d. Que remarque-t-on ?

❷ On désigne par n le premier de trois nombres consécutifs.

a. Exprimer en fonction de n les deux nombres qui suivent, puis la somme des trois nombres.

b. Quel nombre est un facteur commun aux deux termes de cette somme ?

c. En déduire que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

❸ La somme de quatre nombres entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

❷ a. On pose : $C = \ldots$

Développer et réduire l'expression C.

b. En déduire la forme développée ...

❸ a. On pose : $D = 2x(-5x+3) \ldots$

Développer l'expression D.

b. En déduire la forme développée et réduite de A.

❹ Développer et réduire les expressions suivantes :

$E = 3x(-2x+9)(x+3)$.

$F = (x+3)(-4x+3)(2x+7)$.

$G = (-3x+4)(3-5x)(6x-7)$.

73 **Nombres pairs, nombres impairs**

❶ Soit n un nombre entier.

a. Le nombre entier $2n$ est-il pair ou impair ?

b. Le nombre entier $2n+1$ est-il pair ou impair ?

❷ On admet que :

– si un nombre entier est pair, alors il peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un nombre entier ;

– si un nombre entier est impair, alors il peut s'écrire sous la forme $2n+1$ où n est un nombre entier.

a. Démontrer que la somme de deux nombres entiers pairs est un nombre entier pair.

b. Démontrer que la somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre impair.

c. Démontrer que la somme de deux nombres entiers impairs est un nombre pair.

74 ❶ a. Calculer :

$4 \times 3 - 2 \times 1$

$5 \times 4 - 3 \times 2$

$6 \times 5 - 4 \times 3$

$7 \times 6 - 5 \times 4$

$8 \times 7 - 6 \times 5$.

b. Que remarque-t-on ?

c. Quel est le prochain calcul de cette suite ?

d. Peut-on en prévoir le résultat sans effectuer le calcul ? Le vérifier par le calcul.

❷ a. Soit n un nombre entier positif.

Développer et réduire l'expression littérale :

$$A = (n+3)(n+2) - (n+1)n.$$

b. Justifier l'observation faite dans la question ❶.

75 ❶ Développer et réduire : $(x+1)^2$.

❷ Calculer mentalement : 21^2 ; 51^2 ; 101^2.

77 Un magicien dit à un spectateur :

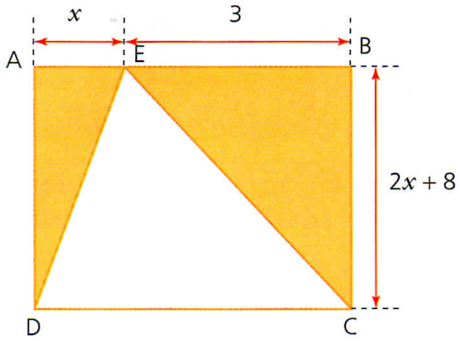
« Multipliez le jour de votre naissance par 25, ajoutez 30, multipliez par 80 le résultat obtenu, ajoutez le double du mois de votre naissance puis retranchez 2 400.

Quel nombre obtenez-vous ? »

Quelques secondes après que le spectateur a annoncé le résultat, le magicien donne le jour et le mois de la naissance du spectateur !

En notant j le jour et m le mois de naissance d'un spectateur, trouver le « truc » de ce magicien.

78 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle et x est un nombre positif.



❶ a. Exprimer en fonction de x l'aire de chacun des triangles AED et EBC.

On donnera chaque expression sous la forme d'une somme algébrique développée et réduite.

b. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ de la surface coloriée.

On donnera l'expression obtenue sous la forme d'une somme algébrique réduite.

❷ a. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle EDC.

b. Retrouver le résultat obtenu à la question ❶ b.

❸ Calculer la valeur de $\mathcal{A}$ pour $x = 5$.

Exercices

72 **Nombres consécutifs**

Des nombres entiers consécutifs sont des nombres entiers qui se suivent, comme, par exemple, 3, 4 et 5.

1 **a.** Choisir trois nombres entiers consécutifs, puis calculer leur somme.
b. Le nombre obtenu est-il divisible par 3 ?
c. Recommencer avec trois autres entiers.
d. Que remarque-t-on ?

2 On désigne par n le premier de trois nombres consécutifs.
a. Exprimer en fonction de n les deux nombres qui suivent, puis la somme des trois nombres.
b. Quel nombre est un facteur commun aux deux termes de cette somme ?
c. En déduire que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

3 La somme de quatre nombres entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

73 **Nombres pairs, nombres impairs**

1 Soit n un nombre entier.
a. Le nombre entier $2n$ est-il pair ou impair ?
b. Le nombre entier $2n + 1$ est-il pair ou impair ?

2 On admet que :
– si un nombre entier est pair, alors il peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un nombre entier ;
– si un nombre entier est impair, alors il peut s'écrire sous la forme $2n + 1$ où n est un nombre entier.
a. Démontrer que la somme de deux nombres entiers pairs est un nombre entier pair.
b. Démontrer que la somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre impair.
c. Démontrer que la somme de deux nombres entiers impairs est un nombre pair.

