

3^{ème} : Chapitre1 : Nombres entiers et rationnels

1. Multiples diviseurs : définition

1.1 Définition

a et b sont deux entiers naturels (non nuls).

Si $a=b \times c$ avec c un entier ALORS on dit que b est un diviseur de a et que a est un multiple de b.

Exemple : $8=4 \times 2$

donc 8 est un multiple de 2 ; 8 est un multiple de 4 ; 8 est divisible par 2 ; 8 est divisible par 4 ; 2 est un diviseur de 8 ; 4 est un diviseur de 8.

1.2 Critères de divisibilité

Critères de divisibilité :

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.

1.3 Nombre premier

Définition : Un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs est un nombre premier.

Remarque : Tout nombre entier strictement supérieur à 1 admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- Les diviseurs de 23 :
 $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23$
1 et 23 sont les diviseurs de 23 donc 23 est un nombre premier
- Les diviseurs de 6 : 1 ; 2 ; 3 ; ~~4~~ ; ~~5~~ ; 6
6 n'est pas un nombre premier
- 1 n'admet qu'un seul diviseur donc 1 n'est pas un nombre premier.
- 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19 sont des nombres premiers

2. Diviseurs communs à deux entiers naturels

2.1 Un exemple de recherche (long)

Enoncé :

1. Donner tous les diviseurs communs à 12 et 18

2. Quel est le plus grand diviseur commun à 12 et 18 ?

Solution :

Diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ~~5~~ ; 6 ; ~~7~~ ; ~~8~~ ; ~~9~~ ; ~~10~~ ; ~~11~~ ; 12

Diviseurs de 18 : 1 ; 2 ; 3 ; ~~4~~ ; ~~5~~ ; 6 ; ~~7~~ ; ~~8~~ ; ~~9~~ ; ~~10~~ ; ~~11~~ ; ~~12~~ ; ~~13~~ ; ~~14~~ ; ~~15~~ ; ~~16~~ ; ~~17~~ ; 18

1 ; 2 ; 3 et 6 sont des diviseurs communs à 18 et 12

6 est le plus grand diviseur commun à 18 et 12

2.2 Propriétés des diviseurs communs à deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls ($a > b$)

Un diviseur commun à a et b est un diviseur :

-de leur somme,

-de leur différence

-du reste de la division euclidienne de a par b .

Exemple : 5 est un diviseur de 40 et de 15

donc 5 est un diviseur de 55 (la somme de 40 et 15)

donc 5 est un diviseur de 25 (la différence de 40 et 15)

donc 5 est un diviseur de 10 (reste de la division euclidienne de 40 par 15)

2.3 Algorithme d'euclide

On me donne deux nombres : 799 et 629.
J'effectue la division euclidienne de 799 par 629 et j'écris le résumé de cette opération sur la première ligne.
Je complète les lignes du dessous en suivant les flèches et en effectuant les divisions Euclidiennes.
On obtient cela :

$$\begin{array}{lcl} \boxed{799} & = & \boxed{629} \times 1 + \boxed{170} \\ \boxed{629} & = & \boxed{170} \times 3 + \boxed{119} \\ \boxed{170} & = & \boxed{119} \times 1 + \boxed{51} \\ \boxed{119} & = & \boxed{51} \times 2 + \boxed{17} \\ \boxed{51} & = & \boxed{17} \times 3 + \boxed{0} \end{array}$$

Cet algorithme se nomme l'algorithme d'Euclide.
Le plus grand diviseur commun à 799 et 629 est aussi un diviseur de tous les nombres encadrés.
Le plus grand diviseur commun à 799 et 629 est 17. C'est le dernier reste non nul.

Enoncé1 : On veut connaître le plus grand diviseur commun à 3162 et 1884 en utilisant l'algorithme d'euclide.

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide :

$$3162 = 1884 \times 1 + 1278$$

$$1884 = 1278 \times 1 + 606$$

$$1278 = 606 \times 2 + 66$$

$$606 = 66 \times 9 + 12$$

$$66 = 12 \times 5 + 6$$

$$12 = 6 \times 2 + 0$$

Le plus grand diviseur commun à 3162 et 1884 est 6.
On note aussi : $\text{pgcd}(3162 ; 1884) = 6$

Remarque : Tous les nombres en gras sont divisibles par les diviseurs communs à 3162 et 1884 donc 6 est le plus grand diviseur commun à 3162 et 1884

Enoncé2 : On veut connaître le plus grand diviseur commun à 1376 et 317 en utilisant l'algorithme d'euclide.

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide :

$$1376 = 317 \times 4 + 108$$

$$317 = 108 \times 2 + 101$$

$$108 = 101 \times 1 + 7$$

$$101 = 7 \times 14 + 3$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

Le plus grand diviseur commun à 1376 et 317 est 1.

