Plan du cours

CHAPITRE : Résolution d'équation du premier degré

INTRODUCTION

Je vous propose pour introduire ce chapitre de regarder cette vidéo interactive.
Cette vidéo vous rappellera vos cours de 4^{me} sur les équations.

`https://www.lumni.fr/video/le-calcul-litteral#containerType=serie&containerSlug=la-maison-lumni-college`

I. Généralités sur les équations

Définition

Une équation est **une égalité** dans laquelle figure **un nombre inconnu**, désigné en général par une lettre qui est appelée l'inconnue.

Exemple :

$2x - 11 = 7 - x$ est une équation dans laquelle l'inconnue est désignée par x.

$$\underbrace{2x - 11}_{\text{Premier membre}} = \underbrace{7 - x}_{\text{Second membre}}$$

1. Le nombre 3 est-il solution de l'équation $2x - 11 = 7 - x$ **?**

D'une part, $2 \times 3 - 11 = \underline{-5}$

D'autre part, $7 - 3 = \underline{4}$

L'égalité n'est donc pas vérifiée pour $x = 3$.

Conclusion : Le nombre 3 n'est pas solution de l'équation.

2. Le nombre 6 est-il solution de l'équation $2x - 11 = 7 - x$ **?**

D'une part, $2 \times 6 - 11 = \underline{1}$

D'autre part, $7 - 6 = \underline{1}$

L'égalité est donc vérifiée pour $x = 6$

Conclusion : Le nombre 6 est une solution de l'équation.

Exercice d'application 1

(a) -2 est-il solution de l'équation $54 - 11x = 25x + 126$?

D'une part, $54 - 11 \times (-2) = 54 + 22 = \underline{76}$

D'autre part, $25 \times (-2) + 126 = -50 + 126 = \underline{76}$

L'égalité est donc vérifiée pour $x = -2$

Conclusion : Le nombre -2 est une solution de l'équation.

(b) 5 est-il solution de l'équation $7x - 3 = 6(x - 1)$?

D'une part, $7 \times 5 - 3 = 35 - 3 = \underline{32}$

D'autre part, $6 \times (5 - 1) = 6 \times 4 = \underline{24}$

L'égalité n'est donc pas vérifiée pour $x = 5$.

Conclusion : Le nombre 5 n'est pas solution de l'équation.

II. Résolution d'équation

On rappelle tout d'abord ce que l'on nomme une résolution d'équation.

Définition

Résoudre une équation, c'est trouver **toutes les solutions** qui vérifient cette équation.

1. Méthode de résolution des équations du type a + x = b

Propriété

Une égalité reste vraie si l'on **additionne** (ou l'on **soustrait**) le même nombre à **chacun de ses membres**.

→ **Résoudre l'équation** $3 + x = 7$**.**

Deux rédactions possible d'une résolution d'équation *(celle la plus à droite est la plus rigoureuse)* :

$$3 + x = 7$$
$$\boxed{x = 4}$$
-3 -3

$$3 + x = 7$$
$$\cancel{3} + x - \cancel{3} = 7 - 3$$
$$x = 7 - 3$$
$$\boxed{x = 4}$$

La solution de l'équation $3 + x = 7$ **est le nombre 4.** **On notera alors** $\mathscr{S} = \{4\}$**.**

Propriété

L'équation $a + x = b$ admet pour unique solution : $x = b - a$.

Exercice d'application 2

Résoudre les équations suivantes :

$$-2 + x = 11$$
$$\cancel{-2} + x \cancel{+2} = 11 + 2$$
$$x = 11 + 2$$
$$\boxed{x = 13}$$

$$9 + x = 44$$
$$\cancel{9} + x \cancel{-9} = 44 - 9$$
$$x = 44 - 9$$
$$\boxed{x = 35}$$

2. Méthode de résolution des équations du type ax = b

Propriété

Une égalité reste vraie si l'on **multiplie** (ou l'on **divise**) le même nombre non nul (c'est-à-dire différent de 0) à **chacun de ses membres**.

→ **Résoudre l'équation** $-5x = 125$.

Deux rédactions possible d'une résolution d'équation *(celle la plus à droite est la plus rigoureuse)* :

:(-5) $-5x = 125$:(-5)

$x = -25$

$$-5x = 125$$
$$\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{125}{-5}$$
$$x = -\frac{125}{5}$$
$$\boxed{\text{x = -25}}$$

La solution de l'équation $-5x = 125$ **est le nombre - 25.** **On notera alors** $\mathscr{S} = \{-25\}$**.**

Propriété

Si $a \neq 0$, l'équation $ax = b$ admet pour unique solution : $x = \dfrac{b}{a}$.

