Plan du cours

Chapitre . . . : Calcul littéral (2)

I. Factoriser une expression algébrique

Définition

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme de produits de facteurs.

Propriété

Soients a, b et k trois nombres.

$k \times a + k \times b = k(a+b)$ $\qquad$ $k \times a - k \times b = k(a-b)$

Exemples résolus :

$J = 2x^2 + 16x^3$
$J = 2 \times x \times x \times 1 + 2 \times 8 \times x \times x \times x$
$J = 2x^2(1 + 8x)$

$W = 16 + 4x$
$W = 4 \times 4 + 4 \times x$
$W = 4(4 + x)$

$V = 20x + 25x^2$
$V = 5 \times 4 \times x + 5 \times 5 \times x \times x$
$V = 5x(4 + 5x)$

$I = -10x^2 - 12x^3$
$I = -2 \times 5 \times x \times x - 2 \times 6 \times x \times x \times x$
$I = -2x^2(5 + 6x)$

Méthode pour factoriser une expression lorsque le facteur commun est du type (ax+b) avec a et b deux nombres :

Factoriser l'expression $P = (3x+4)(x-8) - (3x+4)(5x+3)$

$P = \underline{(3x+4)}(x-8) - \underline{(3x+4)}(5x+3)$ → On repère le facteur commun

$P = \underline{(3x+4)}[(x-8) - (5x+3)]$ → On factorise par ce facteur commun

$P = \underline{(3x+4)}(x - 8 - 5x - 3)$ → On supprime les parenthèses du second facteur

$P = \underline{(3x+4)}(-4x - 11)$ → On réduit le second facteur

Exemples résolus :

$Q = (2x+1)(x+4) - (2x+1)(7-5x)$

$Q = \underline{(2x+1)}[(x+4) - (7-5x)]$

$Q = \underline{(2x+1)}(x + 4 - 7 + 5x)$

$Q = \underline{(2x+1)}(-3 + 6x)$

$R = (1+5x)(4-x) + (4-x)(-6x+3)$

$R = \underline{(4-x)}[(1+5x) + (-6x+3)]$

$R = \underline{(4-x)}(1 + 5x - 6x + 3)$

$R = \underline{(4-x)}(4-x) = (4-x)^2$

II. Les identités remarquables

1. Développer avec les identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemples : Développer les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$T = (x-3)^2$
$T = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
$T = x^2 - 6x + 9$

$U = (2x+5)^2$
$U = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2$
$U = 4x^2 + 20x + 25$

$L = (9-x)^2$
$T = 9^2 - 2 \times 9 \times x + x^2$
$T = 81 - 18x + x^2$

$J = (x+1)(x-1)$

$J = x^2 - 1$

$O = (2-3x)(2+3x)$
$O = 2^2 - (3x)^2$
$O = 4 - 9x^2$

$I = (2x-7)(2x+7)$
$I = (2x)^2 - 7^2$
$I = 4x^2 - 49$

Développements plus difficiles : Développer puis réduire $A = (2x+6)^2 + (x+1)(x-1)$

On reconnait les identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

On obtient :

$A = (2x+6)^2 + (x+1)(x-1)$

$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2 + x^2 - 1$

$A = 4x^2 + 24x + 36 + x^2 - 1$

$A = 4x^2 + 24x + 36 + x^2 - 1$ *(Ensuite, on réduit l'expression)*

$A = 5x^2 + 24x + 35$

2. Factoriser avec les identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres a et b, on a :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$K = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $H = 9x^2 + 30x + 25$ $\quad$ $B = 25x^2 - 49$ $\quad$ $G = 81 - 121x^2$

$\rightarrow K = x^2 + 2x + 1$

Je remarque que c'est la première identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = x^2$ Donc $a = x$ $\qquad$ $b^2 = 1$ Donc $b = 1$

Je peux donc factoriser : $\boxed{K = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow H = 9x^2 + 30x + 25$

