le niveau des élèves. Le travail en groupe est particulièrement propice à des échanges riches entre élèves afin d'améliorer la communication de leurs idées et la rédaction de leurs justifications. Il est également utile de mutualiser les productions de chaque groupe et de les commenter de façon constructive.

Activités

Questions flash

- Les triangles 1 et 2 forment un carré.
- Les triangles 1, 2, 3 et 4 forment un rectangle qui n'est pas un carré.
- Les triangles 2, 3, 4 et 5 forment un parallélogramme qui n'est pas un rectangle.

- Il y a 5 losanges sur cette figure.
- Il y a 9 parallélogrammes sur cette figure.
- Parallélogrammes : REST, VOLE, RIVE, MUSE et VOLT.
Rectangles : RIVE et MUSE.
Losanges : RIVE et VOLT.
- $\angle DCB = 35^\circ$; $HO = 2,4 \text{ cm}$; $HG = 4,8 \text{ cm}$.

Les structures métalliques

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité : les parallélogrammes, particuliers ou non, sont très présents dans les structures métalliques. À partir de trois exemples de structures où les quadrilatères et leurs propriétés sont exploitables, on revoit la propriété sur les diagonales d'un parallélogramme et on découvre les propriétés des diagonales d'un rectangle et d'un losange. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des triangles égaux, des angles.

On peut aisément relier cette activité à l'histoire, l'industrialisation, les découvertes et les avancées technologiques, etc.

Activité 1

longueur et ses 4 angles sont droits.

Donc pour les triangles FCH et HEC :

$$FC = HE$$

$$CH = CH$$

$$\widehat{FCH} = \widehat{CHE}$$

Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, alors ils sont égaux. Donc les triangles FCH et HEC sont égaux.

- Si deux triangles sont égaux, alors leurs côtés sont deux à deux de même mesure. Donc FH = CE.
- Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.

- Les tiges métalliques marron représentées par les segments [IJ], [JK], [KL] et [LI] sont identiques.

Donc IJ = JK = KL = LI.

Donc IJKL est un losange.

- IJKL est un losange.

Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu.

Donc S est le milieu de [LJ] et [IK].

Donc pour les triangles ISL et ISJ :

IS est commun

$$LS = SJ$$

$$LI = IJ$$

Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Donc ISL et ISJ sont égaux.

- À l'échelle $\frac{1}{200}$: $11,6 \text{ m} = 1160 \text{ cm}$. Voir schéma ci-dessous.

$$1160 \text{ cm} \div 200 = 5,8 \text{ cm}$$

$$14,1 \text{ m} = 1410 \text{ cm}$$

$$1410 \text{ cm} \div 200 = 7,05 \text{ cm}$$

- On mesure sur le dessin à l'échelle 1/200 :

$$\overline{AC} \approx 10,9 \text{ cm} \text{ et } \overline{BD} \approx 6,7 \text{ cm.}$$

$$\widehat{\angle AOB} \approx 104^\circ \text{ et } \widehat{\angle AOD} \approx 76^\circ.$$

- Les diagonales de ABCD n'ont pas la même longueur et ne sont pas perpendiculaires.

ABCD est un parallélogramme.

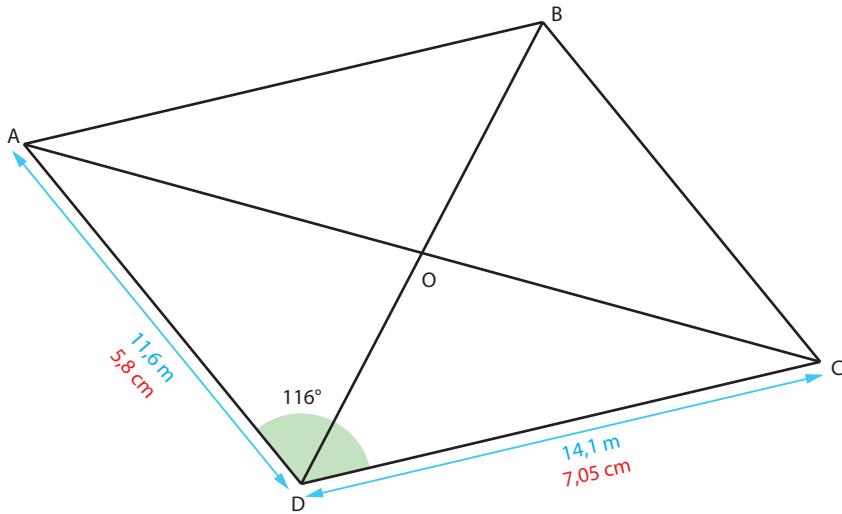
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Donc le point O est le milieu des diagonales de ABCD.

- CHEF est un rectangle donc ses côtés opposés sont de même

- c. Si deux triangles sont égaux, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.
Donc $\widehat{LSI} = \widehat{JSI}$.
d. S est le milieu de [LJ] donc $\widehat{LSJ} = 180^\circ$.
Or $\widehat{LSI} = \widehat{JSI}$.
Donc $\widehat{LSI} = \widehat{JSI} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$.

Donc les diagonales de IJKL sont perpendiculaires.
On a mis en évidence la propriété suivante :
Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.



Exercices

Construire un parallélogramme

Questions flash

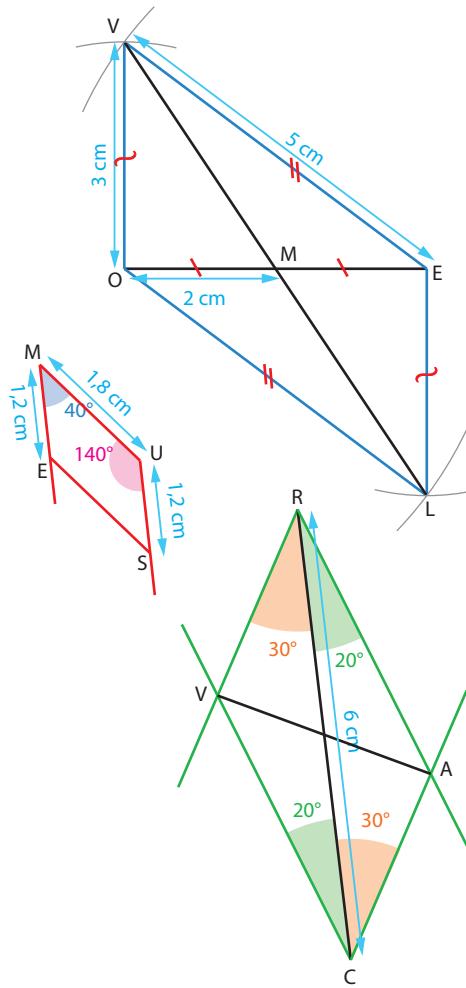
- 1 Pour construire ABCD, il faut la règle graduée et le compas.
Pour construire EFGH, il faut la règle graduée, le rapporteur et le compas.

On peut se passer du compas si on utilise l'équerre pour construire les parallèles.

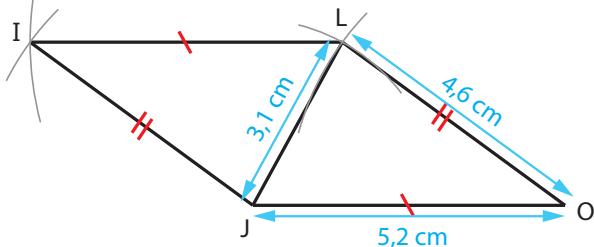
Pour construire IJKL, il faut la règle graduée et le rapporteur.
- 2 Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur.
- 3 Préciser aux élèves que lorsqu'on leur demande de « déterminer » quelque chose, on attend d'eux qu'ils le trouvent et qu'ils justifient leur réponse.
- VOLE est un parallélogramme.
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Donc M est le milieu de [OE].
Donc EO = $2 \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.
 - MUSE est un parallélogramme.
Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.
Donc $\widehat{MES} = \widehat{MUS} = 140^\circ$.
 - VRAC est un parallélogramme.
Donc $(VR) \parallel (AC)$.
Les parallèles (VR) et (AC) et la sécante (RC) forment des angles alternes-internes de même mesure.
Donc $\widehat{RCA} = \widehat{CRV} = 30^\circ$.

- 4 1. RE Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
SI Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

- LA Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
OAG La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
GLA Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.



2. et 3.



Reconnaitre un parallélogramme

Questions flash

6. Les dessins 2 et 3 permettent d'affirmer que WXYZ est un parallélogramme.

7. Ce sont des questions flash donc on attend des élèves qu'ils fassent les justifications à l'oral. C'est l'occasion pour l'enseignant de vérifier que les propriétés sont connues et de voir le niveau de maîtrise des élèves dans le domaine 1 « Les langages pour penser et communiquer ». Tout d'abord, on vérifie la maîtrise du français (les élèves racontent, on est plus dans de la narration), puis on les amène vers le langage mathématique.

1. ABCD a quatre angles droits, donc c'est un rectangle.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

L et O sont deux points du côté $[AB]$.
P et U sont deux points du côté $[CD]$.
Donc $(LO) \parallel (PU)$.

2. $(LO) \parallel (PU)$ et $LO = PU$.

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc LOUP est un parallélogramme.

8. « Peut-on affirmer que c'est un parallélogramme ? »

• ABCD : oui

Propriété : Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

• EFGH : non

On peut produire un contre-exemple ou demander aux élèves d'en produire un.

• QRST : oui

Propriété : Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

On peut même prouver que c'est un rectangle puisque ses diagonales sont de même longueur.

• MNOP : oui

Propriété : Si deux côtés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

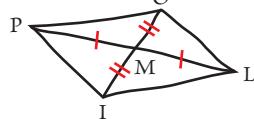
• IJKL : non

On peut produire un contre-exemple ou demander aux élèves d'en produire un.

• UVWX : non

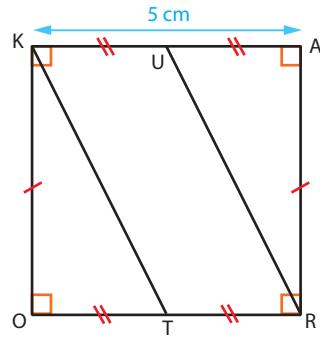
Contre-exemple.

9. 1.



2. Les diagonales $[PL]$ et $[OI]$ ont le même milieu M, donc POLI est un parallélogramme.

10. 1.



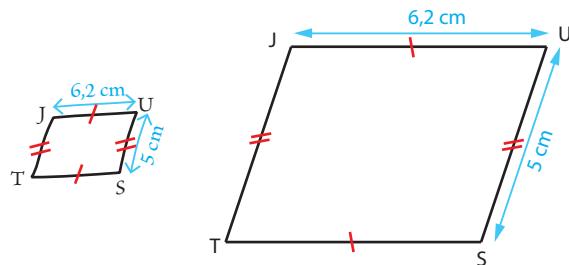
2. KARO est un carré, donc $(KA) \parallel (RO)$ et $KA = RO$.

U et T sont les milieux respectifs de $[KA]$ et $[RO]$.
Donc $(KU) \parallel (RT)$ et $KU = RT$.

3. Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc KURT est un parallélogramme.

11. 1.

On peut conseiller aux élèves de faire un dessin à main levée avant de se lancer dans une construction, même si ce n'est pas écrit dans la consigne.



2. $JU = ST$ et $US = JT$.

Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc JUST est un parallélogramme.

Reconnaitre un parallélogramme particulier

Questions flash

12.

a. Faux : O n'est pas le milieu de $[QI]$.

Les diagonales d'un rectangle doivent se couper en leur milieu.

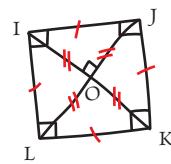
b. Vrai : les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

c. Faux : tous les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires mais pas forcément de même longueur. D'ailleurs, si elles sont aussi de même longueur, c'est un carré.

d. Vrai : IJKL est un carré de centre O.

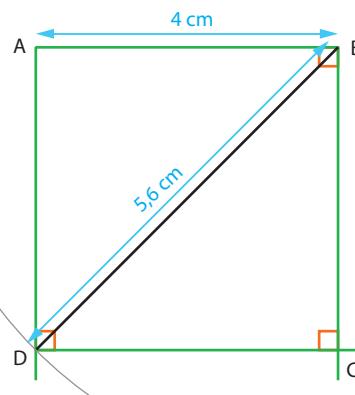
Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu perpendiculairement et sont de même longueur.

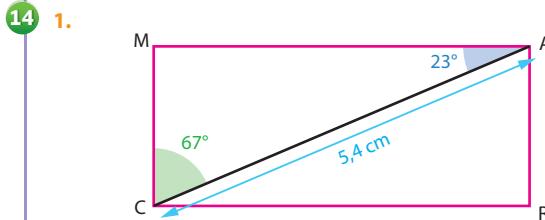
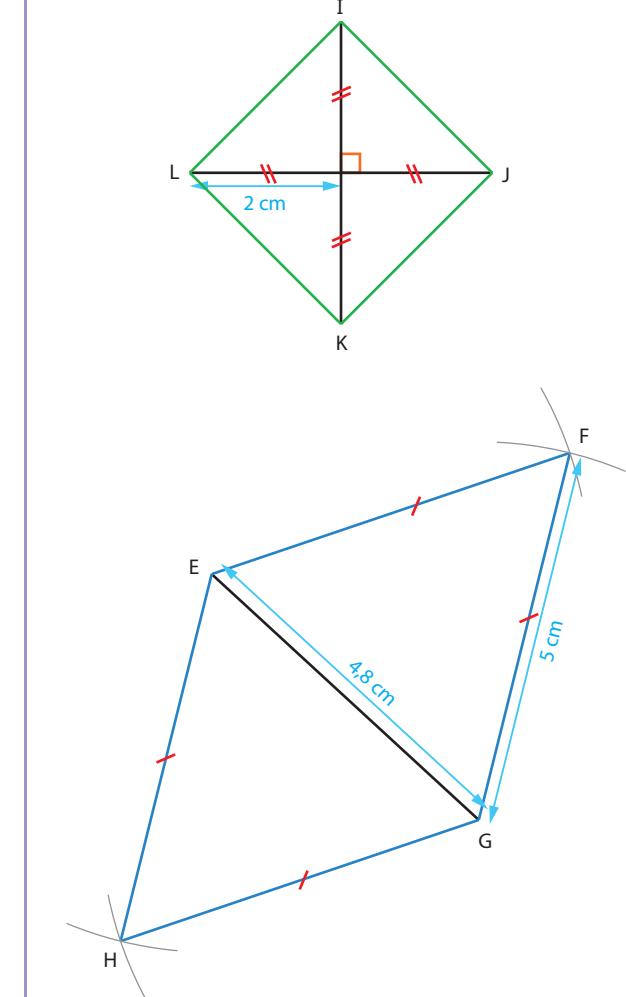
Donc les triangles OIJ, OJK, OKL et OLI sont isosceles rectangles en O.



On peut ajouter qu'ils sont égaux.

13.





2. La somme des mesures des angles du triangle MCA est égale à 180° .

$$\text{Donc } \widehat{CMA} = 180^\circ - (23^\circ + 67^\circ) = 90^\circ.$$

Les angles opposés du parallélogramme MARC sont de même mesure. Donc $\widehat{CR}A = \widehat{CM}A = 90^\circ$.

Les angles alternes-internes compris entre deux droites parallèles sont de même mesure.

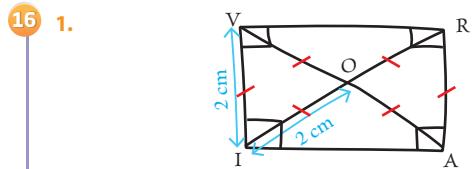
$$\text{Donc } \widehat{ACR} = \widehat{CAM} = 23^\circ \text{ et } \widehat{RAC} = \widehat{ACM} = 67^\circ.$$

$$\text{Donc } \widehat{MCR} = 67^\circ + 23^\circ = 90^\circ \text{ et } \widehat{MAR} = 23^\circ + 67^\circ = 90^\circ.$$

MARC a quatre angles droits, donc c'est un rectangle.

Parallélogrammes	Rectangles	Losanges	Carrés
ABCD	ABCD	MNOP	IJKL
EFGH	EFGH	UVWX	
ABCD	IJKL	IJKL	
EFGH	QRST		
MNOP			
UVWX			
IJKL			
QRST			

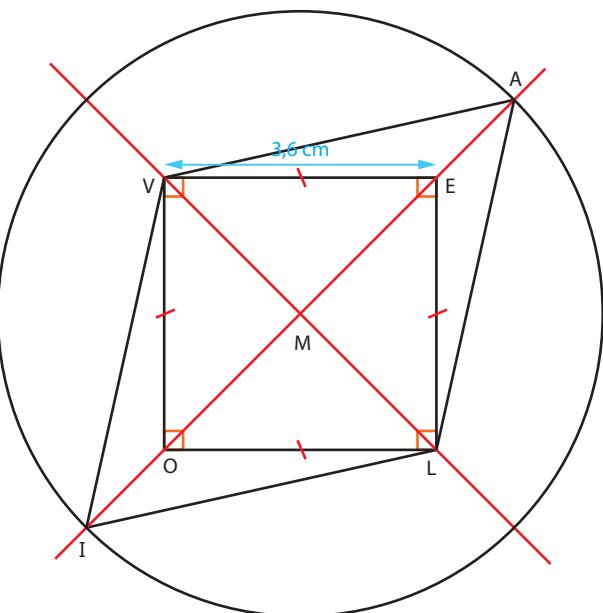
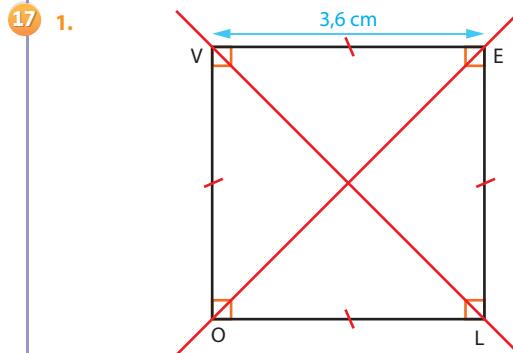
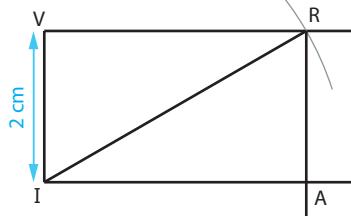
C'est l'occasion de rappeler que tout carré est un rectangle, un losange et un parallélogramme.
Tout rectangle est un parallélogramme.
Tout losange est un parallélogramme.



2. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

3. Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.

4.



2. VELO est un carré de centre M.

Les diagonales d'un carré **se coupent en leur milieu**, sont perpendiculaires et de même longueur.

Donc M est le milieu de [VL] et [OE].

$$(VL) \perp (EO)$$

$$VL = OE$$

Ce qui est en bleu et vert ne sert pas ici, mais cela pourrait servir plus tard.

3. On a vu que M est le milieu de [VL].

Le cercle de centre M et de rayon 4 cm coupe (OE) en I et A. Donc M est le milieu de [IA] et IA = 8 cm.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc VILA est un parallélogramme.

4. On sait que $(VL) \perp (EO)$.

Or I et A sont deux points de (EO).

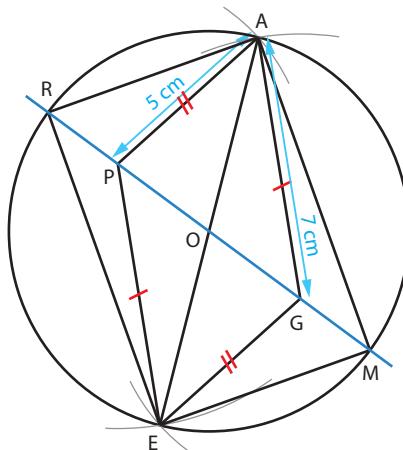
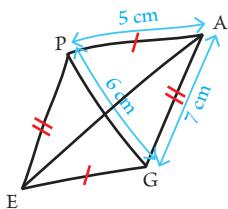
$$(VL) \perp (IA)$$

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors c'est un losange.

Donc VILA est un losange.

18

1.



2. O est le centre du cercle de diamètre [AE].

Donc O est le milieu de [AE].

Ce cercle coupe (PG) en R et M, donc O est le milieu de [RM]. Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc RAME est un parallélogramme.

3. [AE] et [RM] sont deux diamètres d'un même cercle, donc $AE = RM$.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc RAME est un rectangle.

Bilan 2. et 3.

On peut faire remarquer aux élèves qu'il y a d'autres façons d'arriver au même résultat, en formulant deux propriétés de la leçon en une. Cela peut être un travail fait à l'oral avec les élèves, ce qui fait travailler le domaine 1 (langue française comme langage mathématique). Mais il serait fastidieux d'écrire dans la leçon toutes les combinaisons possibles de propriétés et ce n'est pas l'esprit du programme.

Voilà à quoi on pourrait arriver (les couleurs sont importantes pour se repérer) :

O est le centre du cercle de diamètre [AE].

Donc O est le milieu de [AE].

Ce cercle coupe (PG) en R et M donc O est le milieu de [RM] et $AE = RM$.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc RAME est un rectangle.

Problèmes

Les problèmes qui sont posés dans ce chapitre sont autant de situations où l'élève doit raisonner en s'appuyant sur les propriétés des quadrilatères. Cependant la rédaction formalisée dans un langage mathématique des justifications peut être longue et fastidieuse pour certains problèmes, en particulier les problèmes 23, 27, 30, 35.

Sauf pour des élèves déjà performants, il peut ne pas être pertinent de se montrer exigeant en même temps sur le fond (la difficulté, le nombre de pas de raisonnement) et la forme (le langage mathématique, l'ordre des arguments, l'exhaustivité). On pourra alors donner la priorité au raisonnement, dont la place est centrale dans le programme du cycle 4. On peut interroger les élèves à l'oral pour vérifier s'ils ont fait le bon raisonnement, sans être trop exigeant

sur les écrits. On peut aussi les faire rédiger en groupe, avec accompagnement de l'enseignant ou aller-retour entre la maison et la classe (le professeur fait des remarques et les élèves améliorent leurs écrits). On peut aussi donner certains problèmes en devoir maison, avec 1 ou 2 allers-retours maison-classe.

Selon les élèves, on pourra différencier les attentes et les modalités de mise en œuvre (seul ou en groupe, oral ou écrit, coups de pouce).

19

Cerf-volant

Pour que le cerf-volant soit un losange, il faut que les deux bâtons du cerf-volant soient placés perpendiculairement en leur milieu.

20

En piste !

La piste est un cercle. Les deux diamètres de la piste ont le même milieu et la même longueur.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

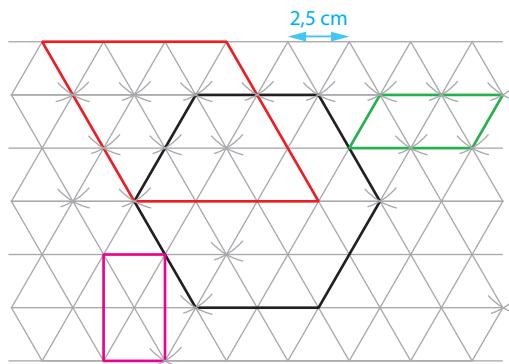
Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc la figure tracée est un rectangle.

21

Pavage triangulaire

L'élève peut utiliser uniquement le compas pour créer les triangles équilatéraux. Il peut également tracer les parallèles à partir de plusieurs points, mais les risques d'imprécision sont plus grands.



22

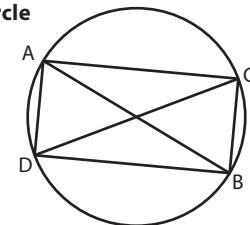
Triangle inscrit dans un demi-cercle

1. [AB] et [CD] sont deux diamètres d'un même cercle.

Donc [AB] et [CD] ont le même milieu, le centre du cercle, et ils sont de même longueur.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle.



Donc ACBD est un rectangle.

2. ABCD est un rectangle donc ABC est un triangle rectangle.

3. « Si les trois sommets d'un triangle sont situés sur un cercle et qu'un des côtés est un diamètre, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le diamètre. »

23

Axes de symétrie

Il peut s'avérer long et difficile de rédiger parfaitement la solution à ce problème. Dans l'objectif d'un apprentissage progressif de la démonstration, on pourra se contenter dans un premier temps d'une justification à l'oral. Ensuite, par groupes de quatre, les élèves pourraient rédiger ensemble leurs justifications, l'enseignant y apportant des remarques et l'écrit étant amélioré petit à petit.

Ce problème peut aussi être proposé en approfondissement pour les élèves qui ont un grand niveau de maîtrise.

1. a. ABCD est un losange.

Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu perpendiculairement.

Donc (AC) est la médiatrice de [BD].

Donc les triangles ACB et ACD sont symétriques par rapport à l'axe (AC).

Donc (AC) est un axe de symétrie de ABCD.

De même : (BD) est la médiatrice de [AC].

Donc les triangles BDA et BDC sont symétriques par rapport à l'axe (BD).

Donc (BD) est un axe de symétrie de ABCD.

- b.** Les diagonales d'un losange sont deux axes de symétrie de ce losange.

- 2. a.** ABCD est un rectangle, donc $(AB) \parallel (DC)$.

De plus, $(FH) \perp (AB)$.

Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc $(FH) \perp (DC)$.

AFHD est un quadrilatère avec 4 angles droits.

Donc AFHD est un rectangle.

Les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur.

Donc $AB = DC$ et $AF = DH$.

Comme F est le milieu de [AB], alors H est le milieu de [DC]. Alors (FH) est perpendiculaire au segment [DC] et le coupe en son milieu.

Donc (FH) est la médiatrice du segment [DC].

Pour démontrer que (EG) est aussi la médiatrice de [BC], c'est exactement le même raisonnement.

- b.** On en déduit que [AD] et [BC] sont symétriques par rapport à l'axe (FH), donc (FH) est un axe de symétrie de ABCD.

De même, (EG) est un axe de symétrie de ABCD.

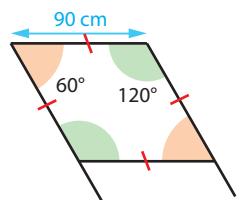
- c.** Les médiatrices des côtés d'un rectangle sont deux axes de symétrie de ce rectangle.

- 3. a.** Donc les diagonales et les médiatrices des côtés d'un carré sont des axes de symétrie de ce carré.

- b.** Un carré est à la fois un losange et un rectangle.

24 Architecture contemporaine

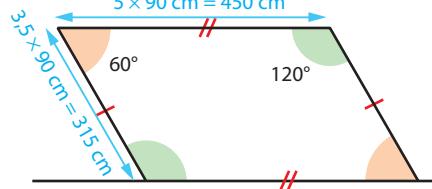
1. $90 \text{ cm} \div 50 = 1,8 \text{ cm}$



2. La partie vitrée est bordée de losanges identiques qui pavent la façade de cet immeuble. Leurs côtés forment donc deux familles de parallèles qui forment entre elles des angles de 60° et de 120° .

Donc cette partie vitrée est un parallélogramme.

3. $5 \times 90 \text{ cm} = 450 \text{ cm}$



Cette partie vitrée a pour côtés 450 cm horizontalement et 315 cm latéralement.

4. $315 \text{ cm} \div 50 = 6,3 \text{ cm}$ et $450 \text{ cm} \div 50 = 9 \text{ cm}$.

25 Un petit peu droit

On nomme ABCD ce parallélogramme et on considère qu'il a un angle droit en A.

On place un point E sur [AD] à l'extérieur de [AD].

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont deux à deux de même mesure.

Donc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$

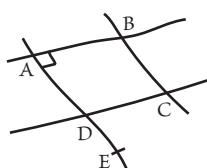
et $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux.

Donc les parallèles (AB) et (CD) forment avec la sécante (AD) des angles alternes-internes égaux.

Donc $\widehat{CDE} = \widehat{DAC} = 90^\circ$.

De plus, $\widehat{ADC} + \widehat{CDE} = 180^\circ$.



Donc $\widehat{ADC} = 90^\circ$.

Donc on a également $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Les 4 angles de ABCD sont droits, c'est donc un rectangle.

On a démontré la propriété suivante :

Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

26 Tour de losanges

- 1.** La tour est pavée de losanges.

(HJ), confondue avec (PQ), est horizontale.

Chaque losange a les diagonales qui se coupent en leur milieu perpendiculairement.

Donc [JI], diagonale de FITJ, est verticale.

Donc (IJ) et (HJ) sont perpendiculaires.

- 2.** Les losanges sont identiques, donc $GI = HJ$ et $GH = IJ$.

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

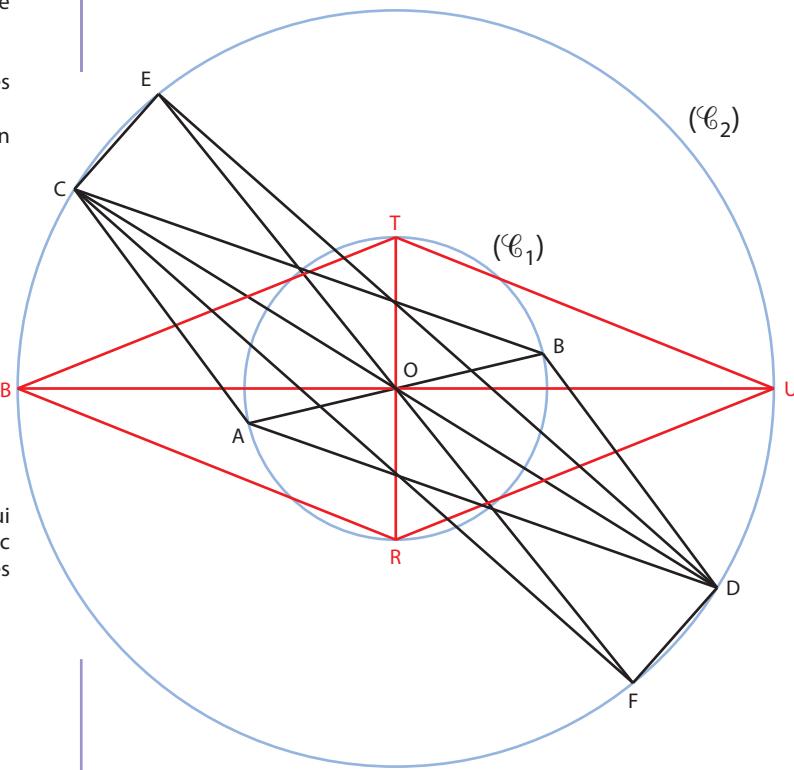
Donc GIJH est un parallélogramme.

Donc (GI) et (HJ) sont parallèles.

- 3.** La hauteur d'un étage correspond à la moitié d'une diagonale verticale d'un des losanges identiques. Donc chaque étage a la même hauteur.

27 Ronds dans l'eau (1)

- 1.** Voir le schéma ci-dessous.



- 2.** Les diagonales de ACBD sont deux diamètres respectifs des cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) de centre O.

Donc O est le milieu de [AB] et [CD].

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc ACBD est un parallélogramme.

- 3.** Les diagonales de DFCE sont deux diamètres du même cercle (\mathcal{C}_2) de centre O.

Donc O est le milieu de [EF] et [CD] avec $EF = CD$.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc DFCE est un rectangle.

- 4. a.** Voir figure en 1.

- b.** [BU] est un diamètre du cercle (\mathcal{C}_2) .

[TR] est un diamètre du cercle (\mathcal{C}_1) tel que $(BU) \perp (TR)$.

On est dans la situation de la question 2., donc BRUT est un parallélogramme.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires alors c'est un losange.

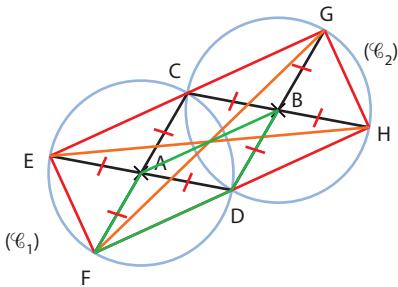
Donc BRUT est un losange.

28

Ronds dans l'eau (2)

On peut attendre des justifications orales pour la majorité des élèves, ou simplement des explications de type narratif. Elles seront rarement exhaustives.

1.



2. Les points C et D appartiennent aux cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) de centres respectifs A et B et de même rayon.

Donc $AC = AD = BC = BD$.

Donc $ABCD$ est un losange.

3. $[FC]$ et $[ED]$ sont deux diamètres du cercle (\mathcal{C}_1) donc ils ont le même milieu A et la même longueur.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc $FDCE$ est un rectangle.

De même, on peut montrer que $DHGC$ est un rectangle.

On va maintenant montrer que $ABCD$ et $FDCE$ sont symétriques par rapport à (DC) . Pour cela, il faut montrer qu'ils ont les mêmes dimensions.

Les rectangles $FDCE$ et $DHGC$ ont un côté commun : $[CD]$.

Donc $CD = EF = GH$.

$ABCD$ est un losange.

Les côtés opposés d'un losange sont parallèles.

Donc $(CA) \parallel (BD)$.

A est le milieu de $[FC]$, B est le milieu de $[DG]$ et $FC = DG$.

Donc $[FC]$ et $[DG]$ sont parallèles et de même longueur.

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc $FCGD$ est un parallélogramme.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Donc $CG = FD$.

On en déduit que les rectangles $FDCE$ et $DHGC$ ont les mêmes dimensions, ils sont donc symétriques par rapport à la droite qui porte leur côté commun (DC).

4. On a démontré que $FGDC$ est un parallélogramme à la question 3.

5. Les rectangles $FDCE$ et $DHGC$ sont symétriques par rapport à la droite (DC), donc $AGHF$ est un rectangle.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.

Donc $EH = FG$.

6. $FDGC$ est un parallélogramme, donc $(FC) \parallel (DG)$.

A est le milieu de $[FC]$ et B est le milieu de $[GD]$.

Donc $(FA) \parallel (DB)$ et $FA = DB$.

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc $FDBA$ est un parallélogramme.

7.

Cette question relève de l'approfondissement et peut ne pas être proposée à tous les élèves.

(CD) est un axe de symétrie du rectangle $EGHF$ et du losange $ACBD$, donc le centre de ces deux parallélogrammes est forcément sur cet axe de symétrie puisqu'il est son propre symétrique.

De plus, les points C et D doivent être symétriques par rapport à ce centre.

Donc le rectangle $EGHF$ et le losange $ACBD$ ont le même centre : le milieu du segment $[CD]$.

Donc les diagonales $[EH]$, $[GF]$, $[CD]$ et $[BA]$ sont concourantes en un point : ce centre.

29

Parallélogram

ABCD is a parallelogram.

In a parallelogram, opposite angles are equal.

The measure of the angle \hat{B} is 51° .

30

Cocotte en papier

1. (EI) et (TP) sont deux axes de symétrie du carré GRAN.

Donc (EI) est la médiatrice de $[RA]$ et (TP) est la médiatrice de $[GR]$.

Donc PREO a 3 angles droits en P, R et E. C'est donc un rectangle.

De plus, $PR = RE$.

Donc PREO est un carré.

2. Par rapport aux axes de symétrie (EI) ou (TP) :

- le carré PREO est symétrique aux quadrillatères PGIO, OEAT.

- OEAT est symétrique à IOTN.

Donc ces 4 quadrillatères sont superposables, ce sont des carrés identiques.

Donc $IP = PE = ET = TI$.

Donc PETI est un losange.

Ses diagonales [EI] et [PT] sont de même longueur.

Donc PETI est un carré.

3. On peut compter 16 carrés formés de 2 petits triangles, 4 carrés formés de 4 petits carrés, 4 carrés formés de 9 petits carrés et enfin 1 grand carré formé de 16 petits carrés.

Au total, on a pu compter 25 carrés visibles.

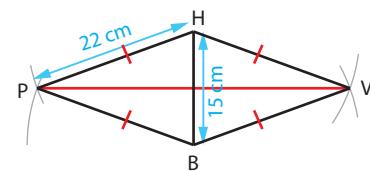
31

Changer une roue

1. PHVB est un losange, donc ses diagonales $[PV]$ et $[HB]$ sont perpendiculaires.

Comme (PV) est horizontal, alors l'axe (BH) est vertical.

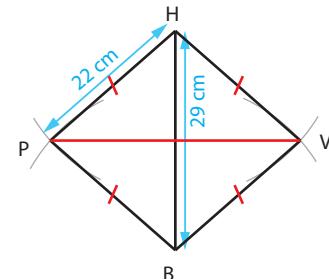
2. a. Pour faire la construction à l'échelle 1/10, on prend 2,2 cm pour 22 cm et 1,5 cm pour 15 cm.



b. On mesure sur le dessin à l'échelle 1/10 : $PV \approx 4$ cm.

Donc, en réalité, la longueur du pas de vis PV est d'environ 40 cm dans cette position.

3. a.



b. Cette fois, on mesure : $PV \approx 3,1$ cm.

Donc, en réalité, la longueur du pas de vis PV est d'environ 31 cm dans cette position.

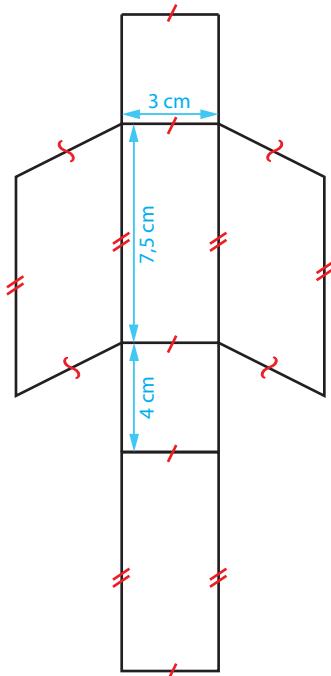
32

Funiculaire de Pau (1908)

1. La face latérale de la cabine du funiculaire est un parallélogramme.

2. a. Cette cabine n'est pas un parallélépipède rectangle puisque ses faces ne sont pas toutes des rectangles.

b. et c. À l'échelle 1/100, 1 m est représenté par 1 cm. Voir figure page suivante.



35 Qui suis-je ?

Il peut être très intéressant de faire cet exercice avec un logiciel de géométrie dynamique, il est dans la continuité du problème 41 p. 470 (voir le fichier).

On nomme Z le centre du carré DOCK.

En considérant la rotation de centre Z , d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

Le triangle KBD est l'image du triangle DLO.

Donc $(KB) \perp (DL)$.

De même, on obtient :

$(DL) \perp (OU)$, $(OU) \perp (EC)$ et

$(EC) \perp (KB)$.

Donc WHAT a 4 angles droits, c'est un rectangle.

Par cette même rotation, le côté [WH] a pour image le côté [TW]. Donc $WH = TW$.

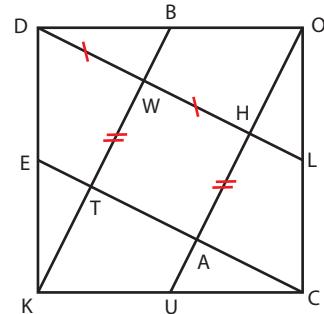
Les côtés opposés d'un rectangle sont de même mesure.

Donc $WH = TA = TW = HA$.

Donc WHAT est un carré.

Pour montrer que l'aire de WHAT est inférieure au quart de celle de DOCK :

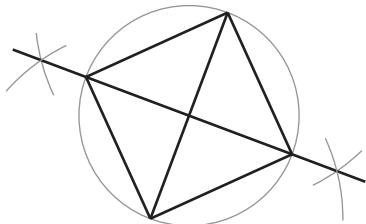
Avec le logiciel de géométrie dynamique, il suffit de faire apparaître ces deux aires.



33 Construire un carré sans équerre

On a vu au problème 27 le lien qu'il y a entre cercle, diamètres et rectangle ou losange. Ces liens seront exploités ici et dans le problème 34.

1.



2. On a tracé un cercle et un diamètre de ce cercle.

À partir de ce diamètre, on a utilisé le compas pour construire la médiatrice de ce diamètre, elle recoupe le cercle en deux points.

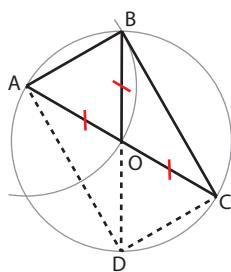
Le quadrilatère obtenu est un rectangle puisqu'il est inscrit dans un cercle dont ses diagonales sont deux diamètres. C'est aussi un losange puisque ses diagonales sont perpendiculaires.

Donc c'est un carré.

Il sera sûrement plus aisément que les élèves nomment les sommets du quadrilatère pour faciliter la rédaction.

34 Construire un triangle rectangle sans équerre

1.



2. On a tracé un cercle de centre O et un diamètre $[AC]$ de ce cercle.

On a tracé un arc de cercle de centre A et de rayon AO , il coupe le cercle en B .

On a tracé le diamètre $[BD]$.

ABCD est inscrit dans un cercle dont ses diagonales sont deux diamètres, c'est donc un rectangle.

Donc ABC est un triangle rectangle.

De plus, $AO = AB$.

Donc l'hypoténuse de ABC mesure le double du côté $[AB]$.

• Approche n° 1

DOCK est constitué de 4 carrés identiques : DBZE, OBZL, LZUC et UZEK.

Pour montrer que l'aire de WHAT est moins du quart de l'aire de DOCK, il suffit donc de montrer que le côté du carré WHAT est plus petit que le côté du carré DBZE.

DHO est un triangle rectangle en H, donc $DO > DH$.

On montre que DHO et QWB sont semblables et que le rapport est de $1/2$.

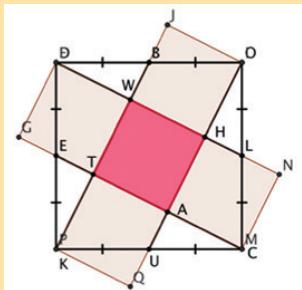
On obtient donc que $DB > DW$ et $DW = WH$.

Donc le côté du carré WHAT est plus petit que le côté du carré DBZE.

• Approche n° 2

On fait directement chercher aux élèves la relation entre ces deux aires. Pour cela, il faut leur faire construire les 4 carrés extérieurs à WHAT qui ont pour côtés $[WH]$, $[HA]$, $[AT]$ et $[TW]$.

Avec un logiciel de géométrie dynamique, il suffit de construire 4 polygones réguliers à 4 cotés en partant des sommets de WHAT.



Les élèves vont vite se rendre compte que l'aire de DOCK est égale à 5 fois celle de WHAT.

Voici les étapes d'un raisonnement possible :

On montre que B est le milieu de $[WJ]$, puis que les triangles DWB et BJO sont égaux.

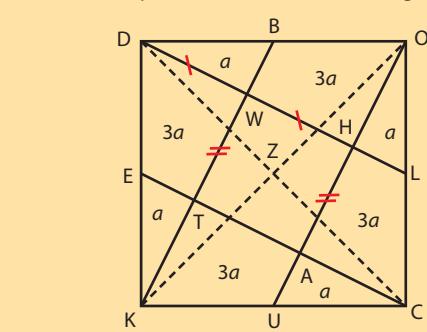
Donc, si on additionne les aires des 4 carrés autour de WHAT, on obtient l'aire de DOCK.

Or ces 4 carrés sont de même côté que WHAT.

Donc : Aire DOCK = $5 \times$ Aire WHAT.

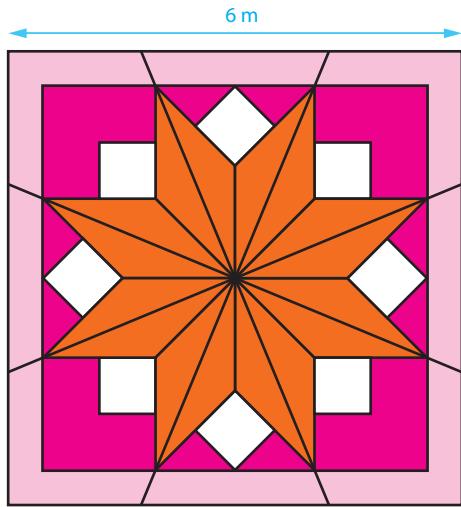
• Approche n° 3

On raisonne à partir de l'aire d'un des triangles rectangles.



Voici les étapes d'un raisonnement possible :
 On montre que DHO et QWB sont semblables et que le rapport est de 1/2.
 On en déduit que aire DHO = $4 \times$ aire DBW.
 On a noté a l'aire de DBW pour plus de commodité dans l'enchainement des raisonnements.
 Aire DLO = $4a + a = 5a$
 Donc aire DOCK = $16a +$ aire WHAT.
 Or DOL est la moitié du rectangle DOLE, donc :
 Aire DOCK = $4 \times$ Aire DOL = $4 \times 5a = 20a$
 Donc $16a +$ aire WHAT = $20a$.
 Donc aire WHAT = $4a$ et aire DOCK = $20a$.
 Donc l'aire de WHAT est un cinquième de l'aire de DOCK.

36 À table !



37 Les boucles d'oreilles

Les élèves peuvent utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour faire une construction, faire apparaître les aires et faire bouger les points afin d'émettre une conjecture.

Naturellement, les élèves voudront placer les sommets du losange vert entre les sommets du losange bleu et du carré rouge. Mais il est plus délicat de trouver la hauteur de la boucle et de prouver ce que l'on avance.

Pour cela, ils doivent exploiter la formule de l'aire d'un triangle ou d'un losange.

On a placé les points E, G, F et H sur la diagonale [BD] avec :

$$OE = EG = GB = OF = FH = HD = 0,75 \text{ cm}$$

On prouve que cela répond au problème :

$$\text{Aire du Carré rouge} : 4 \times 0,75^2 = 2,25 \text{ cm}^2$$

La surface verte est formée de 4 triangles identiques : AGE, CGE, AFH et CFH.

Pour le triangle AGE, la hauteur associée au côté [GE] est 0,75 cm.

$$\begin{aligned} \text{Aire AGE} &= \frac{GE \times 0,75}{2} \\ &= \frac{0,75 \times 0,75}{2} = 0,5625 \end{aligned}$$

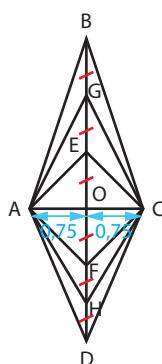
Donc l'aire de la surface verte est :

$$4 \times 0,5625 \text{ cm}^2 = 2,25 \text{ cm}^2$$

De même, on montre que la surface bleue est de $2,25 \text{ cm}^2$.

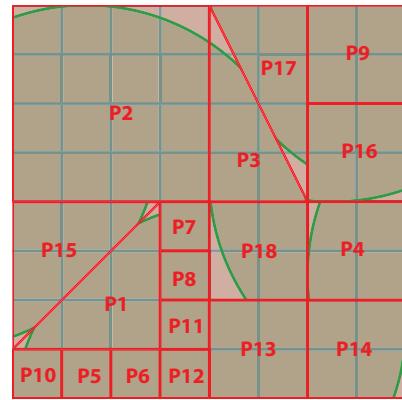
$$BD = 6 \times 0,75 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$$

La boucle d'oreille doit avoir une hauteur de 4,5 cm et les points noirs doivent être régulièrement espacés de 0,75 cm.



38 Papyrus Rhind

1.



2. L'aire du disque de rayon 4,5 cm est, en cm^2 :

$$\pi \times 4,5^2 = 20,25\pi \approx 63,61$$

L'aire du Carré de côté 8 cm est 64 cm^2 .

Donc l'aire du disque de rayon 4,5 cm n'est pas égale à l'aire du Carré de côté 8 cm.

Algorithmique et outils numériques

39 Frises

1.

Le chat est trop gros pour qu'on visualise bien la construction. On peut conseiller aux élèves de le masquer ou de le réduire comme dans les exemples de script 2 et 3 ci-après.

Exemple 1

```
quand flag cliqué
  s'orienter à 90°
  aller à x: 0 y: 0
  stylo en position d'écriture
  effacer tout
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
```

Exemple 2

```
quand flag cliqué
  masquer
  s'orienter à 90°
  aller à x: 0 y: 0
  stylo en position d'écriture
  effacer tout
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
```

Exemple 3

```
quand flag cliqué
  mettre à 20 % de la taille initiale
  s'orienter à 90°
  aller à x: 0 y: 0
  stylo en position d'écriture
  effacer tout
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 40
  tourner ⚡ de 140 degrés
```

2. Exemple de réponse :

```

quand drapeau cliqué
  mettre à 20 % de la taille initiale
  s'orienter à 90°
  aller à x: 0 y: 0
  stylo en position d'écriture
  effacer tout
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 140 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 40 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 140 degrés

```

3.

L'élève devra penser à trois choses :

- comme le chat revient en position initiale, il faut le faire repartir depuis l'autre coin du losange (en faisant avancer de 50, par exemple).
- ne plus effacer tout et cliquer sur le drapeau 6 fois OU

```
répéter 6 fois
```

faire une boucle avec le bloc  autour des blocs « avancer » et « tourner ».

- faire démarrer le chat de la gauche, sans quoi la figure n'est pas visible.

Exemple de réponse :

```

quand drapeau cliqué
  mettre à 20 % de la taille initiale
  effacer tout
  aller à x: -240 y: 0
  s'orienter à 90°
  stylo en position d'écriture
  répéter 6 fois
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 40 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 140 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 40 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 140 degrés
    avancer de 50

```

4. Exemple :

```

quand drapeau cliqué
  mettre à 20 % de la taille initiale
  effacer tout
  aller à x: -240 y: 0
  s'orienter à 90°
  stylo en position d'écriture
  répéter 6 fois
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 90 degrés
    avancer de 50

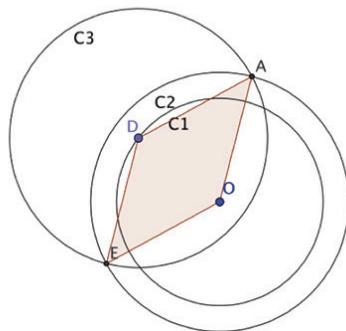
```

Il est intéressant d'inciter les élèves qui ont fini rapidement à agrémenter leur script afin de créer des figures géométriques riches.

40 Déformation

1.

$r = 4$



2. OADE semble être un losange, quelle que soit la position du point D.

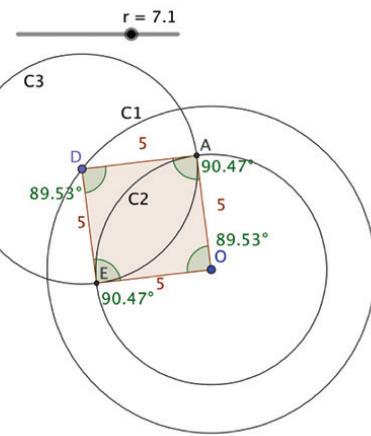
3. Les cercles (\mathcal{C}_2) et (\mathcal{C}_3) ont pour centres respectifs O et D et pour rayon 5 cm.

Ces deux cercles se coupent en deux points A et E.

Donc DA = DE = OA = OE = 5 cm.

Donc OADE est un losange.

4. En faisant bouger le point D, le losange OADE est proche d'être un carré pour r proche de 7,1.



Pour que OADE soit un carré, il faut qu'il soit constitué de quatre triangles rectangles égaux dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm.

Le théorème de Pythagore nous permet de calculer la longueur de l'hypoténuse de ces triangles :

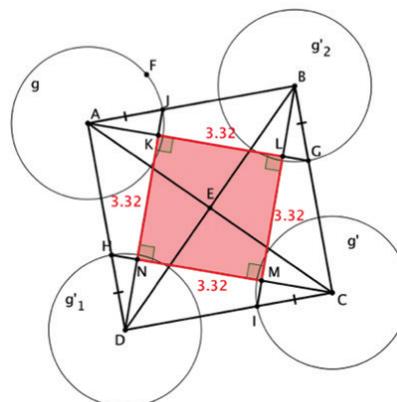
$$r^2 = DA^2 + AO^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

Donc $r = \sqrt{50} \text{ cm} \approx 7,07 \text{ cm}$.

On a donc trouvé une valeur exacte de r pour laquelle le losange OADE est un carré : $r = \sqrt{50} \text{ cm}$.

41 Carré : oui ou non

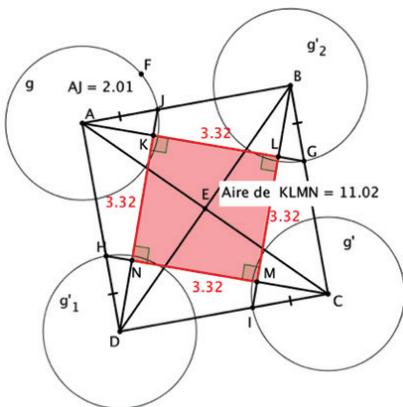
1. et 2.



3.

La question est :

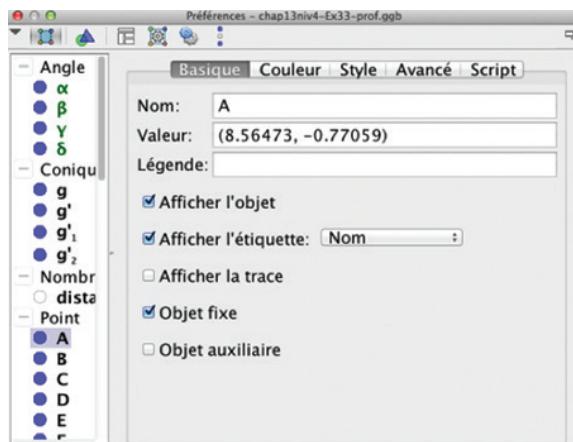
« Faire apparaître la longueur AJ et l'aire de KLMN. Déplacer le point F. Y a-t-il une relation de proportionnalité entre la longueur AJ et l'aire de KLMN ? Justifier. »



L'élève déplace le point F et relève plusieurs fois la longueur AJ et l'aire de KLMN correspondante. Il peut rapidement trouver un contre-exemple qui permet de montrer qu'il n'y a pas de relation de proportionnalité.

Attention, ces valeurs dépendent aussi des dimensions du carré ABCD donc aucun élève n'aura les mêmes couples de valeurs.

On peut conseiller aux élèves de fixer les points A, B, C et D.



AJ	1,75	2,01	4,02
Aire de KLMN	13,06	11,02	1,51

$$2 \times 2,01 = 4,02 \text{ mais } 2 \times 11,02 \neq 1,51.$$

L'aire de KLMN n'est pas proportionnelle à la longueur BG.

Enrichissement :

- Faire plusieurs relevés et faire construire la représentation graphique de cette relation.
- Faire le problème 35.

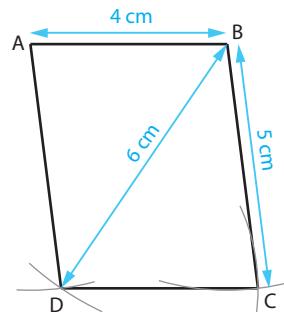
Travailler autrement

Deux énoncés pour un exercice

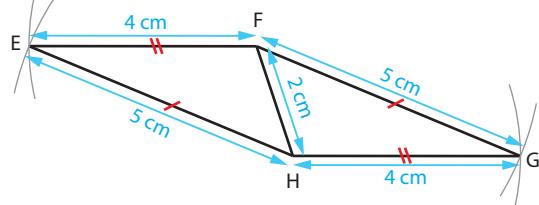
La différence entre ces deux exercices 1 se situe au niveau de la diagonale : avec valeur numérique donnée ou non. Elle repose aussi sur la progressivité et les étapes du raisonnement, détaillé dans le vert, à trouver par l'élève dans le rose.

Exercice 1

1. a.



b.



$$\text{c. } AB = CD = 4 \text{ cm et } BC = DA = 5 \text{ cm.}$$

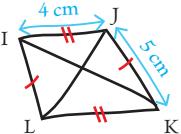
$$EF = GH = 4 \text{ cm ; } FG = HE = 5 \text{ cm.}$$

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc ABCD et EFGH sont des parallélogrammes.

2. a. IJ = KL et JK = IL.

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

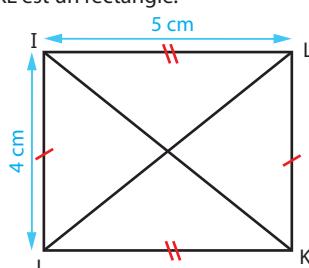


$$\text{c. } IK = JL$$

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

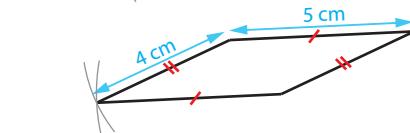
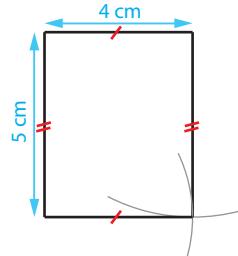
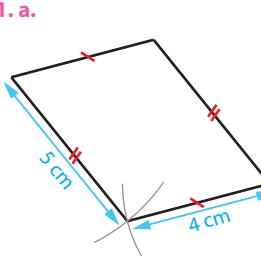
Donc IJKL est un rectangle.

d.



Exercice 1

1. a.

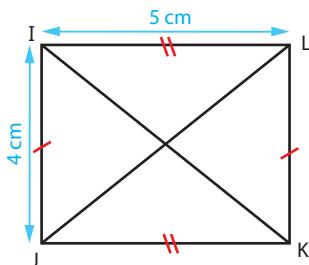


b. Les côtés opposés de ces quadrilatères sont de même longueur deux à deux.

Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc ce sont des parallélogrammes.

2. a. L'élève doit forcément raisonner avant de construire.



b. Comme les autres, IJKL est un parallélogramme.

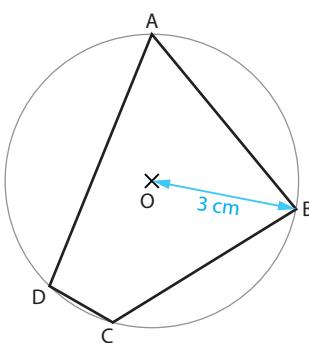
De plus, $IK = JL$.

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc IJKL est un rectangle.

Pour les exercices 2, dans le vert on donne le contre-exemple aux élèves et ils doivent simplement l'exploiter, dans le rose ils doivent l'inventer. De même, les étapes du raisonnement sont plus détaillées dans le vert.

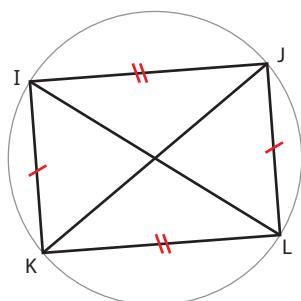
Exercice 2

1. a.



b. L'affirmation est fausse. Le quadrilatère tracé n'est clairement pas un rectangle, c'est un contre-exemple.

2. a.



b. IJKL est un rectangle.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

Donc $[IK]$ et $[JL]$ sont deux segments de même longueur qui ont le même milieu.

Donc le cercle de diamètre $[IK]$ passe par I, J, K et L.

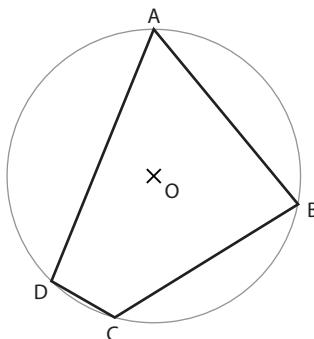
Donc IJKL est inscrit dans ce cercle.

3. Oui, l'affirmation est vraie. Le rectangle IJKL de la question 2. n'avait rien de particulier et nous avons démontré qu'il était inscrit dans un cercle.

Exercice 2

1. Voici un contre-exemple, ci-contre.

Cette affirmation est fausse.



2. On considère que ABCD est un rectangle.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

Donc $[AC]$ et $[BD]$ sont deux segments de même longueur qui ont le même milieu.

Donc le cercle de diamètre $[AC]$ passe par A, B, C et D.

Donc ABCD est inscrit dans ce cercle.

L'affirmation est donc vraie.

Écriture d'un problème

1. Exemple d'énoncé :

- Construire un rectangle ABCD.
Placer les points E, F, G et H respectivement au milieu de $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
Tracer EFGH.
Placer les points I, J, K et L respectivement au milieu de $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$.
Tracer IJKL.
- Quelle est la nature de EFGH ? Justifier.

On pourrait donner à écrire ce problème aux élèves qui ont un bon niveau de maîtrise en leur conseillant de bien détailler leur énoncé afin qu'il soit accessible au plus grand nombre. Ensuite, cet énoncé pourrait être donné aux élèves en difficulté en accompagnement personnalisé et ce sont les « rédacteurs » qui les accompagnent durant la séance (tutorat).

Analyse d'une production

La réponse d'Anna est incomplète, elle n'a pas démontré que VOLT était un parallélogramme. De plus, sa propriété est fausse.

Correction :

$$OL = TV \text{ et } VL = OT.$$

Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc VOLT est un parallélogramme.

$$VL = OT$$

Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc VOLT est un rectangle.

Introduction

Dans l'esprit du cycle, on a passé du temps en début de cycle sur les constructions, notamment de triangles et de quadrilatères, les angles, le parallélisme. Puis les élèves doivent petit à petit valider par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les problèmes de construction ne sont pas pour autant délaissés. Que ce soit avec les instruments de géométrie ou un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation, ils favorisent les représentations et la modélisation.

- Dans le chapitre 36, on a dû aborder la notion de triangles égaux et semblables. Ces notions sont reprises ici, avec des exercices d'application. Dans le chapitre 40, on avait enrichi les connaissances sur les parallélogrammes particuliers (rectangles, losanges et carrés), tout en veillant à ne pas accumuler les propriétés mais à se concentrer sur un petit corpus qui permet de faire beaucoup de raisonnement : les propriétés liées aux diagonales. Ce travail est réinvesti et poursuivi en dans ce chapitre.
- Enfin, un attendu de fin de cycle 4 est d'utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer. Ce chapitre se concentrera plus

encore sur la maîtrise d'un langage adapté pour communiquer ses raisonnements, en essayant de faire progresser petit à petit les élèves, en partant de leurs écrits.

- Les problèmes se situent dans des champs très divers tels que les champs mathématique, scientifique, technologique ou artistique. On poursuit le travail sur les constructions, en lien avec l'art ou le graphisme. Les problèmes amènent à des raisonnements parfois très difficiles et avec plusieurs pas. Ils sont indiqués plus loin. Dans ces problèmes, afin de respecter l'esprit du programme, on favorisera les raisonnements plus que la maîtrise de la démonstration formalisée. On augmentera progressivement nos attentes sur la forme, en différenciant selon le niveau de chaque élève. Le travail en groupe est particulièrement propice à des échanges riches entre élèves afin d'améliorer la communication de leurs idées et la rédaction de leurs justifications. Il est également riche de leur faire voir les productions de chaque groupe et de les commenter de façon constructive.

Activités

Questions flash

1. Cette mosaïque est constituée de rectangles, de carrés, de triangles rectangles isocèles et de losanges.
2. a. Trois triangles rectangles : CFA, CDB et AEB.
b. Trois triangles isocèles non rectangles : CDF, AEF et BDE.

- c. Deux triangles équilatéraux : DEF et ABC.
- d. Deux triangles semblables : DEF et ABC.
- e. Deux triangles égaux : par exemple, AEF et BDE

Le Verrou de l'estuaire de la Gironde

Activité 1

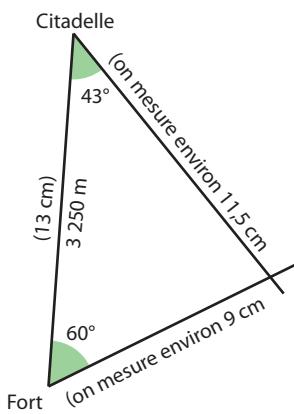
Intentions des auteurs

Les objectifs de cette activité sont de réinvestir les connaissances sur les échelles et les unités de mesure, ainsi que sur les constructions.

Les prérequis nécessaires sont de savoir construire un triangle connaissant un côté et deux angles adjacents, d'utiliser une échelle.

1. Avec un dessin à l'échelle 1/25 000 sur une feuille :

$$3250 \text{ m} = 325 000 \text{ cm} \quad 325 000 / 25 000 = 13$$



On mesure sur son dessin environ 11,5 cm entre le bateau et la citadelle et 9 cm entre le bateau et Fort Médoc.

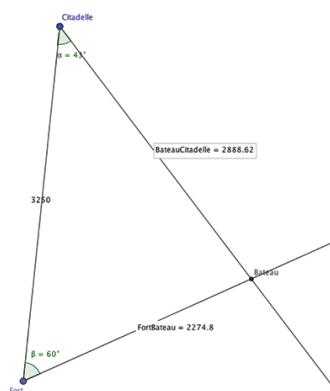
$$11,5 \times 25 000 = 287 500 \text{ et } 287 500 \text{ cm} = 2875 \text{ m}$$

$$9 \times 25 000 = 225 000 \text{ et } 225 000 \text{ cm} = 2250 \text{ m}$$

Le bateau est approximativement à 2 875 m de la citadelle de Blaye et à 2 250 m de Fort Médoc.

Avec un logiciel de géométrie dynamique :

Les élèves peuvent utiliser 3 250 comme longueur entre la citadelle et Fort Médoc ; il faudra simplement qu'ils fassent un grand zoom arrière pour voir le segment en entier.



2. Le bateau est approximativement à 2 888 m de la citadelle de Blaye et 2 274 m de Fort Médoc.
3. Les soldats auront le temps de charger les canons puisque le bateau est à plus de 2 km de la citadelle.

Intentions des auteurs

Les objectifs de cette activité sont de réinvestir les connaissances sur les triangles et les quadrilatères particuliers, les calculs d'aire par comptage d'unités d'aire, de reconnaître une situation qui peut être traitée à l'aide du théorème de Pythagore. Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Pythagore, des calculs d'aire.

1. La pièce A est un triangle rectangle.

La pièce B est un carré.

La pièce C est un parallélogramme.

La pièce D est un rectangle.

La pièce E est un parallélogramme.

La pièce F est un losange.

2. La figure 1 peut être formée avec :

– 2 pièces A et 1 pièce B ;

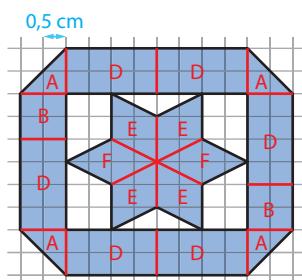
– 4 pièces A ;

– 2 pièces C.

La figure 2 peut être formée avec 2 pièces F.

La figure 3 peut être formée avec 2 pièces E (dont une retournée) et une pièce F.

3. a. et b.



On a utilisé 4 pièces E, 2 pièces F, 6 pièces D, 2 pièces B et 4 pièces A.

c.

Il y a plusieurs façons de calculer, les élèves peuvent même compter les carrés , ce qui permet au passage de redonner du sens au centimètre carré (qui est le carré de côté 1 cm). Trouver les surfaces des pièces E et F permet de revoir l'aire d'un parallélogramme et d'un losange par découpage et assemblage pour retrouver un rectangle.

Surface de chaque pièce :

$$A : 0,5 \text{ cm}^2 ; B : 1 \text{ cm}^2 ; D : 2 \text{ cm}^2 ; E : 1 \text{ cm}^2 ; F : 1 \text{ cm}^2 .$$

$$4 \times 1 + 2 \times 1 + 6 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times 0,5 = 22$$

La surface bleue a pour aire 22 cm^2 .

d.

L'élève devra utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur des coins biseautés.



La pièce A est un triangle rectangle, je peux donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$1^2 + 1^2 = 2$$

L'hypoténuse a pour longueur $\sqrt{2}$ cm.

$$3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times \sqrt{2} = 14 + 4\sqrt{2}$$

La valeur exacte de la longueur du contour extérieur de cette figure est $14 + 4\sqrt{2}$ cm, soit approximativement 19,7 cm.

Un élève qui aura pris 1,4 cm comme valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtiendra 19,6 cm comme longueur.

À la manière de Théo van Doesburg

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir les connaissances sur les triangles égaux et semblables.

Le prérequis nécessaire est la connaissance de la définition des triangles égaux et des triangles semblables.

1. Dans le petit rectangle, les côtés opposés sont de même longueur. Donc les deux triangles T_1 et T_2 ont leurs trois côtés de même longueur 2 à 2. Donc T_1 et T_2 sont égaux.
2. Je partage le rectangle moyen en deux triangles T_3 et T_4 et le grand rectangle en deux triangles T_5 et T_6 . Comme le rectangle moyen est un agrandissement de rapport 2 du petit rectangle, alors :

$$\text{Dimensions de } T_1 \xrightarrow{\times 2} \text{Dimensions de } T_3$$

De même :

$$\text{Dimensions de } T_3 \xrightarrow{\times 1,7} \text{Dimensions de } T_5$$

Donc :

$$\text{Dimensions de } T_1 \xrightarrow{\times 2 \times 1,7} \text{Dimensions de } T_5$$

$$\text{Dimensions de } T_1 \xrightarrow{\times 3,4} \text{Dimensions de } T_5$$

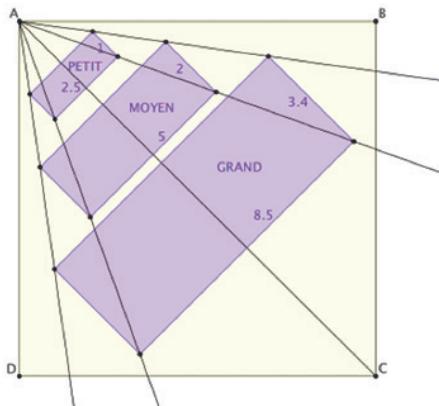
Alors les triangles T_1 et T_5 sont semblables.

De même, T_3 et T_5 sont semblables.

3. Les dimensions de T_3 et T_5 sont :

- les angles sont de même mesure que ceux de T_1 ;
- les longueurs des côtés de T_1 sont multipliées par 2 pour obtenir celles de T_3 ;
- les dimensions de T_1 sont multipliées par 3,4 pour obtenir celles de T_5 .

4. On obtient :



Il est intéressant de faire cette construction avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut (re)voir les homothéties à cette occasion.

Programme de construction :

- construire un carré ABCD de côté 10 cm, tracer la diagonale [AC] ;
- construire le rectangle « PETIT » de côtés 2,5 cm et 1 cm de façon à ce que la diagonale du carré soit la médiatrice des côtés de longueur 2,5 cm ;
- tracer les quatre demi-droites d'origine A passant par les quatre sommets du rectangle « PETIT » ;
- construire le rectangle « MOYEN » image du rectangle « PETIT » par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ;
- construire le rectangle « GRAND » image du rectangle « PETIT » par l'homothétie de centre A et de rapport 3,4.

Exercices

Utiliser les propriétés des angles et des triangles

Questions flash

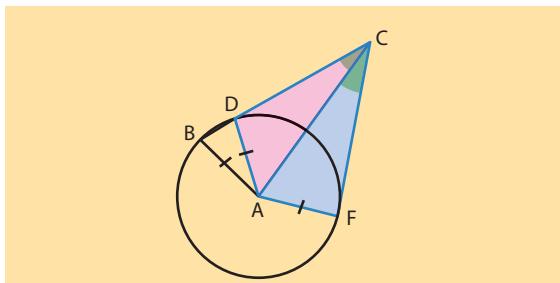
- 1** Quatre couples d'angles alternes-internes de même mesure :
 $\widehat{FCD} = \widehat{CDK}$ $\widehat{BCD} = \widehat{CDA}$
 $\widehat{LBA} = \widehat{IAB}$ $\widehat{CBG} = \widehat{GAD}$
 - 2** Les droites (AB) et (DC) et la sécante (EF) forment deux angles alternes-internes de même mesure, donc (AB) et (DC) sont parallèles.
 - 3** Expression de la mesure de l'angle manquant en fonction de x : $180 - x - 2x = 180 - 3x$.
 - 4** Les droites (FD) et (GA) avec la sécante (AC) forment les deux angles alternes-internes \widehat{GAC} et \widehat{ACD} .
Pour que (FD) et (GA) soient parallèles, il faut que :
 $\widehat{GAC} = \widehat{ACD}$
 \widehat{ACD} et \widehat{ACF} forment un angle plat et \widehat{ACF} mesure 43° , donc :
 $\widehat{ACD} = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$.
Il faut donc que \widehat{GAC} mesure également 137° .
 - 5** La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
Dans le triangle ABC :
 $\widehat{ACB} = 180^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 36^\circ$
Les points B, A et D sont alignés, donc $\widehat{DAC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.
Le triangle ACD est isocèle en D, donc :
 $\widehat{ACD} = \widehat{DAC} = 72^\circ$ et $\widehat{ADC} = 180^\circ - 2 \times 72^\circ = 36^\circ$
Les parallèles (BA) et (EC) et la sécante (BC) forment des angles alternes-internes de même mesure, donc $\widehat{ECB} = \widehat{ABC} = 36^\circ$.
Dans le triangle BEC :
 $\widehat{CBE} = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$
 - 6** **1.** La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
Dans le triangle ABC :
 $\widehat{BAC} = 180^\circ - 105^\circ - 42^\circ = 33^\circ$
 - 2.** Les droites (AD) et (BC) et la sécante (AC) forment deux angles alternes-internes de même mesure :
 $\widehat{DAC} = \widehat{ACB} = 42^\circ$
Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
 - 3.** (AB) // (CD) et (AD) // (BC)
Donc ABCD est un parallélogramme.
 - 4.** Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.
Donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 105^\circ$.
Dans le triangle ADC :
 $\widehat{ACD} = 180^\circ - 42^\circ - 105^\circ = 33^\circ$
- On peut également utiliser les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (AC) pour trouver la mesure de l'angle \widehat{DAC} .

Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables

Questions flash

- 7** Les triangles sont égaux dans les figures ①, ② et ③.
Pour la figure ④, les deux angles de même mesure ne sont pas compris entre les deux paires de côtés de même longueur.
Cela peut être l'occasion de faire produire aux élèves un contre-exemple, avec ou sans logiciel de géométrie dynamique.

Questions flash



DAC et FAC sont dans la situation de la figure ④. Or ils ne sont pas égaux car l'angle \widehat{ADC} est obtus alors que l'angle \widehat{AFC} est aigu.

- 8** D'après le codage, il n'y a que pour les figures ① et ③ qu'on peut affirmer que les deux triangles sont semblables.

- 9** ABCD est un losange.
Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
Donc, si on nomme Z le point d'intersection des deux diagonales, on a :
 $\widehat{ZA} = \widehat{ZC}$
 $\widehat{ZB} = \widehat{ZD}$
 $\widehat{AZB} = \widehat{BZC} = \widehat{CZD} = \widehat{DZA} = 90^\circ$
Donc les quatre triangles AZB, BZC, CZD et DZA ont deux angles de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux.
Donc ces quatre triangles sont égaux.

- 10** Il peut être difficile pour les élèves de rédiger la réponse dans un langage mathématique maîtrisé, même en fin de cycle 4. Il est intéressant de privilégier le raisonnement dans ce type d'exercice. Ils peuvent être autorisés à regarder le cours et ils doivent repérer la propriété qui peut servir ici. On peut demander une justification orale uniquement, ou rédigée en groupes. On exigera le codage des angles de même mesure sur un schéma, la mention des droites parallèles et de l'égalité entre des angles alternes-internes.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc avec les sécantes (BC) et (AD) elles forment les angles alternes-internes égaux suivants : $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. De plus, AB = DC. Donc les triangles ABE et DCE ont deux côtés de même longueur (AB = DC) avec les deux paires d'angles adjacents à ces côtés de même mesure deux à deux. Donc les triangles ABE et DCE sont égaux.

- 11** **1.** Les droites parallèles (d) et (d') et la sécante (AC) forment des angles alternes-internes de même mesure : $\widehat{EAD} = \widehat{DCF} = 112^\circ$
De plus, CF = AE et CD = AB.
Les triangles FCD et EAB ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.
Donc FCD et EAB sont égaux.
- 2.** Deux triangles égaux ont leurs angles deux à deux de même mesure.
Donc $\widehat{AEB} = \widehat{CFD} = 53^\circ$.
La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
Donc $\widehat{ABE} = 180^\circ - 112^\circ - 53^\circ = 15^\circ$.

- 12** La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .
On calcule l'angle manquant dans chacun des deux triangles :
 $180^\circ - 63^\circ - 48^\circ = 69^\circ$ et $180^\circ - 63^\circ - 69^\circ = 48^\circ$
Les deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, ils sont donc semblables.

- 13** **1.** Les longueurs des côtés des triangles ABC et MNA, de la plus grande à la plus petite, sont :
Triangle ABC : BC = 5,7 cm ; AB = 4,8 cm ; AC = 3,6 cm.
Triangle MNA : MN = 1,9 cm ; MA = 1,6 cm ; NA = 1,2 cm.
On constate que les longueurs sont proportionnelles 2 à 2 :

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{MA} = \frac{AC}{NA} = 3$$

Donc les triangles ABC et AMN sont semblables.

