## Exercice d'introduction

Le 1er janvier 2012, on a placé 5 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4 %. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 4% du capital de l'année précédente).
Chaque premier janvier, on place 200 euros supplémentaires sur ce compte.
On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au premier janvier de l'année 2012 et $C_n$ le capital disponible au 1er janvier de lannée $2012 + n$.

**1)** Calculer les valeurs exactes de $C_1$ et $C_2$.

$C_1 = C_0 + \frac{4}{100}C_0 + 200 = 1,04C_0 + 200 = 1,04 \times 5000 + 200 = 5400$

$C_2 = C_1 + \frac{4}{100}C_1 + 200 = 1,04C_1 + 200 = 1,04 \times 5400 + 200 = 5816$

**2)** Justifier que pour tout entier $n$, $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.

Comme pour le calcul de $C_1$ et $C_2$, on a :
$C_{n+1} = C_n + \frac{4}{100}C_n + 200 = C_n + 0,04C_n + 200 = 1,04C_n + 200$

**3)** Justifier que la suite $(C_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Une suite $(u_n)$ est arithmétique si pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + r$ .

Une suite $(u_n)$ est géométrique si pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = qu_n$ .

Ici on a $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$, donc $(C_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On peut aussi utiliser les termes $C_0$, $C_1$ et $C_2$, à savoir :

$C_1 - C_0 = 400$ et $C_2 - C_1 = 416$

donc $(C_n)$ n'est pas arithmétique.

$\frac{C_1}{C_0} = 1,08$ et $\frac{C_2}{C_1} \simeq 1,077$
donc $(C_n)$ n'est pas géométrique.

**4)** Pour tout entier $n$, on pose $v_n = C_n + 5000$.

**(a)** Calculer $v_0$.

$v_0 = C_0 + 5000 = 10000$

**(b)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= C_{n+1} + 5000 \\ &= 1,04C_n + 200 + 5000 \\ &= 1,04C_n + 5200 \\ &= 1,04(C_n + 5000) \\ &= 1,04v_n \end{aligned}$$

donc $(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 10000$ et de raison $q = 1,04$

**(c)** En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ puis de $C_n$ en fonction de $n$.

$(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 10000$ et de raison $q = 1,04$

donc $v_n = v_0 \times q^n = 10000 \times 1,04^n$

$v_n = C_n + 5000$ donc $C_n = v_n - 5000 = 10000 \times 1,04^n - 5000$

**5)** Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020 arrondie à l'euro près.

$C_n$ est le capital le premier janvier de l'année $2012 + n$.

donc pour la fin de l'année 2020, il faut prendre

$2021 = 2012 + 9$ donc il faut calculer $C_9$ et enlever les 200 euros versés le premier janvier 2021 pour obtenir la capital disponible fin 2020.

$C_9 = 10000 \times 1,04^9 - 5000 \simeq 9233$ (capital au premier janvier 2021)

$9233 - 200 = 9033$

Le capital disponible à la fin de l'année 2020 est 9033 euros environ (arrondi à l'euro)

**6)** Quel nombre minimal d'années devra-t-on attendre pour que le capital disponible dépasse 10 000 euros ?

On veut $C_n > 10000$.

$C_n > 10000$

$\iff 10000 \times 1,04^n - 5000 > 10000$

$\iff 10000 \times 1,04^n > 15000$

$\iff 1,04^n > \dfrac{15000}{10000}$

$\iff 1,04^n > 1,5$

Avec le menu TABLE de la calculatrice en saisissant la fonction $Y_1 = 1,04^x$ puis en paramétrant dans SET le début à 0, la fin du tableau de valeur à 50 par exemple et en prenant pour pas 1 (pour n'avoir que les valeurs de $x$ entières, on obtient $1,04^{10} \simeq 1,48$ et $1,04^{11} \simeq 1,54$

donc $n \geq 11$.

Le capital disponible sera supérieur à 10000 euros le premier janvier $2012 + 11 = 2023$

On peut aussi utiliser le menu RECUR de la calculatrice avec la suite de type $a_{n+1}$ en saisissant $a_{n+1} = 1,04a_n + 200$ puis en paramétrant le début à $n = 0$ et la fin à 50 par exemple et $a_0 = 5000$

**Exercice 1**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 0,8u_n + 24$ et $v_n = 2 \times 0,4^n + 10$.

**(a)** Sur la calculatrice, représenter graphiquement la suite $(u_n)$ puis conjecturer la limite de cette suite.
**(b)** Sur la calculatrice, représenter graphiquement la suite $(v_n)$ puis conjecturer la limite de cette suite.

**Exercice 2**

Déterminer la limite des suites suivantes.

**(a)** $u_n$ définie par $u_n = 2n - 1$

**(b)** $v_n$ définie par $v_n = -n^3 + 5$

**(c)** $w_n$ définie par $w_n = \dfrac{-2}{7 + \sqrt{n}}$

**(d)** $z_n$ définie par $z_n = -3 + \dfrac{5}{n-1}$