Plan du cours

I. Produit nul

Définition

Une équation produit-nul est une équation qui peut s'écrire sous la forme d'un produit égale à 0.

Exemples :

$(5x+3)(3x-2)=0$ est une équation produit-nul.

Mais $7(3x+4)+(7x+1)=0$ n'est pas une équation produit-nul c'est une somme.

Propriété

Dans un produit, si l'un des facteurs est nul, alors ce produit est nul.

Autrement dit, Si A = 0 ou B = 0 alors $A \times B = 0$

Propriété

Réciproquement, si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Autrement dit, si $A \times B = 0$ alors A = 0 ou B = 0.

II. Reconnaître une équation produit

Définition

a, b, c et d désignent des nombres.
Une équation de la forme (ax + b)(cx + d) = 0 est une équation produit.

Exemple :

L'équation $(3x-5)(9-x)=0$ s'appelle une équation produit nul car :

- L'un des membres est un produit de facteurs.

- L'autre membre est 0.

- Si l'on développe le premier membre de cette équation, on s'aperçoit que cette équation est du second degré.
- Pour obtenir une équation produit, il est parfois nécessaire de factoriser l'équation donnée. On dispose pour cela des formules du chapitre factorisation et des identités remarquables.

Exercice d'application 1

Transformer les équations suivantes pour qu'elles deviennent des équations produits.
Il faudra factoriser le membre de gauche après s'être assurer que le membre de droite soit égal à 0.

(a) $(9x-4)(11-2x)-(5x-6)(9x-4)=0$

$(9x-4)[(11-2x)-(5x-6)]=0$

$(9x-4)[11-2x-5x+6]=0$

$(9x-4)(17-7x)=0$

(b) $9x^2-144=0$

$9x^2-144=0$

$(3x)^2-12^2=0$

$(3x-12)(3x+12)=0$

(c) $12x^3=8x^2$

$12x^3-8x^2=0$

$4x^2(3x-2)=0$

(d) $(3-x)(2x+7)=(6x-1)(2x+7)$

$(3-x)(2x+7)-(6x-1)(2x+7)=0$

$(2x+7)[(3-x)-(6x-1)]=0$

$(2x+7)[3-x-6x+1]=0$

$(2x+7)(4-7x)=0$

(e) $x^2=16$

$x^2-16=0$

$x^2-4^2=0$

$(x-4)(x+4)=0$

(f) $16x^2-8x=-1$

$16x^2-8x=-1$

$16x^2-8x+1=0$

$(4x-1)^2=0$

III. Résoudre une équation produit

Énoncé : Résoudre l'équation : (x + 2)(2x - 7) = 0.

Résolution :

(x + 2)(2x - 7) = 0 est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $x+2=0$ **ou** $2x-7=0$

$x=-2$ **ou** $2x=7$

$x=-2$ **ou** $x=\dfrac{7}{2}$

Les solutions de l'équation sont alors -2 et $\dfrac{7}{2}$.

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

$$(x-4)(x+3)=0$$

$(x-4)(x+3)=0$ est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $x-4=0$ **ou** $x+3=0$

$x=4$ **ou** $x=-3$

Les solutions de l'équation sont alors 4 et -3.

$$(-2x-1)(7-3x)=0$$

$(-2x-1)(7-3x)=0$ est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $-2x-1=0$ **ou** $7-3x=0$

$-2x=1$ **ou** $-3x=-7$

$x=-\frac{1}{2}$ **ou** $x=\frac{7}{3}$

Les solutions de l'équation sont alors $-\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{3}$.

$$9x^2=36$$

Il faut commencer par transformer cette équation en équation produit.

$$9x^2=36$$

$$9x^2-36=0$$

$$(3x)^2-6^2=0$$

$(3x-6)(3x+6)=0$ est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $3x-6=0$ **ou** $3x+6=0$

$3x=6$ **ou** $3x=-6$

$x=\frac{6}{3}=2$ **ou** $x=-\frac{6}{3}=-2$

Les solutions de l'équation sont alors 2 et -2.

Exercice d'application 2

Énoncés type-brevet

Exercice 1 On donne $R = (7x - 5)(8 - x) - (8 - x)(10 + x)$.

1. Développer et réduire R.
2. Factoriser R.
3. Calculer R pour $x = -1$.
4. Résoudre l'équation R = 0.

SOLUTION :

1. J'utilise la double distributivité pour développer.

$R = 56x - 7x^2 - 40 + 5x - (80 + 8x - 10x - x^2)$

$R = 56x - 7x^2 - 40 + 5x - 80 - 8x + 10x + x^2$

$R = -6x^2 + 63x - 120$

2. Factoriser avec un facteur commun.

$R = (7x - 5)(8 - x) - (8 - x)(10 + x)$

$R = (8 - x)[(7x - 5) - (10 + x)]$

$R = (8 - x)[7x - 5 - 10 - x]$

$R = (8 - x)(6x - 15)$

3. Pour calculer R pour $x = -1$, je choisis l'expression R que je veux.

Je vais choisir l'expression factorisée :

$R = (8 - x)(6x - 15)$

$R = (8 - (-1))(6 \times (-1) - 15)$

$R = 9 \times (-6 - 15)$

$R = 9 \times (-21)$

$R = -189$

4. $R = 0$ c'est-à-dire $(8 - x)(6x - 15) = 0$
est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $8 - x = 0$ **ou** $6x - 15 = 0$

$x = 8$ **ou** $6x = 15$

$x = 8$ **ou** $x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

Les solutions de l'équation sont alors 8 et $\frac{5}{2}$.

Exercice d'application 3

<u>**Exercice 2**</u> On donne $E = 9 - (2x - 1)^2$.
1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E.
3. Calculer E pour $x = \frac{1}{2}$.
4. Résoudre l'équation E = 0.

<u>SOLUTION :</u>

1. J'utilise la deuxième identité remarquable pour développer.

$E = 9 - (4x^2 - 4x + 1)$

$E = 9 - 4x^2 + 4x - 1$

$E = -4x^2 + 4x + 8$

2. Factoriser avec la troisième identité remarquable.

$E = 3^2 - (2x - 1)^2$

$E = [3 - (2x - 1)][3 + (2x - 1)]$

$E = [3 - 2x + 1][3 + 2x - 1]$

$E = (-2x + 4)(2x + 2)$

3. Pour calculer R pour $x = \frac{1}{2}$, je choisis l'expression R que je veux.

Je vais choisir l'expression développée :

$E = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 8$

$E = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 8$

$E = -1 + 2 + 8$

$E = 9$

4. $E = 0$ c'est-à-dire $(-2x + 4)(2x + 2) = 0$
est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $-2x + 4 = 0$ **ou** $2x + 2 = 0$

$-2x = -4$ **ou** $2x = -2$

$x = \frac{4}{2} = 2$ **ou** $x = -\frac{2}{2} = -1$

Les solutions de l'équation sont alors 2 et -1.