conférences
éducation
évènements
la médiation scientifique
ateliers
exposés
animations
formation

Palais DÉCOUVERTE

Faites vos jeux !

6 décembre 2016 – 27 août 2017

Enseignants de cycle 4 et de lycée

Département Éducation et Formation
Palais de la découverte
Avenue Franklin Roosevelt
75008 Paris
www.palais-decouverte.fr

2016

Sommaire

I Liens avec les programmes scolaires

Mathématiques

Cycle 4 (5^e – 4^e – 3^e)
Nombres et calculs (nombres décimaux, fractions, nombres relatifs).
Organisation et gestion de données, fonctions (traitement de données, comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités, résoudre des problèmes de proportionnalité).
Grandeurs et mesures.
Algorithmique et programmation.

Classe de 2de
Statistiques et probabilités (statistique descriptive, analyse de données, échantillonnage, probabilité sur un ensemble fini).

Classes de 1re ES et 1re L
Statistiques et probabilités (statistique descriptive, analyse de données, probabilités, échantillonnage).

Classe de 1re S
Statistiques et probabilités (statistique descriptive, analyse de données, probabilités, échantillonnage).

Classes de terminale ES (spécifique) et de terminale L (spécialité)
Probabilités et statistique (conditionnement, notion de loi à densité à partir d'exemples, intervalle de fluctuation, estimation).

Classe de terminale S
Probabilités et statistique (conditionnement et indépendance, notion de loi à densité à partir d'exemples, intervalle de fluctuation, estimation).

Physique-chimie

Classe de terminale S
Dualité onde-particule

De manière générale, les démarches expérimentales se prêtent bien aux analyses statistiques dans le cadre de la formation des élèves aux méthodes d'analyse des résultats de mesure.

Sciences de la vie et de la Terre

Cycle 4 (5e – 4e – 3e)
Le vivant et son évolution (la diversité génétique des individus et l'évolution des êtres vivants).

Classe de 1re S
Expression, stabilité et variation du patrimoine génétique (variabilité génétique et mutation de l'ADN).
Variation génétique et santé (patrimoine génétique et maladie).

Classe de terminale S
Le brassage génétique et sa contribution à la diversité génétique.
De la diversification des êtres vivants à l'évolution de la biodiversité.

Enseignement moral et civique

Cycle 4 (5e – 4e – 3e)
Le jugement : penser par soi-même et avec les autres (développer les aptitudes à la réflexion critique).

Classe de 1re
Les enjeux moraux et civiques de la société de l'information.

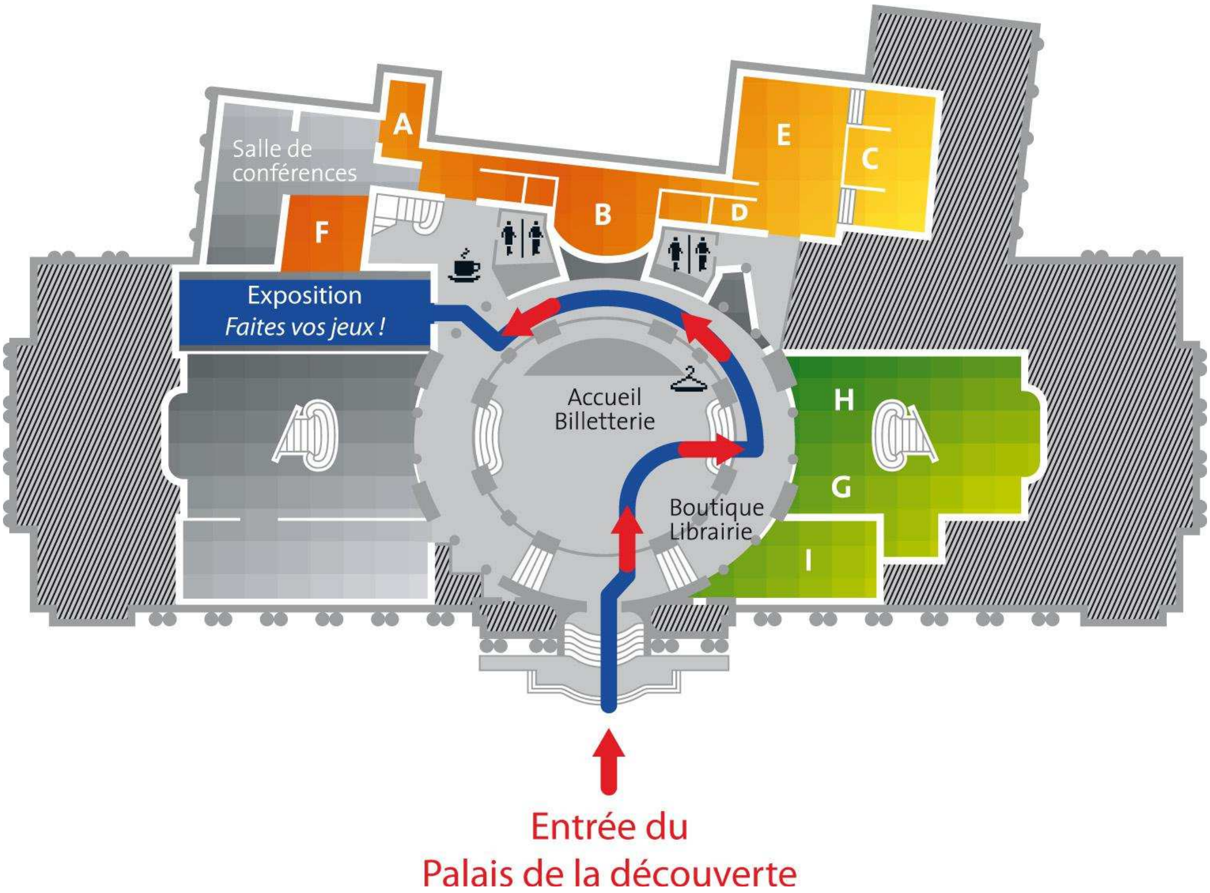
Classe de terminale
Biologie, éthique, société et environnement.

II L’exposition *Faites vos jeux !*

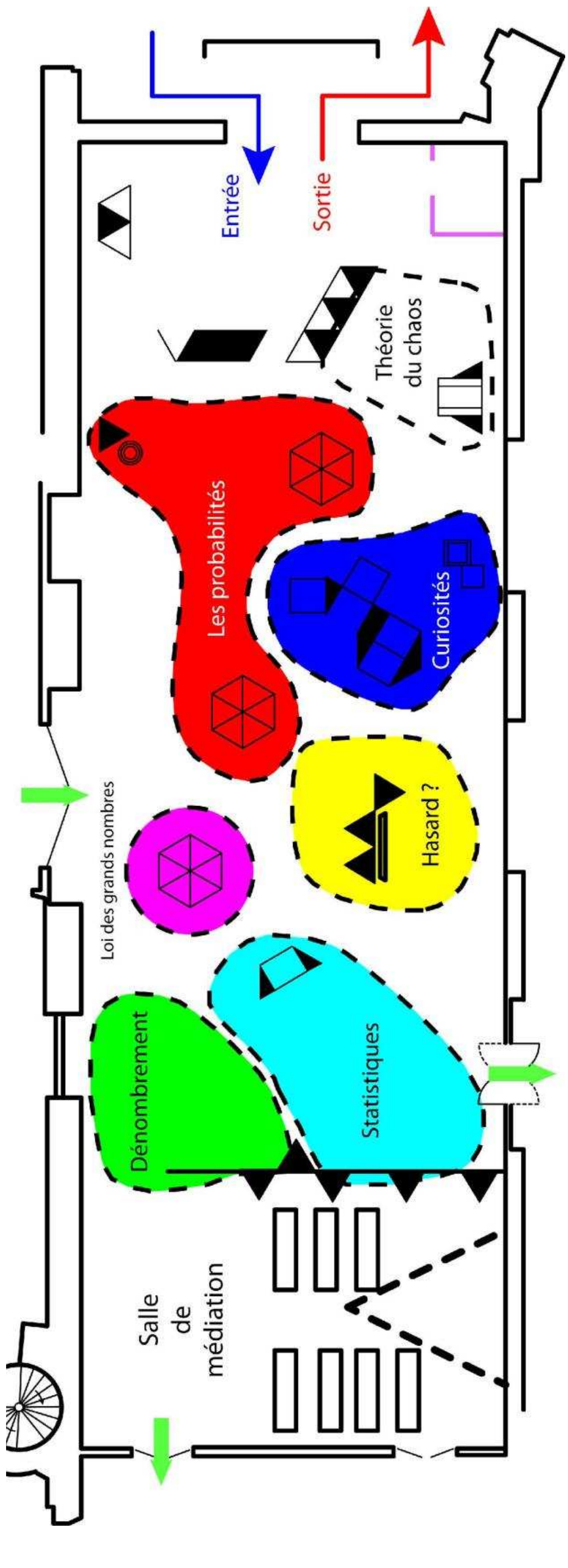
II.1 Situation et plan de l’exposition

L’exposition *Faites vos jeux ! Quand les maths s’en mêlent* est une adaptation de l’exposition itinérante *Random bits*, créée et louée par le Mathematikum, un musée des sciences allemand situé à Giessen dans le Land de Hesse. On lui a joint d’autres éléments, substitutifs ou complémentaires, destinés à en renforcer le contenu pour le public du Palais de la découverte. Provenant du Musée d’histoire des sciences de la Ville de Genève (exposition *Les jeux sont faits ! Hasard et probabilités*, réalisée en 2013) ou réalisés spécifiquement par Universcience, ces ajouts recueillent la caution du Mathematikum.

L’exposition, qui occupe une surface totale de 300 m^2, prend place au niveau 0 du Palais de la découverte, c’est-à-dire au rez-de-chaussée. En voici le plan.



Le plan présenté dans cette page est celui de l’exposition *Faites vos jeux !*



II.2 Propos et contenu de l'exposition

L'objectif de l'exposition *Faites vos jeux* est de découvrir par une approche ludique et interactive, les outils fondamentaux des mathématiciens destinés à analyser, prévoir ou mettre à profit les événements aléatoires, communément appelé *le hasard*. Pour cela, le visiteur disposera de dés à lancer, de roulettes, de codes secrets et de toutes sortes d'expériences susceptibles de modifier sa perception du quotidien et des sciences.

Hasard n'est pas toujours imprévisibilité. Les mathématiques peuvent formuler des lois qui gouvernent les phénomènes aléatoires. Elles corrigent ainsi notre intuition et nous évitent de tomber dans la superstition**…** Saviez-vous qu'il est courant qu'une classe compte deux élèves ayant la même date d'anniversaire ? Que les prévisions météo peuvent être incertaines sur quinze jours alors que l'évolution du climat sur quinze ans est prévisible ?

Comment calculer la probabilité d'un évènement à advenir ? Comment prévoir le comportement et retirer de l'information d'un grand nombre d'évènements aléatoires ? Que veut-on dire quand on dit que quelque chose arrive *au hasard* ? Cette exposition interrogera vos élèves sur leur perception du hasard et leur offrira des clés pour mieux le comprendre.

L'exposition *Faites vos jeux* est organisée autour sept îlots :

- *Probabilités ;*
- *Loi des grands nombres ;*
- *Dénombrement ;*
- *Statistiques ;*
- *Hasard ? ;*
- *Curiosités ;*
- *Théorie du chaos*.

II.2.1 Probabilités

Comment calcule-t-on une probabilité ? Dans les situations les plus simples, la réponse est assez intuitive : il suffit de calculer le nombre de cas favorables (c'est-à-dire désirés) et de le diviser par le nombre de cas possibles.

Ainsi, si vous voulez obtenir un nombre pair en lançant un dé, il existe trois cas favorables (2, 4 et 6) et six cas possibles (1, 2, 3, 4, 5, 6). La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc de trois chances sur six, c'est-à-dire une chance sur deux.

Ces cas favorables et possibles sont parfois plus compliqués à compter. Lançons deux pièces de monnaie. Il y a alors trois possibilités : les deux tombent sur le côté *pile*, les deux tombent sur le côté *face*, ou bien les deux pièces ne tombent pas sur le même côté. Pour autant, il n'y a pas une chance sur trois pour chacun des trois évènements, puisque il y a deux façons d'avoir un *pile* et un *face*.

L'une des branches des probabilités, que l'on appelle *dénombrement* ou *combinatoire*, traite de la façon de compter tous les cas possibles sans se tromper.

Voici la liste des éléments d'exposition de cette première thématique, avec une description et une analyse plus ou moins poussée.

Le second est toujours le premier. Cet élément trouve son origine dans les dés inventés par le statisticien Bradley Efron, né en 1938. Soit quatre dés A, B, C et D portant les nombres suivants sur leurs six faces :

4, 4, 4, 4, 0, 0 pour A ;
3, 3, 3, 3, 3, 3 pour B ;
6, 6, 2, 2, 2, 2 pour C ;
5, 5, 5, 1, 1, 1 pour D.

Nous allons montrer que, quel que soit le dé choisi par le premier joueur parmi ces quatre dés pour effectuer un lancer, le second joueur sera toujours en mesure d'en trouver un parmi les trois qui restent ayant plus d'une chance sur deux de le battre.

