Plan du cours

I. Rappel : Vocabulaire

- Une addition est une opération qui permet de calculer une somme.
  Exemple : 15 + 23 est la somme de 15 et 23.
  15 et 23 sont des termes de la somme.

- Une soustraction est une opération qui permet de calculer une différence.
  Exemple : 23 ? 15 est la différence de 23 et 15.
  23 et 15 sont des termes de la différence.

- Une multiplication est une opération qui permet de calculer un produit.
  Exemple : 100 x 25 est le produit de 100 et 25.
  100 et 25 sont deux facteurs du produit.

- Une division est une opération qui permet de calculer un quotient.
  Exemple : 24 : 5 est le quotient de 24 par 5.
  Le dividende est 24 et le diviseur est 5. Le quotient est égal à 4,8.

II. Calcul d'une expression sans parenthèse

1. Enchaînement d'additions et de soustraction

Exercice d'application 1

test

test

⚠ la multiplication et la division sont prioritaires

Définition : *test*

Définition

test

Remarques :

Exemple :

2. Propriétés

Propriété

Soit q et r deux réels strictement positifs. Pour tous réels a et b, on a :

- $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$
- $q^a \times r^a = (q \times r)^a$
- $(q^a)^b = q^{a \times b}$
- $q^{a-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$

Preuve

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

Propriété

Pour tout réel a, $q^a > 0$.

Preuve

En effet, $q^a = q^{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} = q^{\frac{a}{2}} \times q^{\frac{a}{2}} > 0$ soit $q^x = \left(q^{\frac{a}{2}}\right)^2$ avec $q^a \neq 0$.

3. Sens de variation

En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

Théorème

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q > 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

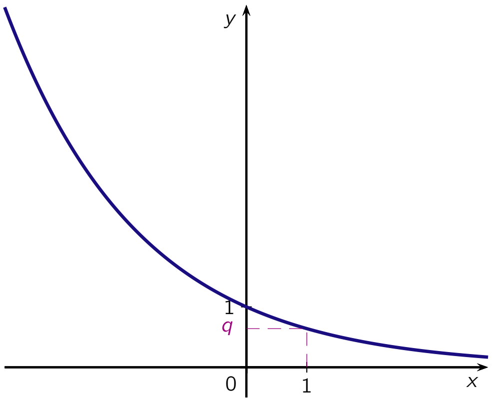
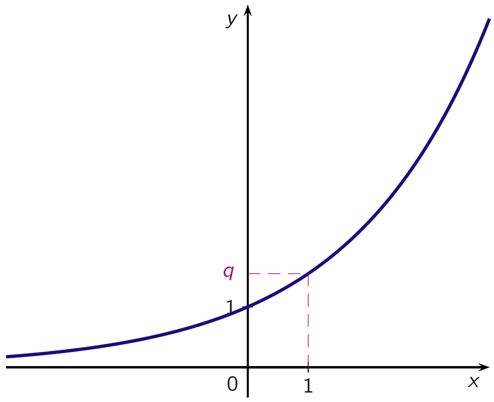
Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

Ce résultat est une conséquence de la stricte monotonie et de l'application du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.

Propriété

Les fonctions exponentielle de base q sont convexe sur $\mathbb{R}$.

En résumé, on peut synthétiser ces résultats :

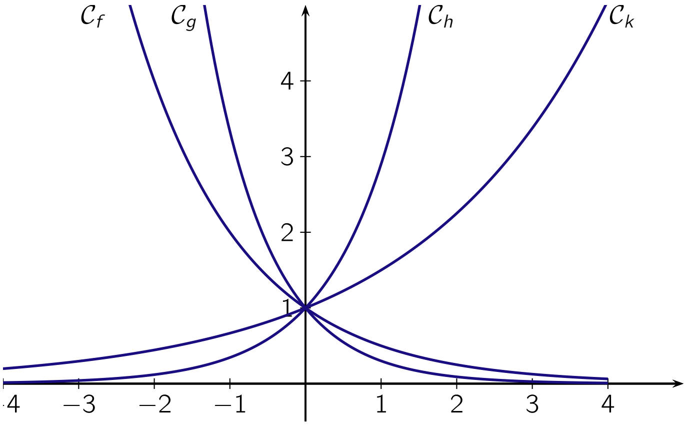
<table>
<tr><td>$0 < q < 1$</td><td>$q > 1$</td></tr>
<tr><td>La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td>La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

