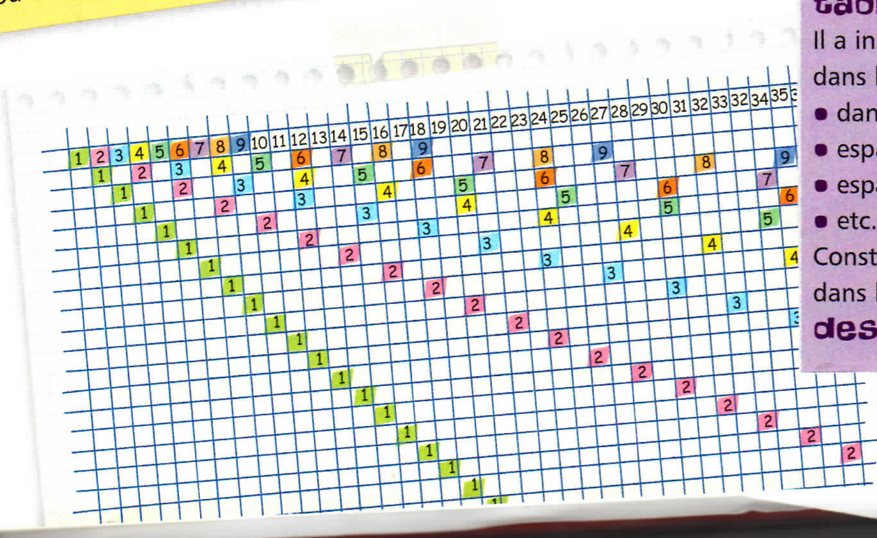
1 Nombres entiers et rationnels

Pourquoi le **quatre-quarts** s'appelle-t-il ainsi ?
Les ingrédients de ce gâteau sont les suivants :
Pour 8 personnes :
- 4 œufs
- 250 g de farine
- 250 g de beurre
- 240 g de sucre fin + 10 g de sucre vanillé
- 2 cuillères à café de levure en poudre.

Sachant qu'un œuf pèse en moyenne 62 g, 4 œufs pèsent environ 250 g.
Les **quatre** ingrédients principaux sont donc présents en **quantité égale**.
D'où son nom…



Un **mathématicien amateur**, Benoît Cloitre, a construit récemment le **tableau de nombres** ci-contre.
Il a inscrit les entiers strictement positifs dans l'ordre croissant :
- dans chaque case sur la première ligne ;
- espacés d'une case sur la deuxième ligne ;
- espacés de deux cases sur la troisième ligne ;
- etc.

Constatez que les nombres qui apparaissent dans les colonnes sont les **diviseurs des entiers** de la première ligne !

Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	Le nombre 7,89 est égal à :	$\frac{789}{10}$	$\frac{789}{1000}$	$\frac{789}{100}$
2	Le nombre $\frac{8}{1000}$ est égal à :	0,008	8,1000	0,8000
3	Le nombre $\frac{19}{11}$:	est égal à 1,727272727	est égal à 1,73	n'est pas un nombre décimal
4	Le nombre $\frac{45}{35}$ est égal à :	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	45,35
5	Le nombre $\frac{8,15}{4,3}$ est égal à :	2,5	$\frac{815}{43}$	$\frac{81,5}{43}$
6	Le nombre 2 816 est :	divisible par 2 mais pas par 4	divisible par 4	divisible par 3
7	Compléter le nombre 45□3 pour qu'il soit divisible par 9 :	6	9	0
8	La somme $3a + 3b$ est égale à :	$3(a + b)$	$6(a + b)$	$9ab$

Exercice 1 **a.** Donner l'écriture décimale de chacune des puissances de 10 suivantes :
• 10^3 • 10^5 • 10^1 • 10^0 • 10^{-2} • 10^{-1} • 10^{-6}

b. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10 :
• 100 • 1 000 000 • 10 • 1 • 0,001 • 0,000 01

Exercice 2 **a.** Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 68 par 13.

b. Encadrer le nombre $\frac{68}{13}$ par deux entiers consécutifs.

c. Donner la troncature au millième et l'arrondi au millième du nombre $\frac{68}{13}$.

d. Le nombre $\frac{68}{13}$ est-il un nombre décimal ?

