Exercices

S'entraîner

Addition et soustraction

1 Calculer les sommes :

a. $(+8)+(-15)$. b. $(+25)+(-12)$.
c. $(-1{,}8)+(-6{,}2)$. d. $(-2{,}1)+(+1{,}4)$.

2 Calculer les différences :

a. $(+17)-(-5)$. b. $(+12)-(-12)$.
c. $(-0{,}8)-(-25)$. d. $(-3{,}2)-(+0{,}4)$.

3 Parmi les expressions suivantes, indiquer celles qui donnent le même résultat.

$A = -10+5$. $B = (-12)-(+8)$.
$C = 3-20$. $D = (-12)+(-8)$.
$E = 3+(-20)$. $F = 31+14$.
$G = (+3)-(+20)$. $H = -12-8$.
$I = (-10)+(+5)$. $J = (+31)-(-14)$.

4 Calculer :

a. $-7+3$. b. $-(7+3)$.
c. $-5-4$. d. $-(5-4)$.
e. $-12-9$. f. $-(12-9)$.

5 **Calcul mental**

a. $9-15$. b. $18-7$.
c. $-12-5$. d. $-20+9$.
e. $30-48$. f. $-17+3$.

6 ❶ Recopier et compléter le tableau suivant.

a	b	$a+b$	$-(a+b)$	$-a$	$-b$	$(-a)+(-b)$
5	7					
−3	9					
−8	2					
−6	−4					

❷ Que remarque-t-on ?

Remarque : Pour une **démonstration** de cette conjecture, voir l'exercice 80, page 22.

Pour les exercices 7 à 9, calculer chaque expression.

7 $A = 14+8-7-12$.
$B = -20-7+13+4-15$.
$C = -11+20+7-5-1$.

8 $A = 1{,}4+8{,}3-7{,}1-12{,}9$.
$B = -20{,}4-7{,}2+1{,}3+4{,}7-15{,}4$.
$C = -110+205+60-5-150$.

9 $A = -8+5-(-4-17)$.
$B = 42-(4+35)-(-12+5)$.
$C = 22-[7-(-5-6)]$.

10 **Vrai ou faux**

a. $-12+4=4-12$.
b. $8-10=10-8$.
c. Soustraire -6 revient à ajouter 6.
d. Ajouter -6 revient à soustraire 6.
e. $-8+7=-15$.
f. $(-10)+(-10)+(-10)=-1\,000$.

Pour les exercices 11 à 13, déterminer, dans chaque cas, le nombre x qui vérifie l'égalité.

11 a. $x-12=-2$. b. $x+8=-10$.
c. $16-x=6$. d. $15+x=-20$.

12 a. $x+7=-15$. b. $x-2=-19$.
c. $24+x=18$. d. $3-x=-25$.

13 a. $x+7{,}8=-5{,}1$. b. $x-4{,}5=-9{,}8$.
c. $2{,}3-x=6{,}9$. d. $9{,}4-x=-3{,}2$.

Multiplication

Pour les exercices 14 et 15, calculer chaque produit.

14 a. $(+9)\times(-14)$. b. $(-12)\times(-21)$.
c. $(-6)\times(+15)$. d. $(-25)\times(+8)$.

15 a. $2\times(-41)$. b. $-15\times(-8)$.
c. -19×5. d. -23×82.

16 **Calcul mental**

a. $5\times(-8)$. b. $(-3)\times(-7)$.
c. -6×9. d. $3\times(-4)$.
e. $-10\times(-4{,}8)$. f. $-2\times(-1{,}5)$.

17 Recopier et compléter le tableau suivant.

×	8	−3	10	−7
2				
−6				
−10				
7,3				

18 Déterminer le signe de chaque produit sans le calculer.

$A = -81\times(-62)\times9\times(-45)\times(-17)\times93$.
$B = 7{,}68\times14{,}5\times(-8{,}9)\times17\times2{,}3$.

19 ❶ Déterminer le signe de chaque produit.

$A = -8\times4\times(-3)\times5\times(-1)$.
$B = 10\times(-2)\times0{,}5\times(-0{,}25)\times(-4)\times8$.

❷ Calculer ces produits.

20 Calculer astucieusement chaque produit.
$A = 10 \times (-0{,}07) \times (-0{,}6) \times (-25) \times 4.$
$B = -3{,}5 \times (-8) \times (-0{,}2) \times (-0{,}125) \times (-5).$
$C = 14 \times (-139) \times 0 \times 0{,}075 \times (-5{,}09).$

21 **Vrai ou faux**
a. $5{,}2 \times 0 \times 4 = 20{,}8.$
b. $-4{,}5 \times 4{,}5 = 0.$
c. $-8 \times 4 = 8 \times (-4).$
d. $5{,}897 \times 1{,}9 = (-5{,}897) \times (-1{,}9).$
e. $(-0{,}3)^2 = 0{,}09.$
f. $(-1) \times (-1) \times (-1) = -3.$

22 ❶ Calculer le produit : 142×85.
❷ En déduire chacun des produits suivants.
$A = -1{,}42 \times 0{,}85.$ $B = 142 \times (-0{,}85) \times (-10).$
$C = 0{,}1 \times (-142) \times (-85).$ $D = 0{,}142 \times 850.$

23 ❶ Recopier et compléter le tableau suivant.

a	-2	3	-4	7
b	8	-5	-6	4
ab				
$-(ab)$				
$-a$				
$-b$				
$(-a) \times (-b)$				
$(-a) \times b$				
$a \times (-b)$				

❷ Que remarque-t-on ?
Remarque : Pour une **démonstration** de cette conjecture, voir l'exercice 81, page 22.

