RAPPEL : f est une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ appartiennent à I($h \neq 0$).

f est dite **dérivable en** a lorsque $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ.

On note alors $\ell = f'(a)$. f'(a) s'appelle **nombre dérivé de** f **en** a.

Introduction

1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$.
Etudier la dérivabilité de la fonction f en $a = 3$.

2) Considérons la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Etudier la dérivabilité de la fonction g en $a = 0$.
En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction g.

Exercices d'entraînement

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)^2$.
Calculer le nombre dérivé de f en $a = 1$.
En déduire la dérivabilité de f en 1.

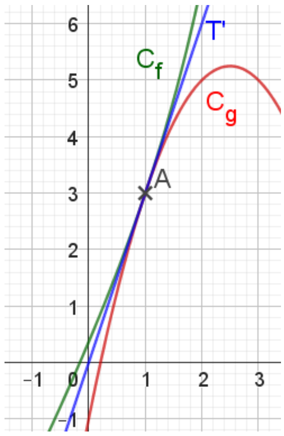
Exercice 2 Soit la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
Calculer le nombre dérivé de t en $a = -2$.
En déduire la dérivabilité de f en -2.

Exercice 3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{3}{x}$.
Montrer que la fonction g est dérivable en 1 et déterminer $g'(1)$.

Exercice 4 Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $k(x) = \dfrac{-7}{3-x}$.
Montrer que la fonction k est dérivable en 2 et déterminer $g'(2)$.

Fonctions dérivées et tangentes

Exercice 5



Sur le graphique ci-contre, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{x-1} + 2x$; $g(x) = -x^2 + 5x - 1$, ainsi que leurs tangentes respectives T et T' au point d'abscisse 1.
Que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O ; I ; J).
1) Etablir que f'(1)=1.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Exercice 7

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 8

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

Exercice 9

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = -3x^2$
(b) $h(x) = 4\sqrt{x}$
(c) $k(x) = x - \dfrac{1}{x}$
(d) $g(x) = \dfrac{1}{12}x^6$
(e) $j(x) = \dfrac{1}{2x}$
(f) $m(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{x}$

Exercice 10

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :
(a) $f(x) = x^3(2x - 5)$
(b) $h(x) = (3 - x)\dfrac{1}{x}$
(c) $g(x) = (2x^2 - 5x + 1)(1 - x^2)$
(d) $j(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$
(e) $k(x) = (4 - 3x)e^{2x-1}$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (2x + 2)\sqrt{x}$.
1) Etablir que $f'(4) = \dfrac{13}{2}$
2) On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 4.

Fonctions dérivées et variation de fonctions

Exercice 12

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

(b) $h(x) = \dfrac{x+1}{2x-5}$

(c) $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

(d) $j(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3}{x^2+1}$

Exercice 13

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$

(b) $h(x) = (2x^2 - x + 1)^6$

(c) $g(x) = e^{2x^2+1}$

(d) $j(x) = 2x + 1 - e^{4x^2-1}$

Exercice 14

Vrai ou Faux.
Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous.

x	-5	2	5
f	1 ↗	3	↘ -1

1) $f'(x) \geq 0$ pour tout x de [-5 ; 2].

2) $f'(2) = 3$

3) On donne $f'(5) = 2$.
La tangente à la courbe de f en 5 a pour équation $y = 2x - 11$.

4) On donne $f(3) = 4$ et $f'(3) = 5$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 3 est égal à 5.

Exercice 15

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur [-20 ; 20].