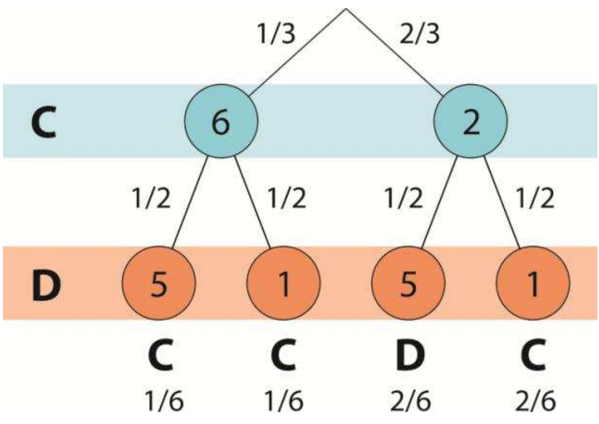
De tels dés sont appelés par les mathématiciens des *dés non transitifs* : si un premier dé a plus de chances de donner un plus grand résultat qu'un deuxième et si celui-ci a plus de chance de donner un plus grand résultat qu'un troisième, ce dernier peut tout de même avoir plus de chance de l'emporter sur le premier.

- **Calcul des probabilités**

La probabilité que A batte B, B batte C, C batte D et D batte A vaut ⅔, phrase que l'on peut traduire mathématiquement par P (A > B) = P (B > C) = P (C > D) = P (D > A) = $\frac{2}{3}$. En effet :

- B possède des faces identiques et 4 des 6 faces de A sont plus grandes. A bat donc B dans 4 cas sur 6, soit 2 cas sur 3. P (A > B) = $\frac{2}{3}$;
- De même, B bat C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ puisque seules 2 faces de C sont plus grandes. P (B > C) = $\frac{2}{3}$;
- Un diagramme en arbre permet d'obtenir P (C > D), car celle-ci peut être calculée en additionnant les probabilités conditionnelles des deux événements suivants :
  - On obtient un 6 avec C (probabilité $\frac{1}{3}$). C gagne quel que soit le résultat obtenu avec D (probabilité 1) ;
  - On obtient un 2 avec C (probabilité $\frac{2}{3}$). C ne peut gagner que si on tire 1 avec D (probabilité $\frac{1}{2}$).

  La probabilité que C batte D est donc P (C > D) = $(\frac{1}{3}\times 1)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$;



- Un calcul similaire mène à P (D > A) = $(\frac{1}{2}\times 1)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

- **Quel est le meilleur dé ?**

Les quatre dés ne possèdent pas la même probabilité de battre un dé choisi au hasard parmi les trois restants.

Comme démontré plus haut, A bat B dans $\frac{2}{3}$ des cas mais ne bat D que dans $\frac{1}{3}$ des cas. Un diagramme en arbre prouve que la probabilité que A batte C s'élève à $\frac{4}{9}$.

Ainsi, la probabilité que A batte un des trois autres dés choisi au hasard vaut $\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{9})=\frac{13}{27}\approx 0{,}481$.

De même, B bat C dans $\frac{2}{3}$ des cas mais ne bat A que dans $\frac{1}{3}$ des cas. Il bat D dans 1 cas sur 2. **La probabilité que B batte un des trois autres dés choisi au hasard vaut** $\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

C bat D dans $\frac{2}{3}$ des cas mais ne bat B que dans $\frac{1}{3}$ des cas. La probabilité que C batte A s'élève à $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$. **La probabilité que C batte un des trois autres dés choisi au hasard vaut** $\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{5}{9})=\frac{14}{27}\approx 0{,}519$.

Enfin, D bat A dans $\frac{2}{3}$ des cas mais ne bat C que dans $\frac{1}{3}$ des cas. Il bat B dans 1 cas sur 2. **La probabilité que B batte un des trois autres dés choisi au hasard vaut** $\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

Au final, le meilleur dé est C, avec une probabilité de victoire proche de 0,52. De plus, il exhibe le meilleur tirage moyen : $3+\frac{1}{3}$ (la moyenne de A est $2+\frac{2}{3}$, celles de B et D étant 3).

Le serpent de dés

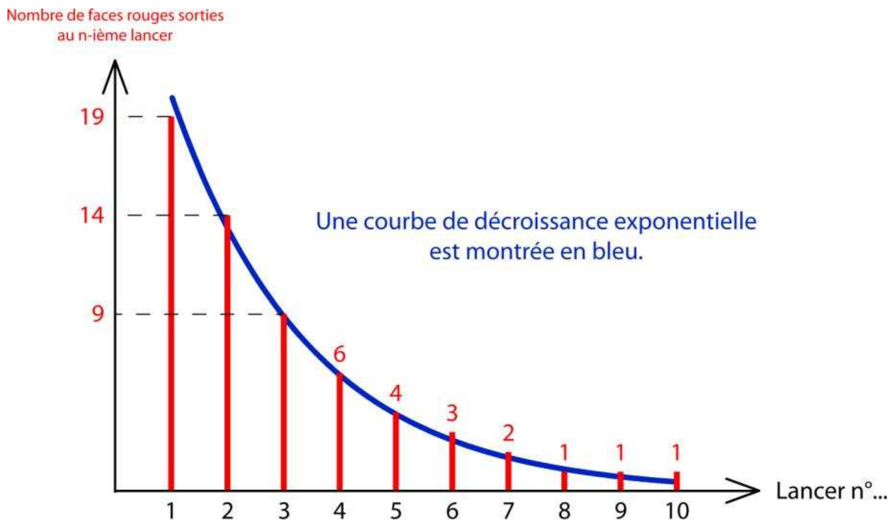
Il s'agit d'un jeu de dés surprenant qui utilise les lois de probabilités. Lancez tous les dés, puis alignez-les sous la forme d'un serpent. Lisez le nombre visible sur le premier dé. Avancez d'autant de dés. Lisez le nombre sur lequel vous êtes arrivé. Avancez à nouveau d'autant de dés. Continuez jusqu'à ce qu'il ne reste plus assez de dés pour effectuer votre déplacement. Enlevez les dés restants. Prenez maintenant le premier dé de la file (et seulement celui-là), lancez-le, remettez-le en place, et recommencez le parcours comme précédemment. Que remarquez-vous ?

Vous terminez au même endroit les deux fois ? En fait, lors du second parcours, il suffit de tomber au moins une fois sur un dé rencontré lors du premier parcours pour que la suite se déroule à l'identique. Il y a donc bien plus d'une chance sur six d'aboutir au même endroit.

Les dés rouges

On dispose de 60 dés, chacun possédant 2 faces rouges et 4 faces bleues. Après les avoir lancés en même temps, prenez tous les dés tombés sur une face rouge et rangez-les dans une première colonne. Lancez à nouveau les dés restants. Prenez tous les dés tombés sur une face rouge et rangez-les dans une deuxième colonne. Répétez l'expérience jusqu'à ce qu'il ne reste plus de dé. **Les piles de dés forment une courbe de décroissance exponentielle.** Comme l'expérience est aléatoire et que le nombre de dés n'est pas très grand, on observera souvent un écart entre la théorie et la réalité.

Le graphique ci-dessous présente les résultats d'une expérience où 10 lancers ont été nécessaires pour qu'il ne reste plus de dé. En bleu, on trouve une courbe de régression exponentielle qui permet de modéliser cette expérience très correctement.



La radioactivité se modélise de la même manière. Un noyau radioactif a une certaine probabilité de se désintégrer, toujours la même à chaque instant. La moitié des noyaux va se désintégrer dans un laps de temps donné. Il faudra à peu près le même laps de temps pour que la moitié des noyaux restants se désintègre. Et ainsi de suite : moins il y a de noyaux, et plus le nombre de noyaux qui se désintègrent à chaque étape est petit. Il s'agit d'une décroissance exponentielle, comme pour les dés.

1 sur 10 000

Un cylindre contient 10 000 petites billes. 9 999 billes sont bleues et une seule est blanche. Pensez-vous avoir une chance de la voir ? Tournez doucement le tube et observez attentivement !

Formes dans le brouillard

Placez le cadre sur le motif aléatoire de façon à ce que leurs bords soient parfaitement ajustés. En cet instant, une forme apparaît. Faites pivoter le cadre d'un demi-tour et vous découvrirez une autre forme. La *cryptographie visuelle* a été inventée en 1994 par les mathématiciens israéliens Moni Naor et Adi Shamir et a mené à la création des CAPTCHA.

Message secret

Il s'agit de tourner un disque percé de trous jusqu'à distinguer un texte intelligible. Ce système de grille est une variante de la *grille de Sandorf* décrite dans le roman *Mathias Sandorf* de Jules Verne. Cette expérience, comme sa voisine *Formes dans le brouillard*, vous fait découvrir l'une des utilités pratiques du hasard : introduire la confusion ! Il intervient donc dans des méthodes de chiffrage classiques ou actuelles.

La roulette

La roulette des casinos, dans sa version française et anglaise, contient 37 cases numérotées de 0 à 36 alternativement rouges et noires, à l'exception du zéro, vert. Dans sa version américaine – celle présentée ici – elle contient une case de plus, le double zéro, en vert également.

Le croupier lance une boule en sens inverse de la rotation de la roulette. Alors qu'il y a autant de chance de faire *noir* ou *rouge*, *pair* et *impair* et *passe* et *manque*, on perd l'équiprobabilité lors des paris doubles ou triples. Rappel : *manque* signifie qu'on mise sur les numéros de 1 à 18 et *passe*, sur les numéros de 19 à 36.

Collectionneur de nombres

Combien de fois devez-vous lancer un dé à 6 faces pour que sortent tous les nombres de 1 à 6 ? En moyenne, une quinzaine de fois. Les mathématiciens appellent cette situation *le problème du collectionneur de vignettes.*

En effet, soit N_6 le nombre de fois où nous devrons lancer le dé à six faces pour que sortent tous les nombres de 1 à 6. On peut l'écrire sous la forme $N_6 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$ où

n_i représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir i nombres différents lorsqu'on en a déjà obtenu $i-1$. À partir du moment où $i-1$ nombres différents ont été tirés, chaque lancer a une probabilité $\frac{6-(i-1)}{6}$ de fournir un nombre encore jamais sorti. La variable n_i suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{6-(i-1)}{6}$.

L'espérance de cette variable n_i est $E[n_i]=\frac{6}{6-(i-1)}$. La linéarité de l'espérance implique que $E[N_6]=E[n_1]+E[n_2]+E[n_3]+E[n_4]+E[n_5]+E[n_6]=6\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i}=14{,}7$. En moyenne, il faudra donc une quinzaine de lancers pour obtenir tous les nombres d'un dé à six faces.

Pour un dé à huit faces, il faudra en moyenne $E[N_8]=8\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{i}\approx 22$ lancers.

Pour un dé à 10 faces, $E[N_{10}]=10\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i}\approx 29$ lancers.

Pour un dé à 20 faces, $E[N_{20}]=20\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{i}\approx 72$ lancers.

Pour un dé à 100 faces… $E[N_{100}]=100\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i}\approx 519$ lancers.

De manière générale, pour un dé à *k* faces, il faudra, en moyenne, $E[N_k]=k\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$ lancers pour obtenir les *k* faces. On montre d'ailleurs que lorsque *k* est grand, $E[N_k]\approx k\ln(k)+\gamma k+\frac{1}{2}$ où γ est la constante d'Euler valant approximativement 0,5772156649.

k	6	8	10	20	100
$E[N_k]$	14,70	21,74	29,29	71,95	518,74
$k\ln(k)+\gamma k+\frac{1}{2}$	14,71	21,75	29,30	71,96	518,74

Comparaison entre $E[N_k]$ et son approximation $k\ln(k)+\gamma k+\frac{1}{2}$.

Les dés pipés

Les visiteurs jouent ici avec deux paires de dés comprenant chacune un dé pipé. En observant si certains nombres sortent beaucoup ou, au contraire, rarement, ils doivent repérer le dé pipé de chaque couleur.

Le Minipoly

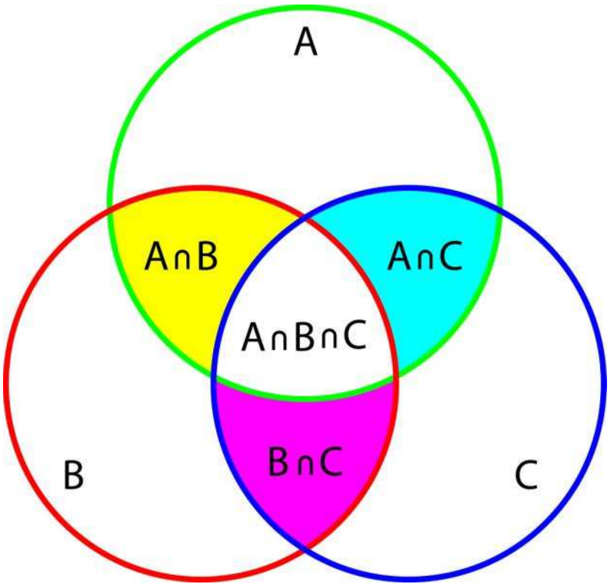
Lancez le dé et avancez la figure du nombre indiqué. Comptez à l'aide de bouliers le nombre de fois où vous tombez sur les Champs-Élysées et le nombre de fois où vous vous retrouvez en prison. Sur quelle case tombez-vous le plus souvent ? Comme au vrai jeu de Monopoly, on a plus de chances de se rendre sur certaines cases que sur d'autres. Cela vient essentiellement de la case *allez en prison*.