24 Déterminer, dans chaque cas, le nombre manquant.
a. $8 \times \square = -32.$ b. $\square \times (-6) = 54.$
c. $-7 \times \square = -21.$ d. $\square \times (-8) = 40.$

25 Recopier et compléter le tableau suivant.

a	-9	3		78
b	10		-5	
ab		-39	45	$-7{,}8$

26 Recopier chaque égalité et la compléter par le signe et le nombre qui conviennent pour que l'égalité soit vraie.
a. $(-\square) \times (\bullet 3) = 63.$ b. $(\bullet 5) \times (-\square) = -50.$
c. $(-6) \times (\bullet 12) = -\square.$ d. $(-\square) \times (\bullet 4) = 4.$

27 Julien dit qu'il y a six façons d'obtenir -24 en multipliant deux nombres entiers relatifs, Anaïs affirme qu'il y en a beaucoup plus. Qui a raison ?
On calculera le nombre total de possibilités.
Remarque : L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

28 Quel est le nombre total de façons d'obtenir 12 en multipliant trois nombres entiers relatifs ?
Remarque : L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

29 Un QCM (questionnaire à choix multiples) est noté de la façon suivante :
1,5 point par réponse exacte ; $-0{,}75$ point par réponse fausse ; 0 point en l'absence d'une réponse.
Le QCM proposé par le professeur est composé de 50 questions. Élise a bien répondu à 35 questions et elle a donné 12 réponses fausses.
Calculer le nombre de points qu'Élise a obtenus à ce QCM.

Division

Pour les exercices 30 et 31, calculer chaque quotient.

30 a. $(-405):(-9).$ b. $84:(-12).$
c. $(-114):(-6).$ d. $(-72):5.$
e. $-95:(-4).$ f. $243:(-6).$

31 a. $(-97{,}5):(-1{,}2).$ b. $(-115{,}2):48.$
c. $4{,}25:(-0{,}08).$ d. $(-2{,}75):(-5{,}5).$
e. $4{,}41 : (-0{,}98).$ f. $(-0{,}28) : 3{,}5.$

32 **Calcul mental**
a. $(-50):(-10).$ b. $48:(-8).$
c. $(-14):(-7).$ d. $(-28):4.$
e. $32:(-4).$ f. $(-21):(-3).$

33 Effectuer les divisions ci-après. La distance à zéro de chaque quotient sera donnée sous la forme d'une fraction irréductible, puis on en donnera la troncature au centième.
a. $21:(-6).$ b. $(-75):(-45).$
c. $(-18):(-99).$ d. $(-60):42.$
e. $15:(-35).$ f. $-48:(-72).$

34 Mêmes consignes que dans l'exercice 33.
a. $(-2{,}1) : (-0{,}9).$ b. $4{,}05 : (-7{,}2).$
c. $-0{,}06 : 1{,}4.$ d. $85 : (-1{,}5).$
e. $-12{,}6 : (-1{,}8).$ f. $-3{,}3 : 0{,}22.$

35 Recopier et compléter le tableau suivant.

a	-11	36		75
b	10		-8	
$\frac{a}{b}$		-4	40	$-0{,}75$

36 Recopier les expressions suivantes et entourer les nombres égaux d'une même couleur.
$\frac{-5}{2}$; $4{,}8$; $\frac{-18}{6}$; $\frac{15}{-6}$; $\frac{-24}{-5}$; -3 ; $-\frac{10}{4}$; $-2{,}5$; $\frac{27}{-9}$.
Indication : Trois couleurs sont nécessaires.

Exercices

37 ❶ Recopier et compléter le tableau suivant.

a	-8	35	-24	72
b	2	-7	-6	9
$\frac{a}{b}$				
$-\frac{a}{b}$				
$-a$				
$-b$				
$\frac{-a}{b}$				
$\frac{a}{-b}$				

❷ Que remarque-t-on ?

Remarque : Pour une **démonstration** de cette conjecture, voir l'exercice **82**, page 22.

38 **Vrai ou faux**

a. $-18 : 0{,}1 = -18$.
b. $4{,}5 : (-45) = -10$.
c. $-56 : 9 = 56 : (-9)$.
d. $0{,}02 : (-1) = -0{,}02$.
e. $-2{,}5 : (-2) = 5$
f. $-0{,}98 : 0{,}98 = 0$.

Pour les exercices 39 à 41, déterminer, dans chaque cas, le nombre x qui vérifie l'égalité.

39 a. $15x = -35$.
b. $-18x = -60$.
c. $-24x = 100$.
d. $-x = 17$.

