Les fonctions de référence ou usuelles

I- Les fonctions affines :

1- Définition :

f est une fonction affine lorsque il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Remarque si $b = 0$ la fonction f est dite linéaire.

2- Variations d'une fonction affine

Théorème :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ • Si $a > 0$ la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ • Si $a < 0$ la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ • Si $a = 0$ la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Dresser alors le tableau de variation correspondant

3- Représentation graphique d'une fonction affine :

Théorème :

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$

4- Signe d'une fonction affine pour $a \neq 0$

Résolution de $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{a} \qquad$ $+\infty$
Signe de $ax + b$	$signe\ de\ (-a)$ $\quad 0 \quad$ $signe\ de\ a$

En résumé, on a deux tableaux de signe possibles :

Si $a > 0$ la seconde ligne est $\quad - \quad 0 \quad +$

Si $a < 0$ la seconde ligne est $\quad + \quad 0 \quad -$

II- La fonction carrée.

1- Définition

La fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

2- Variations de la fonction carrée

Théorème :

> La fonction carrée $f: x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Démonstration :

Tableau de variation :

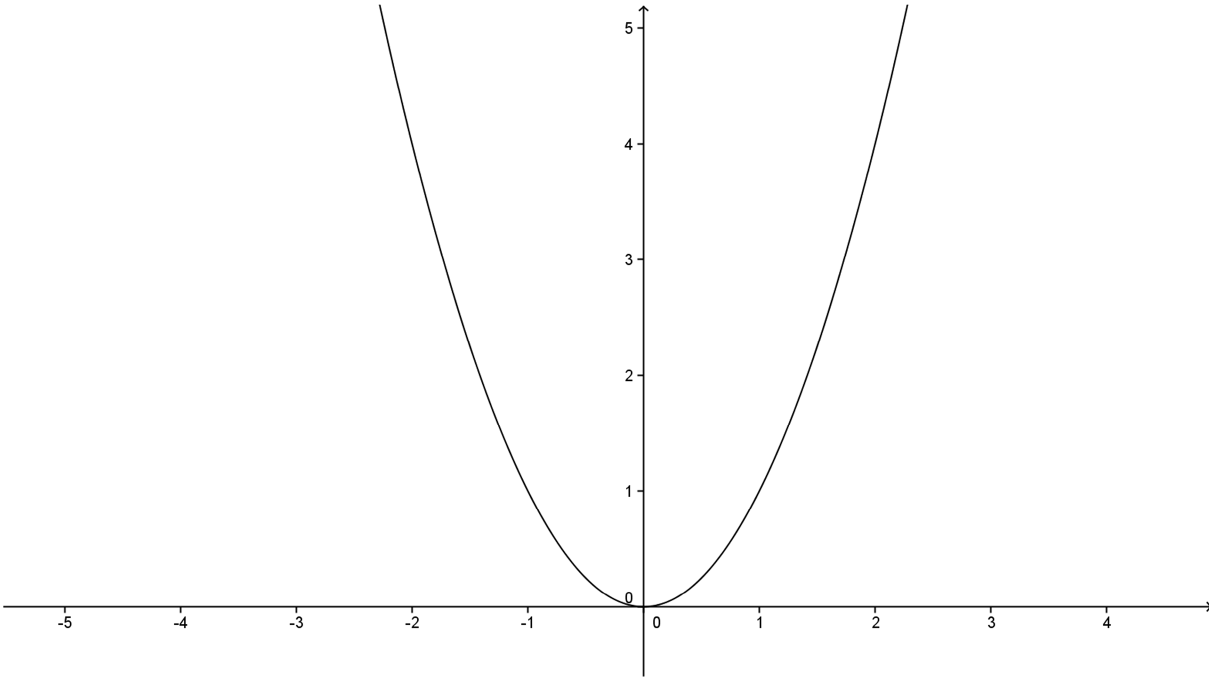
3- Courbe représentative

Définition :

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la fonction carrée est représentée par une courbe appelée **parabole** d'équation $y = x^2$, de sommet l'origine du repère et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées

Tableau de valeurs :

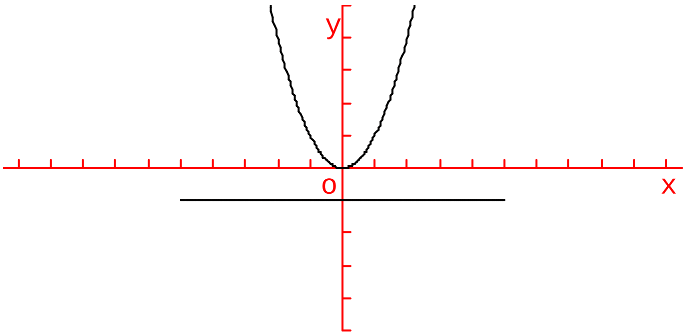
x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0,25	0	0,25	1	4