Pas les mêmes couleurs !

On distribue, en agitant une boîte, sept billes de couleurs différentes sur sept surfaces colorées différentes. Parviendrez-vous à faire en sorte qu'aucune bille ne soit sur sa propre couleur ? Les mathématiciens appellent ce phénomène *le problème des rencontres*. Il a été formulé par le mathématicien Pierre Rémond de Montmort (1678 – 1719) dans son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* en 1708.

Il existe plusieurs méthodes pour quantifier la probabilité qu'aucune bille ne soit sur sa propre couleur. Utilisons celle fondée sur le principe d'inclusion-exclusion. Ce principe permet de calculer le nombre d'éléments (ou *cardinal*, noté « | | ») d'une réunion (notée « ∪ ») finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Ainsi, si A et B sont deux ensembles finis, on a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. De même, si A, B et C sont trois ensembles finis, le graphique ci-dessous, appelé *diagramme de Venn*, montre clairement que :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



La formule est généralisable selon l'expression :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

On peut la réécrire sous la forme $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|\right)$.

En des termes moins abscons, pour compter le nombre d'éléments d'une réunion finie d'ensembles finis, faites d'abord la somme des cardinaux des ensembles pris individuellement, puis retirez-en le nombre d'éléments qui apparaissent dans plus d'un ensemble, puis ajoutez le nombre d'éléments qui apparaissent dans plus de deux ensembles, puis soustrayez le nombre d'éléments qui apparaissent dans plus de trois ensembles et ainsi de suite. Le processus s'arrête de lui-même au bout d'un moment puisqu'il n'existe pas d'élément appartenant à plus d'ensembles… qu'il n'y a d'ensembles dans la réunion.

Dans sa version probabiliste, le principe d'inclusion-exclusion s'écrit :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right)$$

Revenons au calcul de la probabilité pour qu'aucune bille ne soit sur sa propre couleur. Soit A_i l'événement « la i-ème bille est sur sa propre couleur ». Avec cette définition, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est l'événement « l'une des billes est sur sa propre couleur », c'est-à-dire l'événement contraire de celui qui nous intéresse. Avec $P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$, il vient :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\frac{(n-k)!}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

La probabilité pour qu'aucune bille ne soit sur sa propre couleur est donc $1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ et vaut $1-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{k}}{k!}$. Cette série vaut $\dfrac{1}{3}$ lorsque n=3 et 0,36786 lorsque n=7 (notre cas). Elle tend rapidement vers $\dfrac{1}{e}\approx 0{,}36788$.

La probabilité pour qu'aucune bille ne soit sur sa couleur s'élève à environ 0,37. Il y aura donc plus souvent au moins une coïncidence.

Les dés de Sicherman

Il s'agit d'une paire de dés affichant des nombres entiers différents de ceux de dés classiques, mais possédant malgré tout une loi de probabilité identique. Les faces des dés de Sicherman sont numérotées 1, 2, 2, 3, 3, 4 pour l'un et 1, 3, 4, 5, 6, 8 pour l'autre. Lors d'un lancer, comme pour un jeu de dés ordinaires, on obtient un résultat compris entre 2 et 12 en additionnant les nombres obtenus sur chacun des dés. Établissons la liste de tous les résultats obtenables par deux dés classiques et par les dés de Sicherman. Pour des raisons de clarté, le premier dé de Sicherman est noté en couleur (1 – 2 – 2 – 3 – 3 – 4) et le second en noir (1 – 3 – 4 – 5 – 6 – 8).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dés classiques	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
Dés de Sicherman	1+1	2+1 2+1	3+1 3+1 1+3	1+4 2+3 2+3 4+1	1+5 2+4 2+4 3+3 3+3	1+6 2+5 2+5 3+4 3+4 4+3	2+6 2+6 3+5 3+5 4+4	1+8 3+6 3+6 4+5	2+8 2+8 4+6	3+8 3+8	4+8
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La probabilité d'obtenir un résultat particulier avec les dés de Sicherman est la même qu'avec des dés ordinaires… et ce sont les seuls dés avec des nombres strictement positifs possédant cette propriété.

Bleu, jaune, vert

Soit deux dés avec trois faces bleues et trois faces jaunes chacun. Le visiteur tient les comptes : jaune si deux faces jaunes sortent, bleu si deux faces bleues sortent et vert si l'on tire une face jaune et une face bleue. Les trois couleurs vont-elles apparaître aussi fréquemment les unes que les autres ? Il est facile de montrer que le compteur vert avance en moyenne deux fois plus vite que les deux autres.

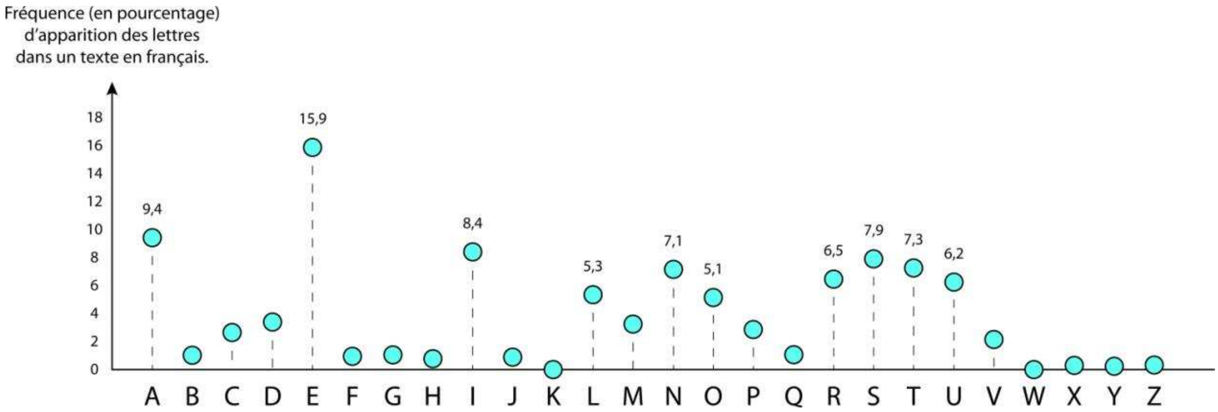
II.2.2 Loi des grands nombres

La loi des grands nombres est fondamentale dans l'étude du hasard. Elle affirme que lorsqu'on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un évènement se rapproche sans cesse de sa probabilité théorique d'advenir. Par exemple, plus on joue à *pile ou face*, plus la proportion de *piles* (ou de *faces*) se rapproche de 50 %. En conséquence, si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire sur laquelle on connaît les probabilités, on peut prévoir de façon fiable ce qui va se produire.

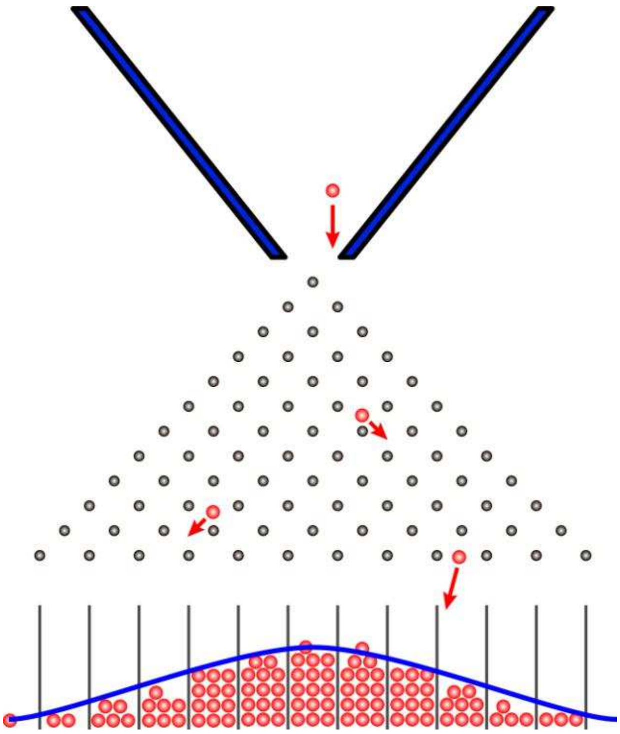
Un casino peut donc, en connaissant uniquement le nombre de ses clients, estimer assez précisément son chiffre d'affaire. La démarche des assureurs est inverse : ils fixent leurs tarifs à partir du calcul des probabilités d'accident.

C'est ainsi que la loi des grands nombres permet de passer de l'idée de probabilité à l'idée de proportion.

Cassez le code. Un texte codé rendu incompréhensible apparaît sur l'écran. Comment deviner par quelle lettre remplacer telle ou telle lettre codée ? Par exemple, en se demandant quelles lettres reviennent le plus souvent en français…
Une *analyse de fréquence* permet de décrypter un message, pourvu que chaque lettre soit toujours codée de la même façon. Elle utilise les connaissances statistiques que l'on a sur la langue utilisée : fréquence de chaque lettre, de chaque groupe de deux lettres (digramme) ou de trois lettres, mots les plus fréquents, etc.



La planche de Galton. Il s'agit sans doute de l'expérience la plus connue sur les probabilités. La planche de Galton a été inventée, comme son nom l'indique, par le statisticien Sir Francis Galton (1822 – 1911). Des billes sont lâchées depuis la partie supérieure d'une planche et se frayent aléatoirement un chemin à travers des rangées de clous.

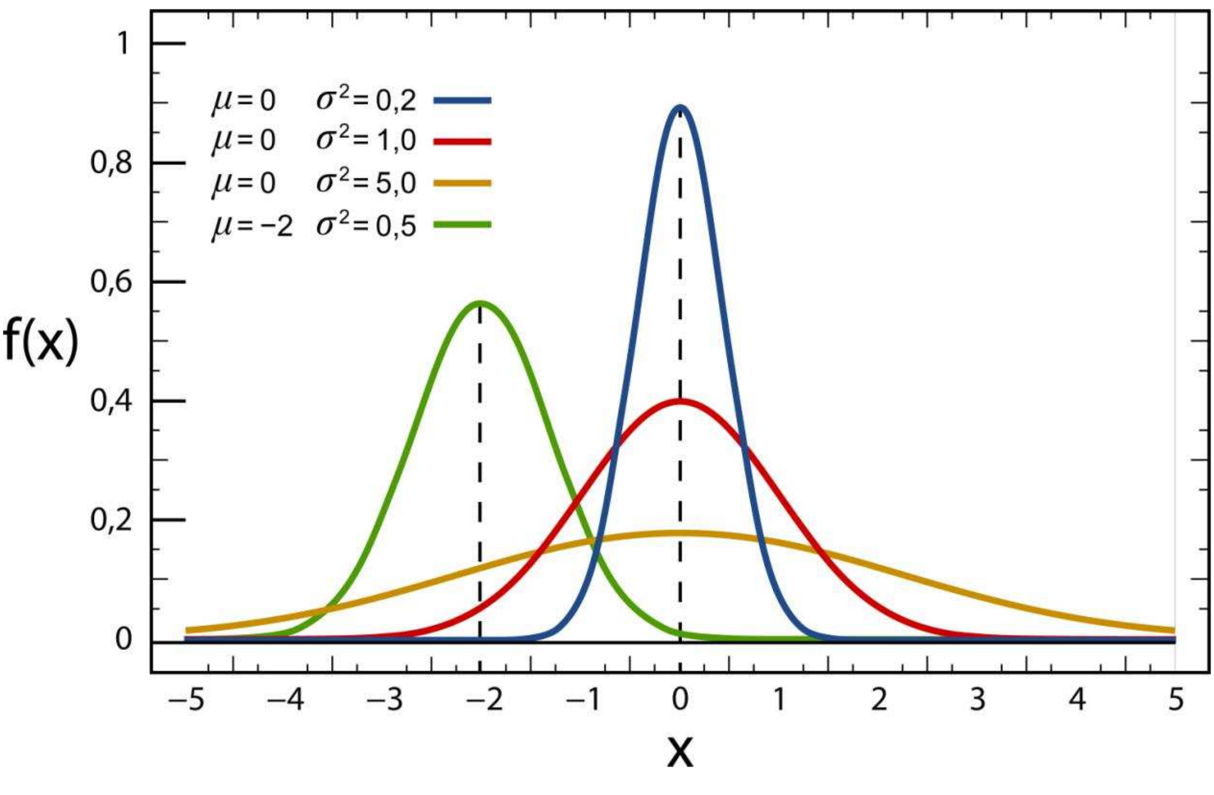


Les billes passent aléatoirement d'un côté ou de l'autre des clous. On mesure à l'arrivée la quantité de billes en fonction de leur position à la sortie de la planche. Cette position résulte de l'addition de toutes les déviations qu'elles ont subies en tombant sur les clous : chacune de ces déviations est une expérience aléatoire indépendante des autres.