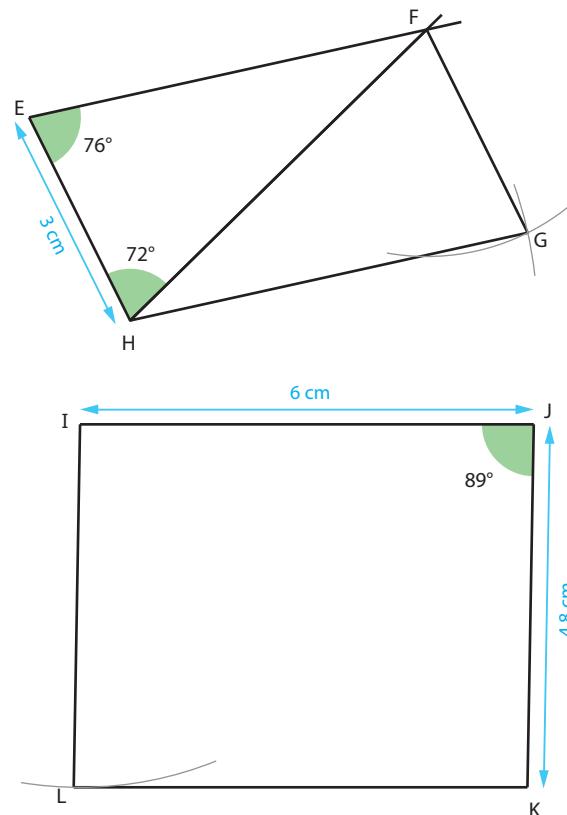
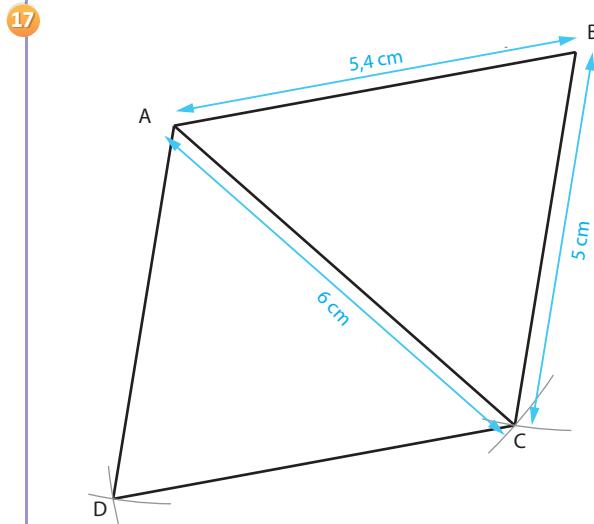
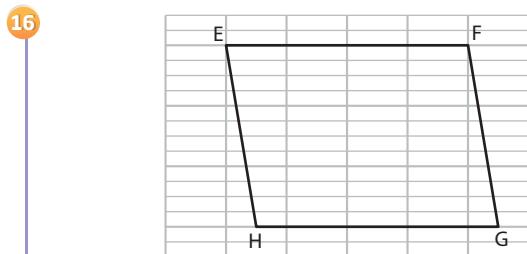
2. Le rapport de réduction pour passer des longueurs de ABC aux longueurs de MNA est $\frac{1}{3}$.

Reconnaitre un parallélogramme

Questions flash

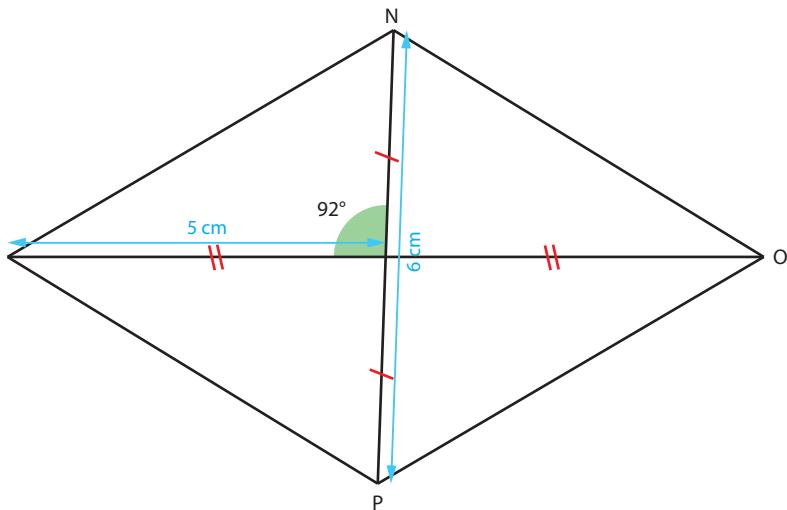
14. 1. TRUC est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
Donc UC = RT = 7,2 cm et RU = TC = 4,3 cm.
2. Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure. Donc $\widehat{RUC} = \widehat{RTC} = 82^\circ$.

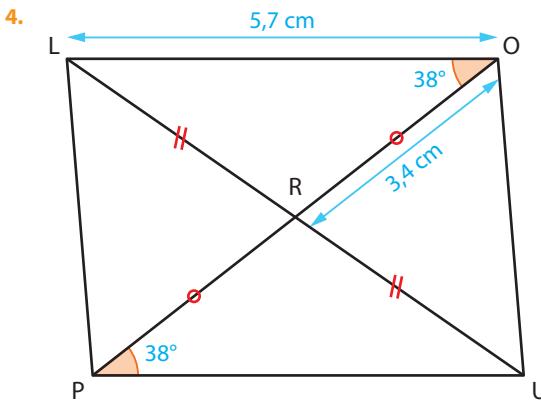
15. Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Les diagonales des deux quadrilatères bleus sont des diamètres de deux cercles de même centre, donc elles ont le même milieu.



Parallélogramme MNOP, voir figure en bas de page.

18. 1. Dessin ① → Propriété ⑤.
Dessin ② → Propriété ④.
Dessin ③ → Propriété ③.
Dessin ④ → Propriété ⑤.
2. Dessin ① → Propriété ⑥.
Dessin ② → Propriété ⑤.
Dessin ③ → Propriété ④.
Dessin ④ → Propriété ⑥ et ④.
19. 1. Les diagonales du quadrilatère LOUP se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.
2. R est le milieu de [OP] et OR = 3,4 cm.
Donc OP = 2 × 3,4 cm = 6,8 cm.
Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
Donc PU = LO = 5,7 cm.
3. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.
Donc les parallèles (LO) et (PU) forment avec la sécante (OP) des angles alternes-internes de même mesure.
Donc $\widehat{LOP} = \widehat{OPU} = 38^\circ$.





Reconnaitre un parallélogramme particulier

Questions flash

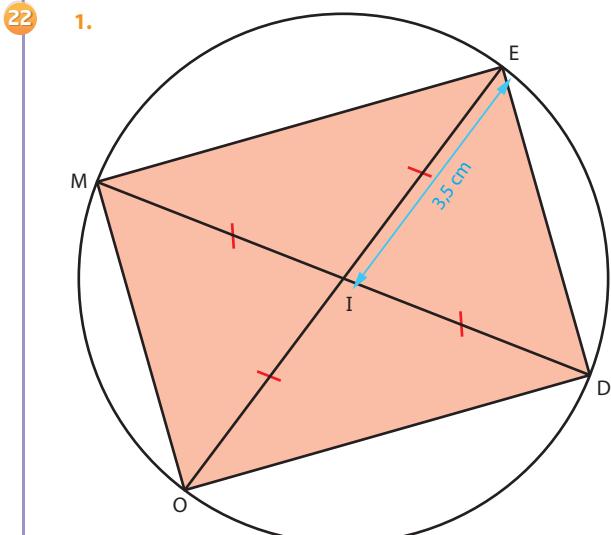
20. 1. Vrai.
2. Faux.
3. Vrai.
4. Vrai.
5. Vrai.
6. Vrai.

21. • **Léa**

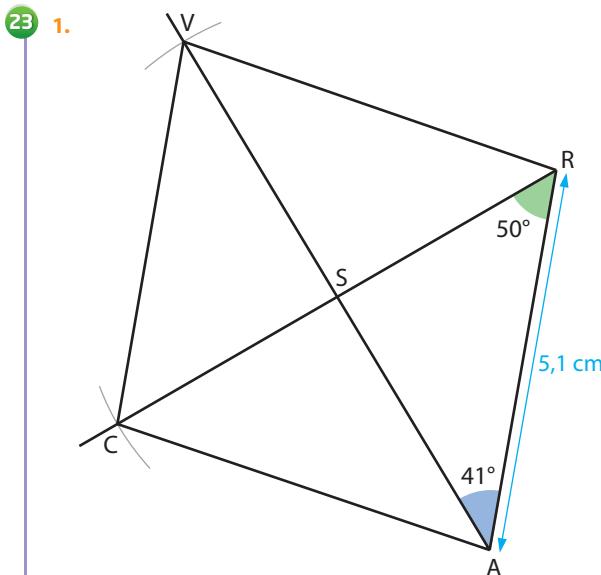
$AB = DC$ et $AD = BC$
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.
 $AC = BD$
Donc $ABCD$ est un rectangle.
Un rectangle à quatre angles droits.
Alors $\widehat{ADC} = 90^\circ$

• **Tom**

$EFGH$ est un losange
car
ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.
Les quatre côtés de $EFGH$ sont de même longueur et $EF = 4,3$ cm.
 $FG = 4,3$ cm



2. $[MD]$ et $[OE]$ sont deux diamètres du même cercle de centre I.
Les diagonales du quadrilatère MODE ont le même milieu,
donc c'est un parallélogramme.
3. Les diagonales du parallélogramme MODE ont la même longueur, donc c'est un rectangle.

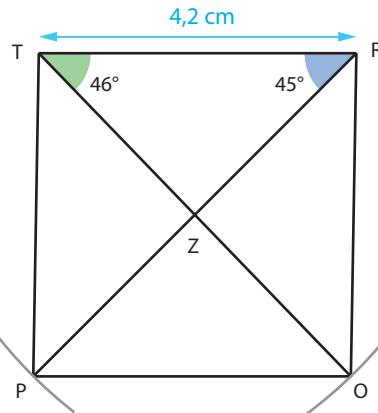
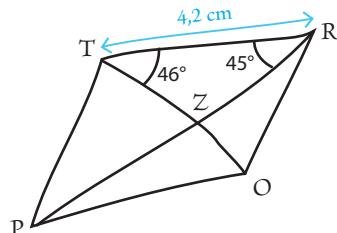


2. Dans le triangle SAR, la somme des mesures des angles est égale à 180° , donc :

$$\widehat{ASR} = 180^\circ - 50^\circ - 41^\circ = 89^\circ.$$

Donc les diagonales $[VA]$ et $[RC]$ ne sont pas perpendiculaires.
VRAC ne peut pas être un losange.

24. 1. On s'aide d'un croquis :

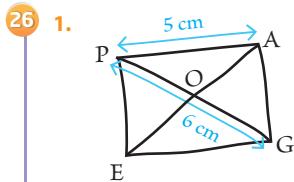


2. TROP semble être un rectangle.

Raisonnement par l'absurde :

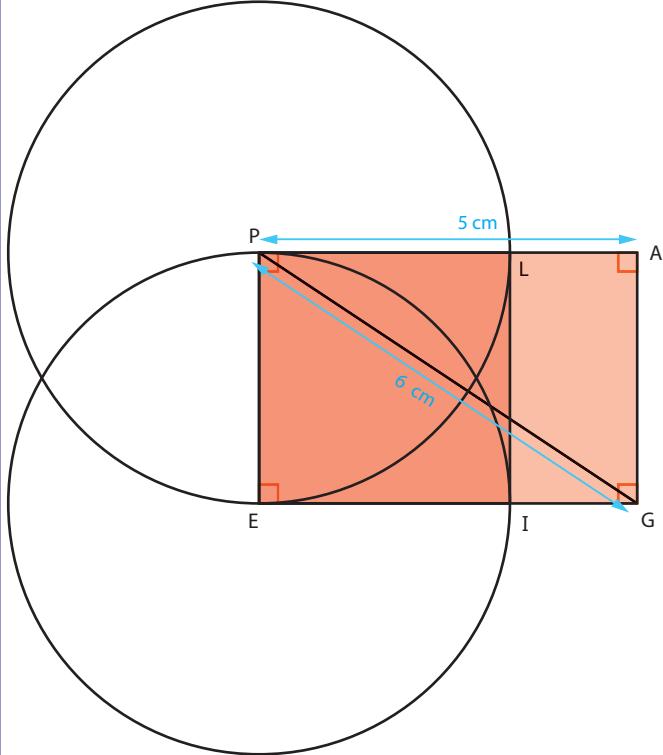
Si TROP est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu Z.
Donc le triangle TZP est isocèle en Z.
Donc les angles \widehat{RTZ} et \widehat{TRZ} sont de même mesure.
Or $\widehat{RTZ} = 46^\circ$ et $\widehat{TRZ} = 45^\circ$.
Donc c'est impossible.
TROP n'est pas un rectangle.

25. 1. ABCD a quatre angles droits, donc c'est un rectangle.
2. ABCD est un rectangle, donc $AB = CD$ et $AD = BC$.
De plus, E, F, G et H sont les milieux des côtés $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
Les triangles AEF, BGF, CGH et DEH ont donc un angle droit compris entre deux côtés de même longueur.
Ces quatre triangles sont donc égaux.
3. Les triangles AEF, BGF, CGH et DEH sont égaux, donc $EF = FG = GH = HE$.
Donc EFGH est un losange.



2. PAGE est un rectangle, donc ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.
Donc $OA = OG = OP = OE$.

3. et 4. a, b. et c.

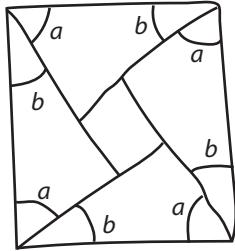


- d. L est un point de [PA] tel que $PL = PE$.
I est un point de [EG] tel que $EI = EP$.
PAGE est un rectangle donc $(PA) \parallel (EG)$.
Alors les côtés [PL] et [EI] de PLIE sont parallèles et de même longueur.
Donc PLIE est un parallélogramme.
De plus, $PL = PE = EI$.
Donc PLIE est un losange.
De plus, PLIE possède deux angles droits, donc c'est un rectangle.
Alors PLIE est un carré.

Problèmes

27. Mosaïque carrée

1. Les quatre triangles égaux ainsi placés forment un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur. C'est donc un losange.
De plus, un triangle blanc et un triangle gris ont leurs angles aigu deux à deux de même mesure, notons \hat{a} et \hat{b} leurs mesures. On a $\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$.



- Le losange formé possède quatre angles droits, c'est donc un carré.
2. Le vide laissé au centre est formé par quatre segments de même longueur, c'est la différence entre les longueurs du côté

opposé et du côté adjacent à l'angle \hat{a} : $8\text{ cm} - 6\text{ cm} = 2\text{ cm}$.
De plus, ce quadrilatère possède quatre angles droits puisque les triangles sont rectangles.

Donc le vide laissé a la forme d'un carré de côté 2 cm.

3. Nous devons connaître la longueur du côté du carré formé par les quatre triangles rectangles, elle correspond à l'hypoténuse de ces triangles rectangles.

Dans les triangles rectangles égaux, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\ell^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \text{ donc } \ell = 10.$$

Le Carré formé de quatre triangles rectangles a pour côté 10 cm.

Il faut carreler un mur rectangulaire de 3 m sur 2,40 m donc on doit calculer combien de fois 10 cm rentrent dans la longueur et la largeur de ce mur rectangulaire.

$$3\text{ m} = 300\text{ cm} = 30 \times 10\text{ cm}$$

$$2,40\text{ m} = 240\text{ cm} = 24 \times 10\text{ cm}$$

$$30 \times 24 = 720$$

Il faudra 720 carrés formés de 2 triangles blancs et 2 triangles gris.

$$720 \times 2 = 1440$$

Il faudra 1 440 triangles blancs et 1 440 triangles gris.

4. Le vide laissé entre les triangles est un Carré de côté 2 cm.

Il y aura 720 vides.

$$2\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$$

$$720 \times 4\text{ cm}^2 = 2880\text{ cm}^2$$

2880 cm^2 devront être comblés par les petits cristaux.

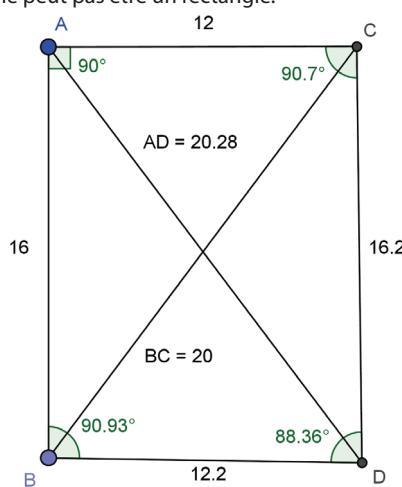
28. Trois bibliothèques

Les trois bibliothèques sont identiques, donc les montants [LI] et [ER] sont parallèles et de même longueur.
Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc LIRE est un parallélogramme.

29. Encadrer

1. Un quadrilatère qui possède un angle droit n'est pas forcément un rectangle. Cette vérification ne suffit pas à prouver que le cadre est rectangulaire.
2. Les deux diagonales n'ont pas la même longueur, donc le cadre ne peut pas être un rectangle.

3. a.

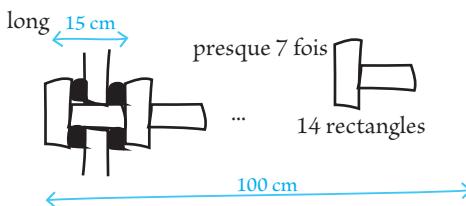


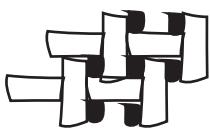
- b. Wafa peut exiger de M. Carré qu'il recommence le travail puisqu'un des angles du cadre mesure moins de 89° .

30. Mosaïque tressée

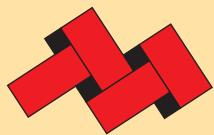
Les élèves auront des démarches très différentes, c'est vraiment le cœur de cet exercice. Il faut éviter d'induire une démarche en particulier.
C'est pourquoi il faut les laisser chercher d'abord seuls, puis en groupe afin qu'ils échangent sur leurs démarches et les optimisent.

- Démarche 1 : Schématiser et modéliser





On doit trouver le motif de base qui est répété par translation pour construire cette mosaïque, ensuite on peut trouver combien elle contient de rectangles et de carrés.
Le voici :



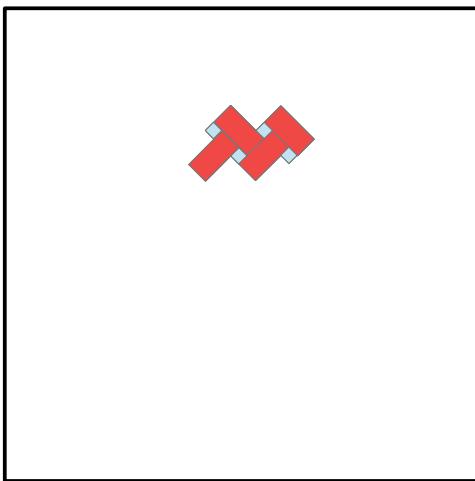
Certains élèves n'arrivent pas à atteindre ce motif ou se perdent dans leurs comptes de rectangles et de carrés.
On peut leur proposer de manipuler.

• Démarche 2 : Manipuler

On trace et on découpe des rectangles et des carrés en grandeur réelle ou à l'échelle 1/2, puis on essaie de les assembler pour réaliser la mosaïque.

Cela permet aux élèves d'expérimenter les rotations et translations en jeu ; on peut alors leur proposer de finir le travail avec un outil numérique.

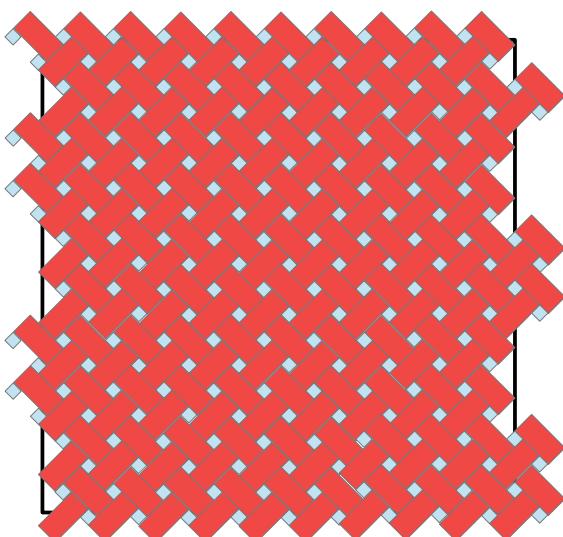
• Démarche 3 : Utiliser un fichier texte (voir manuel numérique)



Elle ne doit être proposée qu'une fois que les élèves ont modélisé le problème ou manipulé, sinon ils ont fait l'économie du raisonnement et de la modélisation.

On travaille avec le fichier texte du manuel numérique où figurent déjà le motif à répéter et le Carré à pavier.

On copie et colle ce motif en prenant soin de compter le nombre de motifs qu'on aura mis dans le pavage au fur et à mesure.



On se rend alors compte qu'il y a beaucoup de rectangles ou carrés qui débordent : voir fichier pour le professeur du manuel numérique (figure ci-avant).

Il faut donc se demander combien de fois le motif de base rentre-t-il dans le Carré.

On a vu qu'il fallait autant de rectangles rouges que de carrés noirs grâce à notre motif de base.

La surface totale est de 1 m^2 , soit $10\,000 \text{ cm}^2$.

Le motif a pour aire 225 cm^2 :

$$4 \times (10 \times 5) + 4 \times 2,5^2 = 225 \\ 10\,000 \div 225 \approx 44,4$$

Il faudra donc environ 45 fois le motif.

$$45 \times 4 = 180$$

Il faudra 180 rectangles rouges et 180 carrés noirs.

$$180 \div 40 = 4,5 \text{ et } 196 \div 50 = 3,6$$

Il faudra donc 5 paquets de carreaux rectangulaires rouges et 4 paquets de carreaux carrés noirs.

On peut faire remarquer qu'en réalité, pour avoir assez en comptant les chutes utilisées et les pertes (casses), le carreleur compte la surface à paver augmentée de 5 % à 10 % pour calculer la quantité de carreaux à acheter. D'ailleurs, sur les paquets il est toujours indiqué le nombre de m^2 et pas le nombre de carreaux.

31 Enseigne de boulangerie

1. Si la surface de la pancarte occupe $\frac{1}{9}$ de la surface de sa vitrine, alors les dimensions de la pancarte font $\frac{1}{3}$ de celles de la vitrine (le Carré de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{9}$).

$$7,5 \div 3 = 2,5 \text{ m et } 3,3 \div 3 = 1,1 \text{ m.}$$

Les dimensions de la pancarte sont :

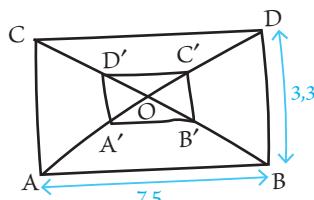
$$C'D' = 2,5 \text{ m et } C'A' = 1,1 \text{ m.}$$

C'est l'occasion de rappeler que lorsque les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .

2. La pancarte rectangulaire $A'B'C'D'$ est centrée sur la vitrine ABCD, donc ces deux rectangles ont le même centre.

On note O ce centre.

On s'aide d'un dessin à main levée :



Le triangle ACD est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 3,3^2 + 7,5^2 = 67,14$$

$$\text{Donc } AD = \sqrt{67,14} \approx 8,19.$$

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

$$\text{Donc } AO \approx 8,19 \div 2 \approx 4,095.$$

Comme $A'B'C'D'$ est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de ABCD, alors :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3} \text{ ou encore } \frac{OA'}{4,095} \approx \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } OA' \approx 4,095 \div 3 \approx 1,365.$$

$$\text{Et } AA' \approx 4,095 - 1,365 \approx 2,73.$$

On peut faire remarquer aux élèves qu'on n'a volontairement pas arrondi au dixième trop tôt dans les calculs, puisque AA' devra être multiplié par 4.

$$4 \times 2,73 = 10,92$$

Il faudra environ 11 mètres de câbles pour soutenir la pancarte.

32 Pentagone

1. The building is a pentagon, formed from five isosceles triangles. For each pentagon, we measure the length of one side of the pentagon and the distance between the center of the pentagon and one summit.

- The big one :
2,9 cm on the picture \rightarrow 29 000 cm in reality (290 m).
1,9 cm on the picture \rightarrow 19 000 cm in reality (190 m).

$$\text{Area} = 5 \times \frac{290 \times 190}{2} = 137\,750$$

- The small one :

1,1 cm \rightarrow 110 m
0,9 cm \rightarrow 90 m

$$\text{Area} = 5 \times \frac{110 \times 90}{2} = 24\,750$$

Area of the building : $137\,750 - 24\,750 = 113\,000$.
The surface of this building is $113\,000 \text{ m}^2$.

2. Voir figure en bas de page.

33 Laser mégajoule

Dans cet exercice, les angles roses sont en réalité les angles violets.

1. Les miroirs [CD] et [EF] sont parallèles, avec la sécante (SP), ils forment des angles alternes-internes vert et bleu de même mesure.

Les miroirs [GH] et [EF] sont parallèles, avec la sécante (SQ), ils forment des angles alternes-internes rose et bleu de même mesure.

Donc les angles verts, bleus et roses sont de même mesure.

2. Les angles verts, bleus et roses sont de même mesure, on les note \hat{v} , \hat{b} et \hat{r} .

De plus :

$$\widehat{\text{CPD}} = 180^\circ = 2 \hat{v} + \widehat{\text{TPE}}$$

$$\widehat{\text{ESF}} = 180^\circ = 2 \hat{b} + \widehat{\text{PSQ}}$$

$$\widehat{\text{GQH}} = 180^\circ = 2 \hat{r} + \widehat{\text{SQR}}$$

$$\text{Donc } \widehat{\text{TPE}} = \widehat{\text{PSQ}} = \widehat{\text{SQR}}.$$

Les droites (RQ) et (SP) et la sécante (SQ) forment deux angles alternes-internes de même mesure : $\widehat{\text{TPE}} = \widehat{\text{SQR}}$.

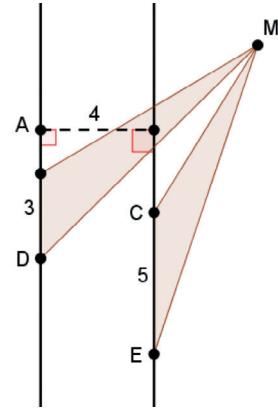
Donc les droites (RQ) et (SP) sont parallèles.

34 À la recherche du point inconnu

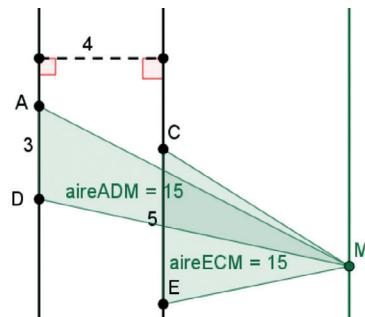
Cet exercice est l'occasion de revoir la distance entre deux droites et l'aire d'un triangle.

Il exploite pleinement les possibilités d'un logiciel de géométrie dynamique pour émettre une conjecture.

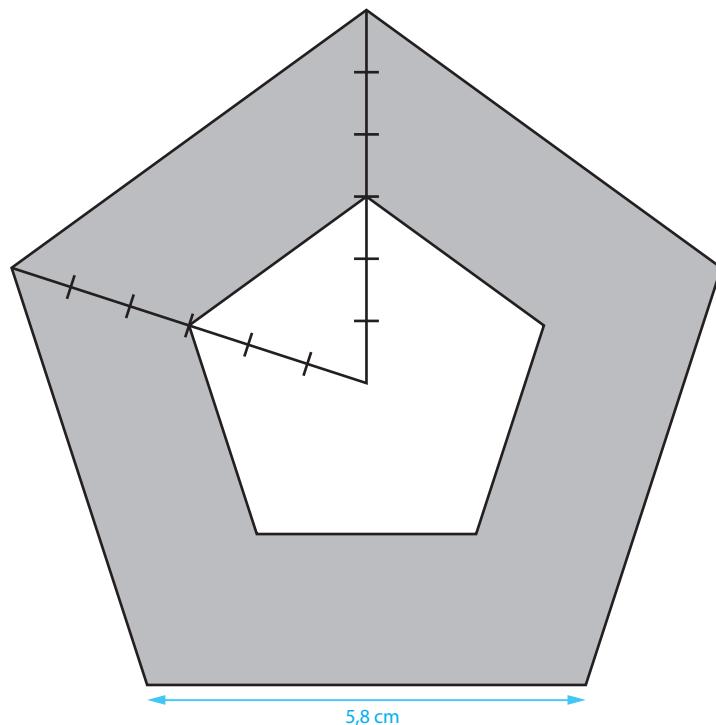
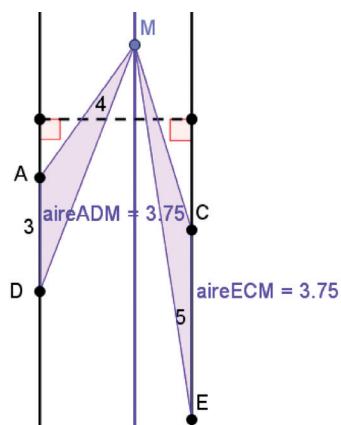
1. Voir fichier dans le manuel numérique.



2. Cas 1 :



Cas 2 :

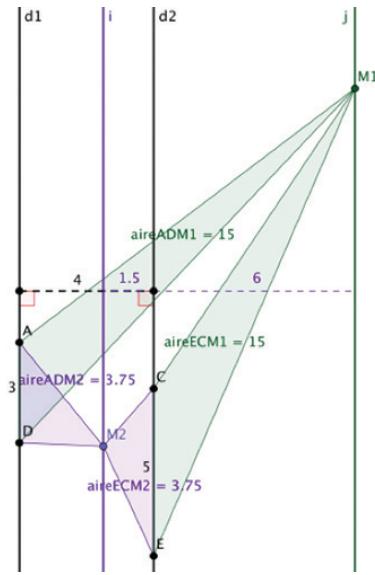


Conjecture :

Le point M doit être situé sur une droite parallèle à (AD) et (CE).

Pour inciter les élèves à aller plus loin, on peut demander : « Comment peut-on la situer par rapport à (AD) et (CE) ? » Les élèves penseront alors à la situer par une distance entre les droites ; ils peuvent éventuellement faire apparaître cette distance sur le fichier. On les incitera alors à prouver leur conjecture et trouver précisément ces deux distances.

Voir fichier dans le manuel numérique.



On note x la distance entre le point M et la droite (AD) et y la distance entre le point M et la droite (CE).

$$Aire_{ADM} = \frac{AD \times x}{2} = \frac{3x}{2} = 1,5x$$

$$Aire_{CEM} = \frac{CE \times y}{2} = \frac{5y}{2} = 2,5y$$

Les deux aires sont égales lorsque $1,5x = 2,5y$.

On vérifie que :

Cas 1 : Lorsque $x = 10$ et $y = 6$ alors les deux aires sont égales à 15 cm^2 .

Cas 2 : Lorsque $x = 2,5$ et $y = 1,5$ alors les deux aires sont égales à $3,75 \text{ cm}^2$.

35 Les allumettes

1. a. $10,5 \text{ cm} = 3 \times 3,5 \text{ cm}$ et $14 \text{ cm} = 4 \times 3,5 \text{ cm}$.

Il faut bien 10 allumettes ($3 + 3 + 4$) pour faire ce triangle de côtés $10,5 \text{ cm}$, $10,5 \text{ cm}$ et 14 cm .

b. Avec 10 allumettes de $3,5 \text{ cm}$ on peut faire trois segments de longueurs $3,5 \text{ cm}$, $10,5 \text{ cm}$ et 21 cm . Cependant, $3,5 + 10,5 < 21$.

D'après l'inégalité triangle, un triangle de côtés $3,5 \text{ cm}$, $10,5 \text{ cm}$ et 21 cm n'est pas constructible.

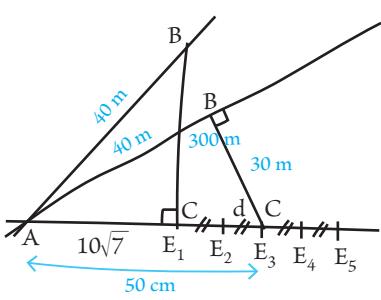
2.

Côté 1	Côté 2	Côté 3
10,5	10,5	14
7	14	14
7	10,5	17,5

On peut construire trois triangles non égaux entre eux avec ces 10 allumettes. Le dernier est aplati car $7 + 10,5 = 17,5$.

36 Transat

On s'aide d'un croquis :



Lorsque C est dans l'encoche E_3 , le triangle ABE_3 est rectangle en B ; on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = 50^2 - 30^2 = 1600$$

Donc $AB = 40 \text{ m}$.

Lorsque C est dans l'encoche E_1 , le triangle ABE_1 est rectangle en E_1 , alors d'après le théorème de Pythagore :

$$AE_1 = \sqrt{40^2 - 30^2} = \sqrt{700}$$

L'intervalle d entre les encoches est donc :

$$d = \frac{50 - \sqrt{700}}{2} \approx 11,8 \text{ cm}$$

Dans le cas où le point C serait dans l'encoche E_4 , les dimensions du triangle ABE_4 seraient environ :

$$61,8 \text{ m} ; 30 \text{ m} ; 40 \text{ m}.$$

$30 + 40 > 61,8$; c'est donc possible.

Dans le cas où le point C serait dans l'encoche E_5 , les dimensions du triangle ABE_5 seraient environ : $73,6 \text{ m} ; 30 \text{ m} ; 40 \text{ m}$.

$30 + 40 < 73,6$; ce triangle n'est donc pas possible.

On peut caler la barre [BC] dans l'encoche E_4 mais pas dans l'encoche E_5 .

37 La pyramide du Louvre (Paris)

1. Ce qui gêne Léo c'est que les informations de ces deux sites sont contradictoires. Par exemple, le site A dit que la pyramide est constituée de 675 losanges alors que le site B dit qu'elle est constituée de 603 losanges et 70 triangles.

2. a. • Pour les trois faces triangulaires sans porte

À la base, on peut compter 18 triangles.

Ensuite on compte les losanges en partant du haut de la face triangulaire : $1 + 2 + 3 + \dots + 16 + 17 = 153$

Cela peut être l'occasion de poser le petit problème suivant : Trouver une façon rapide de calculer $1 + 2 + 3 + \dots + n$ quel que soit le nombre entier n .

Réponse : $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = (n + 1) \times n$

$$\text{Donc } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n + 1)n}{2}.$$

• Pour la face qui intègre la porte

On compte 16 triangles et il y a 9 losanges de moins que dans les autres faces.

Total des triangles : $18 \times 3 + 16 = 70$

Total des losanges : $153 \times 3 + 153 - 9 = 603$

Cette pyramide est constituée de 7 triangles équilatéraux et de 603 losanges.

b. La base d'une face sans porte compte 18 triangles équilatéraux de côté $1,9 \text{ m}$.

$$18 \times 1,9 \text{ m} = 34,2 \text{ m}$$

Or la base carrée a pour côté $35,4 \text{ m}$.

Cette différence s'explique par la jonction entre les panneaux de verre. Elle a une épaisseur.

c. Finalement, les informations des sites A et B qui sont conformes à ce qu'a observé Léo sont :

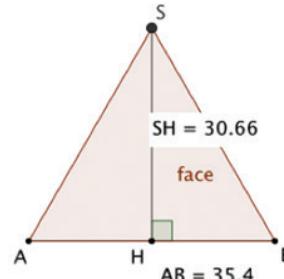
- Site A : les dimensions des losanges ;
- Site B : le nombre de losanges et de triangles équilatéraux et les dimensions de la base de la pyramide.

On pourrait proposer aux élèves de vérifier la hauteur de la pyramide donnée par le site A par un calcul.

3. La pyramide est formée de 4 triangles équilatéraux de côté $35,4 \text{ m}$.

Les élèves peuvent calculer une hauteur en utilisant le théorème de Pythagore après avoir précisé que la hauteur, la médiane et la médiatrice sont confondues.

On acceptera aussi qu'ils aient utilisé un logiciel de géométrie dynamique ou fait une construction à une échelle qui permet une mesure à la règle assez précise. On obtient environ $30,66 \text{ m}$.



La surface d'une face est $\frac{35,4 \times 30,66}{2} = 542,63$
 $542,63 \times 4 = 2\,170,52$
 La surface totale des 4 faces de la pyramide est d'environ $2\,170,5 \text{ m}^2$.
 Aire d'un losange en verre :
 Les diagonales du losange font 1,9 m et 2,9 m.

$$\text{Aire} = \frac{1,9 \times 2,9}{2} = 2,755$$

Un losange est constitué de deux triangles équilatéraux de côté 1,9 m donc l'aire d'un triangle équilatéral en verre est :
 $2,755 \div 2 = 1,3775$

Calcul de l'aire de la surface vitrée :

$$603 \times 2,755 \text{ m}^2 + 70 \times 1,3775 \text{ m}^2 = 1\,757,69 \text{ m}^2$$

$$\frac{1\,757,69}{2\,170,5} \times 100 \approx 81$$

Environ 81 % de la surface de la pyramide du Louvre est en verre.



38 Pentagone régulier

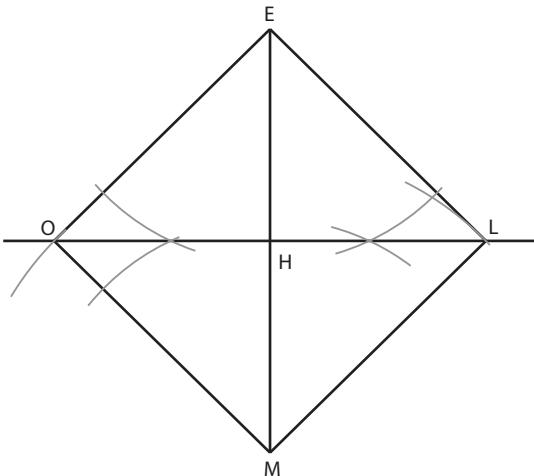
- Les cinq triangles OAB, OBC, OCD, ODE et OEA sont isocèles en O. De plus, leurs côtés sont deux à deux de même longueur, donc ce sont des triangles égaux.
- Les cinq angles de sommet O sont de même mesure et leur somme est égale à 360° , donc ils mesurent chacun $180^\circ \div 5 = 36^\circ$. Ces cinq triangles sont isocèles en O et la somme de leurs trois angles est égale à 180° , donc :

$$\widehat{\text{OBA}} = \widehat{\text{OBC}} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

$$\widehat{\text{ABC}} = \widehat{\text{OBA}} + \widehat{\text{OBC}} = 72^\circ + 72^\circ = 144^\circ.$$

39 Losange ou carré ?

- On construit [ME] tel que $ME = 5,6 \text{ cm}$, puis la médiatrice de ce segment qui coupe le cercle de centre M et de rayon 4 aux deux points O et L.



- Un quadrilatère dont les côtés ont la même longueur est un losange.
- Soit H le milieu des diagonales. Dans le triangle MHL rectangle en H (dans un losange les diagonales sont perpendiculaires), le théorème de Pythagore s'écrit :
 $ML^2 = MH^2 + HL^2$ ou $HL^2 = ML^2 - MH^2 = 4^2 - 2,8^2 = 8,16$
 d'où on tire $HL = \sqrt{8,16} \approx 2,857 \text{ cm}$; donc $OL \approx 5,714 \neq 5,6$: les diagonales n'ont pas la même longueur ; le losange n'est pas un rectangle donc pas un carré. Marie a tort.

40 Triangle isocèle

- D'après l'inégalité triangulaire, pour que le triangle soit constructible, il faut que $n + n \geq 13$ donc $n \geq 6,5$. Donc la plus petite valeur pour n est 6,5.
- Le triangle est rectangle lorsque l'égalité de Pythagore est vérifiée.

Comme le triangle est isocèle de base 13, alors il faut :

$$n^2 + n^2 = 13^2$$

$$2n^2 = 169$$

$$n^2 = 84,5$$

$$n = \sqrt{84,5}$$

Le triangle est rectangle pour n valant $\sqrt{84,5}$.

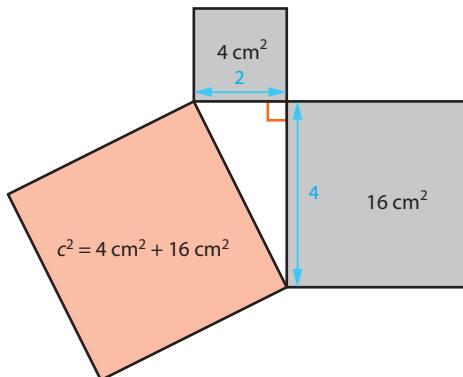
41 Problème de construction

On note c la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés.

Le carré d'aire 4 cm^2 a pour côté 2 cm puisque 4 est le carré de 2. Donc le côté du deuxième carré a pour longueur 4 cm.

On doit donc avoir $c^2 = 2^2 + 4^2 = 20$.

Alors les carrés de côté 2, 4 et c sont dans une configuration de Pythagore :



Programme de construction :

Tracer un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 2 cm et 4 cm.

Construire le carré ayant pour côté l'hypoténuse de ce triangle rectangle.

Le carré est solution du problème posé.

42 Avec un octogone

- Les triangles API, JBK, ODN et MCL ont un angle droit compris entre deux côtés de même longueur, ils sont donc égaux.
- BJK est un triangle isocèle rectangle en B.

$$BJ = BK = \frac{12 \text{ cm}}{3} = 4 \text{ cm}$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$JK^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$$JK = \sqrt{32} \text{ cm}$$

$$IJ = 4 \text{ cm} \neq JK$$

Donc IJKLMNOP n'est pas un octogone régulier.

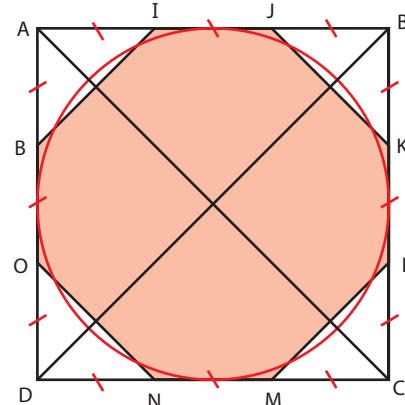
- Aire_{IJKLMNOP} = Aire_{ABCD} - 4 × Aire_{BJK}

Deux triangles tels que BJK forment un carré de côté 4 cm, donc :

$$\text{Aire}_{IJKLMNOP} = 12^2 - 2 \times 4^2 = 112$$

L'aire de l'octogone IJKLMNOP est de 112 cm^2 .

4.



Aire du disque de diamètre 12 cm :

$$\pi \times 6^2 = 36\pi \approx 113,09$$

L'aire du disque de diamètre 12 cm est supérieure à l'aire de l'octogone IJKLMNOP.

Remarque : le calcul est inutile pour affirmer qu'il ne peut pas y avoir égalité puisque l'aire de l'octogone est un nombre entier de cm^2 alors que l'aire d'un disque est 36π avec π irrationnel.

43 Aires égales

1.a. Aire du carré ABCD : $A_{ABCD} = AB^2 = 40^2 = 1600 \text{ cm}^2$

b. Aire du rectangle DEFG :

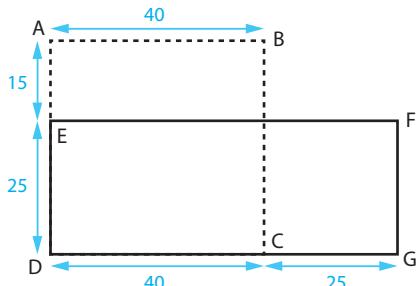
D, E et A sont alignés dans cet ordre, donc :

$$DE = DA - AE = AB - AE = 40 - 15 = 25 \text{ cm.}$$

D, C et G sont alignés dans cet ordre, donc :

$$DG = DC + CG = AB + CG = 40 + 25 = 65 \text{ cm.}$$

Ainsi : $A_{DEFG} = DE \times DG = 25 \times 65 = 1625 \text{ cm}^2$.



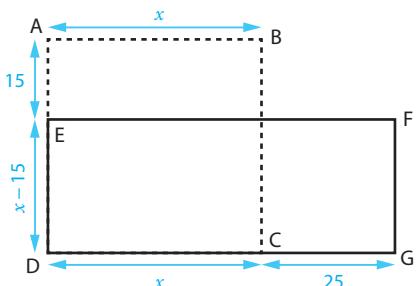
2. En procédant de la même manière que précédemment, on obtient : $DE = x - 15$ et $DG = x + 25$.

L'aire du rectangle DEFG est égale à :

$$(x - 15)(x + 25) = x^2 + 10x - 375.$$

Afin que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG, il faut et il suffit que :

$$x^2 = x^2 + 10x - 375 \Leftrightarrow 10x - 375 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{375}{10} = 37,5$$



Algorithmique et outils numériques

44 Pavage

1.

On s'aperçoit déjà qu'il faut effacer tout au démarrage du script.

```

quand [drapeau cliqué]
  effacer tout
  s'orienter à 90°
  stylo en position d'écriture
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 120 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 120 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 60 degrés
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 120 degrés
  avancer de 50

```

2.

On s'aperçoit en plus qu'on gagne à réinitialiser la position et l'orientation du lutin au démarrage du script. On a modifié le script initial, pour l'améliorer, en plus de l'avoir répété 9 fois.

```

quand [drapeau cliqué]
  effacer tout
  aller à x: -240 y: 0
  stylo en position d'écriture
  répéter 9 fois
    s'orienter à 90°
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 120 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 120 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 60 degrés
    avancer de 50
    tourner ⚡ de 120 degrés
    avancer de 50

```

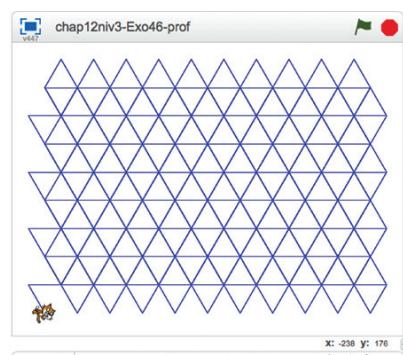
3.

On a fait des essais qui ont conduit à de nouvelles modifications. Le script est long et perfectible, mais il est le résultat de ce qu'un élève pourrait faire à force d'essais.

```

quand [drapeau cliqué]
  aller à x: -200 y: 125
  effacer tout
  stylo en position d'écriture
  répéter 4 fois
    répéter 10 fois
      s'orienter à 90°
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 60 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
    s'orienter à -90°
    avancer de 400
    tourner ⚡ de 120 degrés
    avancer de 40
    répéter 10 fois
      s'orienter à 90°
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 60 degrés
      avancer de 40
      tourner ⚡ de 120 degrés
      avancer de 40
    s'orienter à -90°
    avancer de 440
    tourner ⚡ de 120 degrés
    avancer de 40

```



3.

Les élèves en difficulté sur le raisonnement et la communication dans un langage adapté peuvent travailler ces compétences dans cette question à un niveau de difficulté accessible.

HOG et EXA sont deux triangles rectangles et isocèles en O et X :

$$\widehat{HOG} = \widehat{EXA} = 90^\circ$$

La somme des angles d'un triangle est 180° , donc :

$$\widehat{OHG} = 45^\circ.$$

De même, $\widehat{OHG} = \widehat{OGH} = \widehat{EAX} = \widehat{XEA} = 45^\circ$.

Donc $\widehat{OHE} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ = \widehat{HEX} = \widehat{XAG} = \widehat{AGO}$.

4. $Aire_{HEAGO} = Aire_{HEAG} + Aire_{HOG} + Aire_{EXA}$

Or, $Aire_{HOG} + Aire_{EXA} = Aire_{VHG} = \frac{Aire_{HEAG}}{2}$.

Donc $Aire_{HEAGO} = 1,5 \times Aire_{HEAG}$.

HEAG a la même aire qu'un carreau carré puisque les carreaux carrés ont pour côté 20 cm et qu'ils sont espacés de 20 cm. Donc l'aire d'un carreau hexagonal est égale à une fois et demie celle d'un carreau carré.

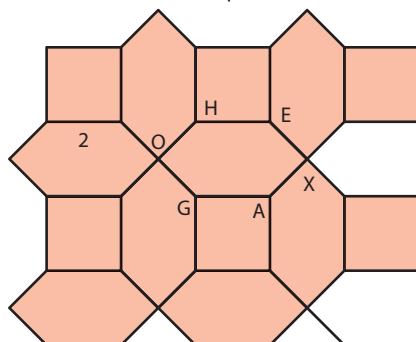
Exercice 1

Les élèves ayant une bonne maîtrise du raisonnement et de la communication pourront encore progresser dans cet exercice. Ils passeront plus de temps sur la question 1. que ceux qui ont l'exercice précédent car ici on n'a pas donné de nom au carreau hexagonal, et raisonner et communiquer peut prendre plus de temps.

Dans cet exercice, c'est à l'élève de penser à nommer un hexagone pour faciliter la communication de ses raisonnements. Si jamais il justifie sans employer de noms, on peut alors discuter avec lui au moment où il rencontre des difficultés à communiquer clairement ou lorsque lui-même se perd dans son raisonnement par manque de structure.

On veut l'amener à sentir qu'avec un langage mathématique, il peut plus facilement raisonner et communiquer.

1. À l'échelle 1/10, les carrés ont pour côté 2 cm.



2. Si on nomme HEXAGO un carreau hexagonal, on a

$$HE = GA = 20 \text{ cm.}$$

VHGT est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires : $(VG) \perp (HT)$.

Compte tenu de l'espacement régulier des carreaux :

$$OH = EX = XA = GO.$$

Pour calculer OH, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle VGH :

$$VG^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

$$\text{Donc } VG = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}.$$

Les diagonales du carré se coupent en leur milieu.

$$\text{Donc } OH = 10\sqrt{2} \approx 28,3.$$

Pour l'hexagone HEXAGO, on a :

$$HE = GA = 20 \text{ cm}$$

$$OH = EX = XA = GO = 10\sqrt{2}$$

3. $Aire_{HEAGO} = Aire_{HEAG} + Aire_{HOG} + Aire_{EXA}$

Or $Aire_{HOG} + Aire_{EXA} = Aire_{VHG} = \frac{Aire_{HEAG}}{2}$.

Donc $Aire_{HEAGO} = 1,5 \times Aire_{HEAG}$.

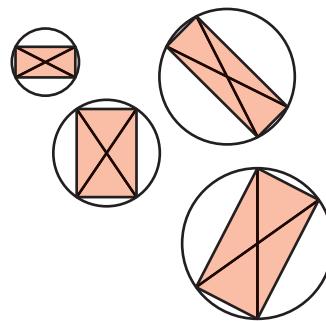
Donc $\frac{Aire_{HEAGO}}{Aire_{HEAG}} = 1,5 = \frac{3}{2}$.

Ou encore : $\frac{Aire_{HEAG}}{Aire_{HEXAGO}} = \frac{2}{3}$.

L'aire d'un carreau carré est égale au deux tiers de l'aire d'un carreau hexagonal.

Exercice 2

1. a.



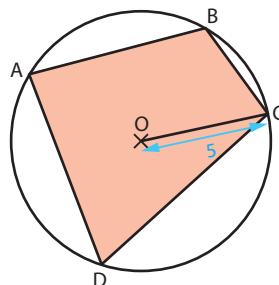
b. Lorsqu'on trace les cercles sur les quatre exemples, la propriété semble vérifiée. Il faut maintenant le prouver.

Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

Donc le point d'intersection des diagonales est à la même distance des quatre sommets du rectangle.

Donc les quatre sommets d'un rectangle sont bien situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales.

2. a.



b. La propriété n'est pas vraie car la construction est un contre-exemple.

Exercice 2

Cette fois-ci, on ne fait pas construire de supports visuels ou d'exemples aux élèves. Soit ils y pensent par eux-mêmes, soit ils parviennent à raisonner et communiquer sans supports.

1. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

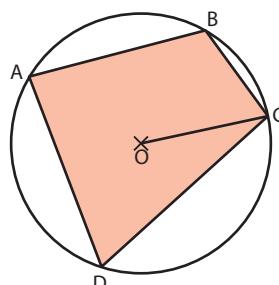
Donc le point d'intersection des diagonales est à la même distance des quatre sommets du rectangle.

Donc les quatre sommets d'un rectangle sont bien situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales.

2.

La question est plus difficile pour ces élèves car de nouveau on ne leur fait pas construire à l'avance le contre-exemple. Ils peuvent dans ce cas ne pas avoir d'autres images mentales que des rectangles inscrits dans un cercle, et répondre oui hâtivement. Il est alors intéressant de projeter les productions des élèves ayant l'exercice 2 vert pour débloquer la situation (ce qui valorisera ces élèves, a priori d'un niveau plus faible).

Contre-exemple :



Écriture d'un énoncé

1. Construire un triangle équilatéral ABC.

Placer les points I, J et K milieux des côtés [AB], [BC] et [CA].

Tracer le triangle IJK.

Placer les points R, S, T, U, V, W, X, Y et Z milieux des côtés [AI], [IB], [BJ], [JC], [CK], [KA], [IJ], [JK] et [KI].

Tracer les triangles RZW, SXT et UYV.

2.

Si l'élève qui reçoit cet énoncé n'arrive pas à faire la construction, il doit écrire ce qui lui manque et redonner l'énoncé à l'auteur. L'auteur doit alors le compléter.

Ensuite ils peuvent discuter ensemble de la clarté de l'énoncé et chercher à l'améliorer ensemble.

Analyse d'une production

• Élise a bien répondu.

• Florian a mal compris la propriété, les angles de même mesure doivent être compris entre les deux paires de côtés de même longueur, ce qui n'est pas le cas ici.

• Mathilde a raison.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie », dont le but est d'utiliser les notions de géométrie plane à des fins de démonstrations. La connaissance associée est le théorème de Thalès (sens direct et réciproque).

La compétence associée est de résoudre des problèmes de géométrie plane, en particulier dans le cadre de problèmes relevant de la vie courante et de situations concrètes, de prouver un résultat général, de valider ou réfuter une conjecture. Les élèves vont de ce fait effectuer des calculs mais ils valident aussi désormais par le raisonnement et la démonstration grâce à de nouveaux outils.

- Les repères de progressivité précisent :

« Le théorème de Thalès est introduit en 3^e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions. »

Un lien privilégié est donc à établir entre ce chapitre et le chapitre sur les triangles semblables, traité dans le chapitre 36, et celui sur les homothéties ; c'est d'ailleurs dans cet esprit que la première activité est traitée. Le chapitre sur les homothéties peut néanmoins être traité indifféremment avant ou après le chapitre sur le théorème de Thalès.

- Ce chapitre s'inscrit donc aussi dans le thème « Grandeur et mesures », l'objectif étant de comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs. La notion de proportionnalité est étroitement liée au théorème de Thalès, ce chapitre s'inscrivant ainsi de ce fait également dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions », comme le rappellent les repères de progressivité : « En 3^e, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème. »

La connaissance de la proportionnalité est l'un des prérequis nécessaires à ce chapitre, l'élève devant être capable de calculer

une quatrième proportionnelle, quelle que soit la méthode utilisée (l'accent sera mis dans ce chapitre plus particulièrement sur l'usage des produits en croix, mais toute autre méthode peut être envisagée) et de reconnaître une situation de proportionnalité, par le produit en croix ou la reconnaissance de quotients égaux.

- Ce chapitre permet également de développer le raisonnement et la maîtrise de la démonstration, le plus souvent dans des situations concrètes afin de faire sens. Les élèves doivent être capables de visualiser les figures de référence du théorème de Thalès : forme « classique » et forme « papillon ». L'élève doit tout d'abord être capable d'écrire l'égalité de Thalès lorsque les conditions d'utilisation sont vérifiées. Il doit également être capable d'utiliser cette égalité pour montrer que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès. L'élève sera également capable de montrer que deux droites ne sont pas parallèles. Dans ce dernier cas, on n'attend pas nécessairement que les élèves sachent distinguer l'utilisation de la réciproque et la contraposée du sens direct. On pourra simplement invoquer l'égalité de Thalès (vraie lorsque les droites sont parallèles, fausse lorsque les droites ne sont pas parallèles). L'accent est mis, comme le préconise le programme, sur la diversification des problèmes dans leur nature et « la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques », notamment pour calculer des longueurs inaccessibles. « Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures. »
- Ce chapitre permet également de retravailler le théorème de Pythagore et la vision dans l'espace, permettant ainsi à l'élève de développer son raisonnement grâce à des outils divers et complémentaires.

Activités

Questions flash

Dans les questions 1., 2. et 3., les calculs sont simples et ne nécessitent pas l'usage de la calculatrice. C'est l'occasion de retravailler le calcul mental.

1.

Cette question permet de retravailler la notion de proportionnalité et plus particulièrement le fait de compléter un tableau de proportionnalité.

a.

2	4	7	10
6	12	21	30

On peut trouver facilement le coefficient de proportionnalité faisant passer de la 1^{re} ligne à la 2^{de} ligne du tableau : $\frac{6}{2} = 3$. Il faut donc multiplier les nombres de la 1^{re} ligne par 3 pour obtenir les nombres de la 2^{de} ligne.

b.

3	6	7,5	10,5
2	4	5	7

On peut trouver le coefficient de proportionnalité faisant passer de la 2^{de} ligne à la 1^{re} ligne du tableau : $\frac{3}{2} = 1,5$. Il faut

donc multiplier les nombres de la 2^{de} ligne par 1,5 pour obtenir les nombres de la 1^{re} ligne et donc diviser par 1,5 les nombres de la 1^{re} ligne pour obtenir ceux de la 2^{de} (ou

multiplier par $\frac{2}{3}$, l'inverse de $\frac{3}{2}$). On fera remarquer que le coefficient de proportionnalité faisant passer de la 1^{re} ligne à la 2^{de} ligne du tableau, $\frac{2}{3}$, n'est pas un nombre décimal. Il est également possible de compléter ce tableau grâce aux produits en croix : $\frac{3 \times 4}{2} = 6$; $\frac{2 \times 7,5}{3} = 5$ et $\frac{10,5 \times 2}{3} = 7$.

2.

Cette question permet de réinvestir la connaissance de la propriété des produits en croix pour calculer une quatrième proportionnelle, non plus dans le cadre d'un tableau de proportionnalité, mais dans le cadre de l'égalité de deux quotients.

a. $\frac{x}{12} = \frac{5}{3}$ donc $x = \frac{12 \times 5}{3} = 20$.

On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 3 à 12, on multiplie par 4 ; il suffit donc de multiplier 5 par 4, ce qui donne 20.

b. $\frac{2}{5} = \frac{3}{x}$ donc $x = \frac{5 \times 3}{2} = 7,5$.

On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 2 à 3, on multiplie par 1,5 ; il suffit donc de multiplier 5 par 1,5, ce qui donne 7,5.

c. $\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$ donc $x = \frac{4 \times 9}{6} = 6$.

On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 6 à 9, on multiplie par 1,5 ; il suffit donc de multiplier 4 par 1,5, ce qui donne 6.

d. $\frac{2}{x} = \frac{8}{27}$ donc $x = \frac{27 \times 2}{8} = 6,75$.

On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 8 à 2, on divise par 4 ; il suffit donc de diviser 27 par 4, ce qui donne 3.

3.

Cette question permet de revoir la propriété suivante : « La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° . »

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° . Donc :

$$\widehat{B} = 180^\circ - (30^\circ + 68^\circ) = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$$

L'angle \widehat{B} mesure 82° .

4.

Cette question permet de revoir la caractérisation des droites parallèles à l'aide des angles alternes-internes de même mesure.

Les deux angles indiqués sur la figure sont deux angles alternes-internes, formés par les deux droites (d) et (d') et une sécante, de même mesure (58°), donc les deux droites (d) et (d') sont parallèles.

C'est l'occasion de revoir l'une des propriétés permettant de démontrer que deux droites sont parallèles et d'en revoir d'autres : droites perpendiculaires à une même droite, droites parallèles à une même droite, propriétés des côtés opposés d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un losange, d'un carré, par exemple, propriétés qui pourront servir à démontrer l'une des conditions nécessaires à l'utilisation du théorème de Thalès direct (droites parallèles).

Famille de triangles

Activité 1

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de faire apparaître « naturellement » la configuration « classique » de Thalès. Il s'agit en effet d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en lien avec les triangles semblables, en termes d'agrandissement et de réduction et donc en lien direct avec la proportionnalité, pour enfin initier sa forme avec l'égalité des rapports dans l'Activité 2.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la notion de triangles semblables et leur reconnaissance, et la connaissance de la caractérisation du parallélisme par les angles alternes-internes et l'utilisation de la notion de proportionnalité pour calculer des grandeurs proportionnelles.

La capacité introduite est d'énoncer le théorème de Thalès dans la configuration « classique ».

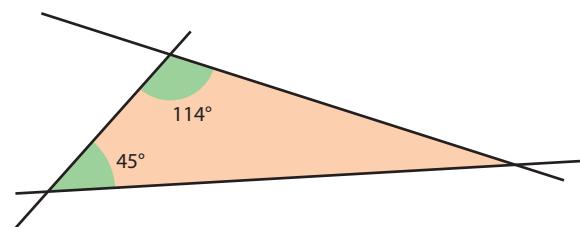
Cette activité est à réaliser en classe, les élèves étant répartis par groupes. Le rapporteur et la règle sont indispensables.

Il faudra prévoir des feuilles de format A4 pour chaque élève.

1.

Chaque élève construit, avec son matériel de géométrie, un triangle répondant à la consigne.

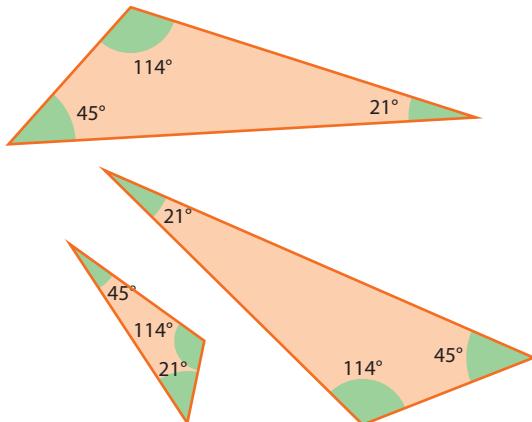
Avec les traits de construction :



2.

La question 2. est traitée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle.

Les élèves seront tout de suite amenés à constater leurs éventuelles erreurs dans les tracés d'angles (utilisation de la mauvaise graduation sur le rapporteur en traçant un angle de 66° au lieu de 114°) : ils s'en aperçoivent vite car leur triangle ne ressemble pas à ceux de leurs camarades.



Les élèves remarquent vite que tous les triangles ont les trois mêmes angles. On peut leur faire démontrer en utilisant la propriété sur la somme des angles d'un triangle.

Certains élèves peuvent utiliser les notions d'échelle ou de proportionnalité sans préciser entre quelles grandeurs. Ils remarqueront qu'il y a des grands triangles et des petits, sans forcément le traduire avec des propriétés mathématiques.

Tous les triangles construits par les élèves ont les mêmes angles : 114° , 45° et $180^\circ - (114^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 159^\circ = 21^\circ$. Ils sont donc semblables et leurs côtés sont proportionnels.

(vu dans le chapitre 36).

3.

Distribuer une feuille de format A4 et demander aux élèves de tracer le plus grand triangle possible ayant un angle de 114° et un angle de 45° .

Il faut calculer la mesure du troisième angle (21°), puis placer le plus grand côté du triangle qui est celui opposé au plus grand angle. Le segment le plus grand que l'on peut tracer dans la feuille est la diagonale de la feuille. Ce sera le grand côté du triangle. Ensuite, on trace les deux angles de 45° et 114° .

Les élèves risquent de rencontrer des difficultés et leur triangle sortira de la feuille s'ils débutent par l'angle de 45° et celui de 114° . Certains élèves essaieront de faire rentrer leur figure dans la feuille en rapprochant leur côté grâce à des parallèles successives.

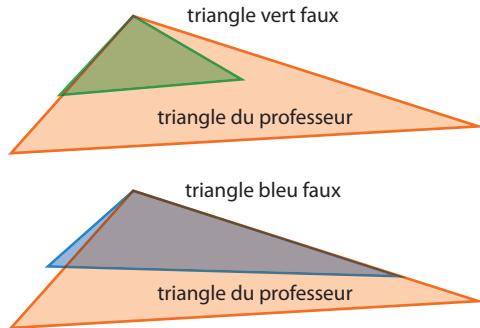
4.

Le triangle construit par le professeur est supposé juste. On peut demander aux élèves de mesurer les trois angles de ce triangle pour le valider comme modèle.

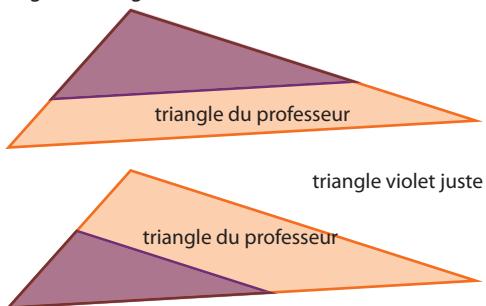
Il faut ensuite superposer les autres triangles avec celui du professeur en commençant par l'un des angles : les côtés des deux angles doivent se superposer.

Si les deux angles obtus ne coïncident pas, il est inutile de continuer avec ce triangle.

(vu dans le chapitre 36).



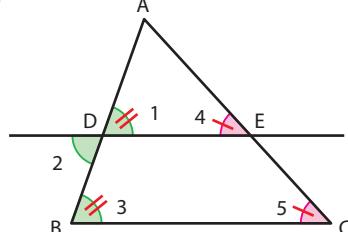
Si le premier angle essayé convient, il faut continuer à superposer les deux triangles en changeant d'angle pour vérifier les deux autres angles (un seul de ces deux angles pouvant être testé, car si deux angles sont égaux deux à deux, le troisième sera identique).



On peut alors demander s'il n'existe pas une méthode plus rapide car il y a beaucoup de triangles à valider ou non.

5. Le triangle de Nina est faux, pourtant il a un angle juste (l'angle obtus, car les côtés de l'angle se superposent), mais le troisième côté du triangle de Nina devrait être parallèle au troisième côté du triangle du professeur, sinon les deux angles ne peuvent pas être corrects.

6.



On prolonge la droite (DE).

On remarque que les angles 1 et 2 sont symétriques par rapport à D et sont donc de même mesure.

Les angles 1 et 2 étant de même mesure, les angles 2 et 3 aussi. Les angles 2 et 3 sont deux angles alternes-internes de même mesure. Or si les droites (DE) et (BC) sont parallèles alors les angles 2 et 3 ont même mesure. Donc si les angles 2 et 3, et par conséquent les angles 1 et 3, n'ont pas même mesure, alors les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

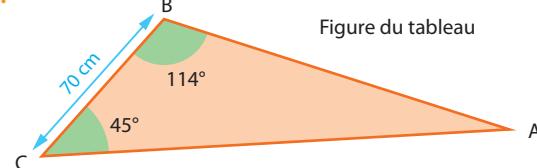
On le démontre de la même façon pour les angles 4 et 5.

On peut alors faire déterminer le triangle gagnant.

On peut aussi faire remarquer qu'il faut placer le triangle dans le bon sens, sinon le troisième côté n'est pas parallèle au troisième côté du triangle du professeur et pourtant les angles sont exacts. Il suffit de retourner le triangle.

Le bilan est donc : quand on superpose deux triangles ABC et ADE, les sommets A, B, D d'une part et A, C, E d'autre part, sont alignés et les côtés (BC) et (DE) sont parallèles. Ainsi les deux triangles ont les mêmes angles : ils sont semblables.

7.

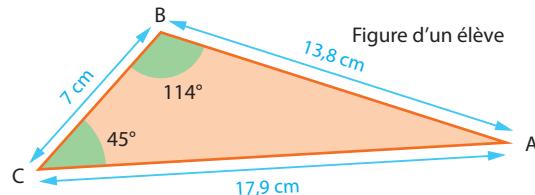


La première impression risque d'être que c'est impossible. Il faut remarquer que le triangle tracé au tableau est semblable à tous les triangles justes déjà construits d'après la question précédente.

Le triangle du tableau est semblable aux triangles justes déjà construits et donc ses côtés sont proportionnels à ceux des triangles justes précédemment construits.

On peut alors utiliser un triangle juste déjà construit, même si le coefficient n'est pas très pratique.

On peut aussi tracer un triangle avec le côté [BC] mesurant 7 cm, par exemple, et multiplier les autres côtés qu'ils mesurent par 10.



Ainsi, par exemple, le triangle tracé au tableau est un agrandissement du triangle précédent de rapport 10. Il suffit de multiplier les longueurs de ses côtés par 10 pour obtenir les dimensions du triangle du tableau : $AB = 13,8 \times 10 = 138$ cm et $AC = 17,9 \times 10 = 179$ cm.

Il est intéressant de faire vérifier en mesurant sur le tableau si les longueurs mesurées sont proches des longueurs calculées. On peut faire remarquer que les différences peuvent être dues à l'imprécision des tracés, des mesures, du matériel utilisé (la règle du tableau mesurant en général 1 m).

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir le théorème de Thalès, exprimé sous la forme d'égalité de trois quotients, dans les deux configurations : « classique » et « papillon ». Il s'agit donc d'un élargissement de l'activité précédente.

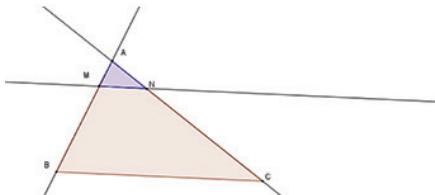
Le seul prérequis nécessaire à cette activité est la prise en main d'un logiciel de géométrie dynamique.

La capacité introduite est d'énoncer le théorème de Thalès sous la forme d'égalité de trois quotients.

Cette activité est une activité à réaliser soit en classe entière avec l'utilisation d'un vidéoprojecteur, soit en salle informatique, les élèves étant en autonomie.

1. a. Placer trois points A, B et C puis les droites (AB) et (AC).
- b. Tracer le triangle ABC et le colorer en bleu. Placer un point M sur la droite (AB).
- c. Tracer la droite parallèle à (BC) passant par M et placer N le point d'intersection de cette parallèle et de (AC).
- d. Tracer le triangle AMN et le colorer en rouge.
- e. Ouvrir le tableau et saisir respectivement dans les cellules A2, B2 et C2 : AM/AB, AN/AC et MN/BC.

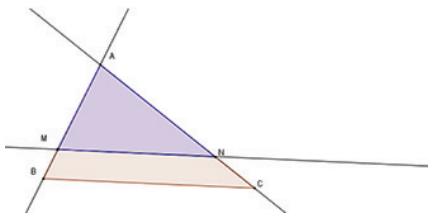
Dans la cellule A1, pour afficher le texte, il faut saisir : =«AM/AN». Il faut faire de même dans les cellules B1 et C1.



	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0.23	0.23	0.23
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			

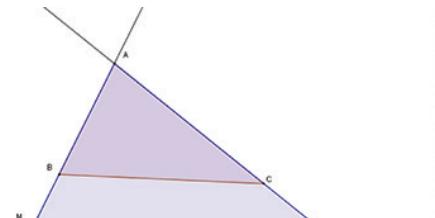
2. a. On déplace M sur (AB). On distingue en fait trois cas :

- Cas 1 : M est sur [AB].



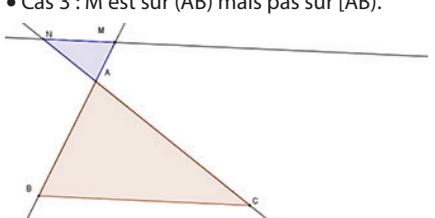
	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0.75	0.75	0.75
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

- Cas 2 : M est sur [AB] mais pas sur [AB].



	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	1.49	1.49	1.49
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

- Cas 3 : M est sur (AB) mais pas sur [AB].



	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0.34	0.34	0.34
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

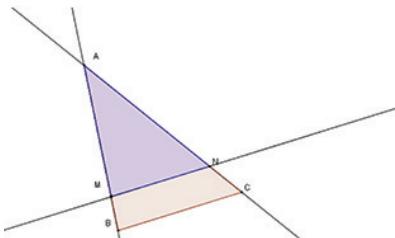
On remarque, dans les trois cas, que les trois quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux.

Le professeur fera bien ressortir les deux types de configuration « classique » des cas 1 et 2 et « papillon » du cas 3.

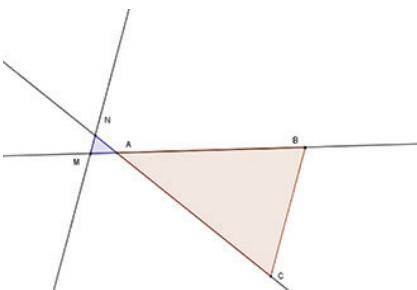
- b. La propriété conjecturée est : si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés et si (MN) est parallèle à (BC), alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

- c. On déplace les points A, B et C, on obtient ainsi d'autres triangles. On remarque que la propriété conjecturée à la question 2. b. est toujours vraie.



	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0.8	0.8	0.8
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			



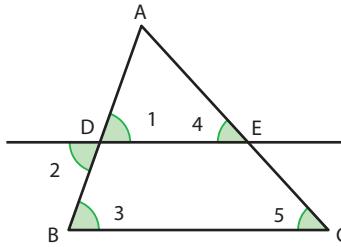
	A	B	C
1	AM/AB	AN/A'B'	MN/M'B'
2	0.14	0.14	0.14
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			

- d. Les côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnels.

Cette question permet ainsi de présenter l'Activité 2 comme une reformulation et un élargissement de l'Activité 1.

Dans cette activité, il n'est pas proposé de démonstration du théorème de Thalès (sens direct) mais il est possible d'en proposer une aux élèves, même très rapidement à l'oral :

On considère la figure suivante dans laquelle (DE) et (BC) sont parallèles.



Les angles 2 et 3 sont deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles (DE) et (BC) et une sécante (BD) donc les angles 2 et 3 ont même mesure.

Les angles 1 et 2 sont symétriques par rapport à D donc ils ont même mesure (la symétrie centrale conservant les angles).

Donc les angles 1 et 3 ont même mesure.

Les triangles ADE et ABC ont un angle commun \widehat{A} ; ils ont donc maintenant deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables.

Leurs côtés sont donc proportionnels.

On vient ainsi de démontrer le théorème de Thalès dans sa configuration « classique ».

La configuration « papillon » est obtenue par une symétrie de centre A de la configuration « classique ».

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Thalès découvert à l'activité précédente, la recherche d'une quatrième proportionnelle, plus particulièrement avec l'égalité des produits en croix.

La capacité introduite est d'utiliser le théorème de Thalès en vue de calculer une longueur.

Cette activité nécessite une réelle prise d'initiative, l'élève étant pour la première fois confronté au théorème de Thalès dans son utilisation. Les élèves utiliseront leur calculatrice, procéderont par essais. Ce travail peut être réalisé en groupe en vue de favoriser les échanges et débats.

Il ne faut pas attendre, à ce stade, une rédaction parfaite, mais des essais, la difficulté première étant déjà de bien visualiser la situation.

Aucune source ne permet d'attribuer effectivement le « théorème de Thalès » à Thalès ! Le calcul par Thalès de la hauteur d'une pyramide à partir de son ombre, relatée ici dans le roman *Le Théorème du perroquet* de Denis Guedj, serait une légende. La première démonstration de ce théorème fut en effet donnée par Euclide au livre VI des *Éléments*. L'expression « théorème de Thalès » apparaît pour la première fois en France dans la seconde moitié du xix^e siècle, dans l'ouvrage de Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire*.

Avec des rapports de distances égaux

Intentions des auteurs

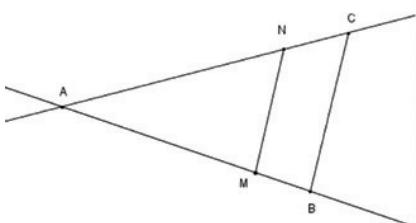
L'objectif de cette activité est de découvrir la réciproque du théorème de Thalès.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Thalès découvert à l'Activité 2 et la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique.

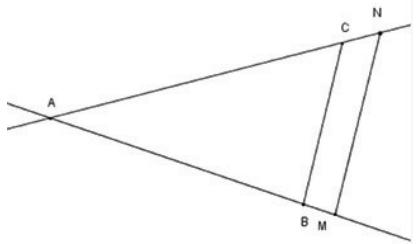
La capacité introduite est d'énoncer puis d'utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

Cette activité peut être menée en classe entière avec l'usage d'un vidéoprojecteur ou en salle informatique. La question 3 peut être menée collectivement en classe ou en recherche individuelle ou par groupes.