74 **1** **a.** Calculer :
$4 \times 3 - 2 \times 1$
$5 \times 4 - 3 \times 2$
$6 \times 5 - 4 \times 3$
$7 \times 6 - 5 \times 4$
$8 \times 7 - 6 \times 5$.
b. Que remarque-t-on ?
c. Quel est le prochain calcul de cette suite ?
d. Peut-on en prévoir le résultat sans effectuer le calcul ? Le vérifier par le calcul.

2 **a.** Soit n un nombre entier positif.
Développer et réduire l'expression littérale :
$$A = (n+3)(n+2) - (n+1)n.$$
b. Justifier l'observation faite dans la question **1**.

75 **1** Développer et réduire : $(x+1)^2$.

2 Calculer mentalement : 21^2 ; 51^2 ; 101^2.

76 **A** On considère l'expression littérale :
$$A = 2x(x+5)(-5x+3).$$
On peut la développer de plusieurs façons, selon les facteurs que l'on choisit de regrouper.

1 **a.** On pose : $B = 2x(x+5)$.
Développer l'expression B.
b. En déduire la forme développée et réduite de A.

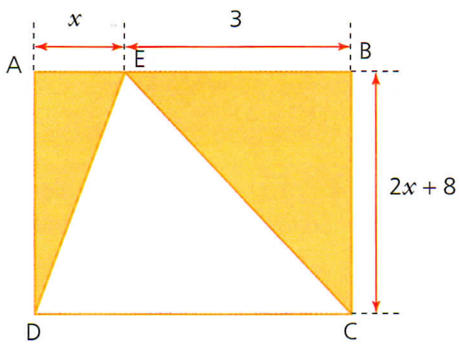
2 **a.** On pose : $C = (x+5)(-5x+3)$.
Développer et réduire l'expression C.
b. En déduire la forme développée et réduite de A.

3 **a.** On pose : $D = 2x(-5x+3)$.
Développer l'expression D.
b. En déduire la forme développée et réduite de A.

B Développer et réduire les expressions suivantes :
$E = 3x(-2x+9)(x+3)$.
$F = (x+3)(-4x+3)(2x+7)$.
$G = (-3x+4)(3-5x)(6x-7)$.

77 Un magicien dit à un spectateur :
« Multipliez le jour de votre naissance par 25, ajoutez 30, multipliez par 80 le résultat obtenu, ajoutez le double du mois de votre naissance puis retranchez 2 400.
Quel nombre obtenez-vous ? »
Quelques secondes après que le spectateur a annoncé le résultat, le magicien donne le jour et le mois de la naissance du spectateur !
En notant j le jour et m le mois de naissance d'un spectateur, trouver le « truc » de ce magicien.

78 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle et x est un nombre positif.



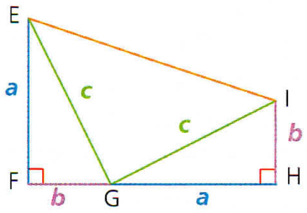
1 **a.** Exprimer en fonction de x l'aire de chacun des triangles AED et EBC.
On donnera chaque expression sous la forme d'une somme algébrique développée et réduite.
b. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ de la surface coloriée.
On donnera l'expression obtenue sous la forme d'une somme algébrique réduite.

2 **a.** Exprimer en fonction de x l'aire du triangle EDC.
b. Retrouver le résultat obtenu à la question **1** **b**.

3 Calculer la valeur de $\mathscr{A}$ pour $x = 5$.

79 La démonstration d'un président

Dans la figure ci-dessous, le quadrilatère EFHI est un trapèze, c'est-à-dire un quadrilatère qui a deux côtés parallèles, [EF] et [HI], appelés les bases du trapèze.
Le segment [FH] est une hauteur de ce trapèze.



❶ L'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueurs L et ℓ, et la hauteur h, est égale à : $\frac{L+\ell}{2} \times h$.

Exprimer en fonction de a et b l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze EFHI.

❷ On se propose, dans cette question, d'exprimer l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze EFHI en fonction de a, b et c.

a. Démontrer que $\widehat{EGI}$ est un angle droit.
b. Exprimer en fonction de c l'aire du triangle EGI.
c. Exprimer en fonction de a et b l'aire de chacun des triangles EFG et GHI.
d. En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze EFHI en fonction de a, b et c.

❸ Déduire des deux questions précédentes que :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

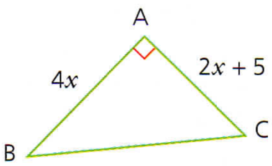
Quel théorème a-t-on démontré ?

LE SAVIEZ-VOUS?

Cette démonstration, datant de 1876, est due à l'Américain James Abraham Garfield (1831-1881). Après une carrière de professeur en lettres classiques (selon la légende, il pouvait écrire simultanément le latin d'une main et le grec de l'autre), il étudie le droit puis est élu sénateur. Choisi par défaut pour représenter le parti républicain aux élections présidentielles en 1881, il devient le vingtième président des États-Unis d'Amérique. Mais, victime d'un attentat le 2 juillet 1881, il décédera le 19 septembre 1881, soit six mois après le début de son mandat.