Toutes les trajectoires possibles étant équiprobables, **la probabilité que la bille finisse sa course dans une colonne donnée est proportionnelle au nombre de chemins qui mènent du haut de la planche à la colonne visée.** On montre que ce nombre de chemins est un coefficient binomial, donné par le triangle de Pascal (cf. chapitre suivant dédié au dénombrement).

S'il est impossible de savoir où une bille finira sa trajectoire, il est possible d'anticiper la forme générale du tas de billes obtenu en bas de la planche. En effet, la distribution de probabilité d'arrivée dans les colonnes semble dessiner une courbe en cloche. Plus le nombre de rangées de clous est grand, plus la distribution d'arrivée se rapproche de cette courbe en cloche dite *courbe de Gauss*. La distribution de probabilité qui correspond à cette courbe limite s'appelle la *loi normale*.

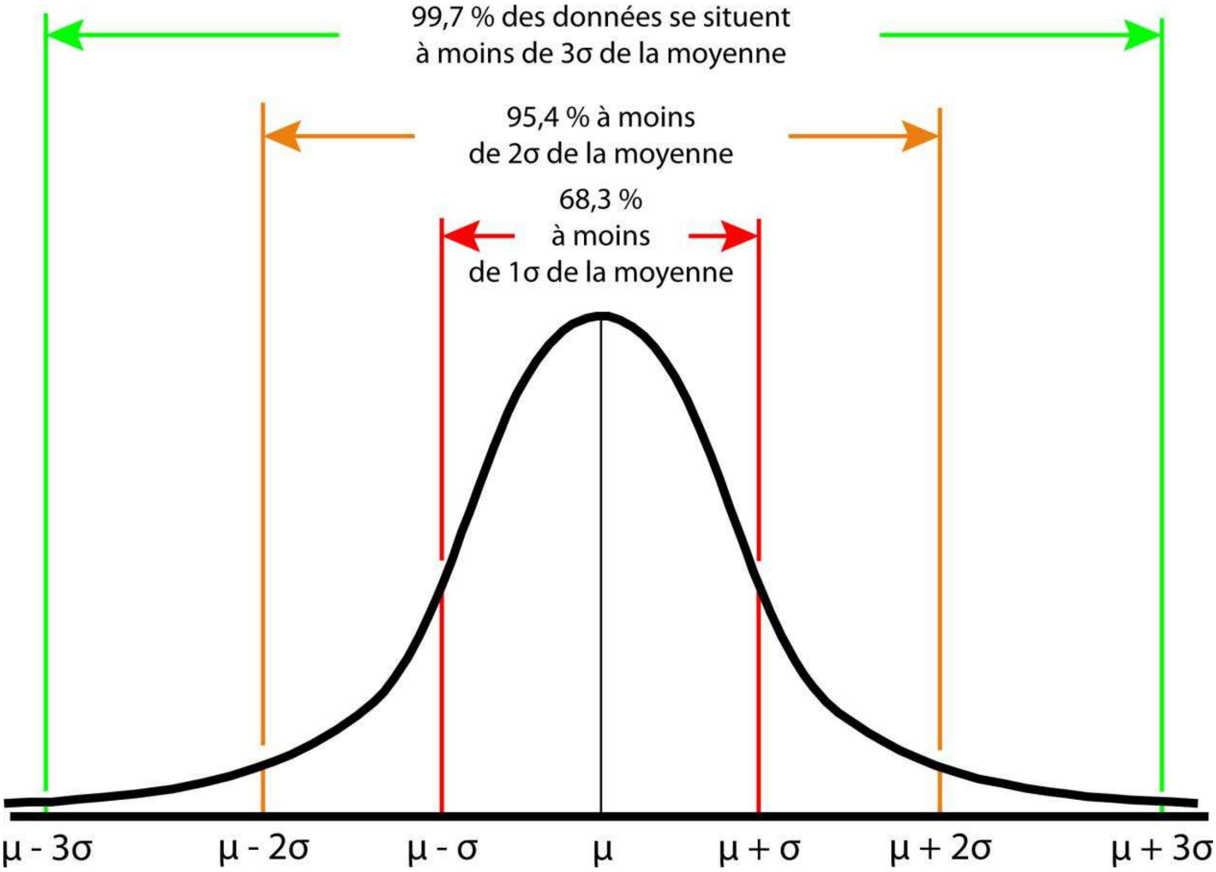
De manière générale, la densité de probabilité de la loi normale est donnée par $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ où μ est son espérance (la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire) et σ son écart-type (une mesure de la dispersion des résultats).



Le graphique de la page précédente représente les densités de probabilité que l'on obtient en faisant varier l'espérance et l'écart-type. Les trois courbes en bleu, rouge et jaune (μ = 0) sont centrées sur 0. Plus l'écart-type est petit, plus elles sont « piquées ». La courbe verte est centrée sur -2.

Lorsque des valeurs suivent la loi normale, on montre que :

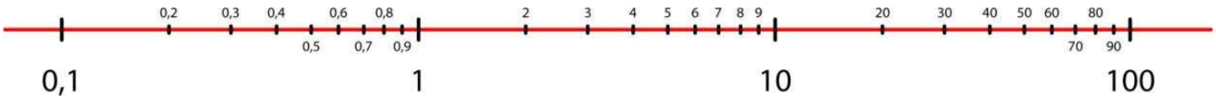
- 68,27 % d'entre elles sont dans l'intervalle $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$;
- 95,45 % d'entre elles sont dans l'intervalle $[\mu-2\sigma; \mu+2\sigma]$;
- 99,73 % d'entre elles sont dans l'intervalle $[\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]$.



Pour une distribution normale, presque toutes les valeurs se situent donc dans un intervalle centré sur la moyenne et dont les bornes se situent à trois écarts-types de part et d'autre. On l'appelle cela la **règle des trois sigmas**.

Nombres à la une. La lecture d'une page de journal révèle que le premier chiffre des nombres s'y trouvant est plus souvent petit que grand. Ce phénomène, connu sous le nom de *loi de Benford*, est loin d'être intuitif puisque l'on s'attendrait à voir les chiffres 1 à 9 apparaître à peu près aussi fréquemment sur le premier chiffre d'un nombre. Or, les observations montrent que le premier chiffre non nul le plus fréquent est 1, suivi de 2, puis 3, etc. Cette loi s'applique à une grande variété de données comme celles relatives aux factures d'électricité, aux taux de mortalité, à la longueur des cours d'eau, à la distribution en taille des cratères sur la Lune ou aux constantes de la physique.
Plus généralement, elle s'applique très bien aux processus décrits par une loi de puissance et couvrant plusieurs ordres de grandeur. Rappelons qu'une loi de puissance est une relation entre deux quantités *x* et *y* pouvant s'écrire sous la forme $y = ax^k$ où *a* et *k* sont des constantes. Les processus décrits par une loi de puissance sont très communs.

Prenons le logarithme de la relation $y = ax^k$. On obtient $\log y = \log ax^k = \log a + k \log x$. En posant $X = \log x$ et $Y = \log y$, on trouve l'équation d'une fonction affine $Y = kX + \log a$. Sur un graphique aux échelles logarithmiques, le graphe d'une loi de puissance est donc une droite.

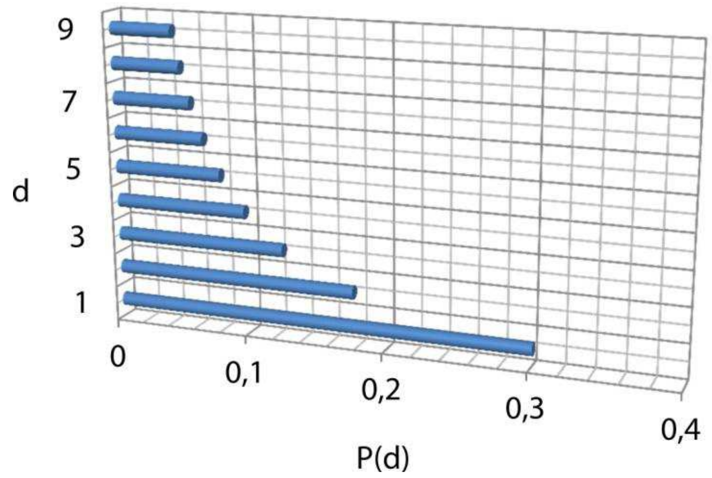


Le graphique ci-dessus présente une échelle logarithmique. Lorsque vous tirez un nombre au hasard entre 0,1 et 1 sur cette échelle, il y a environ 30 % de chance que vous tombiez dans l'intervalle [0,1 ; 0,2]. Le premier chiffre non nul de votre nombre commencera alors par 1. Par contre, la probabilité de tomber sur l'intervalle [0,9 ; 1] est beaucoup plus faible, proche de 5 %. Le premier chiffre non nul de votre nombre commencera alors par 9. Le même phénomène se manifeste lorsque vous tirerez un nombre au hasard entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc. Il s'agit d'une propriété générale des lois de puissance.

Pour être plus précis, on montre que, dans un ensemble de données suivant la loi de Benford, la probabilité pour qu'une donnée ait *d* comme premier chiffre non nul est $P(d) = \log_{10}(1 + \frac{1}{d})$.

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(d)	0,301	0,176	0,125	0,0969	0,0792	0,0669	0,0580	0,0512	0,0458

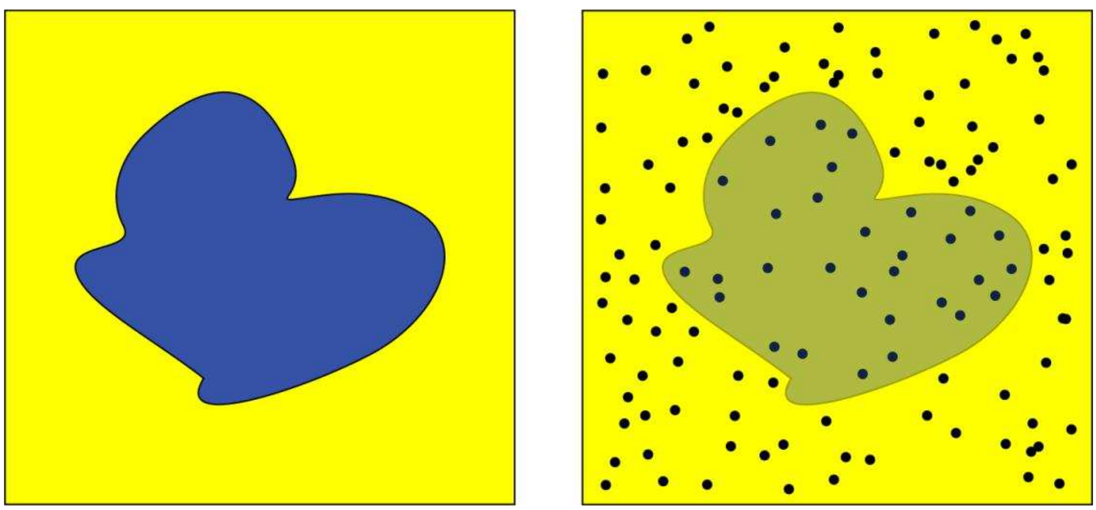
Probabilité *P(d)* que le premier chiffre d'un nombre d'un ensemble de données suivant la loi de Benford soit *d*.



La loi de Benford a déjà été mise en pratique pour la détection de fraudes fiscales, comptables, électorales ou scientifiques.

La méthode de Monte-Carlo. La méthode de Monte-Carlo repose sur un échantillonnage aléatoire répété en vue d'obtenir un résultat approché lorsqu'il est difficile ou impossible d'utiliser d'autres méthodes. On l'emploie couramment pour calculer des surfaces et des volumes ou pour simuler des phénomènes complexes comme la propagation de particules dans un milieu diffusif – photons dans une atmosphère planétaire ou stellaire, neutrons dans un modérateur au cœur d'un réacteur nucléaire, etc. Dans ce cas, elle consiste à reproduire numériquement, le plus fidèlement possible, le processus physique auquel les particules sont soumises. Comme son équivalent réel, la simulation doit faire intervenir le hasard et les résultats sont présentés sous la forme d'une moyenne.

L'exemple classique souvent présenté pour illustrer la méthode de Monte-Carlo est celui de la détermination de la superficie d'un lac.



Considérez le carré jaune de la figure précédente, de superficie connue. En son cœur se trouve un lac dont on aimerait connaître la superficie (figure de gauche). Pour cela, on demande à une armée de tirer *N* coups de canon sur le carré jaune, de manière parfaitement aléatoire. Une fois l'expérience terminée, on compte le nombre de boulets *X* ayant atterri sur la terre ferme (figure de droite). Cela signifie que *N* – *X* boulets ont sombré dans le lac. On peut alors faire l'hypothèse que le rapport entre la superficie du lac et la superficie du carré jaune est proche du rapport entre les *N* – *X* boulets ayant sombré dans le lac et les *N* boulets tirés.

$$\frac{S_{lac}}{S_{carré}} = \frac{N-X}{N} \text{ soit } S_{lac} = \frac{N-X}{N} S_{carré}.$$

La qualité de l'estimation s'améliore en augmentant le nombre de tirs.
Dans l'exposition, le carré jaune est une boîte au capot transparent dont la surface est connue. Le lac est une forme tarabiscotée colorée et les boulets de canon sont matérialisés par 100 jetons. Le visiteur agite la boîte pour répartir les jetons le plus aléatoirement possible. Il suffit ensuite de compter les jetons présents à l'intérieur de la forme pour, à l'aide d'une simple règle de trois, estimer la surface de la forme.