1. et 2. a.

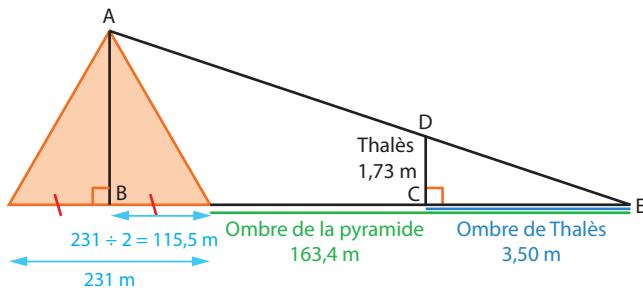


	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	0.78	0.78
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		



	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	1.13	1.13
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

1.



2. On suppose que la hauteur de la pyramide [AB] et Thalès [DC] sont perpendiculaires au sol donc (AB) et (DC) sont parallèles.

Les points E, D, A d'une part et E, C, B d'autre part sont alignés et $(AB) \parallel (DC)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$$

$$EB = 163,4 + 115,5 = 278,9 \text{ m}$$

$$\frac{ED}{EA} = \frac{3,5}{278,9} = \frac{1,73}{AB}$$

$$\text{Donc } AB = \frac{278,9 \times 1,73}{3,5} = 137,9 \text{ m.}$$

La hauteur de la pyramide de Kheops est d'environ 137,9 m.

Intentions des auteurs

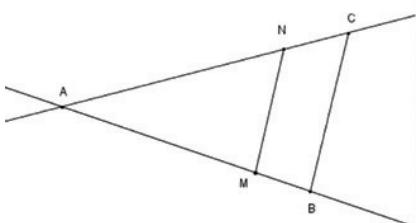
L'objectif de cette activité est de découvrir la réciproque du théorème de Thalès.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Thalès découvert à l'Activité 2 et la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique.

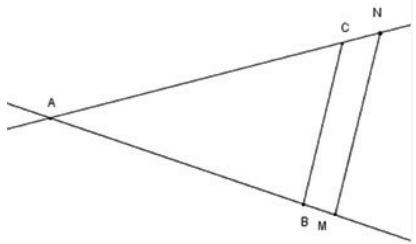
La capacité introduite est d'énoncer puis d'utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

Cette activité peut être menée en classe entière avec l'usage d'un vidéoprojecteur ou en salle informatique. La question 3 peut être menée collectivement en classe ou en recherche individuelle ou par groupes.

1. et 2. a.



	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	0.48	0.48
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

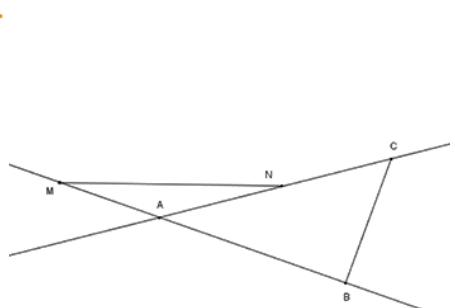


	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	0.53	0.53
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

On remarque que les droites (MN) et (BC) semblent parallèles. On peut faire remarquer qu'on retrouve les configurations « classique » et « papillon » du théorème de Thalès.

On peut conjecturer la propriété suivante : Si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

b.



	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	0.53	0.53
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

Cette figure remet en cause la conjecture précédente puisque les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont bien égaux mais que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Il faut donc rajouter une condition sur l'emplacement des points M et N : les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part doivent être alignés dans le même ordre. Autrement dit, M appartient au segment [AB], alors N doit appartenir au segment [AC]. Si M appartient à la demi-droite [AB] mais pas à [AB], alors N doit appartenir à [AC] mais pas à [AC].

- c. On peut ainsi formuler la propriété suivante : Si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

C'est cette propriété qu'on appelle « réciproque du théorème de Thalès ».

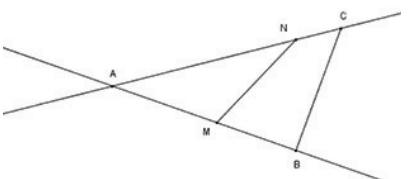
La propriété sera admise sans démonstration.

On pourra faire remarquer que le quotient $\frac{MN}{BC}$ n'intervient pas.

On pourra prolonger l'activité en faisant afficher le quotient $\frac{MN}{BC}$

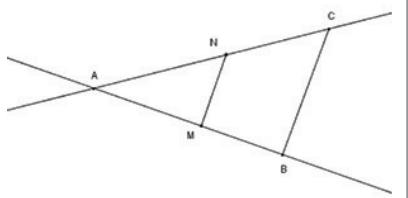
et faire remarquer sur la figure suivante que $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ et que, pourtant, les deux droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0,57	0,81	0,57
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			



En revanche si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors on a bien $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

	A	B	C
1	AM/AB	AN/AC	MN/BC
2	0,57	0,57	0,57
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			



Exercices

Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès

Questions flash

- 1 a. $x = 9$ b. $x = 4$
c. $x = 5$ d. $x = 6,3$

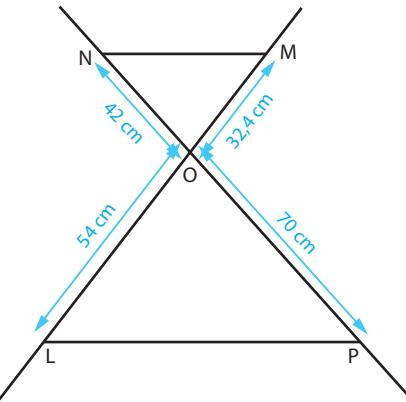
On peut utiliser la propriété des quotients égaux ou la propriété des produits en croix.

- 2 $AB = 2$ unités de longueur
 $AC = 6$ unités de longueur
Le rapport d'agrandissement est de $\frac{AC}{AB} = \frac{6}{2} = 3$.

- 3 On peut utiliser le théorème de Thalès dans les configurations des figures ⑤, ⑥, ⑦ et ⑧. Dans ces cas, les points sont alignés de part et d'autre et les droites sont parallèles.
Dans les figures ①, ② et ④, les droites ne sont pas parallèles.
Dans les figures ③ et ⑨, les points ne sont pas alignés.

Dans les figures ⑤ et ⑦, les droites sont parallèles grâce à la propriété suivante : « Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. »

- 3.



Il s'agit de voir si les droites (MN) et (LP) sont parallèles.

On s'assure déjà que les points N, O, P d'une part et M, O, L d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On calcule ensuite séparément les deux quotients :

$$\frac{ON}{OP} = \frac{42}{70} = 0,6$$

$$\frac{OM}{OL} = \frac{32,4}{54} = 0,6$$

On remarque que $\frac{ON}{OP} = \frac{OM}{OL}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut en conclure que les droites (NM) et (LP) sont parallèles et donc que la table à repasser est bien horizontale.

On peut faire remarquer qu'on peut également prouver l'égalité des deux quotients à l'aide de l'égalité des produits en croix : $40 \times 54 = 70 \times 32,4$.

On peut également faire remarquer que si $\frac{ON}{OP} \neq \frac{OM}{OL}$, alors les droites (MN) et (LP) ne peuvent pas être parallèles.

- 4 Les points O, M, R d'une part et O, N, S d'autre part sont alignés. Les droites (MN) et (RS) sont parallèles.
Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{OM}{OR} = \frac{ON}{OS} = \frac{MN}{RS}$$

- 5 1. L'égalité est fausse. Le dernier rapport est faux.
2. L'égalité est vraie.
3. L'égalité est vraie.
4. L'égalité est fausse. Le point d'intersection des deux droites est U.
5. L'égalité est fausse. Les points alignés n'ont pas été suivis pour écrire les rapports.

- 6 Figure ① : égalité b.
Figure ② : égalité a.
Figure ③ : égalité c.

- 7 Les points O, E, U d'une part et T, E, P d'autre part sont alignés. Les droites (OT) et (PU) sont parallèles.
Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{EO}{EU} = \frac{ET}{EP} = \frac{OT}{PU}$$

- 8 Les points A, D, C d'une part et A, D, E d'autre part sont alignés. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
Le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE de rapport $\frac{6}{2} = 3$.

9

Cet exercice permet d'utiliser à la fois le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès.

Le triangle ARS est un triangle rectangle en R. On utilise le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} AS^2 &= AR^2 + RS^2 \\ AS^2 &= 2,1^2 + 2,8^2 = 12,25 \\ AS &= \sqrt{12,25} \\ AS &= 3,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Les points A, R, B d'une part et A, S, C d'autre part sont alignés. Les droites (RS) et (BC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC} = \frac{RS}{BC}$$

$$AB = AR + RB = 2,1 + 3,9 = 6 \text{ cm}$$

On remplace les valeurs connues :

$$\frac{2,1}{6} = \frac{3,5}{AC} = \frac{2,8}{BC}$$

On utilise le produit en croix :

$$BC = \frac{6 \times 2,8}{2,1} = 8 \text{ cm}$$

$$AC = \frac{6 \times 3,5}{2,1} = 10 \text{ cm}$$

$$10 \quad AB = AD + DB = 4,2 + 2,1 = 6,3 \text{ cm}$$

On cherche d'abord le rapport d'homothétie :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{6,3}{4,2} = 1,5$$

Le triangle ABC est l'image du triangle ADE par l'homothétie de centre A et de rapport 1,5.

Par cette homothétie, le segment [DE] a pour image [BC] et le segment [AE] a pour image [AC].

Donc $AC = 1,5 \times AE$ et $BC = 1,5 \times DE$

$$AE = 6 \div 1,5 = 4 \text{ cm}$$

$$DE = 3,6 \div 1,5 = 2,4 \text{ cm}$$

$$11 \quad 1. \text{ On ne peut pas trouver la valeur de } GC. \text{ Il manque une valeur.}$$

Il faudrait connaître FG.

$$2. \text{ Les points E, G, A d'une part et C, F, G d'autre part sont alignés.}$$

Les droites (FA) et (EC) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{GF}{GC} = \frac{GA}{GE} = \frac{FA}{CE}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{GF}{GC} = \frac{3,2}{3,6} = \frac{3,4}{CE}$$

On utilise le produit en croix :

$$CE = \frac{3,6 \times 3,4}{3,2} = 3,825 \text{ cm}$$

$$12 \quad \text{Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés.}$$

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{3,7}{5,3} = \frac{5,7}{AC} = \frac{4,1}{BC}$$

On utilise le produit en croix :

$$AC = \frac{5,3 \times 5,7}{3,7} \approx 8,2 \text{ dm}$$

$$BC = \frac{5,3 \times 4,1}{3,7} \approx 5,9 \text{ dm}$$

$$\text{Donc } EC = AC - AE \approx 8,2 - 5,7 \approx 2,5 \text{ dm.}$$

$$13 \quad \text{Les points D, T, N d'une part et C, T, E d'autre part sont alignés.}$$

Les droites (DC) et (EN) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{TD}{TN} = \frac{TC}{TE} = \frac{DC}{EN}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{4,7}{5,2} = \frac{TC}{2,4} = \frac{DC}{4,3}$$

On utilise le produit en croix :

$$TC = \frac{4,7 \times 2,4}{5,2} \approx 2,2 \text{ cm}$$

$$DC = \frac{4,7 \times 4,3}{5,2} \approx 3,9 \text{ cm}$$

$$14 \quad \text{Les points A, D, C d'une part et B, E, C d'autre part sont alignés.}$$

Les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$AC = AD + DC = 5 + 3 = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{CE}{9} = \frac{DE}{AB}$$

On ne peut pas trouver DE. Pour la trouver, il faut avoir la valeur de AB. C'est donc Manon qui a raison.

Reconnaitre des droites parallèles

Questions flash

Cet exercice permet de remobiliser la propriété des quotients égaux ou celle des produits en croix pour reconnaître deux quotients égaux.

- a. $5 \times 9 = 45$ et $3 \times 15 = 45$, donc les rapports sont égaux.
- b. $7,4 \times 5 = 37$ et $3,6 \times 10 = 36$, donc les rapports ne sont pas égaux.
- c. $3,6 \times 6 = 21,6$ et $9 \times 1,8 = 16,2$, donc les rapports ne sont pas égaux.

- 15 a. Les droites (d) et (d') sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite.
- b. (d) et (d') ne sont pas parallèles, les angles alternes-internes ne sont pas de même mesure.
- c. (d) et (d') sont parallèles, car elles sont portées par les côtés opposés d'un losange (car c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires) et ses côtés sont parallèles.

- 17 Les points A, E, C d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$AC = AE + EC = 3,31 + 1,16 = 4,47 \text{ cm}$$

$$AB = AF + FB = 3,16 + 0,82 = 3,98 \text{ cm}$$

On vérifie l'égalité de Thalès :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{3,31}{4,47} \text{ et } \frac{AF}{AB} = \frac{3,16}{3,98}$$

On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux.

$$3,31 \times 3,98 = 13,173 \text{ et } 4,47 \times 3,16 = 14,125 \text{ (non égal)}$$

$\frac{AE}{AC} \neq \frac{AF}{AB}$ L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.

- 18 Les points T, U, S d'une part et O, U, R d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On vérifie l'égalité de Thalès :

$$\frac{UT}{US} = \frac{5}{1,8} \text{ et } \frac{UO}{UR} = \frac{7,5}{2,7}$$

On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux.

$$5 \times 2,7 = 13,5 \text{ et } 1,8 \times 7,5 = 13,5 \text{ (égal)}$$

$$\frac{UT}{US} = \frac{UO}{UR}$$

L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (OT) et (RS) sont parallèles.

- 19 Les codages sur la figure montrent que N et R sont les milieux respectifs des côtés [KI] et [IA].

On a donc $IK = 2 \times IN$ et $IA = 2 \times IR$.

On en déduit que $\frac{IK}{IN} = 2$ et $\frac{IA}{IR} = 2$.

Les points I, N, K d'une part et I, R, A d'autre part sont alignés dans le même ordre : $\frac{IK}{IN} = \frac{IA}{IR}$.

L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (NR) et (KA) sont parallèles.

On a donc $\frac{KA}{NR} = \frac{IK}{IN} = 2$.

On en déduit que $NR = 7,2 \div 2 = 3,6$ cm.

- 20** C'est Noé qui a raison, car pour prouver que deux quotients sont égaux, il faut travailler avec des valeurs exactes et non approchées, comme l'a fait Lucas.
Lucas aurait dû utiliser le produit en croix pour vérifier l'égalité des rapports.

- 21** Les points D, E, A d'une part et D, G, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$DA = DE + EA = 4,12 + 1,03 = 5,15 \text{ cm}$$

$$DG = DB - GB = 4,24 - 1 = 3,24 \text{ cm}$$

On vérifie l'égalité de Thalès :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{4,12}{5,15} \text{ et } \frac{DG}{DB} = \frac{3,24}{4,24}$$

On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux.

$$4,12 \times 4,24 = 17,468 \text{ et } 5,15 \times 3,24 = 16,686$$

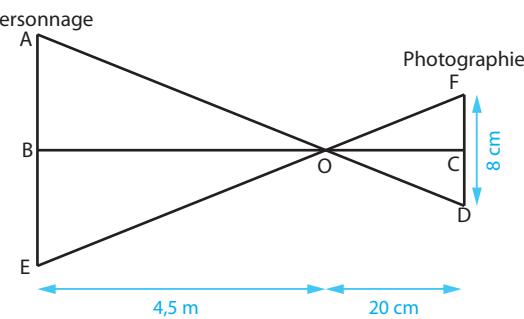
$$\frac{DE}{DA} \neq \frac{DG}{DB}$$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites (EG) et (AB) ne sont pas parallèles.

Problèmes

22 Le sténopé

On fait un schéma de la situation.



Le personnage peut être assimilé au segment [AE] perpendiculaire au sol et la paroi du sténopé où est projetée la photographie [FD] aussi. B est le milieu de [AE] et C est le milieu de [FD].

(AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même droite (BC), elles sont donc parallèles.

Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

On remplace les valeurs connues, mais d'abord on les convertit toutes en centimètres.

$$4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm}$$

$$\frac{OA}{OD} = \frac{450}{20} = \frac{AB}{4}$$

On utilise le produit en croix :

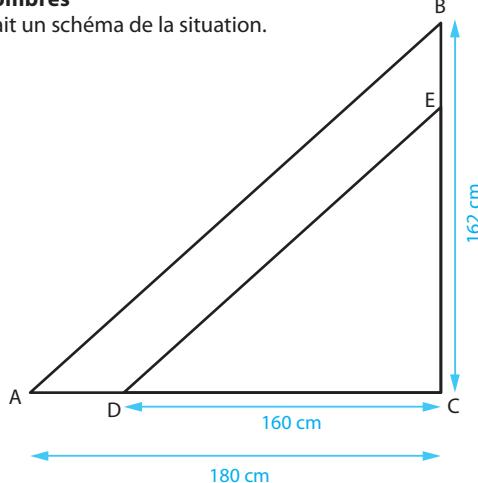
$$AB = \frac{450 \times 4}{20} = 90 \text{ cm}$$

La hauteur totale du personnage avec sa canne est de $2 \times 90 \text{ cm} = 180 \text{ cm} = 1,80 \text{ m}$.

La taille du personnage est donc de $180 - 7 = 173 \text{ cm} = 1,73 \text{ m}$ (on soustrait à la taille totale du personnage réel la longueur de la canne à pêche qui dépasse).

23 Les ombres

On fait un schéma de la situation.



Le segment [CE] représente Yaël et le segment [BC], Cédric. Les rayons du soleil sont parallèles.

Le triangle DCE est une réduction du triangle ABC de rapport $\frac{DC}{CA} = \frac{160}{180} = \frac{8}{9}$.

$$\text{On a donc } EC = \frac{8}{9} \times 162 = 144 \text{ cm.}$$

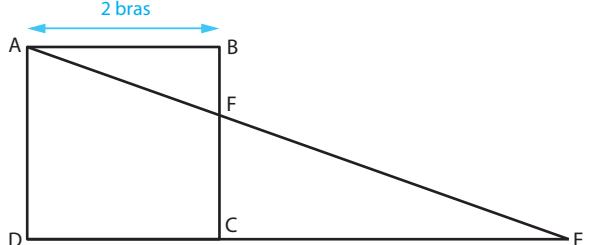
Yaël mesure 1,44 m.

On peut aussi utiliser le théorème de Thalès.

24 Le carré géométrique

On pourra se référer au lien Internet suivant qui est un extrait de *Composition et usage du Carré géométrique d'Oronce Fine*.

irem.univ-mrs.fr/expo2013/panneaux/mesurer-b3-carre.pdf



On cherche la longueur CE.

Les côtés BC et DC du carré sont gradués.

Dans la configuration dite « du papillon », A, F, E d'une part et B, F, C d'autre part sont alignés et les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{FB}{FC} = \frac{FA}{FE} = \frac{AB}{CE}$$

Les graduations sur le côté BC donnent la longueur FC et BC et on connaît AB = 2 bras.

$$\text{On utilise le produit en croix : } CE = \frac{FC \times AB}{FB}$$

$$AB = 2 \text{ bras} = 1,1 \text{ m}$$

Soit BF = x (en m).

$$FC = 1,1 - x \text{ (en m).}$$

$$\text{Donc } CE = \frac{(1,1 - x) \times 1,1}{x}$$

x étant connu car les côtés du carré sont gradués, on peut trouver la longueur CE, distance sur le sol plat, grâce à cette formule.

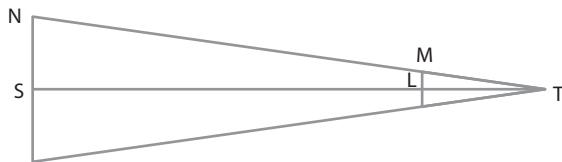
$$\text{Par exemple, si } BF = 0,5 \text{ m, alors } CE = \frac{(1,1 - 0,5) \times 1,1}{0,5} = 13,42 \text{ m}$$

25

L'éclipse

On peut utiliser le théorème de Thalès ou le rapport d'agrandissement.

On schématise la situation :



1. $SN = 1\ 400\ 000 \div 2 = 700\ 000$ km rayon du Soleil.
 $ML = 3\ 500 \div 2 = 1\ 750$ km rayon de la Lune.
 Les points N, M, T d'une part et S, L, T d'autre part sont alignés, les droites (SN) et (LM) sont parallèles.
 Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TL}{TS} = \frac{ML}{NS}$$

On remplace les valeurs connues :

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TL}{149\ 600\ 000} = \frac{1\ 750}{700\ 000}$$

On utilise le produit en croix :

$$TL = \frac{1\ 750 \times 149\ 600\ 000}{700\ 000} = 374\ 000 \text{ km}$$

L'observateur doit être à environ 374 000 km du centre de la Lune.

2. La distance de 373 000 km est très proche de la valeur trouvée à la première question qui est une valeur approchée. C'était donc une éclipse totale.

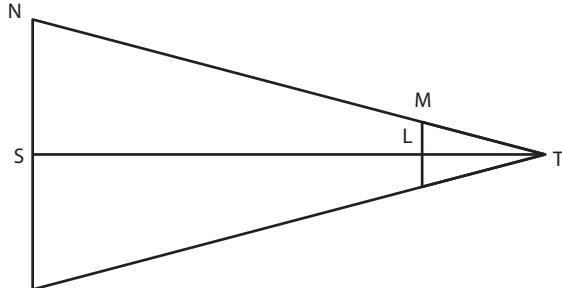
Cet exercice peut être exploité dans le cadre d'un EPI sur le calcul de longueurs astronomiques, en lien avec la physique-chimie.

26

Distance Terre-Lune

Dans cet exercice, il faut faire attention aux unités.

On schématise la situation :



On a : $NS = 3\ 500 \div 2 = 1\ 750$ km = 175 000 000 cm, le rayon de la Lune.

$ML = 0,5$ cm

Les points N, M, T d'une part et S, L, T d'autre part sont alignés, les droites (SN) et (LM) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TL}{TS} = \frac{ML}{NS}$$

On remplace les valeurs connues :

$$\frac{TM}{TN} = \frac{100}{TS} = \frac{0,5}{175\ 000\ 000}$$

On utilise le produit en croix :

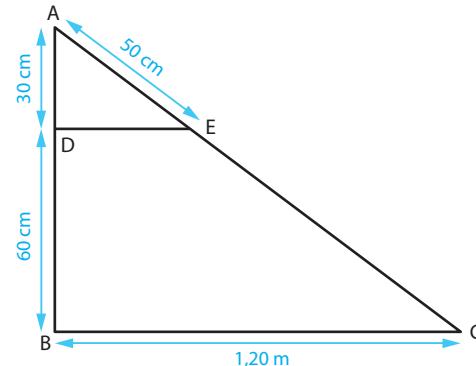
$$TS = \frac{100 \times 175\ 000\ 000}{0,5} = 35\ 000\ 000\ 000 \text{ cm} \\ = 350\ 000\ 000 \text{ m} \\ = 350\ 000 \text{ km}$$

La distance Terre-Lune est d'environ 350 000 km.

27

Bricolage

On schématise la situation :



On suppose le mur perpendiculaire au sol.

Le triangle ABC est rectangle en B, on utilise l'égalité de Pythagore pour trouver la longueur AC.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 90^2 + 120^2 = 22\ 500$$

$$AC = \sqrt{22\ 500} = 150 \text{ cm}$$

Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On vérifie l'égalité de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

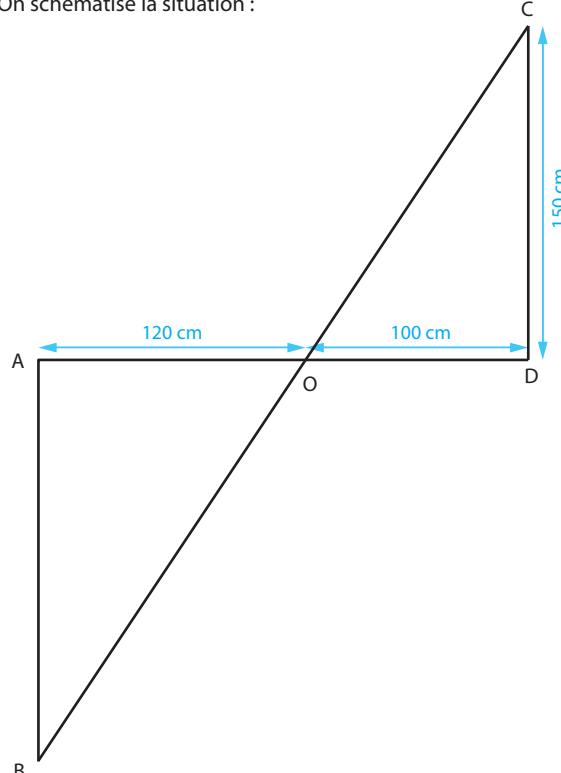
$$\frac{AE}{AC} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

Les rapports sont égaux, l'égalité de Thalès est vérifiée donc les droites (DE) et (BC) sont parallèles. L'étagère est horizontale.

28

Le puits

On schématise la situation :



Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AD) qui matérialise le sol. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. (AB) et (CD) sont donc parallèles.

Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

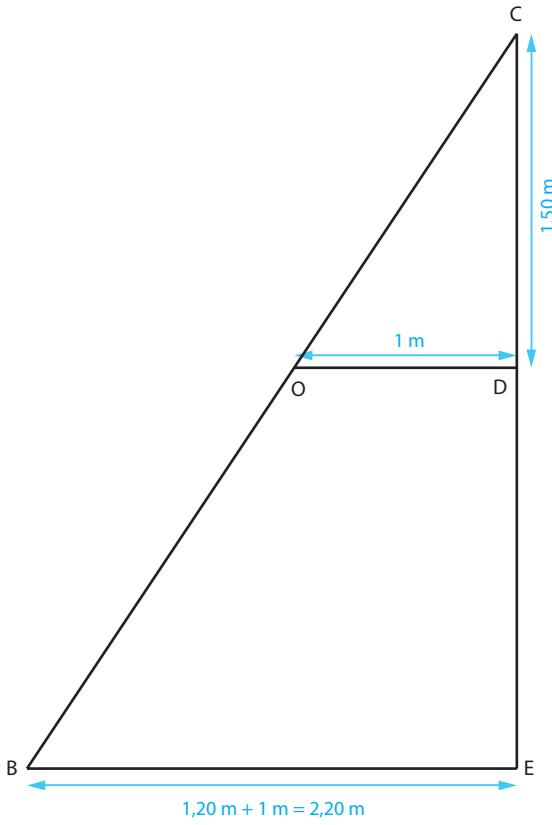
On remplace les valeurs connues :

$$\frac{120}{100} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{150}$$

$$AB = \frac{120 \times 150}{100} = 180 \text{ cm}$$

Le puits est à une profondeur de 1,80 m.

On peut aussi présenter la méthode suivante qui utilise une configuration classique et non « papillon » de Thalès :



Les droites (OD) et (BE) sont parallèles.

Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{CO}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{OD}{BE}$$

On remplace les valeurs connues :

$$\frac{CO}{CB} = \frac{1,50}{CB} = \frac{1}{2,20}$$

$$CB = \frac{1,50 \times 2,20}{1} = 3,30 \text{ m}$$

$$DE = CE - CD$$

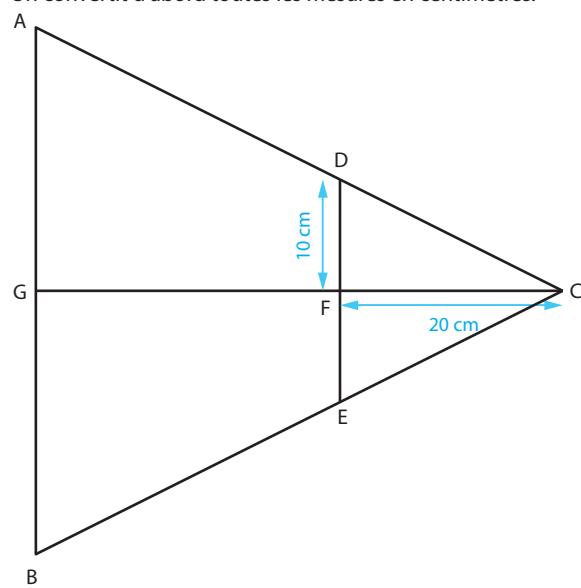
$$DE = 3,30 - 1,50 = 1,80 \text{ m}$$

Le puits est à une profondeur de 1,80 m.

29 La croix du bûcheron

On obtient le dessin suivant : [AB] représente l'arbre et DEC la croix du bûcheron.

On convertit d'abord toutes les mesures en centimètres.



Les points C, D, A d'une part et C, F, G d'autre part sont alignés et les droites (DF) et (GA) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CG} = \frac{DF}{AG}$$

On remplace les valeurs connues : $\frac{CD}{CA} = \frac{20}{540} = \frac{1}{27}$

$$\text{Donc } AG = \frac{540 \times 10}{27} = 270 \text{ cm.}$$

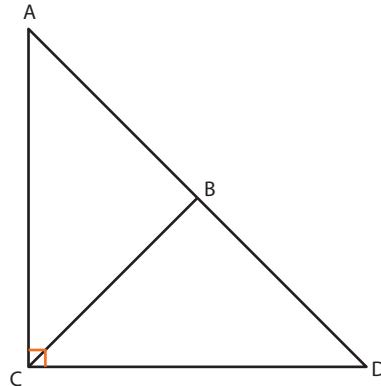
On obtient ainsi la moitié de la hauteur de l'arbre.

$$2 \times 270 = 540 \text{ cm} = 5,40 \text{ m.}$$

L'arbre mesure 5,40 m.

30 Course d'orientation

• Première partie du parcours



B est le milieu de [AD] donc AB = 250 m.

Le triangle ABD est rectangle en B, on peut utiliser le théorème de Pythagore.

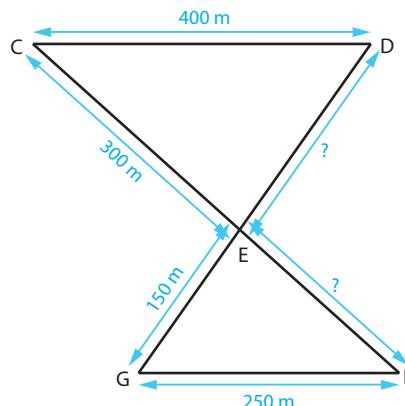
$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$CD^2 = AD^2 - AB^2 = 500^2 - 300^2 = 160\,000$$

$$CD = 400 \text{ m}$$

ACD est un triangle rectangle en C, c'est la moitié d'un rectangle. B est le milieu de [AD]. Or les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et sont de même longueur. Donc AB = BD = CD = 250 m.

• Seconde partie du parcours



Les droites (CD) et (GF) sont parallèles. Les points C, E, F d'une part et D, E, G d'autre part sont alignés.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{ED}{EG} = \frac{EC}{EF} = \frac{CD}{GF}$$

On remplace les valeurs connues : $\frac{ED}{150} = \frac{300}{EF} = \frac{400}{250}$

$$ED = \frac{150 \times 400}{250} = 240 \text{ m}$$

$$EF = \frac{300 \times 250}{400} = 187,5 \text{ m}$$

On cherche la longueur totale du parcours :

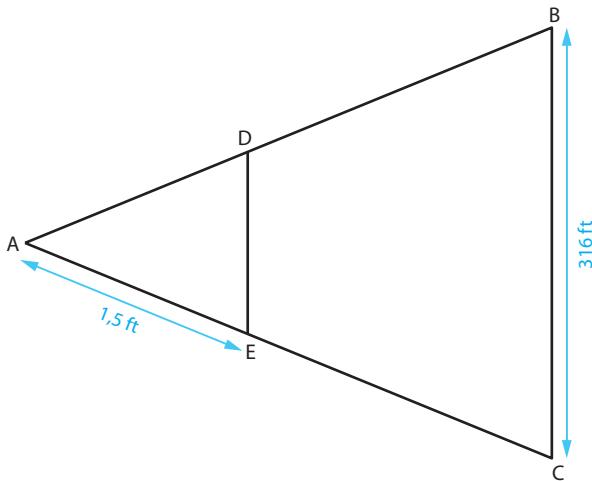
$$AB + BC + CD + DE + EF = 250 + 250 + 400 + 240 + 187,5 = 1\,327,5 \text{ m}$$

On cherche la vitesse d'Hugo :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{1327,5}{18} \times 60 = 4\,425 \text{ m/h} = 4,425 \text{ km/h}$$

Hugo a tort.

31

Big Ben

A représente l'objectif de l'appareil photo, assimilé à l'extrémité du bras. [AE] représente le bras.

[DE] représente l'image de Big Ben (l'écartement entre les deux doigts). [BC] représente Big Ben en vrai.

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$BC = 316 \times 30,48 = 9\,631,68 \text{ cm}$$

$$AE = 1,5 \text{ ft} = 1,5 \times 30,48 = 45,72 \text{ cm}$$

Il manque DE, il faut mesurer la tour sur la photo. DE = 2 cm

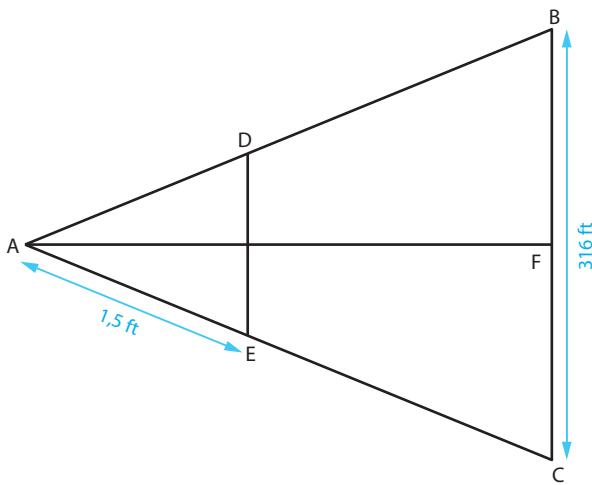
$$\frac{AD}{AB} = \frac{45,72}{AC} = \frac{2}{9\,631,68}$$

$$AC = \frac{45,72 \times 9\,631,68}{2} \approx 220\,180,2 \text{ cm} \approx 2\,200 \text{ m}$$

$$\approx 2,2 \text{ km}$$

Cette longueur trouvée peut être assimilée à la distance qui sépare Bob de Big Ben, la taille de Bob étant négligeable par rapport à cette distance.

Mais si on recherche plus de précision :



Soit F le milieu de [BC].

$$BF = BC \div 2 = 9\,631,68 \div 2 = 4\,815,84 \text{ cm}$$

Le triangle AFC est rectangle en F.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AF^2 + FC^2$$

$$220\,180,2^2 = AF^2 + 4\,815,84^2$$

$$AF = \sqrt{220\,180,2^2 - 4\,815,84^2} \approx 220\,128 \text{ cm}$$

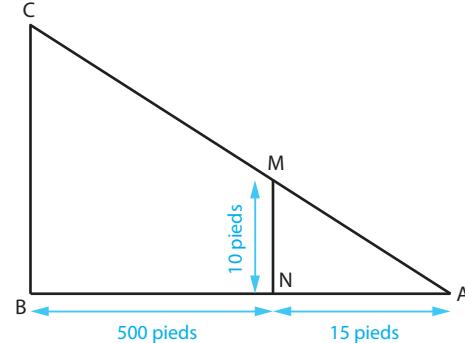
Cette photo a été prise à environ 2,2 km de Big Ben.

On remarque que les longueurs AC et AF sont effectivement très proches. AF peut ainsi être assimilée à AC.

32

La falaise

On schématisse la situation en notant les valeurs connues.



[MN] représente la perche plantée dans le sable, [BC] la falaise. La perche et la muraille sont perpendiculaires au sol, donc parallèles entre elles.

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Les points A, M, C d'une part et A, N, B d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{15}{515} = \frac{10}{BC}$$

$$BC = \frac{515 \times 10}{15} \approx 343,3 \text{ pieds}$$

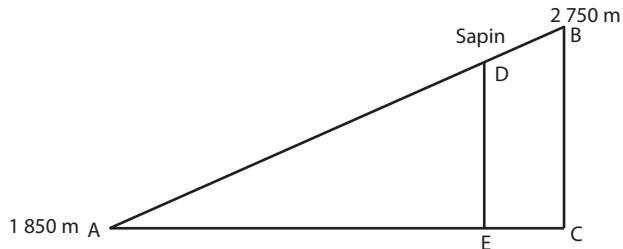
$$BC \approx 343,3 \times 30,48 \approx 10\,463,8 \text{ cm} \approx 104 \text{ m}$$

La hauteur de la muraille est d'environ 104 m.

33

À la montagne

On schématisse la situation.



$$v = 120 \text{ km/h} = \frac{120\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{100}{3} \text{ m/s}$$

$$DB = \frac{100}{3} \times 24 = 800 \text{ m}$$

$$BC = 2\,750 - 1\,850 = 900 \text{ m}$$

$$1 \text{ min } 12 \text{ s} = 72 \text{ s}$$

$$AD = \frac{100}{3} \times 72 = 2\,400 \text{ m}$$

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles, car elles sont toutes les deux perpendiculaires au sol.

On utilise le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{2\,400}{2\,400 + 800} = \frac{DE}{900}$$

$$DE = \frac{2\,400 \times 900}{3\,200}$$

$$DE = 675 \text{ m}$$

L'altitude du sapin est de $1\,850 + 675 = 2\,525 \text{ m}$.

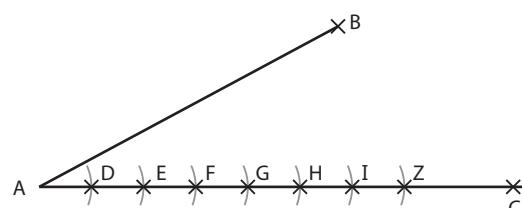
34

Partage

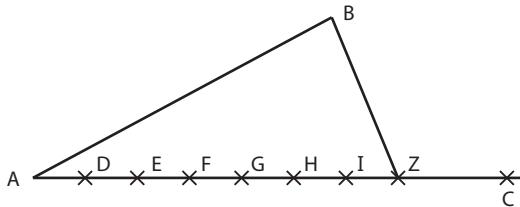
On trace un segment [AB] que l'on veut diviser en 7 parts égales.

On trace une demi-droite [AC).

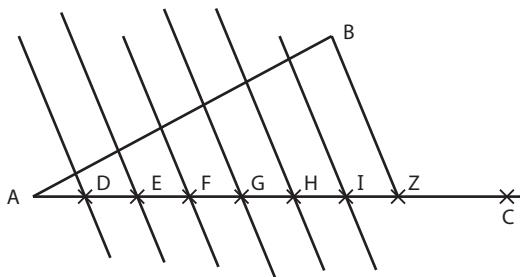
Avec un compas, on trace 7 segments égaux (on choisit l'écartement que l'on veut).



On relie le point B et le point Z.



On trace ensuite des droites parallèles à (BZ) passant par les points D, E, F, G, H et I.

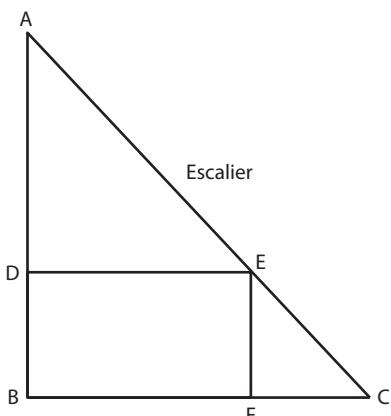


Grâce au théorème de Thalès, on a divisé le segment [AB] en 7 parts égales.

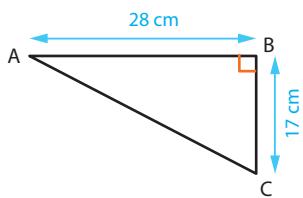
35 Sous l'escalier

La table a une profondeur de 61 cm et l'escalier de plus de 80 cm, il n'y a donc pas de problème dans ce sens-là.

On schématisé la situation.



On cherche d'abord la longueur de l'escalier. L'escalier a une longueur égale à 14 fois la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle suivant qui représente une marche :



Faire attention : il y a bien 15 marches mais la longueur à calculer s'arrête à l'avant-dernière marche !

Le triangle ABC est rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 28^2 + 17^2$$

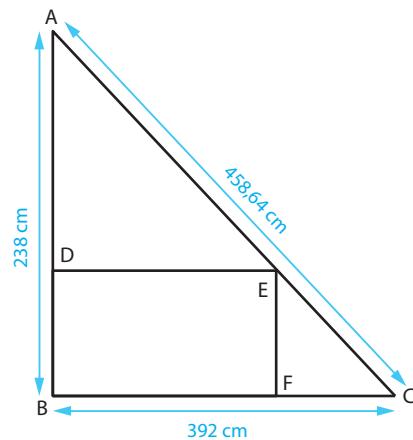
$$AC^2 = 1\ 073$$

$$AC = \sqrt{1\ 073} \approx 32,76 \text{ cm}$$

Donc l'escalier a une longueur de $32,76 \times 14 \approx 458,64 \text{ cm}$.

On cherche ensuite la largeur sous l'escalier :

$$14 \times 28 = 392 \text{ cm}$$



On cherche maintenant si on a la place pour mettre la table en dessous de l'escalier. Le rectangle BDEF matérialise la table. Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés, et les droites (DE) et (BC) sont parallèles. On peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AD}{238} = \frac{AE}{458,64} = \frac{DE}{392}$$

$$DE = \frac{AD \times 392}{238} = \frac{28}{17} AD$$

Si on suppose que EF = 110 cm alors :

$$AD = 238 - 110 = 128 \text{ cm.}$$

$$\text{On trouve alors pour } DE = \frac{28}{17} \times 128 \approx 210,8 \text{ cm.}$$

$210,8 > 150$

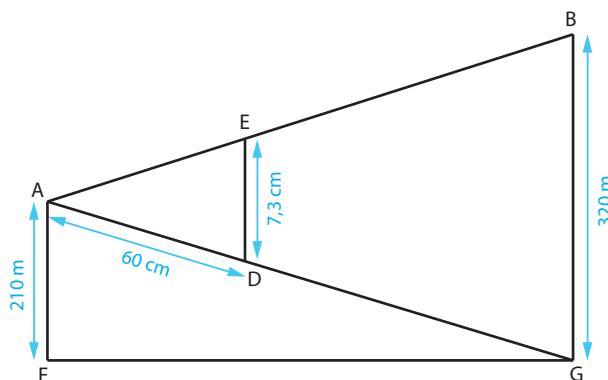
Ewen aura donc largement la place de mettre sa table haute sous l'escalier.

36 À Paris

La difficulté de cet exercice réside dans un premier temps dans sa représentation.

On suppose que la tour Eiffel et la tour Montparnasse sont situées à la même altitude.

On schématisé la situation par le dessin suivant.



[AF] représente la tour Montparnasse et [BG] la tour Eiffel.

[ED] représente la règle.

Les deux tours sont perpendiculaires au sol donc les droites (AF), (ED) (on suppose que Jade tient sa règle perpendiculairement au sol) et (BG) sont parallèles entre elles puisque perpendiculaires à une même droite.

Les points A, E, B d'une part et A, D, G d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG} = \frac{ED}{BG}$$

On convertit toutes les mesures en mètres.

$$7,3 \text{ cm} = 0,073 \text{ m et } 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m.}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{0,6}{AG} = \frac{0,073}{320}$$

$$AG = \frac{0,6 \times 320}{0,073} \approx 2\ 630,1 \text{ m}$$

Le triangle AFG est rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore :

$$AG^2 = AF^2 + FG^2$$

$$2\,630,1^2 = 210^2 + FG^2$$

$$FG^2 = 6\,873\,326,1$$

$$FG = \sqrt{6\,873\,326,1}$$

$$FG \approx 2\,622 \text{ m}$$

À vol d'oiseau, les deux tours sont distantes d'environ 2,6 km.

Prolongements possibles :

Il peut être intéressant de faire vérifier cette distance sur une carte de Paris.

Cela permet de retravailler la notion d'échelle et de proportionnalité.



On trouve un résultat assez proche, l'écart étant dû à l'imprécision de la situation (on suppose notamment que l'œil de Jade est au même niveau que l'extrémité de son bras).

On peut aussi faire calculer le pourcentage d'erreur.

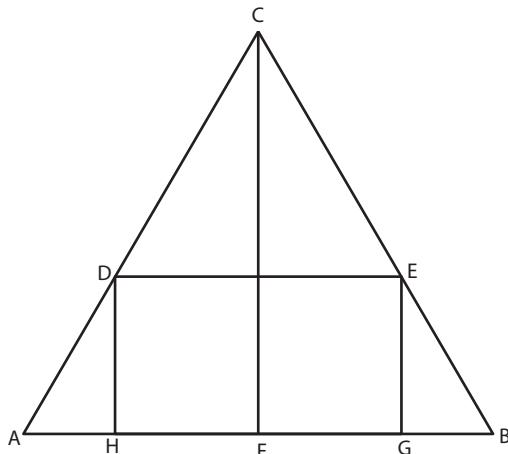
37 Vente de maison

La surface du rez-de-chaussée est l'aire d'un rectangle de longueur 13 m et de largeur 9 m :

$$\mathcal{A}_1 = 9 \times 13 = 117 \text{ m}^2$$

On cherche maintenant la surface au sol des combles.

On schématisé :



$CF = 4 \text{ m}$, $EG = 1,80 \text{ m}$ et $BF = 4,5 \text{ m}$.

Dans le triangle BCF, les points B, E, C d'une part et B, G, F d'autre part sont alignés. Les droites (FC) et (EG) sont toutes les deux perpendiculaires au sol représenté par le droite (AB), elles sont donc parallèles.

Les conditions du théorème de Thalès sont réunies, on peut utiliser son égalité :

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BG}{BF} = \frac{EG}{CF}$$

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BG}{4,5} = \frac{1,8}{4}$$

$$BG = \frac{4,5 \times 1,8}{4} = 2,025 \text{ m}$$

$$FB = AB \div 2 = 9 \div 2 = 4,5 \text{ m}$$

$$\text{Donc } FG = 4,5 - 2,025 = 2,475 \text{ m}$$

Il faut donc calculer l'aire de la surface du plancher au sol de ce rectangle de longueur 13 m et de largeur $2,475 \times 2 = 4,95 \text{ m}$.

$$\mathcal{A}_2 = 4,95 \times 13 = 64,35 \text{ m}^2$$

La surface totale est :

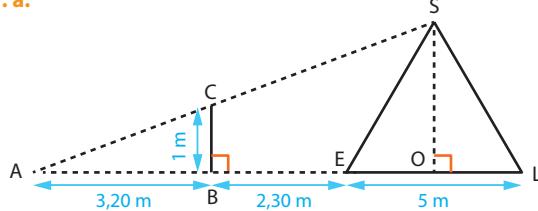
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 117 + 64,35 = 181,35 \text{ m}^2$$

Le prix de vente possible est donc égal à $P = 181,35 \times 1\,416$ soit environ 256 792 €.



38 Cône de sel

1. a.



La hauteur de ce cône de sel est $h = 2,50$ mètres.

Les points A, C, S d'une part et A, B, O d'autre part sont alignés. Les droites (CB) et (SO) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont donc parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès :

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AO} = \frac{BC}{OS}$$

On remplace par les valeurs connues :

$AO = AB + BE + EO = 3,2 + 2,3 + 2,5$ (EO = 2,5 m car le triangle SEL est isocèle en S donc la hauteur [SO] est aussi la médiatrice de [EL], par conséquent O est le milieu de [EL]).

$$\frac{AC}{AS} = \frac{3,2}{8} = \frac{1}{OS}$$

$$OS = \frac{8 \times 1}{3,2} = 2,5$$

La hauteur h mesure 2,5 m.

b. On utilise la formule du volume d'un cône :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2,5^2 \times 2,5 \approx 16 \text{ m}^3$$

Le volume de sel contenu dans ce cône est proche de 16 m³.

2. Le volume d'un cône est de 1 000 m³ et la hauteur maximale est 6 m.

On remplace les valeurs connues dans la formule du calcul du volume du cône :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$1\,000 = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times 6$$

$$\text{Donc } r^2 = \frac{1\,000 \times 3}{6\pi} = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{500}{\pi}} \approx 12,6 \text{ m}$$

Le rayon minimum est d'environ 12,6 m.

39 La desserte

On ne peut pas utiliser la réciproque du théorème dans ce cas précis, n'ayant pas les valeurs de OA et OD. On va donc raisonner différemment en cherchant la valeur qu'aurait CD si les droites (AB) et (CD) étaient parallèles, et comparer.

Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés. On suppose que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On utilise le théorème de Thalès pour trouver la valeur de CD :

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{60}{45} = \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{76}$$

$$CD = \frac{60 \times 76}{45} \approx 101,3 \text{ cm} \neq 100 \text{ cm}$$

La supposition initiale est fausse, les plateaux de la desserte ne sont pas parallèles.

40

Escalier

1. Le triangle EBD est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore :

$$ED^2 = DB^2 + EB^2$$

$$DB = 20 + 250 = 270 \text{ cm}$$

$$ED^2 = 270^2 + 360^2$$

$$ED^2 = 202\,500$$

$$ED = \sqrt{202\,500} = 450 \text{ m}$$

2. On se place dans le triangle BED.

Les points B, A, E d'une part et B, C, D d'autre part sont alignés. Les droites (ED) et (AC) sont parallèles (l'épaisseur de la rampe est toujours la même).

Les conditions du théorème de Thalès sont réunies.

On a donc l'égalité :

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED}$$

$$\frac{BA}{360} = \frac{250}{270} = \frac{AC}{450}$$

$$\text{On a } BA = \frac{360 \times 250}{270} \approx 333 \text{ cm et } AC = \frac{250 \times 450}{270} \approx 417 \text{ cm.}$$

41

Le fumoir

1. On a $OD = JK = 2 \text{ m}$ car $ODJK$ est un rectangle (il a 3 angles droits) et ses côtés opposés sont donc de même longueur.

$$2. HI = HD - IO - OD = 5 - 0,6 - 2 = 2,4 \text{ m}$$

3. Les droites (OJ) et (IF) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (HD), elles sont donc parallèles.

4. Les points H, F, J d'une part et H, I, O d'autre part sont alignés. Les droites (OJ) et (IF) sont parallèles. On peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{HF}{HJ} = \frac{HI}{HO} = \frac{IF}{OJ}$$

$$\frac{HF}{HJ} = \frac{2,4}{3} = \frac{IF}{5}$$

$$IF = \frac{2,4 \times 5}{3} = 4 \text{ m}$$

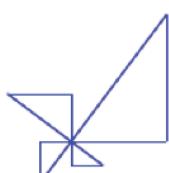
La longueur du panneau devra être de 4 m.

Algorithmique et outils numériques

42

Une construction

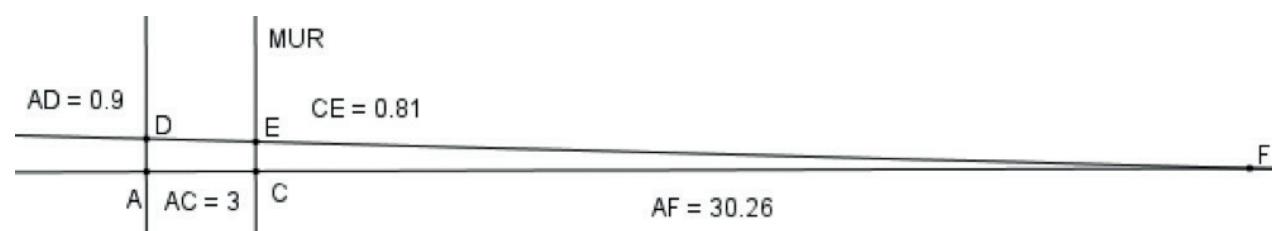
1. Ce script permet de construire 4 triangles rectangles semblables.



Il faut décaler le lutin pour pouvoir visualiser la figure construite.

La variable n indique le nombre de fois où le lutin va faire la construction.

Les côtés de chaque triangle construit sont proportionnels car on divise les longueurs des côtés par 2, puis par 3, puis par 4.



2. • 1^{re} méthode

Le premier triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 60 et 80. D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse h vérifie :

$$h^2 = 60^2 + 80^2$$

$$h^2 = 3\,600 + 6\,400$$

$$h^2 = 10\,000$$

$$h = \sqrt{10\,000}$$

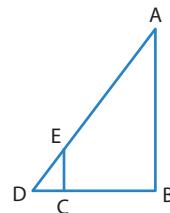
$$h = 100$$

Le dernier triangle construit est une réduction du premier triangle construit de rapport $\frac{1}{4}$.

Les longueurs de ses côtés mesurent $60 \div 4 = 15$; $80 \div 4 = 20$ et $100 \div 4 = 25$.

• 2^{de} méthode

On déplace le dernier triangle construit et on le place à l'intérieur du premier triangle construit de façon à obtenir une configuration de Thalès « classique ».



La longueur du premier côté tracé du dernier triangle rectangle est $60 \div 4 = 15$.

Ici, $DC = 15$.

Les points D, E, A d'une part et D, C, B d'autre part sont alignés et (CE) et (AB) sont parallèles (car ABC est rectangle en B et ECD est rectangle en C; (AB) et (CE) sont donc toutes les deux perpendiculaires à une même droite et sont par conséquent parallèles entre elles).

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}$$

$$\frac{DE}{DA} = \frac{15}{60} = \frac{EC}{80}$$

$$EC = \frac{15 \times 80}{60} = 20$$

DEC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$ED^2 = EC^2 + DC^2$$

$$ED^2 = 20^2 + 15^2$$

$$ED^2 = 400 + 225$$

$$ED^2 = 625$$

$$ED = \sqrt{625}$$

$$ED = 25$$

Donc les côtés du dernier triangle tracé mesurent : 15 ; 20 et 25.

43 Feux de croisement

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on trace une droite (AB). Sur (AB), on place C de sorte que $AC = 3$.

On trace la perpendiculaire à (AC) passant par A et on y place un point D tel que $AD = 0,9$.

D matérialise le phare de la moto.

On trace la perpendiculaire à (AC) passant par C (représentant le mur) et on y place un point E qui matérialise la hauteur des feux sur le mur.

On trace la droite (DE) et on place F le point d'intersection de (DE) et (AC).

On affiche les longueurs CE et AF.

Voir figure ci-dessous.

On bouge le point E de sorte que la longueur AF soit égale à 30, et on note CE.

On trouve que CE, c'est-à-dire la hauteur de réglage x , doit être d'environ 0,81 m = 81 cm.

2. Par le calcul :

Les points D, E, F d'une part et A, C, F d'autre part sont alignés et (CE) et (AD) sont parallèles (on suppose la moto et le mur tous deux perpendiculaires au sol).

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{FE}{FD} = \frac{FC}{FA} = \frac{EC}{DA}$$

$$\frac{FE}{FD} = \frac{30 - 3}{30} = \frac{x}{0,9} \quad (90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m})$$

$$\frac{27}{30} = \frac{x}{0,9}$$

$$x = \frac{27 \times 0,9}{30} = 0,81 \text{ m}$$

La hauteur de réglage x doit être de 0,81 m = 81 cm.

On retrouve bien le même résultat.

44 Les morceaux de bois

Les points A, E, D d'une part et C, E, D d'autre part sont alignés et (AC) // (DB).

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EA}{EB} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{EA}{10 - EA} = \frac{8}{12 - 8} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{EA}{10 - EA} = \frac{8}{4}$$

$$\text{Donc } \frac{AE}{10 - AE} = 2$$

Dans la feuille de calcul suivante, on fait varier AE de 0 à 10 avec un pas de 0,5 et on cherche pour quelle valeur de AE la valeur de $AE \div (10 - AE)$ est la plus proche de 2.

La formule saisie dans la cellule A3 est =A2+0,5, puis on étire la formule.

La formule saisie dans la cellule B2 est =A2/(10-A2), puis on étire la formule.

	A	B
1	AE	$AE/(10-AE)$
2	0	0
3	0,5	0,05263158
4	1	0,11111111
5	1,5	0,17647059
6	2	0,25
7	2,5	0,33333333
8	3	0,42857143
9	3,5	0,53846154
10	4	0,66666667
11	4,5	0,81818182
12	5	1
13	5,5	1,22222222
14	6	1,5
15	6,5	1,85714286
16	7	2,33333333
17	7,5	3
18	8	4
19	8,5	5,66666667
20	9	9
21	9,5	19
22	10	#DIV/0!

D'après les lignes 15 et 16, on voit que $AE \div (10 - AE)$ est égal à 2 lorsque AE est compris entre 6,5 et 7.

La valeur indiquée dans la cellule B22 est liée au fait que si $AE = 10$, le dénominateur de $AE \div (10 - AE)$ est alors 0, ce qui est impossible.

On reprend le tableau précédent en faisant varier AE de 6,5 à 7 avec un pas de 0,1. La formule saisie en A3 est alors « =A2+0,1 ». La formule saisie dans la cellule B2 est la même que précédemment.

	A	B
1	AE	$AE/(10-AE)$
2	6,5	1,85714286
3	6,6	1,94117647
4	6,7	2,03030303
5	6,8	2,125
6	6,9	2,22580645
7	7	2,33333333

D'après la ligne 4, on trouve que $AE \div (10 - AE)$ est proche de 2 lorsque $AE \approx 6,7$.

45 Chemin barré

1. Grâce à un logiciel de géométrie dynamique :

On trace une droite (AB).

On trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par A et passant par B.

On place un point C sur la droite perpendiculaire passant par A et un point D sur la droite perpendiculaire passant par B.

On trace les segments [CB] et [AD].

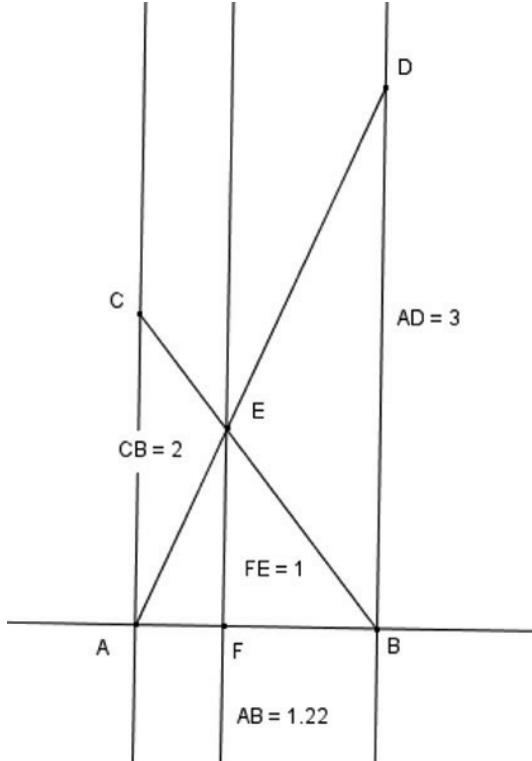
Placer E le point d'intersection de ces deux segments.

On trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par E.

On place F le point d'intersection de (AB) et de cette dernière perpendiculaire tracée.

Afficher les longueurs CB, AD, AB et EF.

On déplace alors les points de sorte que CB = 2, AD = 3 et EF = 1 et on note alors la longueur AB correspondante.



On trouve que la largeur de ce chemin est d'environ 1,22 m.

b. À l'aide d'un tableur

Cette partie est assez technique : l'objectif est d'obtenir une équation.

En se servant de la figure précédente

• 1^{re} méthode

Appelons ℓ la longueur AB.

Les points B, E, C d'une part et B, F, A d'autre part sont alignés et (CA) // (EF).

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$$

$$\frac{EB}{2} = \frac{BF}{\ell} = \frac{1}{AC}$$

$$\text{Donc } BF = \frac{\ell}{AC}.$$

ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$2^2 = \ell + AC^2$$

$$AC^2 = 4 - \ell^2$$

$$AC = \sqrt{4 - \ell^2}$$

$$\text{Donc en reportant dans } BF = \frac{\ell}{AC}, \text{ on obtient } BF = \frac{1}{\sqrt{4 - \ell^2}}.$$

Les points A, E, D d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés et $(BD) \parallel (EF)$.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD}$$

$$\frac{EA}{3} = \frac{AF}{\ell} = \frac{1}{BD}$$

$$\text{Donc } AF = \frac{\ell}{BD}$$

ABD est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$3^2 = \ell^2 + BD^2$$

$$BD^2 = 9 - \ell^2$$

$$BD = \sqrt{9 - \ell^2}$$

$$\text{Donc en reportant dans } AF = \frac{\ell}{BD}, \text{ on obtient } AF = \frac{\ell}{\sqrt{9 - \ell^2}}.$$

$$\text{Or } AB = \ell = AF + FB = \frac{\ell}{\sqrt{4 - \ell^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - \ell^2}}.$$

On crée donc un tableau :

Dans la colonne A, on fait varier ℓ de 0,1 en 0,1 (de 0 jusqu'à 2, car AB doit être plus petite que BC). Dans la colonne B, on

affiche la valeur de $\frac{\ell}{\sqrt{4 - \ell^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - \ell^2}}$ correspondante et

on cherche pour quelle valeur de ℓ , sur une même ligne on trouve la même valeur dans la colonne A et dans la colonne B.

Dans A3, on saisit la formule « =A2+0,1 » et dans B2 la formule « =(A2/RACINE(4-A2*A2))+(A2/RACINE(9-A2*A2)) ».

A	B
1	I /rac(4-l²)+I /rac(9-l²)
2	0 0
3	0,1 0,083414485
4	0,2 0,167319092
5	0,3 0,252220303
6	0,4 0,338658704
7	0,5 0,427229741
8	0,6 0,518609596
9	0,7 0,613589268
10	0,8 0,713121566
11	0,9 0,818388711
12	1 0,93090366
13	1,1 1,052668674
14	1,2 1,18643578
15	1,3 1,336159572
16	1,4 1,507840912
17	1,5 1,711243688
18	1,6 1,963821658
19	1,7 2,301314978
20	1,8 2,814741605
21	1,9 3,860822858
22	#NOMBRE!

Grâce aux lignes 14 et 15, on trouve que la valeur de ℓ est comprise entre 1,2 et 1,3.

La valeur affichée dans la cellule B22 s'explique par le fait que si $\ell = 2$, alors 0 apparaît au dénominateur de l'une des fractions, ce qui est impossible.

On reprend le même tableau en faisant varier ℓ entre 1,2 et 1,3 avec un pas de 0,01, c'est-à-dire que dans A3 on saisit « =A2+0,01 ».

	A	B
1	I	I /rac(4-l²)+I /rac(9-l²)
2	1,2	1,18643578
3	1,21	1,20061089
4	1,22	1,21494876
5	1,23	1,22945439
6	1,24	1,244132995
7	1,25	1,258990018
8	1,26	1,274031141
9	1,27	1,289262303
10	1,28	1,304689714
11	1,29	1,32031987
12	1,3	1,336159572

Grâce à ce nouveau tableau et à la ligne 5, on trouve que la distance ℓ entre les deux murs est d'environ 1,23 m.

• 2^{de} méthode (plus complexe)

Appelons ℓ la longueur AB.

Les points B, E, C d'une part et B, F, A d'autre part sont alignés et $(CA) \parallel (EF)$.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$$

$$\frac{EB}{2} = \frac{BF}{\ell} = \frac{1}{AC}$$

$$\text{Donc } BF = \frac{\ell}{AC}.$$

Les points A, E, D d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés et $(BD) \parallel (EF)$.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD}$$

$$\frac{AE}{3} = \frac{AF}{\ell} = \frac{1}{BD}$$

$$\text{Donc } AF = \frac{\ell}{BD}.$$

$$AB = AF + FB$$

$$\text{Donc } \ell = \frac{\ell}{BD} + \frac{\ell}{AC}$$

$$1 = \frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}$$

$$\frac{1}{AC} = 1 - \frac{1}{BD}$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{BD}{BD} - \frac{1}{BD}$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{BD - 1}{BD}$$

$$AC = \frac{BD}{BD - 1}$$

ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$2^2 = \ell^2 + AC^2$$

$$AC^2 = 4 - \ell^2$$

ABD est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$3^2 = \ell^2 + BD^2$$

$$\ell^2 = 9 - BD^2$$

$$\text{Or } AC^2 = 4 - \ell^2 \text{ donc } AC^2 = 4 - (9 - BD^2)$$

$$= 4 - 9 + BD^2$$

$$= -5 + BD^2$$

$$\text{Or } AC = \frac{BD}{BD - 1} \text{ donc } AC^2 = \frac{BD^2}{(BD - 1)^2}$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$-5 + BD^2 = \frac{BD^2}{(BD - 1)^2}$$

$$\text{soit } BD^2 = 5 + \frac{BD^2}{(BD - 1)^2}$$

Il faut donc résoudre cette équation.

On va donc, dans un tableau, faire varier BD dans la colonne

A, afficher BD^2 dans la colonne B et $\frac{BD^2}{(BD - 1)^2}$ dans la colonne C et chercher pour quelle valeur de BD on trouve

sur la même ligne la même valeur dans les colonnes B et C. Il faut ensuite chercher la valeur de AB correspondante : or $\ell^2 = 9 - BD^2$, donc $\ell = \sqrt{9 - BD^2}$. On fait donc afficher dans la colonne D la valeur de ℓ correspondant.

	A	B	C	D
1	BD	BD^2	$5+BD^2/(BD-1)^2$	AB
2	0	0	5	3
3	0,1	0,01	5,012345679	2,99833287
4	0,2	0,04	5,0625	2,993325909
5	0,3	0,09	5,183673469	2,984962311
6	0,4	0,16	5,444444444	2,973213749
7	0,5	0,25	6	2,958039892
8	0,6	0,36	7,25	2,939387691
9	0,7	0,49	10,44444444	2,917190429
10	0,8	0,64	21	2,891366459
11	0,9	0,81	86	2,861817604
12	1	1	#DIV/0!	2,828427125
13	1,1	1,21	126	2,791057147
14	1,2	1,44	41	2,749545417
15	1,3	1,69	23,77777778	2,703701167
16	1,4	1,96	17,25	2,653299832
17	1,5	2,25	14	2,598076211
18	1,6	2,56	12,11111111	2,537715508
19	1,7	2,89	10,89795918	2,471841419
20	1,8	3,24	10,0625	2,4
21	1,9	3,61	9,456790123	2,321637353
22	2	4	9	2,236067977
23	2,1	4,41	8,644628099	2,142428529
24	2,2	4,84	8,361111111	2,039607805
25	2,3	5,29	8,130177515	1,926136028
26	2,4	5,76	7,93877551	1,8
27	2,5	6,25	7,77777778	1,658312395
28	2,6	6,76	7,640625	1,496662955
29	2,7	7,29	7,522491349	1,307669683
30	2,8	7,84	7,419753086	1,077032961
31	2,9	8,41	7,329639889	0,768114575
32	3	9	7,25	0

Dans la cellule A3, on saisit la formule « =A2+0,1 ».

Dans la cellule B2, on saisit la formule « =A2*A2 ». Dans la cellule C2, on saisit la formule « =5+(A2*A2)/((A2-1)*(A2-1)) » et dans la cellule D2, on saisit la formule « =RACINE(9-B2) ».

Grâce aux lignes 29 et 30, on trouve que BD doit être compris entre 2,7 et 2,8.

On reprend donc le tableau précédent en faisant varier BD entre 2,7 et 2,8 avec un pas de 0,01, c'est-à-dire que dans A3 on saisit « =A2+0,01 ».

	A	B	C	D
1	BD	BD^2	$5+BD^2/(BD-1)^2$	AB
2	2,7	7,29	7,522491349	1,307669683
3	2,71	7,3441	7,511576211	1,28681778
4	2,72	7,3984	7,500811249	1,265543362
5	2,73	7,4529	7,490193458	1,243824746
6	2,74	7,5076	7,47971991	1,221638244
7	2,75	7,5625	7,469387755	1,198957881
8	2,76	7,6176	7,459194215	1,175755077
9	2,77	7,6729	7,449136583	1,151998264
10	2,78	7,7284	7,439212221	1,127652429
11	2,79	7,7841	7,429418557	1,102678557
12	2,8	7,84	7,419753086	1,077032961

Grâce à ce nouveau tableau et à la ligne 6, on trouve que la distance AB entre les deux murs est d'environ 1,22 m.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

- Les droites (DE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles.
- Le triangle ADE est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore :

$$EA^2 = ED^2 + DA^2$$

$$ED^2 = EA^2 - DA^2$$

$$ED^2 = 5,5^2 - 4,4^2$$

$$ED^2 = 10,89$$

$$ED = \sqrt{10,89} = 3,3 \text{ cm}$$

- Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés.

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{4,4}{AB} = \frac{5,5}{8,1} = \frac{3,3}{BC}$$

$$AB = \frac{4,4 \times 8,1}{5,5} = 6,48 \text{ cm et } BC = \frac{8,1 \times 3,3}{5,5} = 4,86 \text{ cm.}$$

$$BD = AB - AD$$

$$BD = 6,48 - 4,4 = 2,08 \text{ cm}$$

Exercice 1

On veut vérifier si le triangle ADE est rectangle en D.

$$EA^2 = 7^2 = 49$$

$$ED^2 + DA^2 = 4,2^2 + 5,6^2 = 49$$

$$EA^2 = ED^2 + DA^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle ADE est bien rectangle en D.

Les droites (DE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles.

Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés.

Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{5,6}{AB} = \frac{7}{AC} = \frac{4,2}{6,3}$$

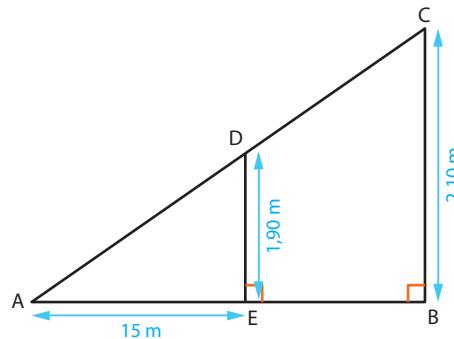
$$AB = \frac{6,3 \times 5,6}{4,2} = 8,4 \text{ cm}$$

$$BD = AB - AD = 8,4 - 5,6 = 2,8 \text{ cm}$$

$$AC = \frac{6,3 \times 7}{4,2} = 10,5 \text{ cm}$$

$$EC = AC - AE = 10,5 - 7 = 3,5 \text{ cm}$$

Exercice 2



Les segments [DE] et [CB] représentent les deux sculptures. Elles sont perpendiculaires toutes les deux à une même droite (AB) qui représente le sol, elles sont donc parallèles.

Les points A, E, B d'une part et A, D, C d'autre part sont alignés. Les conditions du théorème de Thalès sont remplies. On a l'égalité :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

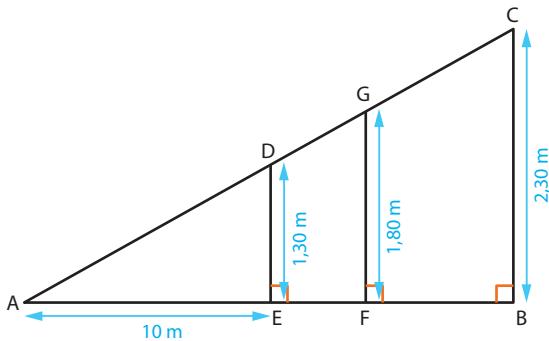
$$\frac{15}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1,9}{2,1}$$

$$AB = \frac{15 \times 2,1}{1,9} \approx 16,6 \text{ m}$$

$$\text{Donc } EB = AB - AE = 16,6 - 15 = 1,6 \text{ m.}$$

Patrick devra espacer ses sculptures d'environ 1,6 m.

Exercice 2



Les segments [DE], [DG] et [CB] représentent les trois sculptures. Elles sont perpendiculaires toutes les trois à une même droite (AB) qui représente le sol, elles sont donc parallèles.

Les points A, E, B d'une part et A, D, C d'autre part sont alignés. Les conditions du théorème de Thalès sont remplies. On a l'égalité :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{10}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1,3}{2,3}$$

$$AB = \frac{10 \times 2,3}{1,3} \approx 17,7 \text{ m}$$

Donc $EB = AB - AE = 17,7 - 10 = 7,7 \text{ m}$.

Patrick devra espacer les sculptures [DE] et [BC] de 7,7 m.

Les points A, E, F d'une part et A, D, G d'autre part sont alignés.

Les conditions du théorème de Thalès sont remplies. On a l'égalité :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{ED}{FG}$$

$$\frac{10}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{1,3}{1,8}$$

$$AF = \frac{10 \times 1,8}{1,3} \approx 13,8 \text{ m}$$

$$EF = AF - AE = 13,8 - 10 = 3,8 \text{ m}$$

Patrick devra espacer les sculptures [DE] et [GF] de 3,8 m et donc [GF] et [BC] de 3,9 m.

Écriture d'un énoncé

On pourra, par exemple, donner les dimensions de la grande voile et donner une seule dimension de la petite voile, puis demander de trouver les deux dimensions manquantes.

Analyse d'une production

- Tiphaine s'est trompée de sommet dans son égalité. Elle aurait dû écrire : $\frac{ST}{TO} = \frac{TR}{TU} = \frac{SR}{OU}$.
- Quentin s'est trompé de droite. Il n'a pas les points alignés. Il a également oublié d'indiquer si les conditions d'utilisation du théorème de Thalès étaient vérifiées.
- Jolan s'est trompé dans le produit en croix.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans les thèmes « Espace et géométrie » et « Grandeur et mesures ».

- Concernant le premier thème :

- Les connaissances associées sont les diverses représentations des solides.
- Les compétences associées sont : représenter l'espace, développer sa vision de l'espace, utiliser et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales.

- Concernant le deuxième thème :

- Les connaissances associées sont les notions de grandeurs produits (unités de volumes) et les formules donnant le volume d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône.
- Les compétences associées sont : mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ; exprimer les résultats dans des unités adaptées et vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.

Repères de progressivité

Les repères de progressivité du programme précisent : « *Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.*

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration.»

Ce chapitre permet de travailler dans la continuité du travail engagé au cycle 3 en continuant à rencontrer des figures planes, des solides de l'espace et en établissant des liens avec d'autres thèmes du programme (nombres et calculs).

Ce chapitre est également l'occasion de réaliser des activités de recherche et de travailler autour des formules. Il s'inscrit parfaitement dans l'introduction du calcul littéral.

Les élèves se familiarisent également avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique pour construire des figures.

D'autres notions sur le même thème seront travaillées dans le chapitre 44 (repérage sur un parallélépipède rectangle, sur une sphère, formule donnant le volume d'une boule), puis dans le chapitre 45 (sections de solides, effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur les volumes).

Objectifs du chapitre

Ce chapitre s'inscrit dans le développement de l'activité géométrique, notamment les activités de construction, l'utilisation des propriétés des figures usuelles.

L'élève découvre dans ce chapitre les formules des volumes du cylindre, de la pyramide et du cône. Ce chapitre a été conçu de façon à laisser à l'élève la possibilité de réinvestir des notions de proportionnalité (réalisation de patron de cône), de calculs de périmètres, d'aires.

Activités

Questions flash

Ces exercices permettent de revoir les noms, le vocabulaire des solides et la notion de patron, les conversions d'unités vues au cycle 3.

1. a. [AB] est une arête.
b. HEFG est une face.
c. H est un sommet.
 2. Les patrons qui forment un cube sont les patrons ① et ③.
 3. a. L'aire d'un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm est de $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$.
b. L'aire d'un carré de 4 cm de côté est de $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.
c. L'aire d'un triangle de côté 5 cm et de hauteur relative 3 cm est de : $\frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$.
d. L'aire d'un disque de rayon 3 cm est de $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.
4. a. ① cylindre de révolution
③ prisme droit
b. ① prisme droit
③ sphère
c. ① prisme droit
③ pyramide
d. pavé droit (ou cube)
④ pyramide
② pavé droit
④ cylindre de révolution
② pyramide
④ pavé droit
 5. a. $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
c. $1,2 \text{ L} = 120 \text{ cL}$
e. $774 \text{ 000 cL} = 7740 \text{ L}$
b. $52 \text{ 000 cm}^3 = 52 \text{ dm}^3$
d. $89,75 \text{ mL} = 0,08975 \text{ L}$

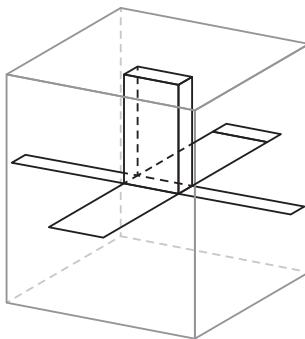
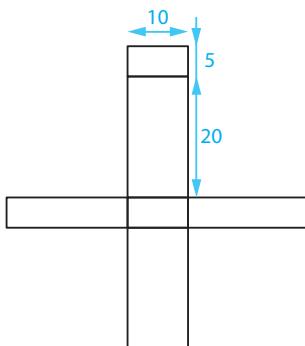
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de parallélépipède rectangle et de cylindre de révolution. Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance de ces deux solides, du vocabulaire « sommet », « face », « arête » et « patron ». La capacité introduite est de reconnaître et représenter un parallélépipède rectangle, de reconnaître et représenter un cylindre de révolution et de calculer son volume.

