Plan du cours

I. Proportionnalité

1. Définition

Définition

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles si on passe des valeurs de l'une aux valeur de l'autre en multipliant par un même nombre. Ce nombre est alors appelé le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

Durée (en h)	1	2	3,5
Distance (en km)	40	80	140

$\frac{40}{1} = 40\,;\ \frac{80}{2} = 40\,;\ \frac{140}{3,5} = 40$

Les quotients sont **tous** égaux donc les distances sont proportionnelles aux durées.

Age (en année)	5	15	20
Taille (en cm)	108	162	170

$\frac{108}{5} = 21,6\,;\ \frac{162}{15} = 10,8$ et $\frac{170}{20} = 8,5$

Les quotients ne sont pas **tous** égaux donc les âges ne sont pas proportionnelles aux tailles.

A vous de jouer !

Les tableaux ci dessous sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Durée (en min)	10	20	45	50
Nombre de personnes	8	16	35	40

Solution :

$\frac{8}{10} = 0,8\,;\ \frac{16}{20} = 0,8\,;\ \frac{35}{45} \approx 0,7778\,;\ \frac{40}{50} = 0,8$

Les quotients ne sont pas **tous** égaux donc le nombre de personnes n'est pas proportionnel à la durée

Masses (en kg)	100	125	300	540
Prix (en euros)	2,80	3,50	8,40	15,12

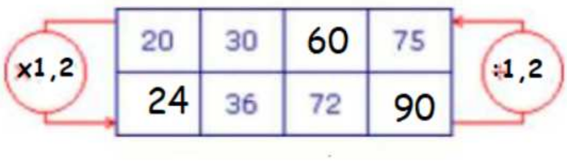
Solution :

$\frac{2,80}{100} = 0,028\,;\ \frac{3,5}{125} = 0,028\,;\ \frac{8,4}{300} = 0,028\,;\ \frac{15,12}{540} = 0,028$

Les quotients sont **tous** égaux donc prix en euros est proportionnel à la masse en kg

Exercice d'application 1

Compléter les tableaux de proportionnalité suivant à l'aide de leur coefficient de proportionnalité :



Tours de pédaliers	5	8	13	20
Distance (en m)	11,25	18	29,25	45

2. Trouver la quatrième proportionnelle dans un tableau de proportionnalité

Méthode :

Dans un tableau de proportionnalité, si l'on connait trois valeurs sur quatre alors on peut calculer la quatrième. Cette valeur est appelée la **quatrième proportionnelle**.

Quantité de carburant (en L)	30	42
Prix à payer (en euros)	31,8	x

$$x = \frac{42 \times 31,8}{30}$$

$$x = 44,52$$

Donc le prix de 42 litres de carburant est 44,52 euros.

Exercice d'application 2

Des amis sont en voyages à San Francisco. Lola a changé 150 euros contre 200 dollars.

1. Mario change 240 euros. Combien de dollars aura-t-il ?

Euros	150	240
Dollars	200	x

Donc $x = \dfrac{200 \times 240}{150} = 320$ Mario obtiendra 320 dollars.

2. En partant, Lola change les 26 dollars qu'il lui reste. Combien d'euros aura-t-elle ?

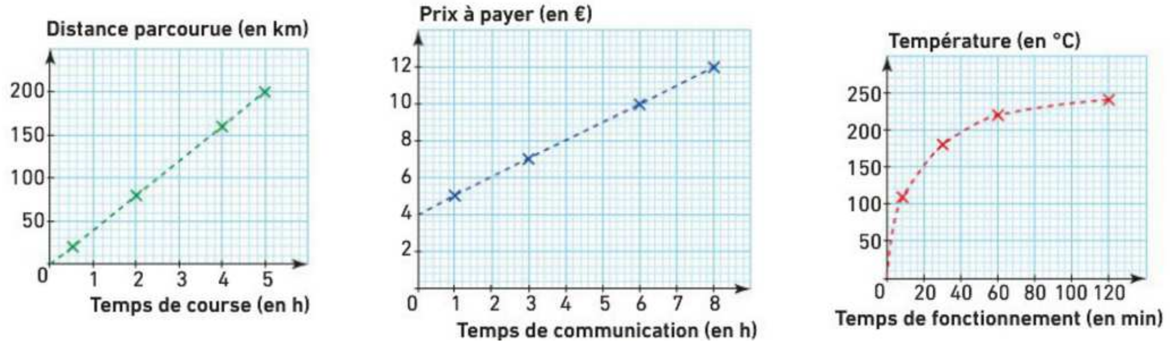
Euros	150	x
Dollars	200	26

Donc $x = \dfrac{150 \times 26}{200} = 19,50$ Lola obtiendra 19,50 euros.