Exercice 3 Effectuer les calculs suivants. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} \times \frac{9}{7}$ $\quad B = \frac{15}{2} : \frac{5}{24}$ $\quad C = \left(8 - \frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right)$ $\quad D = \dfrac{\frac{9}{4} + 5}{3 - \frac{2}{8}}$

Exercice 4 **a.** Rappeler la règle des signes du quotient de deux nombres relatifs.

b. Les nombres $A = \frac{-12}{21}$, $B = \frac{12}{-21}$ et $C = -\frac{12}{21}$ sont-ils égaux ? Justifier.

c. Simplifier la fraction $\frac{12}{21}$, puis en déduire une écriture simplifiée des nombres A, B et C.

Exercice 5 **a.** Développer chacun des produits suivants : $A = 7(3 - x)$; $B = 5(4a + b)$.

b. Factoriser chacune des sommes algébriques suivantes : $C = 15x + 3y$; $D = 8a - 16$.

Activités

Activité 1 Nature des nombres

1 Les nombres décimaux

a. Écrire sous la forme d'une fraction décimale les nombres suivants :

- 156,1
- −7,89
- 0,0023

b. Donner l'écriture décimale des fractions suivantes :

- $\dfrac{89}{10^4}$
- $\dfrac{548}{10}$
- $\dfrac{7}{10^0}$
- $\dfrac{-62}{10^3}$
- $\dfrac{-50}{10}$

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

c. Écrire la fraction $\dfrac{17}{25}$ sous la forme d'une fraction de dénominateur 100, puis donner l'écriture décimale de $\dfrac{17}{25}$.

d. Sans effectuer la division, donner les écritures décimales des nombres suivants :

- $\dfrac{98}{50}$
- $\dfrac{-13}{25}$
- $\dfrac{29}{5}$
- $\dfrac{-35}{4}$
- $\dfrac{7}{8}$

2 Les nombres rationnels

a. Recopier la liste de nombres ci-dessous, puis entourer :
– en bleu les nombres entiers naturels ;
– en vert les nombres entiers relatifs ;
– en rouge les nombres décimaux.
Un nombre peut être entouré de plusieurs couleurs.

-1 ; 0 ; $\dfrac{-3}{4}$; -2 ; $\dfrac{2}{3}$; 12 ; $\dfrac{12}{3}$; $7{,}8$; $\dfrac{7}{8}$; $-0{,}56$; $\dfrac{6}{7}$; $\dfrac{35}{-5}$; $-\dfrac{29}{2}$

b. Comment traduire le fait que certains nombres soient entourés trois fois, certains deux fois et certains une fois uniquement ?

c. Que peut-on dire des nombres qui ne sont pas entourés ?

d. Vérifier que chacun des nombres de la liste peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs. On appelle ces nombres des **nombres rationnels**.

Attention ! Tous les nombres ne sont pas rationnels. Il existe aussi des nombres non rationnels. On les appelle des nombres **irrationnels**. π par exemple est un nombre irrationnel.

e. Tous les nombres entiers relatifs sont-ils des nombres décimaux ?
Tous les nombres décimaux sont-ils des nombres entiers ?
Tous les nombres décimaux sont-ils des nombres rationnels ?
Tous les nombres rationnels sont-ils des nombres décimaux ?

Activités

Activité 2 Diviseurs positifs d'un nombre entier positif

1 **a.** Pourquoi peut-on affirmer que 7 divise 28 ? On dit que 7 est un **diviseur** de 28.
b. 1 et 28 sont-ils des diviseurs de 28 ? Donner tous les diviseurs de 28.
c. Les nombres a et b étant des nombres entiers strictement positifs, que doit-on vérifier pour pouvoir affirmer que b est un diviseur de a ?

2 **a.** Quels sont les diviseurs positifs de 1 ? de 2 ? de 5 ? de 6 ? de 7 ? de 9 ? de 11 ? de 15 ?
b. Quel est le plus petit nombre de diviseurs positifs d'un nombre entier supérieur ou égal à 2 ?

