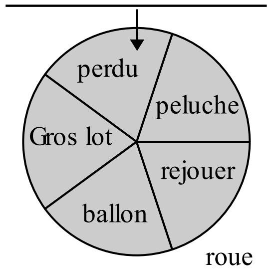
Activité – cours : Probabilité

I) Expérience aléatoire

a) Exemples d'expériences

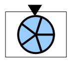
pile ou face

jeu de dé



roue

Ces 3 jeux ont plusieurs résultats possibles. Ces résultats sont appelées **__issues__**

Expériences			
Issues (*résultats*)	Pile ; face	1;2;3;4;5;6	Perdu ; peluche ; rejouer ; ballon ; gros lot

Ces 3 jeux sont aussi des expériences aléatoires

__Une expérience est aléatoire__ si elle a plusieurs issues possibles que l'on ne peut pas prévoir.
Cette expérience dépend totalement du hasard.

Faire une expérience avec un dé pipé n'est pas une expérience aléatoire.
Faire un pile ou face avec une pièce de monnaie ayant 2 faces identiques n'est pas un expérience aléatoire.

b) Réalisons une expérience aléatoire (*le lancer de dé*)

◦ 10 lancers réalisés par le professeur

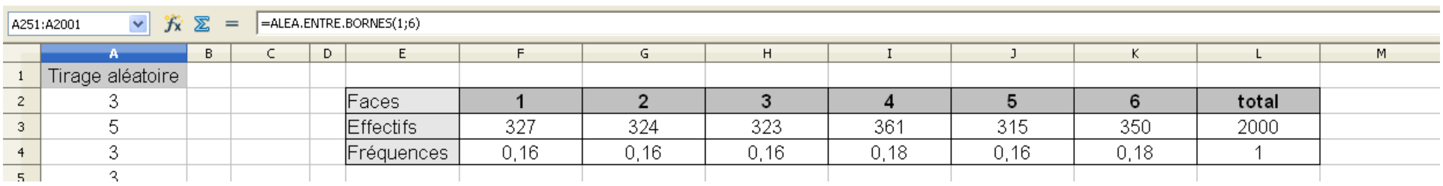
Faces	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**total**
Effectifs	1	0	2	2	3	2	**10**
Fréquences	10%	0%	20%	20%	30%	20%	**100,00%**

◦ Chaque élève effectue 10 lancers et on rajoute tous ces résultats

Faces	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**total**
Effectifs	40	50	37	36	42	45	**250**
Fréquences	16%	20%	15%	14%	17%	18%	**100,00%**

__Remarque :__ les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres

◦ Si on simule un plus grand nombre de lancers à l'ordinateur



A251:A2001 =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Tirage aléatoire												
2	3				Faces	1	2	3	4	5	6	total	
3	5				Effectifs	327	324	323	361	315	350	2000	
4	3				Fréquences	0,16	0,16	0,16	0,18	0,16	0,18	1	
5	3												

Vers quel nombre semblent tendre toutes ces fréquences : **0,17**

__Conclusion :__ Il y a 1 chance sur 6 d'obtenir une face précise, autrement dit $1 \div 6 \approx 0{,}167 \approx 16{,}67$ % de chances.

On dit que la probabilité d'obtenir un certain résultat (ex: 4) est de $\frac{1}{6}$

__Définition:__ Lors d'une expérience aléatoire, la probabilité d'obtenir un certain résultat correspond à la fréquence de réalisation de ce résultat si on effectuait cette expérience un très grand nombre de fois.

c) Évènement

On appelle **événement** une condition qui peut ou non être réalisée lors d'une expérience.