Cette activité permet de réinvestir le vocabulaire de la géométrie dans l'espace, de revoir la construction de patron, de retravailler la notion de volume, des unités de volumes, la correspondance entre les unités de volume et les unités de capacité. Elle peut être l'occasion également de travailler à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Elle permet à l'élève de raisonner, de prendre des initiatives en réalisant que les patrons du pavé droit et du cylindre de révolution sont très grands et de choisir une échelle adaptée.

- 1. a.** Ce solide est un pavé droit ou parallélépipède rectangle.
- b.** Il a : 6 faces, toutes des rectangles, 8 sommets et 12 arêtes.
- c.** Patron du solide :



Ce patron peut être construit avec le matériel de géométrie en choisissant une échelle adaptée (réaliser une figure à main levée au préalable). Il peut s'avérer intéressant de réaliser ce patron avec un logiciel de géométrie dynamique :

- construire dans le menu Graphique 2 le rectangle de base de longueur 10 et de largeur 5 ;
- puis dans le menu Graphique 3D et grâce à la fonction



Extrusion Prisme/Cylindre , construire le pavé droit de

base le rectangle précédemment construit et de hauteur 20 ;

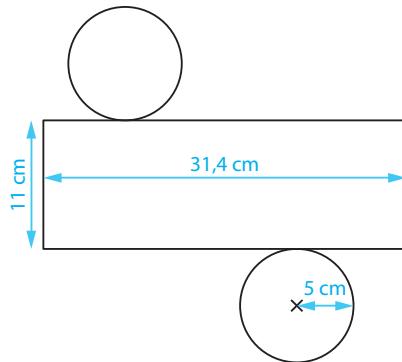
- afficher le patron de ce solide grâce à l'outil  Patron . Indiquer les dimensions de ce patron.

- 2. a.** La forme obtenue est un rectangle de largeur 11 cm et de longueur le périmètre du disque de base de rayon 5 cm :

$$2 \times \pi \times 5 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm} \approx 31,4 \text{ cm}.$$

C'est l'occasion de rappeler la formule donnant le périmètre d'un disque : $2 \times \pi \times \text{rayon}$.

- b.** Patron du solide :



Le patron sera réalisé avec le matériel de géométrie à une échelle choisie.

- c.** $\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$$\mathcal{V} = \pi \times 5^2 \times 11 \approx 864 \text{ cm}^3 \approx 864 \text{ mL}.$$

C'est l'occasion de rappeler la formule donnant l'aire d'un disque : $\pi \times \text{rayon}^2$ et que $1 \text{ dm}^2 = 1 \text{ L}$ et que $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

La contenance indiquée de 850 mL est donc vraisemblable.

Assemblage

Activité 2

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de retravailler la notion de pyramide et de découvrir la formule permettant de calculer son volume à partir de celle du cube.

Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance d'une pyramide, la construction de l'un de ses patrons et la formule permettant de calculer le volume d'un cube.

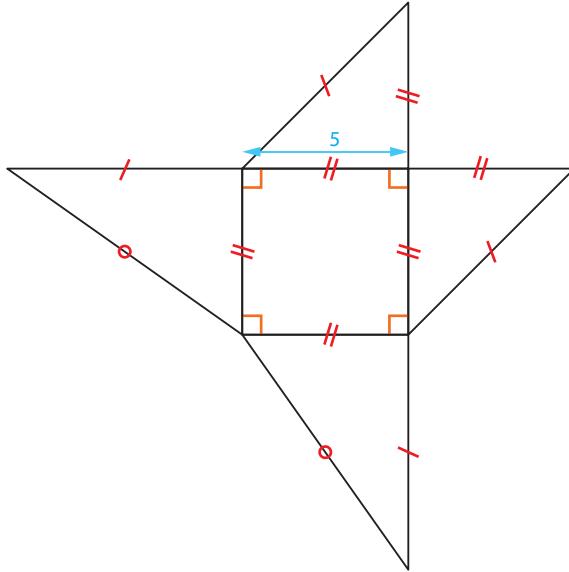
La capacité introduite est de reconnaître et représenter une pyramide et de calculer son volume.

Cette activité permet de travailler sur la pyramide, sur la réalisation d'un patron. Elle peut également permettre de travailler sur un logiciel de géométrie dynamique. C'est l'occasion de travailler sur une recherche collective pour établir une formule donnant le volume d'une pyramide. C'est l'occasion de créer un réel échange dans le groupe classe.

1. a. AEFGH est une pyramide.

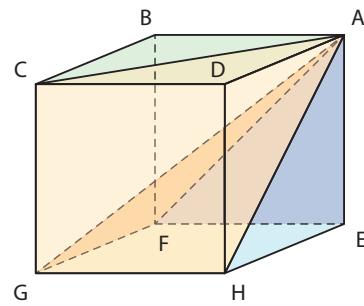
b. Elle a 5 faces : la base est un carré de 5 cm de côté et ses 4 faces latérales sont des triangles. Elle possède 5 sommets et 8 arêtes.

2. Patron de ce solide :



On peut procéder comme ci-dessus : construire le cube de 5 cm de côté, puis la pyramide et afficher son patron puis le construire en vraie grandeur avec le matériel de géométrie.

3. Après avoir construit ces pyramides, on constate qu'il faut 3 pyramides identiques pour reconstruire le cube.



4. Le volume du cube est donc égal à trois fois le volume d'une de ces pyramides. Donc le volume de cette pyramide est égal à :

$$\frac{\text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}}{3}$$

En considérant que la pyramide ait une base d'une autre forme, on peut conjecturer la formule suivante :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Cette activité sera reprise dans le chapitre 44, de façon moins guidée, pour remobiliser les connaissances.

Ça tourne

Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir comment est créé un cylindre et un cône de révolution et d'établir la formule du volume d'un cône de révolution à partir de celle d'un cylindre de révolution.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'un logiciel de géométrie dynamique et la formule permettant de calculer le volume d'un cylindre de révolution.

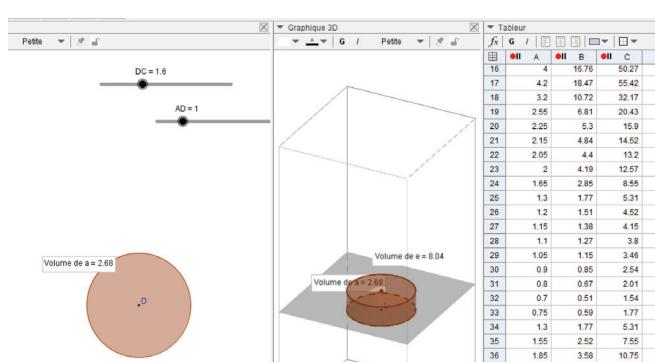
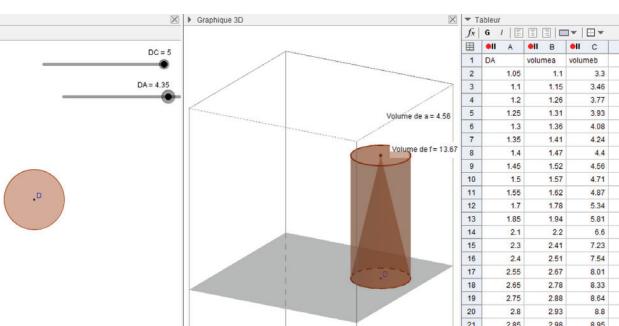
La capacité introduite est de reconnaître et représenter un cône de révolution et de calculer son volume.

Cette activité permet d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique et d'émettre une conjecture, afin d'établir une formule donnant le volume d'un cône de révolution. Cette activité peut être travaillée aussi bien en groupes en salle informatique qu'en classe entière, dans le cadre d'une recherche collective.

1. Lorsqu'on fait tourner le rectangle ABCD autour de (AD), on obtient un cylindre de révolution de hauteur AD et de base un disque de rayon DC.

2. Lorsqu'on fait tourner le triangle rectangle ADC autour de (AD), on obtient un cône de révolution de hauteur AD et de base un disque de rayon DC.

3.



4. a. La colonne A correspond au cône de révolution et la colonne B correspond au cylindre de révolution.

b. Le volume du cylindre est égal au triple du volume du cône ou le volume du cône est égal au tiers du volume du cylindre.

c. On peut conjecturer la formule suivante :

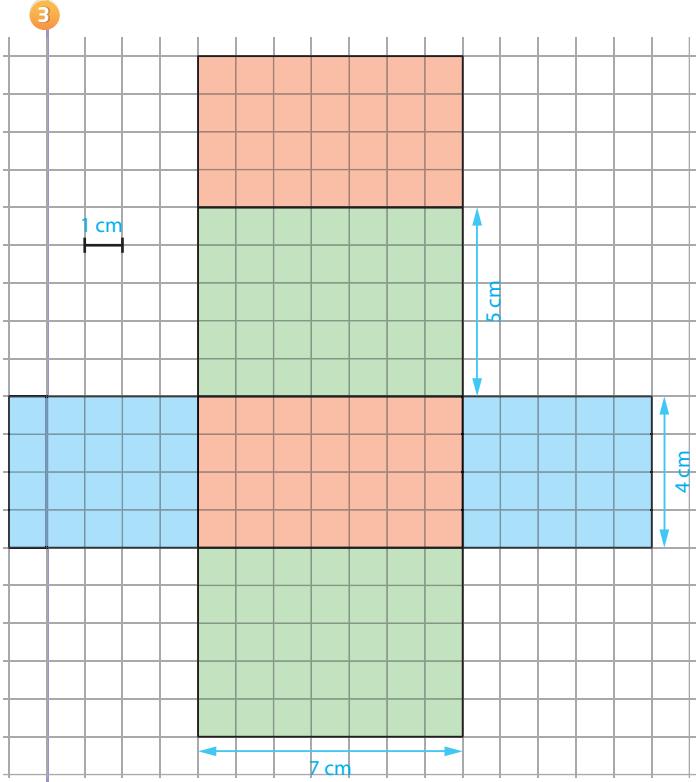
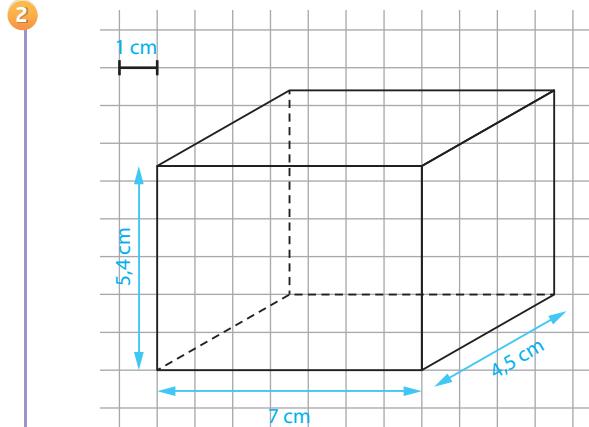
$$V_{\text{cône de révolution}} = \frac{A_{\text{cylindre de révolution}}}{3} = \frac{\text{aire de la hauteur} \times \text{hauteur}}{3}$$

Exercices

Reconnaitre et représenter un parallélépipède rectangle

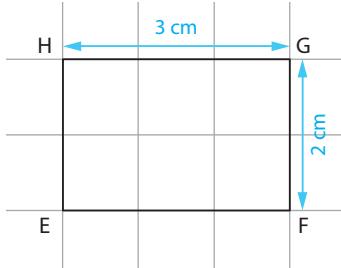
Questions flash

1. Faux, c'est un rectangle déformé par la perspective cavalière.
 2. Vrai.
 3. Faux.
 4. Vrai.
 5. Vrai, il est rectangle en B.

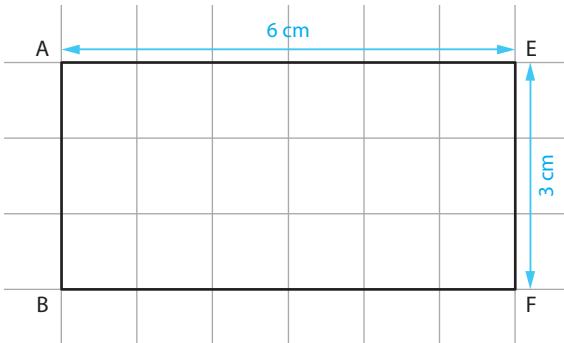


- 4.
- On utilise la formule du volume d'un cube :
 $V = \text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}$
 $V = 54 \times 54 \times 54 = 157\ 464 \text{ mm}^3$.
 - On convertit toutes les mesures en millimètres.
 $0,32 \text{ cm} = 3,2 \text{ mm}$.
 On utilise la formule du volume d'un parallélépipède :
 $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$
 $V = 3,2 \times 6 \times 36 = 691,2 \text{ mm}^3$.
 - Ce solide se nomme ABCDEFGH.
 Mais il en existe d'autres : BCDAFGHE, EFGHABCD, EFBAGC...

2. La face EFGH est un rectangle de longueur 3 cm et de largeur 2 cm.



La face EABF est un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 3 cm.



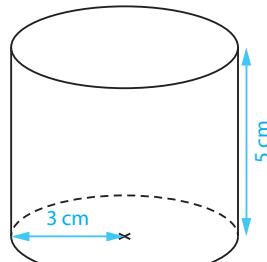
- 6.
- Oui, toutes les faces sont des rectangles et les côtés correspondants sont de même longueur.
 - Non, toutes les faces ne sont pas des rectangles.
 - Non, toutes les faces sont des rectangles mais les côtés correspondants ne sont pas de même longueur.

Reconnaitre et représenter un cylindre de révolution

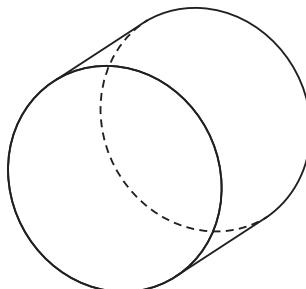
Questions flash

- 7.
- Vrai.
 - Faux, on obtient ce cylindre en tournant autour de [EF].
 - Faux, c'est un rayon et non un diamètre.
- 8.
- La formule du volume d'un cylindre de révolution de rayon $8 \div 2 = 4 \text{ cm}$ et de hauteur 10 cm est :
 $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 4^2 \times 10 = \pi \times 4 \times 4 \times 10$.
 C'est donc la réponse d.

- 9.
- Le solide est posé sur l'une de ses bases.



- b. Une base est face à l'observateur.

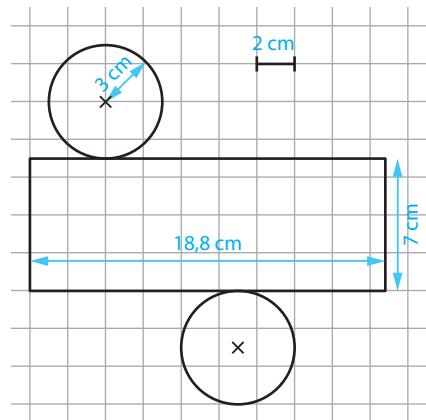


- 10.
- On doit tracer un premier cercle de rayon 3 cm pour la première base.
 Il faut calculer le périmètre du cercle :

$$P = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi \text{ cm} \approx 18,8 \text{ cm.}$$

Ce périmètre est la longueur du rectangle qui constitue la face latérale.

On doit donc tracer le rectangle de longueur 18,8 cm et de largeur 7 cm et enfin le deuxième cercle identique au premier.



- 11.** 1. Vrai, F est sur le cercle d'une des bases, il est donc à 3 cm de son centre.
 2. Faux, les points ne sont pas diamétralement opposés.
 3. Faux, le point H est sur la face latérale du cylindre.
 4. Vrai, O et I sont les centres des deux bases du cylindre, le segment [OH] est une hauteur de ce cylindre.
 5. Vrai, OI est une hauteur du cylindre et IS est un rayon de la base. La hauteur est perpendiculaire à la base donc (OI) est perpendiculaire à (IS).
 6. Vrai, B et S sont deux points diamétralement opposés de la base et O le centre de l'autre base. B et S sont donc à égale distance de O.

- 12.** C'est Yassine qui a fait une figure juste.
 Léonore n'a pas placé les cercles de part et d'autre du rectangle représentant la face latérale.
 Les cercles d'Ambre ont un périmètre supérieur aux côtés du rectangle sur lesquels ils reposent.

Reconnaitre et représenter une pyramide

Questions flash

- 13.** Les solides ①, ② et ⑤ sont des pyramides.
14. La pyramide ① a une base carrée (ou du moins en forme de quadrilatère).
 La pyramide ② a une base pentagonale.
 La pyramide ⑤ a une base triangulaire.

- 15.** On utilise la formule du volume d'une pyramide :

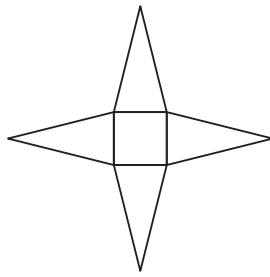
$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

La base de cette pyramide est un rectangle de longueur 5,4 cm et de largeur 3 cm.

$$\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = L \times \ell = 5,4 \times 3 = 16,2 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{16,2 \times 4,2}{3} = 22,68 \text{ cm}^3.$$

- 16.** 1. Cette pyramide est une pyramide régulière, sa base est donc un polygone régulier.
 Un polygone est dit régulier si tous ses côtés ont la même mesure, c'est donc une base carrée.
 2. Le triangle SHB a un de ses côtés qui est une hauteur de la pyramide. La hauteur est perpendiculaire à la base. C'est donc un triangle rectangle en H.
 Le triangle SBC a deux côtés égaux, il est donc isocèle en S. Le triangle AHB a deux de ses côtés sur les diagonales du carré. Un carré a des diagonales de même longueur et perpendiculaires. C'est donc un triangle rectangle et isocèle en H.
 3. Faux. Par exemple, le patron suivant est un patron de pyramide à base carrée.



- 2.** Faux, ce sont des triangles.
3. Faux, dans ce cas c'est un cône. La base d'une pyramide est un polygone.
4. Vrai.
5. Faux, un triangle est un polygone.
6. Vrai. Toutes les arêtes latérales ont la même mesure.

- 18.** On utilise la formule du volume d'une pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

La base est un parallélogramme.

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \text{hauteur} \times \text{base} = 3,2 \times 5,4$$

$$= 17,28 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{17,28 \times 2,8}{3} = 16,1 \text{ cm}^3.$$

Reconnaitre et représenter un cône de révolution

Questions flash

- 19.** En faisant tourner un triangle SOB rectangle en O autour de [SO], on obtient un cône de sommet B, de base un disque de centre O et de rayon 4 cm et de hauteur 3 cm. La longueur d'une génératrice est de 5 cm.

- 20.** La formule du volume d'un cône est :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times r \times r \times h}{3}.$$

On obtient donc :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 6 \times 6 \times 8}{3}.$$

C'est donc la réponse **c**.

- 21.** 1. a. Oui.
 b. Oui.

c. Non. Pour obtenir un cône, il faut faire tourner un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

2. Le premier cône a pour sommet I et sa hauteur mesure 4 cm. Sa base est un disque de centre J et de rayon 7 cm. Le deuxième cône a pour sommet K et sa hauteur mesure 7 cm. Sa base est un disque de centre J et de rayon 4 cm.

3. On utilise la formule d'un cône :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}.$$

Pour le premier cône, on obtient :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 7 \times 7 \times 4}{3} \approx 205,2 \text{ cm}^3.$$

Pour le deuxième cône, on obtient :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 4 \times 4 \times 7}{3} \approx 117,3 \text{ cm}^3.$$

- 22.** Les figures ①, ② et ④ ne sont pas des patrons de cône de révolution.

On peut faire remarquer que le patron 2 est un patron de cylindre.

- 23.** On calcule d'abord la longueur de l'arc de cercle qui correspond au périmètre de la base.

$$2 \times \pi \times 3 = 6\pi \text{ cm.}$$

On calcule ensuite le périmètre d'un disque de centre S et de rayon 13 cm.

$$P = 2 \times \pi \times 13 = 26\pi \text{ cm.}$$

On calcule la mesure de l'angle x en utilisant la proportionnalité.

Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	26π	6π

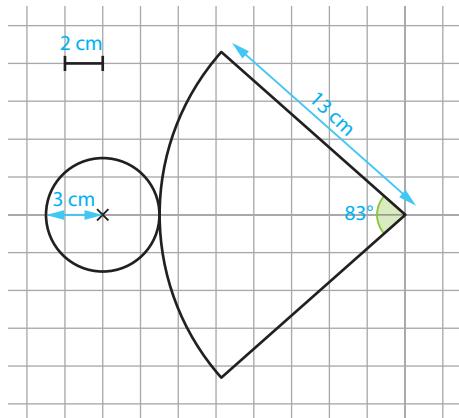
$$\times \frac{360}{26\pi}$$

On calcule le coefficient de proportionnalité :

$$k = \frac{360}{26\pi}$$

$$x = 6\pi \times \frac{360}{26\pi} \approx 83^\circ.$$

On peut tracer le patron en grandeur réelle.



Problèmes

24 Toutes les formes

1. C'est un cube.
2. C'est un parallélépipède rectangle ou pavé droit.
3. C'est une pyramide à base carrée.
4. C'est un prisme à base triangulaire.
5. C'est un cône (de révolution).
6. C'est un cylindre (de révolution).
7. C'est une boule.

25 La piscine

La piscine est un parallélépipède rectangle.

On utilise la formule du volume d'un parallélépipède rectangle.

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

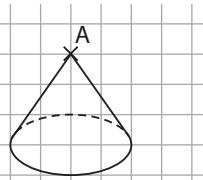
$$V = 25 \times 10 \times 2,3 = 575 \text{ m}^3.$$

La piscine est remplie aux trois quarts :

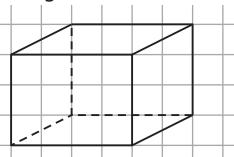
$$V_{\text{eau}} = \frac{3}{4} \times 575 = 431,25 \text{ m}^3 = 431\ 250 \text{ L.}$$

26 Perspectives

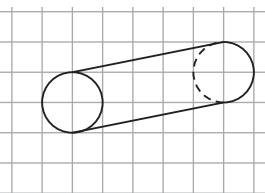
- a. C'est la représentation en perspective cavalière d'un cylindre :



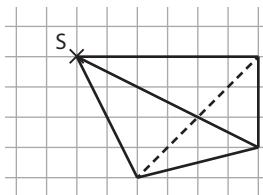
- b. C'est la représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle :



- c. C'est la représentation en perspective cavalière d'un cylindre :



- d. C'est la représentation en perspective cavalière d'une pyramide :



27 La borne

On peut décomposer la borne en deux solides :

- un pavé de longueur 7 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 5 cm ;
- un demi-cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm.

On calcule leurs volumes avec les formules :

$$V_{\text{pavé}} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{demi-cylindre}} = \frac{3^2 \times 5 \times \pi}{2} \approx 71 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = 210 + 71 \approx 281 \text{ cm}^3.$$

28 Les poubelles

1. On assimile la poubelle à un cylindre de rayon 120 mm ($240 \div 2$) et de hauteur 650 mm.

On utilise la formule du volume d'un cylindre :

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

$$V = \pi \times 120^2 \times 650 \approx 29\ 405\ 307 \text{ mm}^3$$

$$\approx 29,4 \text{ dm}^3 \approx 29 \text{ L.}$$

Il faut des sacs poubelle de 30 L.

2. Le conteneur est assimilé à un pavé de longueur 80 cm, de largeur 75 cm et de hauteur 100 cm.

On utilise la formule du volume d'un pavé :

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$V = 80 \times 75 \times 100 = 600\ 000 \text{ cm}^3$$

$$= 600 \text{ dm}^3 = 600 \text{ L.}$$

$$600 \div 30 = 20.$$

Il pourra mettre 20 sacs pleins dans le conteneur.

29 Bûche de Noël

1. La bûche de Noël est assimilée à un demi-cylindre de rayon 2,5 cm ($5 \div 2$) et de hauteur 6 cm.

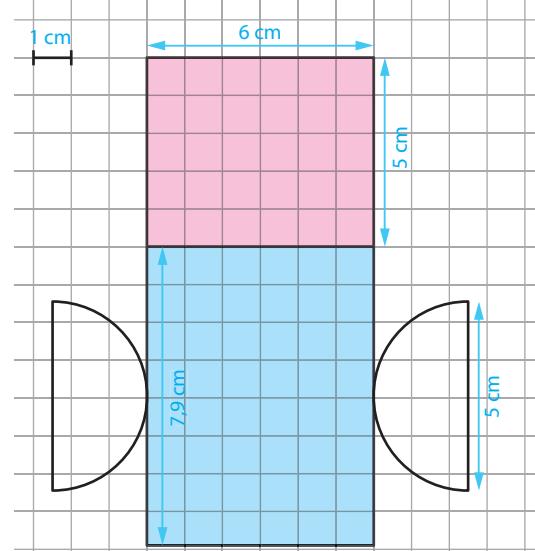
On représente d'abord la face de dessous, qui est un rectangle de largeur 5 cm et de longueur 6 cm.

Puis on représente la surface latérale du demi-cylindre, qui est un rectangle. Il faut calculer le périmètre du demi-cercle qui sera la longueur du rectangle.

$$P = (2 \times \pi \times r) \div 2 = \pi \times r = 2,5\pi \approx 7,9 \text{ cm.}$$

La surface latérale est donc un rectangle de longueur 7,9 cm et de largeur 6 cm.

On rajoute ensuite les deux demi-cercles de rayon 2,5 cm.



2. On calcule le volume V d'un demi-cylindre de rayon 2,5 cm et de hauteur 6 cm :

$$V = (\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}) \div 2$$

$$= (\pi \times 2,5^2 \times 6) \div 2 = 18,75\pi \approx 59 \text{ cm}^3.$$

Le volume de cette bûche est d'environ 59 cm³.

30 Peinture

Coup de pouce : représenter la chambre pour mieux visualiser la situation.

La chambre de Cédric peut être assimilée à un pavé droit de longueur 4 m, de largeur 3,10 m et de hauteur 2,40 m. On calcule les aires des 4 faces latérales de ce pavé (en considérant que la base est un rectangle de longueur 4 m et de largeur 3,10 m).

Ce sont 4 rectangles : deux rectangles de 3,10 m sur 2,40 m et deux rectangles de 4 m sur 2,40 m.

Aire d'un rectangle = longueur × largeur

$$\mathcal{A}_1 = 2,4 \times 3,1 = 7,44 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{A}_2 = 2,4 \times 4 = 9,6 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{A} = 2 \times 7,44 + 2 \times 9,6 = 34,08 \text{ m}^2.$$

On calcule maintenant l'aire de la surface occupée par la fenêtre et la porte.

Ce sont des rectangles. On convertit toutes les mesures en mètres.

$$\mathcal{A}_{\text{fenêtre}} = 1,15 \times 1 = 1,15 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{porte}} = 0,93 \times 2,2 = 2,046 \text{ m}^2.$$

On calcule maintenant l'aire de la surface à peindre :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{peinture}} &= \mathcal{A} - \mathcal{A}_{\text{fenêtre}} - \mathcal{A}_{\text{porte}} \\ &= 34,08 - 1,15 - 2,046 = 30,884 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

1 pot de peinture couvre 11 m².

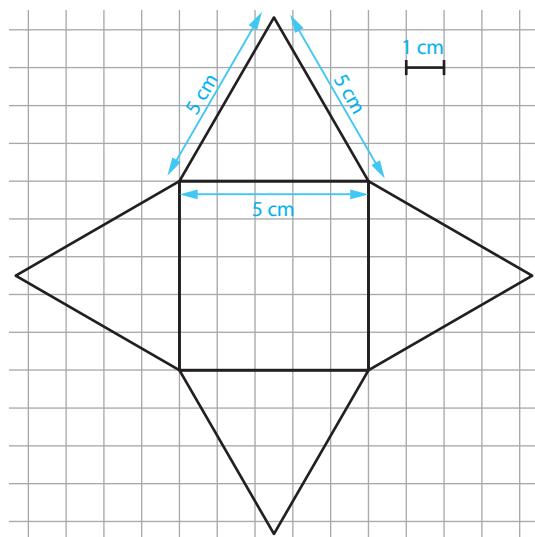
$$30,884 \div 11 \approx 2,8.$$

Cédric devra acheter 3 pots pour peindre sa chambre.

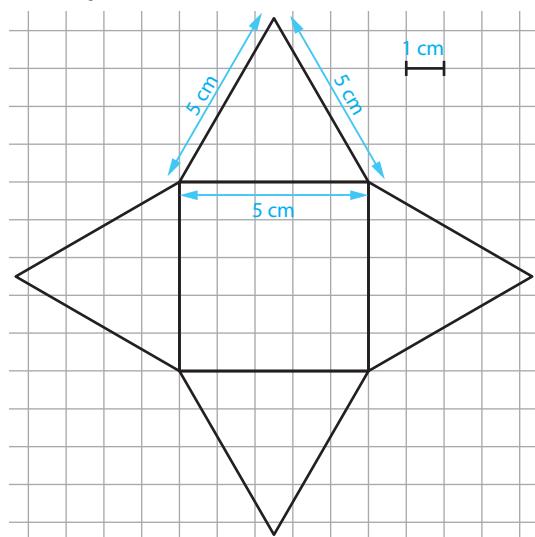
31 Cadeau

Le paquet de Justine est assimilé à une pyramide régulière de côté 5 cm. La photo nous indique que c'est une pyramide à base carrée. Ses faces latérales sont donc des triangles équilatéraux.

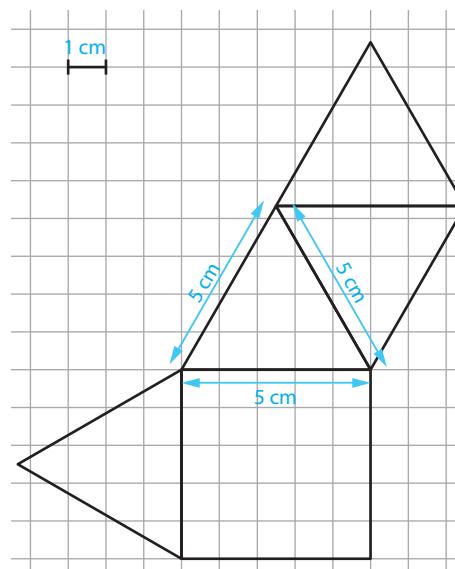
Première possibilité :



Deuxième possibilité :



Troisième possibilité :



Il y en a d'autres.

32 La coupe est pleine

1. La partie haute du verre est assimilée à un cône de rayon 4 cm et de hauteur 9 cm.

On utilise la formule du volume d'un cône :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

$$V_{\text{verre}} = \frac{\pi \times 4^2 \times 9}{3} = 48\pi \text{ cm}^3.$$

2.

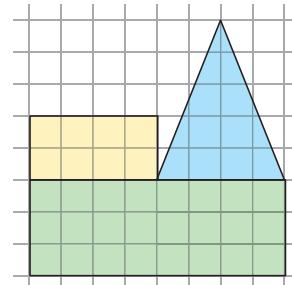
Coup de pouce : 1 L = 1 dm³.

Le volume du cône est donc de : $150,8 \text{ cm}^3 \approx 0,15 \text{ dm}^3 \approx 0,15 \text{ L}$.
 $1 \div 0,15 \approx 6,7$.

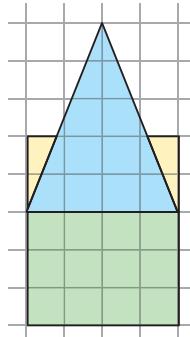
On pourra remplir entièrement 6 verres.

33 Des vues

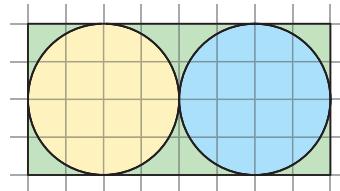
Vue de face :



Vue de droite :



Vue de dessus :



34 Pot à crayons

Coup de pouce : quelle est la forme de la surface latérale ?

Le pot à crayons est un cylindre de révolution de rayon $6,6 \div 2 = 3,3$ cm et de hauteur 9,5 cm.

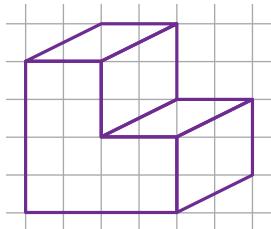
Pour le recouvrir avec du papier, elle doit découper un rectangle qui correspond à la surface latérale du cylindre.

La largeur du rectangle correspond à la hauteur du pot : 9,5 cm. La longueur de ce rectangle est égale au périmètre du disque de base :

$$P_{\text{disque}} = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 3,3 \\ = 6,6\pi \text{ cm} \approx 20,7 \text{ cm.}$$

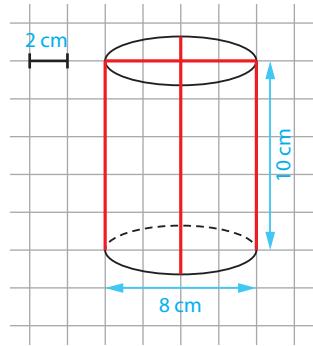
Elle devra découper un rectangle de 20,7 cm sur 9,5 cm.

35 Un solide en projection



36 Ruban

La boîte-cadeau est assimilée à un cylindre de révolution de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm.



Son diamètre est de $4 \times 2 = 8$ cm.

La longueur L du ruban autour de la boîte correspond à 4 diamètres et 4 hauteurs. Il faut aussi rajouter la longueur pour le nœud.

$$L = 4 \times 8 + 4 \times 10 + 40 = 112 \text{ cm.}$$

37 Découpage

1. Le solide obtenu est constitué des deux morceaux du premier solide. Ils ont donc le même volume.

Le premier solide est un pavé droit. On utilise la formule du volume d'un pavé droit :

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$V = 4 \times 2 \times 3 = 24 \text{ cm}^3.$$

2. De la même manière, la face avant du deuxième est constituée des deux triangles composant la face avant du premier solide. Elles ont donc la même aire. C'est l'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm.

$$A = \text{longueur} \times \text{largeur}$$

$$A = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2.$$

38 Maquette de la pyramide du Louvre

La pyramide du Louvre a pour base un carré de côté 35,42 mètres. Elle mesure 21,64 mètres de hauteur.

Ses arêtes latérales mesurent environ 33,1 m.

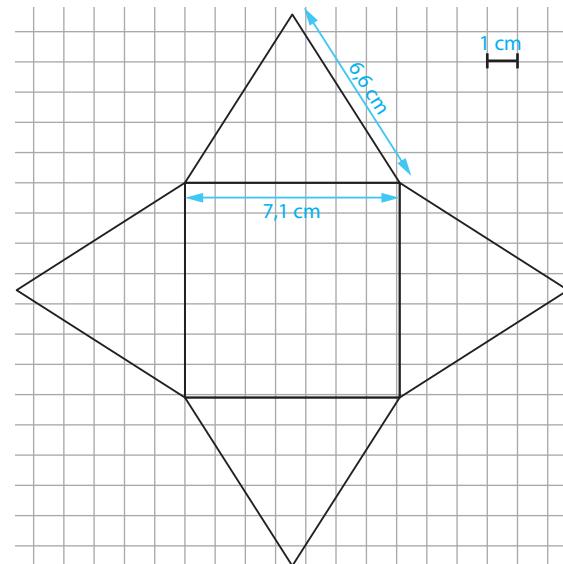
L'échelle est de $\frac{1}{500}$, ce qui veut dire que 1 m sur la maquette vaut 500 m en grandeur réelle.

On obtient le tableau de proportionnalité suivant.

Dimensions réelles (en m)	500	35,42	21,64	33,1	$\times \frac{1}{500}$
Dimensions de la maquette (en m)	1	0,071	0,043	0,066	
Dimensions de la maquette (en cm)	100	7,1	4,3	6,6	

Il faut donc réaliser un patron à partir de ces dimensions.

En voici une possibilité :



39 Gaspillage

La poubelle est assimilée à un cylindre de révolution de rayon $51 \div 2 = 25,5$ cm et de hauteur 67 cm.

On utilise la formule du volume d'un cylindre pour trouver le volume d'une poubelle.

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

$$V = \pi \times 25,5^2 \times 67 \approx 136\,869 \text{ cm}^3$$

$$\approx 136,7 \text{ dm}^3 \approx 136,7 \text{ L.}$$

On calcule le nombre de poubelles entières sur 6 semaines :

$$2 + 3 + 2,5 + 2,25 + 0,75 + 2 = 12,5.$$

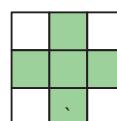
12 poubelles pleines et une demi-poubelle.

$12,5 \times 136,7 = 1\,708,75 \text{ L}$ volume de pain gaspillé en 6 semaines.
 $1708,75 \div 6 \approx 284,8 \text{ L.}$

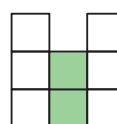
En moyenne, le volume de pain gaspillé par semaine est de 284,8 L.

40 Cube tronqué

Il faut enlever les cubes suivants sur la face de dessus.



Il faut ensuite enlever les cubes suivants sur la vue de droite, mais attention, un cube a déjà été enlevé.



Il faut enlever 7 cubes.

41 Bouteille

La bouteille est un cylindre de révolution de rayon $10 \div 2 = 5$ cm et de hauteur 15 cm. On calcule son volume en utilisant la formule du volume d'un cylindre.

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

$$V = \pi \times 5^2 \times 15 = 375\pi \approx 1\,178,1 \text{ cm}^3$$

$$\approx 1,178 \text{ dm}^3 \approx 1,178 \text{ L} \approx 117,8 \text{ cL.}$$

$$117,8 \div 25 \approx 4,7.$$

On pourra remplir à ras bord 4 verres.

42 Maquette du Flat Iron Building

L'immeuble Flat Iron est un prisme à base triangulaire.

Sa hauteur est de 87 m. La base est un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent 29,9 m environ et 61 m.

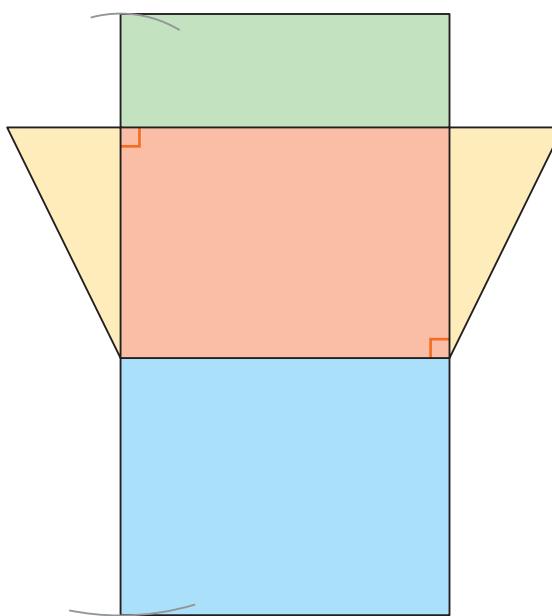
L'échelle est de $\frac{1}{500}$, ce qui veut dire que 1 m sur la maquette vaut 500 m en grandeur réelle.

On obtient le tableau de proportionnalité suivant.

Dimensions réelles (en m)	500	87	29,9	61
Dimensions de la maquette (en m)	1	0,174	0,06	0,122
Dimensions de la maquette (en cm)	100	17,4	6	12,2

$$\times \frac{1}{500}$$

Il faut donc réaliser un patron à partir de ces dimensions. En voici une possibilité :



43 Aquarium

L'aquarium est un pavé droit. On utilise la formule du volume du pavé droit.

$$50 \text{ L} = 50 \text{ dm}^3 = 50\,000 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

Soit h la hauteur de l'eau en cm.

$$\mathcal{V} = 60 \times 30 \times h = 1\,800 \times h = 50\,000.$$

On cherche le nombre qui, multiplié par 1 800, donne 50 000.

On divise 50 000 par 1 800, on obtient 27,8 environ.

L'eau est à 27,8 cm de hauteur.

On peut faire remarquer que la donnée « hauteur de l'aquarium : 41 cm » est inutile. Elle peut juste servir à vérifier que la hauteur de l'eau trouvée lui est inférieure.

44 Coffre de voiture

On cherche d'abord le volume du coffre de la voiture. Il est assimilé à un pavé droit. On utilise la formule du volume d'un pavé :

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V}_{\text{coffre}} = 104 \times 88 \times 47 = 430\,144 \text{ cm}^3 \\ = 430,1 \text{ dm}^3.$$

On cherche le volume du coffre de toit. Il est assimilé à un pavé droit.

$$\mathcal{V}_{\text{coffre de toit}} = 215 \times 43 \times 75 \\ = 693\,375 \text{ cm}^3 = 693,4 \text{ dm}^3$$

$$\mathcal{V}_{\text{coffre}} + \mathcal{V}_{\text{coffre de toit}} = 430,1 + 693,4 \\ = 1\,123,5 \text{ dm}^3.$$

On cherche maintenant le volume de la remorque pour pouvoir comparer. Elle est assimilée à un pavé droit.

On cherche sur le plan les dimensions :

Longueur : 2,42 m = 24,2 dm

Largeur : 1,3 m = 13 dm

Hauteur : 0,9 – 0,43 = 0,47 m = 4,7 dm

$$\mathcal{V}_{\text{remorque}} = 24,2 \times 13 \times 4,7 = 1\,478,62 \text{ dm}^3.$$

Le volume de la remorque est supérieur à celui du coffre de toit et du coffre de la voiture : ce qu'a dit le vendeur n'est donc pas vrai.

45 Moulin à vent

On choisit de faire une maquette au $\frac{1}{100}$. C'est-à-dire que 1 cm sur la maquette vaut 100 cm = 1 m en grandeur réelle.

On peut choisir l'échelle en collectif ou ne rien dire pour comparer les résultats ensuite.

Pour réaliser la maquette de ce moulin, on le décompose en 2 solides.

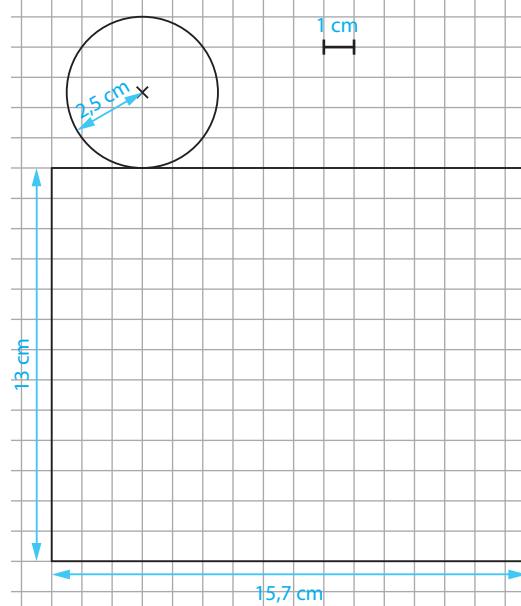
Le premier est un cylindre de révolution de rayon $5 \div 2 = 2,5$ m et de hauteur 13 m. Pour la maquette, une seule base est suffisante.

On cherche le périmètre du disque de cercle de base :

$$P = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 2,5 = 5\pi \text{ m}$$

$\approx 15,7$ m.

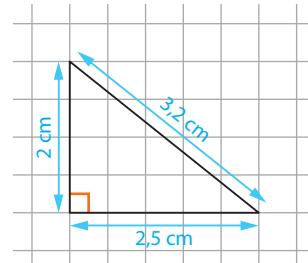
On réalise un rectangle de 15,7 cm sur 13 cm et un disque de rayon 2,5 cm.



Le deuxième est un cône de révolution de rayon 2,5 m et de hauteur $15 - 13 = 2$ m.

L'arc de cercle a la même mesure que le périmètre de la base 15,7 m.

Pour trouver la mesure d'une génératrice, on trace le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 2,5 cm et 2 cm.



On trouve 3,2 m pour la génératrice du cône.

On cherche le périmètre d'un cercle de rayon 3,2 m.

$$P = 2 \times \pi \times 3,2 = 6,4\pi \text{ m.}$$

Pour trouver l'angle, on utilise le tableau de proportionnalité suivant :

Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	6,4 π	5π

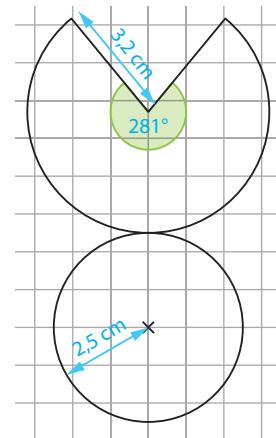
On calcule le coefficient de proportionnalité :

$$k = \frac{360}{6,4\pi}$$

$$x = 5\pi \times \frac{360}{6,4\pi} \approx 281^\circ.$$

On garde la même échelle.

On assemble les deux solides pour réaliser la maquette.



46

Le bon moule

On cherche le volume du premier plat. On peut l'assimiler à un pavé droit de longueur 25 cm, de largeur 18 cm et de hauteur 7 cm.

$$\mathcal{V}_{\text{moule}1} = \text{longeur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V}_{\text{moule}1} = 25 \times 18 \times 7 = 3\,150 \text{ cm}^3.$$

On cherche le volume du deuxième plat. On peut l'assimiler à un cylindre de révolution de rayon 15 cm et de hauteur 10 cm auquel on a enlevé un cylindre de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 6 cm.

La formule du volume d'un cylindre de révolution est $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{moule}2} &= (\pi \times 15^2 \times 10) - (\pi \times 5^2 \times 6) \\ &= 1\,350\pi - 150\pi = 1\,200\pi \approx 3\,770 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Le moule 2 a un volume supérieur au moule 1. Gaétan pourra donc verser toute la pâte dans le moule 2.

47

Sablier

Le demi-sablier peut être assimilé à un cône de révolution.

On utilise la formule du volume d'un cône.

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{1,4^2 \times 1,7 \times \pi}{3}$$

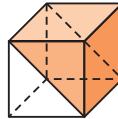
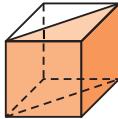
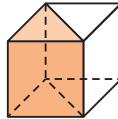
$$\approx 3,5 \text{ cm}^3 \approx 3\,500 \text{ mm}^3.$$

On cherche le temps :

$$T = 3\,500 \div 20 = 175 \text{ s} = 2 \text{ min } 55 \text{ s.}$$

48

Le prisme qui tourne



49

Eau chaude

Le cumulus peut être assimilé à un cylindre de révolution de hauteur h (en dm). Son volume est de 300 L = 300 dm³.

On utilise la formule du volume d'un cylindre.

$$505 \text{ mm} \div 2 = 252,5 \text{ mm} = 2,525 \text{ dm.}$$

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

$$V = \pi \times 2,525^2 \times h \approx 20 \times h \text{ dm}^3$$

$$\text{On a donc } 20 \times h = 300.$$

On cherche le nombre qui, multiplié par 20, donne 300. On doit donc diviser 300 par 20.

$$300 \div 20 = 15.$$

Le cumulus a une hauteur d'environ : 15 dm = 1,5 m.

50

Promotion

La boîte de conserve est un cylindre de révolution.

Le rayon ne change pas, c'est donc la hauteur qui augmente de 27 %.

On est dans une situation de proportionnalité.

Ancienne hauteur (en cm)	100	5,6	$\times \frac{127}{100}$
Nouvelle hauteur (en cm)	127	h	

$$h = 5,6 \times \frac{127}{100} \approx 7,1 \text{ cm.}$$

Le nouveau modèle a une hauteur d'environ 7,1 cm.

Algorithmique et outils numériques

51

Script mystère (1)

Ce script permet de calculer la hauteur d'un parallélépipède rectangle (variable h), connaissant sa longueur (variable L), sa largeur (variable ℓ) et son volume (variable V), les longueurs étant exprimées dans la même unité.

La variable A représente l'aire de la base.

52

Script mystère (2)

1. Ce script permet de calculer le volume contenu dans le solide formé par le cube auquel on a enlevé la pyramide

SABCD. 125 représente le volume du cube et $\frac{25x}{3}$ le volume de la pyramide SABCD.

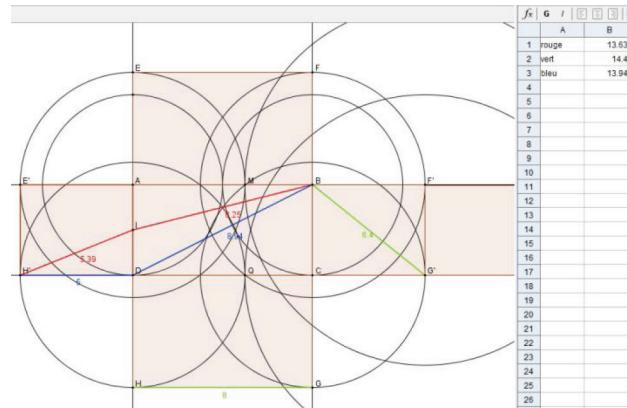
2. Si $x = 0$, le script renvoie 125.

Si $x = 3$, il renvoie 100.

53 Le plus court chemin

On réalise le patron du pavé droit, puis on affiche les longueurs des différents segments composant les parcours.

Grâce au tableur, on peut afficher les longueurs totales des différents parcours.



Le chemin le plus court est le chemin rouge.

Il est aussi possible de construire le pavé droit grâce à l'outil Graphique 3D, puis de construire son patron et d'afficher ensuite les longueurs souhaitées.

L'élève peut vérifier ces résultats en calculant, grâce au théorème de Pythagore, les longueurs des différents trajets.

54

Même volume

1. Le volume du pavé est égal à $14 \times 10 \times 8 = 1\,120 \text{ cm}^3$.

Le volume du cône est égal à $\frac{\pi \times r^2 \times 20}{3} \text{ cm}^3$.

On fait d'abord varier le rayon de 1 cm en 1 cm pour en trouver un encadrement.

Il faut donc saisir dans la cellule B2 la formule :

$$=(\text{PI}())^*A2*A2*20)/3$$

et on cherche la ligne pour laquelle le contenu de la colonne B sera le plus proche de 1 120.

	A	B
1	Rayon (en cm)	Volume du cône en cm ³
2	0	0
3	1	20,94395102
4	2	83,77558041
5	3	188,49555592
6	4	335,1032164
7	5	523,5987756
8	6	753,9822369
9	7	1026,2536
10	8	1340,412866
11	9	1696,460033
12	10	2094,395102
13	11	2534,218074
14	12	3015,928947
15	13	3539,527723
16	14	4105,014401

Le rayon est donc compris entre 7 et 8 cm.

On recommence le travail précédent en faisant varier le rayon de 1 mm en 1 mm entre 7 et 8 cm, et on cherche la valeur du rayon pour lequel le volume du cône est le plus proche de $1\,120 \text{ cm}^3$.

A	B
Rayon (en cm)	Volume du cône en cm^3
1	1026,2536
2	1055,784571
3	1085,734421
4	1116,10315
5	1146,890758
6	1178,097245
7	1209,722611
8	1241,766856
9	1274,22998
10	1307,111983
11	1340,412866
12	

Le rayon est donc proche de 7,3 cm pour que les deux solides aient le même volume.

2. On crée une feuille de calcul en faisant varier dans la colonne A la hauteur d'eau dans le pavé droit de 0 à 14 cm (hauteur maximale possible) de 1 cm en 1 cm pour obtenir un encadrement de cette hauteur d'eau.

L'eau dans le récipient prend la forme d'un pavé droit de dimensions 8 cm, 10 cm et h (la hauteur de l'eau en cm).

Le volume de l'eau est $8 \times 10 \times h = 80h \text{ cm}^3$.

Il faut donc saisir dans la cellule B2 la formule = 80*A2, et on cherche la ligne pour laquelle le contenu de la colonne B sera le plus proche de 250.

A	B
Hauteur de l'eau (en cm)	Volume de l'eau (en cm^3)
2	0
3	80
4	160
5	240
6	320
7	400
8	480
9	560
10	640
11	720
12	800
13	880
14	960
15	1040
16	1120

La hauteur de l'eau est donc comprise entre 3 et 4 cm.

On recommence le travail précédent en faisant varier la hauteur de l'eau de 1 mm en 1 mm entre 3 et 4 cm, et on cherche la valeur de la hauteur pour laquelle le volume du pavé droit est le plus proche de 250 cm^3 .

La hauteur de l'eau est donc proche de 3,1 cm pour que le liquide occupe un volume de 250 cm^3 dans le pavé droit.

55 Ma grange

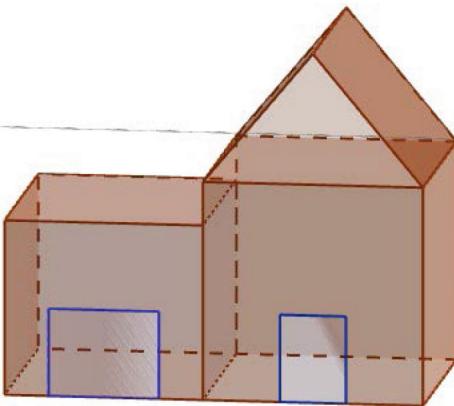
Cet exercice a pour but de se familiariser avec le logiciel GeoGebra dans l'espace.

Il faudra commencer par bien identifier chacune des dimensions de l'énoncé.

- On pourra commencer par construire le pavé droit de dimensions 4,50 ; 4 et 5,50 : on trace la base, un rectangle de longueur 5,50 et de largeur 4,50, puis le prisme droit grâce à l'outil  Extrusion Prisme/Cylindre (tracer au préalable un point situé à une distance de 4 d'un sommet de cette base perpendiculairement au plan de la base).
- Tracer ensuite de la même façon un pavé droit de dimensions 5 ; 5 et 5,50 avec une face commune au pavé précédemment tracé.
- Placer le milieu d'une des arêtes de longueur 5 positionnée horizontalement puis, dans le plan de la face avant du deuxième pavé droit tracé, placer un point situé à une distance 3 de ce milieu et perpendiculaire à l'arête de longueur 5.
- Tracer le triangle qui est une base du prisme droit situé au-

dessus du deuxième pavé droit.

- Tracer le prisme de base de ce triangle et de hauteur l'arête de longueur 5,5 du deuxième pavé droit.
- Pour tracer les portes, tracer des rectangles de dimensions 2,5 sur 2 et 1,5 sur 2 sur les faces avant des pavés droits en les centrant.

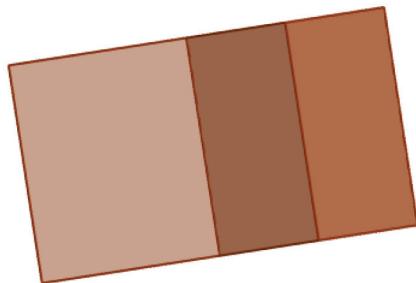


On fait tourner la construction grâce à l'outil

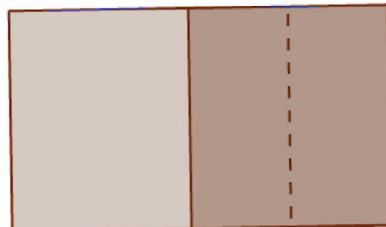


Tourner la vue Graphique 3D .

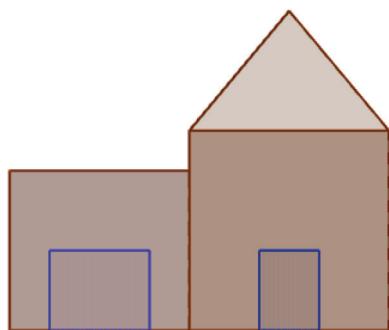
Vue de dessus :



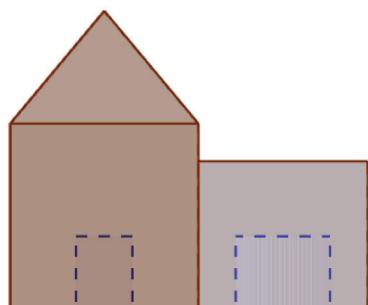
Vue de dessous :



Vue de devant :



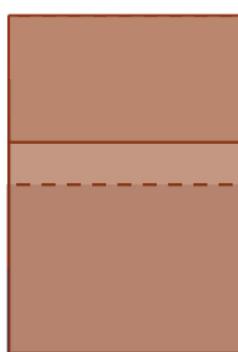
Vue de derrière :



Vue de gauche :

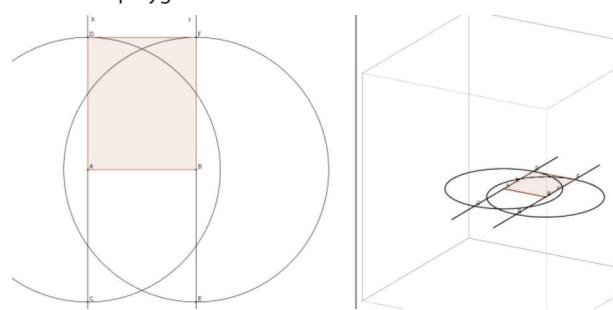


Vue de droite :

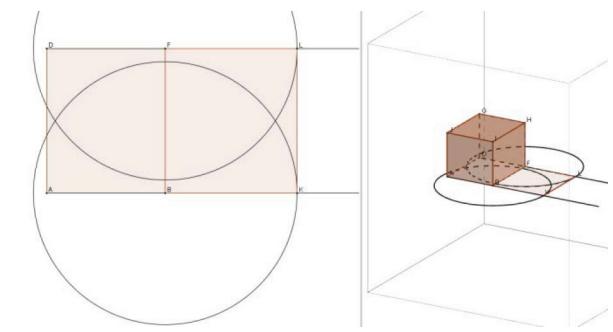


Tâches détaillées :

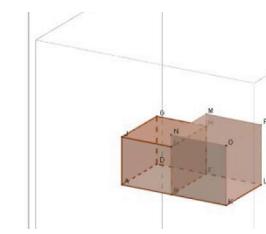
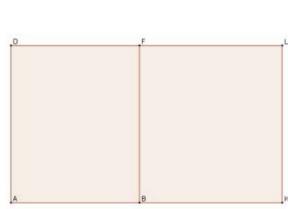
- Ouvrir l'affichage Graphique 3D.
- Enlever l'affichage des axes.
- Dans le plan de l'affichage Graphique 2 : placer un point A, tracer un segment [AB] de longueur 4,5.
- Tracer b et c les perpendiculaires en A et en B à [AB].
- Tracer les cercles de centre A et de rayon 5,5 et de centre B et de rayon 5,5.
- Placer C et D les points d'intersection du premier cercle avec la perpendiculaire b et E et F les points d'intersection du deuxième cercle avec la perpendiculaire c.
- Tracer le polygone ABFD.



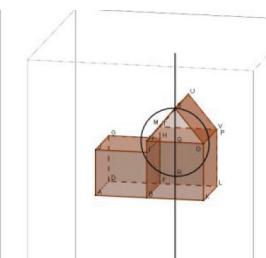
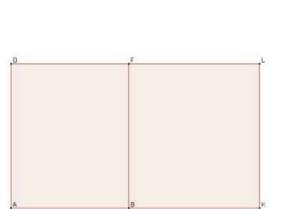
- Cacher tous les objets précédemment construits, à l'exception du polygone et des points A, B, D et F.
- Construire le prisme droit ABFDJIHG de base ABFD et de hauteur 4.
- Tracer les demi-droites [AB] et [DF].
- Tracer les cercles de centre B et de rayon 5 et de centre F et de rayon 5 dans le plan ABD.
- Placer K et L les points d'intersection respectifs de ces cercles avec les demi-droites précédemment tracées.
- Tracer le polygone FBKL.



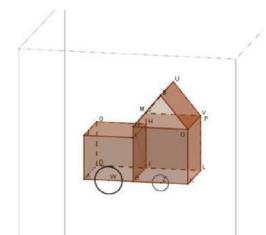
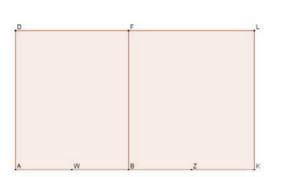
- Cacher les demi-droites et les cercles précédemment tracés.
- Construire le prisme droit FBKLMNOP de base FBKL et de hauteur 5.



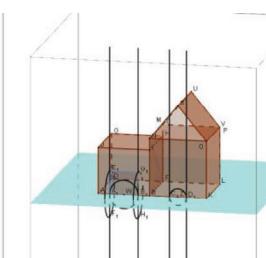
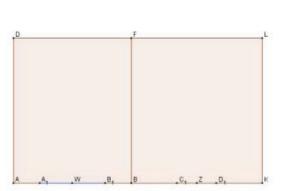
- Placer Q le milieu de [NO]. Tracer la perpendiculaire au plan ABC passant par Q.
- Tracer le cercle de centre Q, de direction (MN) et de rayon 3.
- Placer R et S les points d'intersection de ce cercle et de la perpendiculaire tracée juste avant.
- Tracer le polygone OSN puis le prisme droit OSNVUT de base OSN et de hauteur -5,5 (pour être orienté comme souhaité).



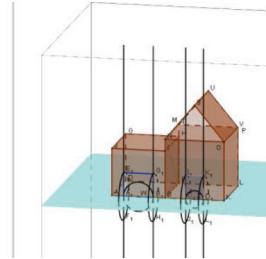
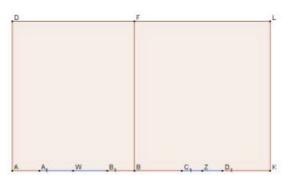
- Cacher les points Q et R, la perpendiculaire et le cercle précédemment tracés.
- Placer W le milieu de [AB] et Z le milieu de [BK].
- Tracer les cercles de centre W, de direction (AD) et de rayon 1,25 et de centre Z, de direction (AD) et de rayon 0,75.



- Tracer le plan ABD. Placer A₁ et B₁ les points d'intersection du premier cercle tracé avec ce plan et C₁ et D₁ les points d'intersection du deuxième cercle tracé avec ce plan.
- Tracer les droites e₁, h₁, i₁, j₁ perpendiculaires au plan ABC passant respectivement par A₁, B₁, C₁ et D₁.
- Tracer les cercles de centre A₁ et B₁, de direction (AB) et de rayon 2, puis les points d'intersection E₁, F₁, G₁ et H₁ de ces cercles avec les droites e₁ et h₁.
- Tracer le polygone A₁E₁G₁B₁ et en changer la couleur.



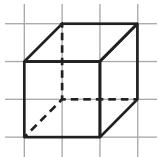
- Tracer les cercles de centre C₁ et D₁, de direction (AB) et de rayon 2, puis les points d'intersection I₁, J₁, K₁ et L₁ de ces cercles avec les droites i₁ et j₁. Tracer le polygone I₁K₁D₁C₁ et en changer la couleur.



- Effacer tous les points et objets inutiles.

Deux énoncés pour un exercice

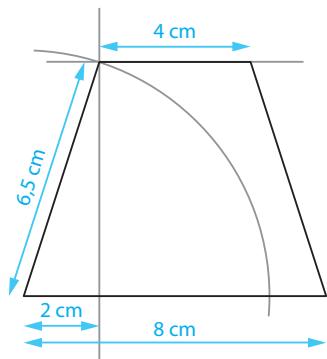
Exercice 1 et **Exercice 1**



Exercice 2

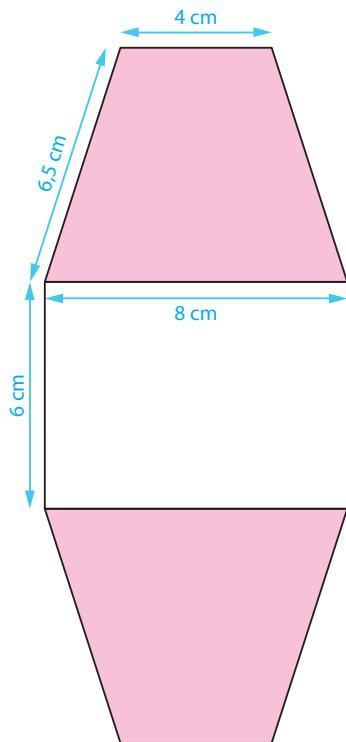
Étape 1

On commence par tracer une des faces latérales du solide. C'est un trapèze.



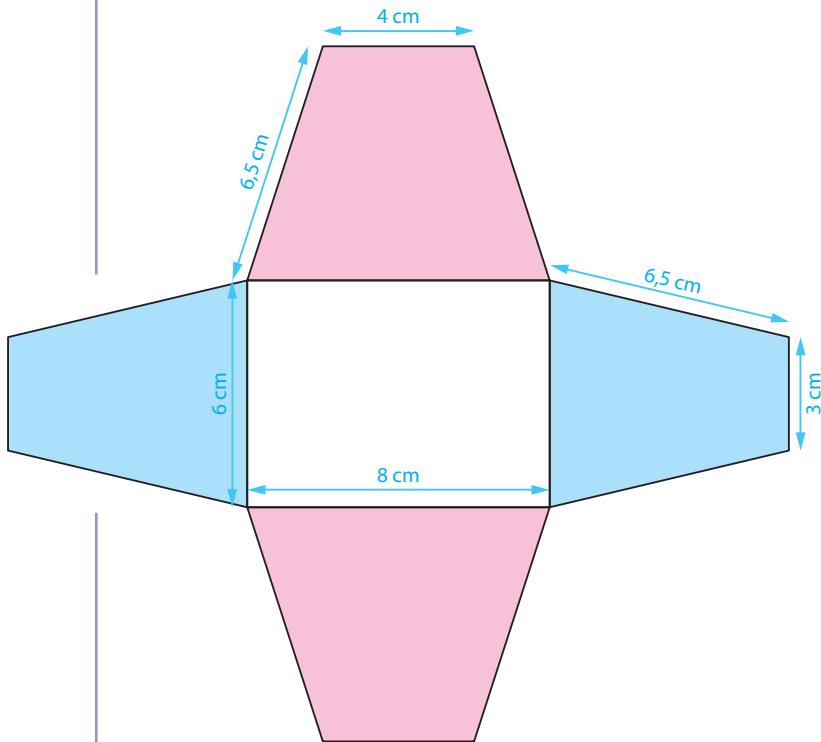
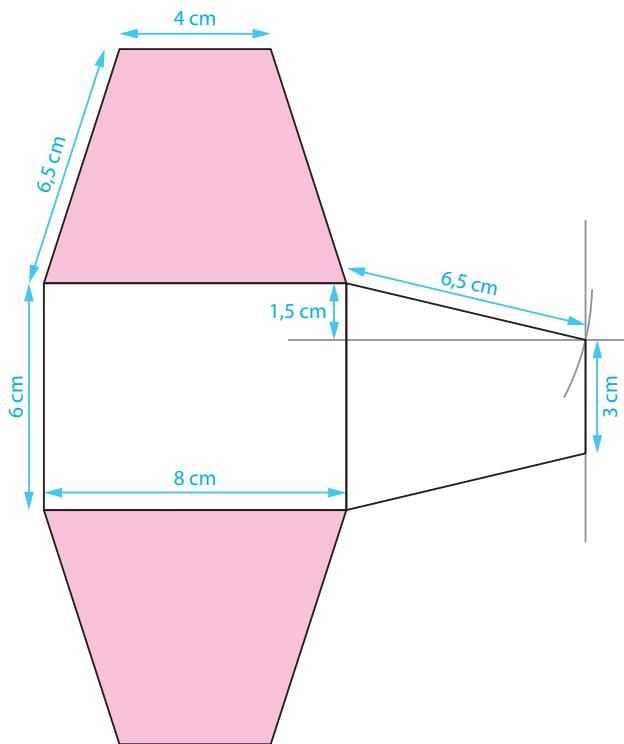
Étape 2

On peut ensuite faire dessiner la base. C'est un rectangle.



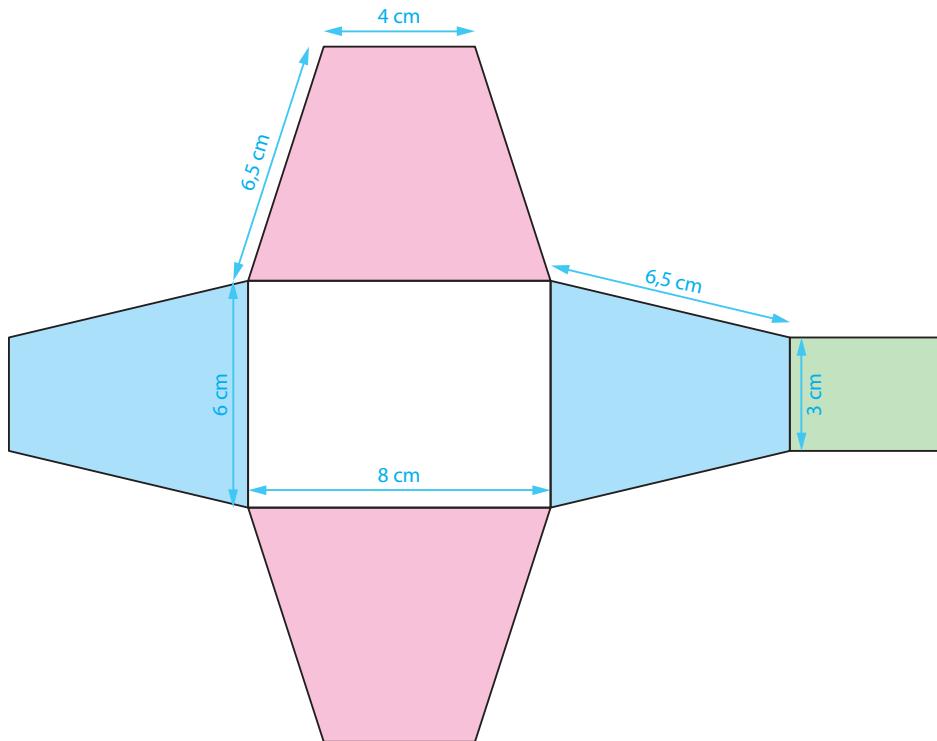
Étape 3

On termine avec les deux dernières faces, qui sont aussi des trapèzes.



Étape 4

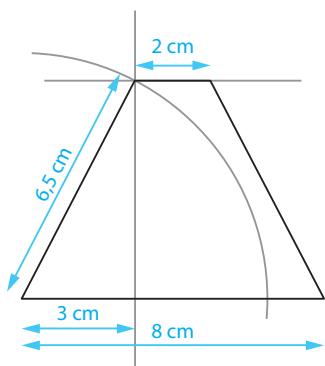
On termine avec la face de dessus.



Exercice 2

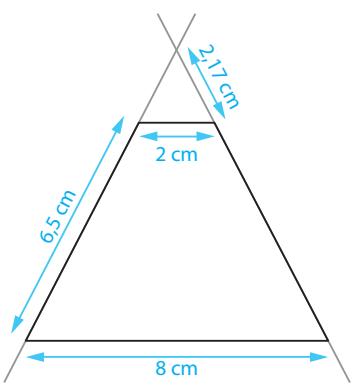
Étape 1

On trace une des faces latérales. C'est un trapèze.



Étape 2

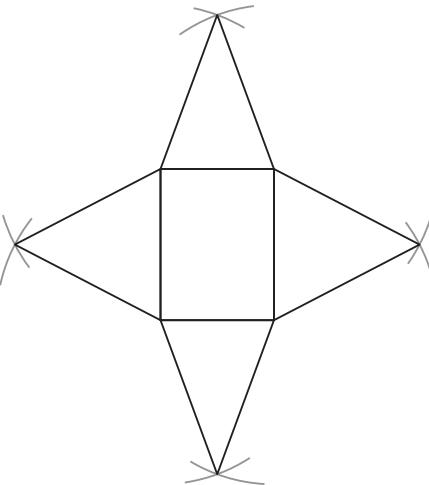
En prolongeant les côtés du trapèze, on trouve des dimensions manquantes.



Étape 3

On connaît donc la mesure d'une arête latérale de la pyramide. C'est une pyramide dont la base est un rectangle de 2 cm sur 1,5 cm et dont les arêtes latérales mesurent 2,2 cm.

On peut maintenant réaliser le patron de la partie manquante.



On peut aussi donner les mêmes dimensions à tous les groupes, qui pourront alors valider leur production en construisant et en assemblant leurs solides.

Écriture d'un énoncé

Les élèves peuvent proposer comme énoncé :

- Combien faudra-t-il mettre de cubes à l'étape suivante pour rajouter une ligne ? Dans 4 étapes ?
- Combien y aura-t-il de cubes à l'étape suivante ? Dans 5 étapes ?

Analyse d'une production

Louis se trompe dans le calcul de l'aire de la base. Il prend comme mesure pour le côté du carré celle de la demi-diagonale.

Sophia s'est trompée dans la formule du volume d'une pyramide, elle n'a pas divisé par 3.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Les connaissances et compétences associées sont :

- se repérer dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère ;
- utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales ;
- développer sa vision de l'espace.

Il s'inscrit aussi dans le thème « Grandeurs et mesures ». Les connaissances et compétences associées sont :

- les notions de grandeurs produits (unités de volumes) ;
- les formules donnant le volume d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, d'une boule.

• Les repères de progressivité du programme nous précisent :

« Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long

du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. »

- Ce chapitre s'inscrit donc dans la continuité du travail entrepris dans le chapitre 43 où les élèves ont pu travailler sur les pavés, les cylindres, les pyramides et le cône. Ce travail entamé sur les solides s'enrichit avec la sphère et la formule du volume associée mais aussi avec le repérage dans l'espace sur un parallélépipède rectangle et sur une sphère.

Le travail avec les logiciels de géométrie dynamique est approfondi. Les activités de construction sont poursuivies ainsi que l'utilisation des propriétés des figures usuelles.

Comme dans le chapitre 43, les notions de proportionnalité, de calcul de périmètre et d'aire peuvent être réinvesties et c'est aussi l'occasion d'utiliser le théorème de Pythagore.

L'élève va donc découvrir dans ce chapitre un nouveau solide, la sphère et la formule de son aire, ainsi que le volume de la boule. Il va aussi découvrir le repérage dans un pavé à partir de trois axes, les axes étant portés par des arêtes, mais aussi les latitudes et longitudes pour se repérer sur une sphère.

Dans le chapitre 45, un bilan de tous les solides étudiés dans les chapitres 43 et 44 sera fait et sera prolongé avec l'étude de leurs sections planes.

Activités

Questions flash

Ces exercices permettent de revoir les noms des solides et la notion de patron de solides vus en cycle 3, ainsi que les conversions d'unités vues en 6^e.

1. Le premier est un cône (de révolution).
Le deuxième est une pyramide.
Le troisième est un cylindre (de révolution).
Le quatrième est un pavé droit ou parallélépipède rectangle.

$$\begin{aligned} 2. \quad 57 \text{ dm}^3 &= 57 \text{ L} \\ 68 \text{ m}^3 &= 68 000 \text{ L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 267 \text{ cm}^3 &= 0,267 \text{ dm}^3 \\ 5 \text{ m}^3 &= 5 000 000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

3. Le premier patron est un patron de pavé droit ou parallélépipède rectangle.
Le deuxième est un patron de pyramide.
Le troisième patron est un patron de cylindre (de révolution).

Des objets « pointus »

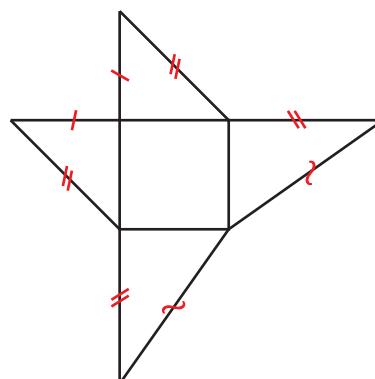
Activité 1

Intentions des auteurs

Les objectifs et capacités de cette activité sont de savoir tracer le patron d'une pyramide, de retrouver la formule du volume d'une pyramide vue dans le chapitre 43 et de savoir tracer le patron d'un cône de révolution qui sont donc aussi les prérequis nécessaires.

1. a.

Demander aux élèves d'amener des ciseaux. Cette activité se fait par petits groupes (de trois à cinq élèves). C'est l'occasion de travailler en autonomie, le choix étant laissé au groupe sur les dimensions du cube initial et d'émettre des conjectures, de réfléchir par essais-erreurs et de raisonner de façon collective. Pour les groupes ayant des difficultés, on pourra les aider à analyser la figure, à mettre en évidence les côtés égaux.