Deux planches de Galton à une rangée. L'une est truquée, l'autre pas – les billes ont autant de chances d'aller à droite qu'à gauche des clous. Le visiteur peut-il déterminer celle qui est truquée en faisant descendre un grand nombre de billes dans les deux planches ?

II.2.3 Dénombrement

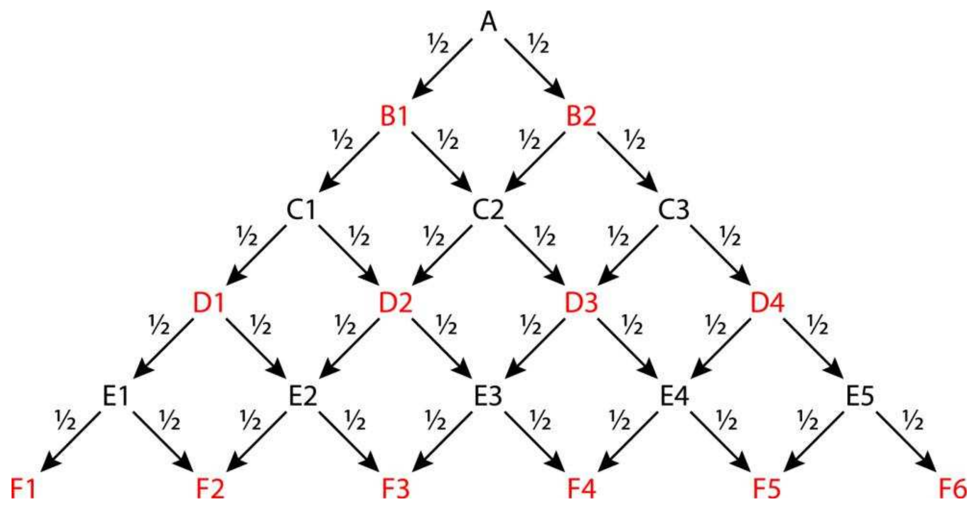
Cent mille milliards de poèmes. Il s'agit d'un livre de poésie combinatoire de Raymond Queneau (1903 – 1976) publié en 1961. Le lecteur peut combiner des vers de façon à composer des poèmes respectant la forme du sonnet : deux quatrains suivis de deux tercets, soit 14 vers. Le livre est composé de 10 feuilles, chacune séparée en 14 bandes horizontales. Chaque bande porte un vers. En tournant les bandes horizontales comme des pages, le lecteur peut choisir pour chaque vers une des dix versions proposées par Queneau.

10 choix pour la 1re bande, 10 choix pour la 2^{e}, … et 10 choix pour la 14^{e} et dernière bandes : il y a donc 10 x 10 x … x 10 = 10^{14} poèmes potentiels.

À raison d'un poème par minute, il faudrait près de 200 millions d'années pour les lire tous sans s'arrêter !

Musique à jouer. Vous pouvez composer ici une œuvre musicale unique. Chacune des 16 mesures de ce morceau est tirée au sort parmi une liste de 176 mesures selon un processus bien défini. Vous pouvez soit lancer 16 fois les deux dés (11 tirages différents, de 2 à 12) et rentrer les nombres obtenus dans l'ordinateur, soit laisser celui-ci choisir lui-même au hasard. Le nombre de morceaux possibles est de 759 499 667 166 482. Ce nombre est tellement gigantesque que vous êtes très probablement la première personne à entendre cette œuvre. Ce type de jeu était assez populaire dans l'Europe occidentale du XVIII^{e} siècle.
Note importante : pour ce morceau de 16 mesures, nous avons 11 premières mesures possibles. Puis 11 deuxièmes mesures possibles, et ainsi de suite, chaque choix étant indépendant des choix précédents. Cela devrait donc donner 11^{16} (soit 45 949 729 863 572 161) menuets possibles, si l'auteur – en l'occurrence Mozart – n'y avait introduit de petites variantes (les 8^{e} et 16^{e} mesures sont fixées) !

Le triangle de Pascal. Il permet de résoudre simplement des problèmes de dénombrement dans les jeux de hasard. Grâce à lui, le nombre de chemins dans un réseau binaire comme la planche de Galton est facilement accessible. Voyons comment. Le graphique suivant montre les six premiers étages d'une planche de Galton.



- <u>Étage 0 (A)</u> Une bille arrive en A.
- <u>Étage 1 (B)</u> Elle peut aller en B1 ou en B2 avec la même probabilité, à savoir $\frac{1}{2}$.
- <u>Étage 2 (C)</u> Pour gagner C1 (respectivement C3), il n'existe qu'un seul chemin possible : passer par B1 (respectivement B2). La probabilité pour une bille d'atteindre C1 ou C3 s'élève donc à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
  Par contre, deux chemins sont possibles pour gagner C2 : bifurquer à droite en venant de B1 ou bifurquer à gauche en venant de B2. Il faut sommer les probabilités : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

- <u>Étage 3 (D)</u> Pour aller en D1 (respectivement en D4), il n'existe qu'un seul chemin possible : passer par C1 (respectivement C3). La probabilité qu'une bille atteigne D1 ou D4 s'élève donc à $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

  Pour gagner D2, une bille peut venir de C1 (atteint avec une probabilité de $\frac{1}{4}$) ou de C2 (atteint avec une probabilité de $\frac{1}{2}$). La probabilité de gagner D2 est donc $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$. Un raisonnement tout à fait similaire permet d'affirmer que la probabilité d'atteindre D3 vaut également $\frac{3}{8}$.

- <u>Étage 4 (E)</u> Atteindre E1 et E5 se fait avec une probabilité égale à $\frac{1}{16}$.

  Atteindre E2 et E4 se fait avec une probabilité égale à $\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

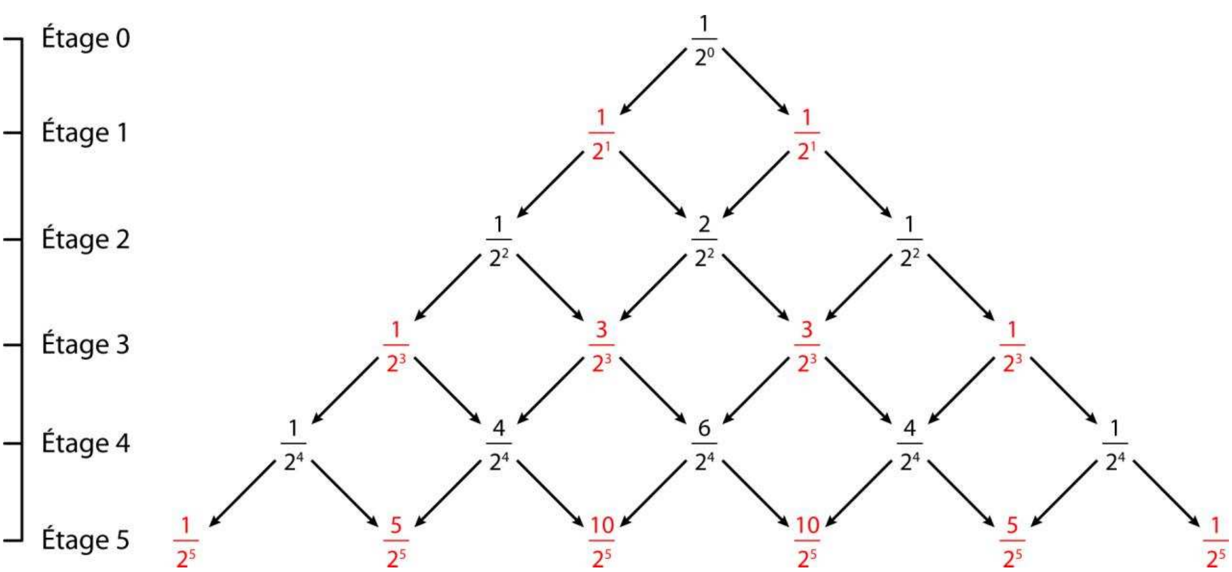
  Atteindre E3 se fait avec une probabilité égale à $\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

- <u>Étage 5 (F)</u> Atteindre F1 et F6 se fait avec une probabilité égale à $\frac{1}{32}$.

  Atteindre F2 et F5 se fait avec une probabilité égale à $\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$.

  Atteindre F3 et F4 se fait avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$.

En remarquant que 2, 4, 8, 16 et 32 sont des puissances successives de 2, on peut dessiner la planche de Galton sous la forme suivante. Le nombre caractérise la probabilité qu'une bille passe par ce lieu.



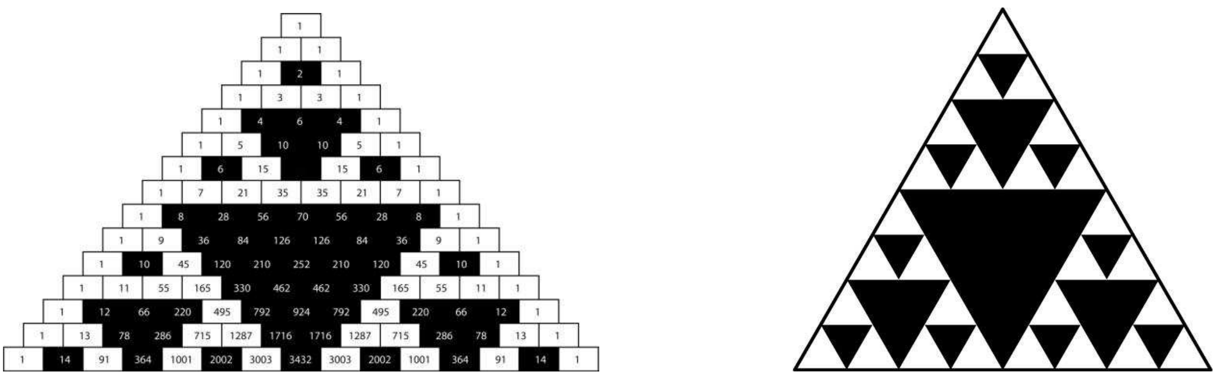
Dans une ligne donnée, les numérateurs des probabilités représentent le nombre de chemins différents permettant d'accéder aux différents points de la ligne en question, sans faire marche arrière. Ce sont aussi les coefficients binomiaux qui apparaissent lorsque l'on développe la puissance *n*-ième de la quantité (*x + y*) et donc les coefficients du triangle de Pascal.

$(x + y)^0 = \mathbf{1}$
$(x + y)^1 = \mathbf{1}x + \mathbf{1}y$
$(x + y)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xy + \mathbf{1}y^2$
$(x + y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3$
$(x + y)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3y + \mathbf{6}x^2y^2 + \mathbf{4}xy^3 + \mathbf{1}y^4$
$(x + y)^5 = \mathbf{1}x^5 + \mathbf{5}x^4y + \mathbf{10}x^3y^2 + \mathbf{10}x^2y^3 + \mathbf{5}xy^4 + \mathbf{1}y^5$
…

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Chaque nombre du triangle de Pascal est la somme des deux nombres qui se trouvent immédiatement au-dessus de lui. Ce triangle possède une curiosité : les nombres pairs y sont disposés selon une amorce de triangle de Sierpiński, une fractale bien connue.



Notez la ressemblance entre le triangle de Pascal à gauche et le triangle de Sierpiński à droite.

II.2.4 Statistiques

Les statistiques sont un outil pratique d'étude d'un grand nombre de données, pour en ressortir de l'information. L'exemple le plus classique est celui du sondage : en choisissant judicieusement un échantillon représentatif d'une population, on peut trouver des informations fiables sur celle-ci.

Les statistiques sont également prédictives, à la manière de ce que permet la loi des grands nombres. Ainsi, elles permettent de repérer des erreurs, des fraudes, des problèmes de santé, quand un résultat s'éloigne trop du résultat attendu, par exemple.

