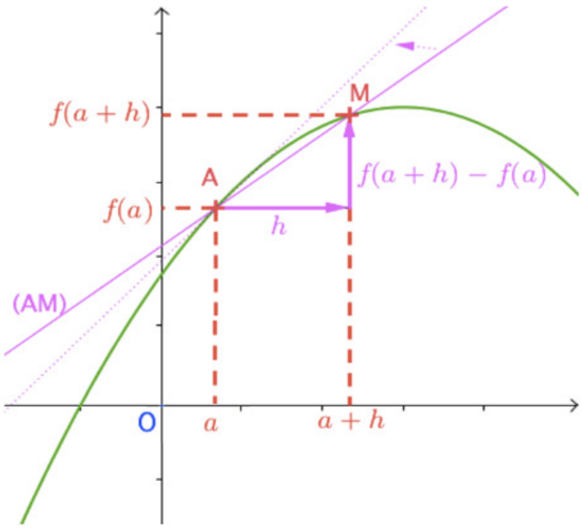
Plan du cours

I. Nombre dérivé et tangente

1. Nombre dérivée

Sur le graphique ci-contre, la pente de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
avec $h\neq 0$.
Lorsque M se rapproche de A, h tend vers 0. La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ, tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$.
ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Exemples :

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2) Etudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Tangente à une courbe

Définition

La tangente à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

Propriété **Equation d'une tangente**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
On suppose que f est dérivable en a, donc que f admet un nombre dérivé $f'(a)$ en a.
Alors l'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 3x - 7$
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse $x = 1$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

II. Dérivées des fonctions usuelles

1. Fonction dérivée

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle I, si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Exemple : Dérivée de la fonction inverse

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Opération sur les fonctions dérivées

- Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
a, $a \in \mathbb{R}$	0
ax, $a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n $n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}, $k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

- Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

- Dérivées des fonctions composées

Fonction de la forme	Fonction dérivée	Condition d'application
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	n entier, $n \geq 1$
e^u	$u'e^u$	

Exemples :

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivées de f :

1) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10$ **2)** $g(x) = (x+1)\sqrt{x}$ **3)** $h(x) = \dfrac{6x-1}{3-5x}$

4) $i(x) = e^{4x^2-5}$ **5)** $j(x) = (9x-6)^3$ **6)** $k(x) = \sqrt{2x-5}$

. . . .

III. Etude des variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si, pour tout x de I , $f'(x) > 0$, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout x de I , $f'(x) < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

1. Exemple d'une fonction polynôme

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

$\rightarrow$ **Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation.**

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Exemple d'une fonction exponentielle

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4 - 3x)e^{2x-1}$.

$\rightarrow$ **Étudier les variations de g sur $[-5; 5]$ et dresser le tableau de variation.**

....

....

....

....

....

....

....

....