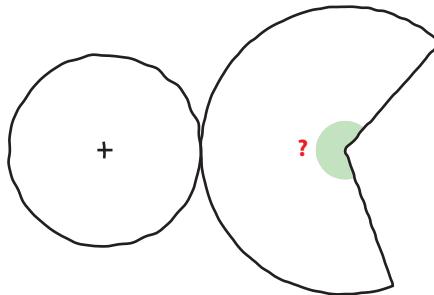
- b. À partir des trois pyramides faites précédemment, chaque groupe reconstitue le cube initial.

On retrouve la formule du volume d'une pyramide.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{ aire de la base} \times \text{hauteur}$$

2.

Cette question permet de revoir les propriétés du cône. On identifie les données nécessaires à sa construction. On peut demander aux élèves de faire d'abord un dessin à main levée.



On calcule d'abord le périmètre de la base :

$$\mathcal{P} = 2 \times \pi \times 2,5 = 5 \times \pi = 5\pi \text{ cm}$$

Le périmètre de l'arc de cercle formé par la surface latérale est donc de 5π cm.

Le périmètre d'un cercle de rayon 7 cm est 14π cm. Il correspond à un cercle complet donc à un angle de 360° .

On pourra rappeler que l'on est dans une situation de proportionnalité.

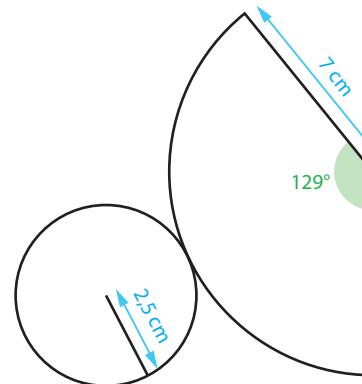
On a le tableau suivant.

Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	14π	5π

On utilise le produit en croix :

$$x = \frac{360 \times 5\pi}{14\pi} \approx 129^\circ$$

On obtient le patron suivant.



Une fourmi sur un pavé

Activité 2

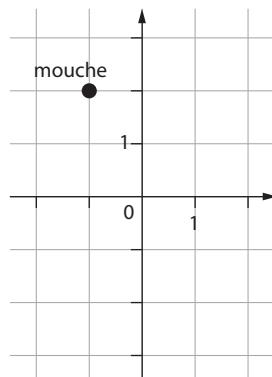
L'objectif de cette activité est de découvrir comment se repérer sur un parallélépipède rectangle.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance du repérage dans le plan.

La capacité introduite est de savoir se repérer dans un parallélépipède rectangle.

En cycle 3 puis dans le chapitre 5, les élèves ont appris à se situer sur une droite graduée puis dans un repère cartésien. Cette notion est réintroduite dans la question 1. de cette activité.

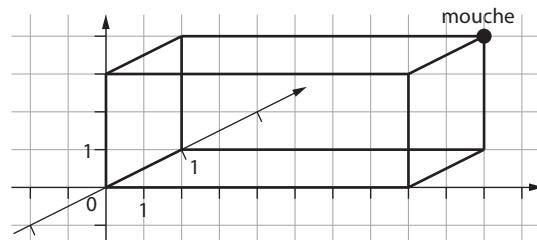
1. Sam a défini un repère cartésien en utilisant la poignée de sa fenêtre comme point d'origine et les montants de la fenêtre passant par ce point comme axe des abscisses et des ordonnées.



Ce rappel permet de revoir le vocabulaire abscisse, ordonnée, origine, les nombres relatifs. On insistera aussi sur la notation et l'importance de l'ordre des coordonnées.

Remarque : l'idée d'un repère du plan en géométrie serait venue à Descartes en regardant une mouche sur une fenêtre avec des carreaux.

2. On choisit un des sommets du pavé comme origine du repère et les arêtes partant de ce point définissent les axes de ce repère. On peut alors définir les trois coordonnées du point représentant la mouche.



Les coordonnées de la mouche sont alors (8 ; 1 ; 3).

On donne alors le vocabulaire : 3 est la cote (ou altitude) de la mouche.

On insistera sur le choix de l'origine et là aussi, l'ordre dans lequel les coordonnées sont données. Dans cet exemple, on restera sur des coordonnées positives.

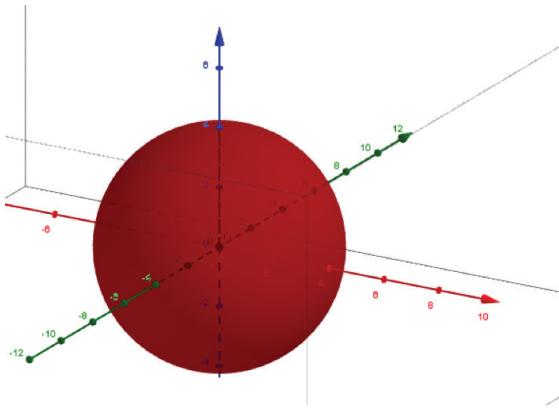
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir un nouveau solide : la sphère.
Aucun prérequis n'est nécessaire pour cette activité.
Les capacités introduites sont la connaissance des définitions de la sphère et de la boule.
Cette activité permet d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique et de définir la sphère, la boule.
On pourra faire cette activité en salle informatique, en individuel ou à deux, ou en collectif avec un vidéoprojecteur.

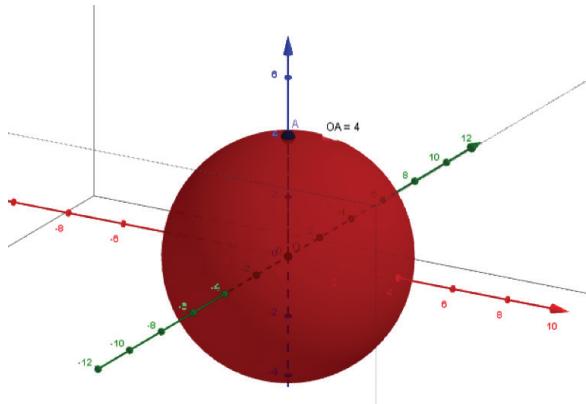
- 1.** Ousmane a une balle de ping-pong qui est creuse : c'est une sphère.

Esteban a une boule de pétanque qui est pleine : c'est une boule.

- 2. a.** On construit une sphère de centre O passant par un point quelconque, que l'on masque ensuite.

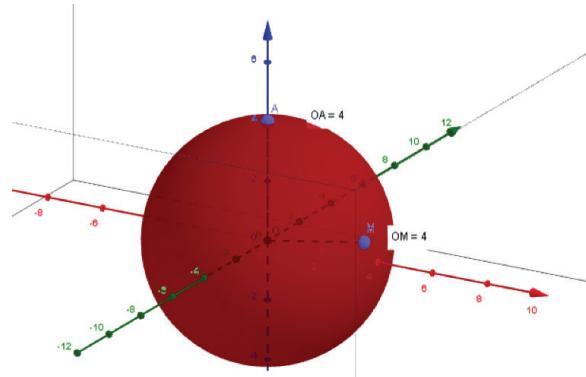


- b.** On place un point A sur la sphère et on affiche la longueur OA.



A est sur la sphère. On lit la longueur du segment [OA] : 4.

- c.**



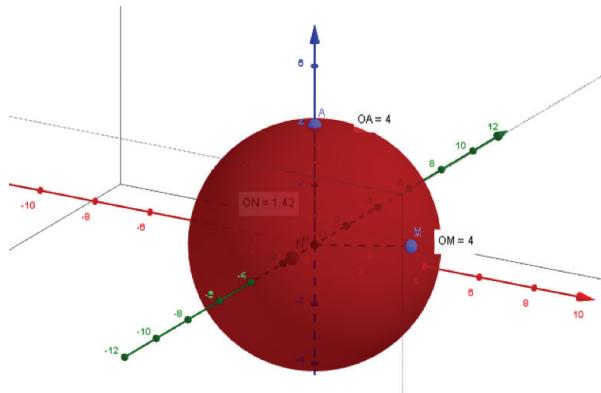
M est sur la sphère.

On lit la longueur du segment [OM] : 4. Cette mesure ne change pas si on déplace le point M.

On constate que les segments [OA] et [OM] ont la même mesure. O est le centre et 4 est le rayon de cette sphère.

On peut alors faire émerger la définition d'une sphère avec les élèves : une sphère de centre O et de rayon R est constituée de l'ensemble des points M tels que $OM = R$.

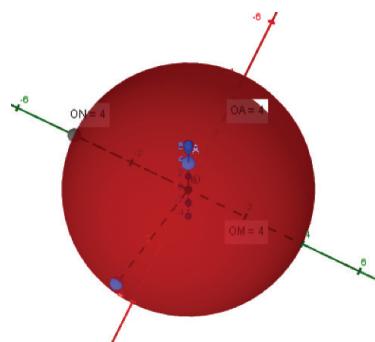
d.



On place un point N à l'intérieur de la sphère et on affiche la longueur du segment [ON], par exemple, ici : 1,42, elle est inférieure à 4.

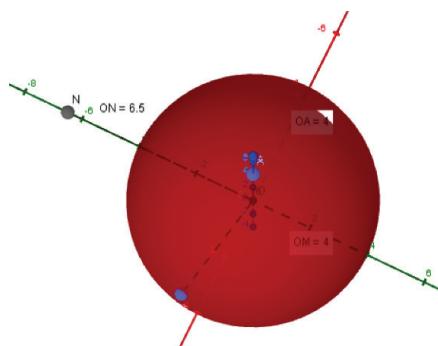
Cette longueur sera maximale et égale à 4 lorsque le point N sera sur la sphère.

On pourra, dans un premier temps et pour faciliter la lecture, placer N sur l'un des axes, pour pouvoir le déplacer facilement à l'intérieur de la sphère. Il faudra bien indiquer à l'élève de penser à faire pivoter la sphère pour bien s'assurer que le point N reste à l'intérieur puis pour chercher les positions pour lesquelles ON est maximale.



On peut alors faire émerger la définition d'une boule avec les élèves : une boule de centre O et de rayon R est constituée de l'ensemble des points M tels que $OM \leq R$.

On peut proposer ensuite aux élèves de mettre le point N à l'extérieur de la sphère.



On peut lire que la longueur du segment [ON] est 6,5. Elle est supérieure à 4.

Il faut là aussi bien penser à faire pivoter la sphère pour bien observer la position du point N.

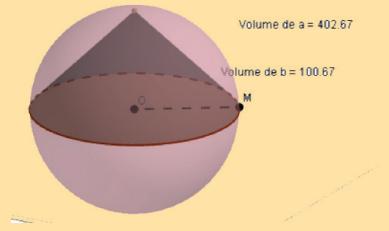
En complément de cette activité, on peut faire découvrir la formule du volume d'une boule à partir du volume d'un cône (de même hauteur et de même rayon pour le disque de base) grâce à l'activité suivante :



- Afficher le volume de la boule.
- Construire un cône dont la base a le même rayon R que la boule précédente et dont la hauteur est égale à R .
- Afficher le volume de ce cône.
- Faire varier la valeur de R et conjecturer une formule permettant de calculer le volume d'une boule.

En faisant varier R , on constate que le volume de la boule est égal au quadruple du volume du cône.

$$\text{Or } V_{\text{cône}} = \frac{\pi R^2 \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \text{ donc } V_{\text{boule}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$



Où sommes-nous ?

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de se repérer sur une sphère. Les prérequis nécessaires sont de connaître la définition d'une sphère. La capacité introduite est de savoir se repérer sur une sphère à partir des latitudes et des longitudes.

- Le degré 0 pour les parallèles correspond à l'équateur, les parallèles permettent de définir la latitude d'un point.
Le degré 0 pour les méridiens correspond au méridien de Greenwich, les méridiens permettent de définir la longitude d'un point.
- La tour Pey Berland à Bordeaux a pour latitude 44°50' Nord, ce qui signifie qu'elle se situe sur le parallèle formant un angle de 44°50' au nord de l'équateur.
Elle a pour longitude 0°34' O, ce qui signifie qu'elle se situe sur le méridien formant un angle de 0°34' à l'ouest du méridien de Greenwich.

Activité 4

3.

Pour cette question, on pourra aller en salle informatique ou la donner à faire au CDI ou à la maison.

Coordonnées de la tour Pey Berland de Bordeaux : 44°50' Nord 0°34' Ouest. Elle se situe dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère ouest.

Coordonnées de l'Opéra de Sydney : 33° 51' 25" Sud 151° 12' 55" Est. Il se situe dans l'hémisphère sud et dans l'hémisphère est.

Coordonnées du Taj Mahal : 27° 10' 27" Nord 78° 02' 32" Est.

Il se situe dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère est.

Coordonnées du Machu Picchu : 13° 09' 50" Sud 72° 32' 45" Ouest.

Il se situe dans l'hémisphère sud et dans l'hémisphère ouest.

La tour Pey Berland et le Taj Mahal se trouvent tous les deux dans l'hémisphère nord.

L'Opéra de Sydney et le Machu Picchu se trouvent tous les deux dans l'hémisphère sud. Ces quatre lieux se trouvent tous dans un quart de sphère (quadrant) différent.

Exercices

Représenter des solides et calculer des volumes

Questions flash

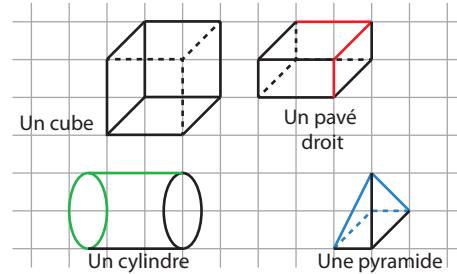
- Les figures **a** et **e** sont des cylindres.
Les figures **b**, **d** et **f** sont des pyramides.
- Les figures **a** et **e** ont trois faces (deux faces planes et une face courbe) et leurs bases sont des disques.
La figure **b** a une base carrée, 5 faces, 5 sommets et 8 arêtes.
La figure **c** a une base carrée, 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes.
La figure **d** a une base triangulaire, 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes.

Cette figure a toutes ses faces triangulaires : on pourra faire remarquer qu'un tel solide porte le nom de tétraèdre.

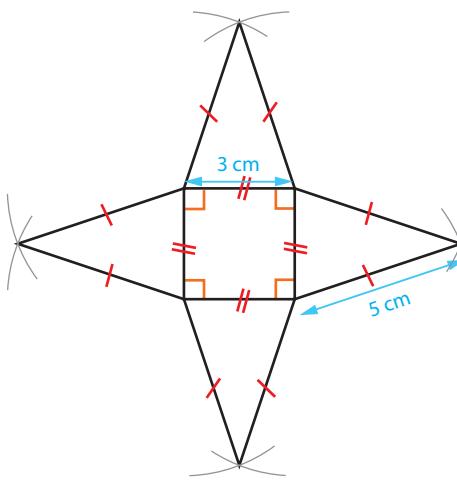
La figure **f** a une base carrée, 5 faces, 5 sommets et 8 arêtes.

2	$4,5 \text{ cm}^2 = 0,045 \text{ dm}^2$	$57,4 \text{ m}^2 = 5740 \text{ dm}^2$
	$257 \text{ dm}^2 = 2,57 \text{ m}^2$	$25 \text{ dm}^2 = 2500 \text{ cm}^2$
3	$358 \text{ dm}^3 = 358000 \text{ cm}^3$	$257 \text{ dm}^3 = 0,257 \text{ m}^3$
	$58 \text{ dm}^3 = 58 \text{ L}$	$524 \text{ cl} = 5,24 \text{ L}$

4



5



6

On calcule d'abord le périmètre de la base :
 $\mathcal{P} = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi \text{ cm}$

Le périmètre d'un cercle de rayon 5,6 cm est :
 $2 \times 5,6\pi = 11,2\pi$ cm.

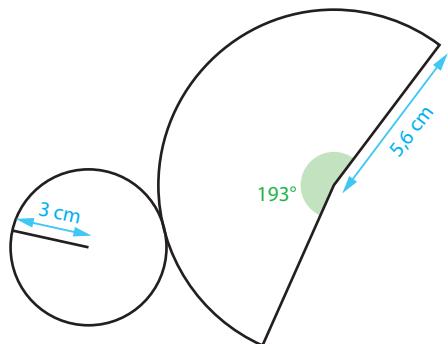
On a le tableau suivant :

Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	$11,2\pi$	6π

On utilise le produit en croix :

$$x = \frac{360 \times 6 \times \pi}{11,2 \times \pi} = \frac{360 \times 6}{11,2} \approx 193^\circ$$

On obtient le patron suivant.



- 7 On utilise la formule du volume d'un cône de révolution.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi \times 6,7^2 \times 5,7 = 85,291\pi \text{ cm}^3 \approx 268 \text{ cm}^3$$

- 8 La surface latérale d'un parallélépipède rectangle est la somme des surfaces des 6 rectangles composant ses faces.

$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 2 \times 5,7 \times 4,3 + 2 \times 5,7 \times 3,7 + 2 \times 3,7 \times 4,3 \\ \mathcal{A}_{\text{latérale}} = 49,02 + 42,18 + 31,82 = 123,02 \text{ cm}^2$$

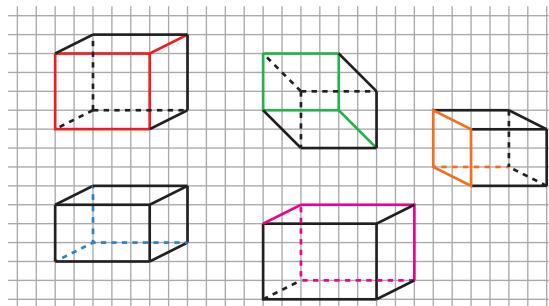
- 9 La base du cylindre est un cercle de diamètre 6,8 cm. Son périmètre est de $6,8 \times \pi$ cm.

La surface latérale de ce cylindre est un rectangle de longueur 8,3 cm et de largeur $6,8\pi$ cm.

$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 8,3 \times 6,8\pi = 56,44\pi \text{ cm}^2 \text{ (valeur exacte)}$$

$\mathcal{A}_{\text{latérale}} \approx 177 \text{ cm}^2$ (valeur approchée au centimètre carré près)

- 10



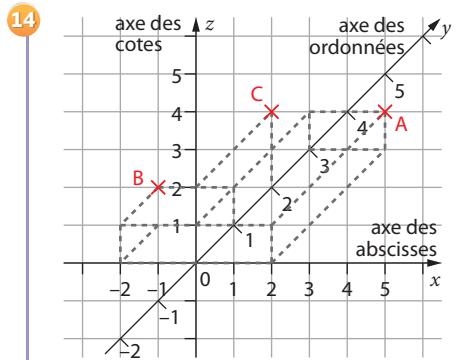
Se repérer dans un parallélépipède rectangle

Questions flash

- 11 A(1 ; 3) B(-1 ; 0) C(4 ; -1) D(6 ; 0)

- 12 A(0 ; 0 ; 2) B(0 ; 4 ; 2) C(6 ; 4 ; 2) O(0 ; 0 ; 0)
 D(6 ; 0 ; 2) E(6 ; 0 ; 0) F(6 ; 4 ; 0) G(0 ; 4 ; 0)

- 13 Milieu de [AB] : I(2 ; 0 ; 1,5)
 Milieu de [DE] : J(1 ; 7 ; 0)
 Milieu de [EF] : K(0 ; 7 ; 1,5)
 Milieu de [AH] : L(1 ; 0 ; 0)
 Milieu de [AD] : M(2 ; 3,5 ; 0)
 Milieu de [CD] : N(2 ; 7 ; 1,5)
 Milieu de [CF] : P(1 ; 7 ; 3)
 Milieu de [HG] : Q(0 ; 0 ; 1,5)
 Milieu de [FG] : R(0 ; 3,5 ; 3)
 Milieu de [BG] : S(1 ; 0 ; 3)
 Milieu de [HE] : T(0 ; 3,5 ; 0)
 Milieu de [BC] : U(2 ; 3,5 ; 3)



Reconnaitre et représenter une sphère

Questions flash

- 15 La boule de Noël est une sphère, elle est vide.
 La boule de pétanque est une boule, elle est pleine.
 La balle de ping-pong est une sphère, elle est vide.
 La boule de billard est une boule, elle est pleine.
 L'orange est assimilée à une boule, elle est pleine.
 La balle de tennis est une sphère, elle est vide.

- 16 a. Faux, il est égal à $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$
 b. Vrai.
 c. Vrai.
 d. Faux, $\mathcal{A} = 4\pi \times 2^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

- 17 $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$ (valeur exacte)
 $\mathcal{V} \approx 905 \text{ cm}^3$ (valeur approchée au centimètre carré près).

- 18 Le rayon de la boule est de :
 $3,6 \text{ dm} \div 2 = 36 \text{ cm} \div 2 = 18 \text{ cm}$
 $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \pi \times 18^3 = 7776\pi \text{ cm}^3$ (valeur exacte)
 $\mathcal{V} \approx 24429 \text{ cm}^3$ (valeur approchée au centimètre cube près).

Se repérer sur une sphère

Questions flash

- 19 a. Un point sur l'équateur a une latitude de 0° et une longitude comprise entre 0 et 180° Est ou Ouest.
 b. Un point situé sur le méridien de Greenwich a une longitude de 0° et une latitude comprise entre 0 et 180° Sud ou Nord.
 c. Le pôle Nord a une latitude de 90° Nord. Sa longitude peut être définie par n'importe quelle valeur.

- 20 $\widehat{BAC} = 18^\circ$ $\widehat{DAF} = 25^\circ$
 $\widehat{EAF} = 90^\circ - 8^\circ - 18^\circ = 64^\circ$ $\widehat{FAB} = 18^\circ + 8^\circ = 26^\circ$
 $\widehat{EAB} = 90^\circ$

- 21 Voici les coordonnées de :
 Shangai (30° N ; 120° E) São Paulo (23° S ; 45° E)
 Londres (50° N ; 0°) Nouvelle-Orléans (30° N ; 90° O)

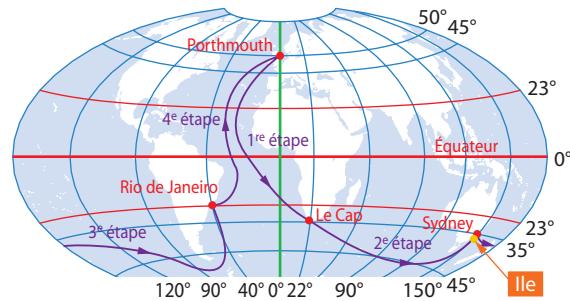
- 22 A (45° N ; 120° E) B (60° N ; 45° E)
 C (15° S ; 15° O) D (15° S ; 75° O)

Problèmes

- 23 Tour du monde à la voile

1. Porthsmouth (50° Nord ; 0°) Le Cap (35° Sud ; 22° Est)
 Sydney (35° Sud ; 150° Est)
 Rio de Janeiro (23° Sud ; 40° Ouest)

2.

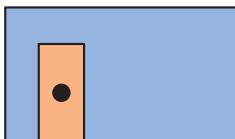


Cette île se trouve près de l'Australie dans le quadrant Sud/Est du planisphère.

24 Les vues

Cet exercice permet de travailler les différentes vues d'un solide et de développer sa vision de l'espace.

Vue de devant :



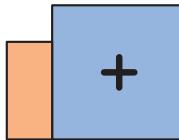
Vue de derrière :



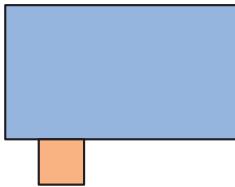
Vue de gauche :



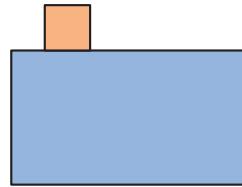
Vue de droite :



Vue de dessus :



Vue de dessous :



Cet exercice peut aussi être effectué en salle informatique, grâce à un logiciel de géométrie dynamique et l'affichage Graphique 3D : l'élève construit ainsi un solide semblable à celui présenté en choisissant des mesures adaptées et visualise les différentes vues en le faisant pivoter.

25 Kroa Multicolor

1. 1 cube au 1^{er} niveau, 5 cubes au 2^e niveau, 13 cubes au 3^e niveau, 5 cubes au 4^e niveau et 1 cube au 6^e niveau, soit un total de $1 + 5 + 13 + 5 + 1 = 25$ cubes.

L'œuvre est constituée de 25 cubes identiques.

Cette œuvre mesure 50,8 cm de haut, soit une hauteur de 5 cubes.

$50,8 \div 5 = 10,16$ Un cube a pour côté 10,16 cm.

Le volume total de l'œuvre est de :

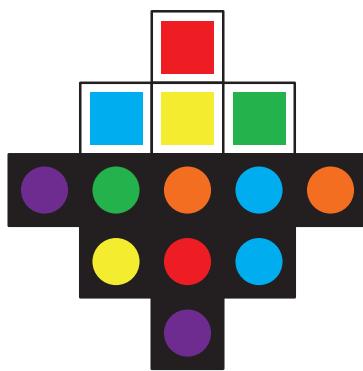
$10,16^3 \times 25 \approx 26\ 220 \text{ cm}^3 \approx 26 \text{ dm}^3$

2.

Cette question permet de retravailler les échelles.

1 cm sur le dessin représente 10 cm en réalité.

Un carré de 10,16 cm de côté en réalité sera représenté par un carré d'environ 1 cm sur le dessin.



31

Usine à Horta de Ebro

1. Paul Cézanne a voulu dire que, pour représenter la nature, il faut la schématiser, en la représentant par des solides.

Picasso l'a fait dans cette œuvre en représentant des prismes, des pavés.

2. Les règles de représentation en perspective cavalière ne sont pas respectées ici, les arêtes parallèles dans la réalité ne l'étant pas toutes sur son tableau.

Cette question permet de revoir les caractéristiques de la représentation en perspective cavalière.

26

En immersion

$$V_{\text{cylindre}} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

$$\text{donc } V_{\text{cylindre}} = \pi \times 4,5^2 \times 9 \approx 573 \text{ cm}^3.$$

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi \times \text{rayon}^3$$

$$\text{donc } V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi \times 4,5^3 \approx 382 \text{ cm}^3.$$

Donc le volume laissé libre est d'environ :

$$573 - 382 = 191 \text{ cm}^3$$

28

The pot

Le rayon du récipient est de 10 cm (moitié du diamètre 20 cm).

$$V_{\text{cylindre}} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

$$\text{donc } V_{\text{cylindre}} = \pi \times 10^2 \times 11 = 1\ 100 \pi \approx 3\ 456 \text{ cm}^3.$$

On veut y verser 4 L = 4 dm³ = 4 000 cm³ d'eau, c'est supérieur au volume du faitout. On ne pourra donc pas y verser le volume d'eau souhaité.

29

Le rouleau à pâtisserie

Il faut calculer l'aire de la surface latérale qui est un rectangle de largeur le périmètre du disque de base et de longueur 30 cm.

$$P_{\text{disque de base}} = 2 \times \pi \times \text{rayon}$$

Le rayon du disque de base est de 2 cm (moitié du diamètre 4 cm) donc $P_{\text{disque de base}} = 2 \times \pi \times 2 = 4\pi \approx 12,6 \text{ cm}$.



On calcule maintenant l'aire du rectangle correspondant à la pâte étalée à chaque tour de rouleau :

$$A = \text{Longueur} \times \text{largeur}$$

$$\text{donc } A \approx 30 \times 4 \times \pi = 120 \pi \approx 377 \text{ cm}^2$$

La surface de pâte étalée à chaque tour de rouleau est d'environ 377 cm².

30

Le ruban

On calcule d'abord la longueur totale de ruban nécessaire pour entourer un cadeau :

$$12 \times 2 + 4 \times 4 + 7,3 \times 2 = 24 + 8 + 14,6 = 54,6 \text{ cm}$$

Il faut rajouter les 20 cm de ruban pour faire le noeud, soit $54,6 + 20 = 74,6 \text{ cm}$ de ruban par cadeau.

$$74,6 \times 1\ 000 = 74\ 600 \text{ cm} = 746 \text{ m}$$

Il faut acheter 746 m de ruban.

Le ruban est vendu par rouleau de 50 m.

$$746 \div 50 = 14,92$$

Il faudra donc acheter 15 rouleaux de ruban.

$$15 \times 6,50 = 97,50 \text{ €}$$

Le montant de la commande est de 97,50 €.

31

Tente igloo

1. Le diamètre de la tente est de 2,50 m, le rayon est donc de $2,5 \div 2 = 1,25 \text{ m}$.

On calcule l'aire d'une demi-sphère de rayon 1,25 m :

$$A_{\text{tente}} = (4\pi \times 1,25^2) \div 2 \approx 9,8 \text{ m}^2$$

Le tapis au sol a la forme d'un disque de 1,25 m de rayon, on calcule son aire : $A_{\text{tapis}} = \pi \times 1,25^2 \approx 4,9 \text{ m}^2$

$$9,8 + 4,9 = 14,7$$

Il faut 14,7 m² de tissu pour réaliser cette tente.

2. On calcule le volume d'une demi-boule de rayon 1,25 m :

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 1,25^3 \div 2 \approx 4,1 \text{ m}^3$$

Le volume d'air à l'intérieur de la tente est d'environ 4,1 m³.

Cet exercice permet de bien différencier aire et volume.

32

L'aquarium

1. On calcule le volume d'un pavé droit de longueur 69 cm, de largeur 38 cm et de hauteur 40 cm :
 $\mathcal{V} = \text{Longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$
 donc $\mathcal{V} = 69 \times 38 \times 40 = 104\,880 \text{ cm}^3 \approx 105 \text{ L}$.
 On peut considérer que l'étiquette, qui affiche 100 L, dit vrai.
2. Mathieu y verse 75 L d'eau.
 $75 \text{ L} = 75\,000 \text{ cm}^3$

L'eau versée dans l'aquarium prend la forme d'un pavé droit de longueur 69 cm, de largeur 38 cm et de hauteur h .
 Donc $69 \times 38 \times h = 75\,000$.
 Donc $h = 75\,000 \div (69 \times 38) \approx 28,6 \text{ cm}$.
 La hauteur de l'eau est d'environ 28,6 cm.

33

Cuboctaèdre

On calcule le volume du cube :
 $\mathcal{V}_{\text{cube}} = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

On calcule le volume d'une des 8 pyramides qui vont être découpées. Ces pyramides ont une base en forme de triangle rectangle isocèle, dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et la hauteur 5 cm.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{pyramide}} &= \frac{1}{3} \text{ Aire d'une base} \times \text{hauteur} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 5}{2} \times 5 \approx 20,8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Le volume du cuboctaèdre est donc égal à :

$$\mathcal{V}_{\text{cube}} - 8\mathcal{V}_{\text{pyramide}} \text{ soit } 1\,000 - 8 \times 20,8 \approx 833,6 \text{ cm}^3$$

34

Boudin amortisseur

On calcule le volume du cylindre de hauteur 50 cm et dont le disque de base a pour rayon $16 \text{ cm} \div 2 = 8 \text{ cm}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{cylindre}} &= \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} \\ \text{donc } \mathcal{V}_{\text{cylindre}} &= \pi \times 8^2 \times 50 = 3\,200 \pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

On calcule le volume d'une boule de rayon 8 cm (deux demi-boules de 8 cm de rayon) :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{boule}} &= \frac{4\pi \times \text{rayon}^3}{3} \\ \text{donc } \mathcal{V}_{\text{boule}} &= \frac{4\pi \times 8^3}{3} = \frac{2\,048\pi}{3} \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Le volume exact du boudin est :

$$3\,200\pi + \frac{2\,048\pi}{3} = \frac{11\,648\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Une valeur approchée du boudin en cm^3 au centième près est 12 197,76 cm^3 .

35

Des conserves

1. On utilise la formule du volume d'un cylindre :

$$\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

- 1^{re} boite : le rayon mesure $65 \div 2 = 32,5 \text{ mm} = 3,25 \text{ cm}$.

La hauteur est de 70 mm = 7 cm.

Le volume est $3,25^2 \times \pi \times 7 \approx 232 \text{ cm}^3$.

La contenance est de :

$$232 \times \frac{93}{100} \approx 215 \text{ cm}^3 \approx 215 \text{ mL}$$

- 2^e boite : on nomme r le rayon en mm. La hauteur est de 85 mm = 8,5 cm.

Le volume est \mathcal{V} . La contenance est de 425 mL = 425 cm^3 .

$$\mathcal{V} \times \frac{93}{100} = 425 \text{ donc } \mathcal{V} = 425 \div 0,93 \approx 457 \text{ cm}^3$$

$$r^2 \times \pi \times 8,5 \approx 457 \text{ donc } r^2 \approx 457 \div (8,5\pi) \approx 17$$

$$\text{Donc } r \approx 4,14 \text{ cm} \approx 41,4 \text{ mm.}$$

L'élève peut trouver le rayon soit par essais successifs, soit à l'aide de la touche « racine carrée » de la calculatrice rencontrée dans le chapitre sur le théorème de Pythagore.

Le diamètre est donc proche de 41,4 mm $\times 2 \approx 83 \text{ mm}$.

- 3^e boite : le diamètre est de 73 mm, donc le rayon est de $7,3 \text{ cm} \div 2 = 3,65 \text{ cm}$. La hauteur est h en cm. Le volume est égal à 456 cm^3 .

$$\text{On a : } \pi \times 3,65^2 \times h = 456$$

$$\text{donc } h \approx 456 \div (\pi \times 3,65^2) \approx 11 \text{ cm, soit } 110 \text{ mm.}$$

La contenance est égale à :

$$456 \times \frac{93}{100} \approx 424 \text{ cm}^3 \approx 424 \text{ mL}$$

- 4^e boite : soit r le rayon en cm de la boite. Sa hauteur est de 118 mm = 11,8 cm et son volume est de 908 cm^3 .

$$\text{Donc } \pi \times r^2 \times 11,8 = 908$$

$$\text{donc } r^2 = 908 \div (\pi \times 11,8) \approx 24,5$$

$$\text{donc } r \approx 4,95 \text{ cm} \approx 49,5 \text{ mm.}$$

L'élève peut trouver le rayon soit par essais successifs, soit à l'aide de la touche « racine carrée » de la calculatrice rencontrée dans le chapitre sur le théorème de Pythagore.

Le diamètre de la boîte est donc proche de $49,5 \text{ mm} \times 2 = 99 \text{ mm}$.

Sa contenance est égale à :

$$908 \times \frac{93}{100} \approx 844 \text{ cm}^3 \approx 844 \text{ mL}$$

Dimensions : diamètre (en mm) \times hauteur (en mm)	Volume (au cm^3 près)	Contenance (en mL)
65 \times 70	232	215
83 \times 85	457	425
73 \times 110	456	424
99 \times 118	908	844

2. La première boîte est la boîte 1/4 US.

La deuxième boîte est la boîte 1/2 moyenne.

La troisième boîte est la boîte 1/2 haute.

La quatrième boîte est la boîte 4/4.

On pourra faire noter que la contenance est inférieure au volume de la boîte, en raison de la présence d'air permettant aussi à la boîte d'être mise sous pression.

36

Parallélépipède rectangle

1. On est dans un parallélépipède rectangle, (FN) et (FM) sont perpendiculaires.

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{côté} \times \text{hauteur relative}}{2}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{\text{FNM}} = \frac{\mathcal{F} \times \mathcal{M}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$2. \mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \frac{\text{aire d'une base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{BFNM}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{FNM}} \times \mathcal{B}}{3} = \frac{6 \times 5}{3} = 10 \text{ cm}^3$$

3. a. $\mathcal{V}_{\text{pavé droit}} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{ABCDEFGH}} = 15 \times 10 \times 5 = 750 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{V}_{\text{ABCDEFMGH}} = \mathcal{V}_{\text{ABCDEFGH}} - \mathcal{V}_{\text{BFNM}} = 750 - 10 = 740 \text{ cm}^3$$

b.

	Parallélépipède ABCDEFGH	Solide ABCDENMGH
Nombre de faces	6	7
Nombre d'arêtes	12	14
Nombre de sommets	8	9
Caractéristique x	2	2

La caractéristique d'Euler tient son nom du théorème de Descartes-Euler.

Descartes, puis Euler, ont constaté que le nombre $S - A + F$, où S correspond au nombre de sommets, A au nombre d'arêtes et F au nombre de faces, était, pour les polyèdres convexes, toujours égal à 2.

37

Café

On calcule le volume de la boîte en forme de cylindre de rayon $10 \text{ cm} \div 2 = 5 \text{ cm}$ et de hauteur 16 cm.

$$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} = \pi \times 5^2 \times 16 = 400\pi \approx 1\,257 \text{ cm}^3$$

La boîte contient 1 257 cm^3 de café.

Le volume initial de la boîte plus les 20 % du volume initial offerts représentent 1 257 cm^3 .

Cela signifie que 1,2 fois le volume initial de la boîte représente 1 257 cm^3 .

Donc le volume initial de la boîte était d'environ $1\,257 \div 1,2 \approx 1\,048 \text{ cm}^3$.

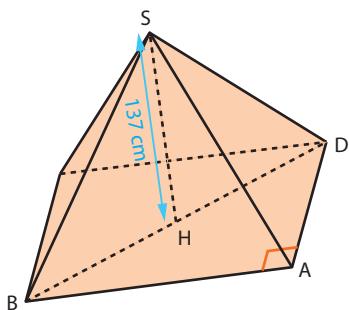
$$1\,048 \times \frac{20}{100} \approx 210$$

La boîte contient donc environ 210 cm^3 de café offert.

38

La pyramide de Khéops

Cet exercice permet de retravailler la notion d'échelle, et donc de proportionnalité, ainsi que le théorème de Pythagore dans l'espace.

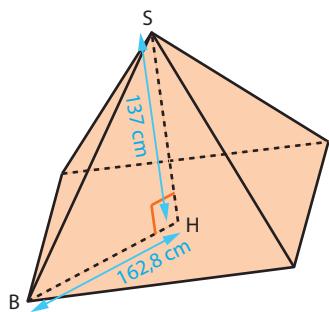


On calcule la longueur de la diagonale [BD] de la base carrée de 230,25 m de côté grâce au théorème de Pythagore dans le triangle BAD rectangle et isocèle en A :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 230,25^2 + 230,25^2 = 106\,030,125$$

$$BD = \sqrt{106\,030,125} \approx 325,6 \text{ m}$$

La demi-diagonale BH mesure donc $325,6 \div 2 = 162,8$ m.



On calcule la longueur de l'arête latérale [SB], dans le triangle SHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

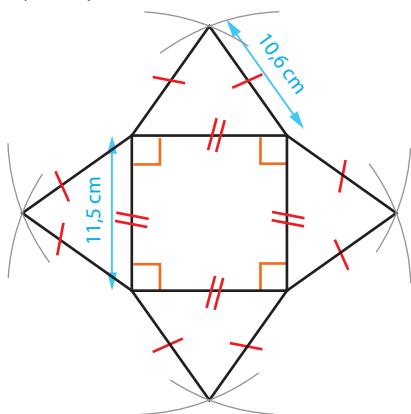
$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = 137^2 + 162,8^2 = 45\,272,84$$

$$SB = \sqrt{45\,272,84} \approx 212,8 \text{ m}$$

On peut maintenant construire le patron à l'échelle $\frac{1}{2000}$:

1 cm sur le dessin représente 2 000 cm = 20 m en réalité.

L'arête latérale sera représentée par un segment de 10,6 cm ($212,8 \div 20$) et le côté du Carré de base par un segment de 11,5 cm ($230,5 \div 20$).



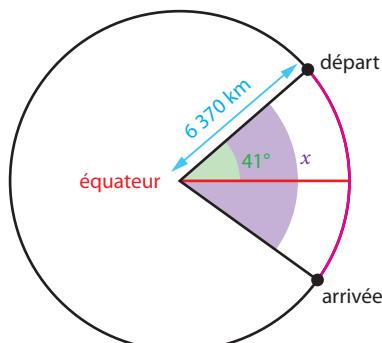
39

Départ de Rome

On calcule d'abord la distance parcourue pendant 6 h 15 min = 6,25 h à une vitesse de 800 km/h.

$$800 \times 6,25 = 5\,000$$

L'avion a parcouru 5 000 km vers le sud.



La longueur d'un méridien est égale à la moitié de la circonference de la Terre, soit $6\,370\pi \text{ km} \approx 20\,012 \text{ km}$.

Il y a proportionnalité entre la mesure de l'arc parcouru et l'angle. La longueur d'un méridien entier correspond à un angle de 180° .

Angle (en $^\circ$)	180	x
Longueur de l'arc (en km)	20 012	5 000

$$\frac{180 \times 5\,000}{20\,012} \approx 45^\circ$$

L'avion est descendu de 45° vers le sud.

S'il descend de 41° vers le sud, l'avion se trouve à une latitude de 0° . S'il descend de 4° encore, il se retrouve à une latitude de 4° Sud. Il est resté sur le même méridien, donc il garde la même longitude.

Les coordonnées du point d'arrivée sont donc (4° Sud ; 12° Est).

40 Pyramide en carton

1. $V_{\text{pavé droit}} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$

La hauteur est de 5 mm = 0,5 cm. Donc le volume de ce pavé droit en carton est égal à $12 \times 12 \times 0,5 = 72 \text{ cm}^3$.

2. a. La formule saisie en A3 est =A2-B2 et celle saisie en C2 est =A2*A2*B2.

b. On calcule le volume total des morceaux de carton dans la cellule C26 en y saisissant la formule : =SOMME(C2:C25)

A	B	C
Côté de la base du pavé droit (en cm)	Hauteur du pavé droit (en cm)	Volume du pavé droit en carton (en cm^3)
1		
2	12	0,5
3	11,5	0,5
4	11	0,5
5	10,5	0,5
6	10	0,5
7	9,5	0,5
8	9	0,5
9	8,5	0,5
10	8	0,5
11	7,5	0,5
12	7	0,5
13	6,5	0,5
14	6	0,5
15	5,5	0,5
16	5	0,5
17	4,5	0,5
18	4	0,5
19	3,5	0,5
20	3	0,5
21	2,5	0,5
22	2	0,5
23	1,5	0,5
24	1	0,5
25	0,5	0,5
Volume total des morceaux de carton (en cm^3)		612,5
26		

On trouve un volume total des morceaux de carton égal à $612,5 \text{ cm}^3$.

c. $V_{\text{pyramide}} = \frac{\text{aire d'une base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{12 \times 12 \times 12}{3} = 576 \text{ cm}^3$

Le volume total des morceaux de carton est proche du volume exact d'une pyramide de 12 cm de hauteur et de base carrée de 12 cm de côté mais il n'est pas égal.

d. On peut améliorer cette méthode de calcul du volume de cette pyramide en réduisant l'épaisseur des plaques de carton. En faisant passer l'épaisseur de chaque morceau de carton de 5 mm à 2 mm, par exemple, on obtient :

A	B	C
Côté de la base du pavé droit (en cm)	Hauteur du pavé droit (en cm)	Volume du pavé droit en carton (en cm^3)
1		
2	12	0,2
3	11,8	0,2
4	11,6	0,2
5	11,4	0,2
6	11,2	0,2
7	11	0,2
8	10,8	0,2
9	10,6	0,2
10	10,4	0,2
11	10,2	0,2
12	10	0,2
13	9,8	0,2
14	9,6	0,2

15	9,4	0,2	17,872
16	9,2	0,2	16,928
17	9	0,2	16,2
18	8,8	0,2	15,488
19	8,6	0,2	14,792
20	8,4	0,2	14,112
21	8,2	0,2	13,448
22	8	0,2	12,8
23	7,8	0,2	12,168
24	7,6	0,2	11,552
25	7,4	0,2	10,952
26	7,2	0,2	10,368
27	7	0,2	9,8
28	6,8	0,2	9,248
29	6,6	0,2	8,712
30	6,4	0,2	8,192
31	6,2	0,2	7,688
32	6	0,2	7,2
33	5,8	0,2	6,728
34	5,6	0,2	6,272
35	5,4	0,2	5,832
36	5,2	0,2	5,408
37	5	0,2	5
38	4,8	0,2	4,608
39	4,6	0,2	4,232
40	4,4	0,2	3,872
41	4,2	0,2	3,528
42	4	0,2	3,2
43	3,8	0,2	2,888
44	3,6	0,2	2,592
45	3,4	0,2	2,312
46	3,2	0,2	2,048
47	3	0,2	1,8
48	2,8	0,2	1,568
49	2,6	0,2	1,352
50	2,4	0,2	1,152
51	2,2	0,2	0,968
52	2	0,2	0,8
53	1,8	0,2	0,648
54	1,6	0,2	0,512
55	1,4	0,2	0,392
56	1,2	0,2	0,288
57	1	0,2	0,2
58	0,8	0,2	0,128
59	0,6	0,2	0,072
60	0,4	0,2	0,032
61	0,2	0,2	0,008
62	Volume total des morceaux de carton (en cm ³)		590,48

On remarque effectivement que le volume total des morceaux de carton se rapproche du volume exact de la pyramide.

41 Achat de climatisation

$$40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

On calcule d'abord la surface au sol du salon : on calcule pour cela l'aire d'un rectangle de longueur 5,6 m et de largeur 3,27 m + 1,12 m, à laquelle on soustrait l'aire d'un rectangle de longueur 1,12 m et de largeur 0,40 m.

$$5,16 \times (3,27 + 1,12) - 1,12 \times 0,4 = 22,204 \text{ m}^2$$

On calcule maintenant le volume du salon (volume d'un prisme droit de base le sol et de hauteur 3,50 m) :

$$22,204 \text{ m}^2 \times 3,50 = 77,715 \text{ m}^3$$

Les modèles S145, S156 et S148 sont à éliminer car le volume n'est pas suffisant (70 ou 60 m³).

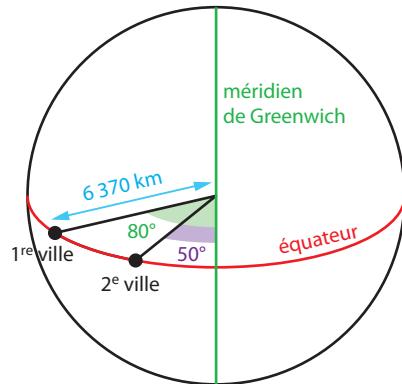
Le modèle M701 ne peut convenir car il dépasse le budget prévu de 1 500 €.

Le modèle qui convient à la famille est le modèle G76.

42 Sur l'équateur

On calcule la longueur de l'équateur, c'est-à-dire la longueur d'un cercle de rayon 6 370 km :

$$\begin{aligned} 2 \times \pi \times \text{rayon} \\ = 2 \times \pi \times 6\,370 \\ = 12\,740\pi \\ \approx 40\,024 \text{ km} \end{aligned}$$



Entre les deux villes, il y a un angle de $80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$. Il y a proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle :

Longueur de l'arc (en km)	40 024	x
Angle (en °)	360	30

$$x = \frac{40\,024 \times 30}{360} \approx 3\,340 \text{ km}$$

La distance entre ces deux villes, approchée à la dizaine de kilomètres près, est d'environ 3 340 km.

43 Les cornets de glace

Cet exercice permet de travailler la vision dans l'espace, de réinvestir la notion de proportionnalité et d'utiliser le théorème de Pythagore.

On calcule la longueur du demi-cercle de diamètre 10 cm, donc de rayon 5 cm :

$$\pi \times \text{rayon} = \pi \times 5 = 5\pi \text{ cm}$$

Il s'agit du périmètre du disque de base du cône formé, de rayon r .

Donc $2 \times \pi \times r = 5\pi$, donc $r = 2,5 \text{ cm}$.

Le cône a donc pour génératrice 5 cm et pour rayon du disque de base 2,5 cm.

On calcule la hauteur de ce cône dans le triangle ACB rectangle en A, grâce au théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} CB^2 &= CA^2 + AB^2 & 5^2 &= CA^2 + 2,5^2 & 25 &= CA^2 + 6,25 \\ CA^2 &= 25 - 6,25 & CA^2 &= 18,75 \end{aligned}$$

$$CA = \sqrt{18,75} \approx 4,3 \text{ cm}$$

La hauteur du cône est d'environ 4,3 cm.

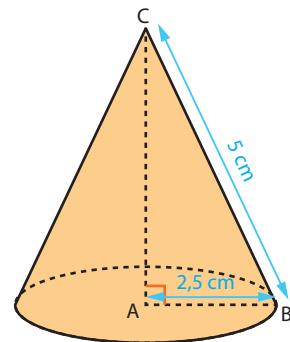
On calcule ensuite le volume de ce cône :

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times 2,5^2 \times 4,3}{3} \approx 28 \text{ cm}^3$$

On souhaite fabriquer 500 glaces, il faut donc :

$$500 \times 28 = 14\,000 \text{ cm}^3 = 14 \text{ L de crème chantilly}$$

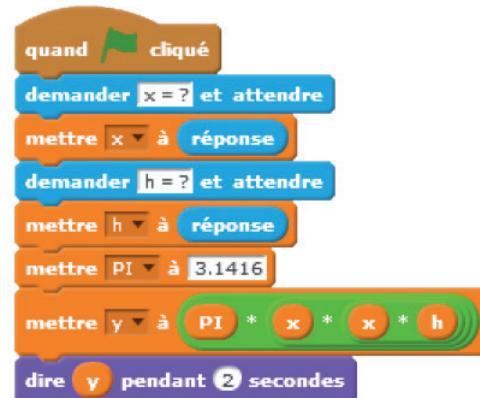
La crème a un taux de foisonnement de 2,5 ; pour fabriquer 14 L de chantilly, il faudra donc $14 \text{ L} \div 2,5 = 5,6 \text{ L}$ de crème.



Algorithmique et outils numériques

44 Dans le désordre

1. Voici le script dans l'ordre :



L'ordre des trois blocs suivants peut être modifié.



2. Ce script sert à calculer le volume d'un cylindre de rayon x et de hauteur h , x et h étant demandés.
 3. Il y a quatre variables : x , qui représente le rayon d'une base du cylindre ; y , le volume du cylindre ; PI, la valeur de π fixée à 3,1415 et h , la hauteur du cylindre.

45 Plouf !

Le volume du cône est égal à :

$$\frac{5^2 \times \pi \times \text{hauteur}}{3} = \frac{25\pi \times \text{hauteur}}{3} \text{ cm}^3$$

La formule saisie dans la cellule B2 est « =25*PI()*A2/3 ».

Ci-contre un extrait du tableau.

Le volume d'eau contenu

dans l'aquarium est égal à :

$$60 \times 18 \times 20 = 21\,600 \text{ cm}^3$$

Le volume de l'eau et du cône est égal à :

$$60 \times 18 \times 20,2 = 21\,816 \text{ cm}^3$$

Le volume du cône est donc égal à :

$$21\,816 - 21\,600 = 216 \text{ cm}^3$$

On cherche donc dans le tableau la ligne sur laquelle le volume du cône est le plus proche de 216 cm^3 .

A	B
Hauteur du cône (en cm)	Volume du cône (en cm ³)
1	0
2	0
3	2,617993878
4	5,235987756
5	7,853981634
6	10,47197551
7	13,08996939
8	15,70796327
9	18,32595715
10	20,94395102
11	23,5619449
12	26,17993878
13	28,79793266
14	31,41592654
15	34,03392041
16	36,65191429
17	39,26990817
18	41,88790205
19	44,50589593
20	47,1238898
21	49,74188368

Une valeur approchée de la hauteur du cône est de 8,3 cm.

46 Des volumes égaux

1. a. Le liquide contenu dans la pyramide a pour hauteur h ; sa forme est une pyramide inversée à base carrée de côté h et de hauteur h . Son volume est $\frac{h^2 \times h}{3} = \frac{h^3}{3}$ (en cm^3).

La formule saisie dans la cellule B2 est « =A2*A2*A2/3 » ou « =A2^3/3 ».

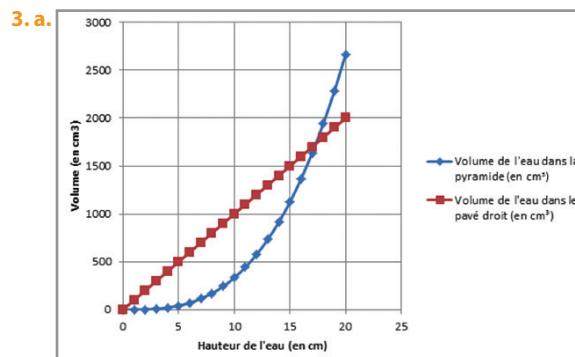
Le liquide contenu dans le pavé droit a pour hauteur h ; sa forme est un pavé droit à base carrée de 10 cm de côté et de hauteur h . Son volume est $10 \times 10 \times h = 100h$ (en cm^3).

La formule saisie dans la cellule C2 est « =100*A2 ».

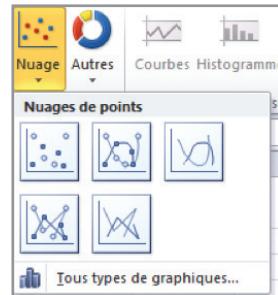
2.

A	B	C
Hauteur de l'eau (en cm)	Volume de l'eau dans la pyramide (en cm^3)	Volume de l'eau dans le pavé droit (en cm^3)
1	0	0
2	0,333333333	100
3	2,666666667	200
4	9	300
5	41,66666667	500
6	72	600
7	114,33333333	700
8	170,6666667	800
9	243	900
10	333,33333333	1000
11	443,6666667	1100
12	576	1200
13	732,33333333	1300
14	914,6666667	1400
15	1125	1500
16	1365,333333	1600
17	1637,666667	1700
18	1944	1800
19	2286,333333	1900
20	2666,666667	2000

On cherche la ligne sur laquelle la valeur située dans la colonne B est la plus proche de celle contenue dans la colonne C (à l'exception de la ligne 2, puisqu'il n'y a alors aucun liquide dans les récipients !). Grâce à la ligne 20, on peut dire que les volumes seront les mêmes dans les deux récipients pour une hauteur d'eau proche de 18 cm.



Il faut sélectionner l'ensemble des données du tableau (plages de A1 jusqu'à C22), puis grâce à l'outil « Nuage », sélectionner « Nuage de points avec courbes lissées et marqueurs », par exemple. Les courbes sont créées. Nommer les axes.



- b. On retrouve le résultat de la question 2. en trouvant les coordonnées du point d'intersection des deux courbes. On retrouve bien que le volume d'eau à l'intérieur des deux solides est le même pour une hauteur d'eau d'environ 18 cm (et l'eau a alors un volume proche de $1\,944 \text{ cm}^3$).

- c. La courbe du liquide versé dans la pyramide augmente très peu au début, puis augmente de plus en plus vite car le volume contenu dans la pyramide est moins important au niveau du sommet mais est plus important au niveau de sa base.

La courbe du volume contenu dans le pavé droit augmente de façon régulière, proportionnellement à la hauteur du liquide car le volume contenu dans le pavé est uniformément réparti.

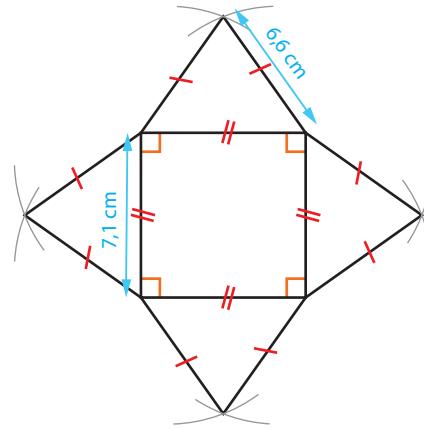


Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1

1 cm sur le dessin représente 500 cm = 5 m en réalité.

Les arêtes seront représentées par un segment de $33,14 \div 5 \approx 6,6 \text{ cm}$ et le côté de la base par un segment de $35,42 \div 5 \approx 7,1 \text{ cm}$.



Exercice 1

1. Soit h la hauteur de la pyramide.

D'après le théorème de Pythagore :

$$33,14^2 = h^2 + 17,71^2$$

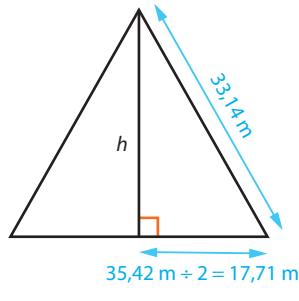
$$h = \sqrt{33,14^2 - 17,71^2}$$

$$\approx 28,01 \text{ m}$$

La hauteur de la pyramide est d'environ 28,01 m.

2. Le volume de la pyramide est :

$$\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} \approx \frac{35,42^2 \times 28,01}{3} \approx 11\,714 \text{ m}^3$$

**Exercice 2**

$$V_{\text{liquide}} = \pi \times 0,5^2 \times 7,5 = 1,875\pi \approx 5,9 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{réipient}} = \pi \times 2^2 \times 8 = 32\pi \approx 100,5 \text{ cm}^3$$

$$\frac{32\pi}{1,875\pi} \approx 17$$

Avec le contenu d'un flacon, on peut remplir 17 pipettes. Pour suivre tout le traitement, il faut $3 \times 7 = 21$ pipettes ; il n'y a donc pas assez avec un seul flacon.

Exercice 2

$$V_{\text{pipette}} = \pi \times 0,5^2 \times 7,5 = 1,875\pi \approx 5,9 \text{ cm}^3$$

Le volume de médicament déjà donné est de :

$$3 \times 1,875\pi = 5,625\pi \text{ cm}^3$$

Le volume de liquide contenu dans le flacon est égal à :

$$2^2 \times 5\pi = 20\pi \text{ cm}^3$$

Il y avait donc au départ un volume de médicament égal à :

$$5,625\pi + 20\pi = 25,625\pi \text{ cm}^3$$

La hauteur h de liquide initialement contenu dans le flacon vérifie : $2^2 \times \pi \times h = 25,625\pi$

$$\text{donc } h = 25,625\pi \div 4\pi \approx 6,4 \text{ cm.}$$

La hauteur du liquide initialement contenu dans le récipient au début du traitement était d'environ 6,4 cm.

Analyse d'une production

Albert a utilisé le diamètre (6 cm) au lieu du rayon dans la formule du volume de la boule.

Marina a utilisé la formule de l'aire d'une sphère au lieu de la formule du volume d'une boule.

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Les connaissances et compétences associées sont :

- se repérer dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère ;
- utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales ;
- développer sa vision de l'espace.

Ces notions ont été amorcées dans le chapitre 43, puis travaillées dans le chapitre 44. C'est ici l'occasion de refaire un point sur ses connaissances et de les remobiliser.

La nouveauté introduite ici est l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour visualiser les sections planes des solides (faire le lien avec les courbes de niveau sur une carte).

- Ce chapitre s'inscrit aussi dans le thème « grandeurs et mesures ». Les connaissances et compétences associées sont :
 - calculer avec des grandeurs mesurables et exprimer les résultats dans les unités travaillées : les notions de grandeurs produits (unités de volumes), les formules donnant le volume d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, d'une boule. Ces notions ont été travaillées dans le chapitre 43, puis revues dans le chapitre 44 (avec la nouveauté de la formule du volume d'une boule). C'est ici l'occasion de remobiliser ses connaissances.
 - comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes, nouveauté introduite dans ce chapitre.

• Les repères de progressivité du programme nous précisent : « Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. »

- Ce chapitre s'inscrit donc dans la continuité du travail entrepris dans le chapitre 43 et prolongé dans le chapitre 44.

Le travail avec les logiciels de géométrie dynamique est approfondi. Les activités de construction sont poursuivies ainsi que l'utilisation des propriétés des figures usuelles.

Comme dans les chapitres 43 et 44, les notions de proportionnalité, de calculs de périmètre et d'aire sont réinvesties. C'est de nouveau l'occasion d'utiliser notamment le théorème de Pythagore ou la trigonométrie.

Activités

Questions flash

Ces exercices permettent de remobiliser ses connaissances sur les solides (reconnaissance et patron) et les formules de volume. Ils permettent aussi de retravailler les conversions d'unités de volume et de capacité.

1. ① C'est un pavé droit. Patron C.
- ② C'est un cylindre de révolution. Patron B.

③ C'est une pyramide (à base triangulaire, aussi appelée tétraèdre). Patron D.

④ C'est un cône de révolution. Patron A.

- | | |
|---|--|
| 2. 1 L = 1 dm ³ | 5,9 km ³ = 5 900 000 dam ³ |
| 35 000 cm ³ = 35 dm ³ | 4,5 dL = 45 cL |
| 5,2 dm ³ = 5 200 cm ³ | 3,275 mL = 0,032 75 dL |

- | | | |
|------------|---------|---------|
| 3. ① et a. | ② et c. | ③ et b. |
| ④ et d. | ⑤ et e. | |

À l'eau !

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de résoudre un problème concret, en cherchant et en extrayant les informations utiles, de façon à retravailler les notions d'aire, de volume et les conversions d'unités de volume et de capacité vues en 5^e.

Les prérequis nécessaires sont la connaissance des formules d'aire d'un disque et d'un carré, des formules de volume d'un cylindre et d'un pavé droit, des unités de volume, de capacité, ainsi que de la notion de proportionnalité (calculer une quatrième proportionnelle).

La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances sur les calculs de volumes et sur les unités de volume, de capacité.

Cette activité nécessite l'utilisation de la calculatrice. Elle peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe.

Activité 1

1. Aire d'un disque = $\pi \times \text{rayon}^2$.

Surface au sol de la piscine ronde = $\pi \times 1,7^2 \approx 9,1 \text{ m}^2$.

Aire d'un carré = côté².

Surface au sol de la piscine carrée = $4,4^2 = 19,36 \text{ m}^2$.

On cherche la surface minimale conseillée pour les 4 membres de la famille : $4 \times 3,4 = 13,6 \text{ m}^2$.

Il faut donc choisir la piscine carrée, la piscine ronde étant alors trop petite.

2. Volume d'un pavé droit = longueur × largeur × hauteur.

Le volume de la piscine carrée est de $4,4 \times 4,4 \times 1,2 = 23,232 \text{ m}^3$.

La piscine se remplit de 12 L d'eau par minute.

Entre vendredi 14 h et samedi 10 h, il s'est écoulé 20 h, soit $20 \times 60 = 1 200$ minutes.

La piscine s'est donc remplie de $1 200 \times 12 = 14 400 \text{ L}$ soit $14 400 \text{ dm}^3 = 14,4 \text{ m}^3$.

$14,4 \text{ m}^3 < 23,232 \text{ m}^3$, donc la piscine ne va pas déborder.

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir les effets d'un agrandissement sur les volumes.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la visualisation et de la formule du volume d'un cube.
La capacité introduite est de comprendre l'effet d'un agrandissement (et donc d'une réduction) sur les volumes.

Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe.

La formule du volume d'un cube est côté³.

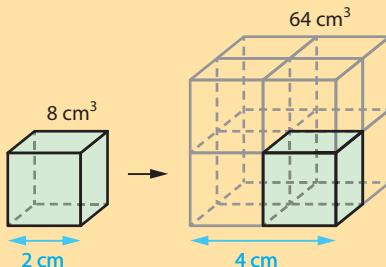
Le cube de volume 8 cm³ a donc pour côté 2 cm, car 2³ = 8.

Le cube de volume 64 cm³ a pour côté 4 cm, car 4³ = 64.

Le cube de volume 64 cm³ est donc 2 fois plus grand que celui de volume 8 cm³.

C'est donc Hugo qui a raison.

On retiendra de cette activité que : par un agrandissement de rapport 2, les volumes sont multipliés par 2³ = 8.
On généralisera : par un agrandissement ou une réduction de coefficient k , les volumes sont multipliés par k^3 .
On peut aussi visualiser ainsi la situation :



Fromage ou dessert ?

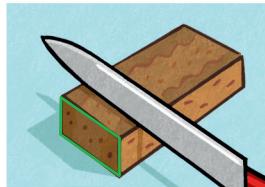
Activité 3

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir les sections planes d'un pavé droit, d'un cylindre et d'une boule (ou sphère).
Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation.
La capacité introduite est de visualiser des sections planes de solides (pavé droit, cylindre et boule).

Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe.

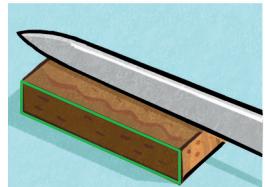
1. Paolo coupe parallèlement à la face verte :



Il obtient un rectangle de mêmes dimensions que la face verte.



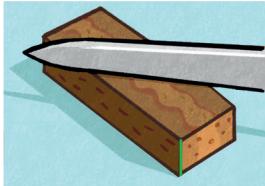
Il coupe ensuite parallèlement à cette nouvelle face verte :



Il obtient un rectangle de mêmes dimensions que la face verte.



Il coupe enfin parallèlement à l'arête verte :



Il obtient un rectangle dont l'une des dimensions a la même longueur que l'arête verte :



2. Il coupe d'abord parallèlement au disque de base :



On obtient un disque de même rayon que le disque de base :



Il coupe ensuite perpendiculairement au disque de base :



Il obtient un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre :



3. a. Si l'on coupe un pamplemousse (que l'on suppose être une boule parfaite), la section obtenue est un disque.

b. La section est la plus grande lorsqu'on coupe le pamplemousse en deux parties égales : on coupe en passant par le centre de la boule. La section est alors un disque de même rayon que le pamplemousse.

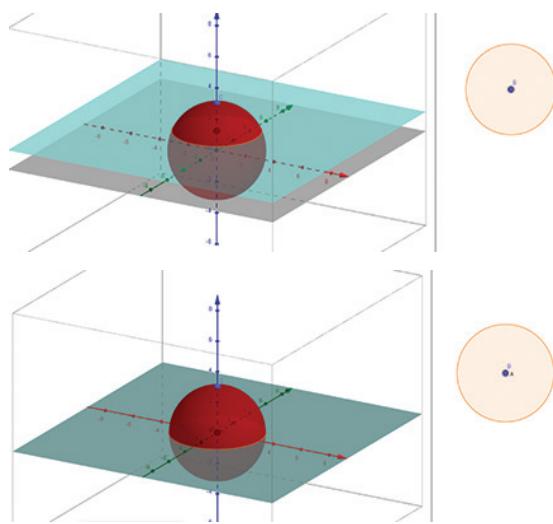
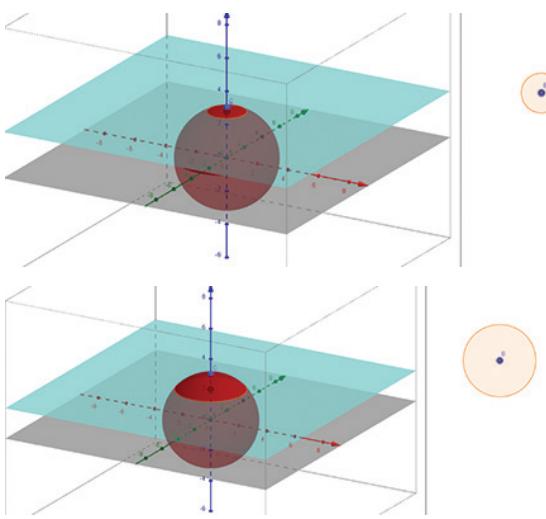
Il peut être intéressant de montrer une sphère construite avec un logiciel de géométrie dynamique et coupée par un plan : afficher la section de la sphère et du plan grâce à l'outil :



Intersection de deux surfaces

puis cliquer droit sur la section et sélectionner « Créer une vue 2D ».

Faire varier la position du plan pour voir que le rayon du cercle de la section plane varie et est maximal lorsque le plan passe par le centre de la sphère.



On coupe !!!

Activité 4

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir les sections planes d'une pyramide et d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base.

Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation ainsi que la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique 3D.

La capacité introduite est de visualiser des sections planes de solides (cône et pyramide) grâce à un logiciel de géométrie.

Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe, en salle informatique ou en cours en classe entière avec vidéoprojecteur.

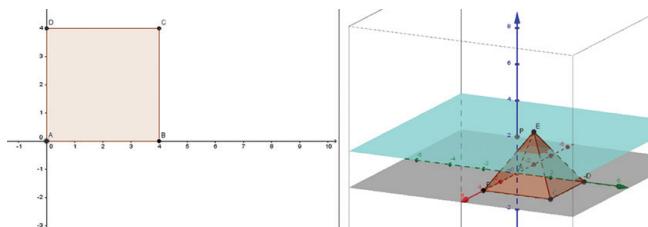
- On trace le carré ABCD dans le plan de base puis, grâce à la commande :



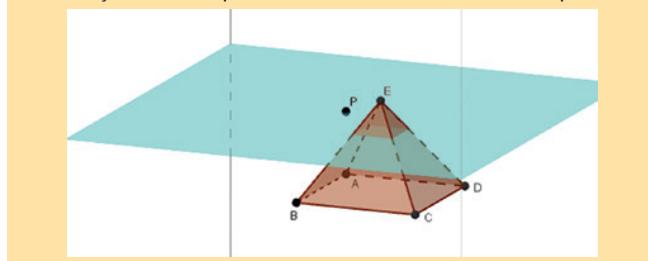
Extrusion Pyramide/Cône

on construit une pyramide ABCDE.

- On place un point P sur l'axe des cotés puis on construit un plan parallèle à la base de la pyramide passant par P.



En effaçant les axes pour mieux visualiser le solide et le plan :



c.

On peut effacer le point P pour mieux visualiser la suite.

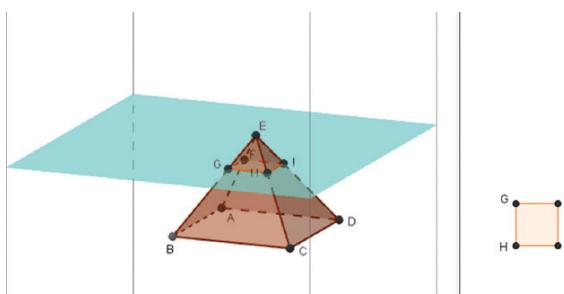
On construit la section de cette pyramide par ce plan grâce à l'outil :



Intersection de deux surfaces

Puis on clique droit sur l'objet et on sélectionne :

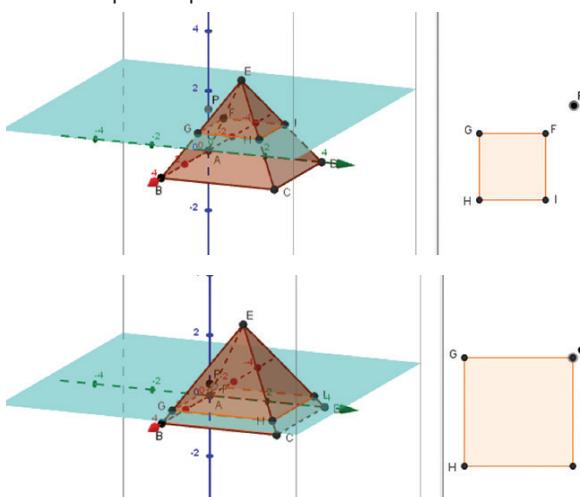
Créer une vue 2D de poly3



d.

On fait réapparaître les axes et le point P.

On déplace le point P sur l'axe des cotés.



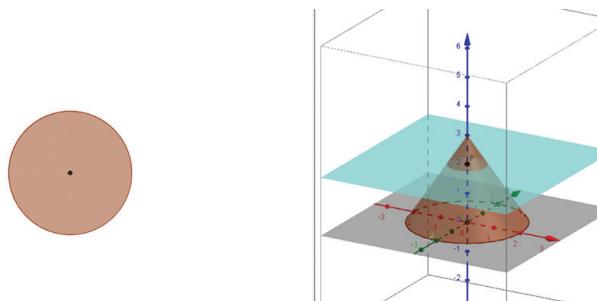
La section d'une pyramide à base carrée par un plan parallèle à sa base est un carré : c'est une réduction de la base. Plus le plan est proche de la base, plus la section est grande. Plus le plan est proche du sommet de la pyramide, plus la section est petite.

- 2. a.** On réalise la même chose pour un cône de révolution.
On trace un cercle de rayon quelconque dans le plan de base puis, grâce à l'outil :

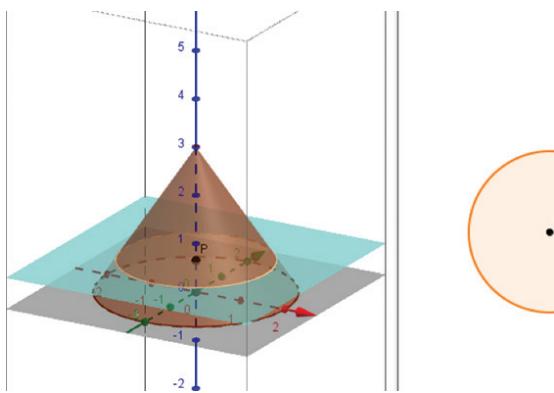
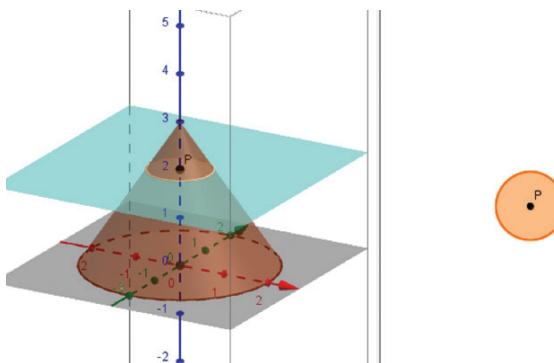


Extrusion Pyramide/Cône

on construit un cône de révolution.
On place un point P sur l'axe des cotes, puis un plan parallèle à la base du cône passant par P.



- b.** On construit de la même façon qu'à la question **1. c.** la section de ce cône par le plan.
On déplace le point P sur l'axe des cotes. La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle qui est une réduction du cercle de base.
Plus le point P est proche de la base, plus la section est grande.
Plus le point P est proche du sommet du cône, plus la section est petite.



La boule de pétanque

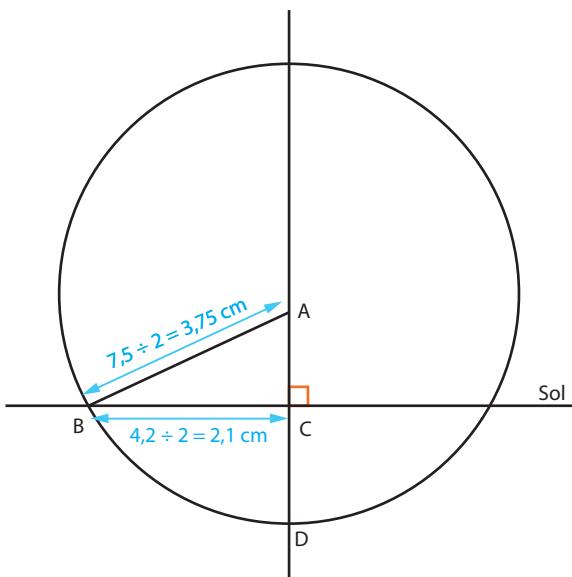
Activité 5

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de visualiser la section d'une boule par un plan pour résoudre un problème.
Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation ainsi que la connaissance du théorème de Pythagore.
La capacité introduite est de visualiser la section plane d'une boule permettant de réinvestir le théorème de Pythagore pour calculer une longueur dans un triangle rectangle.

Cette activité peut être menée individuellement ou en groupe, en classe comme à la maison.

Coupe transversale :



Le triangle ABC est rectangle en C.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$3,75^2 = AC^2 + 2,1^2$$

$$14,0625 = AC^2 + 4,41$$

$$AC^2 = 14,0625 - 4,41$$

$$AC^2 = 9,6525$$

$$AC = \sqrt{9,6525}$$

$$AC \approx 3,1 \text{ cm}$$

On cherche la longueur CD :

$$CD = AD - AC$$

$$CD \approx 3,75 - 3,1$$

$$CD \approx 0,65 \text{ cm}$$

La boule de pétanque s'est donc enfoncée de 6,5 mm.

Exercices

Représenter des solides et calculer des volumes

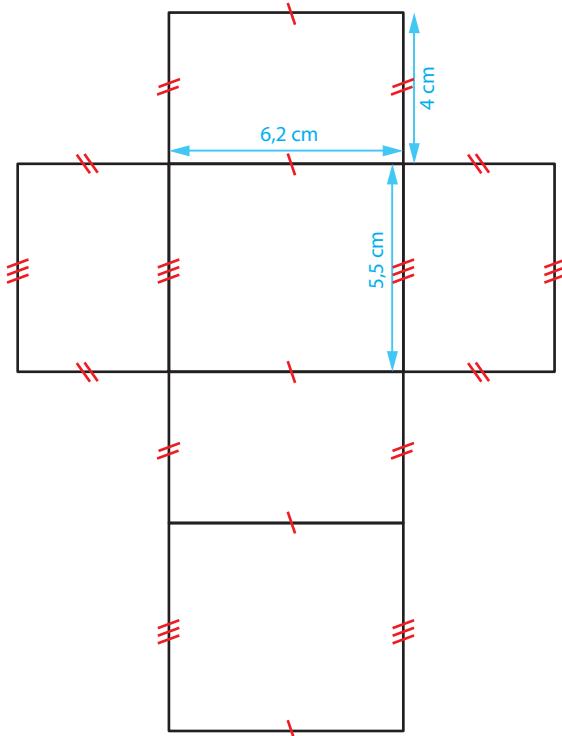
Questions flash

- 1 Pyramide.
- 2 Prisme droit.
- 3 Sphère.
- 4 Cylindre (de révolution).
- 5 Pyramide.
- 6 Cylindre (de révolution).
- 7 Cube.
- 8 Pavé droit ou parallélépipède rectangle.
- 9 Cône (de révolution).