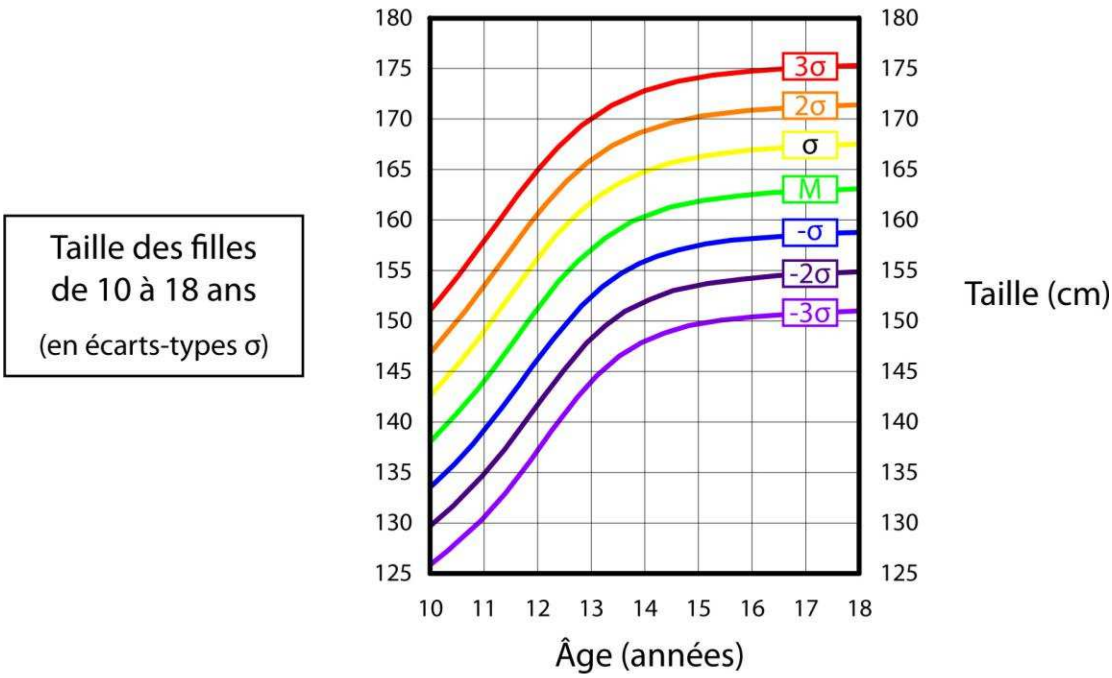
Les bonbons. Le visiteur doit compter le nombre de bonbons en photo sur une très grande affiche. Seule solution raisonnable : n'en compter qu'une petite partie, en s'aidant d'un cadre contenant une surface 200 fois plus petite que l'affiche, pour en déduire le nombre total de bonbon. Cette méthode de sondage est utilisée pour estimer le nombre de personnes lors de grands rassemblements ou le nombre d'animaux dans de grands espaces. Elle fonctionne bien ici, car les bonbons remplissent l'image uniformément. C'est plus compliqué pour des manifestants, des animaux ou des étoiles, qui peuvent former des paquets et laisser des vides : comment choisir alors l'échantillon à compter ?

Combien de poissons ? Le bocal présenté dans cet élément contient des poissons dont 400 sont marqués en vert. Comment peut-on estimer le nombre total de poissons contenus dans le bocal en en repêchant 25 ?
Il est intéressant de remarquer qu'un problème similaire a été traité par le grand mathématicien et physicien Henri Poincaré (1854 – 1912) dans son ouvrage *Calcul des probabilités* de 1896. Suivons-le dans le texte : « Représentons par N le *nombre total des petites planètes* ; parmi elles, un certain nombre M sont connues. Dans une année, on en observe *n* parmi lesquelles *m* planètes connues. On demande la valeur probable de N ». Ce que Poincaré appelle des *petites planètes*, nous les nommons aujourd'hui *astéroïdes*. Moins de 500 astéroïdes étaient connus à l'époque et plus de 700 000 le sont en 2016 !
Intuitivement, on se dit que le rapport $\frac{M}{N}$ ne doit pas être très différent du rapport $\frac{m}{n}$.
Poincaré démontre effectivement que *N* est très voisin de la quantité $\frac{Mn}{m}$.
Dans le cas qui nous intéresse ici, *N* est le nombre total de poissons dans le bocal, *M* est le nombre de poissons marqués en vert (soit 400), *n* est le nombre de poissons que l'on pêche (soit 25) et *m*, celui du nombre de poissons marqués parmi les *n* = 25 que l'on pêche. On aboutit donc à $N \approx \frac{10000}{m}$.Ce résultat a le mérite de la cohérence. Imaginez que les 25 poissons que vous repêchez soient tous marqués. Soit vous bénéficiez d'une chance insolente, soit, et c'est beaucoup plus probable, le nombre de poissons dans le bocal est très proche de 400. Au contraire, si vous ne pêchez qu'un seul poisson marqué, ou aucun, c'est que le nombre de poissons dans le bocal est vraisemblablement… très grand. On n'obtient qu'une estimation. Si vous recommencez l'expérience, vous verrez que le résultat varie. D'où la fameuse marge d'erreur que tout sondage honnête se doit d'indiquer.

Un bon échantillon. Cet élément montre l'importance de bien choisir un échantillon aléatoire lorsque l'on souhaite réaliser un sondage.

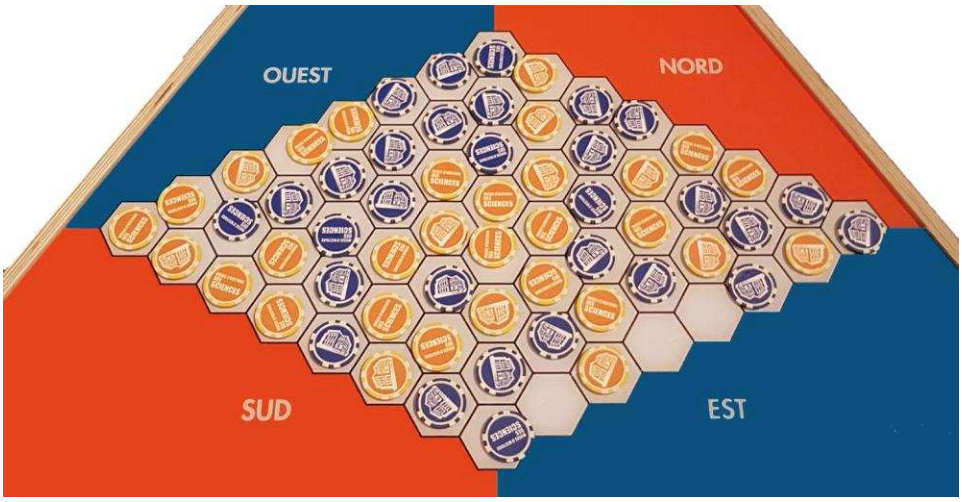
Tous sur la courbe ! Vous êtes un adulte ? Collez une gommette à la suite des autres sur la ligne correspondant à votre taille. Vous avez moins de 18 ans ? Placez-la dans la colonne correspondant à votre âge. Observez le résultat obtenu depuis l'ouverture de l'exposition.

Les résultats des moins de 18 ans devraient former une courbe de croissance semblable à celle que l'on observe sur les carnets de santé. Les adultes, ayant achevé leur croissance, donnent naissance à une courbe en cloche : beaucoup autour de la taille moyenne, peu qui s'en éloignent franchement ; la loterie génétique explique largement cette observation.



Le défi des abeilles. Remplissez au hasard les alvéoles du plateau présenté dans cet élément de jetons orange et bleus. Existe-t-il un chemin bleu traversant le plateau d'est en ouest ? Quelle est la probabilité qu'il apparaisse ?

Vous pouvez le vérifier : l'existence d'un tel chemin interdit celle d'un chemin orange du nord au sud. Et son absence, à l'inverse, impose un chemin orange. Or le plateau est symétrique pour les deux couleurs. La réponse est donc simple : avec autant de jetons des deux couleurs, il y a exactement une chance sur deux qu'un tel chemin existe ! Ce type de problème sert à modéliser les phénomènes de percolation, qui traitent du passage d'un fluide à travers un milieu plus ou moins perméable.



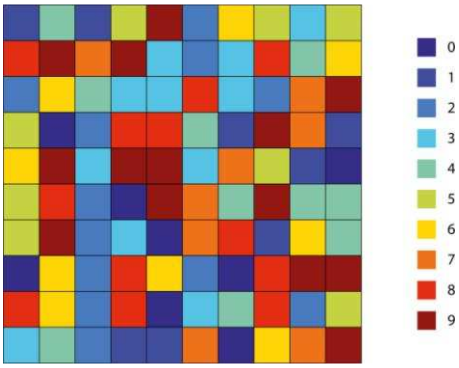
II.2.5 Hasard ?

Le hasard ne fait pas que causer des soucis. Il peut également aider à calculer des choses qui, sans lui, sont très difficiles voire impossible à obtenir.
Ainsi, dans le cadre de la modélisation d'un réseau de téléphone portable, on mène des études sur des populations virtuelles aléatoires pour avoir une bonne approximation du nombre de personnes qui se trouveront à proximité de telle ou telle antenne à un moment donné.
Le hasard est aussi nécessaire dans toutes les méthodes de cryptographie, dans la fabrication d'images virtuelles plus naturelles (jeu vidéo, film, applications dans l'industrie ou la recherche), dans l'étude des trajets des virus à l'intérieur d'une cellule ou dans la modélisation d'une forêt : les arbres d'une même espèce doivent tous être semblables mais pas identiques.

La roue de pluie. Des billes tombent à l'intérieur d'une roue en train de tourner, produisant un son purement aléatoire qui rappelle le bruit d'une pluie légère. Ce bruit rappelle celui des *bâtons de pluie*, de longs tubes remplis de petites pierres. Le bâton était à l'origine fabriqué à partir d'un cactus séché. On l'utilise dans les régions sèches du nord du Chili, lors des cérémonies de la pluie.
Que se passe-t-il lorsqu'on superpose un grand nombre de signaux aléatoires (ici les sons des billes qui tombent) ? Le résultat ne ressemble à rien, sinon à ce qu'on appelle un *bruit blanc*, composé d'un mélange aléatoire de toutes les fréquences sonores. L'équivalent visuel est la « neige » sur l'écran d'un ancien téléviseur qui ne recevait aucune chaîne.

Poème symphonique. Cette œuvre composée en 1962 par le hongrois György Ligeti (1923 – 2006) met en scène cent métronomes, un chef d'orchestre et dix exécutants, chacun étant responsable de dix métronomes. Les métronomes sont placés sur scène, remontés et ajustés à des fréquences différentes. Au signal donné par le chef d'orchestre, tous les métronomes sont déclenchés aussi simultanément que possible… et battent la mesure. Ils s'arrêtent les uns après les autres. L'œuvre se termine après que le dernier métronome a battu seul quelques temps.

Au début de la vidéo, aucun ordre ne nous apparaît, la régularité de chaque métronome ne se perçoit absolument pas. Constat surprenant : on dirait même des battements parfaitement aléatoires ! Quand il n'y en a presque plus, la régularité de chacun finit par s'entendre (les trois derniers métronomes évoquent le rythme des cloches d'église). Une nouvelle preuve qu'un ordre absolu peut ressembler à du hasard.



Les 100 premières décimales de pi coloriées en 10 couleurs, une par chiffre. Cette séquence vous semble-t-elle aléatoire ?

Les résultats de trois programmes informatiques sont également présentés :

- La « marche de l'ivrogne » : à chaque étape, le point a la même probabilité de chances d'aller vers un des quatre points cardinaux ;
- « Décroissance exponentielle » : à chaque étape, chaque case blanche (pleine) a une chance sur deux de se vider ;
- « Un triangle de Sierpiński aléatoire » : à chaque étape, on ajoute le milieu entre le dernier point obtenu et l'un des trois sommets du triangle, tiré au hasard.

II.2.6 Curiosités

Le calcul des probabilités réserve quelques surprises. Une intuition initiale se révèle souvent fausse, d'où la présence de paradoxes qui n'en sont pas vraiment : ce sont juste des probabilités surprenantes. Ainsi, des coïncidences très probables, voire des certitudes, semblent extraordinaires et le succès du loto, dont les espoirs de gains sont infimes, ne se dément pas !

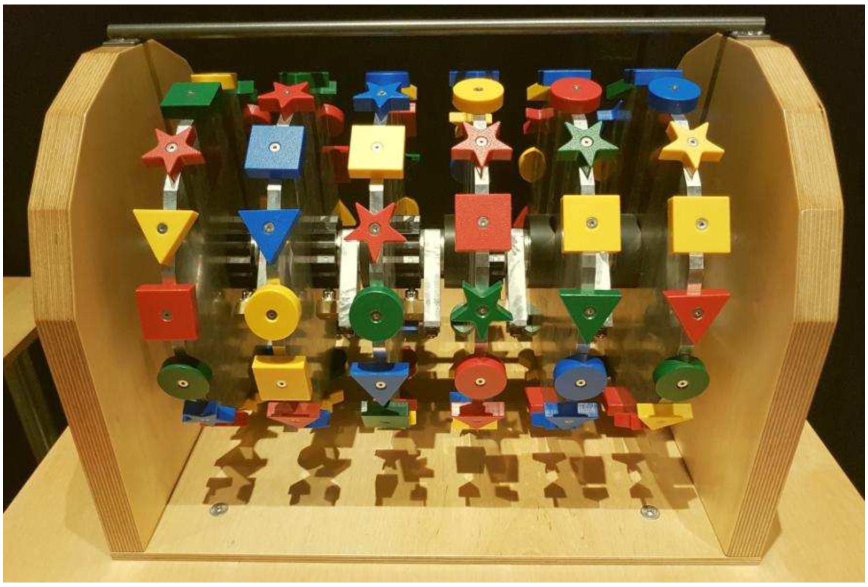
Rouge et bleu aléatoirement

À l'aide d'un ordinateur, le visiteur tente de former une séquence aléatoire de deux couleurs et découvre s'il est un bon générateur de hasard.