(a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 11$

(b) $g(x) = (3-4x)e^{-0,5x}$

(c) $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$

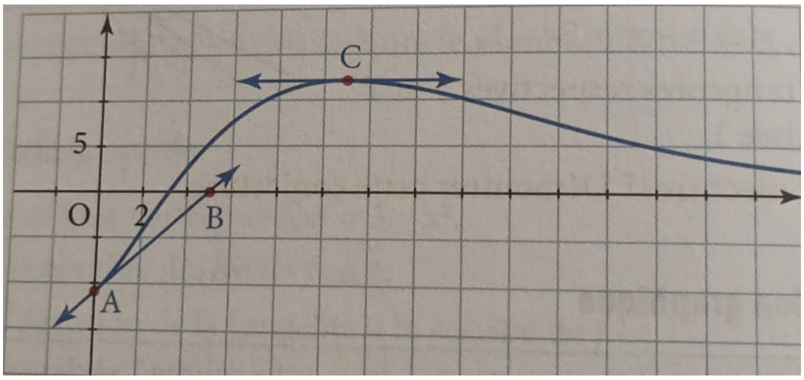
Exercice 16

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18



Dans le repère orthogonal donné ci-dessus, C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 30].
On donne A(0 ; -11), B(5 ; 0), C(11 ; y_c).
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse A passe par le point B.
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse C est parallèle à l'axe de abscisses.

PARTIE A

1) Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.
2) L'affirmation "La fonction f' est positive sur [3 ; 30]" est-elle vraie ?

PARTIE B

La fonction f est définie sur [0 ; 30] par $f(x) = (x^2 - 11)e^{-0,2x}$.
1) Déterminer $f'(x)$.
2) Etudier le signe de f' sur [0 ; 30] puis dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 30].

PARTIE C

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-2} *si nécessaire.*
La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle [5 ; 30] par la fonction f étudiée dans la **partie B**.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaine de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.
1) Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.
2) L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix.
On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \text{ lorsque } x \in [5; 30]$$

Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.

Exercice 19

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule : $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100; +\infty[$.
Par exemple, si le supermarché achète 300 kg de fruits, il devra payé $300 \times P(300) = 450$ *euros au fournisseur pour cette commande.*

PARTIE A : Etude du prix P proposé par le fournisseur.

1) Montrer que $P'(x) = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100; +\infty[$.

2) Donner le sens de variation de la fonction P sur $[100; +\infty[$.

PARTIE B : Etude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (*Ces fruits vendus par le fournisseur au prix de* $P(x)$ *euros par kilogramme*).
Cette somme est égale à : $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100; +\infty[$.

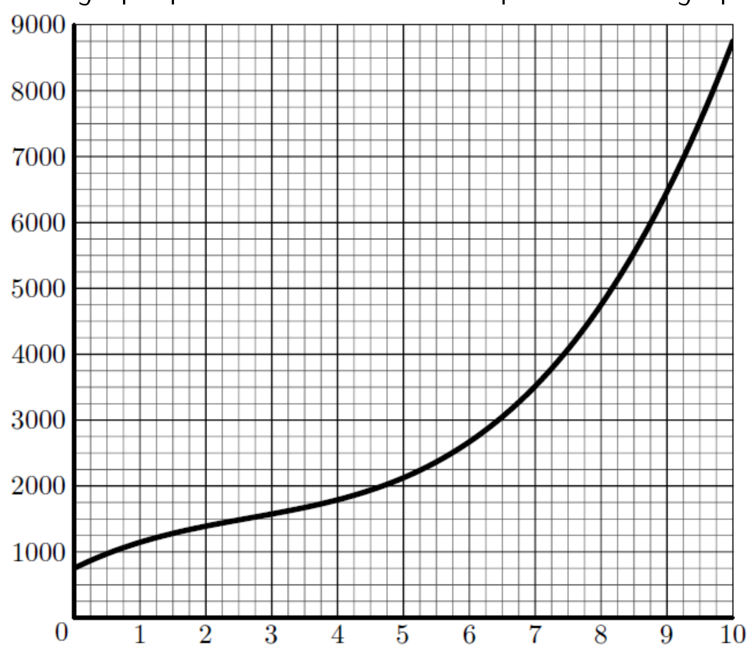
1) Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2 + 200x + 30000}{(x+100)^2}$

2) Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:$S(x) = x + 200 - 20000 \times \dfrac{1}{x+100}$

Exercice 20

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule : $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1) Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation : $y = 400x$.
Expliquer pourquoi, au vu de ce tracé, l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2) Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
(a) Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation : $y = 680x$.

(b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix du marché p est de 680 euros.

(c) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$, on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$

(d) Etudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B : Etude du coût moyen

On rapelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par : $C_M = \dfrac{C(x)}{x}$.

1) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, $C'_M = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

2) **(a)** Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, C'_M est du signe de $(x - 5)$. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $[0; 10]$.

(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?