Exercice 1

Sur cette figure sont représentées quatre fonctions :

$x \longmapsto 0,3^x$; $x \longmapsto 0,5^x$; $x \longmapsto 1,5^x$; $x \longmapsto 2,9^x$

Identifier chacune des fonctions en justifiant.



Exercice 2

Ecrire sous la forme q^x les nombres suivants :

(1). $2^{1,3} \times 2^{3,4}$

(2). $1,3^{2,6} \times 1,3^{-4,1}$

(3). $\dfrac{1,8^{-2,3}}{1,8^{-1,2}}$

(4). $0,85^{6,1} \times 0,85^{-4,2} \times 0,85^{-9,5}$

Exercice 3

En utilisant le sens de variation des fonctions exponentielles, comparer les nombres suivants :

(1). $1,05^3$ et $1,05^5$

(2). $0,25^2$ et $0,25^4$

(3). $0,4^{1,2}$ et $0,4^{3,5}$

(4). $3^{-2,5}$ et $3^{-1,5}$

Exercice 4

En utilisant une calculatrice, donner une approximation des nombres suivants :

$2,25^{1,5}$; $1,05^{-2,3}$; $0,45^{-2,8}$; $0,75^{5,7}$; $\pi^{2,5}$

Exercice 5

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme a^x pour a réel strictement positif.

$a^{1,8} \times a^{2,2}$; $a^{-3} \times a^{4,5}$; $a^{\sqrt{2}} \times a^2$; $a^{1,05} \times a^{-3,6}$

Exercice 6

Déterminer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = kq^x$, sachant que $f(0) = -3$ et $f(-1) = -10$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $[-5; 5]$ par :

$$f(x) = 1,5^x - 3$$

(1). Afficher sur l'écran d'une calculatrice le tracé de la courbe représentative de f.

(2). (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une unique solution pour l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$.

(b) Utiliser la calculatrice pour donner une approximation à 0,1 près par défaut de cette solution.

Exercice 8

L'étude de la consommation d'une voiture en fonction de sa vitesse conduit à la formule $c = 2,8 \times 1,008^v$, où c est la consommation en litres pour 100 km parcourus et v la vitesse en kilomètres par heure.

(1). Déterminer la consommation pour une vitesse de 100 km/h.

(2). À l'aide d'une calculatrice, construire un tableau de valeurs pour v variant de 70 à 130 avec un pas de 5.

(3). Déterminer la vitesse à partir de laquelle la consommation est supérieure à 7 litres pour 100 km.

Exercice 9

Une grande métropole avait 1,3 millions d'habitants le 1er janvier 2009. Le service de recensement a observé que, pendant 10 ans, sa population a augmenté régulièrement de 1,2 % par an. Voici 3 fonctions f, g et h définies sur $[0; 10]$ par :

$f(x) = 1,3 \times 0,012^x$; $g(x) = 1,3(1 + 0,012x)$
et $h(x) = 1,3 \times 1,012^x$

(1). Laquelle de ces trois fonctions permet d'obtenir la population (exprimée en million d'habitants) au 1er janvier de l'année 2000+x.

(2). Combien d'habitants comptait la métropole le 1er janvier 2009 ?

Exercice 10

L'évolution du nombre de centenaire en France depuis 1900 peut être modélisée par la fonction f donnée par $f(x) = 69 \times 1,05^x$, où x désigne le rang de l'année, en considérant que l'année 1900 est l'année de rang 0.

(1). À l'aide de cette fonction, estimer le nombre de centenaires en France en 2014, puis en 2015.

(2). Quels est la pourcentage d'augmentation ds centenaires entre les années 2014 et 2015 ? Entre les années 1900 et 1901.