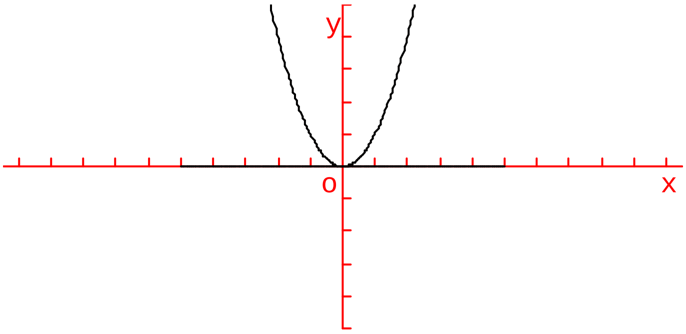
4- Résolution d'équation ou d'inéquations

Equations $x^2 = a$ où a est un réel quelconque

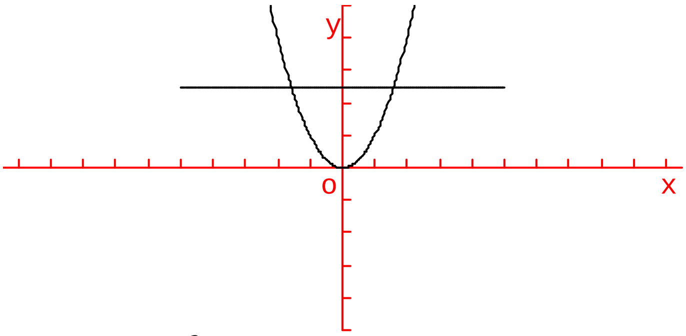
si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$



si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une unique solution $x = 0$



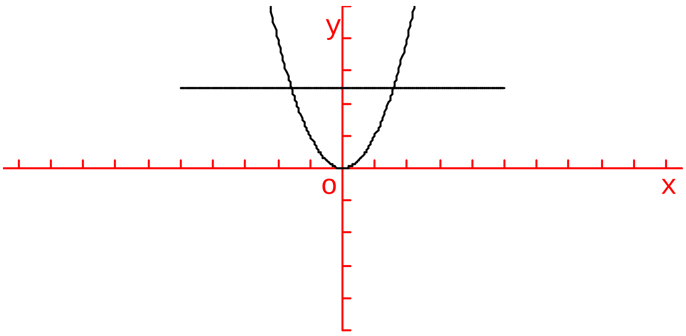
Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions opposées : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$



Résolution de $x^2 \leq a$

Si $a < 0$ cette inéquation n'a pas de solution

Si $a \geq 0$ alors



III- La fonction inverse

1- Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

Pour tout réel $x \neq 0$ $f(x) = \frac{1}{x}$ soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

2- Variation de la fonction inverse

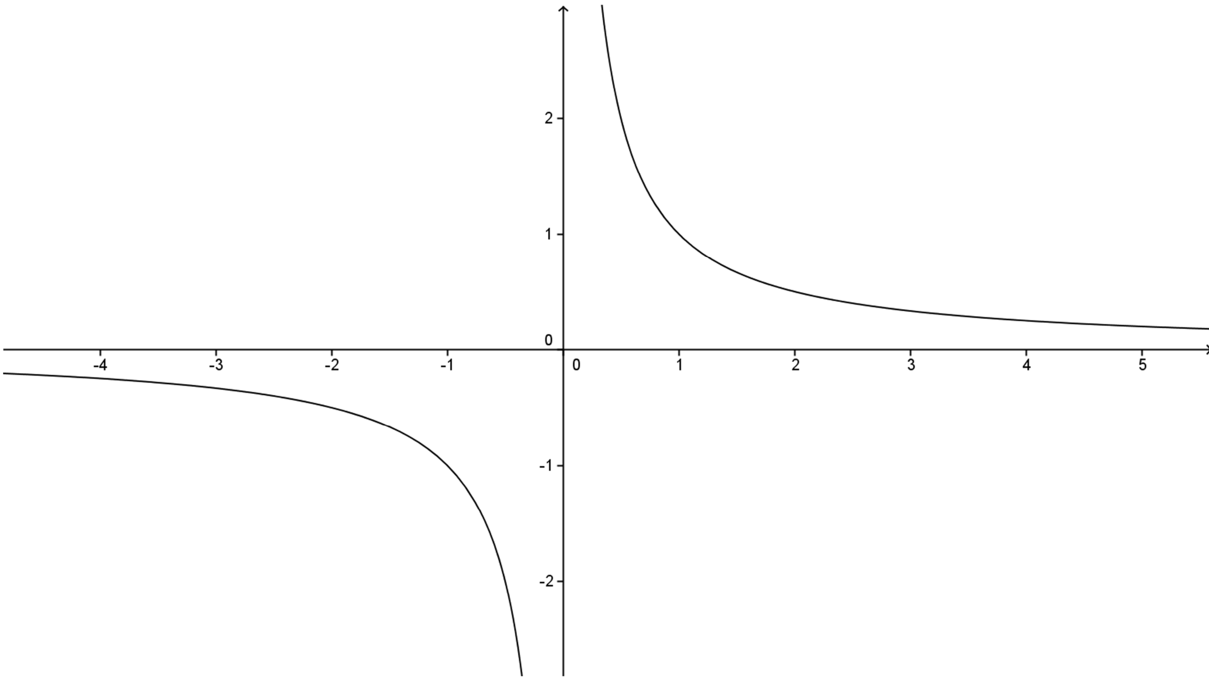
Théorème :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Démonstration :