Evènements	Issues possibles pour qu'il soit réalisé	Probabilité	Evènement ………
A = «obtenir 1»	1	$P(A) = \frac{1}{6}$	élémentaire
B = «obtenir 5»	5	$P(B) = \frac{1}{6}$	élémentaire
C = «obtenir un nombre pair»	2 3 4	$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	
D = «obtenir un multiple de 3»	3 6	$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	
E = «obtenir un nombre plus grand ou égal à 1»	1, 2, 3, 4, 5, 6	$P(E) = \frac{6}{6} = 1$	certain
F = «obtenir 7»	Aucune	$P(F) = 0$	impossible

Propriétés et remarques:

◦ Une probabilité est toujours comprise **entre 0 et 1.**
◦ Un événement qui ne peut être réalisé que par une seule issue est appelé **événement élémentaire.**
◦ Un événement qui a une probabilité égale à 1 est appelé **événement certain.**
◦ Un événement qui a une probabilité égale à 0 est appelé **événement impossible.**

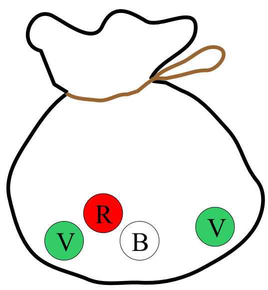
◦ Les seuls événements élémentaires de l'expérience du lancer de dé sont :
A = «obtenir 1» ; B = «obtenir 5» ; G = «obtenir 2» ; H = «obtenir 3» ; I = «obtenir 4» ; J = «obtenir 6»
Chacune de ces probabilités est égale à $\frac{1}{6}$.

$$P(A) + P(B) + P(G) + P(H) + P(I) + P(J) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est toujours égale à 1.

◦ Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisé, on dit qu'il y a **équiprobabilité.**

II) Deuxième expérience aléatoire



L'expérience consiste à tirer une bille dans un sac contenant
2 billes vertes, une bille rouge et une bille blanche.

Quelles sont les issues possibles : *bille verte bille rouge bille blanche*

Quels sont les événements élémentaires et déterminer leur probabilité: *(vérifiez que leur somme fait 1)*

A = «obtenir une bille verte» $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (2 chances sur 4)

B = «obtenir une bille rouge» $P(B) = \frac{1}{4}$ (1 chance sur 4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$

C = «obtenir une bille blanche» $P(C) = \frac{1}{4}$ (1 chance sur 4)

Sommes nous dans une situation d'équiprobabilité ? :

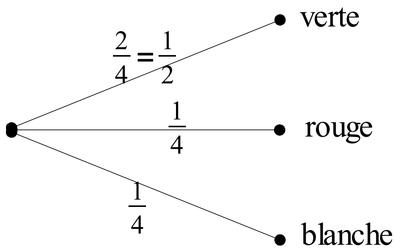
Non car les événements élémentaires n'ont pas le même probabilité

Donnez un événement certain : D = «obtenir une bille ronde»

Donnez un événement impossible : E = «obtenir une bille noire»

<u>Déterminez la probabilité de l'événement F = «ne pas tirer la bille blanche »:</u>

<u>Remarque :</u> On peut représenter toutes les issues d'une expérience aléatoire dans un "arbre des possibles"
(Si on écrit sur chaque branche la probabilité d'obtenir chaque issue, on dit que l'arbre est pondéré)



III) Un petit problème

> M Haguet lance un défi à un de ses élèves et lui propose l'expérience suivante :
>
> On lance simultanément 2 des et on calcule la somme.
> Si la somme est égale à 5, 6 7 ou 8, M Haguet marque 1 point
> si la somme est égale à 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12 l'élève marque 1 point
> Le premier qui arrive à 20 à gagné.

Sur 5 parties, M Haguet en a gagné 4. Est ce parce que :
- M Haguet est super fort
- M Haguet a beaucoup de chance
- M Haguet est très malin
- L'élève est vraiment mauvais
- L'élève n'a vraiment pas de chance

<u>Combien y a t-il d'événements élémentaires ? :</u>

Répertorions toutes les issues possibles :

Lancers possibles (1er dé, 2ème dé):							Issues possibles (somme des 2 dés)					
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)		2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

<u>Considérons les 2 événements suivants :</u> A = «la somme est égale à 5, 6, 7 ou 8»
B = «la somme est égale à 2, 3, 4, 9, 10, 11ou 12»

Calculer P(A) et P(B) .
Est ce normal que M Haguet a gagné 4 parties sur 5 ?