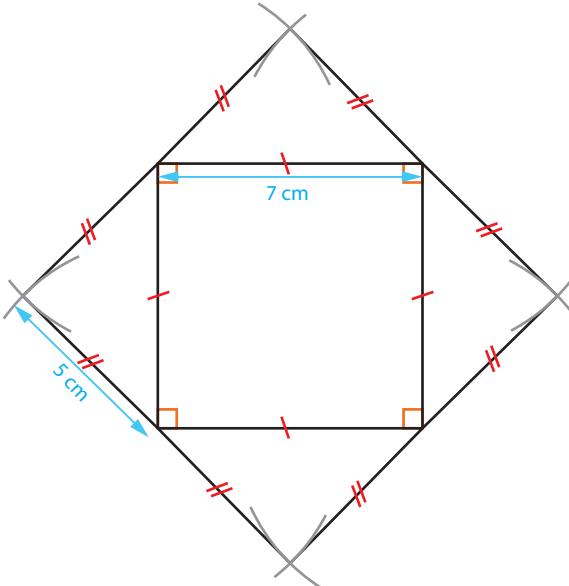
2 Voir tableau en bas de page.

- 3 Vue de dessus : ①
Vue de dessous : ⑤
Vue de face : ③
Vue de derrière : ④
Vue de gauche : ②
Vue de droite : ⑥

- 4 On trace d'abord le rectangle de base de longueur 6,2 cm et de largeur 5,5 cm. On trace ensuite les 4 faces qui ont une arête commune. On termine par la face du dessus qui a les mêmes dimensions que la première.



- 5 On trace d'abord la base qui est un carré de côté 7 cm puis on trace les quatre triangles isocèles dont les côtés égaux mesurent 5 cm.



- 6 ① On utilise la formule du volume d'un pavé droit :

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = 3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ cm}^3$$

- ② On utilise la formule du volume d'une pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 5 \times 4 \times 6 = 40 \text{ cm}^3$$

- ③

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2\ 048}{3} \pi \text{ cm}^3$$

- ④

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

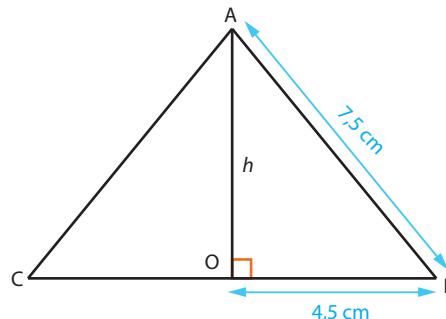
$$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 32^2 \times 7 = 28 \pi \text{ cm}^3$$

- ⑤

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2,5^2 \times 9 = 18,75 \pi \text{ cm}^3$$

- 7 On doit d'abord calculer la hauteur du cône.
On note A le sommet du cône et O le pied de sa hauteur.
[AB] est une génératrice du cône.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de base et nature	1 Triangle	2 Quadrilatère	0	2 Disque	1 Rectangle	2 Disque	2 Carré	2 Rectangle	1 Disque
Nombre d'arêtes	6	12	0	0	8	0	12	12	0
Nombre de sommets	4	8	0	0	5	0	8	8	1

Le triangle AOB est rectangle en O.
On utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AO^2 = 7,5^2 - 4,5^2 = 36$$

$$AO = 6 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4,5^2 \times 6 = 40,5 \pi \approx 127 \text{ cm}^3$$

- 8 Par un agrandissement de rapport 3, le volume va être agrandi par $3^3 = 27$.

- 9 Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

Le volume \mathcal{V} du pavé droit initial est :

$$\mathcal{V} = 2,3 \times 4,2 \times 5 = 48,3 \text{ cm}^3.$$

Le volume du pavé droit est multiplié par 4^3 quand ses dimensions sont multipliées par 4.

Le volume du pavé droit agrandi \mathcal{V}' est donc :

$$\mathcal{V}' = 4^3 \times 48,3 = 3 091,2 \text{ cm}^3$$

- 10 Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

Le volume \mathcal{V} de la pyramide initiale SABCD est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 \times 5 = 30 \text{ cm}^3.$$

Par une réduction de rapport $\frac{2}{3}$, le volume de la pyramide est multiplié par $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Le volume \mathcal{V}' de la pyramide réduite S'A'B'C'D' est :

$$\mathcal{V}' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 30 \approx 9 \text{ cm}^3.$$

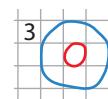
- 11 C'est faux. Le volume du liquide est multiplié par le coefficient de réduction qui est de $\frac{1}{2}$ au cube. Il est donc multiplié par $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Le volume du liquide représente donc un huitième du volume du verre.

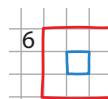
Construire des sections planes de solides

Questions flash

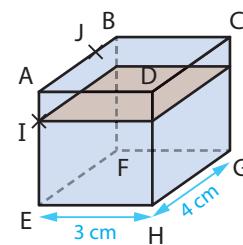
- 16 La section obtenue est la 3.



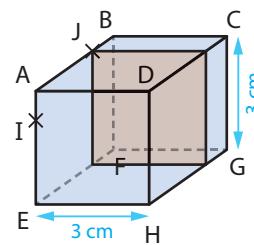
- 17 La section obtenue est la 6.



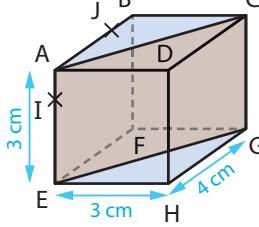
- 18 a. C'est un rectangle de 3 cm sur 4 cm.



- b. C'est un carré de côté 3 cm.



c.



On calcule d'abord la longueur AC. Le triangle ADC est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$AC = 5$$

La section est un rectangle de 3 cm sur 5 cm.

- 19 La section est un cercle de centre L et de rayon 4 cm.

- 20 1. La section est un cercle de centre A et de rayon AM.
2. Le triangle AOM est un triangle rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$

$$AM^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$$

$$AM = \sqrt{32} \approx 5,7 \text{ cm}$$

- 21 La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle de centre O'.

Pour connaître son rayon, il faut calculer le rapport de réduction permettant de passer du cône initial au deuxième cône.

Le rapport de réduction des hauteurs est de $\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{5}$.

La section obtenue est un cercle de centre O' et de rayon

$$r' = \frac{2}{5} \times 4 = 1,6 \text{ cm.}$$

Se repérer dans l'espace

Questions flash

- 12 A (0 ; 0 ; 0) B (0 ; 4 ; 0) C (3 ; 4 ; 0)
D (3 ; 0 ; 0) E (0 ; 4 ; 5) F (3 ; 4 ; 5)
G (3 ; 0 ; 5) H (0 ; 0 ; 5)

- 13 A (65° N ; 30° O) B (0° ; 30° O) C (40° S ; 0°)
D (40° S ; 180°) E (0° ; 50° E)

- 14 A (0 ; 0 ; 0) B (0 ; 3 ; 0) C (3 ; 3 ; 0)
D (3 ; 0 ; 0) E (0 ; 0 ; 3) F (0 ; 3 ; 3)
G (3 ; 3 ; 3) H (3 ; 0 ; 3)

- 15 Les coordonnées de I et G sont :

I (45° Sud ; 10° Ouest) et G (50° Nord ; 120° Ouest).

F est sur la même latitude que G et sur la même longitude que I donc les coordonnées de F sont (50° Nord ; 10° Ouest).

H est sur la même latitude que I et sur la même longitude que G donc les coordonnées de H sont (45° Sud ; 120° Ouest).

Problèmes

22 Boite de chocolats

Cet exercice permet de travailler l'utilisation d'une formule pour calculer un volume, l'effet d'une réduction, ainsi que la notion de pourcentage.

1. Le volume d'une pyramide est donnée par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire d'une base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{30 \times 30 \times 18}{3} = 5\,400 \text{ cm}^3.$$

2. EFGH est un carré. C'est une réduction de la base ABCD de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Son côté mesure donc $30 \times \frac{1}{3} = 10 \text{ cm}$.

3. Par une réduction de rapport $\frac{1}{3}$, les volumes sont multipliés par $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{SEFGH} = \mathcal{V}_{SABCD} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 5\,400 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 200 \text{ cm}^3.$$

$$\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \mathcal{V}_{SABCD} - \mathcal{V}_{SEFGH}$$

$$\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 5\,400 - 200 = 5\,200 \text{ cm}^3$$

Le volume contenant les chocolats est égal à $5\,200 \text{ cm}^3$.

4. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

$$\mathcal{V}_{\text{un chocolat}} = 3 \times 2 \times 1,5 = 9 \text{ cm}^3.$$

60 % du volume du récipient est occupé par des chocolats

$$\text{soit } 5\,200 \times \frac{60}{100} = 3\,120 \text{ cm}^3.$$

$3\,120 \div 9 \approx 346$. La boîte contient environ 346 chocolats.

23 Tatouage

Coup de pouce : chercher le sens de 1' et de 1".

1. $1^\circ = 60'$ et $1' = 3\,600''$ ($1' = 1 \text{ min}$ et $1'' = 1 \text{ s}$)

Cela signifie que la latitude du lieu est :

$$22 + \frac{40}{60} + \frac{26}{3\,600} \approx 22,674^\circ \text{ Sud}$$

et que la longitude est $14 + \frac{31}{60} + \frac{40}{3\,600} \approx 14,528^\circ \text{ Est}$.

2. Les parallèles étant gradués de $15'$ en $15'$, tout comme les méridiens, on trouve que cet enfant est né sur le continent africain.

24 Courbes de niveau

Cet exercice fait le lien entre les sections par un plan et les courbes de niveau.

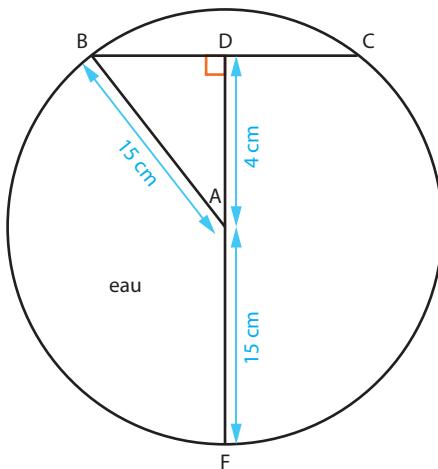
Il permet de visualiser et de donner du sens aux sections de solide par un plan.

- A ⑥ B ① C ③ D ⑤ E ④ F ②

25 Sammy's fish

Coup de pouce : représenter la situation.

1. La forme de la surface de l'eau est un disque.



2. Le triangle BDA est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$15^2 = 4^2 + BD^2$$

$$225 = 16 + BD^2$$

$$BD^2 = 225 - 16$$

$$BD^2 = 209$$

$$BD = \sqrt{209} \approx 14,5 \text{ cm}$$

Le rayon du disque que forme la surface de l'eau est proche de 14,5 cm.

26 L'aquarium

1. On remplace dans la formule donnée h par 19,2 et R par 12.

Le volume de cet aquarium est :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 19,2^2}{3} \times (3 \times 12 - 19,2) \approx 6\,485 \text{ cm}^3.$$

2.

Coup de pouce : quelle est la forme occupée par l'eau ?

$$6 \text{ L} = 6\,000 \text{ cm}^3$$

L'eau prend la forme d'un pavé droit, dont le volume est donné par la formule $\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$.

Soit h la hauteur de l'eau dans le récipient (en cm), le volume de l'eau est égal à $6 \times 24 \times h$.

On a alors $\mathcal{V} = 26 \times 24 \times h = 6\,000$

$$\text{Donc } h = \frac{6\,000}{26 \times 24} \approx 9,6 \text{ cm.}$$

La hauteur de l'eau dans le récipient est proche de 9,6 cm.

La hauteur de l'eau peut également être trouvée par tâtonnements.

27 Cocktail

Cet exercice permet de travailler sur l'effet d'une réduction sur un volume ; le coefficient de réduction étant ici variable. Les questions 1. et 2. a. et 2. b. peuvent être traitées sans tableur.

La question 2. c. nécessite l'utilisation d'un tableur. La question 3. nécessite l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

1. a. Le rapport de la réduction est $k = \frac{SN}{SO} = \frac{x}{10}$.

- b. Le volume d'un cône est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire d'une base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\mathcal{V}_{\text{verre}} = \frac{\pi \times 4^2 \times 10}{3} = \frac{160\pi}{3} \approx 168 \text{ cm}^3$$

Par une réduction de rapport $\frac{x}{10}$, les volumes sont multipliés par $\left(\frac{x}{10}\right)^3$.

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{liquide}} = \frac{160\pi}{3} \times \left(\frac{x}{10}\right)^3 = \frac{16\pi}{300} x^3 \approx 0,168x^3 \text{ cm}^3.$$

2. a. Dans B2, il faut saisir la formule «=0,168*A2*A2*A2» ou «=(16*PI()*(A2^3)/300)».

b.

	A	B
	x hauteur du liquide (en cm)	V volume du liquide (en cm ³)
1		
2	0	0
3	1	0,167551608
4	2	1,340412866
5	3	4,523893421
6	4	10,72330292
7	5	20,94395102
8	6	36,19114737
9	7	57,47020161
10	8	85,78642339
11	9	122,1451224
12	10	167,5516082

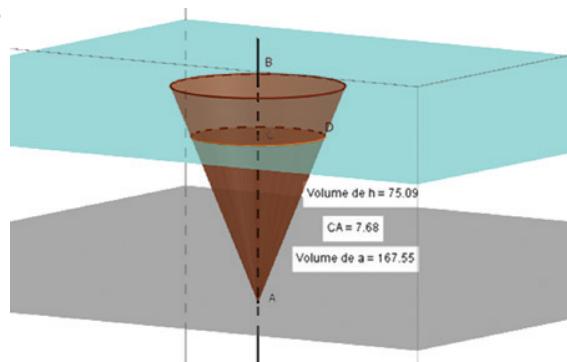
Grâce aux lignes 9 et 10, on lit que la hauteur doit être comprise entre 7 et 8 cm. Ce sont les lignes pour lesquelles la valeur du volume du liquide (colonne B) est la plus proche de 75 cm^3 .

- c. On modifie le contenu de la colonne A en faisant varier la hauteur entre 7 et 8 cm, de 1 mm en 1 mm, on trouve que la hauteur du liquide est proche de 7,6 cm.

A	B
x hauteur du liquide (en cm)	V volume du liquide (en cm ³)
1	
2	7
3	7,1
4	7,2
5	7,3
6	7,4
7	7,5
8	7,6
9	7,7
10	7,8
11	7,9
12	8

On lit ce résultat sur la ligne 8 pour laquelle le volume du liquide (colonne B) est le plus proche de 75 cm^3 .

3.



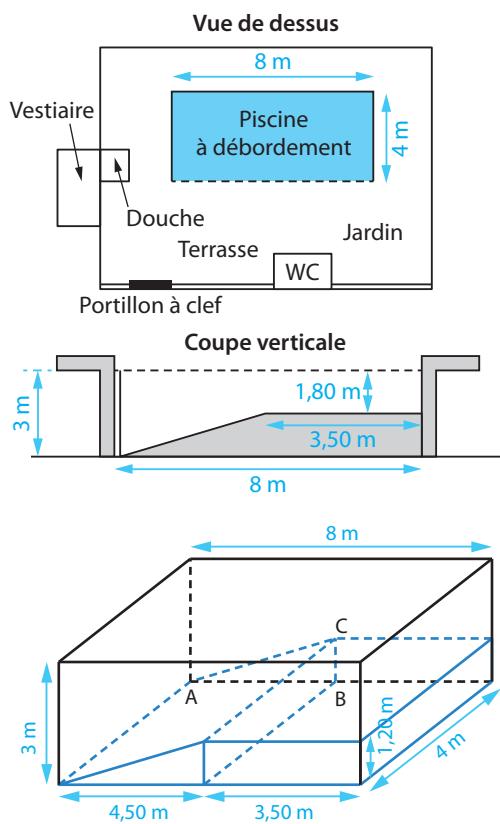
On retrouve le même résultat : la hauteur est proche de 7,7 cm.

Pour cela, il faut tracer le premier cône de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm, puis le couper par un plan perpendiculaire à son axe passant par un point C situé sur cet axe. Tracer le cône représentant le liquide. Faire afficher la hauteur et le volume de ce cône, ainsi que le volume du verre.

28

Piscine à débordement

Coups de pouce : chercher le volume de la piscine vide (pavé droit auquel on a enlevé deux solides), représenter le prisme gris.



Le volume de la piscine est égal au volume du pavé droit C auquel on soustrait le volume d'un prisme droit A à base triangulaire (triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $8 - 3,5 = 4,5 \text{ m}$ et $3 - 1,8 = 1,2 \text{ m}$) et de hauteur 4 m et d'un pavé droit B de longueur 3,5 m, de largeur 1,20 m et de hauteur 4 m.

Le volume du pavé droit (piscine totale) est donné par la formule $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$.

Le volume du pavé droit C est égal à $8 \times 4 \times 3 = 96 \text{ m}^3$.

Le volume du prisme droit à base triangulaire A est égal au volume de la moitié d'un pavé droit de longueur 4,5 m, de largeur 1,2 m et de hauteur 4 m soit $\frac{4,5 \times 1,2 \times 4}{2} = 10,8 \text{ m}^3$.

Le volume du pavé droit B de longueur 3,5 m, de largeur 1,20 m et de hauteur 4 m est égal à $3,5 \times 1,2 \times 4 = 16,8 \text{ m}^3$.

Donc le volume d'eau dans la piscine est égal à :

$$96 - (10,8 + 16,8) = 96 - 27,6 = 68,4 \text{ m}^3$$

Il faut donc $7 \times 10 = 70$ pastilles, soit $70 \times 20 = 1400 \text{ g} = 1,4 \text{ kg}$ de chlore.

Les pots étant des pots de 1 kg, il faut acheter 2 pots de chlore.

29

Crème au caramel

1. Le volume d'une boule est donné par la formule :

$$V = \frac{4\pi \times \text{rayon}^3}{3}$$

Il faut calculer ici le volume d'une demi-boule de rayon

$$5 \text{ cm} : V_{1/2 \text{ boule}} \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \right) \div 2 \approx 262 \text{ cm}^3$$

Le volume de la crème contenue dans une coupe est d'environ 262 cm³.

2.

Coup de pouce : quelle est la forme occupée par la crème ?

La crème prend la forme du récipient, c'est-à-dire d'un pavé droit de longueur 9 cm, de largeur 7 cm et de hauteur h (en cm).

Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

Donc le volume de la crème est égal à $9 \times 7 \times h (\text{cm}^3)$.

$$\text{Donc } V_{\text{crème}} = 9 \times 7 \times h = 63$$

$$h = 262 \div 63$$

$$h \approx 4,2 \text{ cm}$$

La hauteur de crème dans la verrine est d'environ 4,2 cm.

On peut faire remarquer aux élèves que la hauteur du récipient (6 cm) est bien supérieure et donc que la crème ne déborde pas !

La hauteur de la crème peut également être trouvée par tâtonnements.

30

Des glaçons

Le volume d'un cube est donné par la formule :

$$V = \text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}$$

$$V_1 \text{ glaçon} = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ cm}^3$$

$$V_5 \text{ glaçons} = 5 \times 27 = 135 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{eau}} = 135 - 135 \times \frac{11}{100} = 120,15 \text{ cm}^3$$

Soit h la hauteur de l'eau en cm.

Le volume de l'eau dans le verre a la forme d'un cylindre de révolution de rayon 4 cm et de hauteur h .

Le volume d'un cylindre est donné par la formule :

$$V = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

Donc le volume de l'eau est égal à $\pi \times 4^2 \times h \text{ cm}^3$.

Par conséquent $\pi \times 4^2 \times h = 120,15$ donc $h = \frac{120,15}{16\pi} \approx 2,4 \text{ cm}$.

Il y avait 2,4 cm d'eau environ dans le verre quand elle a versé l'eau gazeuse.

31

À vol d'oiseau

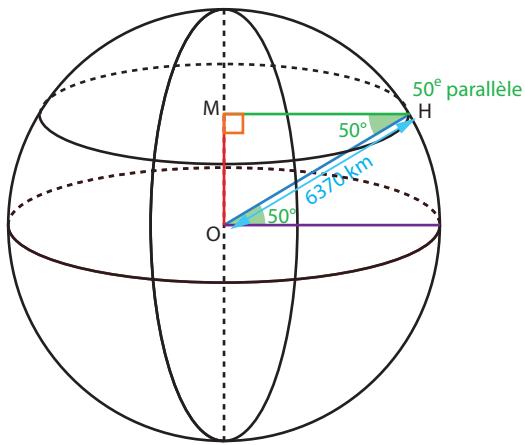
1.

Exercice qui nécessite une représentation et une bonne compréhension de la situation.

Coup de pouce : déterminer le rayon du 5^e parallèle puis sa longueur.

Kiev et Lille ont la même latitude : ces deux villes sont donc situées sur le même parallèle : le 50^e parallèle Nord.

Il faut d'abord déterminer le rayon de ce parallèle.



Dans OHM rectangle en M : $\cos \widehat{MHO} = \frac{MH}{OH}$.

Faire remarquer que OH = 6 370 km car c'est un rayon de la Terre.

$$\cos 50^\circ = \frac{MH}{6\ 370}$$

Donc MH = $6\ 370 \times \cos 50^\circ \approx 4\ 095$ km.

Le rayon du 50^e parallèle mesure environ 4 095 km.

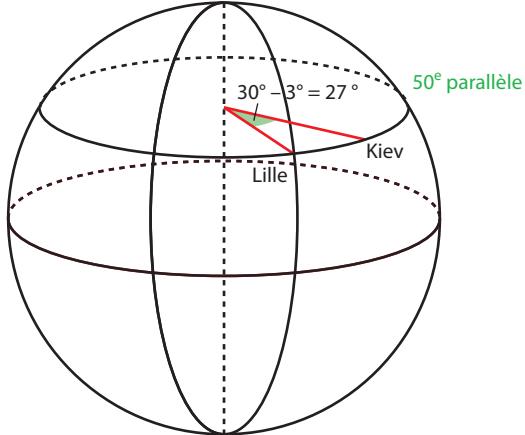
Rappeler la formule qui permet de calculer la circonference d'un cercle : $2 \times \pi \times \text{rayon}$.

La moitié de la circonference du 50^e parallèle mesure environ $\pi \times 4\ 095 \approx 12\ 865$ km.

Il y a proportionnalité entre l'angle et la distance.

Angle (en °)	30 – 3 = 27	180
Distance (en km)	x	12 865

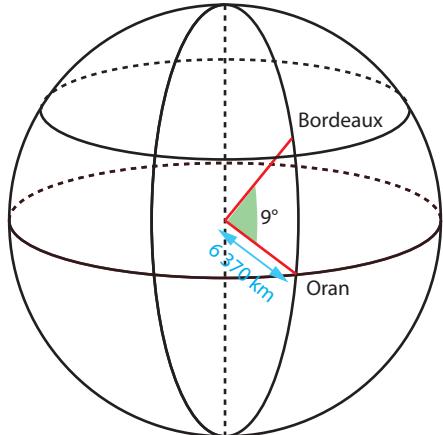
Les deux villes sont séparées d'un angle de $30^\circ - 27^\circ = 3^\circ$.



$$x = \frac{27 \times 12\ 865}{180} \approx 1\ 930$$

Entre Kiev et Lille, il y a environ 1 930 km à vol d'oiseau.

2. Bordeaux et Oran sont situées sur le même méridien car elles ont la même longitude.



Cette situation est plus simple car il faut faire remarquer que :

– tous les parallèles n'ont pas la même longueur ;

– tous les méridiens ont la même longueur.

Attention : un méridien est un demi-cercle !

La longueur d'un méridien est $6\ 370 \times \pi \approx 20\ 012$ km.

Il y a proportionnalité entre l'angle et la distance.

Angle (en °)	44 – 35 = 9	180
Distance (en km)	y	20 012

$$y = \frac{9 \times 20\ 012}{180} \approx 1\ 001$$

Entre Bordeaux et Oran, il y a environ 1 001 km à vol d'oiseau.

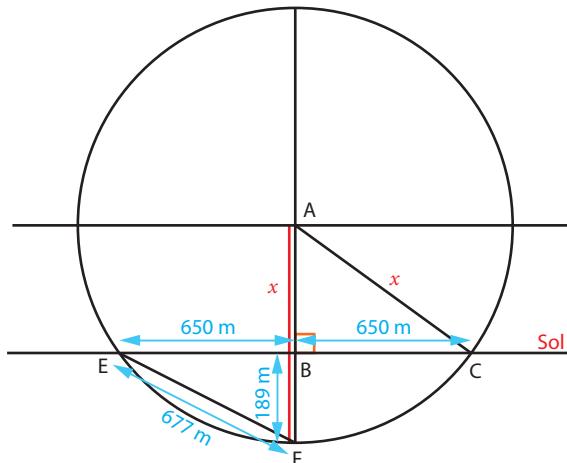
32 Meteor Crater

1.

Coups de pouce : faire un dessin, déterminer d'abord la profondeur du trou et résoudre une équation.

Soit x le rayon théorique de la météorite en mètres.

On appellera le rayon théorique le rayon obtenu par calcul correspondant à une situation modélisée des facteurs ou paramètres extérieurs pouvant contredire cette modélisation (qui est une situation « idéale »).



Le triangle EBF est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $EF^2 = EB^2 + BF^2$

$$677^2 = 650^2 + BF^2$$

$$BF^2 = 677^2 - 650^2$$

$$BF = \sqrt{677^2 - 650^2} \approx 189 \text{ m.}$$

La profondeur du trou est d'environ 189 m.

Le triangle ABS est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$x^2 = (x - 189)^2 + 650^2$$

$$\text{Donc } x^2 - 378x + 35\ 751 + 422\ 500, \text{ soit } 378x = 45\ 822.$$

$$\text{Donc } x = \frac{45\ 822}{378} \approx 1\ 212 \text{ m.}$$

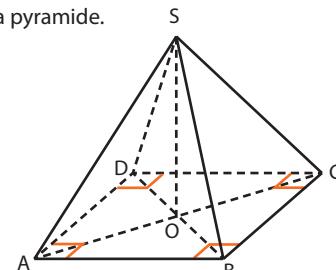
Le diamètre théorique de la météorite est de 2 424 m environ.

2. La différence très importante est due au souffle de l'impact qui a créé un cratère bien plus grand que la météorite elle-même. La modélisation effectuée ne tenant pas compte de cela n'est donc pas valide.

33 Au Louvre !

Cet exercice permet d'apprendre à bien se repérer et à visualiser dans l'espace, en particulier repérer dans quel plan travailler. Il permet de réinvestir les formules de calcul de volumes, le théorème de Pythagore, l'effet d'une réduction et la trigonométrie.

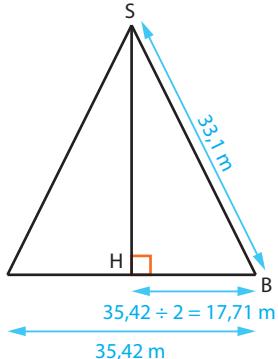
On représente d'abord la pyramide.



1.

Coup de pouce : trouver la hauteur d'une face latérale.

On représente une face latérale.



Le triangle SHB est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore : $SB^2 = SH^2 + HB^2$

$$33,1^2 = SH^2 + 17,71^2$$

$$SH^2 = 33,1^2 - 17,71^2$$

$$SH = \sqrt{33,1^2 - 17,71^2} \approx 27,96 \text{ m}$$

La hauteur d'une face latérale est d'environ 27,96 m.

L'aire d'un triangle est donnée par la formule :

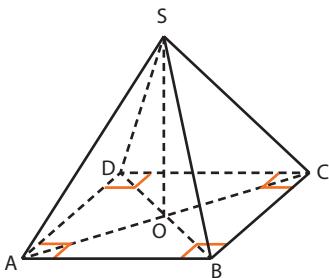
$$\mathcal{V} = \frac{\text{côté} \times \text{hauteur relative}}{2}$$

La surface vitrée des 4 faces latérales est :

$$S_{\text{surface latérale}} = 4 \times \frac{35,42 \times 27,96}{2} \approx 1981 \text{ m}^2$$

2.

Coup de pouce : trouver la longueur d'une diagonale de la base carrée, puis la hauteur de la pyramide.



Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 35,42^2 + 35,42^2$$

$$AC = \sqrt{35,42^2 + 35,42^2} \approx 50 \text{ m.}$$

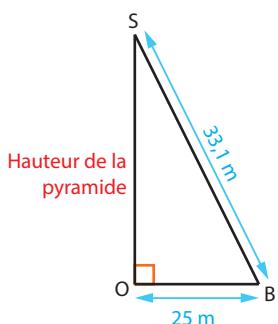
La diagonale du Carré de la base mesure :

$$\sqrt{35,42^2 + 35,42^2} \approx 50 \text{ m.}$$

La moitié de la diagonale est donc égale à environ 25 m.

$OB \approx 25 \text{ m.}$

On calcule maintenant la hauteur de la pyramide.



Le triangle SOB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore : $SB^2 = SO^2 + OB^2$

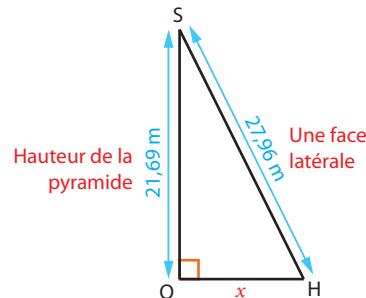
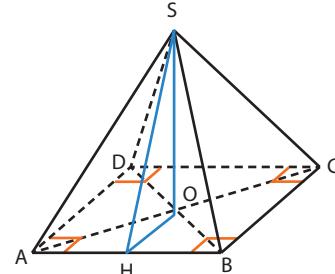
$$33,1^2 = SO^2 + 25^2$$

$$SO^2 = 33,1^2 - 25^2$$

$$SO = \sqrt{33,1^2 - 25^2} \approx 21,69 \text{ m.}$$

La hauteur de la pyramide mesure environ 21,69 m.

On travaille à présent dans le triangle SOH rectangle en O.



Le triangle SOH est rectangle en O.

$$\sin \widehat{H} = \frac{SO}{SH}$$

$$\sin x = \frac{21,69}{27,96}, \text{ soit } x \approx 1^\circ.$$

L'angle d'inclinaison d'une face latérale par rapport à l'horizontale est d'environ 51° .

3. La hauteur de la pyramide du Louvre mesurant 21,69 m, celle de la pyramide de Khéops mesure $21,69 \times 6,7 \approx 145 \text{ m.}$

4. Par une réduction de rapport $\frac{1}{6,7}$, les volumes

sont multipliés par $\left(\frac{1}{6,7}\right)^3 = \frac{1}{300}$ donc on peut mettre

300 pyramides du Louvre dans la pyramide de Khéops.

5. Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Par une réduction de rapport k , les volumes sont multipliés par k^3 .

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{pyramidion}} = \mathcal{V}_{\text{pyramide du Louvre}} \times k^3.$$

$$\text{Donc } 97 = \frac{35,42 \times 35,42 \times 21,69}{3} \times k^3 \text{ donc } 9070 \times k^3 = 97.$$

En procédant par essais successifs, on trouve que $k \approx 0,22$. La pyramide du Louvre a pour hauteur 21,69 m donc un pyramidion a pour hauteur $0,22 \times 21,69 \approx 4,8 \text{ m.}$

Brevet

34 Moule à muffins

1. Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\mathcal{V}_{\text{grand cône}} = \frac{3,75^2 \times \pi \times 12}{3} \approx 176,7 \text{ cm}^3.$$

Le petit cône qu'on enlève au grand est une réduction de rapport $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ du grand cône.

Par une réduction de rapport $\frac{2}{3}$, les volumes sont multipliés par $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{petit cône}} = \mathcal{V}_{\text{grand cône}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{\text{petit cône}} \approx 176,7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 52,4 \text{ cm}^3.$$

Donc le volume d'une cavité est :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{grand cône}} - \mathcal{V}_{\text{petit cône}} = 176,7 - 52,4 \approx 125 \text{ cm}^3.$$

2. Léa a préparé 1 L = 1 000 cm³ de pâte.

Chaque cavité contient $125 \times \frac{3}{4} = 93,75$ cm³ de pâte.

$93,75 \times 9 = 843,75$ cm³ = 0,843 L de pâte sont nécessaires :
Léa a donc assez de pâte.

35 Piscine à rénover

1. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :
 $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$.

Le volume de la piscine est de $10 \times 4 \times 1,2 = 48$ m³.

En 4 h, $4 \times 14 = 56$ m³ s'écoulent : la piscine sera donc vide en moins de 4 h.

Ou : $48 \div 14 = 3,4$ h = 3 h 24 min ; il faut donc moins de 4 h pour vider la piscine.

2. La surface intérieure de la piscine (les 4 faces latérales et le sol) est de $10 \times 1,2 \times 2 + 4 \times 1,2 \times 2 + 4 \times 10 = 73,6$ m².

Il faut donc $73,6 \div 6 \approx 12,3$ litres de peinture pour repeindre la surface intérieure.

Il faut deux couches donc $12,3 \times 2 = 24,6$ litres.

Il faudra donc 9 seaux soit un montant à payer de $9 \times 69,99 = 629,91$ €.

36 Les gélules

1. La longueur L de la gélule est de $16,6 + 9,5 = 26,1$ mm.
C'est donc un calibre 000.

2. Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule :
$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$
.

Le volume d'une boule est donné par la formule :

$$V = \frac{4 \times \pi \times \text{rayon}^3}{3}$$
.

$$V_{\text{gélule}} = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{boule}}$$

$$V_{\text{gélule}} = \pi \times 4,75^2 \times 16,6 + \frac{4}{3} \pi \times 4,75^3 \approx 1\,626 \text{ mm}^3$$
.

3. Robert a donc pris $3 \times 6 \times 1\,626 = 29\,268$ mm³ d'antibiotique, soit $29\,268 \times 6,15 \times 10^{-4} \approx 18$ g d'antibiotique.

Algorithmique et outils numériques

37 Ça déborde !

1. Le script complété est :



Les variables créées sont :

- « h » : la hauteur de l'eau dans la bouteille (en cm) ;
- « Vol eau » : le volume d'eau dans la bouteille (en cm³) ;
- « Vol verre » : le volume du verre (en cm³) .

2. Arthur a trouvé 38,48 en calculant l'aire de la base de la bouteille :

Aire de la base = $\pi \times \text{rayon}^2$, le rayon étant de 3,5 cm.

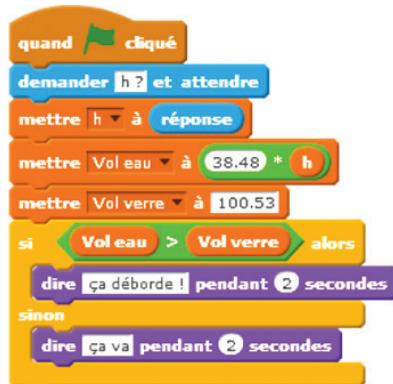
Aire de la base = $\pi \times 3,5^2 \approx 38,48$ cm².

3. Le volume du verre est égal à :

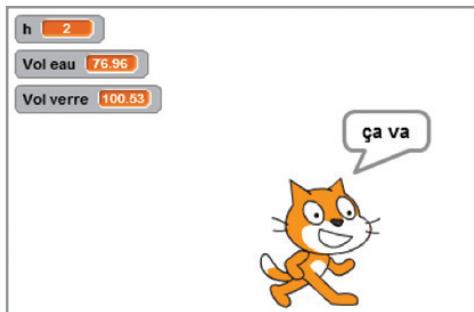
$$V = \frac{\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}}{3}$$
,

soit $V = \frac{\pi \times 4^2 \times 6}{3} = 32\pi \approx 100,53$ cm³.

Il faut donc compléter :



4. On fait plusieurs essais pour h .



Si $h = 2$, le message est « ça va ».

Si $h = 3$, le message est « ça déborde ! ».

h est donc compris entre 2 et 3.



Si $h = 2,5$, le message est « ça va ».

Si $h = 2,7$, le message est « ça déborde ! ».



Si $h = 2,6$, le message est « ça va ».
On peut donc verser dans le verre une hauteur d'eau allant jusqu'à 2,6 cm.

On peut, par exemple, demander de vérifier ce résultat par le calcul, en prolongement.

h doit vérifier :

$$\pi \times 3,5^2 \times h = \frac{\pi \times 4^2 \times 6}{3}$$

Soit $12,25h = 32$

$h = 32 \div 12,25 \approx 2,6$ cm

38 Pâte à modeler

1. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

Donc le volume en cm^3 du pavé droit de pâte à modeler est égal à $1,2 \times 1,2 \times \text{longueur de la pâte à modeler}$ (en cm).

Dans la cellule B2, il faut donc saisir la formule = $1,2 * 1,2 * A2$.

2. Le volume du cylindre est $V = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$, soit $V = \pi \times 1 \times 1 \times 6 = 6\pi \approx 18,85 \text{ cm}^3$.

On cherche donc la valeur dans la colonne A pour laquelle le volume écrit dans la colonne B est le plus proche de $18,85 \text{ cm}^3$.

A	B
Longueur de la pâte à modeler en forme de pavé droit (en cm)	Volume du pavé droit de pâte à modeler (en cm^3)
1	0
2	0
3	1,44
4	2,88
5	4,32
6	5,76
7	7,2
8	8,64
9	10,08
10	11,52
11	12,96
12	14,4
13	15,84
14	17,28
15	18,72
16	20,16
17	21,6
18	23,04
19	24,48
20	25,92

D'après la ligne 15, on trouve que la longueur du pavé droit qui sortira de la seringue aura une longueur proche de 13 cm.

On peut, par exemple, demander de vérifier ce résultat par le calcul, en prolongement.

Soit L la longueur de la pâte à modeler.

L doit vérifier :

$$1,2 \times 1,2 \times L = 6\pi$$

Soit $1,44L = 6\pi$

$$L = 6\pi \div 1,44$$

$$L \approx 13,1 \text{ cm}$$

39 Fabrication d'une verrine

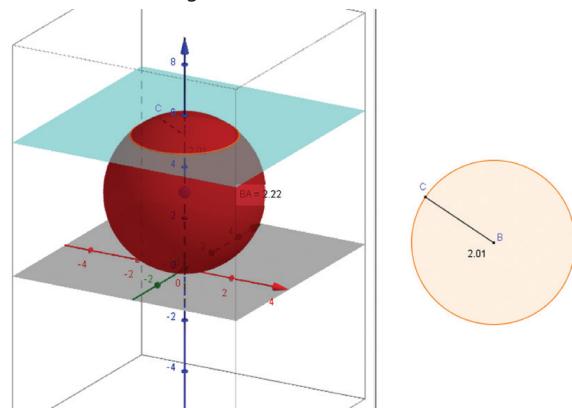
Il faut d'abord placer un point A (par exemple, sur l'axe des cotes), puis tracer la sphère de centre A et de rayon 3 cm.

Placer ensuite un point B sur l'axe des cotes, tracer (AB) puis le plan passant par B et perpendiculaire à (AB).

Tracer l'intersection de ce plan et de la sphère. Afficher sa vue 2D en cliquant droit sur l'objet et en sélectionnant « Créer une

vue 2D » de l'objet.

Tracer un rayon de ce cercle et afficher sa longueur. Déplacer ensuite le point B sur l'axe des cotes jusqu'à ce que la longueur du rayon de la section précédemment tracée soit égale à 2 cm. Faire afficher la longueur AB.



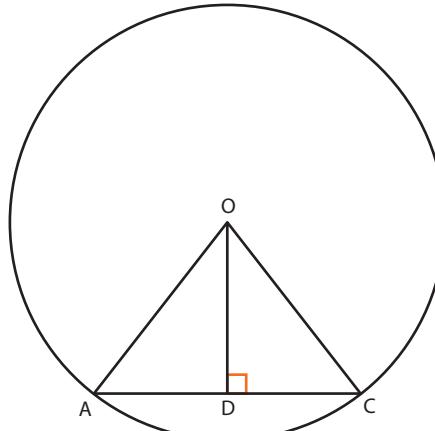
On trouve une valeur de AB proche de 2,22 cm pour que le rayon de l'ouverture soit de 4 cm.

La hauteur de la verrine est alors proche de $3 + 2,22 = 5,22$ cm.



Deux énoncés pour un exercice

Exercice 1



AC = 28 m, OA = 18 m. Le triangle AOD est rectangle en D.
On utilise le théorème de Pythagore pour trouver OD :

$$AD^2 = OD^2 + AD^2$$

$$\text{Donc } OD^2 = AD^2 - AD^2 = 18^2 - 14^2 = 128$$

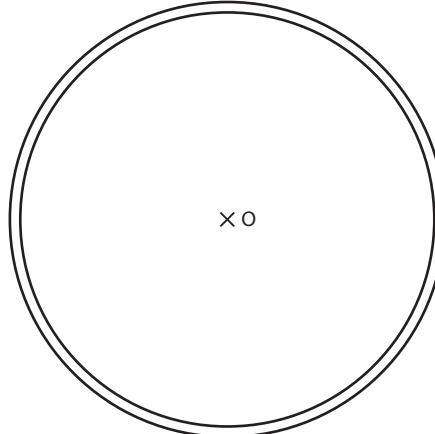
$$OD = \sqrt{128} \text{ m}$$

$$OD \approx 11,3 \text{ m}$$

$$18 + 11,3 = 29,3 \text{ m}$$

La hauteur de la géode est d'environ 29,3 m.

Exercice 1



Le volume d'une boule est donné par la formule :

$$V = \frac{4 \times \pi \times \text{rayon}^3}{3}$$

$$V_{\text{sphère extérieure}} = \frac{4}{3} \pi \times 9^3 \approx 3\,054 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{sphère intérieure}} = \frac{4}{3} \pi \times (9 - 0,03)^3 \approx 3\,023 \text{ m}^3$$

$$3\,054 - 3\,023 = 31 \text{ m}^3$$

Le volume de l'acier représente environ 31 m^3 .

La masse volumique de l'acier étant de $7\,850 \text{ kg/m}^3$, on calcule :

$$31 \times 7\,850 = 243\,350 \text{ kg.}$$

La masse d'une sphère est de 243 tonnes environ.

Exercice 2

1. Le triangle NMF est un triangle rectangle en F.

$$A_{FNM} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Volume de la pyramide :

$$V_{BMFN} = \frac{1}{3} \times A_{FNM} \times h = 4 \text{ cm}^3$$

3. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule :

$$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur.}$$

Volume du pavé :

$$V_{\text{pavé}} = 10 \times 12 \times 3 = 360 \text{ cm}^3.$$

$$V_{\text{pavé sans les pyramides}} = 360 - 4 \times 4 = 344 \text{ cm}^3.$$

Le volume du solide obtenu est de 344 cm^3 .

Exercice 2

Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times \frac{2,5 \times 2,5}{2} \times 2,5 \approx 2,6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cube}} = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

Pour calculer le volume du solide obtenu, on enlève le volume des 8 pyramides au volume du cube :

$$V_{\text{solide}} \approx 125 - 8 \times 2,6$$

$$V_{\text{solide}} \approx 104,2 \text{ cm}^3$$

Le solide obtenu a un volume d'environ $104,2 \text{ cm}^3$.

Analyse d'une production

- Mahel s'est trompé dans son calcul du coefficient de réduction (il a calculé le coefficient d'agrandissement ; le coefficient de réduction est son inverse) et dans la formule pour calculer le volume d'un cône (il a oublié de diviser par 3).
- Leila a juste dans ses calculs. Elle s'est juste trompée dans l'unité du résultat final : il s'agit de cm^3 et non de cm^2 .
- Dorian a oublié de mettre le coefficient de réduction à la puissance 3 puisque c'est un volume.
- Amel a juste.

Introduction

Objectifs des chapitres 46 et 47

Ce chapitre permet d'aborder l'ensemble des attendus de fin de cycle du thème « Algorithmique et programmation ». La progression retenue sur le cycle est de découvrir l'ensemble de ces notions dès le début du cycle et de les approfondir de façon progressive tout au long du cycle. Cette approche est nécessaire si l'on veut proposer aux élèves des activités motivantes, riches sur le plan du raisonnement, et qui s'inscrivent dans une démarche de projet. À cette fin, les élèves ont rapidement besoin des notions de variables, de boucles et d'instructions conditionnelles.

Le logiciel Scratch permet d'aborder ces notions rapidement et simplement. Il est de plus très proche du langage naturel. L'ensemble des activités peuvent donc être menées avec ce logiciel, qui permettra de mettre en œuvre des projets ambitieux de façon très accessible. Il permet ainsi de se dispenser d'un travail de rédaction d'algorithme sur papier et en langage naturel qui peut sembler abstrait et peu motivant aux élèves.

Les activités

Ce chapitre propose six activités qui permettent une première approche de l'ensemble des attendus de fin de cycle. Ces notions seront reprises et approfondies dans d'autres activités disponibles sur le manuel numérique :

- L'activité *À la découverte de Scratch* propose une prise en main du logiciel Scratch et de quelques-unes de ses fonctionnalités essentielles.
- L'activité *Des programmes de calcul* propose un travail sur la notion de variable informatique en lien avec des programmes de calcul. Elle permet également de réinvestir des connaissances simples sur le calcul numérique.
- L'activité *Construction de figures* porte sur la construction de figures. Elle permet de découvrir l'ensemble des commandes nécessaires au déplacement du lutin sur la « scène », très utiles pour la réalisation des projets. Elle permet également de réinvestir des connaissances en géométrie.
- L'activité *Répétition générale* porte sur les structures itératives (les boucles). Des boucles très simples ont pu être découvertes dans les trois premières activités, mais cette activité 4 permet d'approfondir la question, en remobilisant la notion de variable.
- L'activité *Un jeu de balle* permet de s'initier à la programmation évènementielle (script déclenché par un évènement) et aux structures conditionnelles (Si... alors... sinon...). Cette activité a comme support la création d'un petit jeu très simple. Il peut être considéré comme une activité préparatoire à la réalisation de projets plus ambitieux.
- L'activité *Le multiplicato* porte sur les structures itératives (les boucles) et conditionnelles (si... alors...). Des boucles très simples ont pu être découvertes dans d'autres activités mais cette activité permet d'approfondir la question, en remobilisant la notion de variable. Le support de cette activité est la programmation d'un petit jeu mobilisant les tables de multiplication.
- L'activité *Expériences aléatoires* porte enfin sur les nombres aléatoires et l'utilisation de la programmation en lien avec

les notions de probabilités du programme. Elle remobilise également les boucles et les instructions conditionnelles.

Ces activités ont vocation à être traitées en autonomie par l'élève, par exemple en salle informatique. L'énoncé propose des questions qui amènent l'élève à s'interroger et à construire les notions à travers des exemples simples au début et qui se complexifient progressivement. Les indications données permettent une certaine autonomie de l'élève face à l'outil sans pour autant brider sa créativité et sa réflexion. L'objectif est ici de travailler les compétences du programme, notamment les compétences « chercher » et « raisonner ». Pour autant, en cas de difficulté d'accès à un matériel informatique, ces activités peuvent également être traitées en partie avec un vidéoprojecteur et en partie en autonomie par les élèves (à la maison, par exemple).

Ces activités ont également été conçues de façon à prendre en compte l'hétérogénéité des élèves. Elles débutent par des questions simples accessibles à tous qui permettent une approche rapide des notions fondamentales. Petit à petit, les questions approfondissent les notions abordées et les activités se terminent par une rubrique « Pour aller plus loin », qui permet de garder en activité les élèves les plus rapides et comporte parfois des questions difficiles. Chacun peut ainsi avancer à son propre rythme et ces activités n'ont pas nécessairement à être traitées en intégralité par tous les élèves. On peut parfaitement fixer un temps de travail (1 heure ou 2 heures, par exemple) sur une activité et s'arrêter même si certains élèves ne l'ont pas terminée.

Les projets

Enfin, le chapitre 47 propose six projets qui mobilisent l'ensemble des attendus de fin de cycle. L'objectif est ici de proposer aux élèves un travail motivant et riche sur le plan du raisonnement. Ces projets sont simples et peuvent être menés assez rapidement. Quelques heures sur chaque projet peuvent s'avérer suffisantes avec des élèves déjà rôdés à l'utilisation de Scratch. Ces projets proposent, comme les activités, une rubrique « Pour aller plus loin » qui permet de prolonger le travail en implémentant des variantes ou de nouvelles fonctionnalités afin de tenir compte de l'hétérogénéité des élèves. Ces variantes, si elles sont traitées dans leur intégralité, demanderont nettement plus de temps et n'ont pas vocation à être traitées avec tous les élèves. Elles peuvent permettre à de bons élèves de rester actifs et d'approfondir leurs compétences. Dans tous les cas, même les élèves les moins performants pourront arriver rapidement à une réalisation concrète et motivante, même s'ils ne vont pas au bout du projet.

Avertissement : pour une plus grande facilité d'utilisation, le manuel numérique qui contient les solutions comporte parfois des fichiers avec plusieurs scripts, qui correspondent chacun à une question : si on clique sur le drapeau vert, tous les scripts vont s'exécuter en même temps et cela peut générer des résultats incohérents. **Pour tester un script en particulier, il faut donc cliquer directement sur le script.**

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'effectuer un premier contact avec le logiciel Scratch. Avant de commencer, on peut présenter aux élèves, rapidement et avec un vidéoprojecteur, l'interface de Scratch et les grands concepts du logiciel, en particulier :

- Scratch est un logiciel qui permet de faire exécuter des commandes à un ou plusieurs lutins.
- Une succession de plusieurs commandes qu'on fait exécuter à un lutin est appelée un script.
- L'interface de Scratch est partagée en plusieurs zones, qu'on pourra montrer.

1 Premiers mouvements

Cette question a pour objectif de faire manipuler l'élève et de lui faire écrire son premier script. Il doit comprendre qu'il existe plusieurs catégories de commandes et qu'on peut les faire glisser vers la droite et les emboîter les unes avec les autres afin de réaliser un script.

c. avancer de 20

2 Une deuxième commande

Cette question a pour objectif de comprendre la notion de script. On pourra faire remarquer que les commandes sont « aimantées » et s'imbriquent les unes dans les autres à la façon d'un puzzle, un ensemble de commandes imbriquées formant un script que l'on peut exécuter en cliquant dessus.

c. dire Bonjour ! pendant 2 secondes

3 Enchaîner des commandes

L'objectif de cette question est de mieux mettre en évidence l'exécution successive de plusieurs commandes, ce que l'on ne voit pas vraiment à la question précédente. On pourra faire remarquer que la commande « reculer » n'existe pas mais qu'on peut faire avancer le lutin d'un nombre négatif. Même si les élèves n'ont pas encore abordé les nombres relatifs, la situation est suffisamment intuitive pour cela ne constitue pas un obstacle.

À propos de la commande **avancer de 50**, on pourra noter que Scratch utilise sa propre unité de longueur qui est telle que la scène est un rectangle de dimensions 480 unités (en largeur) et 360 unités (en hauteur). Les distances correspondantes à l'écran peuvent dépendre de plusieurs paramètres. Il est d'ailleurs possible d'utiliser un mode « petite scène » accessible depuis le menu « Edition ». Avec les élèves, on pourra soit éluder ces questions et ne pas parler d'unité, soit considérer que l'unité de longueur est un « pixel » (contraction de « picture element »), c'est-à-dire un point affiché à l'écran tel que la scène est un rectangle de 480 pixels par 360 pixels.

4 Encore et encore...

L'objectif de cette question est de montrer une utilisation très simple de « boucle infinie ». On pourra ainsi montrer tout l'intérêt qu'il y a à réaliser un programme pour effectuer des actions répétitives et qu'on peut le faire de façon très simple. On pourra également bien mettre en évidence que la commande « répéter indéfiniment » s'imbrique « autour » des commandes qu'elle doit répéter.

On constate que le lutin avance et recule indéfiniment, du moins jusqu'à ce qu'on l'arrête en cliquant à nouveau sur le script.

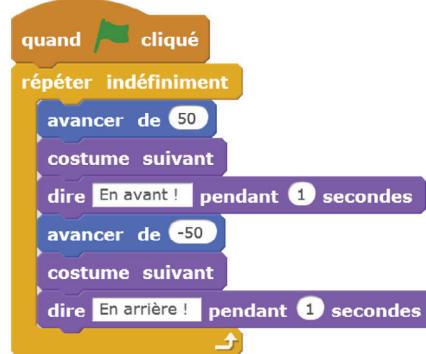
5 Le drapeau vert

Plutôt que de cliquer sur un script pour le démarrer et l'arrêter, il existe des commandes qui permettent de démarrer et d'arrêter plusieurs scripts en même temps. Imbriquer le drapeau vert au début d'un script permet à l'utilisateur de l'exécuter en cliquant sur le drapeau vert. Le bouton rouge permet d'arrêter tous les scripts. Dans les projets, on élaborera bien souvent plusieurs petits scripts qui s'exécuteront en même temps (en parallèle), d'où l'intérêt de ce drapeau vert.

Pour aller plus loin

• Changement d'apparence

Voici un exemple de réponse :



La commande « costume suivant » peut être insérée à d'autres endroits de la boucle.

• Modification de la taille

Cette deuxième question sert à montrer qu'on peut agir sur la taille du lutin, ce qui sera souvent nécessaire dans les projets. On peut cliquer directement sur les commandes et changer les valeurs sans même les déplacer dans la zone des scripts ; on exécute les commandes en cliquant dessus après avoir changé la valeur le cas échéant.

On enlève de la boucle les trois commandes qui font reculer le lutin (pour cela, on clique sur la commande « avancer de -50 » et on fait glisser le bloc des trois commandes vers la zone des commandes). Puis on ajoute la commande « rebondir si le bord est atteint ».



Le lutin ne peut pas « sortir » de la scène. Quand il rencontre un bord, il s'arrête. La commande « rebondir quand le bord est atteint » lui fait exécuter un demi-tour.

Pour aller plus vite, on peut aussi supprimer la commande **dire En avant ! pendant 1 secondes**. On peut aussi proposer aux élèves de modifier l'orientation initiale du lutin avec la commande **tourner ⌂ de 15 degrés** pour observer des déplacements autres qu'horizontaux.

Activités

Des programmes de calcul

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de comprendre et d'utiliser la notion de variable informatique. Il faut notamment faire comprendre une différence fondamentale entre une variable informatique et les lettres utilisées en mathématiques : dans un script, la valeur d'une variable peut changer au fil du temps. En début de cycle, les élèves sont encore peu familiers du calcul littéral. Il est donc naturel que cette différence leur échappe. On pourra en revanche attirer leur attention sur cette distinction quand le calcul littéral sera travaillé.

1 Un premier exemple

a.

Script	Valeurs de la variable « score »
quand  cliqué	
mettre score à 3	→ 3
ajouter à score 2	→ 5
dire score pendant 2 secondes	→ 5

Ce premier exemple très simple sert à mettre en évidence l'évolution de la valeur d'une variable au fur et à mesure de l'exécution d'un script.

b. À la fin du script, le lutin affichera la valeur 5.

On pourra insister sur l'importance de systématiquement initialiser une variable, c'est-à-dire de lui affecter une valeur en début de script.

On pourra également remarquer que la valeur de la variable s'affiche dans la scène et qu'on pourrait se passer de la dernière commande. Il est cependant utile de faire prendre l'habitude aux élèves d'utiliser des commandes de sortie qui affichent le résultat d'un script. On peut supprimer l'affichage des variables sur la scène en décochant la case à gauche de la variable (dans la zone des commandes) ou, à partir d'un clic droit sur l'affichage de la variable dans la scène, cliquer sur « cacher ».

2 Un exemple de programme de calcul

a. Le lutin va afficher la valeur 32.

quand  cliqué	
demandeur Saisir un nombre et attendre	
mettre nombre à réponse	
mettre nombre à nombre * 7	
mettre nombre à nombre - 3	
dire nombre pendant 2 secondes	

Les objectifs de cette question sont :

- montrer comment on peut affecter à une variable une valeur demandée à l'utilisateur du script ;
- comprendre comment changer la valeur d'une variable en utilisant, dans une même commande, l'ancienne et la nouvelle valeur de cette variable :

mettre **nombre** **à** **nombre** **+ 7**

Nouvelle valeur

Ancienne valeur

- commencer à utiliser des opérateurs.

b. Par exemple, si l'utilisateur entre la valeur 12, on obtient 81.

3 D'autres programmes de calcul

a.

- ▶ Choisir un nombre.
- ▶ Ajouter 5 à ce nombre.
- ▶ Multiplier le résultat par 2.
- ▶ Retrancher 3 au résultat.

b.



On pourra faire remarquer que la commande

ajouter à nombre 7

est équivalente à la commande

mettre nombre à nombre + 7.

c. Il faut choisir 9 comme nombre de départ pour avoir 77 comme résultat.

Deux méthodes sont possibles : « remonter » le programme de calcul ou opérer par tâtonnement en exécutant le script. On pourra inciter les élèves qui ont « remonté » le programme de calcul à vérifier leur résultat en exécutant le script.

4 Avec plusieurs variables

a. Il n'est pas possible d'utiliser une seule variable car la dernière étape du programme de calcul fait appel au nombre de départ, qu'on doit donc garder en mémoire dans une variable distincte. On peut donc renommer la variable « nombre » existante en « nombre de départ », puis créer une autre variable appelée « résultat » (on peut aussi créer deux nouvelles variables).

Il est plus facile de comprendre un script quand on donne des noms explicites aux variables, plutôt que d'utiliser de simples lettres a, b...

b.

quand  cliqué	
demandeur Saisir un nombre et attendre	
mettre nombre de départ à réponse	
mettre résultat à nombre de départ + 2	
mettre résultat à résultat * nombre de départ	
ajouter à résultat - 1	
dire résultat pendant 2 secondes	

La difficulté est ici de ne pas confondre les deux variables et de bien identifier leur rôle dans le script.

On pourra insister sur le fait que la variable « résultat » change de valeur à chaque étape du script. Pour des élèves qui ont du mal à le comprendre, on pourra leur faire exécuter ce script « à la main » en indiquant à chaque étape la valeur de chaque variable.

5 Avec une variable non numérique

Cette étape 5 permet de découvrir des variables non numériques. Ce n'est pas une connaissance indispensable pour tous les élèves, sauf si on a l'intention de réaliser un projet faisant appel à ce type de variable.

a. Ce script :

- demande à l'utilisateur de saisir un mot ;
- affiche la première lettre de ce mot ;
- affiche le nombre de lettres de ce mot.

b.



La dernière lettre du mot est la n -ième lettre, où n est le nombre de lettres du mot. Dans le script précédent, il faut donc remplacer 1 par le nombre de lettres du mot, donc par **longueur de mot**.

Pour aller plus loin

a. Pour un mot de n lettres avec n impair, la lettre du milieu est la lettre de rang.



b. Quand n est pair, $\frac{n+1}{2}$ n'est pas entier. Scratch arrondit la valeur à l'entier inférieur et affiche la dernière lettre précédent le « milieu » du mot.

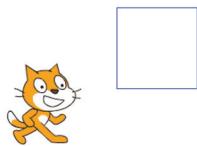
Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est d'étudier les différentes commandes permettant de tracer des figures. Ces activités se prêtent en effet particulièrement bien à des activités de raisonnements et à la remobilisation de notions de géométrie plane (angles, longueurs, repérage). Plus tard dans le cycle, ces notions seront approfondies et permettront de mobiliser les polygones et les transformations.

1 Avancer et tourner

L'objectif de cette première étape est notamment de bien comprendre que le lutin est toujours orienté dans une certaine direction pour tracer un segment.

- a.** Le lutin construit un carré.



La commande **attendre 1 secondes** permet de mieux voir la succession des commandes exécutées.

On peut déplacer le lutin à l'aide de la souris directement sur la scène avant ou après l'exécution d'un script. Il faut toutefois veiller à ce que le lutin ne rencontre pas le bord de la scène au cours de son tracé.

- b. Le lutin trace quatre segments de même longueur en tournant à chaque fois d'un angle droit. Le quadrilatère tracé a donc quatre côtés de même longueur et quatre angles droits : c'est un carré.

C

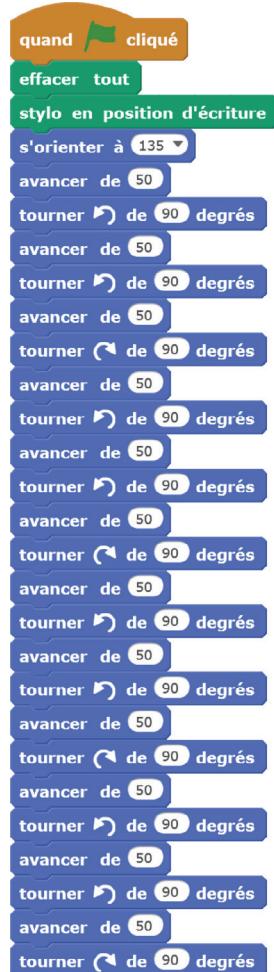


d.

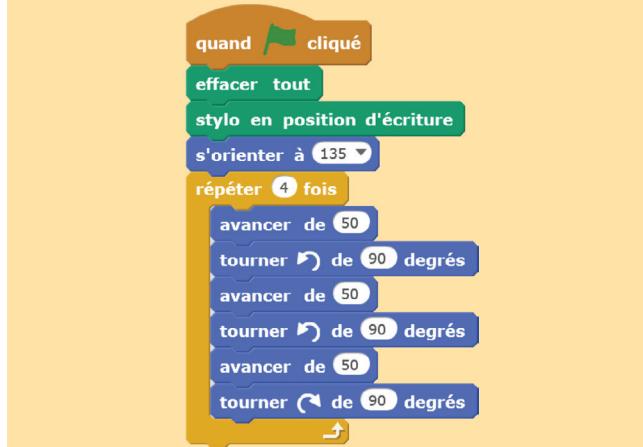


On pourra attirer l'attention des élèves sur la différence entre l'angle du polygone tracé et l'angle dont il faut faire tourner le lutin par rapport à sa direction initiale de tracé.

2 Une autre figure



On pourra éventuellement repérer la séquence d'instructions qui se répète et simplifier l'écriture du script à l'aide d'une boucle :



3 Utiliser les coordonnées pour les déplacements

L'objectif de cette étape est de montrer qu'on peut faciliter certains déplacements en envoyant le lutin vers un point de coordonnées données, indépendamment de sa position initiale. C'est parfois plus pratique que de chercher à connaître la longueur de déplacement et l'angle dont on doit faire tourner le lutin, comme on le verra à l'étape suivante.

b. C'est la commande `aller à x: 0 y: 0`.

4 Des triangles rectangles

Il est ici nécessaire d'utiliser un repère, car les élèves ne disposent pas de connaissances nécessaires pour calculer les longueurs et les angles inconnus. On pourra donc partir du centre du repère. Il existe de nombreuses réponses possibles. En voici une :

```
quand drapeau cliqué
aller à x: 0 y: 0
s'orienter à 90
effacer tout
stylo en position d'écriture
avancer de 50
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de 80
aller à x: 0 y: 0
s'orienter à -90
avancer de 50
tourner ↛ de 90 degrés
avancer de 80
aller à x: 0 y: 0
```

Il est également possible de n'utiliser que les coordonnées :

```
quand drapeau cliqué
aller à x: -50 y: 0
effacer tout
stylo en position d'écriture
aller à x: 50 y: 0
aller à x: 50 y: 80
aller à x: 0 y: 0
aller à x: -50 y: 80
aller à x: -50 y: 0
```

Pour aller plus loin

- a. Il convient ici d'analyser la figure et d'élaborer une stratégie de construction.

Le quadrilatère peut se décomposer en un rectangle de dimensions 80 et 120 et un triangle rectangle isocèle dont deux côtés ont pour longueur 80. On peut utiliser les coordonnées soit pour tous les points, soit pour le point de départ uniquement.

quand drapeau cliqué
aller à x: -50 y: 0
effacer tout
stylo en position d'écriture
aller à x: 50 y: 0
aller à x: 50 y: 80
aller à x: 0 y: 0
aller à x: -50 y: 80
aller à x: -50 y: 0

- b. Il faut d'abord choisir une échelle, par exemple un carreau pour 10 unités de longueur. On peut également considérer que le coin inférieur gauche de la maison est le point de coordonnées (0 ; 0).

Différentes stratégies de construction sont possibles. Pour éviter l'écriture d'un script long et fastidieux, on peut :

- définir un « bloc » qui trace un rectangle de dimensions données (en partant, par exemple, du coin inférieur gauche) ;
- utiliser ce bloc dans le script qui trace la figure complète pour tracer la façade, la porte et les deux fenêtres ;
- terminer par le toit et la cheminée.

```
définir rectangle largeur hauteur
stylo en position d'écriture
s'orienter à 90
avancer de largeur
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de hauteur
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de largeur
tourner ⚡ de 90 degrés
avancer de hauteur
relever le stylo
```

```
quand drapeau cliqué
aller à x: 0 y: 0
effacer tout
rectangle 60 50
aller à x: 30 y: 0
rectangle 10 20
aller à x: 10 y: 30
rectangle 10 10
aller à x: 40 y: 30
rectangle 10 10
aller à x: -10 y: 50
stylo en position d'écriture
aller à x: 70 y: 50
aller à x: 30 y: 90
aller à x: -10 y: 50
relever le stylo
aller à x: 60 y: 60
stylo en position d'écriture
aller à x: 60 y: 80
aller à x: 50 y: 80
aller à x: 50 y: 70
```

Activités

Répetition générale

Intentions des auteurs

Cette activité a pour objectif de se familiariser avec les boucles. On mobilise cette notion d'abord dans un cadre géométrique, puis dans un cadre numérique.

1 Répéter

- a. Le script permet de construire un carré.
b. La succession d'instructions qui est répétée est :

```
avancer de 100
tourner ⚡ de 90 degrés
attendre 1 secondes
```

- c. Elle est répétée 4 fois.

2 Un script plus simple

a.

```
quand ⚡ cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
répéter 4 fois
  avancer de 100
  tourner ⚡ de 90 degrés
  attendre 1 secondes
```

b.

```
quand ⚡ cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
répéter 4 fois
  avancer de 100
  tourner ⚡ de 90 degrés
```

3 De plus en plus de côtés

Le lutin ne peut pas sortir de la scène. Quand il rencontre un bord, il s'arrête. Il faut donc éviter de lui faire rencontrer un bord lors de la construction d'une figure, sans quoi la figure risque d'être incorrecte. On peut remplacer le lutin avec la souris avant de tracer une figure ou ajouter une commande qui replace le lutin au début du script.

a.

```
quand ⚡ cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
répéter 6 fois
  avancer de 100
  tourner ⚡ de 60 degrés
```

On pourra faire remarquer que l'angle dont on doit faire tourner le lutin est égal à 360° divisé par le nombre de côtés du polygone tracé.

b.

```
quand ⚡ cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
répéter 12 fois
  avancer de 50
  tourner ⚡ de 30 degrés
```

Ici, on peut réduire la longueur du côté afin que le lutin ne rencontre pas le bord de la scène.

c.

```
quand ⚡ cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
répéter 100 fois
  avancer de 5
  tourner ⚡ de 3.6 degrés
```

La figure tracée ressemble à un cercle.

4 Des boucles et des nombres

- a. C'est la variable *n*.
b. Au début du script, *n* prend la valeur 0.
c. On ajoute 10 fois la valeur 5 à *n* donc, à la fin du script, *n* vaut 50.
d. Il existe deux façons simples de répondre à la question : on peut soit augmenter le nombre d'itérations de la boucle à 20, soit augmenter *n* de 10 à chacune des 10 itérations :

```
quand ⚡ cliqué
mettre n à 0
répéter 20 fois
  ajouter à n 5
dire n pendant 2 secondes
```



```
quand ⚡ cliqué
mettre n à 0
répéter 10 fois
  ajouter à n 10
dire n pendant 2 secondes
```

e.

La réponse attendue est celle que l'élève n'a pas donnée à la question précédente. Il existe bien sûr d'autres possibilités, une pour chaque diviseur de 100. L'objectif de cette question n'est pas nécessairement de viser l'exhaustivité des réponses possibles, on pourra adapter l'objectif en fonction du niveau des élèves.

5 Un autre type de boucle

L'objectif de cette question est de découvrir un autre type de boucle, « répéter jusqu'à... ». On pourra insister sur le fait que la boucle est répétée jusqu'à ce qu'une condition soit vérifiée.

- a. La valeur de *n* part de 0 et augmente de 5 en 5, jusqu'à ce que *n* soit strictement supérieur à 100. La valeur affichée sera donc 105.
b. La valeur de *n* part de 0 et augmente de 11 en 11, jusqu'à ce que *n* soit strictement supérieur à 100. La dernière valeur avant 100 est 99, la suivante, celle qui sera affichée, est donc 110.

Pour aller plus loin

a.

On peut repartir du script réalisé à l'étape 3.



Pour améliorer la lisibilité de la figure tracée sans faire atteindre un bord, on peut aussi réduire la longueur du côté quand n devient grand.



b.

En partant du centre et en prenant 10 comme longueur du premier côté, chaque segment mesure 10 de plus que le segment précédent. On peut donc utiliser une variable n pour la longueur de chacun des 30 segments.



c.

Il faut utiliser deux variables, une pour les entiers de 1 à 100 (n), une pour la somme (somme). Ce script est nettement plus difficile et ne sera accessible qu'aux élèves déjà familiers avec la notion de boucle et de variable.

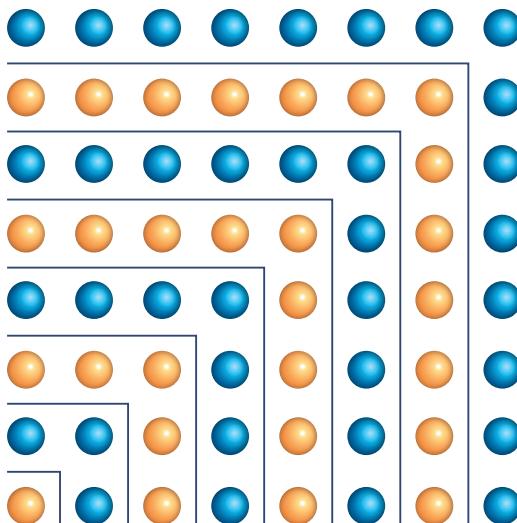


d.

On peut repartir du script précédent. Pour ne prendre en compte que les entiers impairs, n doit augmenter de 2 en 2. Il faut également compter combien il y a d'entiers impairs entre 1 et 100 : il y en a 49. Attention, l'ordre des deux commandes à l'intérieur de la boucle change le résultat.



On peut constater sur quelques exemples que la somme des n premiers entiers impairs est bien égale à n^2 . On peut facilement illustrer géométriquement ce résultat avec un carré de côté de n :



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Activités

Un jeu de balle

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est de s'initier à la programmation événementielle, c'est-à-dire de déclencher l'exécution d'un script par un évènement. Les élèves ont déjà constaté qu'on peut déclencher l'exécution d'un script en cliquant sur le drapeau vert, mais on peut déclencher l'exécution de scripts par d'autres évènements, par exemple quand l'utilisateur tape une touche au clavier. Cela permet notamment de programmer le déplacement d'un personnage à l'écran. On verra également que la structure « répéter indéfiniment » est bien utile pour tester tout au long d'un jeu si un évènement se produit ou non.

Le deuxième objectif est de s'initier aux structures conditionnelles : « Si... alors... » et « Si... alors... sinon... ». Un des obstacles rencontrés parfois par les élèves sur ce type de structure est de penser que le script s'arrête après cette structure : si la condition est vérifiée, alors le fait que la commande spécifiée s'exécute est naturel, mais le fait que le script continue de s'exécuter après la structure conditionnelle l'est beaucoup moins.

Cette activité peut éventuellement être considérée comme un mini-projet.

On peut éventuellement écrire quatre scripts différents, même si cela présente peu d'intérêt.

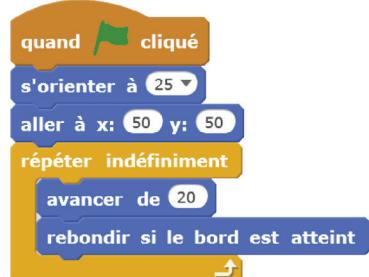
2 Un deuxième lutin

Chaque lutin a ses propres scripts. Pour voir les scripts d'un lutin, il faut cliquer sur le lutin.

b.



c.



3 Interaction entre les lutins



La commande « stop tout » permet d'arrêter l'exécution de tous les scripts de tous les lutins.

4 Amélioration du jeu

a. et b.



On peut également ajouter la commande sur la taille du lutin au script du lutin « Ball » réalisé à l'étape 2.

c.

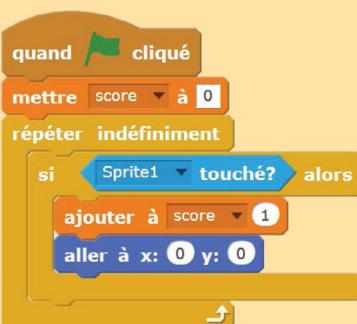
On constate que quand le chat touche la balle, celle-ci continue à se déplacer pendant deux secondes. Pour éviter ce phénomène, il faut écrire un nouveau script pour le lutin « Ball » :



Pour aller plus loin

a.

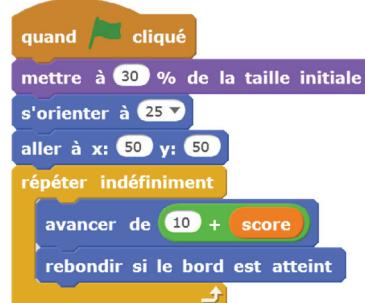
Comme on a réalisé à l'étape 4.c. un script qui teste si la balle touche le chat, on peut à présent supprimer le script du chat qui teste si la balle est touchée. On peut modifier ainsi le script de la balle :



On notera que si le chat touche la balle alors qu'il est au centre de la scène, la balle se remet au contact du chat et le score augmente indéfiniment sans que le joueur ait besoin de déplacer le chat. Pour éviter ce phénomène, on peut éventuellement replacer la balle à une position aléatoire dans la scène.

b.

Dans le script qui fait déplacer la balle, plutôt que d'avancer de 20 à chaque itération de la boucle, on peut avancer de 10 + score. Ainsi, la balle démarre plus lentement et accélère au fur et à mesure que le score augmente.



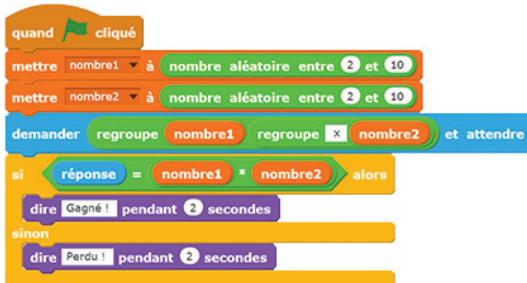
Activités

Le multiplicato

Intentions des auteurs

Cette activité a pour objectif de se familiariser avec les boucles et les instructions conditionnelles à travers la réalisation d'un petit jeu mobilisant les tables de multiplication. On peut éventuellement la considérer comme un mini-projet.

1 Un petit jeu



On pourra faire remarquer que les blocs qui expriment une condition ont une forme différente des autres : ils sont « pointus », à la différence des variables, qui sont « arrondies ».

2 Avec 10 questions

Il faut insérer le script précédent à l'intérieur d'une boucle « Répéter 10 fois ».



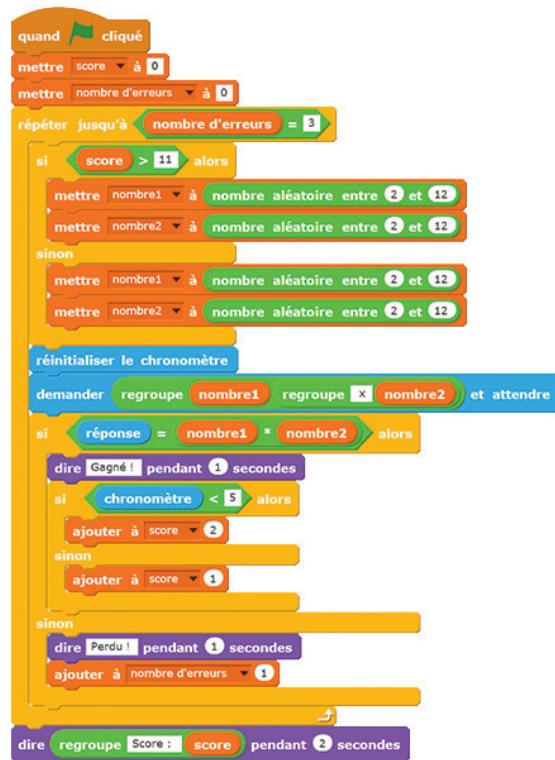
On pourra insister sur le fait qu'un script continue après avoir exécuté la structure conditionnelle, quel que soit le résultat de celle-ci.

