Plan du cours

I. Le théorème de Pythagore **1**
1. Reconnaître l'hypoténuse dans un triangle rectangle 1
2. Énoncé du théorème de Pythagore 1

II. Applications du théorème de Pythagore **2**
1. Première application 2
2. Deuxième application 2
3. Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle 3

III. La réciproque du théorème de Pythagore **3**

I. Le théorème de Pythagore

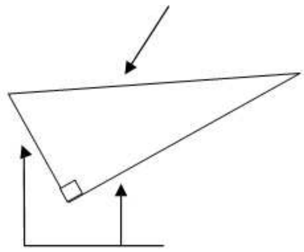
1. Reconnaître l'hypoténuse dans un triangle rectangle

Définition

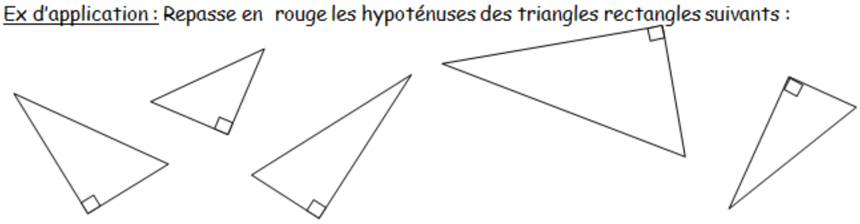
Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'hypoténuse.

Remarque :

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand des trois côtés. Les deux autres côtés sont les côtés adjacents de l'angle droit.



<u>Ex d'application :</u> Repasse en rouge les hypoténuses des triangles rectangles suivants :



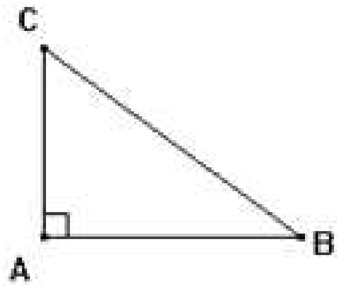
2. Énoncé du théorème de Pythagore

Théorème

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

En pratique :

Si ABC est un triangle rectangle en C alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



Remarque : Ce théorème ne s'applique qu'aux triangles rectangles !

Exercice d'application 1

Écrire l'égalité donnée par le théorème de Pythagore dans les cas suivant :
1. Dans le triangle GTL rectangle en L.
2. Dans le triangle MKF rectangle en K.

II. Applications du théorème de Pythagore

1. Première application

Objectif : **Calculer la longueur de l'hypoténuse connaissant les longueurs des deux côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle.**

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Calculer la longueur BC (donner l'arrondi au dixième) sachant que AC = 4 cm et AB = 3 cm.

On sait que le triangle ABC est rectangle en A. L'hypoténuse est le côté [BC].
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC^2 = 4^2 + 3^2$$
$$BC^2 = 16 + 9$$
$$BC^2 = 25$$

Or, BC est une longueur donc BC ≥ 0 . On utilise alors la touche racine carré de la calculatrice.

$$BC = \sqrt{25}$$
$$BC = 5$$

Donc [AB] mesure 5 cm.

2. Deuxième application

Objectif : Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit connaissant la longueur de l'autre côté de l'angle droit et la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle.

Soit DFE un triangle rectangle en E.
Calculer la longueur EF (donner l'arrondi au dixième) sachant que ED = 5 cm et DF = 13 cm.

On sait que le triangle DFE est rectangle en E. L'hypoténuse est le côté [DF].
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$DF^2 = ED^2 + EF^2$$
$$13^2 = 5^2 + EF^2$$
$$169 = 25 + EF^2$$
$$EF^2 = 169 - 25$$
$$EF^2 = 144$$

Or, EF est une longueur donc EF ≥ 0 . On utilise alors la touche racine carré de la calculatrice.

$$EF = \sqrt{144}$$
$$EF = 12$$

Donc [EF] mesure 12 cm.

3. Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

On considère le triangle ABC tel que AC = 6 cm, BC = 9 cm et AB = 12 cm.
Montrons que ce triangle **n'est pas** rectangle.

Si le triangle était rectangle, seul le coté [AB] pourrait être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

D'une part, $AB^2 = 12^2$
$AB^2 = 144$

D'autre part, $BC^2 + AC^2 = 6^2 + 9^2$
$BC^2 + AC^2 = 36 + 81$
$BC^2 + AC^2 = 117$

Donc $AB^2 \neq BC^2 + AC^2$.

Si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore on aurait $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Puisque ce n'est pas le cas, on peut affirmer que le triangle ABC n'est pas rectangle.

III. La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

En pratique :

Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AC^2 + AB^2$ alors ce triangle est rectangle en A.

Exemple :
On considère le triangle ZEN tel que NE = 16 cm, ZE = 12 cm et ZN = 20 cm.
Montrons que le triangle ZEN est rectangle.

Dans le triangle ZEN, [ZN] est le plus grand côté.

D'une part, $ZN^2 = 20^2 = 400$

D'autre part, $ZE^2 + NE^2 = 12^2 + 16^2$

$ZE^2 + NE^2 = 144 + 256$

$ZE^2 + NE^2 = 400$

Donc $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ZEN est rectangle en E.