III. La fonction exponentielle

1. Activité de découverte

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = 1$ et vérifiant pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

(1). Démontrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$, alors, pour tout réel x, on a $f(x) = 0$.
En déduire que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

(2). En écrivant que $f(x+0) = f(x)$, montrer que $f(0) = 1$.

(3). (a) Montrer que pour tout réel x et tout réel h non nul, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \times \dfrac{f(h) - 1}{h}$

(b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.

Rappel :
Dire que la fonction f est dérivable en 0 et que le nombre dérivé $f'(0) = 1$ signifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$.

2. Définition

Il est relativement simple de voir que toutes les fonctions exponentielles ont pour image 1 en 0 (car $q^0 = 1$).

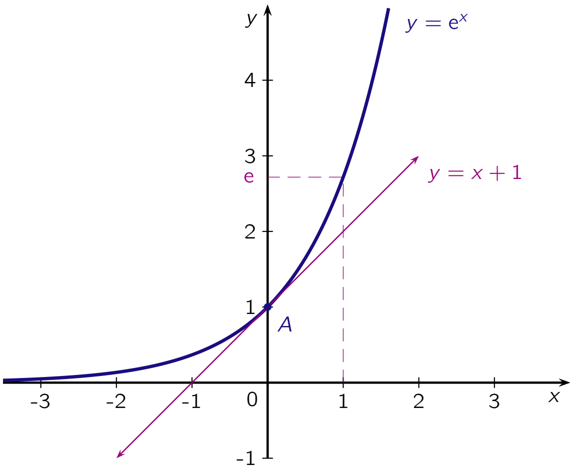
L'exercice préparatoire nous a permis de mettre en évidence l'existence d'une fonction exponentielle f telle que $f'(0) = 1$.

On admettra que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe **une seule** fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.

Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.

Cette valeur particulière du réel q est notée e.

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2,71828$.



Définition

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x$$

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriété

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\exp(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\exp(0,5) = \mathrm{e}^{0,5} = \sqrt{\mathrm{e}}$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

  $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $(\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$

3. Dérivée de la fonction exponentielle

Théorème

La dérivée de la fonction exponentielle est ... la fonction exponentielle. Ainsi, pour tout nombre réel x,

$$\exp'(x) = \mathrm{e}^x$$

Remarque : Difficile de faire plus simple ;)

Preuve

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^{x}}{h} = \frac{e^{x}\times e^{h}-e^{x}}{h} = e^{x}\times\frac{e^{h}-1}{h}$$

Or $\exp'(0)=1$ signifie que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{0+h}-e^{0}}{h}=1$ soit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=1$.

Donc pour tout réel x, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^{x}\times\dfrac{e^{h}-1}{h} = e^{x}$

4. Variation

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $e^{x}>0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriété

- Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^{x} \leqslant 1$
- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^{x} \geqslant 1$
- Pour tous réels x et y, $e^{x}=e^{y} \iff x=y$ et $e^{x}<e^{y} \iff x<y$

Exercice d'application 2

Résolu

(1). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$$e^{1-3x} < e^{2x+3} \iff 1-3x < 2x+3 \iff -5x < 2 \iff x > -\frac{2}{5}$$

D'où l'ensemble solution $S = \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

(2). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geqslant 1$

$$e^{x^2-1} \geqslant 1 \iff e^{x^2-1} \geqslant e^{0} \iff x^2-1 \geqslant 0$$

D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

5. Courbe représentative

(1) convexité

Théorème

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

Preuve

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = \mathrm{e}^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

(2) propriétés

Quelques résultats qu'il faut connaitre :