3 Avec trois erreurs

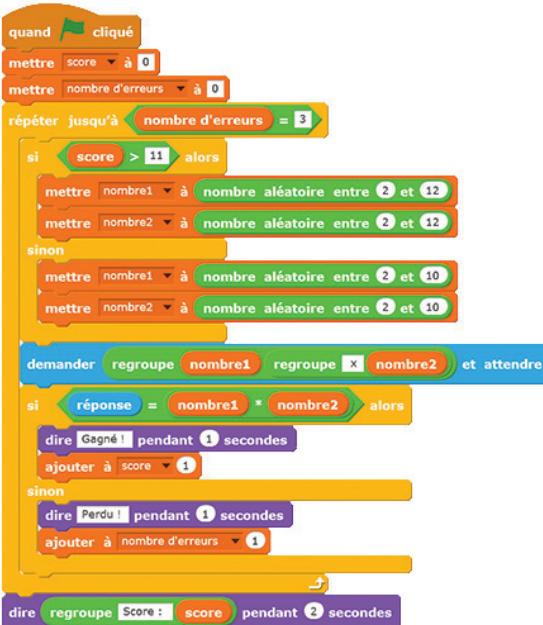
a. La condition qui arrêtera le jeu sera : **nombre d'erreurs = 3**.

b.

Il faut ici remplacer la boucle « Répéter 10 fois » par une boucle « Répéter jusqu'à ».



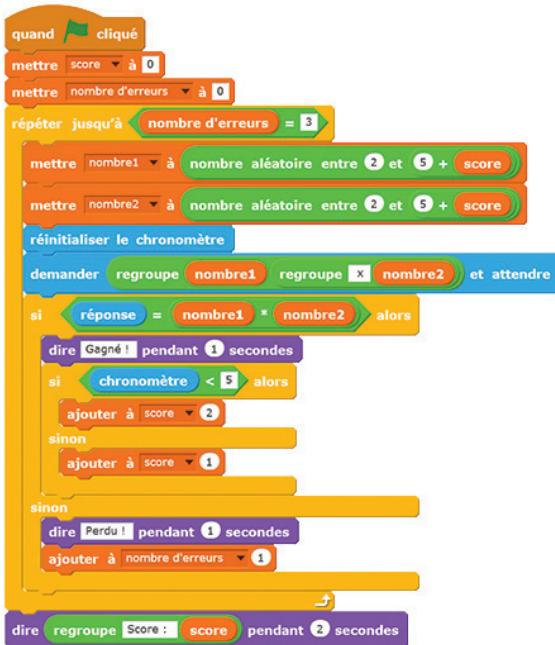
4 Plus difficile



Pour aller plus loin

1.

Il faut remplacer la structure conditionnelle créée à l'étape 4 par deux lignes qui attribuent à « nombre1 » et « nombre2 » des valeurs aléatoires comprises entre 2 et un nombre qui augmente en fonction du score, par exemple « 5+score ». Le jeu va rapidement devenir injouable au-delà de certaines valeurs. Pour l'éviter, on peut ne faire augmenter en fonction du score que l'une des deux variables.



5 Plus vite

Il faut utiliser la variable **chronomètre** de Scratch : cette variable est égale au temps écoulé en secondes depuis l'instant où on a exécuté la commande **réinitialiser le chronomètre**.

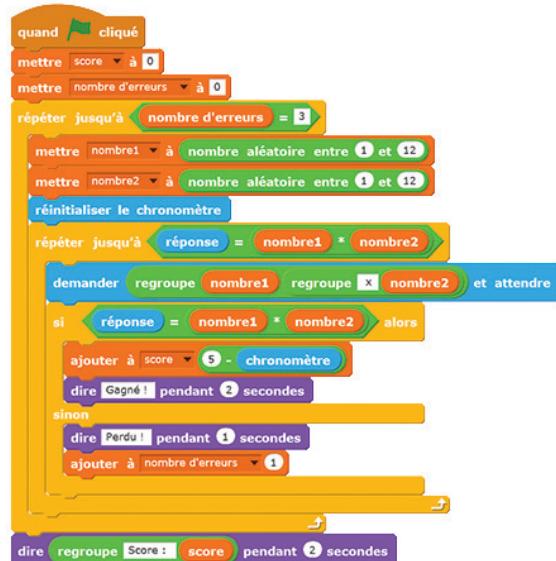
2.

Au lieu d'ajouter 1 ou 2 points à chaque bonne réponse, on peut ajouter « 5-chronomètre » : ainsi, le joueur marquera d'autant plus de points qu'il répondra vite (jusqu'à 5 points), et perdra des points s'il met plus de 5 secondes à répondre.



3.

On peut ajouter une structure « répéter jusqu'à » avant la commande qui demande au joueur sa réponse.



Activités

Expériences aléatoires

1 Un premier mouvement

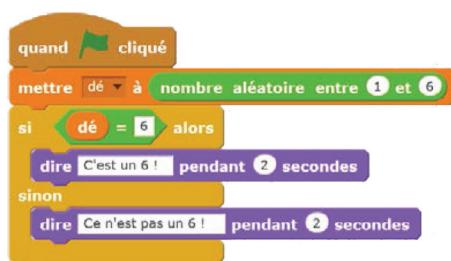
a.



b. Ce script permet de simuler le lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

2 Est-ce un 6 ?

a.

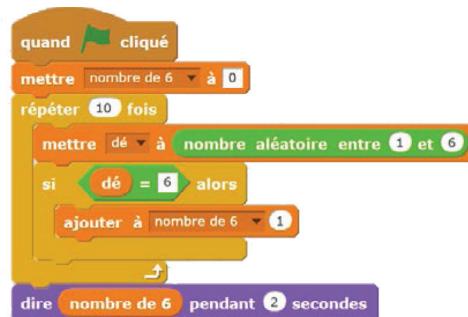


3 Combien de 6 ?

- a. Ce script simule 10 lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces et affiche pour chacun d'eux si le résultat obtenu est un 6 ou non.
 b. On peut constater que le nombre de 6 obtenus est variable d'une exécution à l'autre.

4 Un compteur

L'objectif est d'automatiser le travail réalisé à l'étape précédente. On peut repartir du script précédent mais pour l'alléger, il est préférable de remplacer la structure « Si... alors... sinon... » par une structure « Si... alors... ».

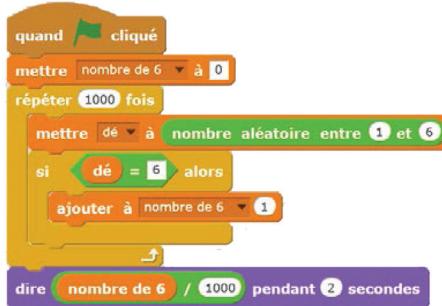


5 Interpréter l'expérience

- a. On peut naturellement n'obtenir aucun 6 comme résultat (la probabilité est d'environ 0,16).
 b. On n'obtient que très rarement 10 comme résultat : il faudrait que les 10 lancers tombent sur 6 (la probabilité est d'environ 10^{-8} soit une chance sur 100 millions).
 c. On peut remarquer qu'on obtient très souvent un résultat compris entre 10 et 25 (la probabilité est supérieure à 0,95) et presque toujours entre 5 et 30 (la probabilité est supérieure à 0,999).

6 Calculs de fréquences

a.



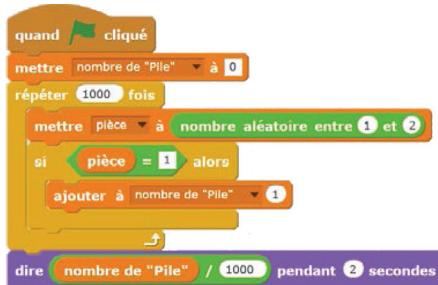
- b. On peut constater qu'on obtient souvent des fréquences proches de 0,17.
c. La probabilité d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{6}$, soit un nombre proche de 0,17.

L'objectif est de constater qu'en répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un événement a tendance à se rapprocher de la probabilité théorique de cet événement. En faisant passer le nombre de tirages à 10 000, on peut constater qu'on obtient presque toujours 0,17 comme fréquence.

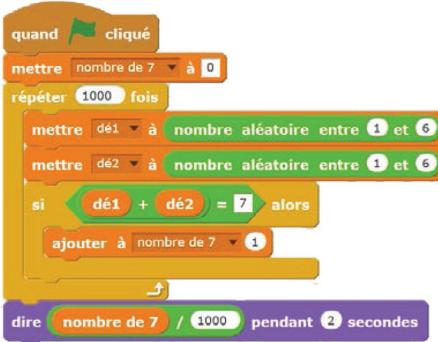
Pour aller plus loin

a.

On peut considérer une pièce comme un dé à 2 faces, « Pile » correspondant au résultat 1, « Face » au résultat 2. On peut ainsi reprendre directement le script précédent. Il est préférable de renommer les variables si on le souhaite pour une meilleure compréhension.



b.



On peut constater qu'on obtient à nouveau une fréquence proche de $\frac{1}{6}$ (qui est la probabilité d'obtenir 7). On pourra recommencer avec d'autres valeurs que 7 et constater éventuellement que, plus on s'en éloigne, plus la fréquence diminue.

Projets

Jeu dans un labyrinthe

Étape 1 Dessiner un labyrinthe

On peut éviter cette étape assez longue et peu intéressante sur le plan de l'algorithmique en fournissant directement le labyrinthe aux élèves. On peut ouvrir directement le fichier Scratch avec le bon arrière-plan depuis le manuel numérique.

Étape 2 Créer un personnage

1. On peut, par exemple, choisir le lutin :



Knight

2.

```
quand [drapeau cliqué]
  mettre à 15 % de la taille initiale
```

Le pourcentage de réduction dépend naturellement du lutin choisi.

Étape 3 Permettre au personnage de se déplacer

1.

```
quand [drapeau cliqué]
  mettre à 15 % de la taille initiale
  répéter indéfiniment
    si [touche flèche droite pressée?]
      alors
        s'orienter à 90
        avancer de 1
    si [touche flèche gauche pressée?]
      alors
        s'orienter à -90
        avancer de 1
    si [touche flèche haut pressée?]
      alors
        s'orienter à 0
        avancer de 1
    si [touche flèche bas pressée?]
      alors
        s'orienter à 180
        avancer de 1
```

Plutôt que de réaliser un seul script avec une structure « répéter indéfiniment » et des tests pour chacune des touches, il est également possible de réaliser un script pour chaque type de déplacement qui s'exécute quand l'événement « flèche droite » est pressé :

```
quand [flèche droite est cliqué]
  s'orienter à 90
  avancer de 4
```

2.

```
quand [drapeau cliqué]
  répéter indéfiniment
    si [couleur [mur] touchée?]
      alors
        avancer de -1
```

Pour placer la bonne couleur dans la condition du test, il faut cliquer sur le carré comportant la couleur puis sur un des murs du labyrinthe.

On pourra noter que selon le lutin choisi et son orientation, le mouvement est parfois incohérent. En effet, si on change l'orientation du lutin alors qu'il est très près d'un mur, il peut se mettre à toucher un mur et à reculer parallèlement au mur.

Corriger cet effet indésirable est assez difficile et on pourra ne pas aborder cette question avec les élèves. Si on souhaite malgré tout le faire, une solution consiste à faire garder au lutin une orientation constante. Il faut alors gérer son déplacement (en avant et en arrière) avec des opérations sur ses coordonnées, ce qui implique des structures conditionnelles imbriquées :

```
quand [drapeau cliqué]
  s'orienter à 90
  mettre à 15 % de la taille initiale
  répéter indéfiniment
    si [touche flèche droite pressée?]
      alors
        aller à x: abscisse x + 1 y: ordonnée y
        si [couleur [mur] touchée?]
          alors
            aller à x: abscisse x - 1 y: ordonnée y
    si [touche flèche gauche pressée?]
      alors
        aller à x: abscisse x - 1 y: ordonnée y
        si [couleur [mur] touchée?]
          alors
            aller à x: abscisse x + 1 y: ordonnée y
    si [touche flèche haut pressée?]
      alors
        aller à x: abscisse x y: ordonnée y + 1
        si [couleur [mur] touchée?]
          alors
            aller à x: abscisse x y: ordonnée y - 1
    si [touche flèche bas pressée?]
      alors
        aller à x: abscisse x y: ordonnée y - 1
        si [couleur [mur] touchée?]
          alors
            aller à x: abscisse x y: ordonnée y + 1
```

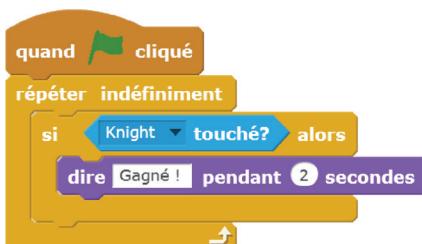
Étape 4 Programmer l'arrêt du jeu

1. On peut choisir, par exemple, le lutin :



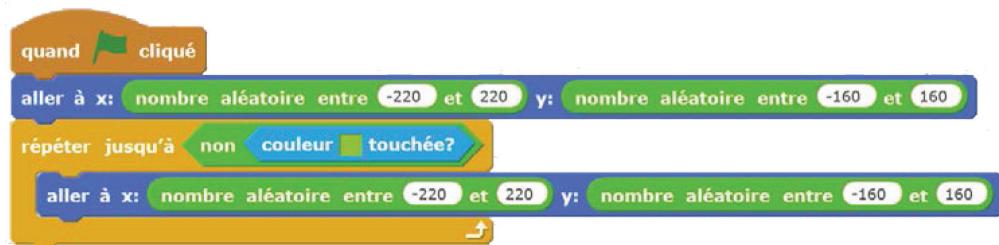
Gift

3. On peut alors écrire un script pour ce nouveau lutin :



Pour aller plus loin

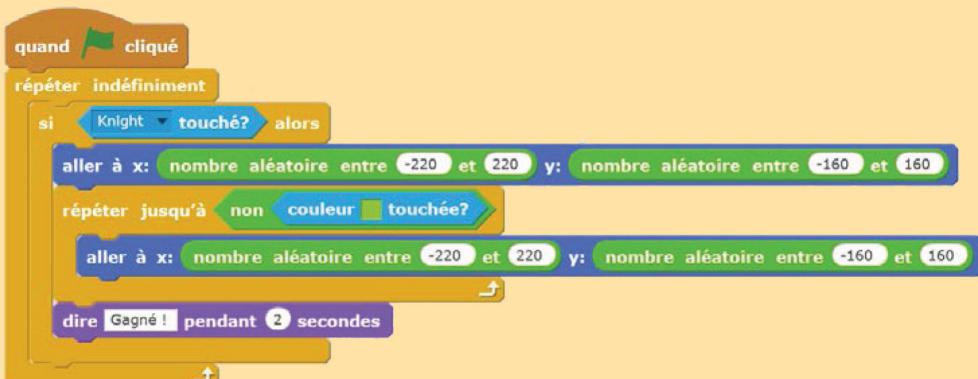
Variante 1



Il faut écrire une première fois la commande pour placer le trésor sinon la boucle ne s'exécute pas si le trésor ne touche pas un mur.

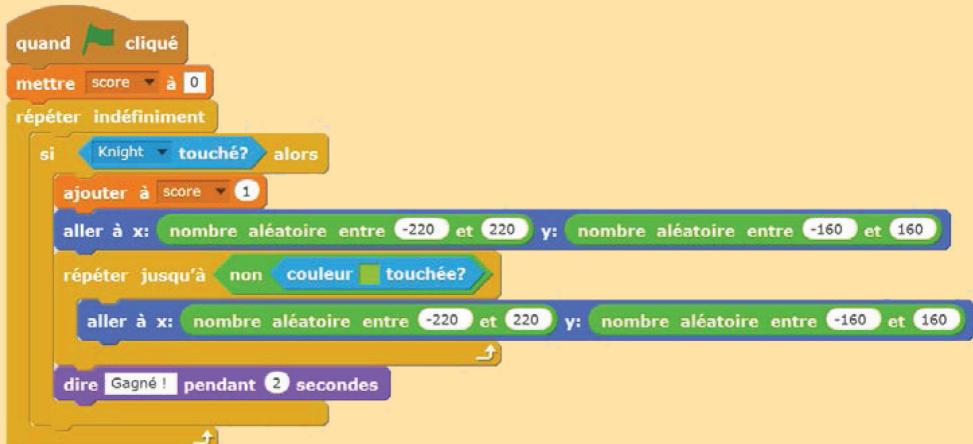
Variante 2

On peut compléter le script qui teste quand le joueur trouve le trésor.



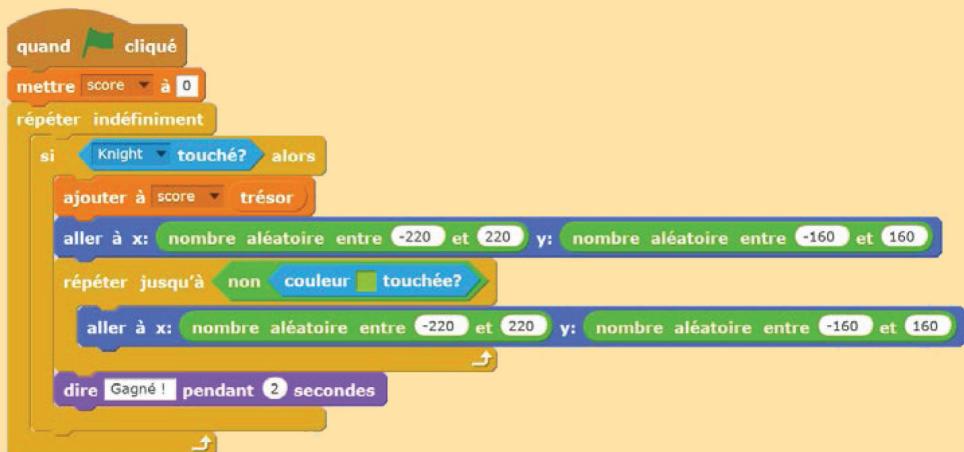
Variante 3

On complète toujours le même script.



Variante 4

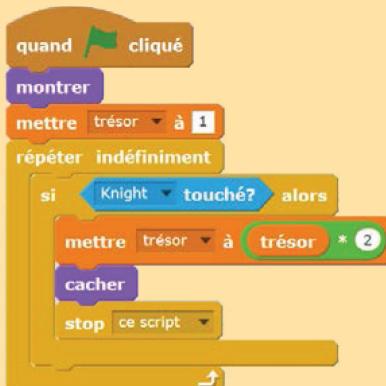
On pourra créer une variable « trésor » qui est égale à la valeur du trésor en nombre de points et cacher cette variable. On modifie le script qui calcule le score :



On crée un lutin-bonus qu'on place aléatoirement dans le labyrinthe :



On écrit un script qui, quand le personnage touche le bonus, double la valeur du trésor et fait disparaître le bonus :



On peut dupliquer ce lutin pour placer d'autres bonus.

Variante 5

Il existe de nombreuses façons plus ou moins simples de programmer les déplacements du monstre. En voici une qui fait reculer et tourner le monstre quand il rencontre un mur ou un bord :



Étape 1 Mettre une balle en mouvement

2.



Un mouvement horizontal ne sera guère intéressant pour ce jeu. Il convient donc de donner une orientation initiale à la balle (ici, 30° par rapport à la verticale). La valeur de laquelle on fait avancer la balle à chaque itération de la boucle (ici, 10) peut servir à régler la vitesse de déplacement de la balle.

Étape 2 Créer la raquette

2.



Ce premier déplacement à l'aide de la souris a l'avantage d'être très simple. Il a en revanche l'inconvénient de ne pas garder la raquette toujours à la même hauteur. Cette fonctionnalité sera améliorée avec les variantes 2 et 3 dans la rubrique « Pour aller plus loin ». Si certains élèves sont déjà à l'aise avec Scratch et souhaitent programmer directement ces variantes, cela ne pose aucun problème.

À ce stade, la balle et la raquette n'interagissent pas. Ce sera l'objet de l'étape suivante.

Étape 3 Faire rebondir la balle sur la raquette



Ce script doit naturellement s'appliquer au lutin « Ball ». L'intérêt de donner une direction aléatoire est double : c'est très simple à programmer et cela évite à la balle un mouvement périodique et donc répétitif, ce qui est sans intérêt pour le joueur.

Étape 4 Programmer l'arrêt du jeu

On peut choisir l'arrière-plan « Blue sky » disponible dans la bibliothèque de Scratch. L'intérêt est d'avoir une bande marron en bas qui permet de tester facilement si la balle est « tombée ». Il faut en revanche changer la couleur de la raquette. Pour cela :

- cliquer sur la raquette ;
- aller dans l'onglet « costume » ;
- choisir une couleur en bas de l'écran ;
- cliquer sur l'outil « colorier une forme » à droite de l'écran ;
- cliquer sur la raquette pour la colorier ;
- cliquer sur l'onglet « script » pour revenir au script.

```

when green flag clicked
repeat (forever)
  if [color (brown) v touched? v] then
    stop [all v]
  end
end
  
```

Pour programmer l'arrêt du jeu quand le joueur perd, on écrit un script pour le lutin « Ball » qui teste en permanence si la balle touche la couleur marron qui est en bas de l'arrière-plan. Pour choisir la couleur dans commande **couleur touchée?**, il faut cliquer sur le carré de couleur puis cliquer sur le marron du bas de l'arrière-plan sur la scène.

Étape 5 Ajouter un score

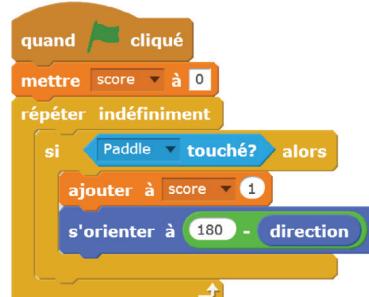
On a déjà réalisé un script qui teste si la balle touche la raquette. Il suffit de compléter ce script de la façon suivante :



On pourra remarquer que, comme la raquette ne reste pas horizontale, il est facile pour le joueur de marquer de nombreux points : il lui suffit de « suivre » la balle avec la raquette. À ce stade, le jeu est cependant tout à fait jouable.

Pour aller plus loin

Variante 1



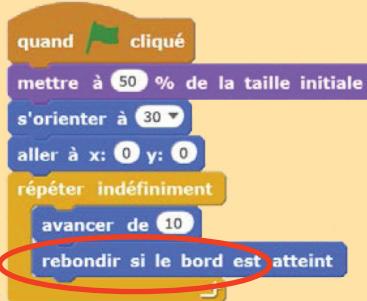
Il suffit de faire s'orienter la balle à $180 - \text{direction}$, la variable **direction** étant égale à l'orientation de la balle. Pour mieux le comprendre, on peut afficher en permanence la valeur de cette variable en cochant sa case dans la catégorie de commandes « mouvement ». La réponse n'est cependant pas très facile à trouver pour les élèves car il faut comprendre la notion d'angle positif et négatif par rapport à la verticale telle qu'elle est utilisée dans Scratch. On pourra ne pas proposer cette variante à tous les élèves.

Variante 2

Il faut modifier le script qui dirige le lutin « Paddle ». Plutôt que de le faire aller vers la souris, on va le faire aller vers le point de coordonnées (`souris x` ; -140) où `souris x` est une variable égale à l'abscisse du pointeur de la souris. Ainsi, la raquette se déplacera vers la souris en abscisse mais gardera une ordonnée constante égale à -140.

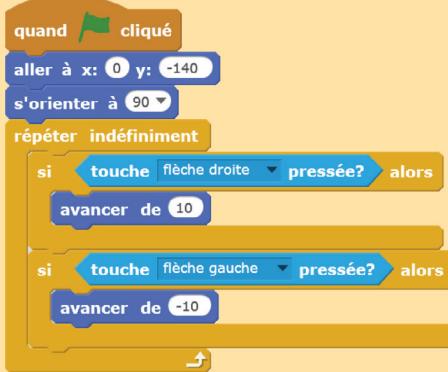


On peut également en profiter pour fixer une position initiale à la balle en début de partie, sans quoi elle risque de rester « coincée » sous la raquette dans certaines situations. On peut pour cela modifier le script qui génère le déplacement de la balle :



Variante 3

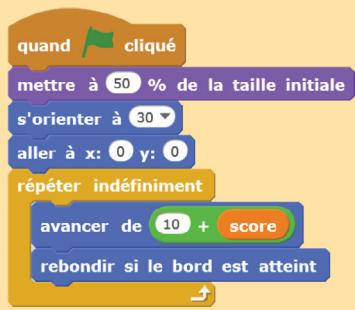
Il faut remplacer le script qui déplace la raquette par le suivant :



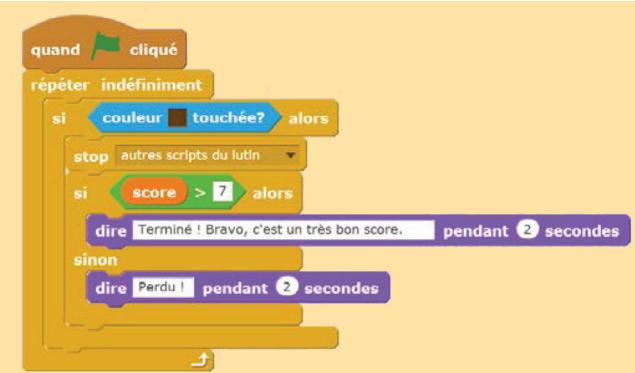
Il est également possible d'utiliser l'événement `quand flèche droite est cliqué`, ce qui économise l'utilisation de la structure « répéter indéfiniment », mais il faut alors écrire trois scripts et le déplacement est moins naturel à l'usage.

Variante 4

Dans le script qui génère le déplacement de la balle, plutôt que de faire avancer la balle de 10 à chaque itération de la boucle, on peut la faire avancer de `10 + score`.



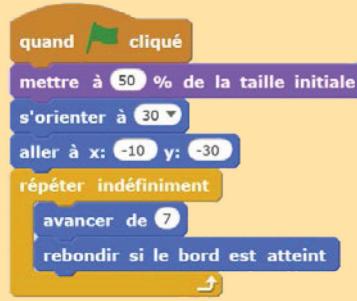
Variante 5



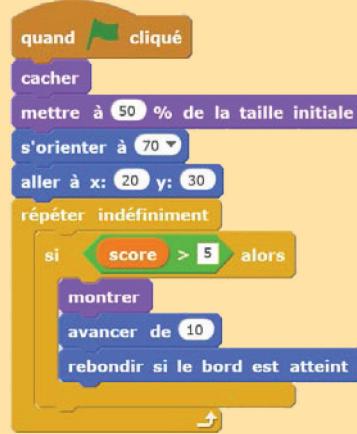
On peut insérer la commande `stop autres scripts du lutin` avant d'afficher le message de fin pour que le mouvement de la balle soit stoppé.

Variante 6

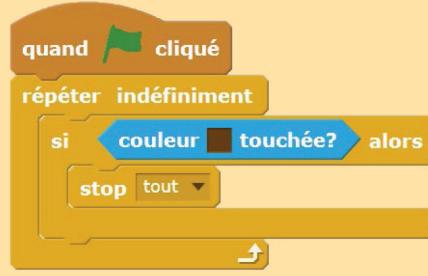
Il est préférable de donner aux deux balles des positions et des orientations différentes. Il est également souhaitable de réduire leur vitesse si on veut que le jeu reste jouable. On peut commencer par modifier le script de « Ball » :



On peut ensuite dupliquer le lutin « Ball ». Un lutin « Ball2 » est créé avec les mêmes scripts. On peut le modifier ainsi pour que la balle n'apparaisse que quand le score dépasse 5 :



Il faut également faire arrêter tous les scripts de tous les lutins dès qu'une des deux balles « tombe ». Pour simplifier, on peut également supprimer le message qui s'affiche en fin de partie. On peut donc modifier ainsi les scripts pour « Ball » et « Ball2 » :



Attrape-moi si tu peux !

Étape 2

Déplacer l'étoile de mer



Étape 3

Ajouter le score



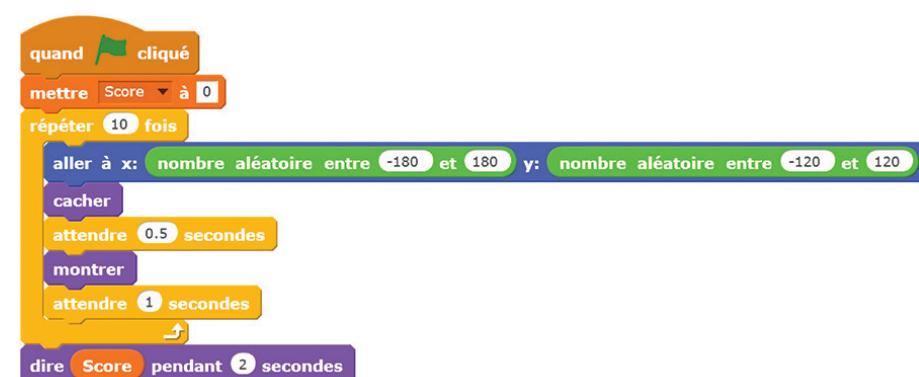
Il faut écrire un autre script, qui sera déclenché quand le joueur cliquera sur l'étoile de mer. Il faut également initialiser le score dans le script écrit à l'étape précédente.



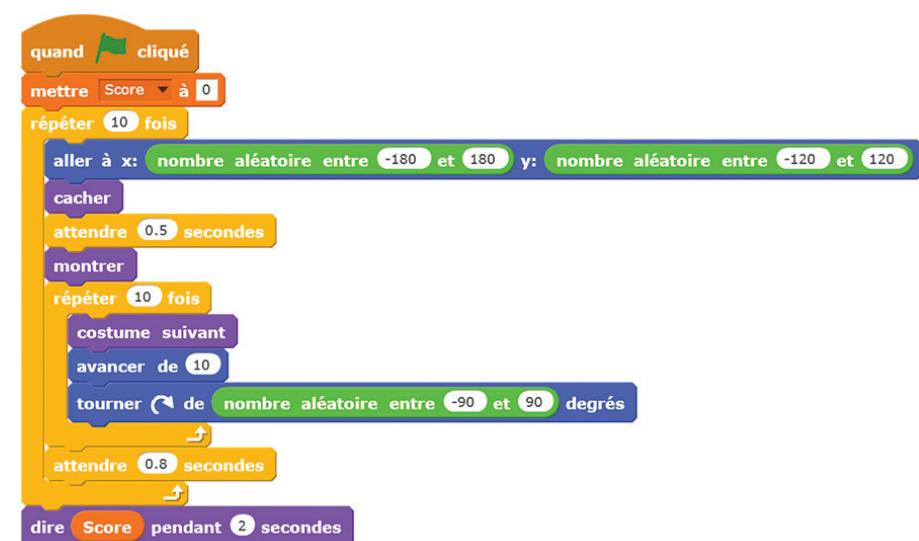
Étape 4

Améliorations du jeu

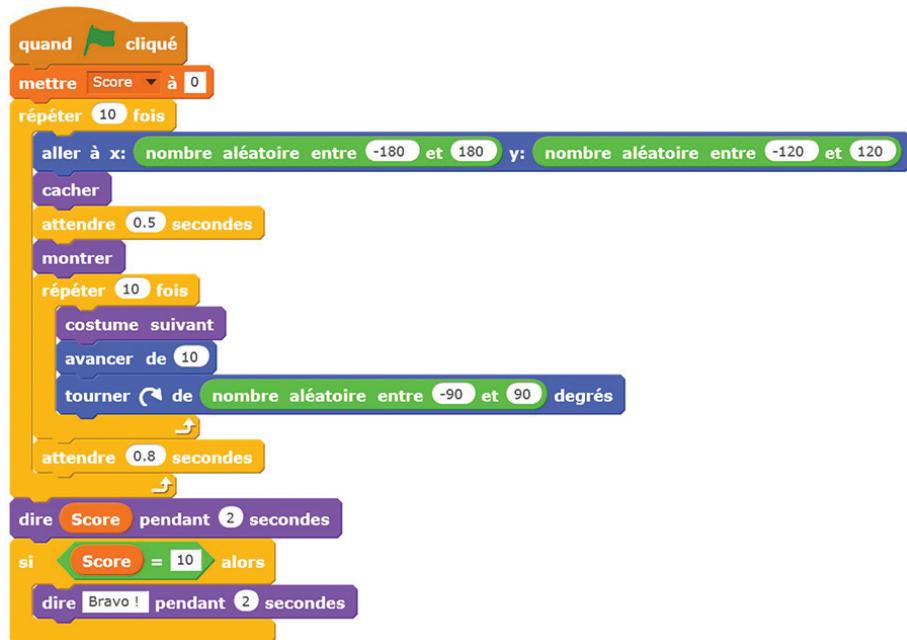
a.



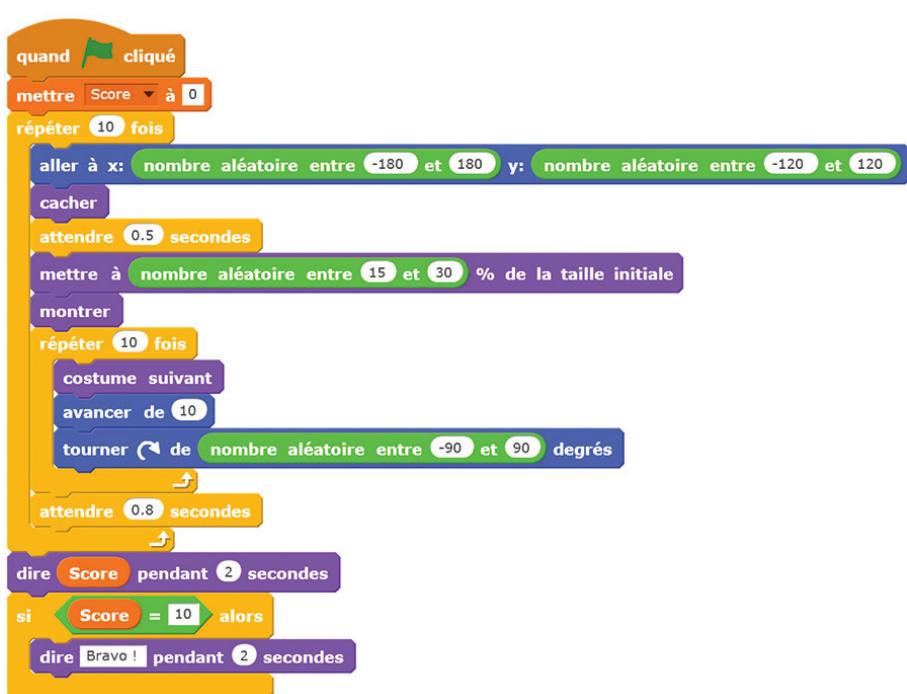
b.



c.



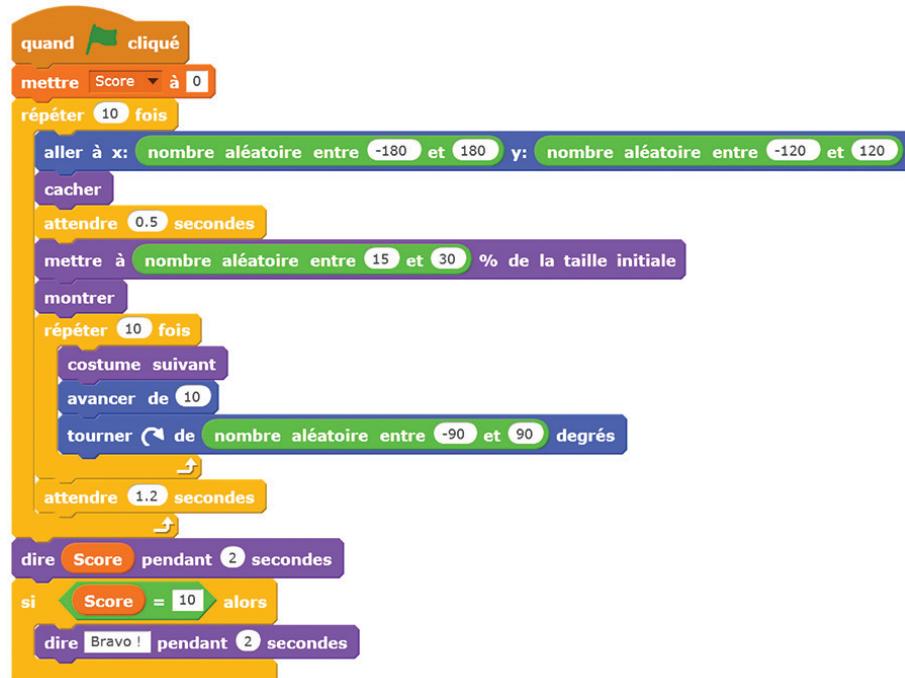
d.



Pour aller plus loin

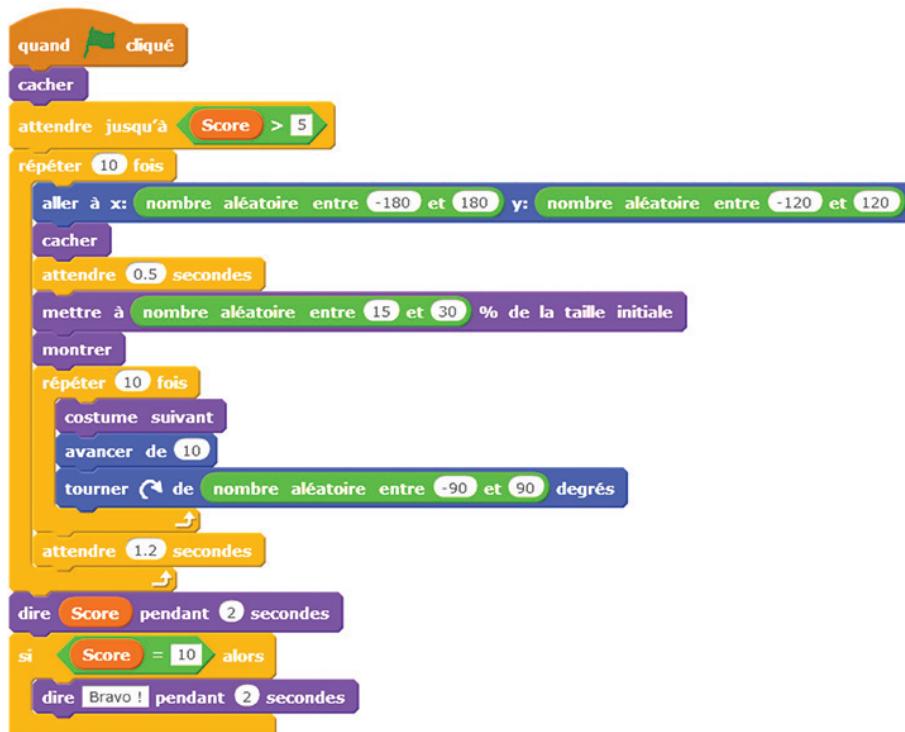
a.

Il suffit de dupliquer le lutin existant (clic droit, puis dupliquer). Les scripts se dupliquent automatiquement au deuxième lutin. Il n'y a plus qu'à « désynchroniser » les apparitions des deux étoiles, en changeant par exemple la valeur « 0.8 secondes » en « 1.2 secondes » pour l'un des deux lutins.



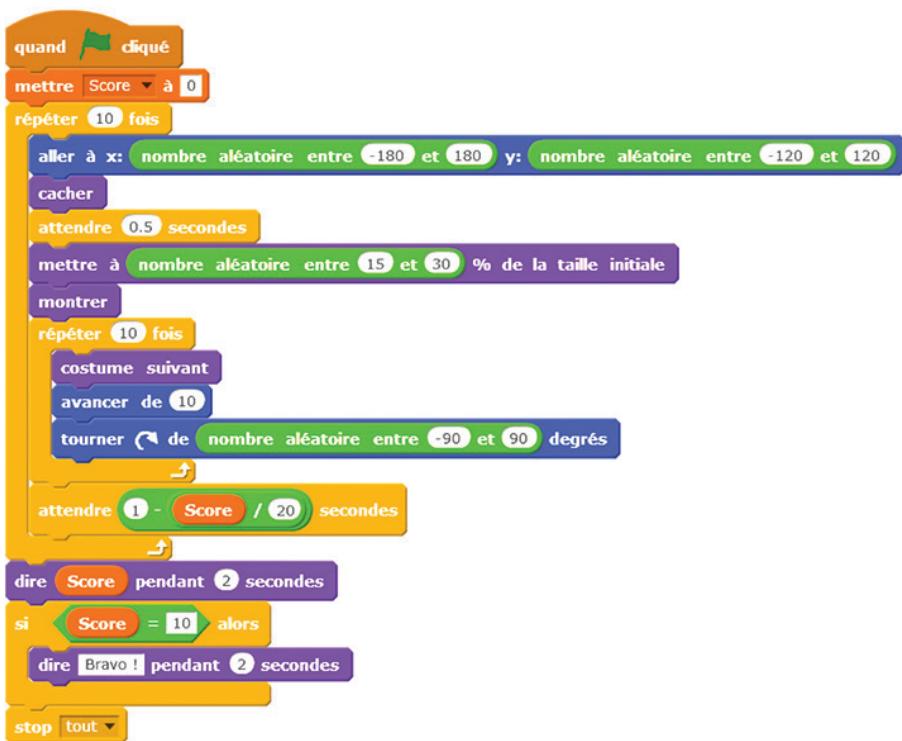
b.

Il suffit d'ajouter au début du script de la 2^e étoile les commandes pour cacher le lutin et attendre jusqu'à ce que le score soit supérieur à 5.



Si on souhaite que le jeu s'arrête au bout de 10 apparitions de la 1^{re} étoile, sans que la 2^e étoile continue d'apparaître, on peut ajouter à la fin du script de la 1^{re} étoile la commande **stop [tout]**, qui arrête tous les scripts en cours d'exécution.

c.

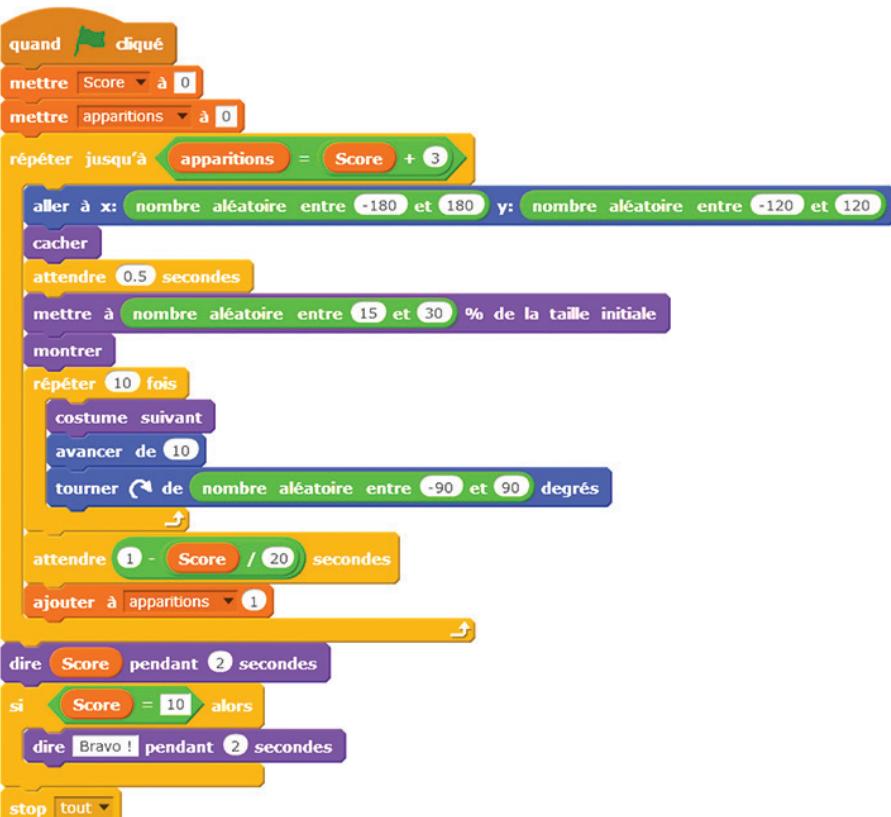


Pour une bonne jouabilité, on peut fixer le temps d'attente entre 0,5 et 1 seconde. Pour qu'il diminue en fonction du score, on peut le fixer à $1 - \frac{\text{score}}{20}$: il est alors égal à 1 quand la partie débute et à 0,5 quand le score est égal à 10.

Pour conserver des apparitions non synchronisées, on peut utiliser une formule légèrement différente pour la 2^e étoile, par exemple $1,2 - \frac{\text{score}}{15}$.

d.

Une solution consiste à compter le nombre d'apparitions. On crée une nouvelle variable, on l'initialise en début de script et on l'incrémente de 1 à chaque apparition. Quand elle devient égale au score plus 3, c'est que le joueur a raté trois fois l'étoile.



Course de voiture

Le fichier fourni contient les scripts correspondant à chaque étape du projet. Tous les scripts s'exécutent quand le drapeau vert est cliqué. Si on veut ne tester le fonctionnement que de certains scripts, il faut détacher la commande « Quand le drapeau vert est cliqué » des scripts qu'on ne veut pas exécuter. Par exemple, à l'étape 2, si on veut tester le fonctionnement seul du script réalisé à cette étape, il faut détacher la commande « Quand le drapeau vert est cliqué » de tous les autres scripts.

Étape 1 Planter le décor

a.

On peut facilement construire un circuit en traçant deux ellipses, puis en coloriant l'intérieur et l'extérieur. Cette couleur servira à détecter si la voiture sort du circuit. Il faut également tracer une ligne d'arrivée, d'une autre couleur, pour détecter si la voiture a terminé un tour de circuit. Il est bien sûr possible de fournir l'arrière-plan aux élèves afin qu'ils démarrent directement l'activité de programmation.

b.

Si on choisit le lutin « Convertible 3 », une taille adaptée au circuit choisi est environ 33 % de la taille initiale. Pour un meilleur rendu, on peut également fournir aux élèves un autre lutin représentant une voiture vue de dessus, ce qui évitera de la faire apparaître « à l'envers » quand elle sera en haut du circuit. Pour cela, il faut « importer un lutin depuis un fichier ».

Étape 2 Faire avancer la voiture



Pour positionner correctement la voiture, il faut trouver par tâtonnement les coordonnées qui la placeront juste après la ligne d'arrivée. Cette ligne servant à détecter si la voiture a terminé un tour de circuit, il faut faire démarrer la voiture un peu après cette ligne.

La vitesse peut être augmentée ou diminuée en modifiant la valeur 2.

À ce stade, on ne peut pas encore diriger la voiture. Cette fonctionnalité est réalisée à l'étape suivante.

Étape 3 Faire tourner la voiture



On a tout intérêt à faire des scripts séparés pour chaque nouvelle fonctionnalité. Il est ainsi beaucoup plus facile de corriger ou de faire évoluer au fur et à mesure chaque nouvelle fonctionnalité, et l'ensemble du projet gagne en lisibilité. Ces scripts nécessitent la structure « Répéter indéfiniment », de façon à ce que le programme teste en permanence si une touche du clavier est pressée ou non. Tous les scripts doivent s'exécuter quand on clique sur le drapeau vert.

Étape 4 Faire varier la vitesse de la voiture

a.



b.



Alors de faire avancer la voiture de 2 à chaque itération de la boucle « répéter indéfiniment », on la fait avancer de la variable « vitesse ». Il faut donc remplacer, dans le script écrit à l'étape 2, la valeur 2 par la variable « vitesse ». Il faut initialiser cette variable au début du script (on peut l'initialiser à 0 ou à une autre valeur) et écrire deux autres scripts qui permettent d'augmenter et de diminuer la vitesse. Encore une fois, on a plutôt intérêt à écrire des scripts séparés, mais ce n'est pas une obligation.

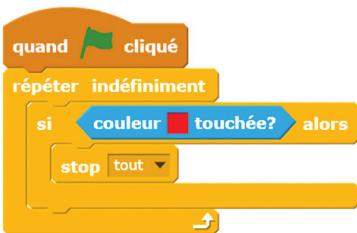
Étape 5 Prendre en compte le circuit



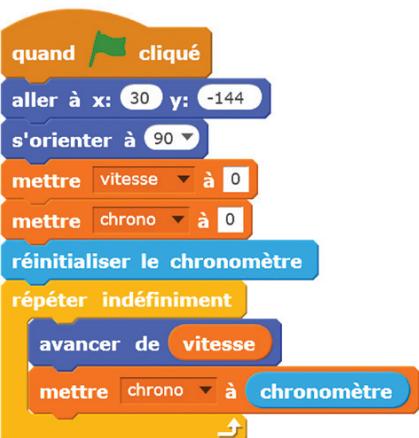
Pour détecter si la voiture quitte le circuit, on teste si le lutin « voiture » touche la couleur avec laquelle on a rempli l'extérieur du circuit. Si c'est le cas, on fait passer directement la vitesse de la voiture à une valeur basse, par exemple 0,5.

Étape 6 Programmer la fin du jeu

Pour tester si la voiture passe la ligne d'arrivée, il faut tester si elle touche la couleur avec laquelle on a rempli la ligne d'arrivée et utiliser la commande « Stop tout » :



On ne saurait programmer un jeu de course de voiture sans chronométrier le temps de parcours du joueur. Pour cela, il faut utiliser la variable « chronomètre » intégrée à Scratch. Cette variable est égale au temps écoulé en secondes depuis qu'on a exécuté la commande « initialiser le chronomètre ». On ne peut pas arrêter ce chronomètre. Pour mémoriser une valeur du chronomètre, il faut donc utiliser une autre variable et lui faire prendre la valeur du chronomètre à un instant donné.



On a fait le choix ici de stocker le temps écoulé dans la variable « chrono » à chaque étape de la boucle « répéter indéfiniment ». On aurait aussi pu ne regarder le chronomètre qu'une fois la ligne d'arrivée franchie, mais le joueur ne pourrait alors pas voir le temps écoulé au fur et à mesure de la partie, sauf s'il affiche le chronomètre (qu'il faudrait alors cacher en fin de partie et remplacer par la variable « chrono » puisque le chronomètre ne s'arrête pas).

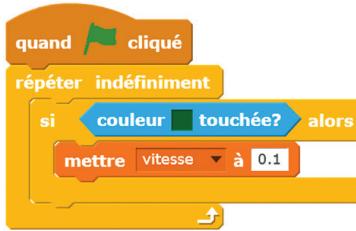
Pour aller plus loin

a.

Pour empêcher la voiture de reculer, il faut lui interdire d'avoir une vitesse négative. Cela peut être réalisé par un nouveau script :



On notera que ce script n'empêche pas le joueur de faire demi-tour et de franchir la ligne d'arrivée à contre-sens en avançant. Pour décourager le joueur de rouler hors du circuit, on peut réduire encore plus fortement sa vitesse quand il en sort, mais sans mettre une vitesse nulle : la voiture risque alors de se trouver coincée hors du circuit sans pouvoir y revenir.



b.

Il faut ici créer une nouvelle variable pour compter les tours et modifier le script qui teste si la ligne d'arrivée est franchie. Une fois la ligne franchie, il faut suspendre ce test pendant quelques secondes, le temps que la voiture quitte la ligne d'arrivée, sinon le nombre de tours passe immédiatement à 3.



c.

Pour créer des obstacles, on peut modifier l'arrière-plan et placer des formes colorées sur le circuit. Quand la voiture rencontrera ces couleurs, elle ralentira fortement (le principe est le même que quand la voiture sort du circuit).

d.

Pour créer une voiture contrôlée par l'ordinateur, il suffit de cloner le lutin existant et de modifier légèrement ses scripts :

- en le faisant avancer à vitesse constante ;
- en lui faisant corriger sa trajectoire quand il sort du circuit.

Pour cette dernière fonctionnalité, une méthode consiste à colorier de façon différente l'intérieur et l'extérieur du circuit : quand la voiture touche la couleur correspondant à l'extérieur du circuit, on la fait tourner de 1° dans le sens anti-horaire, quand elle touche la couleur correspondant à l'intérieur du circuit, on la fait tourner de 1° dans le sens horaire. Ainsi la voiture reste dans le circuit.

On peut envisager différentes variantes, comme par exemple faire ralentir les deux voitures quand elles se touchent.

e.

Il suffit de créer plusieurs circuits en arrière-plan comme on l'a fait pour le premier circuit et, à chaque tour, d'utiliser la commande :

basculer sur l'arrière-plan arrière-plan suivant

Intentions des auteurs

Ce projet est très simple sur le plan algorithmique. Il peut être mis en œuvre rapidement par des élèves qui ont déjà découvert Scratch. Il est particulièrement adapté pour découvrir les possibilités de la programmation événementielle et les interactions entre différents lutins. Si des élèves terminent ce projet rapidement, on pourra leur suggérer d'inventer eux-mêmes des variantes ou des améliorations à implémenter.

Étape 1 Le chat

a.



On peut également écrire 4 scripts distincts déclenchés par l'événement **quand flèche haut est cliqué**.

b.

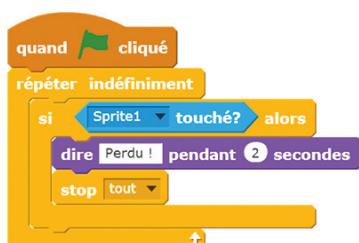
Pour une meilleure jouabilité, on peut réduire la taille du chat à 50 % de sa taille initiale. La vitesse de déplacement peut être réglée en modifiant la valeur 5 dans le script.

Étape 2 Le chien

a.



b.

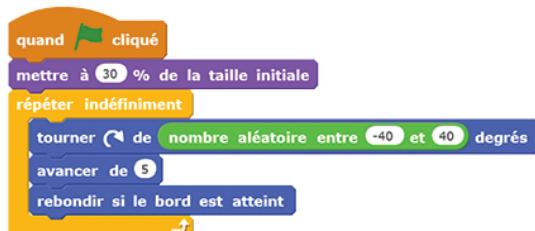


L'affichage du message « Perdu ! » n'est pas demandé à cette question mais peut être mis dès présent. Il sera de toute façon demandé à **Étape 4**.

Étape 3 Le poisson

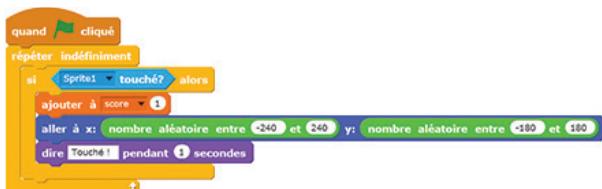
a.

Le principe est le même que pour le déplacement du chien mais pour générer un mouvement irrégulier, on peut faire tourner le poisson d'un certain angle aléatoire. On peut expérimenter différentes valeurs et observer l'effet sur le déplacement du poisson. On peut accélérer ou ralentir le mouvement en modifiant la valeur 5.



b.

À cette étape, il faut créer une nouvelle variable qu'on pourra appeler « score ». Pour placer le poisson aléatoirement sur la scène, on utilise les coordonnées.



L'affichage du message « Perdu ! » n'est pas demandé à cette question mais peut être mis dès présent. Il sera de toute façon demandé à **Étape 4**.

Étape 4 Améliorations du jeu

b.

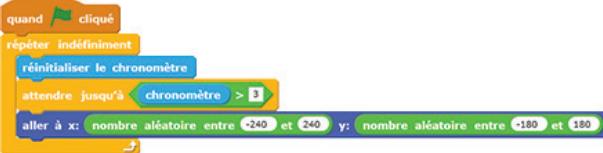
Il suffit d'ajouter une commande au début d'un des scripts du chien pour lui donner une orientation initiale, par exemple à 30° par rapport à la verticale.



Pour aller plus loin

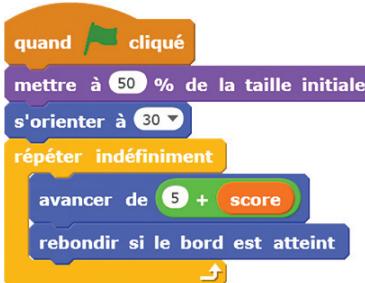
a.

On peut utiliser le chronomètre de Scratch qui donne le temps écoulé en secondes depuis qu'on a exécuté la commande « réinitialiser le chronomètre ». Ici, le poisson est repositionné aléatoirement au bout de 3 secondes.



b.

Pour augmenter la vitesse du chien, il faut augmenter la valeur dont il avance à chaque itération de la boucle. On peut fixer cette valeur à 5+score, pour que le chien conserve la même vitesse initiale qu'auparavant et que cette vitesse augmente au fur et à mesure que le score augmente.



Pour réduire le délai entre deux apparitions du poisson, on peut réduire la valeur fixée à la question précédente.



c.

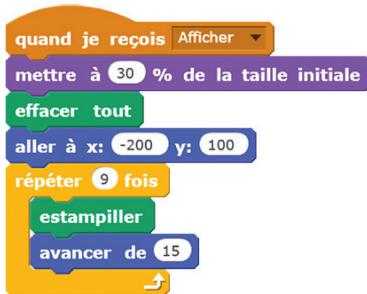
Pour ajouter un deuxième poisson, il suffit de « dupliquer » le premier : après un clic droit sur le lutin « Fish1 », on clique sur « dupliquer ». Les scripts se dupliquent également, les déplacements du deuxième poisson sont donc automatiquement générés. Il n'y a aucune modification à faire aux autres scripts.

Intentions des auteurs

Ce projet consiste à programmer un jeu de stratégie à deux joueurs. À la différence des jeux d'action, qui se déroulent souvent « en temps réel », ce jeu doit laisser aux joueurs le temps de la réflexion. C'est une bonne situation pour introduire la notion de « messages » que les lutins peuvent s'envoyer entre eux. Quand un joueur (donc un lutin) aura joué son coup, il pourra en « informer » par un message l'autre joueur et déclencher un nouvel affichage des allumettes.

Étape 1 Afficher les allumettes

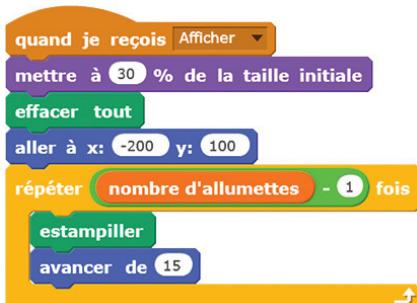
a.



L'objectif est ici de créer un script qui servira à l'affichage initial, qu'on exécutera donc au début du jeu. À la question **c.**, on modifiera ce script pour qu'il puisse afficher un nombre quelconque d'allumettes, afin de pouvoir gérer facilement l'affichage des allumettes tout au long du jeu. Pour que l'on puisse exécuter ce script facilement à n'importe quel moment du jeu, il doit être déclenché quand le lutin « allumette » reçoit le message « Afficher ». Ce message sera envoyé par les deux joueurs à chaque tour de jeu.
On peut bien sûr choisir n'importe quel lutin pour jouer le rôle des « allumettes ». Plutôt que de cloner un lutin, on peut l'afficher plusieurs fois grâce à la commande « estampiller ».
Pour afficher 10 allumettes, il faut l'estampiller 9 fois puisqu'une première allumette est affichée dès la création du lutin. L'élève pourra vérifier qu'il ne s'est pas trompé grâce à la question **b.**

c.

Il suffit de remplacer 9 par **nombre d'allumettes** - 1



Étape 2 Un premier joueur

a.

Ce script « de démarrage » sert pour démarrer le jeu. On choisit un nombre d'allumettes puis on les affiche. On utilise la variable « nombre d'allumettes » créée à l'étape précédente puis on envoie le message « Afficher » pour déclencher l'affichage des allumettes.

quand vert cliqué

demander Avec combien d'allumettes veux-tu jouer ? et attendre
 mettre nombre d'allumettes à réponse
 envoyer à tous Afficher et attendre

b.

Tout au long du jeu, pour savoir quel joueur doit jouer, on peut choisir d'utiliser les messages suivants :

- « Joueur1 », quand c'est au joueur 1 de jouer ;
- « Joueur2 », quand c'est au joueur 2 de jouer.

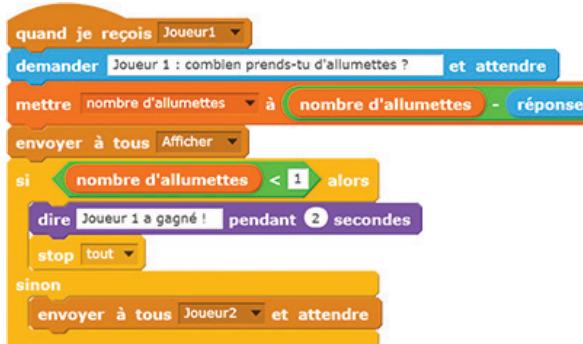
Pour démarrer la partie, on peut donc compléter le script écrit à la question précédente en envoyant le message « Joueur1 ».

quand vert cliqué

demander Avec combien d'allumettes veux-tu jouer ? et attendre
 mettre nombre d'allumettes à réponse
 envoyer à tous Afficher et attendre
 envoyer à tous Joueur1 et attendre

On écrit ensuite un script qui s'exécutera chaque fois que le joueur 1 jouera un coup, donc qui se déclenche quand il reçoit le message « Joueur1 ». On demande au joueur combien d'allumettes il veut enlever, on modifie la variable « nombre d'allumettes » en conséquence, on déclenche un nouvel affichage des allumettes, puis on teste si la partie est terminée ou pas à l'aide d'une instruction conditionnelle :

- s'il ne reste plus d'allumette, la partie est terminée et le joueur 1 a gagné ; on affiche un message correspondant et on arrête l'exécution de tous les scripts ;
- Sinon, c'est au joueur 2 de jouer : pour cela, on envoie le message « Joueur2 ».



Étape 3 Le second joueur

a.

Le fonctionnement est identique pour les deux joueurs : on peut donc dupliquer le joueur 1 et son script et se contenter de faire les modifications nécessaires (intervertir « Joueur1 » et « Joueur2 » partout dans le script).

```

quand je reçois Joueur2
demander Joueur 2 : combien prends-tu d'allumettes ? et attendre
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - réponse
envoyer à tous Afficher
si nombre d'allumettes < 1 alors
dire Joueur 2 a gagné ! pendant 2 secondes
stop tout
sinon
envoyer à tous Joueur1 et attendre

```

Pour aller plus loin

a.

L'inconvénient du jeu tel qu'il est programmé est que le premier joueur peut directement prendre toutes les allumettes et gagner au premier coup. Il faut donc limiter à 3 le nombre d'allumettes que chaque joueur peut prendre.

Un moyen simple consiste à ajouter une structure conditionnelle dans les deux scripts précédents en enlevant 3 allumettes si le joueur en a demandé davantage.

```

quand je reçois Joueur1
demander Joueur 1 : combien prends-tu d'allumettes ? et attendre
si réponse > 3 alors
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - 3
sinon
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - réponse
envoyer à tous Afficher
si nombre d'allumettes < 1 alors
dire Joueur 1 a gagné ! pendant 2 secondes
stop tout
sinon
envoyer à tous Joueur2 et attendre

```

```

quand je reçois Joueur2
demander Joueur 2 : combien prends-tu d'allumettes ? et attendre
si réponse > 3 alors
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - 3
sinon
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - réponse
envoyer à tous Afficher
si nombre d'allumettes < 1 alors
dire Joueur 2 a gagné ! pendant 2 secondes
stop tout
sinon
envoyer à tous Joueur1 et attendre

```

b.

Le script n'est pas très difficile à modifier à première vue. Il suffit de supprimer la structure conditionnelle écrite à la question précédente et d'enlever un nombre aléatoire d'allumettes compris entre 1 et 3.

Mais si on se contente de cette modification, le tour de jeu du joueur 2 s'exécute tellement vite qu'il est difficile de suivre la partie. On peut donc inciter les élèves le cas échéant à faire des pauses pour rapprocher le comportement de l'ordinateur de celui d'un humain.

On peut, par exemple, marquer une pause avant de jouer pour permettre au joueur 1 de voir l'affichage des allumettes après son tour de jeu puis de faire dire au joueur 2 combien il prend d'allumettes. Pour cela, il faut créer une nouvelle variable, qu'on peut appeler, par exemple, « Allumettes Joueur 2 ».

```

quand je reçois Joueur2
attendre 2 secondes
mettre Allumettes joueur 2 à nombre aléatoire entre 1 et 3
dire regroupe J'en prends Allumettes joueur 2 pendant 2 secondes
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - Allumettes joueur 2
envoyer à tous Afficher
si nombre d'allumettes < 1 alors
dire Joueur 2 a gagné ! pendant 2 secondes
stop tout
sinon
envoyer à tous Joueur1 et attendre

```

c.

L'idée la plus naturelle est de prendre toutes les allumettes restantes dans le cas où il reste moins de 4 allumettes. Il suffit d'ajouter une structure conditionnelle en début de script.

```

quand je reçois Joueur2
attendre 2 secondes
si nombre d'allumettes < 4 alors
mettre Allumettes joueur 2 à nombre d'allumettes
sinon
mettre Allumettes joueur 2 à nombre aléatoire entre 1 et 3
dire regroupe J'en prends Allumettes joueur 2 pendant 2 secondes
mettre nombre d'allumettes à nombre d'allumettes - Allumettes joueur 2
envoyer à tous Afficher
si nombre d'allumettes < 1 alors
dire Joueur 2 a gagné ! pendant 2 secondes
stop tout
sinon
envoyer à tous Joueur1 et attendre

```

Bien entendu, on peut essayer d'élaborer des stratégies plus complexes, c'est d'ailleurs l'objet de la question d.

d.

On peut se rendre compte que si on laisse 4 allumettes à son adversaire, on gagnera forcément au coup suivant (c'est ce qu'on appelle une « position gagnante ») :

- s'il en prend 1, on en prendra 3 ;
- s'il en prend 2, on en prendra 2 ;
- s'il en prend 3, on en prendra 1.

Mais si cela permet d'anticiper avant le dernier coup, comment faire pour arriver à laisser 4 allumettes à son adversaire ?

On peut constater que si on laisse 8 allumettes à son adversaire, on se ramène à la situation précédente :

- s'il en prend 1, on en prendra 3, il en restera 4 ;
- s'il en prend 2, on en prendra 2, il en restera 4 ;
- s'il en prend 3, on en prendra 1, il en restera 4.

Plus généralement, il suffit de laisser à chaque fois à son adversaire un nombre d'allumettes qui est un multiple de 4. On pourra toujours au coup d'après laisser à nouveau un multiple de 4 et on prendra ainsi toujours la dernière allumette.

Ceci est toujours possible, sauf bien sûr si le nombre d'allumettes présentes est déjà un multiple de 4.

Pour laisser un nombre d'allumettes multiple de 4 à son adversaire, s'il reste n allumettes, il faut prendre r allumettes où r est le reste de la division euclidienne de n par 4.

En effet, si r est le reste de la division euclidienne de n par 4, alors $n \equiv r [4]$ donc $n - r \equiv 0 [4]$ donc $n - r$ est un multiple de 4.

Pour modifier le script du joueur 2 de façon à ce qu'il laisse systématiquement un nombre d'allumettes multiple de 4, il faut prélever **nombre d'allumettes modulo 4** allumettes.



Ainsi, l'ordinateur gagnera systématiquement, sauf si le joueur 1 lui laisse systématiquement un nombre d'allumettes multiple de 4, ce qui n'est possible que si le nombre de départ n'est pas déjà un multiple de 4.

Problèmes transversaux

Introduction

La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

- Pour ce faire, une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qui nécessite de s'appuyer sur le corpus de connaissances et de méthodes notamment du cycle 4. Il est intéressant, en particulier, de confronter les élèves à des problèmes qui font appel à des connaissances transversales, c'est-à-dire à différentes parties du programme du cycle. C'est ce qui justifie l'existence de cette section « Problèmes transversaux », dont la difficulté est progressive et qui se termine logiquement par des exemples choisis parmi les sujets du DNB.
- Résoudre des problèmes fait appel à des réflexes intellectuels et des automatismes tels que le calcul mental ou les conversions,

ce qui, en libérant la mémoire, permet souvent de centrer la réflexion sur l'élaboration d'une démarche.

- Qu'ils soient internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines, ces problèmes sont donc naturellement en lien avec les domaines du socle ; le lien avec ces domaines et avec les autres disciplines est indiqué.
- Ils peuvent être traités à tout moment de l'année, en classe, en situation frontale ou en groupes si le problème s'y prête, en salle informatique si nécessaire, ou lors de devoirs en temps libre qui sont l'occasion de demander aux élèves l'envoi de fichiers de géométrie dynamique, de feuilles de tableur ou d'algorithmes. Ainsi, l'utilisation des TICE permet d'inciter les élèves soit à la vérification des résultats issus de leur démarche, soit à émettre des conjectures en amont, ce qui peut améliorer l'appropriation du problème et faciliter l'élaboration d'une démarche.

1 Poker

Notions abordées :

- enchaînement d'opérations
- calculs avec les nombres relatifs

Bilan pour chaque joueur :

- Hélène : $H = 3 \times 100 + 10 \times 6 + 3 \times 5 - 200$
 $= 300 + 60 + 15 - 200$
 $= 375 - 200 = 175$

Hélène a gagné 175 €.

- Alban : $A = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 5 \times 4 - 200$
 $= 200 + 50 + 20 - 200 = 70$

Alban a gagné 70 €.

- Caroline : $C = 13 \times 10 + 5 \times 5 - 200$
 $= 130 + 25 - 200$
 $= 155 - 200 = -45$

Caroline a perdu 45 €.

- Fathi : $F = 100 + 2 \times 10 + 2 \times 5 - 200$
 $= 100 + 20 + 10 - 200$
 $= 130 - 200 = -70$

Fathi a perdu 70 €.

- Sam : $S = 6 \times 10 + 5 - 200$
 $= 60 + 5 - 200$
 $= 65 - 200 = -135$

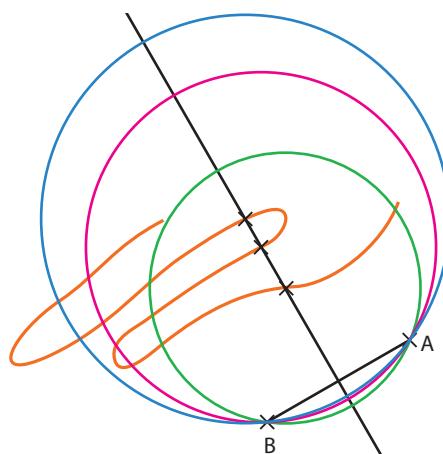
Sam a perdu 135 €.

On pourra faire remarquer aux élèves que la somme des gains et des pertes de chacun doit être égale à 0.

$$175 + 75 - 45 - 135 - 70 = 250 - 250 = 0.$$

2 Centre d'un cercle

Notion abordée : médiatrice d'un segment



3 Produit

Notions abordées :

- commutativité du produit
- multiple de 10

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99 = 1 \times 3 \times \dots \times 99 \times (2 \times 5)$$
$$= 1 \times 3 \times \dots \times 99 \times 10$$

Ce produit est un multiple de 10 donc il se termine par 0.

4 Rendez-vous

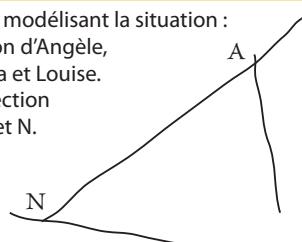
Notions abordées :

- inégalité triangulaire
- échelle

Voici un schéma à main levée modélisant la situation :

le point A représente la maison d'Angèle,
les points N et L celles de Nina et Louise.

Le point L se trouve à l'intersection
des demi-droites d'origine A et N.



En utilisant l'échelle, on
trouve que : $AN = 150 \text{ m}$.

On peut appliquer l'inégalité triangulaire dans le triangle ANL :

$$AN < AL + LN \text{ donc } AL + LN > 150 \text{ m}$$

Angèle est donc sûre qu'en passant chez Louise pour se rendre chez Nina, elle aura plus de 150 m à parcourir.

5 Sur le trajet du collège

Notions abordées :

- calculer des durées et des horaires
- exploiter la représentation graphique d'une grandeur

1. Le graphique 1 correspond à son trajet à pied car c'est le trajet le plus long.

Le graphique 2 correspond à son trajet en tramway car il y a des temps d'attente.

Le graphique 3 correspond à son trajet à vélo car la vitesse est constante et ce trajet est plus rapide que le trajet 1.

2. Tous les matins, Audrey parcourt 1,7 kilomètre.

3. a. Au bout de 12 minutes, Audrey a parcouru 0,6 kilomètre.

b. Pour faire 1,2 kilomètre, Audrey a mis 16 minutes.

c. Audrey a marché 600 mètres pendant 12 minutes, puis elle a attendu le tramway 2 minutes, elle a ensuite fait 700 mètres en 6 minutes avec le tramway, puis a elle a terminé les 200 derniers mètres en 3 minutes.

4. Pour être en classe à 8 h 05 en partant à 7 h 41, Audrey doit mettre moins de 24 minutes.

Elle met 28 minutes à pied, donc c'est trop long.

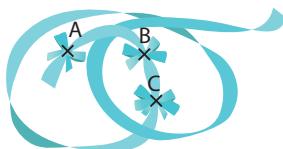
Elle met 21 minutes en tramway, elle arrivera juste à l'heure.

Elle met 10 minutes à vélo, elle sera bien à l'heure.

6 Le ruban de Constance

Notions abordées :

- fractions
- proportionnalité



Un tour correspond à $\frac{1}{24}$ de la longueur du ruban.

$\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ donc avec la longueur AC, Constance peut faire 3 tours.

7 Salle de spectacles

Notion abordée : division euclidienne, multiples, diviseurs

1. $92 = 44 \times 2 + 4$.

Pour arriver à la place 92, il y a deux rangées complètes et il faut prendre le 4^e fauteuil de la 3^e rangée, donc le fauteuil C4.

2. $500 = 44 \times 11 + 16$.

La place 500 est le numéro 16 du 12^e rang, la 12^e lettre de l'alphabet est la lettre K, donc la nouvelle numérotation du fauteuil numéro 500 est K16.

3. Le E est la 5^e lettre de l'alphabet.

Le fauteuil E25 est le 25^e fauteuil du 5^e rang.

$$4 \times 44 + 25 = 201 + 25 = 226.$$

Le numéro du fauteuil E25 était le 226.

4. $878 = 44 \times 19 + 42$

$$879 = 44 \times 19 + 43$$

$$880 = 44 \times 20 + 0$$

$$881 = 44 \times 20 + 1$$

Les trois premières places sont au 20^e rang, places 42, 43 et 44.

La dernière place est la première place du 21^e rang.

Axel, Léna, Llona et Lilou ne seront pas à côté.

8 Fête foraine

Notion abordée : probabilités

1. Dans le premier stand, on gagne une peluche si l'on tire 1 boule rouge. On sait qu'il y a 50 % de chances de gagner une peluche, donc la moitié des boules présentes dans l'urne sont des boules rouges. Le nombre de boules rouges est donc égal à la somme des boules vertes et blanches. Cette urne contient donc 11 boules rouges.

2. Dans le second stand, on gagne une montre si on obtient un multiple de 3 en tournant la roue. Il y a donc deux secteurs qui permettront de gagner une montre. On a donc 2 chances sur 8 de gagner. La probabilité de gagner une montre est

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

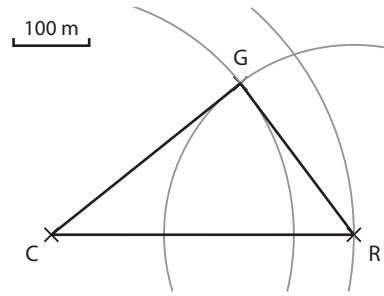
On a donc 25 % de chances de gagner une montre.