3. Représentation graphique

Activité d'introduction

Les 3 graphiques ci-dessous représentent l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.



1 Reproduire et compléter les tableaux ci-dessous en utilisant les renseignements donnés par les trois graphiques.

La course cycliste de Marco				
Temps de course (en h)	0,5	2	4	5
Distance parcourue (en km)				

La facture téléphonique de Lisa				
Temps de communication (en h)	1	3	6	8
Prix à payer (en €)				

Le four du boulanger				
Temps de fonctionnement (en min)	10	30	60	120
Température (en °C)				

2 Dire, pour chacun de ces tableaux, s'il s'agit ou non d'un tableau de proportionnalité.

3 Comment semble-t-on pouvoir reconnaitre une situation de proportionnalité sur un graphique ?

Solutions :

1.

La course cycliste de Marco				
Temps de course (en h)	0,5	2	4	5
Distance parcourue (en km)	20	80	160	200

La facture téléphonique de Lisa				
Temps de communication (en h)	1	3	6	8
Prix à payer (en €)	5	7	10	12

Le four du boulanger				
Temps de fonctionnement (en min)	10	30	60	120
Température (en °C)	110	180	220	240

2. La course cycliste -> C'est une situation de proportionnalité
La facture téléphonique -> Ce n'est pas une situation de proportionnalité
Le four du boulanger -> Ce n'est pas une situation de proportionnalité

3. La courbe 1 qui représente une situation de proportionnalité (cf la course cycliste) est une droite qui passe par 0.

Propriété

Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors **elles sont représentées graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.**

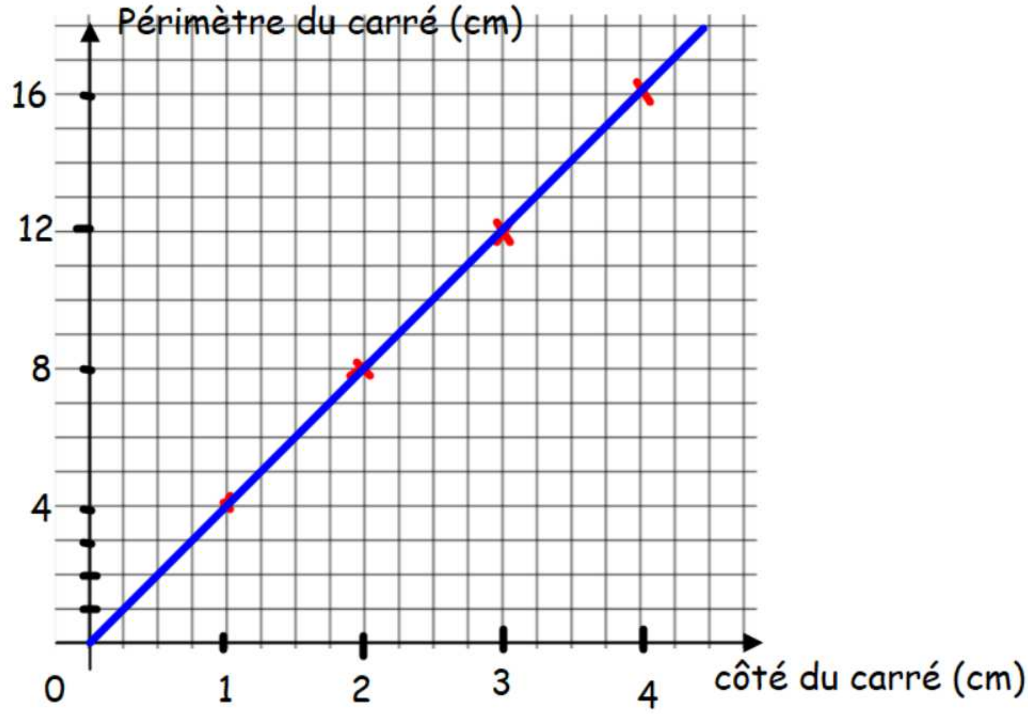
Propriété

Si, deux grandeurs sont représentées graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère, alors **ces grandeurs sont proportionnelles.**

Exemple :

Le périmètre d'un carré est-il proportionnel à la longueur d'un de ses côtés ?
(Pour répondre à cette question, compléter le tableau et représenter la situation sous forme de graphique.)

