Plan du cours

Activité d'introduction 1

PARTIE A

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique de France.
En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme. Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

1) Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
2) On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en 2020 + n.
(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Calculer ensuite les valeurs u_{40} et u_{50} à l'aide de la calculatrice.
(b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter.

PARTIE B

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singe dans une réserve naturelle.
En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

1) Déterminer le nombre de singes en 2021 et en 2022.
2) On note v_n le nombre de singes en 2020 + n.
(a) Exprimer v_n en fonction de n. Calculer ensuite les valeurs v_{40} et v_{50}
(b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter. Que peut-on penser de cette évolution ?

I. Limites de suites

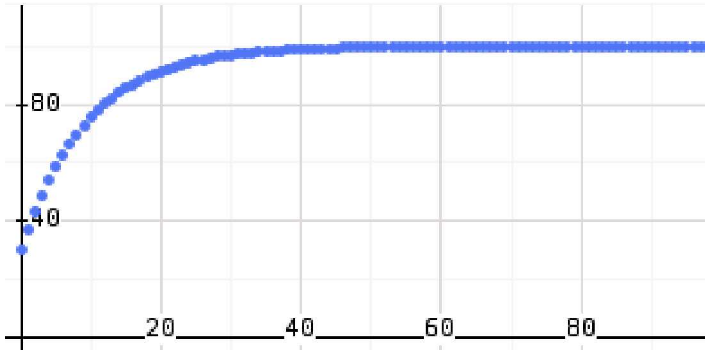
Étudier la limite d'une suite (u_n) c'est chercher ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :
- Les nombres u_n finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

1. Limite d'une suite

Définition **Les suites convergentes**

Une suite u converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

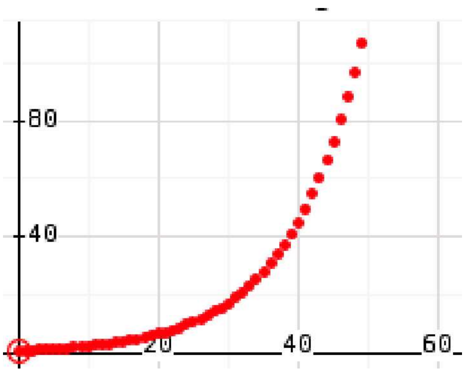
On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$



Définition **Les suites divergentes**

Une suite u diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout réel $A > 0$ (respectivement $B < 0$), il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A (respectivement B).

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)



Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{n}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

  Par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$

  La suite $\left(-\dfrac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^n} + n^2\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$
  De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

  Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} + n^2 = +\infty$

La suite $\left(\frac{1}{e^n}+n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-e^n=-\infty$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n}=0$. Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{-n}=1$

Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}=-\infty$

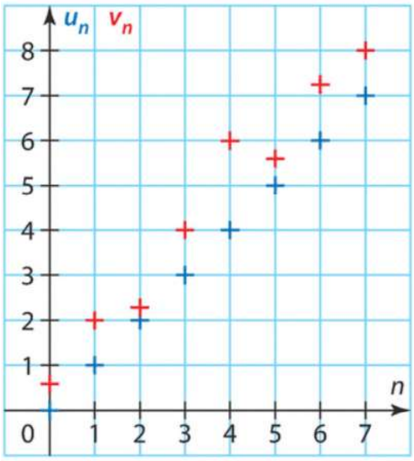
La suite $\left(\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

2. Limites et comparaison

Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leq v_n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$



On remarque par lecture graphique que $u_n<v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Donc par comparaison des limites on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Exemples :

1) Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+3n$

A l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

On cherche donc une suite (v_n) telle que $u_n\geq v_n$.

Pour tout entier n,

$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3n \leq (-1)^n + 3n \leq 1 + 3n$ (car $n > 0$ donc $3n > 0$)

$\Leftrightarrow -1 + 3n \leq u_n \leq 1 + 3n$ On choisit donc $v_n = -1 + 3n$.

On a pour tout entier n, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et la suite diverge aussi vers $+\infty$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2sin(n)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

- **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$.**

  Pour tout entier n,$-1 \leq sin(n) \leq 1$

  $\Leftrightarrow -2 \leq sin(n) \times 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + n \leq 2sin(n) + n \leq 2 + n$ (car $n > 0$)

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$.

- **On a pour tout entier** n, $u_n \geq n - 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$

  Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.