40 a. $-18x = 27$.
b. $14x = -49$.
c. $-10x = 31$.
d. $-7x = -13$.

41 a. $1{,}6x = -8{,}2$.
b. $-0{,}75x = -3{,}5$.
c. $-21x = 2{,}8$.
d. $-4{,}2x = 0{,}77$.

Avec les quatre opérations

42 Recopier et compléter les quatre tableaux suivants en écrivant le signe du résultat de chaque opération.

Tableau 1

Opération	Signe
$(-3)+(-5)$	
$(-3)-(-5)$	
$(-3)\times(-5)$	
$(-3):(-5)$	

Tableau 2

Opération	Signe
$(-9)+(+4)$	
$(-9)-(+4)$	
$(-9)\times(+4)$	
$(-9):(+4)$	

Tableau 3

Opération	Signe
$(+8)+(+2)$	
$(+8)-(+2)$	
$(+8)\times(+2)$	
$(+8):(+2)$	

Tableau 4

Opération	Signe
$(-6)+(+10)$	
$(-6)-(+10)$	
$(-6)\times(+10)$	
$(-6):(+10)$	

43 Écrire -8 sous la forme :
a. d'une somme de deux termes.
b. d'une différence de deux termes.
c. d'un produit de deux facteurs.
d. d'un quotient de deux nombres relatifs.

44 Même consigne que dans l'exercice **43** pour $-3{,}5$.

45 **Vrai ou faux**

a. $-2{,}4 : 6 : 2 = -0{,}2$.
b. $7{,}5\times 10+(-3) = -(7{,}5\times 10+3)$.
c. $-9 : 3\times(-2) = 9 : 3\times 2$.
d. $(-1)+(-1)\times(-1) = 0$.
e. $(-1) : (-1)+(-1) = 0$.

Pour les exercices 46 à 49, calculer chaque expression.

46 $A = -7\times 5+18:3-10$.
$B = (15-6):(3-10)$.
$C = 39-36:8$.
$D = 13-6\times 3+15:5$.
$E = 25\times(-8+6\times 5)$.
$F = -49:14-6\times 2+3$.

47 $A = 26:[34-(7\times 3+11)]-9\times 8$.
$B = 14-(2-15:3)+(6+2):(9-7)$.
$C = (15-29)\times 8-44:(5-16)$.
$D = 9\times 6-[7-8\times(-3+5)]$.

48 $A = \dfrac{8-5\times 4}{2\times 3-4\times 3}$.
$B = \dfrac{-3\times 6+9\times(-2)}{5-14}$.
$C = 3\times(-7)+\dfrac{5-8-7}{2-14:2}$.
$D = \dfrac{-18:9+5}{7-3\times 2}$.

49 $A = 18:(-6):2$.
$B = -50:2\times 3:(-5)$.
$C = 100:25:5\times(-3)$.
$D = -7:(-4)\times(-10)$.

50 On ajoute 4 à -9, on multiplie le résultat par -3, on enlève 3 au nombre obtenu et on divise le résultat par 4.
Quel nombre obtient-on ?

51 ❶ Recopier et compléter chaque programme de calcul.

a. $-6 \xrightarrow{+8} \square \xrightarrow{\times(-2)} \square \xrightarrow{-5} \square \xrightarrow{:4} \square$

b. $-10 \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{\times\square} 42 \xrightarrow{-12} \square \xrightarrow{:\square} -10$

❷ Traduire chaque programme de calcul par une phrase.

52 Calculer chaque expression avec $a = -5$.
$A = -3a+2$.
$B = 4a-a^2$.
$C = (a+2)(8-a)$.
$D = 8-2a$.

53 Calculer chaque expression avec $a = 0{,}3$ et $b = -2{,}1$.
$A = 2a+3b$.
$B = a-5b$.
$C = (a+b)(a-b)$.
$D = ab+4$.

54 Calculer chaque expression avec $a = 6$ et $b = -5$.
$A = (a-b):(2a+b)$.
$B = a^2+b$.
$C = a-b^2$.

55 Calculer chaque expression avec $a = -4{,}8$ et $b = 1{,}5$.
$A = (7{,}4 + ab)$. $B = -0{,}2a - 3b$.
$C = a : b$. $D = 5a(a - b)$.

56 Recopier chaque égalité et la compléter par le signe d'opération qui convient pour qu'elle soit vraie.
a. $-7 \dots (-4) = 28$. b. $18 \dots (-6) = 24$.
c. $-25 \dots (-36) = -61$. d. $10 \dots (-4) = -2{,}5$.

57 L'égalité $5x + 14 = x + 2$ est-elle vraie pour :
a. $x = -4$? b. $x = -3$? c. $x = -2$?
Remarque : On dit que l'égalité $5x + 14 = x + 2$ a été testée avec -4, avec -3 et avec -2.

58 Tester l'égalité $x^2 - 5 = 1 - x$ pour :
a. $x = -3$. b. $x = -1$. c. $x = 2$.

59 ❶ Recopier et compléter le tableau suivant.

k	a	b	$a + b$	$k(a + b)$	ka	kb	$ka + kb$
-8	2	-5					
5	-7	3					
-2	-6	4					
4	9	-2					
$-3{,}4$	5,1	$-7{,}8$					

❷ Que remarque-t-on ?
Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Pourquoi ?