Longueur d'un côté (en cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (en cm)	$4 \times 0 = \mathbf{0}$	$4 \times 1 = \mathbf{4}$	$4 \times 2 = \mathbf{8}$	$4 \times 3 = \mathbf{12}$	$4 \times 4 = \mathbf{16}$


Périmètre du carré (cm)
16
12
8
4
0
1
2
3
4
côté du carré (cm)

II. Vitesse moyenne

Si un mobile effectue un trajet au cours duquel la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours, alors ce mobile a un mouvement dit **uniforme**.
Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité entre la distance et la durée est appelé **vitesse moyenne** du mobile.

Propriété

Soient d la distance parcourue, t la durée du parcours et v la vitesse moyenne, on obtient la relation suivante :

$$v = \frac{d}{t}$$

Remarques :

- Si la distance **d** est en **km** et le temps **t** est en **h**, alors la vitesse **v** est en **km/h**.
- Si la distance **d** est en **m** et le temps **t** est en **s**, alors la vitesse **v** est en **m/s**.

⚠ Il est donc impératif de convertir les grandeurs correctement avant d'utiliser les formules ci-dessus.

1. Calculer une vitesse moyenne (v)

→ **Pour calculer une vitesse moyenne, on utilise la formule :** $v = \frac{d}{t}$

Exemple : Quelle est la vitesse moyenne en km/h d'un piéton qui met 2h30 pour parcourir 10.5 km ?

- La vitesse doit être exprimée en km/h, donc le temps doit être exprimé en h :

2h30min = ? h

heure	1	x
min	60	2h30 min = 150 min

$x = \frac{150 \times 1}{60}$

$x = 2,5h$ donc **2h30min = 2,5h**

- On peut maintenant utiliser la formule de la vitesse : $v = \frac{d}{t}$

$v = \frac{10,5}{2,5}$

$\boxed{v = 4,2 \textbf{ km/h}}$ Le piéton marche à une vitesse de 4,2 km/h.

Exercice d'application 3

Un automobiliste effectue un trajet de 522 kilomètres en 6 heures et 40 min.
Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ? en m/s ?

- La vitesse doit être exprimée en km/h, donc le temps doit être exprimé en h :

6h40min = ? h

heure	1	x
min	60	6h40 min = 400 min

$x = \frac{400 \times 1}{60}$

$x \approx 6,67h$ donc **6h40min ≈ 6,67h**

- On peut maintenant utiliser la formule de la vitesse : $v = \frac{d}{t}$

$v \approx \frac{522}{6,67}$

$\boxed{v \approx 78,3 \text{ km/h}}$ L'automobiliste roule à une vitesse moyenne de 78,3 km/h.

- Convertissons maintenant en m/s :

Rappels : 1 km = 1 000 m et 1 h = 60 min
78,3 km = 78 300 m

Si je parcours 78 300 m en une heure donc en 3600 min, combien je vais parcourir de km en une minute ?

km	78 300	x
sec	3600	1

$x = \frac{78300 \times 1}{3600} = 21,75m$

78,3 km/h = 21,75 m/s

2. Calculer une distance (d)

→ **Pour calculer une distance, on utilise la formule :** $d = v \times t$

Exemple : Quelle est la distance parcourue par un véhicule qui roule pendant 3h à la vitesse moyenne de 85 km/h ?

On utilise la formule de la distance : $d = v \times t$

$d = 85 \times 3$

$\boxed{d = 255 \text{ km}}$ Le véhicule a parcouru 255 km.

Exercice d'application 4

Valentine fait du vélo. Elle roule pendant 1 heure 20 min à la vitesse moyenne de 12 km/h. Quelle distance a-t-elle parcouru en km ?

- Le temps doit être exprimé en heure :

1 h 20 min = ? h

heure	1	x
min	60	1h20 min = 80 min

$x = \dfrac{80 \times 1}{60}$

$x \approx 1,3h$ donc **1 h 20 min ≈ 1,3 h**

- On utilise la formule de la distance : $d = v \times t$

$d \approx 12 \times 1,3$

$\boxed{d \approx 15,6 \textbf{ km}}$ Elle a parcouru 15,6 km.

3. Calculer une durée (t)

→ **Pour calculer une durée, un temps, on utilise la formule :** $t = \dfrac{d}{v}$

Exemple : Quelle est la durée de parcours d'un cycliste qui roule à une vitesse moyenne de 17,5 km/h et qui parcourt 63 km ?

On utilise la formule de la durée : $t = \dfrac{d}{v}$

$t = \dfrac{63}{17,5}$

$\boxed{t = 3,6 \textbf{ h}}$

- On convertit en heures et en minutes :

heure	1	0,6
min	60	x

$x = \dfrac{0,6 \times 60}{1} = 36min$

Donc 3,6 h = 3 h 36 min.