9 Chasse au trésor

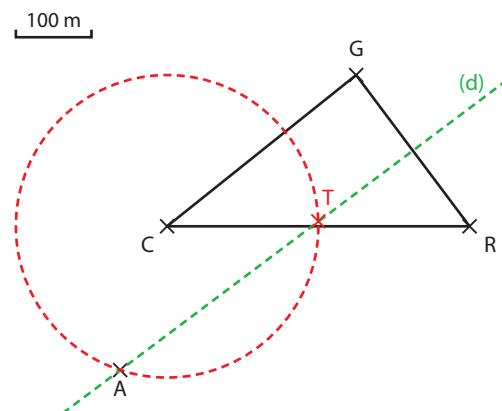
Notions abordées :

- reproduire un triangle
- médiatrice
- définition du cercle

1. Pour reproduire la carte, on reporte les longueurs en utilisant le compas.



2. On sait que le trésor est à 200 m de la cascade, il est donc situé sur le cercle de centre C et de rayon 200 m. On trace ce cercle en rouge en utilisant le compas et l'échelle. On sait également qu'il se trouve à égale distance de G et de R, il appartient donc à la médiatrice de [GR]. On trace cette médiatrice (d) en vert. Le trésor est donc situé à l'intersection de la médiatrice (d) et du cercle. C'est donc le point d'intersection qui se trouve à l'intérieur du triangle.



10 Les jardins de Villandry

Notions abordées :

- périmètre
- échelle

On commence par mesurer le périmètre du polygone tracé en jaune, on trouve environ 8,6 cm.

En utilisant l'échelle, on lit que 1 cm représente 100 m. Donc 8,6 cm représentent 860 m, soit 8,6 km.

La longueur du trajet d'Anna sera donc environ de 8,6 km.

11 La tache de chocolat

Notions abordées :

- parallélogramme
- angles alternes-internes

On sait que dans le triangle SRO : $\widehat{OSR} = 110^\circ$ et $\widehat{SRO} = 35^\circ$.

Or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\text{Donc } \widehat{SOR} = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ = 35^\circ.$$

On sait que OURS est un parallélogramme donc par définition les droites (SR) et (UR) sont parallèles.

Elles sont coupées par la sécante (OR). Donc les angles alternes-internes \widehat{SOR} et \widehat{ORU} formés par ces trois droites sont de même mesure. Donc $\widehat{ORU} = \widehat{SOR} = 35^\circ$.

12 Accros au téléphone

Notions abordées :

- interpréter un graphique
- pourcentages
- proportionnalité

1. 525 élèves sur 709 élèves ont un téléphone portable :

$$\frac{525}{709} \approx 0,74.$$

Donc environ 74 % des élèves de ce collège ont un téléphone portable, cela représente donc près des trois quart (75 %) des élèves de ce collège.

2. $\frac{68}{100} \times 525 = 357$.

357 élèves ont un forfait bloqué.

3. Le secteur angulaire représentant les élèves ayant une carte prépayée rechargeable est plus petit qu'un angle droit, donc moins d'un quart des élèves ont une carte prépayée.

4. On trouve que le secteur angulaire représentant les élèves ayant un forfait non bloqué mesure environ 69° .

La mesure du secteur angulaire est proportionnelle à l'effectif. Le tableau suivant est donc un tableau de proportionnalité :

Mesure de l'angle (en $^\circ$)	360°	69°
Effectif	525	y

Donc $y = 69 \times \frac{525}{360} \approx 100$.

Environ 100 élèves de ce collège ont un forfait non bloqué.

5. 39 % des élèves n'ont jamais eu de conflits liés au téléphone portable avec leurs parents, donc 61 % des 525 élèves ont déjà été en conflit.

$\frac{61}{100} \times 525 = 0,61 \times 525 \approx 320$.

Donc 320 élèves de ce collège ont déjà été en conflit avec leurs parents à cause du téléphone portable.

13 La pièce de métal

Notions abordées :

- volumes prisme droit, cylindre
- aire latérale cylindre, prisme
- valeurs approchées
- proportionnalité

1. • On calcule le volume du prisme V_1 :

$$V_1 = \frac{6,4 \times 12}{2} \times 23 = 883,2 \text{ cm}^3.$$

• On calcule le volume du trou cylindrique V_2 :
 $V_2 = \pi \times 1,6^2 \times 23 = 58,88 \times \pi \text{ cm}^3 \approx 185 \text{ cm}^3$.

• On calcule le volume de la pièce de métal V :
 $V = V_1 - V_2 \approx 883,2 - 185 = 698,2 \text{ cm}^3$.

• On calcule le volume de 100 000 pièces de métal :
 $698,2 \times 100\,000 = 69\,820\,000 \text{ cm}^3 = 69,82 \text{ m}^3$.

Donc le volume de métal nécessaire de 100 000 pièces sera environ de $69,82 \text{ m}^3$.

2. • On calcule l'aire des faces latérales du prisme A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= 13,6 \times 23 + 13,6 \times 12 + 13,6 \times 6,4 \\ &= 13,6 \times (23 + 12 + 6,4) = 563,04 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

• On calcule l'aire des deux bases percées A_2 :

$$A_2 = \left(\frac{6,4 \times 12}{2} - \pi \times 1,6^2 \right) \times 2 \approx 60,7 \text{ cm}^2.$$

• On calcule l'aire de la face latérale du cylindre A_3 :
 $A_3 = 2 \times \pi \times 1,6 \approx 10 \text{ cm}^2$.

• On calcule la surface à laquer A pour une pièce :
 $A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 563,04 + 60,7 + 10 = 633,74 \text{ cm}^2$.

• On calcule la surface à laquer A pour 100 000 pièces :
 $633,74 \times 100\,000 = 63\,374\,000 \text{ cm}^2 = 6\,337,4 \text{ m}^2$.

Sachant qu'il faut 15 litres de peinture pour laquer 200 m^2 , il faut donc $0,075$ litres pour laquer 1 m^2 .

$$6\,337,4 \times 0,075 = 475,305.$$

Il faudra donc environ 476 litres de peinture pour 100 000 pièces de métal.

14 Abri de jardin

Notions abordées :

- proportionnalité
- volume pavé
- valeurs approchées

1. • On calcule le poids de 300 parpaings :

$$300 \times 10 = 3\,000 \text{ kg} = 3 \text{ tonnes.}$$

Comme la charge pouvant être transportée est de 1,7 tonne, il devra effectuer au moins deux allers-retours pour transporter les 300 parpaings jusqu'à sa maison.

• On vérifie que 150 parpaings entrent dans le fourgon. Si l'on met :

• 5 parpaings dans la longueur, on obtient :

$$5 \times 50 = 250 \text{ cm} < 260 \text{ cm.}$$

• 9 parpaings dans la hauteur, on obtient :

$$9 \times 20 = 180 \text{ cm} < 184 \text{ cm.}$$

• 15 parpaings dans la largeur, on obtient :

$$15 \times 10 = 150 \text{ cm} < 156 \text{ cm.}$$

On peut mettre $9 \times 5 \times 15 = 675$ parpaings en volume dans le fourgon. Donc on peut évidemment mettre 150 parpaings à chaque voyage.

Deux allers-retours suffiront donc pour transporter les 300 parpaings jusqu'à sa maison.

2. • On calcule le cout de la location :

2 allers-retours : $(2 \times 10) \times 2 = 40 \text{ km}$, donc le tarif de la location sera de 55 €.

• On calcule le prix du carburant :

Le fourgon faisant du 8 litres aux 100 km, pour parcourir 40 km, il consommera 2,5 fois moins :
 $8 \div 2,5 = 3,2$.

• On calcule le cout du carburant : $3,2 \times 1,5 = 4,80 \text{ €}$.

• Le cout total sera donc de $55 + 4,8 = 59,80 \text{ €}$.

3. $\frac{30}{48} = 0,625$ et $\frac{50}{55} \approx 0,909$ donc $\frac{30}{48} \neq \frac{50}{55}$.

Les tarifs de location du fourgon ne sont donc pas proportionnels à la distance maximale autorisée par jour.

15 Le vélo d'Anthony

Notions abordées :

- fractions
- proportionnalité
- périmètre du cercle
- conversion longueur

1. $3 \times 6 = 18$.

Le vélo d'Anthony a 18 vitesses.

2. $712 \div 28 = 25,4$.

Un pouce mesure environ 25,4 mm soit 2,54 cm.

3. a. $36 \div 12 = 3$.

Si la chaîne est sur le 2^e plateau (36 dents) et sur le petit pignon (12 dents), la roue arrière fait 3 tours lorsqu'Anthony fait un tour de pédale.

b. Si la chaîne est sur le grand plateau et sur le pignon à 21 dents, la roue arrière fait $\frac{48}{21} = \frac{16}{7}$ de tours lorsqu'Anthony fait un tour de pédale.

4. Anthony doit faire 2 km soit 2 000 m.

La chaîne est sur le 2^e plateau (36 dents) et sur le pignon à 16 dents, la roue fait donc $\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$ tours quand Anthony fait un tour de pédale.

Distance parcourue en un tour de roue :

$$715 \times \pi \approx 2\,246 \text{ mm} \approx 2,246 \text{ m.}$$

Distance parcourue en un tour de pédale :

$$2,246 \times \frac{36}{16} \approx 5 \text{ m.}$$

Nombre de tours de pédale pour faire 2 000 m :
 $2\,000 \div 5 = 400$.

Anthony a fait environ 400 tours de pédales pour se rendre au collège.

16 Sirop de menthe

Notions abordées :

- fraction
- volume du cylindre
- calcul littéral
- conversion volume, capacité

• Volume de sirop de menthe :

La bouteille de sirop est un cylindre de rayon 4 cm soit 0,4 dm et de hauteur 2 dm.

$$\frac{3}{4} \times \pi \times 0,4 \times 0,4 \times 2 = 0,24 \pi \approx 0,75 \text{ dm}^3 = 0,75 \text{ L.}$$

Une dose de sirop pour 7 doses d'eau, donc avec 0,75 L de sirop on peut faire : $0,75 + 0,75 \times 7 = 8 \times 0,75 = 6$.

- Volume de menthe à l'eau pour 40 verres :

$$40 \times \frac{\pi \times 5}{3} (4^2 + 2^2 + 4 \times 2) \approx 5\,865 \text{ cm}^3 \approx 5,865 \text{ dm}^3 \approx 5,865 \text{ L.}$$

Cali ne devra pas acheter d'autre bouteille de menthe à l'eau.

17 Médor, rapporte !

Première partie du parcours : 100 m en 8,4 s

Deuxième partie du parcours :

$$\frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ m en } \frac{1}{3} \times 8,4 = 2,8 \text{ s}$$

Donc le chien a parcouru $100 + 50 = 150$ m en $8,4 + 2,8 = 11,2$ s.

Ainsi, la vitesse moyenne est :

$$v = \frac{150}{11,2} = \frac{375}{28} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{Soit, en km.h}^{-1} : v = \frac{375}{28} \times \frac{3\,600}{1\,000} = \frac{675}{14} \approx 48,2$$

Ainsi, le chien a couru à environ 48,2 km/h.

18 QCM

1. La note maximale est atteinte lorsque les 5 réponses sont justes, soit $5 \times (+1) = +5$.
2. La note minimale est obtenue lorsque les 5 réponses sont fausses, soit $5 \times (-0,5) = -2,5$.
3. Si un élève a 1 réponse juste (+1), 2 réponses fausses ($2 \times (-0,5) = -1$) et 2 non-réponses ($2 \times 0 = 0$), alors il a comme note :

$$(+1) + (-1) + 0 = 0$$

Donc un score nul peut être obtenu.

Liste des différentes manières d'obtenir un score nul :

- aucune réponse proposée : $5 \times 0 = 0$;
- 1 réponse juste, 2 réponses fausses et 2 non-réponses.

4. Pour pouvoir attribuer une note à Erwan, il faut commencer par corriger le QCM.

$$\bullet \frac{5}{6} - \frac{2}{5} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} - \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{25}{30} - \frac{12}{30} = \frac{13}{30}$$

$$\bullet 3(x+7) = 3x+21$$

$$\bullet \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

- En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle DFE rectangle en E, on a :

$$DE^2 = DF^2 + FE^2$$

$$DE^2 = 7,3^2 + 4,5^2$$

$$DE^2 = 73,54$$

$$DE = \sqrt{73,54}$$

$$DE \approx 8,6$$

- La bonne figure est



Ainsi, Erwan a la première réponse juste (+1), la deuxième fausse (-0,5), la troisième non répondue (0), la quatrième juste (+1) et la cinquième fausse (-0,5). Il a donc $+1 - 0,5 + 0 + 1 - 0,5 = 1$.

Erwan a obtenu 1 à son évaluation par QCM.

19 L'âge de l'Univers

1. Vu que l'Univers a 13,8 milliards d'années, les premiers êtres vivants sont apparus $13,8 - 3,5 = 10,3$ milliards d'années après la naissance de l'Univers.

Or 1 année correspond à 13,8 milliards d'années, donc les premiers êtres vivants sont apparus $10,3 \div 13,8 \approx 0,75$ an après la naissance de l'Univers, soit au $0,75 \times 365 = 272$ e jour. Le 272^e jour est le 29 septembre.

Ainsi, à l'échelle d'une année, les premiers êtres vivants sont apparus le 29 septembre.

2. On utilise le même raisonnement :

$$((13,8 \times 10^9 - 35\,000) \div (13,8 \times 10^9)) \times 365 \approx 364,99$$

Ainsi, les homos sapiens sont apparus le 30 décembre dans l'échelle de Lola.

Il est même possible d'être plus précis et de déterminer l'heure :

$$0,99 \times 24 \approx 23,97$$

$$0,97 \times 60 \approx 58,66$$

$$0,66 \times 60 \approx 40$$

Donc, les premiers homos sapiens sont apparus le 30 décembre à 23 h 58 min 40 s.

Donc, en comparaison de l'Univers qui aurait 1 an, l'homme aurait 1 jour.

20 Le lecteur MP4

$$\begin{aligned} 1. & 232 + 211 + 214 + 175 + 336 + 191 + 184 + 217 \\ & = 1\,760 \text{ secondes} = 29 \text{ minutes 20 secondes} \end{aligned}$$

$$2. 3 \text{ minutes 30 secondes} = 210 \text{ secondes}$$

Il y a donc 5 chansons parmi les 8 au-delà de 210 secondes, soit $(5 \times 100) \div 8 = 62,5\%$.

3. Il y a 3 chansons de Maen parmi un total de 8, donc Louise a 3 chances sur 8 de tomber sur une chanson de Maen, soit une probabilité de $\frac{3}{8}$.

4. D'après le graphique, Louise a écouté Hudad 4 fois sur les 25 écoutes. Donc la fréquence est $f = \frac{4}{25} = 0,16 = 16\%$.

21 Location d'un van aménagé

- Avec le forfait 2 000 km, le prix à payer est :

$$1\,090 + 200 \times 0,4 = 1\,170 \text{ €}$$

Donc le forfait 2 000 km est plus avantageux.

- Avec le forfait 2 000 km, le prix à payer est :

$$1\,090 + 900 \times 0,4 = 1\,450 \text{ €}$$

Donc le forfait illimité est plus avantageux.

- Appelons x le nombre de km à rajouter aux 2 000 du premier forfait.

On cherche les valeurs de x telles que :

$$1\,090 + 0,4x > 1\,290$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut utiliser un tableur, par exemple.

	A	B
1	x	Prix du forfait 2000 km
2	0	1090
3	100	1130
4	200	1170
5	300	1210
6	400	1250
7	500	1290
8	600	1330
9	700	1370

Il semble qu'à partir de 2 500 km, le forfait illimité devienne plus intéressant.

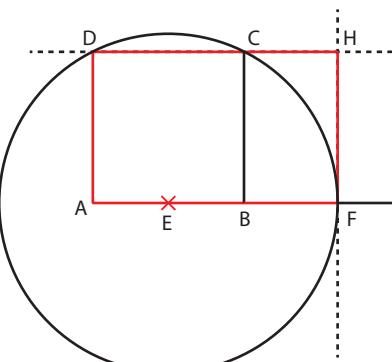
En effet, $1\,090 + 0,4x > 1\,290$ signifie que $0,4x > 200$ donc

$$x > \frac{200}{0,4} \text{ soit } x > 500.$$

La résolution des inéquations est traitée dans le chapitre 17. On peut attendre seulement la conjecture avec le tableau.

22 Autour du nombre d'or

-



- Le triangle ECB est rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :

$$EC^2 = EB^2 + BC^2$$

$$EC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$EC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Donc

$$EC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On vérifie ensuite que le rectangle AFHD est bien un rectangle d'or :

$$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

3. a. $1 + \frac{1}{1} = 2$

b. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$

c. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

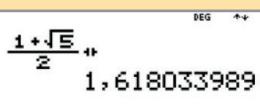
d. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$

4.

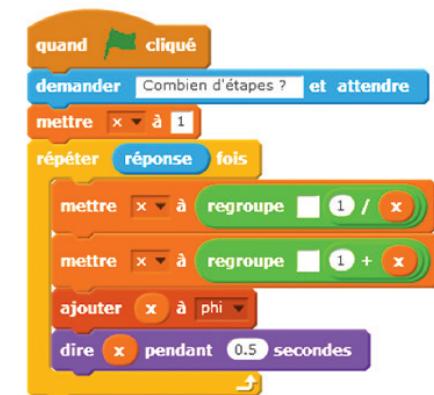


On remarque que pour l'étape 15 et les suivantes, la valeur renvoyée est la même : 1,618 034. Pourtant ces valeurs ne sont pas égales. Ce script Scratch n'affiche que des valeurs approchées avec une précision de 6 chiffres après la virgule. Il semble que plus on avance dans les étapes et plus les valeurs sont proches d'une valeur autour de 1,618 034.

Voici une valeur approchée du nombre d'or donnée par la calculatrice :



Le script suivant permet d'afficher des valeurs approchées d'une précision de 15 chiffres après la virgule.



quand espace est cliqué

supprimer l'élément tout de la liste phi

On obtient les mêmes valeurs approchées à partir de l'étape 38 : 1,618 033 988 749 895.

On peut, en complément, demander aux plus rapides de construire un script qui demande à l'utilisateur le nombre de décimales entre 0 et 15 et qui renvoie la valeur approchée du nombre d'or correspondante.



23 La formule la plus avantageuse

Appelons x le nombre de voyages achetés.

Sans abonnement, le prix à payer pour x voyages est $40x$.

Avec l'abonnement, le prix à payer est $442 + 20x$.

On cherche les valeurs de x de sorte que :

$$40x > 442 + 20x$$

$$\text{Soit } 20x > 442$$

$$\text{Donc } x > 22,1$$

Il faut donc faire au moins 23 voyages pour que la formule avec l'abonnement devienne intéressante.

Comme dans l'exercice 21, les élèves peuvent conjecturer les solutions de l'inéquation à l'aide d'un tableau.

24 Centre de loisirs

Le tarif du centre de loisirs dépend du quotient familial. Il faut donc commencer par déterminer celui de M. et Mme Dupont. $QF = (40\ 500 \div 12) \div 3$ (on divise par 3 car le couple est marié et a 2 enfants, voir tableau doc. 1.)

$$QF = 1\ 125$$

Ainsi, c'est le 3^e tarif qui sera appliquée à M. et Mme Dupond.

Montant pour la garde des enfants :

$$15 \times 5 + 5 \times 4 \times 2 = 115$$

Ainsi, M. et Mme Dupont vont payer 115 € pour faire garder leurs enfants pendant ces vacances.

25 Globule rouge

Pour déterminer la hauteur de la colonne obtenue après avoir empilé tous les globules rouges d'un adulte, il faut connaître la hauteur d'un globule rouge ainsi que le nombre total de globules rouges contenu dans le sang.

- Nombre de globules rouges :

D'après le doc. 1, 1 mm³ de sang contient 5 millions = 5×10^6 globules rouges.

Or, le corps d'un adulte renferme 5 L de sang.

$$5 \text{ L} = 5 \text{ dm}^3 = 5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Ainsi, il y a $5 \times 10^6 \times 5 \times 10^6 = 25 \times 10^{12}$ globules rouges dans le corps humain.

- Hauteur d'un globule rouge :

D'après le doc. 1, 1 mm³ de sang contient 5 millions = 5×10^6 globules rouges. De plus, d'après le doc. 2, 45 % du sang sont composés de globules rouges.

Donc 5 millions de globules rouges ont un volume de :

$$1 \times \frac{45}{100} = 0,45 \text{ mm}^3.$$

Et donc le volume d'un globule rouge est :

$$0,45 \div (5 \times 10^6) = 9 \times 10^{-8} \text{ mm}^3$$

D'après le doc. 3, un globule a une forme assimilable à un cylindre de diamètre 8 µm soit de rayon 4×10^{-3} mm.

Or, le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$.

Ainsi, la hauteur d'un globule rouge est :

$$9 \times 10^{-8} \div (\pi \times (4 \times 10^{-3})^2) \approx 1,8 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

- On peut donc déterminer la hauteur de la colonne :
 $25 \times 10^{12} \times 1,8 \times 10^{-3} \approx 4,476$ 2 $\times 10^{10}$ mm $\approx 44\,762$ km
La Terre a une circonférence de 40 075 km. Donc la colonne faite avec les globules rouges du corps d'un adulte dépasse la circonférence de la Terre. On peut en faire plus que le tour.

26 Les géants

On commence par mesurer la longueur du pied du géant, on trouve 3,4 cm. On va la comparer à celle de la personne au premier plan à gauche. La mesure de la longueur du pied de la personne est d'environ 0,6 cm et cette personne mesure environ 4 cm sur la photo. On peut calculer le rapport entre la longueur du pied et la taille de la personne : $\frac{0,6}{4} = 0,15$

Léonard de Vinci, dans les *Proportions du corps humain*, communément appelé l'*Homme de Vitruve* (vers 1492), écrivait que « le pied est un septième de l'homme ». Or $\frac{1}{7} \approx 0,143$.

En supposant que le géant soit dans les mêmes proportions, on peut déterminer la taille qu'aurait le géant s'il rentrait sur la photo :

	La personne à gauche	Le géant
Mesures des pieds (en cm)	0,6	3,4
Taille (en cm)	4	$\frac{4}{0,6} \times 3,4 \approx 22,7$

Le géant aurait sur la photo une taille d'environ 22,7 cm. Maintenant, nous allons estimer la taille réelle. Supposons pour cela que la personne à gauche au premier plan mesure 180 cm.

	La personne à gauche	Le géant
Taille sur la photo (en cm)	4	22,7
Taille réelle (en cm)	180	$\frac{180}{4} \times 22,7 = 1\,021,5$

Le géant mesure donc environ 10 m.

Toute la difficulté de cette situation pour les élèves se trouve dans la prise de décision pour les informations manquantes. Il est intéressant que l'élève se questionne sur les données, en se demandant si elles ont ou non de l'importance. De même, lorsqu'une information importante est absente, l'élève se demandera quelle conséquence cela aura sur la suite du raisonnement et sur son résultat s'il choisit lui-même la valeur (par rapport aux résultats des autres élèves). Il peut donc être intéressant de comparer les différentes estimations de la taille du géant pour observer l'impact de ces prises de décision sur le résultat et le raisonnement. Si certains élèves ont du mal à démarrer, on pourra les questionner sur les informations manquantes et distribuer des questions intermédiaires sous forme de « coup de pouce ».

27 Le téléphérique

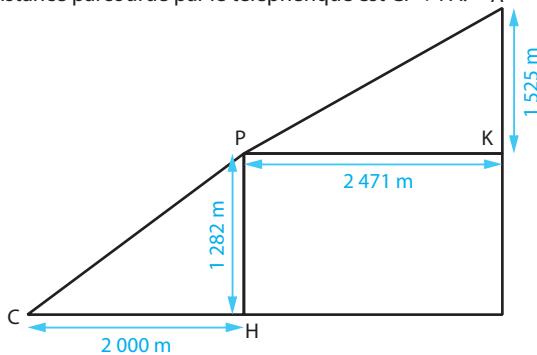
Pour évaluer la vitesse moyenne du téléphérique, il nous faut deux informations : la distance parcourue et la durée du parcours.

En effet, vitesse moyenne = $\frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}}$.

Pour estimer la distance parcourue, nous allons modéliser la situation :

Le point C représente Chamonix, le point P le plan de l'Aiguille et le point A l'aiguille du Midi.

La distance parcourue par le téléphérique est CP + PA. A



Attention, les triangles CPH et PKA ne sont pas dans le même plan, comme on peut le voir sur la carte.

Les distances PH et AK sont des différences d'altitude.

$$PH = 2\,317 - 1\,035 = 1\,282 \text{ m}$$

$$AK = 3\,842 - 2\,317 = 1\,525 \text{ m}$$

Les distances CH et PK sont les distances « au sol », on les obtient à l'aide de la carte.

Sur la carte, on mesure le segment qui donne l'échelle en bas à gauche, puis les deux segments noirs (qui représentent CH et PK).

Distance sur la carte (en cm)	1,7	2,1
Distance réelle (en m)	2 000	$\frac{2\,000 \times 2,1}{1,7} \approx 2\,471$

Pour déterminer les distances CP et PA, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CHP et PKA.

$$\begin{aligned} PC^2 &= CH^2 + HP^2 \\ PC^2 &= 2\,000^2 + 1\,282^2 \\ PC &= \sqrt{2\,000^2 + 1\,282^2} \\ &\approx 2\,376 \text{ m} \\ PA^2 &= PK^2 + KA^2 \\ PA^2 &= 2\,471^2 + 1\,525^2 \\ PA &= \sqrt{2\,471^2 + 1\,525^2} \\ &\approx 2\,904 \text{ m} \end{aligned}$$

La distance parcourue par le téléphérique est donc :

$$2\,376 + 2\,904 = 5\,280 \text{ m} = 5,28 \text{ km}$$

La durée du parcours est donnée, elle est de 20 minutes soit $\frac{1}{3}$ d'heure.

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{5,28}{\frac{1}{3}} = 15,84 \text{ km/h}$$

La vitesse moyenne du téléphérique est d'environ 15,84 km/h.

Dans cet exercice, la difficulté est la modélisation de la situation. Il faut prendre en compte à la fois les différences d'altitude et les distances au sol. Les élèves ont tendance à n'utiliser qu'un seul de ces paramètres dans le calcul de la distance parcourue. On peut leur proposer de schématiser la situation pour qu'ils se rendent compte de leur erreur. Certains élèves peuvent schématiser la situation en ne faisant qu'un seul triangle rectangle (donc sans différencier les pentes des deux parties du parcours) et en mesurant le segment qui va de Chamonix directement à l'aiguille du Midi sur la carte, ce n'est donc pas le parcours réel mais on peut faire remarquer que le résultat reste très proche de la valeur trouvée.

28 Ravaillement d'un observatoire

Calculons l'aire latérale de l'observatoire en deux parties :

1. Aire de la demi-sphère surmontant l'observatoire :

$$\frac{4\pi \times 3^2}{2} = \frac{4\pi \times 9}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi \text{ m}^2$$

2. Aire latérale du cylindre de révolution :

$$6\pi \times 5 = 30\pi \text{ m}^2$$

Donc l'aire latérale de l'observatoire est :

$$18\pi + 30\pi = 48\pi \text{ m}^2$$

• Étude de l'offre 1

Un litre de la peinture de l'offre n°1 permet de recouvrir 6 m². De combien de litres de cette peinture a-t-on besoin pour repeindre intégralement l'observatoire ?

$$\frac{48\pi}{6} = 8\pi \approx 25,13 \text{ L}$$

Un pot contenant 10 L, il faudra en acheter 3 (et il restera un peu moins de 5 L de peinture, mais c'est plus prudent en cas de gaspillage...). On profite de l'offre « 300 € le lot de 3 ».

Le choix de cette offre revient donc à 300 €.

• Étude de l'offre 2

Un litre de la peinture de l'offre n°2 permet de recouvrir 8 m². De combien de litres de cette peinture a-t-on besoin pour repeindre intégralement l'observatoire ?

$$\frac{48\pi}{8} = 6\pi \approx 18,85 \text{ L}$$

Un pot contenant 12 L, il faudra en acheter 2 (et il restera un peu plus de 5 L de peinture, c'est-à-dire un peu plus que dans l'offre n°1).

Le choix de cette offre revient donc à $2 \times 125 = 250$ €.

• Étude de l'offre 3

Un litre de la peinture de l'offre n°3 permet de recouvrir

7 m^2 . De combien de litres de cette peinture a-t-on besoin pour repeindre intégralement l'observatoire ?

$$\frac{48\pi}{7} \approx 21,54 \text{ L}$$

Un pot contenant 15 L, il faudra en acheter 2 (et il restera un peu plus de 8 L de peinture, c'est-à-dire plus que dans l'offre n°2).

Le choix de cette offre revient donc à :

$2 \times 120,95 = 241,9 \text{ €}$. L'offre 3 est donc la moins chère.

29 Cargo à voile

Prérequis : trigonométrie.

Un peu dans l'esprit des tâches complexes, il s'agit ici, pour résoudre la dernière question, d'identifier les données utiles.

1. La vitesse du vent est de 24 km/h sur le pont du cargo ; on ajoute 25 % : $24 \times 1,25 = 30$. Donc la vitesse du vent là-haut est 30 km/h.

2. Dans le triangle rectangle de la figure, on peut utiliser la trigonométrie. Si L est la longueur de la corde en mètres, alors :

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{150}{L}$$

ce qui donne $L = \frac{150}{\sin 45^\circ} \approx 212,1$.

3. Économie de carburant par an : 20 % des 3 500 000 litres soit :

$$\frac{20 \times 3\,500\,000 \text{ litres}}{100} = 700\,000 \text{ litres.}$$

À 0,42 €/L, cela représente $0,42 \text{ €} \times 700\,000 = 294\,000 \text{ €}$ d'économies par an.

294 000 € sont économisés en 1 an, donc 2 500 000 € (cout de l'équipement NouvelleVague) seront couverts au bout de :

$$\frac{2\,500\,000}{294\,000} \approx 8,5 ; \text{ soit } 8 \text{ ans et demi.}$$

30 Triangles constructibles

Il est souhaitable de laisser aux élèves le soin d'essayer de construire les triangles pour qu'ils retrouvent eux-mêmes la propriété de constructibilité.

- Si on obtient « 1 » avec le premier dé et « 3 » avec l'autre, on ne peut pas construire le triangle ABC : en effet, $1 + 3 < 7$ donc $AC + BC < AB$ (le cercle de centre B et de rayon 1 et celui de centre A et de rayon 3 se coupent pas).
- Si on obtient « 6 » avec le premier dé et « 4 » avec l'autre, on peut construire le triangle ABC : en effet, $6 + 4 > 7$ donc $AC + BC > AB$, et le plus grand côté est donc inférieur à la somme des deux autres, ce qui rend ce triangle constructible et non aplati.
- Un triangle est constructible et non aplati si son plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres : cela donne ici $r_1 + r_2 > 7$.
- On répond OUI si la somme des résultats est plus grande que 7 et NON dans le cas contraire.

r_2	r_1	1	2	3	4	5	6
1	NON	NON	NON	NON	NON	NON	NON
2	NON	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
3	NON	NON	NON	NON	OUI	OUI	OUI
4	NON	NON	NON	OUI	OUI	OUI	OUI
5	NON	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
6	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI

5. Sur les 36 possibilités, 15 cas rendent la construction possible. La probabilité cherchée est donc $\frac{15}{36}$.

31 Fanion

Un élève peut passer à l'ordinateur, en classe entière, afin de vérifier le résultat avec un logiciel de géométrie dynamique.

Aire d'un triangle vert de base 3 cm :

$$\frac{\text{côté} \times \text{hauteur correspondante}}{2} = \frac{3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$$

Aire d'un triangle vert de base 2 cm :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur correspondante}}{2} = \frac{2 \text{ cm} \times 4,5 \text{ cm}}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$$

Aire de la partie verte : $2 \times 4,5 \text{ cm}^2 + 2 \times 4,5 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$.

L'aire totale du rectangle étant $6 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 54 \text{ cm}^2$, la fraction peinte en vert est $\frac{18}{54} = \frac{1}{3}$.

32 Cubes bleus

Il y a en tout 27 cubes. On dénombre 4 cubes peints ayant exactement deux faces peintes en bleu sur chaque niveau, soit 12 cubes de la sorte en tout. La probabilité de tirer un tel cube vaut donc $\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.

33 Cornet de glace

On rappelle à cette occasion les formules donnant le volume d'un cône et d'une sphère.

Volume intérieur du cône :

$$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2,4^2 \times 12,5 \approx 75,4 \text{ cm}^3$$

Volume d'une boule de glace :

$$\mathcal{V}_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2,1^3 \approx 38,8 \text{ cm}^3$$

Le volume des deux boules de glace vaut donc :

$$2 \times 38,8 \text{ cm}^3 \approx 77,6 \text{ cm}^3$$

Le gain est donc de $77,6 \text{ cm}^3 - 75,4 \text{ cm}^3 = 2,2 \text{ cm}^3$ par glace environ.

1 000 cm³ de glace contient 5 €, donc 2,2 cm³ contiennent :

$$\frac{2,2 \times 5 \text{ €}}{1\,000} = 0,011 \text{ €.}$$

Mathilde vendant 150 glaces par jour, elle gagnera donc $0,011 \text{ €} \times 150 = 1,65 \text{ €}$ en plus chaque jour.

34 Dites 33 !

$100^{33} - 33$ est un nombre qui comporte un chiffre de moins que $100^{33} = 10^{66}$, soit 66 chiffres. Les deux derniers sont le 6 et le 7 car 67 est le complément à 100 de 33.

$100^{33} - 33$ est donc composé de 64 chiffres 9 et se termine par 67.

La somme de ses chiffres vaut donc $9 \times 64 + 6 + 7 = 589$.

35 Porte à tambour

1. Les trois vantaux de la porte divisent l'espace en trois parties identiques, donc l'angle formé par deux vantaux vaut :

$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

2. Le diamètre intérieur étant 2 m, le périmètre du cercle complet vaut $\pi \times 2 \text{ m} = 2\pi \text{ m}$. L'angle entre deux vantaux étant $\frac{360^\circ}{3}$, la longueur minimale de chaque arc de cercle en trait plein sur le schéma vaut le tiers du périmètre du cercle (la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre), soit $\frac{2\pi}{3} \text{ m} \approx 2,1 \text{ m}$. Il y a deux arcs de cercle en trait plein, soit une longueur minimale de $2 \times \frac{2\pi}{3} \text{ m} = \frac{4\pi}{3} \text{ m}$. Il reste donc une longueur de $2\pi \text{ m} - \frac{4\pi}{3} \text{ m}$ pour les deux arcs en pointillés, qui sont de même taille.

$$\text{Or } 2\pi \text{ m} - \frac{4\pi}{3} \text{ m} = \frac{6\pi}{3} \text{ m} - \frac{4\pi}{3} \text{ m} = \frac{2\pi}{3} \text{ m} \approx 2,1 \text{ m.}$$

Ainsi, la longueur maximale d'un arc de cercle en pointillés (ouverture) est égale à $\frac{\pi}{3} \text{ m} \approx 1,05 \text{ m}$.

3. En 1 minute, la porte fait 4 tours complets, avec 6 personnes, soit 24 personnes par minute ; donc en 30 minutes, on aura $24 \times 30 = 720$ personnes au maximum.

36 Cubitainers

Prérequis : fonctions, fonctions affines.

- Prix de 2 litres achetés : il faut un cubitainer à 1,50 € et 2 litres de vin à $2 \times 2,50 = 5$ €, soit 7,50 €.
Prix de 5 litres achetés : il faut un cubitainer à 1,50 € et 5 litres de vin à $5 \times 2,50 = 12,50$ €, soit 14 €.
Prix de 7 litres achetés : il faut deux cubitainers à $2 \times 1,50 = 3$ € et 7 litres de vin à $7 \times 2,50 = 17,50$ €, soit 20,50 €.
- En augmentant le nombre de litres achetés, on obtient, par différents essais, qu'en achetant 12 litres, il faut 3 cubitainers, soit 4,50 € et le vin coûte alors $12 \times 2,50 = 30$ €, soit un total de 34,50 €. Le vin ne se vendant qu'au litre, Paul peut donc acheter jusqu'à 12 litres de vin, et pas 13 litres, qui coûteraient alors $34,50 + 2,50 = 37$ €.

3. Si x est le nombre de litres achetés :

Pour $0 < x \leq 5$, le prix payé est de $1,50 + 2,50x$ (prix d'un cubitainer puis 2,50 € par litre de vin).

Pour $5 < x \leq 10$, le prix payé est de $3 + 2,50x$ (prix de 2 cubitainers puis 2,50 € par litre de vin).

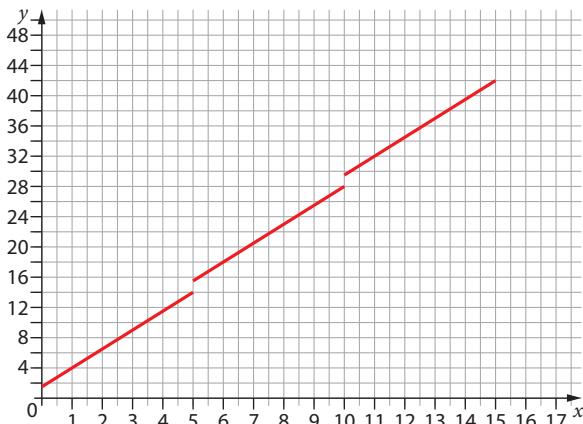
Pour $10 < x \leq 15$, le prix payé est de $4,50 + 2,50x$ (prix de 3 cubitainers puis 2,50 € par litre de vin).

Et ainsi de suite. On peut donc représenter graphiquement le prix payé en fonction de x , et, selon l'intervalle, on obtient une expression algébrique différente. Cependant, les expressions algébriques trouvées sont toutes celles de fonctions affines, de même coefficient directeur 2,50. Le graphique obtenu est donc composé de segments de droite (fonction affine par morceaux), tous parallèles.

Il y a un saut de 1,50 parallèlement à l'axe des ordonnées tous les 5 litres.

Une telle méthode permet d'obtenir le prix pour un nombre de litres de vin donné, mais inversement on peut aussi déterminer le nombre de litres maximal qu'on peut acheter avec une somme donnée. On vérifie notamment que le point de la courbe d'ordonnée 35 a une abscisse légèrement supérieure à 12. Paul (question 2.) peut donc bien acheter au maximum 12 litres avec 35 €.

Des élèves peuvent répondre par les formules algébriques, on peut les inciter à représenter, surtout pour la recherche de la quantité pour un prix donné. Pour cet aspect, on fait remarquer que, comme le vin ne s'achète qu'au litre, il faut répondre par un nombre entier. Le graphique ne devrait donc être qu'un nuage de points mais celui qu'on trace plus habituellement (en continu ou presque...) permet de répondre.



37 Être à l'heure

Pour ne pas être trop stressée, Lila doit prévoir :

- 30 minutes pour arriver à l'avance ;
- 7 minutes de marche au départ ;
- 30 minutes d'attente au maximum à l'arrêt Frères Robinson (fréquence de 15 à 30 minutes) ;
- $2 \times 1 \text{ min } 30 = 3$ min pour les deux stations qui la séparent de Pin Galant ;
- 16 minutes jusqu'à Hôpital Pellegrin ;

$$5 \times 1 \text{ min } 30 = 7 \text{ min } 30$$

• 3 minutes de marche à l'arrivée.

Total : 96 min 30 s soit 1 h 36 min 30 s

$$8 \text{ h} - 1 \text{ h } 37 \text{ min} = 6 \text{ h } 23 \text{ min.}$$

Lila doit partir au plus tard à 6 h 23 pour être sûre d'arriver comme prévu.

38 La boule de pétanque

Volume de la boule pleine :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (3,65 \text{ cm})^3 \approx 203,7 \text{ cm}^3$$

Pour l'acier :

1 m³ pèse 7 775 kg donc 1 000 000 cm³ pèsent 7 775 kg donc

$$203,7 \text{ cm}^3 \text{ pèsent } \frac{203,7 \times 7 775 \text{ kg}}{1 000 000}, \text{ soit } 1,584 \text{ kg.}$$

La boule de pétanque ne pèsant, d'après les données, que 720 g, elle est creuse.

39 La chaudière

$$\text{Volume de la cuve : } \mathcal{V} = \pi R^2 h = \pi \times (1,25 \text{ m})^2 \times 2,45 \text{ m} \approx 12,03 \text{ m}^3 \approx 12\ 030 \text{ dm}^3 \approx 12\ 030 \text{ L}$$

Quand la chaudière sera aux trois quarts vide, elle aura consommé $12\ 030 \text{ L} \times \frac{3}{4} \approx 9\ 019 \text{ L}$.

Or d'après la consommation de la chaudière, il disparaît 3 L en 1 heure, donc 9 019 L disparaissent en $\frac{9\ 019}{3} \approx 3\ 006$ heures, soit environ 125 jours. Madame Plotel doit prévoir sa prochaine commande dans 125 jours environ, soit dans environ 4 mois.

40 Badminton

Prérequis : fonctions affines.

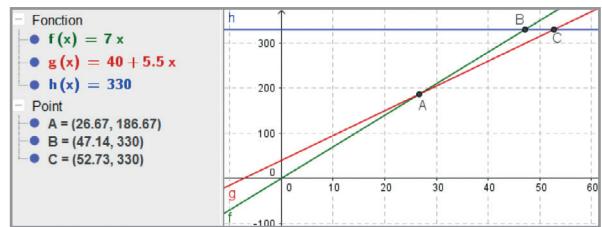
Soit x le nombre de séances effectuées dans l'année.

Avec le tarif 1 : le prix payé est $f(x) = 7x$.

Avec le tarif 2 : le prix payé est $g(x) = 40 + 5,5x$.

Avec le tarif 3 : le prix payé est $h(x) = 330$.

On peut représenter ces trois fonctions dans un repère.



Ce sont trois fonctions affines. Avec le logiciel, on peut demander le point d'intersection entre :

- la courbe de f et celle de g : c'est le point A, qui a pour abscisse environ 26,67 ;
- la courbe de f et celle de h : c'est le point B, qui a pour abscisse environ 47,14 ;
- la courbe de g et celle de h : c'est le point C, qui a pour abscisse environ 52,73.

On peut également résoudre les équations $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$ et $g(x) = h(x)$.

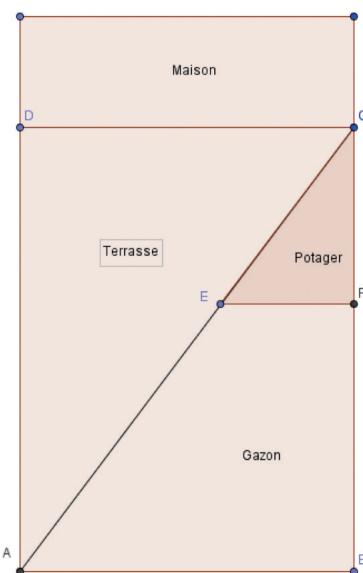
On en conclut graphiquement que :

- entre 0 et 26 séances, c'est le tarif 1 le plus intéressant car la courbe de f est en dessous des deux autres ;
- entre 27 et 47 séances, c'est le tarif 2 le plus intéressant car la courbe de g est en dessous des deux autres ;
- à partir de 48 séances, c'est le tarif 3 le plus intéressant car la courbe de h est en dessous des deux autres.

41 Le potager

Prérequis : théorème de Thalès.

On peut travailler ce problème en salle informatique car la figure est facile à construire, conjecturer le résultat (dans lequel interviennent des nombres non décimaux) puis démontrer.



Il s'agit de déterminer le périmètre du triangle EFC pour qu'il soit au maximum égal à 13 mètres (grillage).

Appelons x la longueur CF.

(EF) est parallèle à (AB). D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AB}, \text{ c'est-à-dire } \frac{x}{8} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{6}.$$

La longueur CA se calcule avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC :

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100, \text{ ce qui donne } CA = \sqrt{100} = 10.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{x}{8} = \frac{CE}{10} = \frac{EF}{6}.$$

$$\text{On a donc } CE = \frac{10x}{8} = \frac{5x}{4} \text{ et } EF = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

D'où le périmètre du triangle EFC :

$$\frac{5x}{4} + \frac{3x}{4} + x = \frac{8x}{4} + x = 2x + x = 3x.$$

Nicolas n'ayant plus que 13 mètres de grillage, on doit avoir

$$3x \leq 13 \text{ soit } x \leq \frac{13}{3}.$$

Les dimensions du potager peuvent donc être au maximum $CF \approx 4,33 \text{ m}$; donc $EF \approx 3,25 \text{ m}$ sur $EC \approx 5,42 \text{ m}$.

Un élève peut passer à l'ordinateur, si on est en classe entière, afin de vérifier le résultat avec un logiciel de géométrie dynamique.

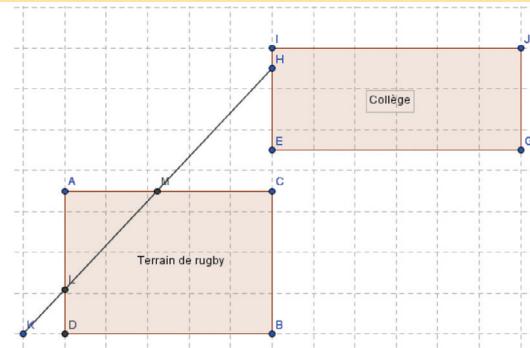
42 Gain de temps

Prérequis : théorème de Thalès.

La figure est facile à construire, il semble indispensable d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour le calcul des longueurs car les calculs pour démontrer sont assez complexes. On peut proposer un travail différencié :

- pour des élèves moyens ou faibles : les longueurs sont celles données par le logiciel et ils se contentent du calcul des temps ;
- pour des élèves performants : la conjecture est intéressante mais même les calculs de longueurs peuvent être menés, avec des valeurs approchées.

Ce problème est assez long à traiter. On peut envisager un travail de groupes où chacun des groupes se charge d'une partie des calculs seulement.



Le chemin habituel se fait sur le goudron le long du terrain de rugby ; la distance totale est donc :

$$KD + DB + BC + CE + EH = 20 \text{ m} + 100 \text{ m} + 70 \text{ m} + 20 \text{ m} + 40 \text{ m} = 250 \text{ m.}$$

Le temps de trajet le long de ce chemin se calcule avec la formule :

$$v = \frac{d}{t} \text{ d'où } 4 \text{ km/h} = \frac{0,250 \text{ km}}{t} \text{ avec } t \text{ le temps en heures.}$$

$$\text{Donc } 4t = 0,250 \text{ et on trouve finalement } t = \frac{0,250 \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = 0,0625 \text{ h,}$$

soit $0,0625 \text{ h} = 0,0625 \times 60 \text{ min} = 3,75 \text{ min} = 3 \text{ min } 45 \text{ s.}$

- Trajet diagonal : c'est le trajet KL + LM + MH.

Calcul de KL :

On peut calculer LD avec le théorème de Thalès dans le triangle KBH.

$$\frac{LD}{BH} = \frac{KD}{KB} \text{ d'où } \frac{LD}{130} = \frac{20}{120}, \text{ ce qui donne :}$$

$$LD = 130 \text{ m} \times \frac{20}{120} \approx 21,7 \text{ m.}$$

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle KDL rectangle en D, on a $KL^2 = KD^2 + DL^2$.

$$\text{Donc } KL = \sqrt{KD^2 + DL^2} \approx \sqrt{20^2 + 21,7^2} \approx 29,5 \text{ (en mètres).}$$

Calcul de LM :

On peut calculer LM avec le théorème de Thalès dans la figure ALMHC (papillon), comme (AL) est parallèle à (HC),

$$\text{alors } \frac{MA}{MC} = \frac{AL}{HC}.$$

On a $AL = 70 \text{ m} - LD \approx 70 \text{ m} - 21,7 \text{ m} \approx 48,3 \text{ m}$ et $HC = 20 \text{ m} + 40 \text{ m} = 60 \text{ m.}$

$$\text{Ainsi } \frac{MA}{MC} = \frac{48,3}{60} \text{ donc } 60 \times MA = 48,3 \times MC.$$

Si on appelle x la longueur MA, alors $MC = 100 - x$ et on a l'équation $60x = 48,3(100 - x)$.

$$60x = 48\,300 - 48,3x \text{ donc } 108,3x = 4\,830 \text{ d'où :}$$

$$x = \frac{4\,830}{108,3} \approx 44,6.$$

Donc $MA \approx 44,6 \text{ m}$ et $MC \approx 100 - 44,6 \approx 55,4 \text{ m.}$

$$\text{D'où } \frac{LD}{130} = \frac{20}{120}, \text{ ce qui donne } LD = 130 \times \frac{20}{120} \approx 21,7 \text{ m.}$$

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle AML rectangle en A, on a $LM^2 = AL^2 + AM^2$.

$$\text{Donc } LM = \sqrt{AL^2 + AM^2} \approx \sqrt{48,3^2 + 44,6^2} \approx 65,7 \text{ m}$$

Calcul de MH :

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle MCH rectangle en C, on a $MH^2 = MC^2 + CH^2$.

$$\text{Donc } LM = \sqrt{55,4^2 + 60^2} \approx 81,7 \text{ m.}$$

Temps passé sur le trajet diagonal :

$$t = \frac{d}{v} \text{ sur chacune des trois parties du trajet.}$$

Sur KL : $d = 29,5 \text{ m} = 0,0295 \text{ km}$ et $v = 4 \text{ km/h}$ (goudron) donc :

$$t = \frac{0,0295}{4} = 0,007375 \text{ h} = 0,007375 \times 3\,600 \text{ s} \approx 27 \text{ s}$$

Sur LM : $d = 65,7 \text{ m} = 0,0657 \text{ km}$ et $v = 2,5 \text{ km/h}$ (gazon) donc :

$$t = \frac{0,0657}{2,5} = 0,02628 \text{ h} = 0,02628 \times 3\,600 \text{ s} \approx 95 \text{ s}$$

Sur LM : $d = 81,7 \text{ m} = 0,0817 \text{ km}$ et $v = 4 \text{ km/h}$ (goudron) donc :

$$t = \frac{0,08175}{4} = 0,0204375 \text{ h} = 0,0204375 \times 3\,600 \text{ s} \approx 74 \text{ s}$$

- Temps pour le trajet diagonal :

$$27 \text{ s} + 95 \text{ s} + 74 \text{ s} = 196 \text{ s} = 3 \text{ min } 16 \text{ s}$$

Gain de temps : $3 \text{ min } 45 \text{ s} - 3 \text{ min } 16 \text{ s} = 29 \text{ s.}$

Lucille gagnera donc 29 secondes, ce qui est très peu pour discuter avec ses amies !

43 Étonnant !

1. La circonference de la balle est $C_b = 2\pi r = 6,2\pi \text{ cm} \approx 19,5 \text{ cm.}$

On rajoute 1 m, donc la ficelle mesure 1,195 cm.

Soit R le nouveau rayon. R vérifie l'équation : $2\pi R = 119,5 \text{ cm,}$

$$\text{soit } R = \frac{119,5}{2\pi} \approx 19,02 \text{ cm.}$$

L'augmentation du rayon est donc égale à environ $19,02 - 3,2 = 15,82 \text{ cm.}$

2. La circonference de la Terre est :

$$C_T = 2\pi r = 12800\pi \text{ km} \approx 40212,38697 \text{ km.}$$

On rajoute 1 m, donc la ficelle mesure 40 212,386 97 km.

Soit R le nouveau rayon. R vérifie l'équation :

$$2\pi R = 40212,38697 \text{ km},$$

soit :

$$R = \frac{40212,38697 \text{ km}}{2\pi} \approx 6400000,159 \text{ km.}$$

L'augmentation du rayon est donc égale à environ $6400000,159 \text{ km} - 6400 \text{ km} = 15,9 \text{ cm}$.

Le résultat semble aussi proche que pour la balle...

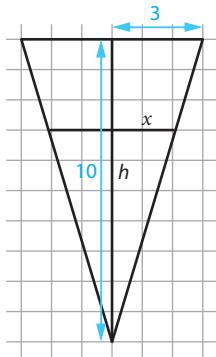
Si les résultats diffèrent beaucoup d'un élève à l'autre à cause des différences d'arrondi, on peut inciter les élèves, dans le cas de la Terre, à garder de nombreuses décimales pour être au plus près du bon résultat.

Plus formellement, on peut démontrer que $R' - R$ (augmentation du rayon) est constante et ne dépend pas de R , égale à $\frac{1}{2\pi}$.

44 À moitié plein

Prérequis : théorème de Thalès.

Les initiatives peuvent être nombreuses, un débat sur le fait que la hauteur sera supérieure à la moitié de la hauteur du verre peut être mené en préambule.



Appelons h la hauteur d'eau cherchée et x la longueur horizontale correspondante, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{h}{10} = \frac{x}{3} \text{ donc } h = \frac{10x}{3}.$$

Le volume total du verre est celui d'un cône de hauteur 10 cm et de rayon 3 cm, soit :

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi \text{ cm}^3.$$

On veut donc que le cône occupé par l'eau ait un volume égal à la moitié, soit à $15\pi \text{ cm}^3$.

Ce cône a pour hauteur h et pour rayon x , donc :

$$\frac{1}{3} \times \pi \times x^2 \times h = 15\pi$$

ou encore, comme $h = \frac{10x}{3}$:

$$\frac{1}{3} \times \pi \times x^2 \times \frac{10x}{3} = 15\pi.$$

On peut simplifier par π , on obtient :

$$\frac{10x^3}{9} = 15 \text{ donc } x^3 = 15 \times \frac{9}{10} \text{ d'où } x^3 = 9.$$

La méthode par essais paraît la plus compréhensible.

Avec la calculatrice, on cherche un nombre dont le cube vaut 9, or $2^3 = 8$ et $2,1^3 \approx 9,26$. Par tâtonnements, on obtient $x \approx 2,08$.

Donc $h \approx 10 \times \frac{2,08}{3} \approx 6,93$. La hauteur d'eau pour remplir le verre à la moitié de son volume est donc environ égale à 6,93 cm.

45 Vrai ou faux ?

On peut poser l'opération sur des exemples pour conjecturer la réponse, l'affirmation semble ainsi vraie.

Plus formellement, un nombre se terminant par 76 peut s'écrire comme $n \times 100 + 76$ où n est un nombre entier (le nombre

de centaines) et le deuxième peut de la même manière s'écrire $m \times 100 + 76$.

$$(n \times 100 + 76) \times (m \times 100 + 76)$$

$$= n \times 100 \times m \times 100 + 76 \times m \times 100 + n \times 100 \times 76 + 76^2$$

$$\text{Ainsi, } (n \times 100 + 76) \times (m \times 100 + 76)$$

$$= n \times m \times 10000 + 7600m + 7600n + 5776$$

$$(n \times 100 + 76) \times (m \times 100 + 76)$$

$$= (n \times m \times 100 + 76 \times m + 76 \times n + 57) \times 100 + 76$$

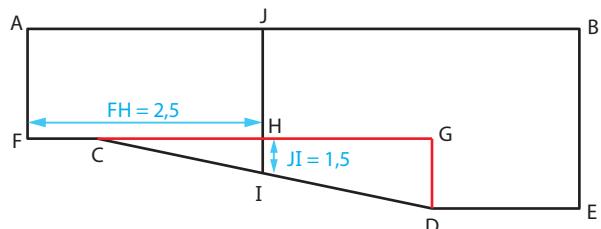
Donc comme $n \times m \times 100 + 76 \times m + 76 \times n + 57$ est un nombre entier, c'est le nombre de centaines, auquel on ajoute 76 unités.

Donc $(n \times 100 + 76) \times (m \times 100 + 76)$ se termine bien par 76.

46 Sécurité enfants

Prérequis : théorème de Thalès.

On peut, en salle informatique, faire conjecturer le résultat avec un logiciel de géométrie dynamique. C'est alors un problème que l'on traite sur le mode « conjecture-démonstration ».



On peut tracer la parallèle à (AB) passant par F et la parallèle à (AD) passant par D. elles se coupent en G. On cherche où placer le point J pour que la profondeur de la piscine (c'est-à-dire la longueur JI) à cet endroit soit égale à 1,5 m. H est le point d'intersection de la droite (CG) et de la droite (JI). Comme JH = 1,2 m, on cherche à ce que la longueur HI soit de 1,5 m - 1,2 m = 0,3 m.

Dans le triangle CGD, (HI) est parallèle à (GD) donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{HI}{GD} = \frac{CH}{CG}$.

$$\text{Donc } \frac{0,3}{1} = \frac{CH}{5} \text{ d'où } CH = 0,3 \times 5 = 1,5 \text{ m.}$$

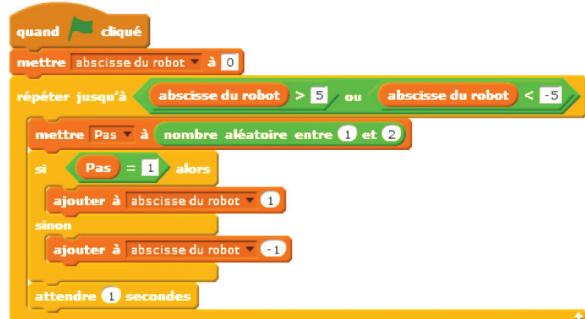
Sandrine doit donc placer cette marque à 2,50 m du bord gauche de la piscine (point A).

On peut aussi choisir un repère (par exemple, de centre A) et déterminer la fonction représentée par la droite (CD), puis chercher x tel que $f(x) = -1,5$.

47 Nono le petit robot

1. Ce script simule un pas du robot. En effet, on tire au sort un nombre entre 1 et 2 et, lorsque le résultat est 1 (1 chance sur 2), son abscisse augmente de 1, et si le résultat est 2 (1 chance sur 2 également), son abscisse diminue de 1.

2. Le robot tombe de la planche lorsque son abscisse est strictement supérieure à 5 ou strictement inférieure à -5 ; on a donc le script suivant (l'instruction « attendre 1 seconde » n'est pas nécessaire mais permet de voir ce qui se passe).



3. On exécute ce script indéfiniment et on compte pour chaque partie le nombre de pas avant que le robot ne tombe de la planche. En sommant ces nombres de pas et en divisant ensuite par le nombre de « parties », on obtient le résultat suivant : en moyenne, le robot reste 36 secondes sur la planche.

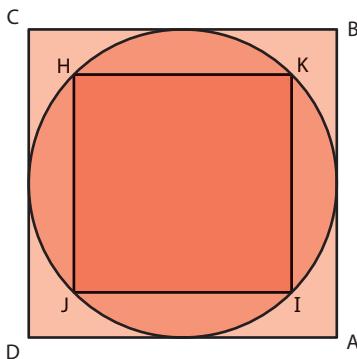
```

when green flag clicked
  set [moyenne v] to [0]
  set [nombre de parties v] to [0]
  set [nombre de pas v] to [0]
  repeat (indefinitely)
    set [abscisse du robot v] to [0]
    repeat (until [abscisse du robot > 5 or abscisse du robot < -5])
      set [pas v] to [random (1) to (2)]
      if [pas = 1] then
        add [1] to [abscisse du robot]
        add [1] to [nombre de pas]
      else
        add [-1] to [abscisse du robot]
        add [-1] to [nombre de pas]
      end
      set [moyenne] to [(nombre de pas) / (nombre de parties)]
    end
  end
end

```

48 Serre-livre

Il faut calculer le volume d'argent nécessaire à la conception de cet objet.



En vue de face, on constate que le diamètre du cercle est la diagonale du carré intérieur. Or ce diamètre est le côté du grand carré, soit 15 cm. Il nous faut la longueur du côté du petit carré, notons-la ℓ en cm.

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle HKJ rectangle en H, on a $HK^2 + HJ^2 = JK^2 = 15^2$.

Donc $\ell^2 + \ell^2 = 225$, ce qui donne $2\ell^2 = 225$ soit $\ell^2 = 112,5$.

Donc $\ell = \sqrt{112,5} \approx 10,6$ (en cm).

Le volume d'argent nécessaire est donc égal au volume du grand pavé droit, auquel on enlève le volume du cylindre intérieur, auquel on ajoute le volume du petit pavé droit (intérieur).

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{argent}} &= \mathcal{V}_{\text{grand pavé}} - \mathcal{V}_{\text{cylindre}} + \mathcal{V}_{\text{petit pavé}} \\ &= 15^2 \times 3 - \pi \times 7,5^2 \times 3 + (\sqrt{112,5})^2 \times 3 \\ \mathcal{V}_{\text{argent}} &\approx 481,9 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Or 1 cm³ d'argent pèse 10,5 g ; donc 481,9 cm³ pèsent 5 060,3 g, soit environ 5,06 kg d'argent.

L'argent fin est au prix de 352,79 €/kg, donc l'argent va couter $352,79 \times 5,06 = 1 785,20$ € à M. Guerfala.

Comme la fabrication de l'objet coûte 300 €, le serre-livre lui reviendra à 2 085,20 € environ.

49 Lapins de Fibonacci

1. a. Avec le tableur, il suffit d'entrer dans la cellule C1 la formule « =A1+B1 » et recopier cette formule vers la droite, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	5	7	12	19	31	50	81	131	212

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	9	13	22	35	57	92	149	241

c.

	A	B	C	D	E	F	G
1	8	12	20	32	52	84	136

2. Si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence, alors le mois n , il y a n couples du mois $(n-1)$ auxquels s'ajoute un nombre de nouveaux couples égal au nombre de couples du mois $(n-2)$ (ce sont les enfants des couples présents deux mois avant).

La suite de nombres égale au nombre de couples de lapins présents chaque mois est donc une suite de nombres entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes précédents : c'est une suite de Fibonacci qui commence par 1 et 1, puisque le premier couple n'aura d'enfants que 2 mois après. On a donc :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Au bout de douze mois, il y aura donc 144 couples de lapins.



50 Des bracelets

- Volume d'un bloc :

$$\mathcal{V}_{\text{bloc}} = 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^3 = 72 000 \text{ mm}^3$$

- Volume d'une perle ronde :

$$\mathcal{V}_{\text{perle ronde}} = \frac{4}{3} \times \pi \times (4 \text{ mm})^3 = \frac{256}{3} \text{ mm}^3 \approx 268,1 \text{ mm}^3$$

- Volume d'une perle longue :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{perle longue}} &= \pi \times (4 \text{ mm})^2 \times 16 \text{ mm} = 256\pi \text{ mm}^3 \\ &\approx 804,2 \text{ mm}^3.\end{aligned}$$

$\frac{72 000}{268,1} \approx 268$. On peut donc faire 268 perles rondes avec un bloc.

$\frac{72 000}{804,2} \approx 89$. On peut donc faire 89 perles longues avec un bloc.

$$\frac{89}{4} = 22,25.$$

Flora pourra donc faire 22 bracelets au maximum avec les perles longues, ce qui nécessitera $22 \times 8 = 176$ perles rondes, ce qui est possible puisqu'elle pourra en faire 268.

Flora peut donc réaliser 22 bracelets.

51 Sur la paille

1. Volume de la botte :

$$\mathcal{V}_{\text{botte}} = 90 \text{ cm} \times 45 \text{ cm} \times 35 \text{ cm} = 141 750 \text{ cm}^3 = 0,14175 \text{ m}^3$$

Masse de la botte : 1 m³ de paille a une masse de 90 kg.

Donc $0,14175 \text{ m}^3$ pèsent $0,14175 \times 90 \text{ kg} = 12,7575 \text{ kg}$.

1 T = 1 000 kg de paille contient 40 €, donc $12,7575 \text{ kg}$ contiennent $12,7575 \times \frac{40}{1000} \approx 0,51 \text{ €}$.

2. a. Sur la longueur JK, on peut disposer $\frac{15,3}{0,45} = 34$ bottes dans le sens de la largeur.

Calculons la longueur KG : cette longueur est celle de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 3,6 m et 7,7 m – 5 m = 2,7 m.

D'après le théorème de Pythagore, on a $KG^2 = 3,6^2 + 2,7^2$

donc $KG = \sqrt{3,6^2 + 2,7^2} = 4,5$ (en mètres). La longueur d'une botte étant de 90 cm, soit 0,9 m, $\frac{4,5}{0,9} = 5$ donc on peut mettre 5 bottes le long de KG dans le sens de la longueur.

$34 \times 5 = 170$, Marc devra donc commander 170 bottes.

Si on inverse le sens des bottes de paille, on aura 17 bottes le long de JK et 10 bottes le long de KG, ce qui fait aussi 170 bottes.

- b. $170 \times 0,51 \text{ €} = 86,70 \text{ €}$. Le cout de l'isolation avec la paille est donc égal à 86,70 €.

52 Gâteau de mariage

1. $\frac{2}{3} \times 30 = 20$. Le rayon du gâteau n°2 est donc 20 cm.

2. $\frac{3}{4} \times 20 = 15$. Le rayon du gâteau n°3 est donc 15 cm.

3. Volume de la pièce montée :

$$\begin{aligned} V_{\text{pièce montée}} &= V_{\text{gâteau n}^{\circ}1} + V_{\text{gâteau n}^{\circ}2} + V_{\text{gâteau n}^{\circ}3} \\ &= \pi \times (30 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm} + \pi \times (20 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm} \\ &\quad + \pi \times (15 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm} \\ &= 9000\pi + 4000\pi + 2250\pi \\ &= 15250\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

4. Fraction du volume total représenté par le gâteau n°2 :

$$\frac{4000\pi}{15250\pi} = \frac{4000}{15250} = \frac{16}{61}$$

53 Voyage

1. $2 \times 530 \text{ €} - 2 \times 350 \text{ €} = 360 \text{ €}$

2. a. $11 \text{ h } 55 - 4 \text{ h } 24 = 7 \text{ h } 31$, mais les passagers doivent être présents 2 heures avant le décollage pour procéder à l'embarquement.

$7 \text{ h } 31 - 2 \text{ h } = 5 \text{ h } 31$. Le couple doit donc partir à 5 h 31 maximum s'il part en voiture.

b. Distance domicile-aéroport de Paris : 409 km.

Consommation moyenne : 6 litres aux 100 km.

$$\text{Donc } 409 \times \frac{6 \text{ L}}{100} = 24,54 \text{ L.}$$

Carburant : 1,30 € par litre, soit un cout pour cet aller de : $24,54 \times 1,30 \text{ €} = 31,90 \text{ €}$.

3. Comparons le cout des trois solutions :

- Prendre l'avion à Nantes : le cout est de $2 \times 530 \text{ €} = 1060 \text{ €}$.
- Aller en train à Paris et prendre l'avion à Paris : le cout est de $2 \times 51 \text{ €} + 2 \times 42 \text{ €} + 2 \times 350 \text{ €} = 886 \text{ €}$.

billets de train aller	billets de train retour	billets d'avion
$2 \times 35,90 \text{ €}$	$+ 58 \text{ €}$	$= 2 \times 31,90 \text{ €}$
<small>aller et retour billets d'avion</small>	<small>parking</small>	<small>carburant aller et retour</small>
$2 \times 350 \text{ €}$		$893,60 \text{ €}$

L'organisation la plus économique consiste donc à aller en train à Paris et prendre l'avion à Paris.

54 Éolienne

1. $\frac{360}{3} = 120^\circ$; l'angle entre deux pales vaut donc 120° .

2. Avec 6 pales, l'angle entre deux pales vaut donc 60° .

3. Soit O le point représentant les oreilles du randonneur, et H le point du mât de l'éolienne situé à 1,80 m du sol. Alors le triangle HOA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, dans ce triangle, on a :

$$AO^2 = AH^2 + OH^2$$

soit :

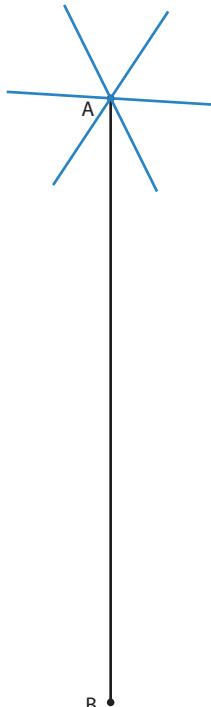
$$80^2 = 33,2^2 + OH^2,$$

ce qui donne :

$$OH^2 = 5297,76$$

$$OH = \sqrt{5297,76} \approx 73 \text{ (en mètres).}$$

Le randonneur s'arrête à environ 73 m du mât.



55 Fléchettes

Prérequis : trigonométrie, médiane d'une série statistique.

1. Dans le triangle CMP rectangle en M, on a :

$$\tan 36,1^\circ = \frac{MC}{MP} \text{ donc } MP = \frac{MC}{\tan 36,1^\circ} \approx 2,372 \text{ (en mètres).}$$

$2,372 > 2,37$ donc la sonnerie ne se déclenche pas.

Dans les questions suivantes, l'occasion est donnée au professeur de réactiver les notions de moyenne et de médiane.

2. a. $40 + 35 + \dots + 28 = 357$ donc Rémi a obtenu 357 points.

$$\frac{357}{7} = 51$$

Rémi a donc obtenu 51 points par partie en moyenne.

b. La moyenne de Nadia est de 51 points par partie, donc le total de ses points est $51 \times 7 = 357$ points.

$357 - (12 + 62 + 7 + 100 + 81 + 30) = 65$. Nadia a obtenu 65 point à la 6^e partie.

c. On range les scores dans l'ordre croissant :

Rémi : 28 28 35 40 67 74 85

Nadia : 7 12 30 62 65 81 100

La médiane est la 4^e valeur de chaque série car chaque série comporte 7 valeurs ($\frac{7+1}{2} = 4$).

La médiane de la série de Rémi est donc 40, celle de Nadia est 62.

56 Skatepark

Prérequis : trigonométrie.

1. $6h = 96 \text{ cm}$ donc $h = \frac{96 \text{ cm}}{6} = 16 \text{ cm}$ et $5p = 55 \text{ cm}$ donc $p = \frac{55 \text{ cm}}{5} = 11 \text{ cm}$, ainsi $2h + p = 2 \times 16 + 11 = 43$ donc $2h + p$ n'est pas compris entre 60 et 65. Les normes ne sont pas respectées pour l'escalier.

2. Dans le triangle ABD rectangle en B, $AD^2 = AB^2 + BD^2$, ce qui donne $AD^2 = 51241$ donc $AD \approx 226,4 \text{ cm} \approx 2,264 \text{ m}$.

La première demande est donc bien respectée.

Dans le triangle ABD rectangle en B, on a :

$$\tan \widehat{BDA} = \frac{AB}{BD} = \frac{96}{255} \text{ donc } \widehat{BDA} \approx 25,09^\circ.$$

Donc l'angle est bien compris entre 20° et 30° . La deuxième demande est bien respectée.

Les demandes des habitués du skatepark sont donc toutes satisfaites.

57 Abri de jardin

1. Dimensions du volume transportable :

$$(L \times \ell \times h) : 2,60 \text{ m} \times 1,56 \text{ m} \times 1,84 \text{ m}$$

En mettant 5 parpaings dans le sens de la longueur, la longueur totale est 2,50 m, ce qui est inférieur à 2,60 m.

En mettant 15 parpaings dans le sens de la largeur, la largeur totale est 1,50 m, ce qui est inférieur à 1,56 m.

En mettant 9 parpaings dans le sens de la hauteur, la hauteur totale est 1,80 m, ce qui est inférieur à 1,84 m.

Soit au total $5 \times 15 \times 9 = 675$ parpaings qui rentrent dans le véhicule contre 300 à transporter.

Mais 300 parpaings pèsent $300 \times 10 \text{ kg} = 3000 \text{ kg} = 3 \text{ tonnes}$. La charge pouvant être transportée est de 1,7 tonne, donc il faudra bien deux allers-retours pour le transport des parpaings.

2. Cout de 2 allers-retours :

Il faut parcourir 40 km, soit 55 € de location.

$$\text{Diesel (consommation : 8 litres aux 100 km)} : 40 \times \frac{8 \text{ L}}{100} = 3,2 \text{ L}$$

Un litre de carburant coute 1,50 €. Donc le cout du gazole est de $1,50 \text{ €} \times 3,2 = 4,80 \text{ €}$.

Le cout total du transport est donc égal à :

$$55 \text{ €} + 4,80 \text{ €} = 59,80 \text{ €}.$$

3. Pour 30 km, la location coute 48 €; pour 50 km, elle coute 55 €.

Comme $\frac{30}{48} \neq \frac{50}{55}$ (par exemple, avec les produits en croix)

alors les tarifs de location du fourgon ne sont pas proportionnels à la distance maximale autorisée par jour.

On peut également justifier la non-proportionnalité par d'autres arguments : par exemple, pour 200 km, on ne paie pas 2 fois plus que pour 100 km.

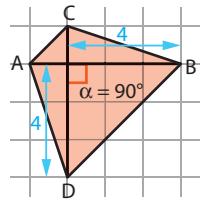
58 Étiquettes

1. a. Il y a 10 étiquettes en tout, donc la probabilité de tirer l'étiquette « Diagonales égales » vaut $\frac{1}{10} = 0,1$.

b. Il y a 3 étiquettes avec le mot « diagonales », donc la probabilité de tirer une telle étiquette vaut $\frac{3}{10} = 0,3$.

c. Aucune étiquette ne comporte à la fois le mot « côtés » et le mot « diagonales », donc la probabilité cherchée vaut 0.

- 2.a.** Madjid a raison de douter ; Julie a tort car on peut construire un « cerf-volant » qui a des diagonales égales et perpendiculaires mais qui n'est pas un carré. Exemple :



- b.** Julie est sûre d'obtenir un losange : en effet, un quadrilatère avec quatre côtés égaux est un losange, et il a bien deux côtés parallèles.
- 3.** S'il y a 4 angles droits, le quadrilatère est un rectangle. Il y a bien alors deux côtés égaux, mais les deux autres sont aussi égaux. Il n'y a donc pas deux côtés égaux seulement. Lionel ne peut donc pas construire un quadrilatère ayant ces deux propriétés.

59 Funiculaire

Prérequis : trigonométrie.

- 1.** $SL = 1\ 075 \text{ m} - 415 \text{ m} = 660 \text{ m}$
 $JK = 1\ 165 \text{ m} - 415 \text{ m} = 750 \text{ m}$
- 2.a.** Dans le triangle SIL rectangle en L , on a, d'après le théorème de Pythagore :
- $$SI^2 = SL^2 + LI^2 = 660^2 + 880^2 = 1\ 210\ 000$$
- donc $SI = \sqrt{1\ 210\ 000} = 1\ 100$ (en mètres).
- La distance entre les 2 gares est donc de 1 100 m.
- b.** Dans le triangle SIL rectangle en L , on a :
- $$\tan \widehat{SIL} = \frac{SL}{IL} = \frac{660}{880} = 0,75 \text{ donc } \widehat{SIL} \approx 37^\circ.$$

3. $v = \frac{d}{t}$ donc $t = \frac{d}{v} = \frac{1,1 \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 0,11 \text{ h} = 0,11 \times 60 \text{ min}$
 $= 6,6 \text{ min} = 6 \text{ min} + 0,6 \times 60 \text{ s} = 6 \text{ min } 36 \text{ s.}$

Le trajet entre les deux gares dure donc 6 minutes et 36 secondes.

- 4.** $SJ = IJ - SI$

Calcul de IJ : sans le triangle SIL rectangle en L , on a :

$$\sin \widehat{SIL} = \frac{JK}{IJ} \text{ donc } IJ = \frac{JK}{\sin \widehat{SIL}} = \frac{1100}{\sin 36,87^\circ} \approx 1\ 250 \text{ (en mètres),}$$

donc $SJ = 1\ 250 \text{ m} - 1\ 100 \text{ m} = 150 \text{ m.}$

M. Cotharbet aura parcouru 150 m en marchant.

60 Les îles des Tuamotu

Il vaudra mieux agrandir la carte présente de l'exercice, la distribuer, afin que les élèves fassent des mesures que l'on peut reporter facilement (pas trop petites !). Ils feront leurs calculs avec les mesures de leur carte, et trouveront donc le point correspondant à l'île d'Aratika sur une carte à plus grande échelle que celle du manuel.

- En utilisant les temps : Rangiroa est à 55 min de Tahiti qui correspond sur la carte à une distance de 2,7 cm. Or, à la même vitesse moyenne, les temps sont proportionnels aux distances : comme il faut 1 h 15 min = 75 min pour aller de Tahiti à Aratika et 55 min de Tahiti à Rangiroa, alors la distance sur la carte entre Tahiti et Aratika est égale à

$$2,7 \text{ cm} \times \frac{75}{55} \approx 3,7 \text{ cm.}$$

La croix représentant sur l'annexe l'île d'Aratika est sur le cercle de centre Tahiti et de rayon la distance 3,7 cm.

- En utilisant les distances : on peut, par exemple, utiliser le fait que Tahiti et Huahine sont distantes de 175 km que l'on mesure sur la carte : 1,5 cm.

La distance sur le plan entre Fakarava et Aratika est égale à 50 km.

$$175 \text{ km} \rightarrow 1,5 \text{ cm}$$

$$50 \text{ km} \rightarrow 1,5 \text{ cm} \times \frac{50}{175} = 0,43 \text{ cm}$$

Aratika est sur le plan sur le cercle centré en Fakarava de rayon 0,43 cm.

Aratika est donc, d'après l'énoncé, celui des deux points communs aux deux cercles qui est au nord de Fakarava.