60 ❶ Recopier et compléter le tableau suivant.

k	a	b	$a - b$	$k(a - b)$	ka	kb	$ka - kb$
9	-5	3					
-2	10	-6					
8	-7	-4					
-11	-3	5					

❷ Que remarque-t-on ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Pourquoi ?

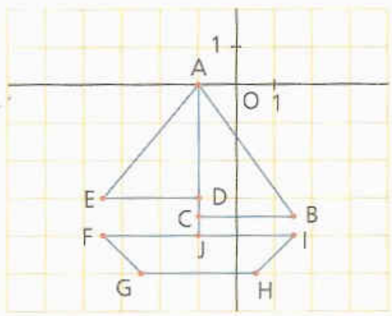
61 Effectuer les calculs suivants de deux façons différentes.
❶ a. $9 \times (-3 + 5)$. b. $-6 \times (8 - 2)$.
c. $-10 \times (-7 \times 3)$. d. $7 \times (-12 - 8)$.
❷ a. $-4 \times (3{,}5 - 1{,}2)$. b. $6{,}3 \times (-5{,}4 - 4{,}6)$.
c. $-2{,}8 \times (-5 + 9{,}2)$. d. $0{,}7 \times (-2{,}7 - 0{,}8)$.
Indication : On admet que les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ sont vraies pour tous les nombres relatifs a, b, k.

62 Avec une calculatrice
Calculer la valeur de l'expression $A = 5(x + 4) - 6x^2$ pour :
a. $x = 7$. b. $x = -5$. c. $x = 2{,}8$.
d. $x = -0{,}01578$. e. $x = 34{,}5 - 234{,}56$.
Indication : Voir page 24.
On peut entrer les valeurs de x dans la mémoire A des calculatrices ou utiliser directement la touche $\boxed{X}$ avec la CASIO Collège 2D.

63 Avec une calculatrice
Calculer l'expression $B = -8xy + (2x - y) + 3y^2$ dans chacun des cas suivants.
a. $x = 4$ et $y = -3$. b. $x = -2{,}75$ et $y = 0{,}6$.
c. $x = -12$ et $y = -35$.
d. $x = -2{,}5 \times -4{,}492$ et $y = -4{,}78 + 0{,}19$.
Indication : Voir page 24.
On peut entrer les valeurs de x et y dans les mémoires A et B des calculatrices ou utiliser directement les touches $\boxed{X}$ et $\boxed{Y}$ avec la CASIO Collège 2D.

64 Avec une calculatrice
❶ Écrire les expressions correspondant aux séquences suivantes en utilisant une écriture fractionnaire, puis effectuer les calculs.
a. $\boxed{(}\ \boxed{9}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{)}$
b. $\boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{8}$
c. $\boxed{(}\ \boxed{(}\ \boxed{6}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{-}\ \boxed{7}\ \boxed{)}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{)}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}$
❷ Écrire la séquence de touches correspondant à chacune des expressions suivantes :
a. $\dfrac{5 + 7}{8 \times 3 - 4}$. b. $\dfrac{2 \times 9}{5\pi}$. c. $\dfrac{6 - \pi}{2}$. d. $10 - \dfrac{4 + \pi}{3}$.

65 Dans un repère orthogonal
❶ Lire, sur la figure ci-dessous, les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.



❷ a. Calculer les coordonnées de chacun des points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, J′, obtenus en ajoutant -8 aux abscisses respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, et en ajoutant -6 à leurs ordonnées.
b. Reproduire la figure.
Placer les points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, J′, et tracer les segments [A′B′], [B′C′], [A′E′], [E′D′], [A′J′], [F′G′], [G′H′], [H′I′], [I′F′].
c. Que remarque-t-on ?
❸ Reprendre la question ❷ dans chacun des trois cas suivants.
a. Les points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, J′ sont obtenus en multipliant les abscisses et les ordonnées respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J par -1.
b. Les points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, J′ sont obtenus en multipliant les abscisses et les ordonnées respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J par 2.
c. Les points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, J′ sont obtenus en multipliant les abscisses et les ordonnées respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J par -2.

Exercices

Faire le point

66 **QCM** Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C	D
1	$8-7+2=$	-1	3	-17	-3
2	$-3\times4+5=$	-7	-12	-60	-27
3	$-5\times(-4)=$	-9	-1	-20	20
4	$(-7):(-2)=$	-9	$\frac{7}{2}$	$3{,}5$	14
5	$11:(-6)=$	$-\frac{11}{6}$	-66	$-1{,}833$	5
6	Si deux nombres sont négatifs, alors	leur somme est positive	leur somme est négative	leur produit est positif	leur produit est négatif
7	Si deux nombres n'ont pas le même signe, alors	leur somme peut être négative	leur somme est toujours négative	leur produit est positif	leur produit est négatif
8	Si le quotient de deux nombres est positif, alors	les deux nombres sont obligatoirement positifs	les deux nombres sont obligatoirement négatifs	les deux nombres ont le même signe	le numérateur est supérieur au dénominateur
9	L'opposé de -9 est égal à	$(-1)\times(-9)$	$\frac{1}{-9}$	$\frac{-9}{-1}$	9
10	Le quotient de 6 par -8 est égal à	$-\frac{8}{6}$	$-\frac{6}{8}$	$-\frac{3}{4}$	-48

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande de détailler toutes les étapes de la solution.