3- Courbe représentative.

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la fonction inverse est représentée par une courbe appelée hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$, comme 0 n'a pas d'image par la fonction inverse, il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur sa courbe.



IV- Applications.

A- Les fonctions polynômes du second degré $x\mapsto ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

1- Définition

On dit qu'une fonction f est une fonction polynôme du second degré lorsqu'il existe trois réels a,b et c, avec $\boldsymbol{a\neq 0}$ tels que
pour tout réel x on a $f(x)=ax^2+bx+c$.

Remarque :

Si $a=0$ ces fonctions sont des fonctions affines il est donc nécessaire et suffisant que a soit non nul pour que la fonction soit du second degré.

2- Conséquence

Les fonctions polynômes du second degré $x\mapsto ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

3- Exemples

Les fonctions suivantes sont toutes des fonctions polynômes du second degré :

$f: x\mapsto 2x^2$ $\quad$ $g: x\mapsto -x^2+1$ $\quad$ $h: x\mapsto 3x^2+x-2$

Donner dans chaque cas les valeurs de a,b et c.

4- Forme canonique

Théorème :

Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et f une fonction telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ alors f est une fonction polynôme du second degré.

Réciproquement :

> Soient a un réel tel que $a \neq 0$ et f une fonction polynôme du second degré dont a est le coefficient du monôme en x^2 alors il existe deux réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Démonstration :

Définition : l'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de la fonction f.

Théorème :

Soit f une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alors les réels α$= -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ sont tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

5- Variations de la fonction f

Théorème : Admis

> Soit f une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ alors :
>
> - Si $a < 0$ la fonction f est croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, elle admet un maximum de valeur β atteint pour $x = \alpha$
> - Si $a > 0$ la fonction f estdécroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$, elle admet un minimum de valeur β atteint pour $x = \alpha$

Tableau de variation

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

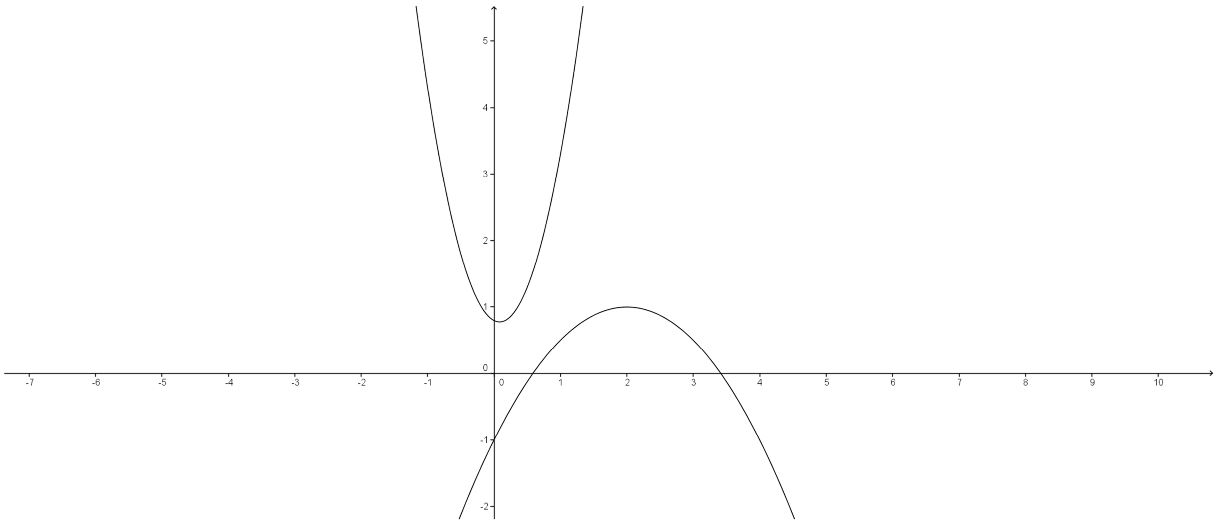
$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

6- Courbe représentative

Théorème :

> Dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative de la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, de sommet $S(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et β$= f(\alpha)$ et d'axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.


-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
5
4
3
2
1
0
-1
-2