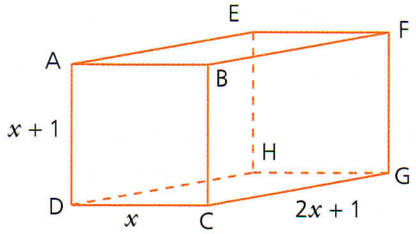
L'attentat contre le président Garfield, illustration d'un journal de l'époque.

80 Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en A et x est un nombre positif.



Exprimer BC^2 en fonction de x. On donnera la forme développée et réduite de l'expression obtenue.

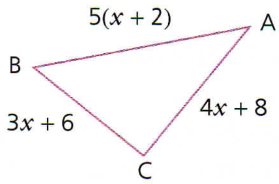
81 Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un pavé droit et x un nombre positif. L'unité de longueur est le centimètre.



On donnera la forme développée et réduite de chaque expression obtenue.
Exprimer en fonction de x :

a. l'aire de chacune des faces de ce pavé droit.
b. l'aire latérale $\mathscr{A}$ de ce pavé droit.
c. le volume $\mathscr{V}$ de ce pavé droit.

82 On considère le triangle ABC ci-dessous, où x est un nombre positif.



Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

Argumenter et débattre

83 Vrai ou faux

a. Si l'on augmente de 3 cm la longueur du côté d'un carré, alors son aire augmente de 9 cm^2.
b. L'égalité $3x - (2x + 8) = x + 8$ est vraie pour tout nombre x.
c. L'égalité $(x + x)y = 2xy$ est vraie pour tout nombre x.
d. L'égalité $(x + x + x)y = x^3y$ est vraie pour tout nombre x.
e. Le carré d'une somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres.
f. Si une égalité est vraie pour une valeur de x, alors elle est vraie pour toute valeur de x.

84 Établir une égalité entre le carré d'un entier, le carré de l'entier qui le suit et le carré de l'entier qui le précède.

85 De quel nombre entier la somme de cinq nombres entiers consécutifs est-elle toujours un multiple ?

86 Comment peut-on calculer sans calculatrice et sans poser les opérations : $4\,996 \times 5\,005 - 5\,000^2$?

87 Comment peut-on calculer simplement
$A = (2x + 4)(4x - 3) - 4(2x^2 - 3)$ pour $x = 235{,}2456$?

Tester une égalité

Exemples

On considère les expressions littérales :

$$A = (3x-5)(4x-1)-(-2x-3)(5x+2) \quad \text{et} \quad B = 15x^2-26x+8.$$

On se propose de tester l'égalité A = B pour différentes valeurs de x.

1. a. Tester l'égalité A = B pour $x = -3$.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
• On vide les mémoires de la calculatrice.	[CLR] 2 EXE AC — Clear? 1:Setup 2:Memory 3:All	[EFF VAR] (O) ENTRER — EFFVAR: O N
• On saisit l'expression A.	(A) = (3 X − 5) (4 X − 1) − ((−) 2 X − 3) (5 X + 2) — ◂-(-2X-3)(5X+2)	[▸OP1] (3 VAR (x) ENTRER − 5) (4 VAR (x) ENTRER − 1) − ((-) 2 VAR (x) ENTRER − 3) (5 VAR (x) ENTRER + 2) ENTRER — OP1=(3x-5)(
	On sépare les deux expressions à saisir. [:] — ◂-2X-3)(5X+2):	
• On saisit l'expression B.	(B) = 1 5 X x^2 − 2 6 X + 8 — ◂:B=15X²-26X+8	[▸OP2] 1 5 VAR (x) ENTRER x^2 − 2 6 VAR (x) ENTRER + 8 ENTRER — OP2=15x²-2
	On met la calculatrice en mode CALC. CALC La calculatrice demande la valeur de x. — X? 0	
• On entre la valeur de x, soit − 3.	(−) 3 — -3 0	(-) 3 STO→ (x) ENTRER — -3→x -3
• On obtient la valeur de A pour $x = -3$.	EXE — A=(3X-5)(4X-1)-▸ 221	OP1 — (3x-5)(4x-1 22
• On obtient la valeur de B pour $x = -3$.	EXE — B=15X²-26X+8 221	OP2 — 15x²-26x+8 22

b. Peut-on en déduire que l'égalité A = B est vraie pour tout nombre x ?

2. a. Tester l'égalité A = B avec une autre valeur de x, par exemple 4.

b. Que peut-on maintenant en déduire pour l'égalité A = B ?

c. Pour démontrer qu'une égalité n'est pas vraie pour tout nombre x, que suffit-il de prouver ?

Application

On considère les expressions littérales : $A = y^2+2y+24$ et $B = (3y-2)(-7y-5)+(4y+2)(6y-3)$.

1. Tester l'égalité A = B pour $x = 4$ puis pour $y = -\frac{5}{2}$.

2. Démontrer que l'égalité A = B n'est pas vraie pour tout nombre y.

Exercices 46, 51 et 52