• Calculer une expression contenant plusieurs opérations

67 Calculer chaque expression.

$A = -8+4\times(-3)-6\times(-5)+9.$

$B = (-7+12):(4-3\times2).$

$C = 9\times7-[5\times(6-20)+21:7].$

$D = \dfrac{16:(2\times7-4)}{3-8}.$

• Calculer une valeur d'une expression littérale

68 Calculer chaque expression pour $x=-5$.

$A = 3x^2+4\times(-2x).$

$B = (x+3)^2-(3-x)^2.$

$C = \dfrac{2x+3}{x-2}.$ $D = \dfrac{-6(x+4)}{1-3x}.$

• Tester une égalité

69 Tester chacune des quatre égalités ci-après pour :

$x=-3,\quad x=4,\quad x=-5,\quad x=-2.$

a. $3(x+10)=8-(x-2).$

b. $5-2x=x(x-4)-3.$

c. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{x}{3}.$ **d.** $\dfrac{x+4}{x+1}=-2.$

• Traduire une phrase par une expression mathématique et inversement

70 **1** On soustrait 15 à 7, on divise le résultat par -2, on soustrait -9 au résultat obtenu et on multiplie le résultat par 4. Quel nombre obtient-on ?

2 Écrire un programme de calcul correspondant à l'expression suivante, puis effectuer le calcul :

$A=[-5{,}4:(3-2{,}1)]-10.$

Tous les exercices de cette page sont corrigés page 292.

Approfondir

71 ❶ Calculer le produit de tous les nombres entiers relatifs :
a. de –5 à 5. b. de –50 à 50.
❷ Calculer la somme de tous les nombres entiers relatifs :
a. de –5 à 5. b. de –50 à 50.

72 ❶ a. Calculer la somme de 712 termes égaux à –1.
b. Calculer le produit de 712 facteurs égaux à –1.
❷ Reprendre la question ❶ en remplaçant 712 par 653.

73 Recopier chaque égalité et la compléter par les signes d'opérations qui conviennent pour que l'égalité soit vraie.
a. 5 … 5 … 5 … 5 = 9. b. 5 … 5 … 5 … 5 = 24.
c. 5 … 5 … 5 … 5 = 0. d. 5 … 5 … 5 … 5 = –10.

74 Même consigne que dans l'exercice **73**.
a. 5 … 5 … 5 … 5 = –15. b. 5 … 5 … 5 … 5 = 2.
c. 5 … 5 … 5 … 5 = –1. d. 5 … 5 … 5 … 5 = –25.

75 Recopier chaque égalité et ajouter, si nécessaire, des parenthèses pour qu'elle soit vraie.
a. $5 - 4 \times 3 + 2 = 5$. b. $5 - 4 \times 3 + 2 = -15$.
c. $5 - 4 \times 3 + 2 = -9$. d. $5 - 4 \times 3 + 2 = -5$.

76 Même consigne que dans l'exercice **75**.
a. $2 - 9 : 3 + 1 = 0$. b. $2 - 9 : 3 + 1 = -1{,}75$.
c. $2 - 9 : 3 + 1 = -2$. d. $2 - 9 : 3 + 1 = -0{,}25$.

77 **Math et histoire**
Brahmagupta (598-668) est l'un des plus importants mathématiciens et astronomes indiens. Dans le *Brahnasphutasiddharta*, l'un des ses deux célèbres ouvrages, écrit en 628, il définit le zéro comme étant le résultat de la soustraction d'un nombre à lui-même et est le premier à présenter, sous la forme de calculs de pertes et de profits, les règles de calcul avec les nombres relatifs, en particulier :
« Une dette retranchée de zéro devient un bien, un bien retranché de zéro devient une dette. »
Traduire cette phrase en utilisant le langage mathématique usuel employé dans ce chapitre.

78 On considère deux nombres relatifs a et b dont le produit ab est égal à –3. En déduire les produits :
$A = -2a \times 5b$; $B = a^2b^2$;
$C = (-a) \times (-b)$; $D = 6a \times (-b)$.

79 **Thème de convergence**

Les unités de température

La température mesure le degré d'agitation des molécules qui composent un système.
Dans le Système international d'unités, l'unité de température est le **kelvin**, de symbole K. Mais les unités utilisées dans la vie courante sont le **degré Celsius**, de symbole °C, et le **degré Fahrenheit**, de symbole °F.
On passe d'une unité à une autre en utilisant les relations :

$$\mathbf{T_{°C} = T_K - 273{,}15} \quad \text{et} \quad \mathbf{T_{°F} = 1{,}8\,T_{°C} + 32}$$

où $T_{°C}$, T_K et $T_{°F}$ désignent une même température exprimée respectivement en degré Celsius, en kelvin et en degré Fahrenheit.