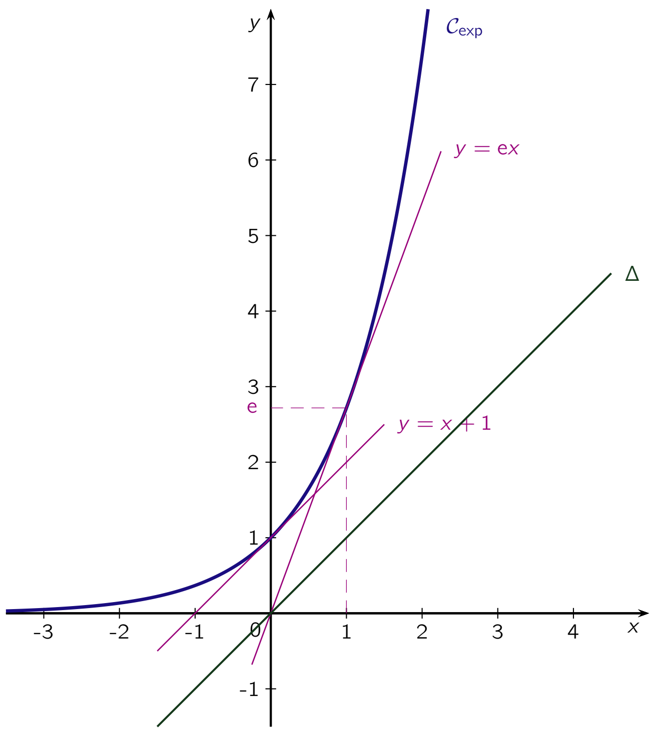
Propriété

(1). Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$

(2). Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x-1) + \exp(1)$ Soit $y = \mathrm{e}x$

Propriété

La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
(*Voir l'exercice nº 3*)



EXERCICES

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes :

$A = (e^x)^2 - \dfrac{1}{e^{-2x}}$; $B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$; $C = e^{-x}\left(e^{2x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$; $D = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$; $E = \dfrac{\left(e^{x+2}\right)^2}{e^{2x-1}}$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+x-1} = 1$
2. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $e^{\frac{1}{x}} \geqslant e$
5. $e^{2x} \leqslant e^x$
6. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

(1). Déterminer $f'(x)$.

(2). Étudier les variations de f, en déduire que f admet un minimum.

(3). Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

(1). f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$

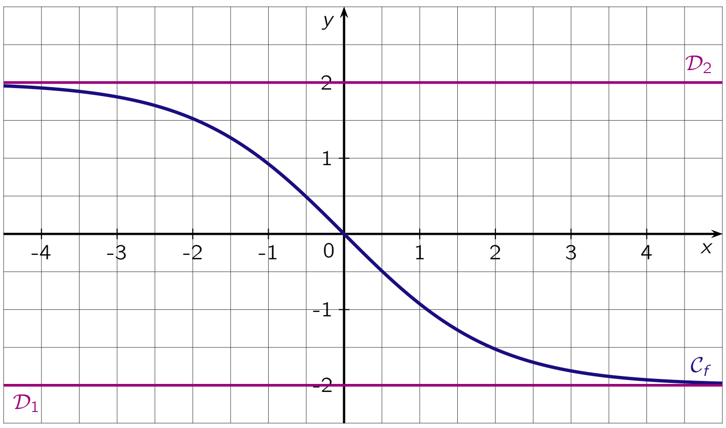
(2). f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^x$

(3). f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{1}{e^x}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1 + e^x} - 2$.

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = -2$ et $y = 2$



(1). Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

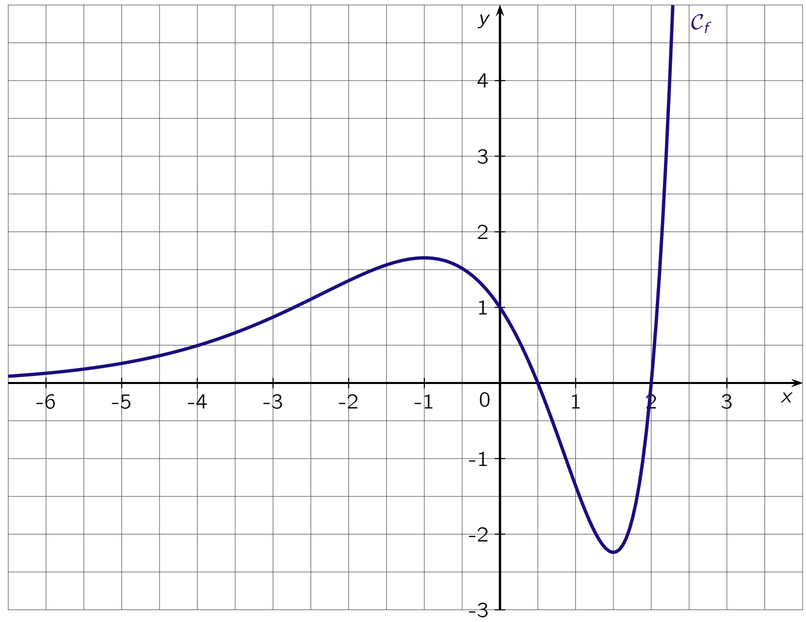
(2). Étudier les variations de la fonction f.