Il a parcouru 63 km en 3 heures et 36 minutes.

Exercice d'application 5

Alix nage. Lors d'une compétition, elle parvient à nager à la vitesse moyenne de 3,5 km/h et parcourt ainsi 2 km. Calculer le temps en minutes et secondes qui lui a été nécessaire.

On utilise la formule de la durée : $t = \frac{d}{v}$

$t = \frac{2}{3,5}$

$\boxed{t \approx 0,57 \textbf{ h}}$

- On convertit en minutes :

heure	1	0,57
min	60	x

$x = \frac{0,57 \times 60}{1} = 34,2 min$

Donc 0,57 h = 34,2 min.

- On convertit en minutes et en secondes :

min	1	0,2
secondes	60	x

$x = \frac{0,2 \times 60}{1} = 12 sec$

Donc 34,2 min = 34 min 12 sec.

Il a parcouru 63 km en 3 heures et 36 minutes.

III. Pourcentages

1. Appliquer un pourcentage

Définition

Pour calculer t % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{t}{100}$

Exemple : Calculer les pourcentages suivants.

50% de 58 élèves : $\frac{50}{100} \times 58 = 29$ Cela correspond à 29 élèves *(la moitié)*.

25 % de 200 L : $\frac{25}{100} \times 200 = 50$ Cela correspond à 50 L *(le quart)*.

70 % de 90 kg $\frac{70}{100} \times 90 = 63$ Cela correspond à 63 kg.

Exercice d'application 6

1. Les jeunes de 11 à 14 ans passent en moyenne 12,5 % d'une journée (24h) devant un écran.
70 % de ce temps est passé devant la télévision et le reste du temps devant un ordinateur.

Combien d'heures les jeunes de 11 à 14 ans passent-ils en moyenne chaque jour devant :

a) un écran ? b) la télévision ? c) un ordinateur ?

(a) **Sur un écran :**
12,5% de 24 heures : $\frac{12,5}{100} \times 24 = 3$ h.

Les jeunes passent en moyenne 3 h devant un écran par jour.

(b) **Sur la télévision :**
70% du temps passé devant un écran est passé devant la télévision : 70% de 3 heures :
$\frac{70}{100} \times 3 = 2,1$ h.

On convertit en heures et minutes

heure	1	0,1
min	60	x

$x = \frac{0,1 \times 60}{1} = 6\text{min}$

Les jeunes passent en moyenne 2 heures et 6 minutes devant la télévision par jour.

(c) **Sur un ordinateur :**
Le reste du temps sur l'ordinateur. Deux calculs sont possibles :

1) 3h - 2h06 = 54 minutes.

ou

2) 30% du temps passé sur écran :
$\frac{30}{100} \times 3 = 0,9$ h.

On convertit en minutes

heure	1	0,9
min	60	x

$x = \frac{0,1 \times 60}{1} = 54\text{min}$

Les jeunes passent en moyenne 54 minutes devant un ordinateur par jour.

2. Déterminer un pourcentage

Méthode :
Déterminer un pourcentage revient à calculer une quatrième proportionnelle à 100, c'est-à-dire à faire un produit en croix.

Exemple :
Dans une classe de 24 élèves, 9 sont demi-pensionnaires. **Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires.**

Nombres d'élèves	24	9
Pourcentage	100%	x

$\frac{9 \times 100}{24} = 37,5\%$ Il y a 37,5% d'élèves demi-pensionnaires.

Exercice d'application 7

Pendant un vide grenier, Zoé a réussi à vendre 54 de ses 72 BD. **Quel pourcentage de ses BD a-t-elle vendues ?**

Nombres de BD	72	54
Pourcentage	100%	x

$\dfrac{54 \times 100}{72} = 75\%$ Elle a vendu 75% de ses BD.

3. Calculer une augmentation ou une réduction

Exemples :

(a) Le prix d'un manteau de 160 euros est augmenté de 20%. Quel est le nouveau prix ?

- On calcul d'abord, le montant de l'augmentation, qui est de 20% de 160 : $\dfrac{20}{100} \times 160 = 32.$

- On calcule ensuite le prix après augmentation : 160 + 32 = 192

Le nouveau prix est de 192 euros.

(b) Le prix d'un DVD est de 17 euros. Quel est le nouveau prix après 15% de réduction ?

- On calcul d'abord, le montant de la réduction, qui est de 15% de 17 : $\dfrac{15}{100} \times 17 = 2,55.$

- On calcule ensuite le prix après réduction : 17 - 2,55 = 14,45

Le nouveau prix est de 14,45 euros.