Exercice d'application 3

Résoudre les équations suivantes :

$\rightarrow -6x = -42$

$$\frac{\cancel{-6}x}{\cancel{-6}} = \frac{-42}{-6}$$

$$x = \frac{-42}{-6}$$

$$\boxed{x = 7}$$

$\rightarrow -5x = 24$

$$\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{24}{-5}$$

$$\boxed{x = -\frac{24}{5}}$$

$\rightarrow 3x = 27$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{27}{3}$$

$$x = \frac{27}{3}$$

$$\boxed{x = 9}$$

$\rightarrow \frac{3}{4}x = 5$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}x = \frac{5}{\frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{5}{\frac{3}{4}}$$

$$x = 5 \times \frac{4}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{20}{3}}$$

3. Méthode de résolution des équations avec des inconnues dans les 2 membres

→ **Résoudre l'équation** $7x - 2 = 6 + 5x$.

$$\begin{array}{ccc} & 7x - 2 = 6 + 5x & \\ \textbf{-5x} \downarrow & & \downarrow \textbf{-5x} \\ & 2x - 2 = 6 & \\ \textbf{+2} \downarrow & & \downarrow \textbf{+2} \\ & 2x = 8 & \\ \textbf{:2} \downarrow & & \downarrow \textbf{:2} \\ & \boxed{\text{x=4}} & \end{array}$$

$$7x - 2 = 6 + 5x$$

$$7x - 2 - 5x = 6 + 5x - 5x$$

$$2x - 2 = 6$$

$$2x - 2 + 2 = 6 + 2$$

$$2x = 8$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{8}{2}$$

$$\boxed{\text{x=4}}$$

<u>Méthode de résolution</u>

→ On commence par isoler l'inconnue dans un des deux membres.

→ On regroupe ensuite les nombres sans x dans l'autre membre.

→ On utilise alors les méthodes de résolution vues juste avant.

→ On n'oublie pas de donner la ou les solution(s).

La solution de l'équation $7x - 2 = 6 + 5x$ **est le nombre 4.** $\mathscr{S} = \{4\}$.

Exercice d'application 4

$$4x-3=11$$
$$4x=11+3$$
$$4x=14$$
$$x=\frac{14}{4}$$
$$\boxed{x=3,5}$$

$$4x+3x=63$$
$$7x=63$$
$$x=\frac{63}{7}$$
$$\boxed{x=9}$$

$$6x-4=3x+14$$
$$6x-3x-4=14$$
$$3x-4=14$$
$$3x=14+4$$
$$3x=18$$
$$x=\frac{18}{3}$$
$$\boxed{x=6}$$

$$7-8x=56$$
$$-8x=56-7$$
$$-8x=49$$
$$x=\frac{49}{-8}$$
$$\boxed{x=-\frac{49}{8}}$$

$$9-2x=11+4x$$
$$9-2x-4x=11$$
$$9-6x=11$$
$$-6x=11-9$$
$$-6x=2$$
$$x=\frac{2}{-6}$$
$$\boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

$$2(x-7)=3(-x+1)$$
$$2x-14=-3x+3$$
$$2x-14+3x=3$$
$$5x-14=3$$
$$5x=3+14$$
$$5x=17$$
$$\boxed{x=\frac{17}{5}}$$

III. Mise en équation

1. Énigme 1

Énoncé : Mathieu a 2 billes de plus que Pierre mais 3 fois moins de billes que Bryan.
Ils ont à eux trois 53 billes.
Combien ont-ils de billes chacun ?

Résolution :

1. **Choisir une inconnue et la décrire** : On choisi x le nombre de billes de Mathieu.

2. **Traduire le problème par une équation.**

Pour cela, choisir une grandeur qui peut être exprimée de deux façons différentes.

Ici, il s'agit du nombre de billes qu'ils ont à eux 3. Il y a 53 billes en tout.

Mais cela peut aussi s'écrire : Mathieu + Pierre + Bryan

On sait que :

- Mathieu = x
- Pierre a 2 billes de moins que Mathieu, à savoir Pierre = x - 2
- Bryan a 3 fois plus de billes que Mathieu, à savoir Bryan = 3x

→ L'équation à résoudre est donc : **Mathieu** + **Pierre** + **Bryan** = **53**
x + (x - 2) + 3x = **53**

3. **Résoudre l'équation :**

$$x + (x - 2) + 3x = 53$$

$$x + x - 2 + 3x = 53$$

$$5x - 2 = 53$$

$$5x - 2 + 2 = 53 + 2$$

$$5x = 55$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{55}{5}$$

$$\boxed{x = 11}$$

4. **Vérifier** que la solution de l'équation a du sens avec le problème concret.
Ici, x étant un nombre de billes, la solution du problème doit être un nombre strictement positif.

