Correction de la séance d'AP 1 : Outils pour la démonstration

EXERCICE 1

Pour chaque ligne du tableau, dire si la proposition P implique la proposition Q, si la proposition Q implique la proposition P ou s'il y a équivalence.

Proposition P	**Proposition** Q	**P** $\Rightarrow$ **Q**	**Q** $\Rightarrow$ **P**	**P** $\Leftrightarrow$ **Q**
M est une point de la médiatrice de [AB]	M équidistant de A et de B			X
Je réside en France	Je réside en Europe	X		
Je suis majeur(e)	Jai 19 ans		X	
CDEF est un parallélogramme	CDEF est un carré		X	
$x = 3$	$x^2 = 9$	X		
MNP est rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			X
$x \geq -2$	$x \geq -1$		X	
$a + b = 5$	a = 2 et b = 3		X	
$4x - (x - 5) = 7$	$x = \dfrac{2}{3}$			X
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			X

EXERCICE 2

Toutes les affirmations suivantes sont fausses. Pour chacune, donner un contre exemple.

1) Si $x^2 > 4$, alors $x > 2$.
Contre-exemple :
Prenons $x = -3$, $x^2 = (-3)^2 = 9 > 4$ Cependant, $x = -3 < 2$.

2) Pour tout couple de réels $(x; y)$, on a $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.
Contre-exemple :
Prenons $x = -1$ et $y = 2$, d'une part : $(-1 + 2)^3 = 1^3 = 1$
D'autre part, $(-1)^3 + 2^3 = -1 + 8 = 7$ Or $1 \neq 7$

3) Si $x^2 = 9$ alors $x = 3$.
Contre-exemple :
Prenons $x = -3$ alors $x^2 = 9$.Il y a donc une autre solution. 3 n'est pas la seule solution.

4) Pour tout couple de réels positifs $(a; b)$, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.
Contre-exemple :
Prenons $a = 1$ et $b = 2$, d'une part : $\sqrt{1} + \sqrt{2} \approx 1,4$
D'autre part, $\sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} \approx 1,7$ Or $1,7 \neq 1,4$

5) Pour tout réel p, le réel $10p$ est négatif.
Contre-exemple :
Prenons p réel tel que $p = 4$, alors $10p = 40 > 0$

6) Tous les réels ont un inverse.
Contre-exemple :
Prenons x réel tel que $x = 0$, l'inverse de ce réel n'existe pas.

7) Tous les multiples de 5 sont des multiples de 10.
Contre-exemple :
Prenons par exemple 15 qui est bien un multiple de 5. Néanmoins 5 n'est pas multiple de 10.

8) Si $x(x-3) = 0$, alors $x = 3$.
Contre-exemple :
Prenons $x = 30$ alors $3(3-3) = 3 \times 0 = 0$

9) Si $x < 1$, alors $x < 0$.
Contre-exemple :
Prenons Si $x < 1$ alors x peut être égale à 0. Or 0 n'est pas strictement inférieur à 0.

10) Si $x < 2$, alors $x^2 < 4$.
Contre-exemple :
Prenons $x = -4$ alors $(-4)^2 = 16 > 4$

11) Pour tout x, x est un nombre négatif.
Contre-exemple :
Prenons $x = 105$ alors x n'est pas négatif.

12) Pour tout entier n, si n est divisible par 3, il est divisible par 6.
Contre-exemple :
Prenons $n = 21$, $21 = 3$ x 7 donc 21 est bien un multiple de 3. Cependant 21 n'est pas un multiple de 6.

13) Si $1 \leq x \leq 3$ alors $x \in]1;3[$.
Contre-exemple :
Prenons x tel que $1 \leq x \leq 3$, x peut être égale à 1 ou à 3, or dans l'intervalle les nombres 1 et 3 sont exclus.

14) Si $x \in [1;5[$, alors $1 \leq x \leq 5$.
Contre-exemple :
Prenons x tel que $x \in [1;5[$, x est donc différent de 5. Or, dans l'inégalité il est inclu.

15) Si $x \in [0;10]$, alors x est un entier naturel.
Contre-exemple :
Dans l'intervalle $[0;10]$, il y a une infinité de nombres. Par exemple : 0,5 ; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$

EXERCICE 3

Pour aller plus loin.
Ecrire la démonstration de la propriété suivante : "La somme de deux nombres impairs est un nombre pair."

Prenons deux nombres impairs.
Le premier est $2n+1$ et le second $2p+1$.

Nous avons :
$(2n+1)+(2p+1) = 2n+1+2p+1 = 2n+2p+2 = 2(n+p+1)$

Ce résultat est de la forme $2k$, (multiple de 2), donc la somme est paire.