Identiques ?

On dispose de 6 roues garnies chacune des 16 mêmes objets colorés. Le visiteur les fait tourner et attend leur arrêt complet. De manière surprenante, il arrive très souvent que l'un des objets apparaisse deux fois sur la même rangée. Le calcul des probabilités nous prouve toutefois que ce résultat est logique.

Quelle est la probabilité que tous les objets soient différents ? Calculons d'abord le nombre de cas favorables : la 1re roue s'arrête sur l'un des 16 objets, la 2e sur l'un des 15 objets restants, la 3e sur l'un des 14 objets restants etc. Au final, il y a 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11 cas favorables. Le nombre de cas possibles est 16^6. La probabilité recherchée vaut donc $\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{16^6} \approx 0{,}344$. Ainsi, dans un tiers des cas environ, tous les objets sont différents. Cela signifie que dans deux tiers des cas, au moins deux objets seront identiques !



Cet élément reprend l'idée du *paradoxe des anniversaires* : la probabilité que 2 personnes aient la même date d'anniversaire dans un groupe de 23 est supérieure à 0,5.

La quête de la chaussette

Une boîte contient 10 chaussettes noires et 10 chaussettes bleues. On les pioche au hasard. Combien faut-il en prendre au minimum pour être sûr d'avoir une paire de chaussettes de la même couleur ? Et une paire dépareillée ? Dans le premier cas, il suffit d'en tirer trois. Dans le second, pas moins de onze !

Les anniversaires

Sur un grand calendrier, le visiteur repère des dates d'anniversaire tirées au sort et constate qu'il tombe rapidement sur deux dates identiques.

Pour se donner un ordre d'idée, calculons d'abord la probabilité que les *n* personnes d'un groupe donné aient toutes des dates d'anniversaire différentes. Il s'agit donc de :

1. dénombrer le nombre de cas où *n* personnes ont des dates d'anniversaire différentes ;
2. diviser ce nombre par le nombre de possibilités.

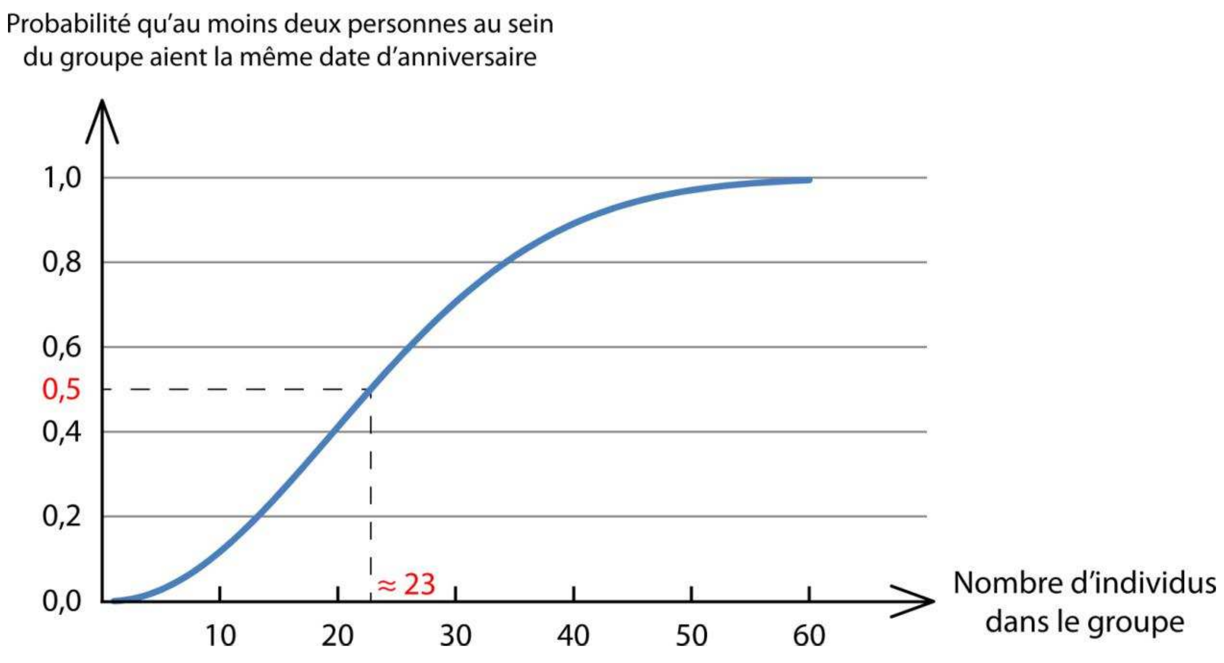
1. Pour la 1re personne, on a le choix entre 365 dates. Pour la 2e, 365-1 = 364 dates sont disponibles. Pour la 3e, 365-2 = 363 dates, etc., pour la n-ième personne, il ne reste plus que 365-n+1 dates. Le nombre de cas où *n* personnes ont des dates d'anniversaire différentes est donc $365 \times 364 \times 363 \times ... \times (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365 - n)!}$.

2. Pour chaque personne, il y a 365 dates d'anniversaire possibles. Le nombre de possibilités est donc 365^n.

La probabilité que les *n* personnes d'un groupe donné aient toutes des dates d'anniversaire différentes s'élève donc à $\frac{365!}{365^n \times (365 - n)!}$.

Au final, la probabilité qu'au moins deux personnes au sein d'un groupe de *n* individus aient la même date d'anniversaire est $1 - \frac{365!}{365^n \times (365 - n)!}$.

Ce graphique donne l'application numérique sur des groupes ayant jusqu'à 60 individus.

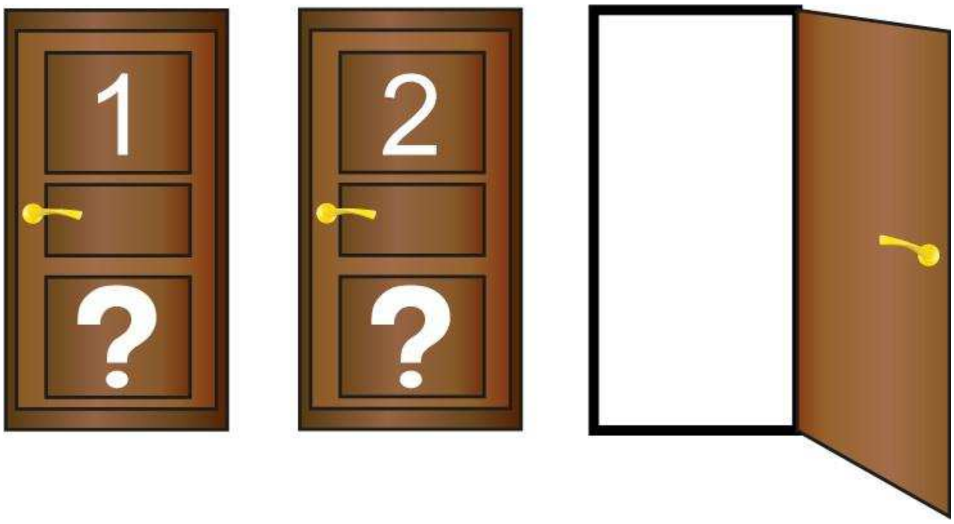


On retrouve bien le fait que la probabilité qu'au moins deux personnes parmi un groupe de 23 aient la même date d'anniversaire est supérieure à 0,5. La probabilité passe à près de 9 chances sur 10 pour un groupe de 40 personnes !

Qui veut gagner une voiture ?

Cet élément est inspiré du jeu télévisé américain *Let's make a deal* présenté, dans sa version d'origine, par Monty Hall (né en 1921). On parle d'ailleurs du *paradoxe de Monty Hall*.

Le dispositif comporte trois portes, derrière lesquelles sont cachées deux cases vides… et une voiture. Le spectateur porte son choix sur une porte et la désigne. Le présentateur qui sait, lui, ce qui se trouve derrière chaque porte, ouvre l'une des deux portes encore fermées et découvre une case vide. Il demande alors au spectateur de confirmer ou d'infirmer son choix : désire-t-il ouvrir la porte sur laquelle il avait porté son choix initial ? Désire-t-il changer de porte ? **Aussi étonnant que cela paraisse, le spectateur double ses chances de gagner la voiture en modifiant systématiquement son choix initial.**



Un peu d'ordre

Cinq jetons sont enfermés dans une boîte dont le couvercle est transparent. Une fois la boîte secouée, on constate que systématiquement, il existe au moins un quadrilatère convexe formé par quatre de ces jetons. Cette expérience illustre l'énoncé dû à la mathématicienne hongroise Esther Klein (1910 – 2005) : parmi cinq points du plan en position générale (trois d'entre eux ne sont jamais alignés), il en existe quatre qui sont les sommets d'un quadrilatère convexe – ses sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quel de ses côtés. Même dans un monde aléatoire, un ordre peut finir par apparaître.

La loterie du diamant

Cet élément s'inspire du Loto dans sa version instaurée par la Loterie Nationale en 1976. Vous devez choisir 6 diamants distincts parmi les 49 proposés. Si votre choix est le bon, vous remportez deux Pass Universcience, soit une année d'entrées gratuites pour deux personnes au Palais de la découverte et à la Cité des sciences et de l'industrie ! Les chances sont toutefois assez minces… en effet, le résultat ne dépendant pas de l'ordre des diamants, il y a $C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816$ tirages possibles. Comme il n'existe qu'un seul choix gagnant, la probabilité de décrocher le gros lot s'élève à $\frac{1}{13983816}$ soit… 0,000 007 %.

II.2.7 Théorie du chaos

Qu'est-ce que le hasard ? Un phénomène aléatoire n'est-il pas tout simplement un phénomène d'une complexité telle que l'on est incapable de calculer son évolution ? Pas nécessairement. En effet, il existe des systèmes dont l'évolution est très simple à calculer en théorie, mais dans lesquels une toute petite différence de position au début de l'expérience engendre des trajectoires complètement différentes.

Ainsi, le pendule double, qui consiste en un pendule à l'extrémité duquel on accroche un autre pendule, est un système relativement simple à décrire et dont la mise en équations du comportement est un classique de la mécanique. Toutefois, si on lance deux pendules de ce type en tentant de le faire de la façon la plus semblable possible, le comportement des deux pendules va changer du tout au tout au bout d'un petit moment. C'est aussi ce que l'on observe lorsqu'une bille rebondit sur les obstacles d'un flipper, ou dans le fameux *effet papillon* en météo.

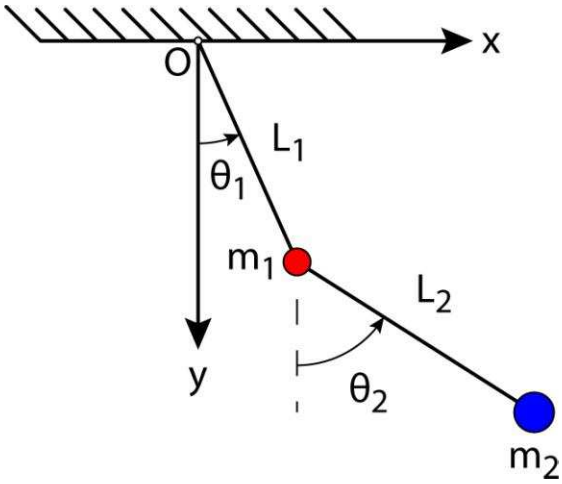
Toutefois, on peut malgré tout donner des prédictions fiables si l'on ne recherche pas une trajectoire précise à chaque instant. Ainsi, pour reprendre l'exemple de la bille de flipper, s'il est impossible de dire où se trouvera la bille 5 secondes après l'avoir lancée, on pourra dire que sur un grand nombre de lancers, tel obstacle aura été percuté tant de fois environ, telle zone occupée tant de temps… Concernant la météo, s'il est difficile de prévoir le temps qu'il fera précisément à tel endroit, on pourra avoir une idée de la quantité de pluie ou du nombre d'orages sur une année. La théorie du chaos déterministe étudie les systèmes fortement sensibles aux conditions initiales.

Doubles pendules chaotiques.

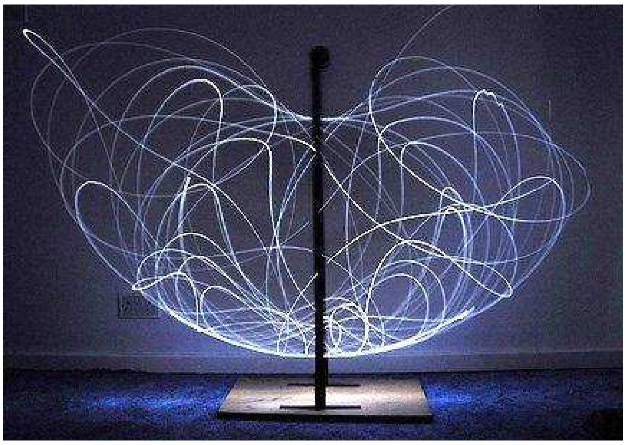
À l'aide de petits boutons situés sur le bord de l'élément, le visiteur remonte les deux pendules à la hauteur qu'il souhaite, puis il lâche tout. Les deux pendules sont exactement identiques. Démarrent-ils de la même façon ? Et sur un temps plus long ?

