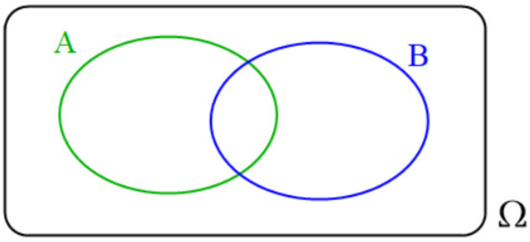
Plan du cours

I. Introduction

On est souvent amener en mathématiques à effectuer des regroupements d'éléments ayant certaines caractéristiques.

Par exemple : dans un lycée, on regroupe les élèves dans des classes différentes suivant leur niveau. Un groupe d'élèves de terminale qui ont choisi la spécialité physique notée A et un groupe d'élèves de terminale qui ont choisi la spécialité mathématiques notée B. Ces deux groupes forment des ensembles inclus dans l'ensemble formé par l'établissement noté Ω.

On peut représenter cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn :



La notation ensembliste est la suivante : $A \subset \Omega$ **et** $B \subset \Omega$.

On lit : "A est inclus dans oméga" et "B est inclus dans oméga".

II. Les ensembles de nombres et leur notation

1. Les entiers naturels

Les premiers nombres utilisés sont les entiers 0 ; 1 ; 2.. On les appelle les entiers naturels.
Il y a une infinité d'entiers naturels, l'ensemble qu'ils forment est noté $\mathbb{N}$.

Définition

On appelle $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, le plus petit entier naturel est 0.

$\rightarrow$ Si l'on considère les entiers naturels non nuls (c'est-à-dire tous sauf 0) on note cet ensemble : $\mathbb{N}^*$
$\rightarrow$ D'une manière générale et par convention, écrire un ensemble avec le symbole * signifie que le nombre 0 est exclu de cet ensemble.

<u>Exercice :</u>

(a) On considère l'ensemble A des entiers positifs ou nuls inférieurs ou égaux à 3, donner l'écriture ensembliste de l'ensemble A : . . . .

(b) Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ les phrases suivantes :

2. . .A ; 7. . .A ; $\{1\}$. . .A ; $\{2;6\}$. . .A

2. . .$\mathbb{N}$; $\{2;6\}$. . .$\mathbb{N}$; A. . .$\mathbb{N}$; -1. . .$\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*$. . .$\mathbb{N}$

2. Les entiers relatifs

- Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

  $x - 3 = 0$ $\qquad$ $3t - 6 = 0$ $\qquad$ $2y + 8 = 2$

- Il y a donc nécessité de considérer les entiers relatifs. Un entier relatif est constitué d'un signe " - " ou dun signe " + " (ne s'écrivant pas par convention) et d'un entier naturel, l'ensemble qu'ils forment est noté $\mathbb{Z}$.

Définition

On appelle $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, il n'y a pas de plus petit ni de plus grand entier relatif.
$\rightarrow$ L'ensemble des entiers relatifs non nuls est noté : $\mathbb{Z}^*$, celui des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ et celui des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}^+$

Exercice :
Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ les phrases suivantes :

$2 \ldots \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$; $\{-1; 1\} \ldots \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^- \ldots \mathbb{Z}$

A. . . .$\mathbb{Z}$; $-\dfrac{1331}{11} \ldots \mathbb{Z}$; $\sqrt{169} \ldots \mathbb{Z}$; $\dfrac{2}{3} \ldots \mathbb{Z}$

Propriété

Entre deux entiers relatifs, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers relatifs.

Exercice :
Les entiers relatifs strictement compris entre -5 et 3 sont : . . . .
L'ensemble qu'ils forment est B = ...

3. Les rationnels

- Résoudre l'équation $2x + 1 = 6$, la ou les solutions appartiennent-elles à $\mathbb{N}$? à $\mathbb{Z}$?

Définition

On appelle rationnel tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Définition

On appelle $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Exercice :

Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ les phrases suivantes :

$2 \ldots \mathbb{Q}$; $5 \ldots \mathbb{Q}$; $\frac{1}{2} \ldots \mathbb{Q}$; $\sqrt{225} \ldots \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \ldots \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \ldots \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$

Propriété

Entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres rationnels.