Sur ce thermomètre, au Canada, on peut lire la température en °F et en °C.

❶ Comment obtient-on :
a. T_K à partir de $T_{°C}$? b. $T_{°C}$ à partir de $T_{°F}$?
c. $T_{°F}$ à partir de T_K ? d. T_K à partir de $T_{°F}$?

❷ On appelle **zéro absolu** la température la plus basse théoriquement accessible. Elle correspond à un état limite de l'agitation moléculaire, appelé agitation moléculaire nulle, ce qui explique qu'elle n'ait encore jamais été obtenue. Sa valeur a été fixée à 0 K.
Quelle est la valeur du zéro absolu en degré Celsius ? en degré Fahrenheit ?

❸ La température de fusion de l'eau à la pression normale est 0 °C et la température d'ébullition de l'eau dans les mêmes conditions est 100 °C. Exprimer la température de fusion de l'eau et sa température d'ébullition à la pression normale, en degré Fahrenheit puis en kelvin.

❹ –89 °C est la température la plus basse relevée, jusqu'à ce jour, à la surface de la Terre. C'était à Vostok, dans l'Antarctique, le 21 juillet 1983. Exprimer cette température en degré Fahrenheit puis en kelvin.

❺ a. Chercher, sur Internet ou au CDI, l'origine du titre *Fahrenheit 451*, donné par l'écrivain américain Ray Bradbury (1920-) au célèbre roman qu'il publia en 1953.
b. Quelle est la valeur, en degré Celsius, de la température à laquelle le papier s'enflamme spontanément ?

80 Une démonstration

L'objet de cet exercice est de démontrer la propriété : « L'opposé d'une somme de deux termes est égal à la somme des opposés des termes de cette somme. »

❶ Par quel nombre doit-on multiplier un nombre relatif a pour obtenir son opposé $-a$?

❷ Recopier et compléter la succession d'égalités suivantes, en justifiant chacune d'elles.

$-(a+b) = \square \times (a+b) = (\square) \times a + (\square) \times b = (\square) + (\square)$.

81 Une démonstration

L'objet de cet exercice est de démontrer la propriété : « L'opposé d'un produit de deux nombres est égal au produit d'un des nombres par l'opposé de l'autre. »

❶ Par quel nombre doit-on multiplier un nombre relatif a pour obtenir son opposé $-a$?

❷ Recopier et compléter la succession d'égalités suivantes, en justifiant chacune d'elles.

$-(ab) = \square \times (ab) = \square \times a \times b = (\square \times a) \times b = (\square) \times b$;

$-(ab) = \square \times (ab) = \square \times a \times b = a \times (\square \times b) = a \times (\square)$.

82 Une démonstration

L'objet de cet exercice est de démontrer la propriété : « L'opposé d'un quotient de deux nombres est égal au quotient du numérateur par l'opposé du dénominateur ou de l'opposé du numérateur par le dénominateur. »

❶ Par quel nombre doit-on multiplier un nombre relatif a pour obtenir son opposé $-a$?

❷ Recopier et compléter la succession d'égalités suivantes, en justifiant chacune d'elles.

$-\frac{a}{b} = \square \times \frac{a}{b} = \frac{\square \times a}{b} = \frac{\square}{b}$;

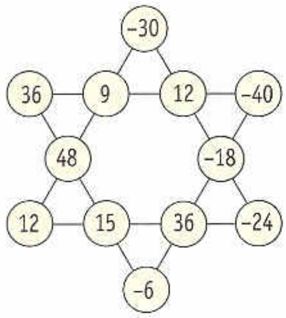
$-\frac{a}{b} = \square \times \frac{a}{b} = \frac{1}{-1} \times \frac{\square}{\square} = \frac{1 \times \square}{(-1) \times \square} = \frac{\square}{\square}$.

83 Étoiles magiques

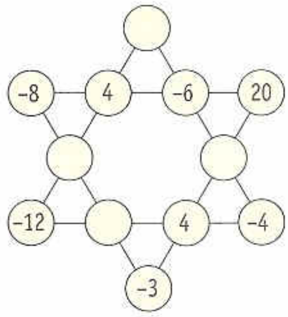
❶ Vérifier que dans l'étoile 1 ci-dessous, le produit des nombres situés sur chacun des six segments joignant deux extrémités d'une branche est égal à un même nombre.

On dit que l'étoile 1 est « magique » pour la multiplication.

❷ Reproduire et compléter l'étoile 2 pour qu'elle soit magique pour la multiplication.



Étoile 1



Étoile 2

84 Math et littérature

Le texte ci-dessous est extrait de *La vie de Henry Brulard* (1832), troisième volet de l'œuvre autobiographique de Henry Beyle, connu sous le nom de Stendhal (1783-1842) :

« Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus ? J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables. »

❶ Une amorce de justification de cette règle est présentée dans l'activité 2, page 9.

On en propose une autre ci-après.

a. Calculer le produit $(-3) \times [5 + (-5)]$ en commençant par le calcul entre crochets.

b. Quelle propriété utilise-t-on pour pouvoir écrire l'égalité :
$(-3) \times [5 + (-5)] = (-3) \times 5 + (-3) \times (-5)$?

c. Calculer le produit $(-3) \times 5$.

d. Expliquer pourquoi le produit $(-3) \times (-5)$ doit être égal à $+15$.