(3). Étudier la convexité de la fonction f.

(4). La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right) e^x$.
Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



(1). On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

(a) Calculer $f'(x)$.
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
(c) Dresser le tableau de variations de f.

(2). Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Tracer la droite T sur le graphique précédent.

(3). Montrer que l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.

Exercice 7

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$.

(1). On note f' la dérivée de la fonction f.

(a) Calculer $f'(x)$.
(b) Donner le tableau de variations de f.
(c) En déduire que pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.

(2). On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.

(a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.
(b) Étudier la convexité de la fonction f.

IV. Exponentielle d'une fonction : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = e^u$.

Exemples :

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = e^u$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5e^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

1. Dérivée

Définition

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Exemples :

- Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
  Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
  Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$.
- Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x^2-2x+1}$.
  Pour tout réel x, posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
  Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-2)e^{0,5x^2-2x+1}$.

2. Variation

Théorème

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

Preuve

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

- Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$
  De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $e^{u(a)} < e^{u(b)}$
  Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^u est croissante sur I.
- Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$
  Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $e^{u(b)} < e^{u(a)}$
  Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^u est décroissante sur I.

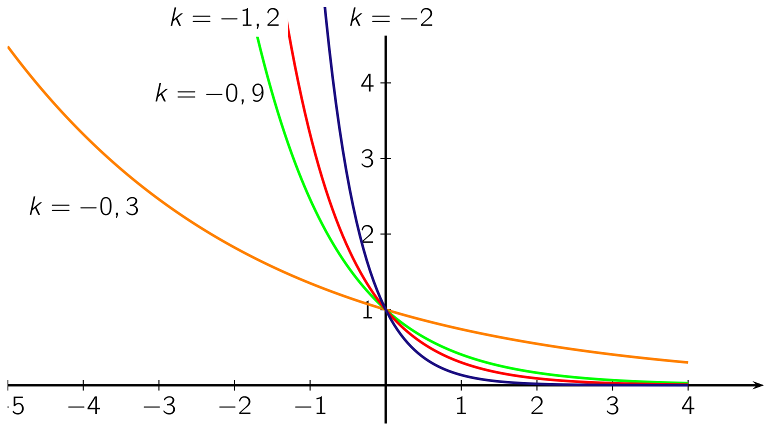
Remarque :
Si u est dérivable sur I, alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Or pour tout réel $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.

3. Exemples types

(1) Les fonctions $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, avec $k > 0$.

Ces fonctions sont de la forme e^u avec $u(x) = -kx$. Comme k est positif, on en déduit que la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}$, et donc que les fonctions f_k le sont également sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $f_k(0) = 1$ pour toute valeur de k. Donc les courbes représentatives des fonctions f_k passent toutes par le point de coordonnées $(0; 1)$.



(2) Les fonctions $g_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, avec $k > 0$.

Ces fonctions sont de la forme e^u avec $u(x) = -kx^2$. On en déduit donc que $g'_k(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$. Le signe de $g'_k(x)$ dépend donc du signe de $-2kx$. Comme $k > 0$, on peut assez facilement déterminer le tableau de variation de la fonction g_k :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Tout comme pour les fonctions f_k , $g_k(0) = 1$ pour toute valeur de k. Donc les courbes représentatives des fonctions g_k passent toutes par le point de coordonnées $(0; 1)$.