Exercice :

Déterminer 3 rationnels distincts compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$: . . . .

Propriété

Parmi les rationnels, ceux qui admettent une écriture avec une puissance de 10 au dénominateur sont appelés des décimaux, cet ensemble est noté $\mathbb{D}$

Exercice :

Parmi les rationnels suivants, quels sont ceux qui sont aussi des décimaux ?

$\frac{15}{25}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{22}{11}$; $\frac{33}{22}$ $\frac{1}{3}$

4. Les nombres réels

- Résoudre les équations suivantes et préciser la nature de leurs solutions :

  Rappel : pour résoudre des équations du type $x^2 = a$ avec $a \geq 0$, il faut transposer l'un des deux membres, l'autre membre devenant alors 0 puis factoriser l'expression obtenue de façon à utiliser la règle : " un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul "

  $x^2 = 4$ $\qquad\qquad$ $x^2 = 2$

- L'ensemble formé par tous les rationnels et les irrationnels (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas rationnels) est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez jusqu'à aujourdhui, on le note $\mathbb{R}$, les réels.

Définition

On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (ou réels).

Exercice :

(a) Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ les phrases suivantes :

$2 \ldots \mathbb{R}$; $\pi \ldots \mathbb{R}$; $\frac{11}{7} \ldots \mathbb{R}$; $\frac{-\pi}{9} \ldots \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{R}$; $\{1; -6\} \ldots \mathbb{R}$

(b) Représenter le diagramme de Venn représentant tous les ensembles définis dans le cours.

CONCLUSION (à retenir) :

5. Initiation à la démonstration

Il existe plusieurs raisonnement pour réussir une démonstration. Nous allons ici utiliser la démonstation par l'absurde.

Voici les différentes étapes d'une démonstration par l'absurde :

- On suppose que le contraire de ce que l'on veut démontrer est vrai.
- On utilise cette hypothèse et des définitions et/ou des propriétés du cours pour faire des déductions jusqu'à arriver à une absurdité.
- La supposition de départ conduisant à une absurdité, elle ne peut être que fausse, donc son contraire est vrai.

(a) On souhaite démontrer que : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

(b) On souhaite démontrer que : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde.

CORRECTION

(a) On souhaite démontrer que : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Approche de la représentation du nombre par le calcul à la main : $\frac{1}{3} \approx 0,33333333...$ Ce résultat ne permet de pas de justifier que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Prenons alors la la proposition P **contraire** : $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
Par définition il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ On a alors $10^n = 3a$.
10^n serait donc un multiple de 3.
Or la décomposition de 10^n en facteurs premiers : $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ montre que 10^n n'est pas un multiple de 3 qui lui est premier.
Donc, l'hypothèse de départ nous mène à une contradiction. On en déduit qu'elle est fausse.
Donc, par contradiction P est fausse donc la négation de P est vraie.

Conclusion : $\frac{1}{3}$ **n'est pas un nombre décimal.**

(b) On souhaite démontrer que : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Prenons alors la proposition P **contraire** : $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
On peut donc écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible :
Il existe donc un entier relatif p et un entier naturel q non nul tels que $\sqrt{2}$ s'écrive $\frac{p}{q}$.
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc, en élevant les deux membres de légalité au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$.
On a donc $2q^2 = p^2$ donc p^2 est pair.
p est soit pair, soit impair. Or le carré dun nombre pair est pair.
Par définition dun nombre pair, il existe un entier relatif k tel que p = 2k.
Or $2q^2 = p^2$, donc $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$ En divisant par 2 les deux membres de cette égalité, on obtient $q^2 = 2k^2$.
Donc q^2 est pair, ce qui, comme précédemment, implique que q est pair.

On a montré que p est pair et que q est pair, donc on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ ce qui est absurde puisquon a supposé que la fraction était irréductible.

Donc, par contradiction P est fausse donc la négation de P est vraie.

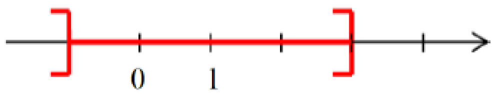
Conclusion : $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel.**

III. Les intervalles de $\mathbb{R}$

1. Introduction

(Exercice 3 de la feuille d'exercices d'entraînement)

Exercice 3 Intervalles de $\mathbb{R}$
Compléter le tableau suivant.