$\text{pgcd}(1376 ; 317) = 1$

Remarque : Tous les nombres en gras sont divisibles par les diviseurs communs à 1376 et 317 donc 1 est le plus grand diviseur commun à 1376 et 317.

2.4 Nombres premiers entre eux

Deux entiers naturels non nuls sont dits **premiers entre eux** lorsque 1 est leur seul diviseur commun

Exemples :

Les diviseurs de 10 sont 1 ; 2 ; 5 et 10

Les diviseurs de 21 sont 1 ; 3 ; 7 et 21

Le seul diviseur commun à 10 et 21 est 1 donc 10 et 21 sont deux nombres premiers entre eux

Enoncé1 : Les nombres 245 et 21 sont-ils premiers entre eux ?

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide

$$245 = 21 \times 11 + 14$$

$$21 = 14 \times 1 + 7$$

$$14 = 7 \times 2 + 0$$

Le plus grand diviseur commun à 245 et 21 est 7 donc les nombres 245 et 21 ne sont pas des nombres premiers entre eux.

Enoncé2 : Les nombres 987 et 25 sont-ils premiers entre eux ?

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide

$$987 = 25 \times 39 + 12$$

$$25 = 12 \times 2 + 1$$

$$12 = 1 \times 12 + 0$$

Le plus grand diviseur commun à 987 et 25 est 1 donc les nombres 987 et 25 sont des nombres premiers entre eux.

3. Fractions et diviseurs communs

3.1 Fractions irréductibles

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Enoncé1 : La fraction $\frac{647}{35}$ est-elle une fraction irréductible ?

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide

$$647 = 35 \times 18 + 17$$

$$35 = 17 \times 2 + 1$$

$$17 = 1 \times 17 + 0$$

- Le pgcd(647;35)=1
- donc les nombres 647 et 35 sont premiers entre eux
- donc la fraction $\frac{647}{35}$ est une fraction irréductible.

Enoncé2 : La fraction $\frac{248}{54}$ est-elle une fraction irréductible ?

Solution : On peut facilement voir que 2 est un diviseur commun à 248 et 54. En effet $248 = 2 \times 124$ et $54 = 2 \times 27$ donc 1 n'est pas le seul diviseur commun à 248 et 54 donc les nombres 248 et 54 ne sont pas premiers entre eux et donc la

fraction $\frac{248}{54}$ n'est pas une fraction irréductible.

3.2 Simplifications de fractions

Pour obtenir une fraction irréductible, on simplifie le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Enoncé : Transformer $\frac{6864}{6721}$ pour rendre cette fraction irréductible

Solution : On utilise l'algorithme d'euclide

$$6864 = 6721 \times 1 + 143$$

$$6721 = 143 \times 47 + 0$$

143 est donc le pgcd de 6864 et de 6721

Pour obtenir une fraction irréductible, on simplifie le numérateur et le dénominateur par leur PGCD

$$\frac{6864}{6721} = \frac{143 \times 48}{143 \times 47} = \frac{48}{47}$$

$\frac{48}{47}$ est une fraction irréductible

4. Problèmes concrets

Enoncé : Une pièce rectangulaire de 5,40m de long et de 3m de large va être recouverte, sans découpe, par des dalles de moquette carrées, toutes identiques.

1. Quelle est la mesure du côté de chacune de ces dalles, sachant que l'on veut les dalles les plus grandes possibles.
2. Calculer alors le nombre de dalles utilisées.

Solution :

1. La pièce mesure 540cm par 300cm.

On a un nombre entier de dalles sur la longueur et la largeur de la pièce, donc le côté d'une dalle est un diviseur de 540 et de 300. On cherche les plus grandes dalles possibles, donc on cherche le plus grand diviseur commun à 540 et 300.

On utilise l'algorithme d'euclide.

$$540 = 300 \times 1 + 240$$

$$300 = 240 \times 1 + 60$$

$$240 = 60 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(540; 300) = 60$.

Le côté d'une dalle devra mesurer 60cm.

2. $540 \div 60 = 9$; $300 \div 60 = 5$. Il y aura 9 dalles en longueur et 5 dalles en largeur.
 $5 \times 9 = 45$ On va utiliser 45 dalles.

3^{ème} : Objectifs et compétences - CHAPITRE1 : Nombres entiers et rationnels

3N101	Connaître / utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux nombres entiers (soustractions, Euclide).	
3N102	Diviseurs communs à deux entiers, calculer le PGCD de deux nombres entiers	SC335
3N103	Déterminer si deux nombres entiers donnés sont premiers entre eux.	
3N104	Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.	