$P(A) = \frac{4+5+6+5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1+2+3+4+3+2+1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

On a 5 chances sur 9 d'obtenir 5, 6 , 7 ou 8 alors qu'il n'y a que 4 chances sur 9 d'obtenir 2 , 3 , 4 , 9 , 10 , 11 ou 12

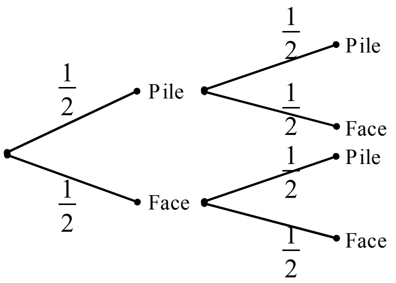
<u>Calculer la probabilité des événements suivants :</u> C = «faire un double»
D = «la somme est un nombre pair»
E = «la somme est un nombre impair»

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(E) = \frac{1}{2}$

Expérience aléatoire à 2 épreuves : *Lancer 2 fois successivement une pièce de monnaie*

<u>Quels sont toutes les issues possibles ? :</u>
(Pile,Pile) (Pile, Face) (Face, Face) (Face, Pile)

<u>Construire un arbre pondéré des possibles :</u>



<u>Considérons les événements</u> A = «obtenir 2 fois PILE» B = «obtenir 2 face différentes»
Calculer la probabilité des évènements A et B.

1 chance sur 4 d'obtenir 2 fois pile donc $P(A) = \frac{1}{4}$

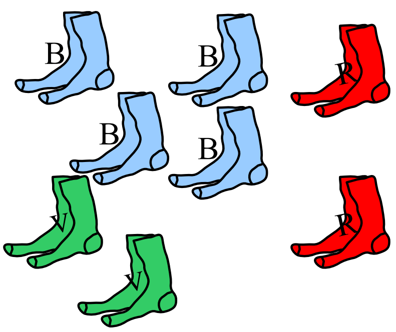
2 chances sur 4 d'obtenir 2 faces différentes donc $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

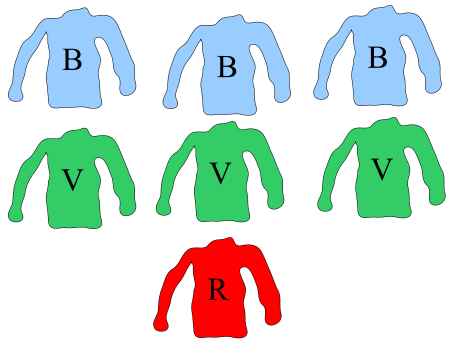
<u>remarque :</u> $P(A) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (cela revient à multiplier les probabilités situées sur les branches)

Expérience aléatoire à 2 épreuves : *s'habiller au radar*

Didier a 3 couleurs préférées qui sont le bleu, le rouge et le vert.
De ce fait dans son armoire, son bac à chaussettes contient 2 paires rouges, 2 paires vertes et 4 paires bleues et sur sa penderie, il y a 3 chemises bleues, 1 chemise rouge et 3 chemises vertes.
Le matin, quand il se réveille il prend d'abord une paire de chaussette au hasard, puis il prend une chemise sans en regarder le couleur.

Quelle est la probabilité pour que Didier ait ses chaussettes et sa chemise de la même couleur ?
Quelle est la probabilité pour que Didier ait ses chaussettes et sa chemise bleues ?
Quelle est la probabilité pour que Didier ait ses chaussettes et sa chemise rouges ?
Quelle est la probabilité pour que Didier ait ses chaussettes et sa chemise dépareillées ?





