I Ensembles de nombres

1. Nombres entiers

Définition : • Les nombres **entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
• Les nombres **entiers relatifs** sont les nombres entiers positifs et les nombres entiers négatifs.
On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

2. Nombres décimaux

Définition : Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10.
On note $\boldsymbol{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : $\boldsymbol{D} = \left\{\frac{a}{10^n} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exemples : $-2{,}17 = \frac{-217}{100} = \frac{-217}{10^2}$ $63 = \frac{63}{1} = \frac{63}{10^0}$ $-2{,}17$ et 63 sont des nombres décimaux.

On ne peut pas écrire $\frac{4}{3}$ sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10, donc $\frac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Remarques : • Tout entier relatif est un nombre décimal.
• Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres. Ainsi, $1{,}333\,33\dots$ n'est pas un nombre décimal.

3. Nombres rationnels

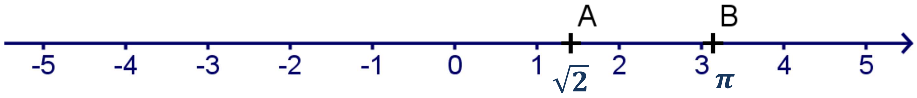
Définition : Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs.
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Remarque : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$

Exemples : $\frac{4}{3}$ est un nombre rationnel ; $-2{,}17 = \frac{-217}{100}$ et $63 = \frac{63}{1}$ sont des nombres rationnels.

4. Nombres réels

Définition : Les nombres **réels** sont les nombres qu'on peut représenter sur une droite graduée.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

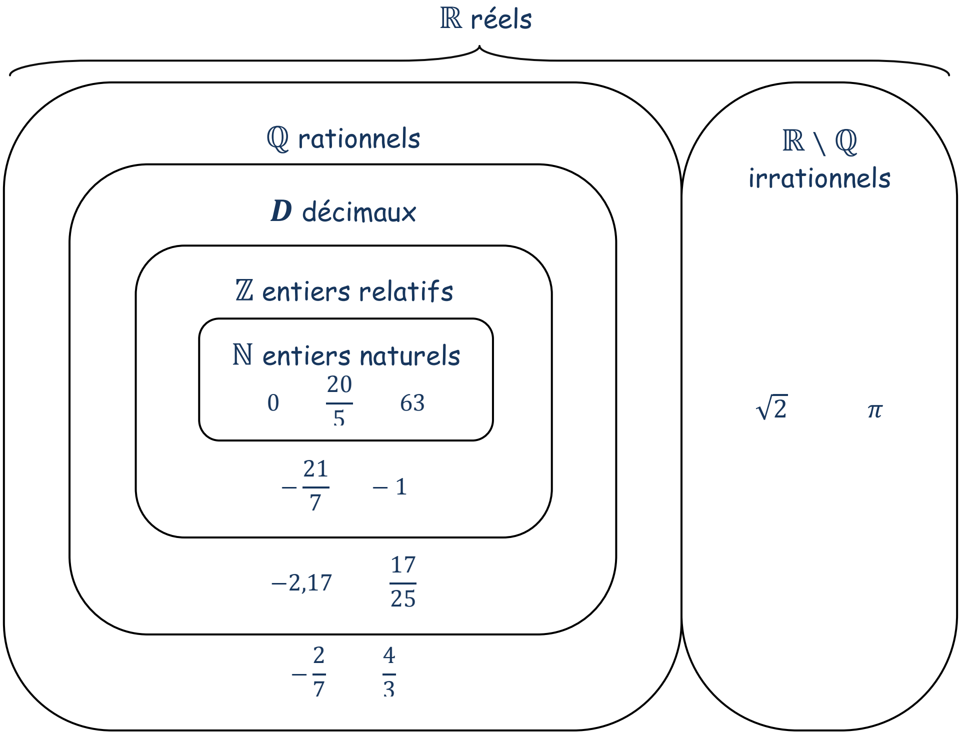


A tout point de la droite correspond un unique nombre réel, appelé **abscisse** du point.
A est le point d'abscisse $\sqrt{2}$ et B est le point d'abscisse π.