Exercice d'application 8

(a) Julie obtient une réduction de 15 % sur un vélo valant 158 €. Quel est le montant de la réduction obtenue par Julie ?

On calcul le montant de la réduction, qui est de 15% de 158 : $\frac{15}{100} \times 158 = 23,7$.

Le montant de la réduction est de 23,7 euros.

(b) Patrick a obtenu une réduction de 27 €sur une console de jeu qui valait 225 €. Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu ?

Prix (en euros)	225	27
Pourcentage	100%	x

$\frac{27 \times 100}{225} = 12\%$ Patrick obtient 12% de réduction.

(c) Paul a obtenu une baisse de 45 €sur un appareil photo, soit une baisse de 30 % du prix initial. Quel était le prix initial de l'appareil photo ?

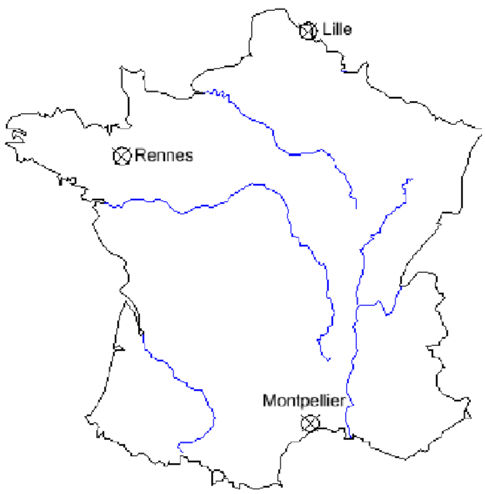
Prix (en euros)	x	45
Pourcentage	100%	30

$\frac{45 \times 100}{30} = 150$ Le prix initial de l'appareil photo était de 150 euros.

IV. Échelles

Activité de découverte sur les échelles

Échelle : « *1 cm sur la carte représente 200 km dans la réalité.* »



a) Quelle est la distance réelle, à vol d'oiseau, entre Rennes et Lille ? ___________
Explique ta démarche :____
____

b) Quelle est la distance réelle, à vol d'oiseau, entre Rennes et Montpellier ? _________
Explique ta démarche : ____
____

c) Place sur cette carte la ville de Limoges située à 340 km de Rennes et 560 km de Lille.
Explique ta démarche : ____
____

On dira que l'**échelle de la carte est de 1/20 000 000** c'est à dire que 1 cm sur la carte correspond à 20 000 000 cm (c'est à dire 200 km) dans la réalité.

Définition

Sur un plan, les distances sont proportionnelles aux distances réelles. On appelle échelle du plan le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des distances réelles aux distances du plan. (les distances étant exprimées dans la même unité)

Exemple : Sur une carte on peut lire : "réduction à l'échelle $\frac{1}{25000}$".

Cela signifie que 1 cm sur la carte correspond à 25 000 cm (250 m) dans la réalité.

Distance sur le plan (**en cm**)	1	0,4	40
Distance réelle (**en cm**)	25 000	$0,4 \times 25000 = 10000$	$40 \times 25000 = 1000000$

⚠ Il faut absolument utiliser la même unité !

Exercice d'application 9

1. Une maquette de la tour Eiffel à l'échelle $\frac{1}{1200}$ a une hauteur de 27 cm.
Quelle est la hauteur réelle de la Eiffel ?

Distance sur le plan (**en cm**)	1	27
Distance réelle (**en cm**)	1 200	x

$x = \frac{27 \times 1200}{1} = 32400$ La tour Eiffel mesure en réalité 32 400 cm soit 324 m.

2. Sur une photographie réalisée avec un microscope, un microbe mesure 6 cm. La taille réelle de ce microbe est de 0,2 mm. (a) Quelle est l'échelle d'agrandissement ?

0,2 mm = 0,02 cm

Distance réelle (**en cm**)	1	0,02
Distance sur le plan (**en cm**)	x	6

$x = \frac{1 \times 6}{0,02} = 300$ L'échelle d'agrandissement est $\frac{300}{1}$.

(b) La taille réelle d'un second microbe est 0,08 mm. Quelle serait sa taille sur une photographie avec l'échelle d'agrandissement de la question a. ?

0,08 mm = 0,008 cm

Distance réelle (**en cm**)	1	0,008
Distance sur le plan (**en cm**)	300	x

$x = \frac{300 \times 0,008}{1} = 2,4$ Le microbe aurait une taille de 2,4 cm sur la photographie.