Les associations de vêtements possibles sont (chaussette,chemise) :

(B1,B1) (B1, B2) (B1, B3) (B1,V1) (B1, V2) (B1,V3) (B1,R)
(B2,B1) (B2, B2) (B2, B3) (B2,V1) (B2, V2) (B2,V3) (B2,R)
(B3,B1) (B3, B2) (B3, B3) (B3,V1) (B3, V2) (B3,V3) (B3,R)
(B4,B1) (B4, B2) (B4, B3) (B4,V1) (B4, V2) (B4,V3) (B4,R)
(V1,B1) (V1, B2) (V1, B3) (V1,V1) (V1, V2) (V1,V3) (V1,R)
(V2,B1) (V2, B2) (V2, B3) (V2,V1) (V2, V2) (V2,V3) (V2,R)
(R1,B1) (R1, R2) (R1, B3) (R1,V1) (R1, V2) (R1,V3) (R1,R)
(R2,B1) (R2, R2) (R2, B3) (R2,V1) (R2, V2) (R2,V3) (R2,R)

Soit A = «Didier a ses chaussettes et sa chemise de la même couleur»

il y a 20 chances sur 56 donc $P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$

B = «Didier a ses chaussettes et sa chemise bleues»

il y a 12 chances sur 56 donc $P(B) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214$

C = «Didier a ses chaussettes et sa chemise rouges»

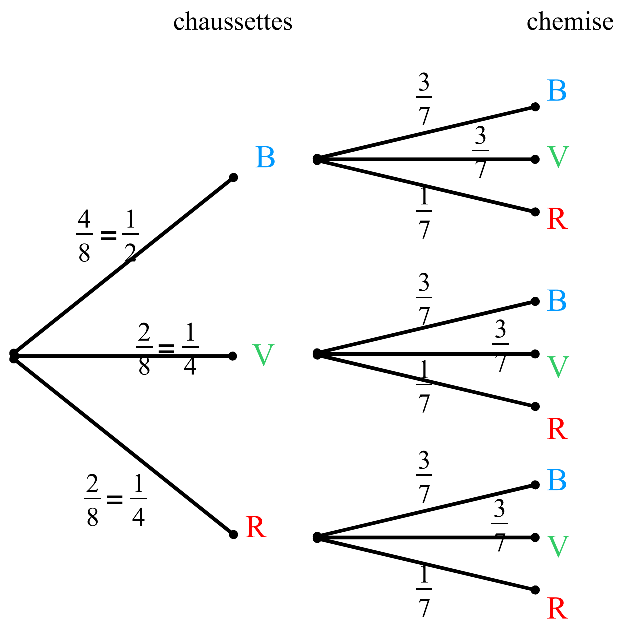
il y a 2 chances sur 56 donc $P(C) = \frac{2}{56} = \frac{1}{28} \approx 0{,}036$

D = «Didier a ses chaussettes et sa chemise dépareillées»

il y a 36 chances sur 56 donc $P(D) = \frac{36}{56} = \frac{9}{14} \approx 0{,}643$

P(D) > 0,5 donc Didier a plus de chances d'avoir des vêtements de couleurs différentes (64,3% contre 35,7%)

<u>Arbre des possibles (arbre de probabilité)</u>



Sur un même chemin, on multiplie les probabilités

B = «Didier a ses chaussettes et sa chemise bleues»

C = «Didier a ses chaussettes et sa chemise rouges»

$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

$P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

E = «Didier a ses chaussettes et sa chemise vertes»

$P(E) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$

Soit A = «Didier a ses chaussettes et sa chemise de la même couleur»

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) + P(C) + P(E) \\ &= \frac{3}{14} + \frac{1}{28} + \frac{3}{28} \\ &= \frac{6}{28} + \frac{1}{28} + \frac{3}{28} \\ &= \frac{10}{28} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$