Savoir-faire 1 Comment calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle lorsque l'on connaît les longueurs des deux autres côtés

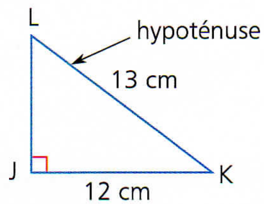
Énoncé **1.** Soit JKL un triangle rectangle en J tel que : KL = 13 cm et JK = 12 cm. Calculer JL.

2. Soit FGR un triangle rectangle en G tel que : GR = 3 cm et GF = 5 cm. Calculer FR. On donnera la valeur exacte en cm, puis l'arrondi au mm.

Solution

Méthode Pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle lorsque l'on connaît les longueurs des deux autres côtés, on utilise le théorème de Pythagore.

1.



> On dessine une figure sur laquelle on reporte les données, et on repère l'hypoténuse.

Le triangle JKL est rectangle en J.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :

> On sait que le triangle JKL est rectangle, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$KL^2 = JK^2 + JL^2$

$13^2 = 12^2 + JL^2$

> On remplace KL et JK par leurs valeurs.

$13^2 - 12^2 = JL^2$

$169 - 144 = JL^2$ soit $25 = JL^2$.

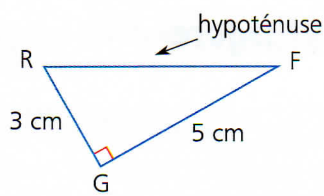
> On calcule JL^2.

Or, JL est une longueur, donc : $JL \geqslant 0$.

Donc : **JL = 5 cm**.

> On conclut.

2.



> On dessine une figure sur laquelle on reporte les données, et on repère l'hypoténuse.

Le triangle FRG est rectangle en G.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :

> On sait que le triangle FRG est rectangle, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$FR^2 = GF^2 + GR^2$

$FR^2 = 5^2 + 3^2$

> On remplace GF et GR par leurs valeurs.

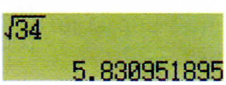
$FR^2 = 25 + 9 = 34$.

> On calcule FR^2.

Or, FR est une longueur, donc : $FR \geqslant 0$.

D'où : **FR = $\sqrt{34}$ cm.**

> On note $\sqrt{34}$ le nombre **positif** dont le carré est égal à 34.
> $\sqrt{34}$ cm est la **valeur exacte** de FR.



$\sqrt{34} \approx 5{,}8$.

Donc : **FR ≈ 5,8 cm.**

> On obtient une **valeur approchée** de $\sqrt{34}$ avec une calculatrice :
> Casio Collège 2D : [√‾] [3] [4] [EXE]
> TI-Collège : [√‾] [3] [4] [)] [ENTRER]

Savoir-faire 2 Comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Énoncé **Le triangle RST est tel que : RS = 12 cm, ST = 20 cm et RT = 24 cm. Démontrer que le triangle RST n'est pas rectangle.**

Solution

Méthode Pour démontrer qu'un triangle **n'est pas rectangle** lorsque l'on connaît les longueurs de ses trois côtés, il suffit de démontrer que le carré de la longueur du plus grand côté **n'est pas égal** à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

RS = 12 cm, ST = 20 cm et RT = 24 cm.
[RT] est le plus grand côté du triangle RST.
On compare donc RT^2 et $RS^2 + ST^2$.

← [RT] est le plus grand côté. Donc, si le triangle RST est rectangle, alors [RT] est son hypoténuse.

D'une part : $RT^2 = 24^2 = 576$.

← On calcule le carré de la longueur du plus grand côté.

D'autre part : $RS^2 + ST^2 = 12^2 + 20^2 = 544$.
D'où : $RT^2 \neq RS^2 + ST^2$.

← On calcule la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés.

Or, si le triangle RST était rectangle, alors, d'après le théorème de Pythagore, on aurait $RT^2 = RS^2 + ST^2$, ce qui n'est pas le cas.

Donc le triangle RST n'est pas rectangle.

← On conclut.

Savoir-faire 3 Comment démontrer qu'un triangle est rectangle

Énoncé **Le triangle RTY est tel que : RT = 7,2 m, RY = 9,6 m et TY = 12 m. Démontrer que le triangle RTY est rectangle en R.**

Solution

Méthode Pour démontrer qu'un triangle **est rectangle** lorsque l'on connaît les longueurs de ses trois côtés, il suffit de démontrer que le carré de la longueur du plus grand côté **est égal** à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

RT = 7,2 m, RY = 9,6 m et TY = 12 m.
[TY] est le plus grand côté du triangle RTY.
On compare donc TY^2 et $RT^2 + RY^2$.

← [TY] est le plus grand côté. Donc, si le triangle RTY est rectangle, alors [TY] est son hypoténuse.

D'une part : $TY^2 = 12^2 = 144$.

← On calcule le carré de la longueur du plus grand côté.

D'autre part : $RT^2 + RY^2 = 7{,}2^2 + 9{,}6^2 = 144$.

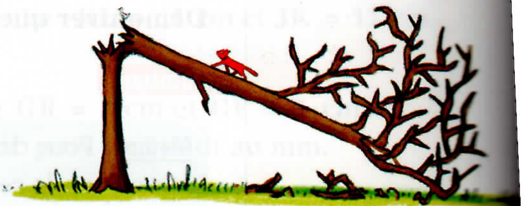
← On calcule la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés.

D'où : $TY^2 = RT^2 + RY^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RTY est rectangle en R.

← On conclut en utilisant **la réciproque du théorème de Pythagore**.

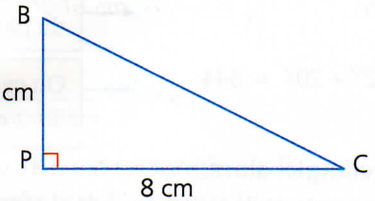
Savoir-faire 4 Comment résoudre un problème

Énoncé **Lors d'une tempête, le tronc d'un arbre a été brisé à 6 mètres du sol. Le pied de l'arbre est maintenant situé à 8 mètres de la cime. On suppose que le tronc de l'arbre est perpendiculaire au sol. Quelle était la hauteur de l'arbre avant la tempête ?**



Solution

On note P le pied de l'arbre, B l'endroit où le tronc a été brisé et C la cime de l'arbre.



On commence par représenter la situation par une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Le tronc est perpendiculaire au sol,
donc : $(BP) \perp (CP)$
Le tronc a été brisé à 6 mètres du sol,
donc : $BP = 6\,m$.
Le pied de l'arbre est situé à 8 mètres de la cime,
donc : $PC = 8\,m$.
La hauteur de l'arbre avant la tempête, que l'on note h, est égale à : $BP + BC$.

On traduit l'énoncé et on reporte au fur et à mesure les informations sur la figure.

– Calcul de BC :
Le triangle BPC est rectangle en P, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = BP^2 + PC^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100.$

Or, BC est une longueur ;
donc : $BC \geqslant 0$.
Donc : $BC = 10\,m$.

On connaît la longueur BP, il faut donc calculer la longueur BC.

– Calcul de h :

$h = BP + BC$
$h = 6 + 10 = 16.$

On calcule maintenant la hauteur h de l'arbre avant la tempête.

Avant la tempête, la hauteur de l'arbre était égale à 16 mètres.

On rédige une phrase de conclusion.