Une très faible différence de position ou de vitesse au démarrage devient rapidement plus importante, puis franchement énorme, au point que les trajectoires semblent ne plus avoir rien en commun ! Impossible d'obtenir deux fois le même résultat pour ces pendules chaotiques.

Voici sa théorie. Le pendule double consiste en deux masses m_1 et m_2 reliées par des câbles rigides de masse négligeable et de longueur L_1 et L_2. Ce système physique très simple présente un comportement chaotique et une sensibilité forte aux conditions initiales.



Expérimentalement, la masse m_2 décrit une courbe qui ne présente aucune périodicité. Pourtant, son mouvement est parfaitement descriptible d'un point de vue mathématique. La mise en équation de son mouvement peut s'effectuer de la manière suivante.



Photographie à long temps de pose d'un pendule double muni d'une LED à son extrémité.
Crédit : George Ioannidis.

On prend comme origine du système de coordonnées cartésiennes le point de fixation O du premier pendule. L'axe (Oy) est dirigé vers le bas et l'axe (Ox) lui est perpendiculaire de telle sorte que les mouvements sont contenus dans le plan (Oxy).

Dans ce repère, les coordonnées de la masse m_1 sont $\{x_1 = L_1 \sin\theta_1, y_1 = L_1 \cos\theta_1\}$. Son vecteur vitesse a donc pour composantes $\{\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1, \dot{y}_1 = -\dot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1\}$ dont le carré de la norme vaut $v_1^2 = (\dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1)^2 + (-\dot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1)^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2$.

Dans ce même repère, les coordonnées de la masse m_2 sont $\{x_2 = x_1 + L_2 \sin\theta_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2, y_2 = y_1 + L_2 \cos\theta_2 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2\}$.

Son vecteur vitesse a pour composantes :
$\{\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \cos\theta_2, \dot{y}_2 = -\dot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_2 L_2 \sin\theta_2\}$.

Le carré de la norme v_2^2 de ce vecteur vaut, après simplification :
$L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$.

L'énergie cinétique du pendule double est :
$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ ]$, soit :
$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$
Avec nos conventions, l'énergie potentielle de pesanteur d'une masse *m* est $E_p = -mgy$ à une constante additive près que nous ignorerons, le signe « - » provenant du fait que l'axe (Oy) est dirigé vers le bas. L'énergie potentielle de pesanteur du pendule double est :
$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g (L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2)$ d'où :
$V = -(m_1 + m_2) g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g L_2 \cos\theta_2$.

Le lagrangien du pendule double est la différence entre son énergie cinétique et son énergie potentielle, $L = T - V$ soit :
$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g L_1 \cos\theta_1 + m_2 g L_2 \cos\theta_2$

Les équations de Lagrange nous disent que $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$ **(1)** et $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$ **(2)**.

L'équation **(1)** mène à :
$(m_1 + m_2) L_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 = 0$.

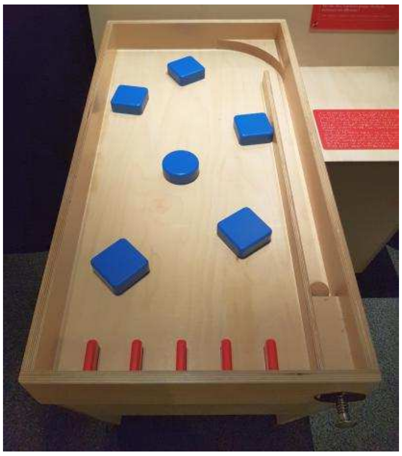
L'équation **(2)**, elle, mène à :
$m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0$.

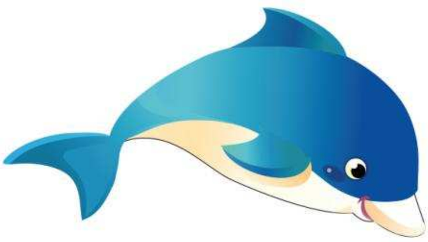
Nous voici en possession d’un système de deux équations différentielles du second ordre couplées… qu’il est impossible de résoudre analytiquement. On peut toutefois calculer numériquement les états du système grâce aux méthodes de Runge-Kutta ou à l’aide de techniques similaires.

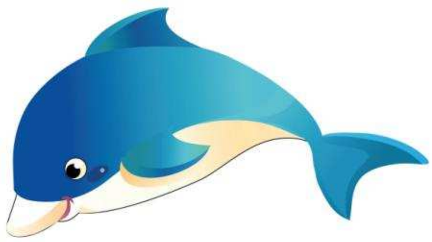
En conclusion, le pendule double est un système dynamique déterministe : il est parfaitement possible de mettre son comportement en équation, chaque condition initiale détermine entièrement l’évolution future et il n’y a pas de hasard. Cependant, deux conditions initiales très proches peuvent avoir des évolutions complètement différentes. L’évolution du système est imprévisible car une petite erreur de mesure conduit à des résultats faux au bout d’un certain temps. On appelle cela le **chaos déterministe**.

Le flipper. L’objectif est le même que pour le pendule double : montrer la forte sensibilité aux conditions initiales. Le visiteur lance deux fois de suite la bille, exactement de la même façon. Il constatera que les trajets suivis par la bille diffèrent totalement.

Sur un flipper virtuel, proche de ce qui est proposé sur la borne voisine, obtenir deux trajectoires identiques serait possible. Mais sur un flipper réel, il est impossible de reproduire exactement le même lancer. Or, chaque rencontre avec un obstacle rend une petite différence initiale plus grande… Très vite, deux trajectoires presque identiques deviennent très différentes !







Le flipper virtuel. Fabriquez votre propre flipper en choisissant le rayon et l'emplacement de trois disques, ainsi que la position et la direction de départ d'une bille dont on ne voit que la trajectoire. Placez le point de départ à l'intérieur d'un disque. Que se passe-t-il ? Glissez-y un petit morceau d'un autre disque. Que devient la trajectoire ? Et si vous déplacez légèrement le point de départ ?
Si le point de départ est à l'intérieur d'un disque, la trajectoire est régulière et peu sensible aux conditions initiales. En glissant un autre disque à l'intérieur du premier, la trajectoire, quoique toujours prévisible, devient très complexe, et une faible variation de départ la fait changer du tout au tout. En pratique, il n'y a plus de prévision possible, la situation est devenue chaotique.

Le pendule virtuel.
Choisissez la longueur des deux morceaux du pendule, ainsi que l'intensité et la direction de la force de gravitation. Par venez-vous à obtenir un mouvement non chaotique ?
Le plus facile est de supprimer le deuxième morceau en superposant les points verts et rouges. Le pendule devient simple et son mouvement très régulier : oscillations périodiques ou cercle complet en fonction de la force de gravitation. Une petite perturbation ne changera alors pas grand-chose. Mais le plus amusant est bien sûr d'observer des mouvements plus complexes !

III Ressources

III.1 Au sein de l'exposition

En période scolaire, un exposé d'environ 50 minutes, disponible à la réservation, sera proposé au moins deux fois par jour dans la salle de médiation de l'exposition.

Du hasard aux mathématiques (de la 6e à l'enseignement supérieur)

Pile, face, pile, pile, face, pile, pile, face… et après ? Les probabilités et les statistiques permettent de répondre quand le hasard intervient. L'exposé *Du hasard aux mathématiques* pourra donc s'appuyer sur les questions suscitées par la visite de l'exposition, ou au contraire préparer celle-ci, en exposant de façon plus poussée des idées présentées en salle sous une forme pratique et ludique.

III.2 Suggestion bibliographique

. José Rose, *Le hasard au quotidien*, éd. Points, coll. Sciences, 1999.
. Gilles Pagès et Claude Bouzitat, *En passant par hasard…*, éd. Vuibert, coll. Culture scientifique, 1999.
. Claudine Robert, *L'empereur et la girafe*, éd. Diderot, coll. Jardin des sciences, 1999.
. Gilles Dowek, *Peut-on croire les sondages ?*, éd. Le Pommier, coll. Les Petites Pommes du Savoirs, 2002.
. Georges Charpak et Henri Broch, *Devenez sorciers, devenez savants*, éd. Odile Jacob, coll. Poches, 2003.
. *Hasard et probabilités. La science de l'aléa*, éd. POLE, coll. Bibliothèque Tangente, 2004.
. Jean-Paul Delahaye, *Les inattendus mathématiques*, éd. Pour la Science, coll. Bibliothèque scientifique, 2004.
. Gérald Bronner, *Coïncidences*, éd. Vuibert, coll. Culture scientifique, 2007.
. Élise Janvresse et Thierry de la Rue, *La loi des séries, hasard ou fatalité ?*, éd. Le Pommier, coll. Les Petites Pommes du Savoirs, 2007.
. Nicolas Gauvrit, *Vous avez dit hasard ?*, éd. Belin, coll. Bibliothèque scientifique, 2009.
. *Science & Vie Junior* Hors-série n°100 intitulé *Le hasard*, 2013.
. Robin Jamet, *Vous avez dit Maths ?*, éd. Dunod, 2014.
. Leila Schneps et Coralie Colmez, *Les maths au tribunal*, éd. Seuil, coll. Science ouverte, 2015.
. Éric Thiéry, *Le petit livre de la chance*, éd. Le Pommier, coll. Impromptus, 2016.
. Étienne Lécroart et Ivar Ekeland, *Le hasard*, éd. Le Lombard, coll. La petite Bédéthèque des Savoirs, 2016.
. Hubert Krivine, *Petit traité de hasardologie*, éd. Cassini, 2016.

→ Certains ouvrages de cette liste sont consultables sur place, à l'entrée de l'exposition *Faites vos jeux !* D'autres se trouvent à la bibliothèque de la Cité des Sciences et de l'Industrie, 30 avenue Corentin-Cariou, 75019 Paris.

Métro : Porte de la Villette (Métro ligne 7 ou Tramway ligne 3b).
Horaires : du mercredi au dimanche, 12 h – 18 h 45, le mardi 12 h – 19 h 45.

Description La bibliothèque met à votre disposition 120 000 documents (livres, revues, films, cédéroms, DVD) dans tous les domaines scientifiques et techniques. Possibilité de consultation sur place et d'emprunt de documents.

La revue de diffusion de la culture scientifique *Découverte* (revue du Palais de la découverte) et plus particulièrement sa rubrique *Formes mathématiques* offrent souvent des articles en relation avec le thème de l'exposition *Faites vos jeux !* Voici un échantillon de numéros représentatifs :

- N°347 (avril 2007), *⅓ ! Mais non… ½ ! Ou alors ¼ ?* sur le paradoxe de Bertrand reposant sur un calcul de probabilités ;
- N°356 (mars 2008), *Quand la guêpe finit par s'échapper* où il est question de mouvement brownien et de modélisation mathématique d'un déplacement aléatoire ;
- N°376 (septembre – octobre 2011), *Des dés de dupe* sur les dés non transitifs présents dans l'exposition ;
- N°380 (mai – juin 2012), *Vive la loi de Gauss* sur la planche de Galton, la courbe de Gauss, les statistiques et les élections ;
- N°391 (mars – avril 2014), *Exponentielle, radioactivité et bière* sur l'élément *Les dés rouges* ;
- N° 407 (novembre – décembre 2016), *Les petites habitudes du hasard* sur les phénomènes aléatoires capables de s'influencer eux-mêmes.

IV Informations pratiques

Adresse
Palais de la découverte
Avenue Franklin D. Roosevelt
75008 Paris
Tél. : 01 56 43 20 20
www.palais-decouverte.fr

Accès
Métro : Champs-Élysées Clémenceau (ligne 1 et ligne 13) ou Franklin Roosevelt (ligne 9)
Bus : 28, 42, 52, 63, 72, 73, 80, 83, 93
R.E.R. : Invalides (ligne C)

Horaires d'ouverture
Du mardi au samedi de 9 h 30 à 18 h, le dimanche de 10 h à 19 h.
Fermeture le lundi, le 1er janvier, le 1er mai, le 14 juillet

Tarifs scolaires (valables au 1er septembre 2016 - susceptibles d'être modifiés)
Tarif : 4,50 €
Tarif Éducation prioritaire : 2,50 €
Supplément planétarium : 2,50 €

→ **1** gratuité pour **5** entrées pour la maternelle
→ **1** gratuité pour **12** entrées payantes pour l'élémentaire
→ **1** gratuité pour **15** entrées payantes pour le secondaire

Le billet donne accès à toutes les expositions, aux ateliers scientifiques et aux exposés du Palais de la découverte (sur réservation et dans la limite des places disponibles).

Réservation groupes (à partir de 10 personnes)


groupes.palais@universcience.fr


01 56 43 20 25


01 56 43 20 29


Palais de la découverte
Bureau des groupes
Avenue Franklin Roosevelt
75008 Paris