❷ On peut aussi démontrer cette règle.

Pour cela, reprendre le raisonnement précédent en considérant deux nombres positifs a et b et l'égalité :
$(-a) \times [b + (-b)] = (-a) \times b + (-a) \times (-b)$.

LE SAVIEZ-VOUS ?

L'OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle) a été fondé le 24 novembre 1960, par le mathématicien François Le Lionnais, l'écrivain Raymond Queneau et une dizaine de leurs amis écrivains et/ou mathématiciens et/ou peintres. Le propos est d'obtenir de nouvelles formes poétiques ou romanesques en respectant des contraintes d'écriture issues des mathématiques.

Quelques exemples de contraintes oulipiennes :

– un ***poème anagrammatique*** *est un poème dont tous les vers successifs sont composés avec les mêmes lettres, mises chaque fois dans un ordre différent. Par exemple :*

« Poème de métro
Et pomme dorée
Mode emportée »

– un ***palindrome*** *est un mot ou un groupe de mots qui peut être lu dans les deux sens. Georges Perec a ainsi écrit en 1969 un palindrome de* $11 \times 23 \times 2 \times 11$ *soit 5 566 lettres, le record mondial à ce jour !*

– un ***sonnet irrationnel*** *est un poème de quatorze vers, divisé en cinq strophes successivement et respectivement composées de 3 – 1 – 4 – 1 – 5 vers. On peut reconnaître l'arrondi de* π *au dix millième (3,1415).*

– la ***méthode S+7*** *consiste à remplacer chaque substantif (S) d'un texte donné par le septième substantif trouvé après lui dans un dictionnaire (S+7).*

Si vous vous sentez l'âme oulipienne, à vos stylos !

Pour en savoir plus : http://www.oulipo.net/

Argumenter et débattre

85 Compléter les suites logiques :

a. -10 ; -7 ; -4 ; ___

b. 3 ; -6 ; 12 ; -24 ; ___

c. -2 ; -1 ; 2 ; -2 ; -4 ; 8 ; -32 ; ___

d. 100 ; -10 ; 1 ; $-0{,}1$; ___

86 Peut-on déterminer le signe de chacun des trois nombres x, y, z sachant que les quotients $\frac{5}{x}$ et $-\frac{3x}{y}$ sont positifs et que le produit xyz est négatif ?

87 **Vrai ou faux**

a. L'opposé d'une différence de deux nombres est égal à la différence des opposés de ces deux nombres.

b. Le carré d'un nombre relatif est toujours positif.

c. La somme de deux nombres de signes contraires est toujours négative.

88 Peut-on déterminer le signe de deux nombres sachant que :

a. leur somme est négative et leur produit est positif ?

b. leur somme est positive et leur produit est positif ?

c. leur somme est négative et leur produit est négatif ?

d. leur somme est positive et leur produit est négatif ?

89 ❶ Déterminer deux nombres entiers relatifs dont la somme est égale à 1 et le produit est égal à -6.

❷ Déterminer deux nombres entiers relatifs dont la somme est égale à 1 et la différence est égale à 3.

90 En multipliant deux nombres extraits de la liste ci-dessous, combien de résultats différents peut-on obtenir ?

-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

91 ❶ Peut-on déterminer le signe d'un produit de nombres relatifs différents de 0, sachant que le nombre de facteurs négatifs est le double du nombre de facteurs positifs ?

❷ Reprendre la question précédente en remplaçant « le double » par « le triple ».

POUR LES CURIEUX

Un code secret

La cryptologie, ou « science du secret », a une longue histoire qui remonte à 2 000 ans avant notre ère. Elle répondait alors à des impératifs religieux, militaires et politiques. Mais ses vrais progrès datent de la fin de la Première Guerre mondiale.

Le code secret utilisé ici est un exemple de ce qu'on appelle le chiffrement affine. C'est un système de codage par substitution (une lettre est remplacée par une autre), dont un autre exemple connu a été utilisé par Jules César, pendant la Guerre des Gaules : Jules César remplaçait chaque lettre de l'alphabet par celle située trois lettres plus loin.

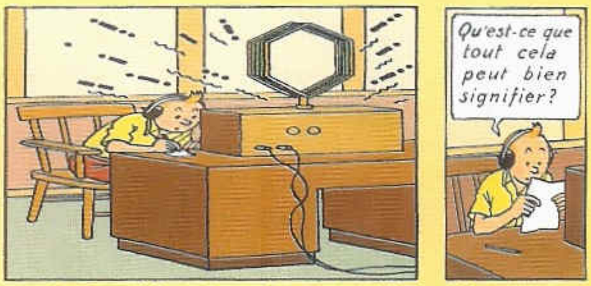
Aujourd'hui, grâce à l'arithmétique et à l'informatique, on dispose de systèmes de cryptage très performants, mais rien ne prouve qu'ils soient totalement « inattaquables »...