Je remarque que c'est la première identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 9x^2$ Donc $a = 3x$ $\qquad$ $b^2 = 25$ Donc $b = 5$

Je peux donc factoriser : $\boxed{H = 9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow B = 25x^2 - 49$

Je remarque que c'est la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 25x^2$ Donc $a = 5x$ $\qquad$ $b^2 = 49$ Donc $b = 7$

Je peux donc factoriser : $\boxed{B = 25x^2 - 49 = (5x+7)(5x-7)}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

$\rightarrow G = 81 - 121x^2$

Je remarque que c'est la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Je repère les valeurs de a et de b :

$a^2 = 81$ Donc $a = 9$ $\qquad$ $b^2 = 121x^2$ Donc $b = 11x$

Je peux donc factoriser : $\boxed{G = 81 - 121x^2 = (9+11x)(9-11x}$
(Je peux ensuite développer pour me vérifier)

III. Les équations-produits

1. Reconnaître une équation produit

Définition

a, b, c et d désignent des nombres.
Une équation de la forme (ax + b)(cx + d) = 0 est une équation produit.

Exemple :

L'équation $(3x-5)(9-x) = 0$ s'appelle une équation produit nul car :

- L'un des membres est un produit de facteurs.

- L'autre membre est 0.

- Si l'on développe le premier membre de cette équation, on s'aperçoit que cette équation est du second degré.
- Pour obtenir une équation produit, il est parfois nécessaire de factoriser l'équation donnée.

Exercice d'application 1

Transformer les équations suivantes pour qu'elles deviennent des équations produits.
Il faudra factoriser le membre de gauche après s'être assurer que le membre de droite soit égal à 0.

(a) $(9x-4)(11-2x)-(5x-6)(9x-4)=0$

$(9x-4)[(11-2x)-(5x-6)]=0$

$(9x-4)[11-2x-5x+6]=0$

$(9x-4)(17-7x)=0$

(b) $9x^2-144=0$

$9x^2-144=0$

$(3x)^2-12^2=0$

$(3x-12)(3x+12)=0$

(c) $(3-x)(2x+7)=(6x-1)(2x+7)$

$(3-x)(2x+7)-(6x-1)(2x+7)=0$

$(2x+7)[(3-x)-(6x-1)]=0$

$(2x+7)[3-x-6x+1]=0$

$(2x+7)(4-7x)=0$

(d) $16x^2-8x=-1$

$16x^2-8x=-1$

$16x^2-8x+1=0$

$(4x-1)^2=0$

2. Résoudre une équation produit

Enoncé : Résoudre l'équation : (x + 2)(2x - 7) = 0.

Résolution :

(x + 2)(2x - 7) = 0 est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $x+2=0$ **ou** $2x-7=0$

$x=-2$ **ou** $2x=7$

$x=-2$ **ou** $x=\dfrac{7}{2}$

Les solutions de l'équation sont alors -2 et $\dfrac{7}{2}$.

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

$$(-2x-1)(7-3x)=0$$

$(-2x-1)(7-3x)=0$ est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $-2x-1=0$ **ou** $7-3x=0$

$-2x=1$ **ou** $-3x=-7$

$x=-\dfrac{1}{2}$ **ou** $x=\dfrac{7}{3}$

Les solutions de l'équation sont alors $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{7}{3}$.

$$9x^2=36$$

Il faut commencer par transformer cette équation en équation produit.

$$9x^2=36$$

$$9x^2-36=0$$

$$(3x)^2-6^2=0$$

$(3x-6)(3x+6)=0$ est une équation produit.

Or, si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Ainsi, $3x-6=0$ **ou** $3x+6=0$

$3x=6$ **ou** $3x=-6$

$x=\dfrac{6}{3}=2$ **ou** $x=-\dfrac{6}{3}=-2$

Les solutions de l'équation sont alors 2 et -2.