Inégalité	Intervalle	Représentation
$-2 \leq x \leq 3$		
	$]-1;5[$	
	$[4;8[$	
		
$x \geq 4$		
$x \leq 9$		

2. Définition

Définition

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$ définie par une et une seule inégalité ou un et un seul encadrement.

Exemples :

- L'ensemble des réels tels que $x \geq 3$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des réels tels que $-1 < y \leq 5$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- *Contre-exemple :* l'ensemble des réels tels que $t > 2$ ou $t \leq -1$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Les différents types d'intervalles

On recense 8 types différents d'intervalles. Soit deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

Intervalle	**Inégalité**	**Représentation**
[a ;b]		
]a ;b[		
[a ;b[		
]a ;b]		
[a ;+∞[		
]a ;+∞[		
]-∞ ;b]		
]-∞ ;b[		

Remarques :

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty; +\infty[$.

- $[a; b]$ est un intervalle fermé : les réels a et b appartiennent à l'intervalle.
-]a ;b[est un intervalle ouvert : les réels a et b n'appartiennent pas à l'intervalle.

Cas particuliers :

- Si un ensemble ne contient qu'un élément **a**, on le note $\{a\}$.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément et se note $\emptyset$.

IV. Opérations sur les ensembles

1. L'inclusion : le symbole $\subset$

Définition

Soient A et B deux ensembles, on dit que A est inclus dans B lorsque tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note $A \subset B$.

Exemples :

$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, i, o, u, y\}$ et $C = \{12\text{premières lettres de l'alphabet}\}$

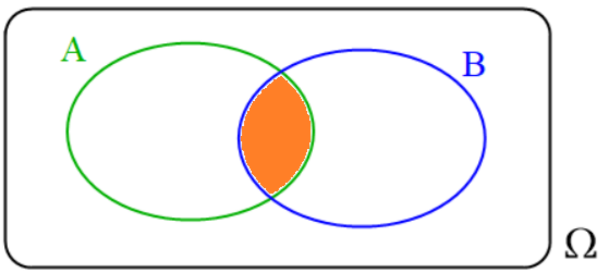
On a alors A. . . .C ; B. . . .C ; A. . . .B

2. L'intersection : le symbole $\cap$

Définition

Soient A et B deux ensembles, on appelle intersection de A et B l'ensemble $A \cap B$ formé par les éléments <u>communs</u> à A et à B (c'est-à-dire l'ensemble contenant les éléments qui sont dans A ET dans B). Ces élément ne sont écrits qu'une seule fois.

Représentation : $A \cap B$



Exemples :

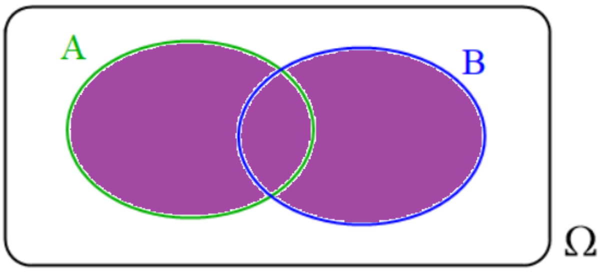
- $A = \mathbb{N}^*$ et $B = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ alors $A \cap B = \ldots$
- $C = \{-1; \sqrt{7}; \sqrt{12}; 7\}$ et $D = [0; 3]$ alors $C \cap D = \ldots$
- $G = [-2; 2]$ et $H = [0; 7]$ alors $G \cap H = \ldots$

3. L'union : le symbole $\cup$

Définition

Soient A et B deux ensembles, on appelle union (ou réunion) de A et B lensemble noté $A \cup B$ formé par tous les éléments de A et tous les éléments de B écrits une seule fois.

Représentation : $A \cup B$



Exemples :

- $A = \mathbb{N}^*$ et $B = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ alors $A \cup B = \ldots$
- $G = [-2; 2]$ et $H = [0; 7]$ alors $G \cup H = \ldots$

Cas particuliers :

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$ $\qquad$ $A \subset (A \cup B)$ $\qquad$ $B \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \subset A$ $\qquad$ $(A \cap B) \subset B$