Pour en savoir plus :
http://www.bibmath.net/crypto/index.php3

On associe, à chaque lettre de l'alphabet, des nombres comme indiqué dans le tableau 1 ci-après.

Ainsi, à une lettre sont associés plusieurs nombres. Par exemple, à la lettre A sont associés les nombres -25, 1, 27, 53, etc.

On construit alors un code secret de la façon suivante : on note x un nombre associé à une lettre, on calcule le nombre $y = -3x + 15$, puis on détermine la lettre associée au nombre y. Cette lettre est écrite à la place de la lettre initiale.



Le Lotus bleu – Les aventures de Tintin – Hergé

Par exemple, pour la lettre A :

$x = 1$ donne $y = -3 \times 1 + 15 = 12$; or, la lettre associée au nombre 12 est L, donc on remplace la lettre A par la lettre L.

❶ Vérifier qu'en prenant $x = -25$ ou $x = 27$ ou $x = 53$, on obtient toujours la lettre L en remplacement de la lettre A.

❷ a. En procédant comme pour la lettre A, déterminer les lettres remplaçant chacune des 25 autres lettres de l'alphabet.

b. Recopier et compléter alors le tableau 2 ci-après.

Vérifier que dans la deuxième ligne du tableau, on retrouve bien toutes les lettres de l'alphabet et jamais deux fois la même lettre.

❸ Le tableau ainsi complété permet de coder et de décoder des messages par substitution. En utilisant ce tableau :

a. coder le mot SECRET.

b. décoder le mot FVDMLTZ.

Tableau 1

...	Y	Z	A	B	C	...	X	Y	Z	A	B	C	...	X	Y	Z	A	B	C	...	X	Y	Z	A
...	-27	-26	-25	-24	-23	...	-2	-1	0	1	2	3	...	24	25	26	27	28	29	...	50	51	52	53

Tableau 2

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
L																									

Calculer une expression

On se propose de calculer l'expression $E = x : y - 5 \times (z : 4)$ pour n'importe quelle valeur de x, de y et de z, par exemple pour $x = 7$, $y = -3$ et $z = 26$, puis pour $x = 16 - 25$, $y = 12 - 8 \times 2$ et $z = 8 - 5 \times 2$.

Pour cela, on peut utiliser les mémoires A, B, C de la calculatrice : on saisit l'expression E sous la forme A : B − 5 × (C : 4), puis on entre la valeur de x dans la mémoire A, la valeur de y dans la mémoire B et la valeur de z dans la mémoire C.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
• On vide les mémoires de la calculatrice.	[CLR] [2] [EXE] [AC] — Clear? 1:Setup 2:Memory 3:All	[EFF VAR] (O) [ENTRER]
• On saisit l'expression E sous la forme : A : B − 5 × (C : 4).	(A) [÷] (B) [−] [5] [×] [(] (C) [÷] [4] [)] — A÷B−5×(C÷4)	[►OP1] [VAR] (A) [ENTRER] [÷] [VAR] (B) [ENTRER] [−] [5] [×] [(] [VAR] (C) [ENTRER] [÷] [4] [)] [ENTRER] — OP1=A÷B−5
	On met la calculatrice en mode CALC. [CALC]	
• On entre la première série de valeurs : – en A la valeur de x, soit 7 ; – en B la valeur de y, soit −3 ; – en C la valeur de z, soit 26.	La calculatrice demande la valeur de A. [7] [EXE] — A? 0 La calculatrice demande la valeur de B. [(−)] [3] [EXE] La calculatrice demande la valeur de C. [2] [6]	[7] [STO→] (A) [ENTRER] [(−)] [3] [STO→] (B) [ENTRER] [2] [6] [STO→] (C) [ENTRER]
• On obtient la valeur de E correspondante.	[EXE] — A÷B−5×(C÷4) $-\frac{209}{6}$ ou A÷B−5×(C÷4) −34.83333333	[OP1]
	[CALC] ou [EXE]	
• On entre la deuxième série de valeurs : – la nouvelle valeur de x, soit 16 − 25, en A ; – la nouvelle valeur de y, soit 12 − 8 × 2, en B ; – la nouvelle valeur de z, soit 8 − 5 × 2, en C.	A? 7 La calculatrice demande la nouvelle valeur de A. [1] [6] [−] [2] [5] [EXE] La calculatrice demande la nouvelle valeur de B. [1] [2] [−] [8] [×] [2] [EXE] La calculatrice demande la nouvelle valeur de C. [8] [−] [5] [×] [2]	16−25→A [1] [6] [−] [2] [5] [STO→] (A) [ENTRER] [1] [2] [−] [8] [×] [2] [STO→] (B) [ENTRER] [8] [−] [5] [×] [2] [STO→] (C) [ENTRER]
• On obtient la nouvelle valeur de E.	[EXE] — A÷B−5×(C÷4) $\frac{19}{4}$ ou A÷B−5×(C÷4) 4.75	[OP1]
	On quitte le mode CALC. [AC]	
• On vide les mémoires de la calculatrice.	[CLR] [2] [EXE] [AC]	[EFF VAR] (O) [ENTRER]

Exercices 62 et 63.