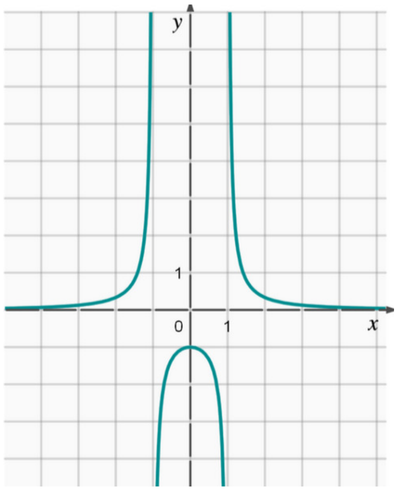
Nom : TCOM
Prénom : Date :

Contrôle : Les limites de fonctions

/4 **Exercice 1** : *Conjecturer une limite*



Graphiquement, on trouve :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
La courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

/7 **Exercice 2** : *Calculs de limites*

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 10 + e^x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 10 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 10 + e^x) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 10 + e^x)$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 10 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 10 + e^x) = -\infty$

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(\dfrac{2x - 1}{3 - x}\right)$

Etude du signe de $3 - x$: $3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} 2x - 1 = 5$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} 3 - x = 0^-$

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(\dfrac{2x - 1}{3 - x}\right) = -\infty$

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{3x^3 - 7}{1 - e^x}\right)$

Etude du signe de $1 - e^x$: $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 3x^3 - 7 = -7$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 - e^x = 0^-$

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{3x^3-7}{1-e^x}\right) = +\infty$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - 5\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x\sqrt{x} = +\infty$

Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - 5\right) = -5$

/3.5 **Exercice 3** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(a) Donner toutes les limites de f qui sont renseignées dans ce tableau.

D'après le tableau de variation, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(b) Dans un repère, C_f est la courbe représentative de f.
Déterminer les asymptotes de C_f.

La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$, une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

— **Dans l'intervalle** $]-\infty; -2[$ **:**
On a $f(x) > 3$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution sur $]-\infty; -2[$.

— **Dans l'intervalle** $]-2; 2[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-2; 2[$.
On a $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et f(2)=1.
Or, $0 \in]-\infty; 1[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2; 2[$.

— **Dans l'intervalle** $]2; +\infty[$ **:**
On a f(2)=1 et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Or, $0 \in]1; 0[$
Donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution sur $]2; +\infty[$.

— On déduit de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

/5.5 **Exercice 4 :**

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

1) Justifier la continuité de la fonction f.

D'après la lecture du tableau de variations, la fonction f est continue sur $]-\infty;-2[$ puis sur $]-2;1[$ puis sur $]1;+\infty[$.

2) Déterminer le nombre de solutions de $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

— **Dans l'intervalle** $]-\infty;-2[$ **:**
On a $f(x)>2$.
Donc l'équation $f(x)=0$ ne possède pas de solution sur $]-\infty;-2[$.

— **Dans l'intervalle** $]-2;1[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-2;1[$.
On a $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$.
Or, $0\in]-\infty;+\infty[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]-2;1[$.

— **Dans l'intervalle** $]1;+\infty[$ **:**
D'après le tableau de variations, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$.
Or, $0\in]-\infty;1[$
Donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

— On déduit de cette étude que l'équation $f(x)=0$ possède deux solutions sur $\mathbb{R}$.

3) BONUS : Déterminer la valeur des solutions α_1 et α_2. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		α_1		1		α_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	