Plan du cours

Mes objectifs :

↪ Je dois savoir si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier et savoir reconnaître un nombre premier.

↪ Je dois connaître et savoir utiliser les critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5, 4, 9 ou 10).

↪ Je dois savoir écrire une décomposition en facteurs premiers.

↪ Je dois savoir simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

I. Multiple et diviseur d'un nombre entier

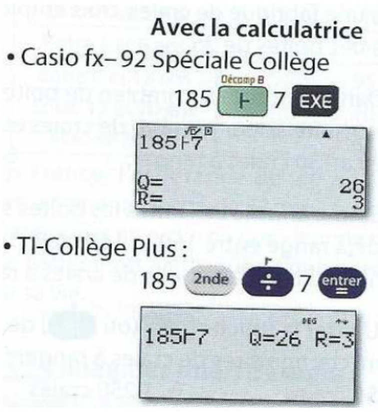
1. La division euclidienne

Propriété

Effectuer la division euclidienne d'un entier **a (le dividende)** par un entier **b (le diviseur)** non nul, c'est trouver deux entiers **q (le quotient)** et **r (le reste)** tels que :

$$a = b \times q + r$$

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 185 par 7.



2. Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si il est pair, donc si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
  Exemple : *326 est divisible par 2 mais pas 987.*

- Un nombre est divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.
  Exemple : *125 est divisible par 5 mais pas 431.*

- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
  Exemple : *43 281 est divisible par 3, car 4 + 3 + 2 + 8 + 1 = 18 et 18 est un multiple de 3.*

- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
  Exemple : *738 est divisible par 9, car 7 + 3 + 8 = 18 et 18 est un multiple de 9.*

- Un nombre est divisible par 10 si il se termine par 0.
  Exemple : *350 est divisible par 10.*

3. Multiples et diviseurs

Définition

Dire que l'entier naturel a est **un multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que b est **un diviseur** de a et a est **divisible** par b.

Exemples : $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un **multiple** de 5
15 est un **multiple** de 3.
5 et 3 sont des **diviseurs** de 15.

Remarques :

- Tout nombre est multiple de 1 donc 1 est un diviseur de tout nombre entier naturel.
- Tout nombre est multiple de lui-même donc tout nombre est divisible par lui-même.

4. Diviseurs communs

Définition

Dire que d est **un diviseur commun** de deux nombres a et b signifie que a et b sont divisibles par d.

Exemple : Quels sont les diviseurs communs de 12 et 18 ?

$D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
Les diviseurs communs de 12 et de 18 sont : 1, 2, 3 et 6.

II. Nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers

1. Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Attention ! 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, . . .
(Pour une liste plus détaillée voir l'activité sur le crible d'Erathostène)

Définition

Dire que deux nombres entiers naturels sont **premiers entre eux** signifie que leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : Montrer que 12 et 35 sont premiers entre eux.

$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{35} = \{1; 5; 7; 35\}$
Le seul diviseur commun de 12 et 35 est 1 donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple : Décomposons 1014 en produit de facteurs premiers.

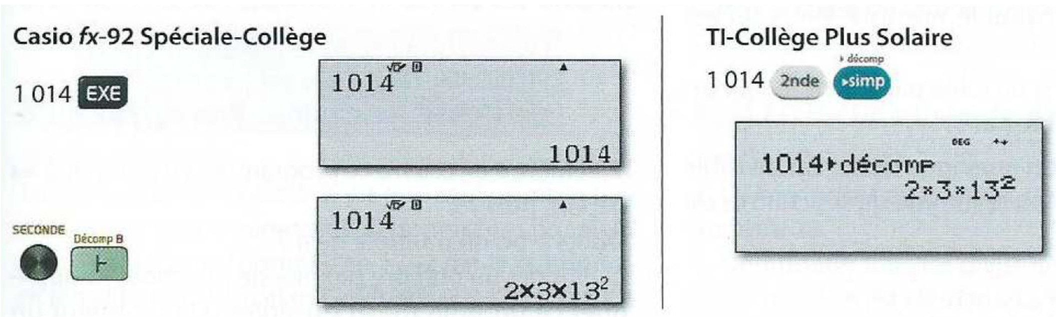
METHODE 1 :

$1014 = 2 \times 507$
$1014 = 2 \times (3 \times 169)$
$1014 = 2 \times (3 \times (13 \times 13))$
$1014 = 2 \times 3 \times 13 \times 13.$

METHODE 2 :

1 014	2
507	3
169	13
13	13
	1

Donc, $\boxed{1014 = 2 \times 3 \times 13^2}$.



3. Notion de PGCD

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. Leur plus grand diviseur commun est noté PGCD(a ; b).

Exemples :

1. Donner le PGCD de 24 et 60 à l'aide de **la liste des diviseurs** de chacun des nombres.

$D_{60} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$ et $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Les diviseurs communs de 24 et 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.
Le plus grand de ces diviseurs communs est 12 donc on note PGCD(24,60)=12.

2. Donner le PGCD de 144 et 462 en utilisant **la décomposition en produit de facteurs premiers**.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ et $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Donc $144 = 2^4 \times 3^2$ et $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Pour déterminer le PGCD de 144 et 462, on choisit tous les nombres premiers en commun dans les deux décompositions avec l'exposant le plus petit.

Donc PGCD(144,462)= 2 x 3 = 6

4. Une application aux fractions irréductibles

Définition

Soient a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : $\frac{5}{7}$ est une fraction irréductible car 5 et 7 sont premiers entre eux.

Remarque : On peut simplifier facilement une fraction et la rendre irréductible en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple : On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$:

On sait que $120 = 12 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

et $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Donc $\frac{120}{84} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$