5. **Conclure.**

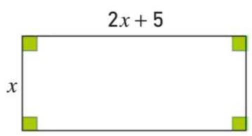
On en conclut que :

- x = 11 Donc Mathieu possède 11 billes.
- x - 2 = 11 - 2 = 9 Donc Pierre possède 9 billes.
- $3x = 3 \times 11 = 33$ Donc Bryan possède 33 billes.

Vérification : 11 + 9 + 33 = 20 + 33 = 53.

2. Énigme 2

Énoncé : Dans le rectangle suivant l'unité utilisée est le mètre.



Quelles sont les dimensions de ce rectangle quand son périmètre est égal à 31 m ?

Résolution :

1. **Choisir une inconnue et la décrire** : On appelle x la largeur du rectangle ci-dessus.

2. **Traduire le problème par une équation.**

Pour cela on va exprimer le périmètre du rectangle en fonction de x.

$P_{rectangle} = (l + L) \times 2$
$P_{rectangle} = (x + (2x + 5)) \times 2$ On réduit ce qu'il y a dans les parenthèses
$P_{rectangle} = (x + 2x + 5) \times 2$
$P_{rectangle} = (3x + 5) \times 2$

On cherche la valeur de x pour un périmètre qui vaut 31.

L'équation est donc : $(3x + 5) \times 2 = 31$

3. **Résoudre l'équation :**

$$(3x + 5) \times 2 = 31$$

On commence par développer.

$$6x + 10 = 31$$

$$6x = 31 - 10$$

$$6x = 21$$

$$x = \frac{21}{6}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{x = 3{,}5}$$

4. Vérifier que la solution de l'équation a du sens avec le problème concret.
Ici, x étant une longueur, la solution du problème doit être un nombre strictement positif.

5. Conclure.

La largeur du rectangle vaut : x = 3,5 cm.
Donc la longueur vaut : $2x + 5 = 2 \times 3,5 + 5 = 12$ cm.

3. Énigme 3

Énoncé : Une brique pèse 1 kg plus la moitié de son poids. **Combien pèse-t-elle ?**

Résolution :

1. Choisir une inconnue et la décrire : On appelle x le poids de la brique.

2. Traduire le problème par une équation.

$Pbrique = 1 + \frac{Pbrique}{2}$ on remplace avec x l'inconnue.

L'équation est donc : $x = 1 + \frac{x}{2}$

3. Résoudre l'équation :

$$x = 1 + \frac{x}{2}$$

$$x - \frac{x}{2} = 1$$

On met x au même dénominateur

$$\frac{2x}{2} - \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{\cancel{2} \times x}{\cancel{2}} = 1 \times 2$$

$$x = 1 \times 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

4. Vérifier que la solution de l'équation a du sens avec le problème concret.
Ici, x étant le poids de la brique, la solution du problème doit être un nombre strictement positif.

5. Conclure.

On peut donc en déduire que la brique pèse 2 kg.

4. Énigme 4

Énoncé : Justine a 8 ans et sa grand-mère a 50 ans.
Dans combien d'années, l'âge de sa grand-mère sera le triple de celui de Justine ?

Résolution :

1. Choisir une inconnue et la décrire : On appelle x le nombre d'année qu'il faudra pour que l'âge de sa grand-mère soit le triple de celui de Justine.

2. Traduire le problème par une équation.

On sait qu'aujourd'hui :

- Justine = 8 ans
- Grand-mère = 50

3 × (Age de Justine dans x année) = Age de la grand-mère dans x année. *(On remplace par les données que l'on a)*

L'équation est donc : $3(8+x) = 50+x$

3. Résoudre l'équation :

$$3(8+x) = 50+x$$

On commence par développer.

$$24+3x = 50+x$$

$$24+3x-x = 50$$

$$24+2x = 50$$

$$2x = 50-24$$

$$2x = 26$$

$$x = \frac{26}{2}$$

$$\boxed{x = 13}$$

4. Vérifier que la solution de l'équation a du sens avec le problème concret.
Ici, x étant un nombre d'année, la solution du problème doit être un nombre strictement positif.

5. Conclure.

On peut donc conclure que dans 13 ans l'âge de la grand-mère de Justine sera le triple de son âge.

Vérification, dans 13 ans :

- Justine aura 8 + 13 = 21
- Sa grand-mère aura 50 + 13 = 63 et 3 × 21 = 63