3 On dit qu'un nombre entier naturel est **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
a. Le nombre 1 est-il premier ?
b. Parmi les entiers cités à la question **2a**, quels sont ceux qui sont premiers ?

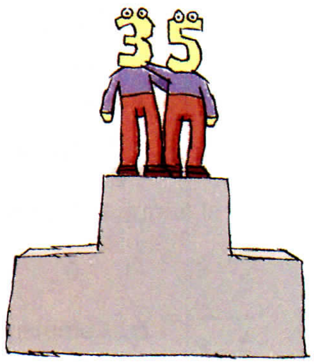
Activité 3 Diviseurs communs et fraction irréductible

A Plus grand commun diviseur (PGCD)

1 **a.** Écrire tous les diviseurs positifs de 36, puis tous les diviseurs positifs de 60.
b. Quels sont les diviseurs positifs communs à 36 et à 60 ?
c. Quel est le plus petit diviseur positif commun à 36 et à 60 ? Quel est le plus grand diviseur positif commun à 36 et à 60 ? Le **p**lus **g**rand **c**ommun **d**iviseur de 36 et 60 est noté **PGCD(36 ; 60)**.

2 Calculer le plus grand diviseur commun aux nombres 36 et 65, puis aux nombres 18 et 49.
Que remarque-t-on ?

3 On dit que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.
Indiquer, dans chacun des cas suivants, si les deux nombres donnés sont premiers entre eux.
a. 28 et 63 **b.** 72 et 32 **c.** 62 et 35



B Fraction irréductible

1 **a.** Simplifier la fraction $\frac{36}{60}$ au maximum. Une fraction qu'on ne peut plus simplifier est appelée **irréductible**.
b. Par quel nombre doit-on diviser 36 et 60 pour obtenir la fraction irréductible égale à $\frac{36}{60}$?

2 Peut-on simplifier les fractions $\frac{36}{65}$ et $\frac{49}{18}$? Justifier.

3 Par quel nombre doit-on diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction pour obtenir une fraction irréductible ?

Activité 4 Diviseur commun et opérations

A Diviseur commun et soustraction

1 Conjecture

a. Expliquer pourquoi 4 est un diviseur de 248 et de 32.

b. Calculer la différence $248 - 32$. Le nombre 4 est-il un diviseur de cette différence ?

c. Que peut-on conjecturer ?

2 Démonstration

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

Soit d un diviseur commun à a et b.

On veut montrer qu'un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur de leur différence.

a. Justifier qu'il existe deux entiers n et n' tels que :

$$a = dn \quad \text{et} \quad b = dn'.$$

b. Exprimer la différence $a - b$ en fonction de d, n et n'.

c. En déduire que d est un diviseur de $a - b$.

3 PGCD et soustraction

a. Calculer le $\text{PGCD}(248 ; 32)$ et le $\text{PGCD}(248 - 32 ; 32)$. Que remarque-t-on ?

b. Quel processus utilisant la soustraction pourrait-on imaginer pour calculer le PGCD de deux nombres sans chercher tous les diviseurs communs à ces deux nombres ?

B Diviseur commun et division euclidienne

1 Conjecture

a. Calculer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de 248 par 32.

b. Le nombre 4 est un diviseur de 248 et de 32. Montrer que le nombre 4 est également un diviseur du reste r.

c. Que peut-on conjecturer ?

2 Démonstration

On veut montrer qu'un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur du reste de la division euclidienne du plus grand par le plus petit de ces deux nombres.

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

Soit d un diviseur commun à a et b.

On appelle q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

a. Exprimer a en fonction de b, q et r, puis exprimer r en fonction de a, b et q.

b. Utiliser la question **A 2 a** pour montrer que d est un diviseur de r.

3 PGCD et division euclidienne

a. Calculer le $\text{PGCD}(248 ; 32)$ et $\text{PGCD}(32 ; 24)$. Que remarque-t-on ?

b. Quel processus utilisant la division euclidienne pourrait-on imaginer pour calculer le PGCD de deux nombres sans chercher tous les diviseurs communs à ces deux nombres ?