Remarque : Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ et π. On les appelle des nombres **irrationnels**.

5. Inclusions d'ensembles de nombres

Les ensembles de nombres sont « emboîtés » de la façon suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \boldsymbol{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
On parle d'**inclusions** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ se lit « l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ».



II <u>Intervalles</u>

1. Définition

Définition : a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
L'ensemble des nombres réels x compris entre a et b (a et b inclus), c'est-à-dire tels que $a \leq x \leq b$, est appelé un **intervalle** de $\mathbb{R}$. On le note $[a; b]$.

On peut découper sur la droite réelle d'autres intervalles. Ce sont des parties « sans trou » de la droite réelle.

Notation	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Remarques : • a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.

• La différence $b - a$ est l'**amplitude** de l'intervalle $[a; b]$.

• Les réels a et b appartiennent à l'intervalle $[a; b]$, qui est dit **fermé** (*un crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle « enferme » la borne dans l'intervalle*).
Les réels a et b n'appartiennent pas à l'intervalle $]a; b[$, qui est dit **ouvert** (*un crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle « n'enferme pas » la borne*).
L'intervalle $[a; b[$ est fermé en a et ouvert en b. Il est dit **semi-ouvert**.

• Les symboles $-\infty$ (*lire « moins l'infini »*) et $+\infty$ (*lire « plus l'infini »*) indiquent que l'intervalle n'est pas borné à gauche ou à droite.
Un intervalle est toujours ouvert en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Exemples : • $]0; +\infty[$ est l'intervalle des réels strictement positifs. On le note aussi $\mathbb{R}^{+*}$.
$]-\infty; 0[$ est l'intervalle des réels strictement négatifs. On le note aussi $\mathbb{R}^{-*}$.

• $[3; 4[$ est l'intervalle des réels dont la partie entière est égale à 3.

• $\{3; 4\}$ n'est pas un intervalle.

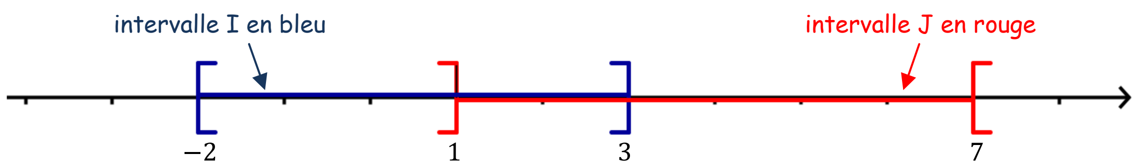
2. Réunion et intersection d'intervalles

Définitions : • L'**intersection** de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un <u>**et**</u> à l'autre des deux intervalles I et J.
On la note **I ∩ J** (lire « I inter J »).

• La **réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un <u>**ou**</u> à l'autre des deux intervalles I ou J (éventuellement aux deux à la fois).
On la note **I ∪ J** (lire « I union J »).

Remarque : En général, le « ou » du langage courant et le « ou » mathématique n'ont pas le même sens.
« Boire ou conduire, il faut choisir » : on ne doit pas faire les deux à la fois ; ici, le « ou » est *exclusif*.
« $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ » : lorsque a et b sont tous les deux nuls, on a bien $ab = 0$; ici, le « ou » est *inclusif*.

Exemples : • I $= [-2; 3]$ et J $=]1; 7[$.
Déterminer l'intersection et la réunion de I et J.



L'intersection de I et J est l'ensemble des nombres coloriés à la fois en bleu et en rouge :
I ∩ J $=]1; 3]$.

La réunion de I et J est l'ensemble des nombres coloriés en bleu ou en rouge (c'est-à-dire en bleu seulement, en rouge seulement, ou les deux couleurs à la fois) :
I ∪ J $= [-2; 7[$.

• $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est l'ensemble des réels privé de 0. On le note aussi $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.