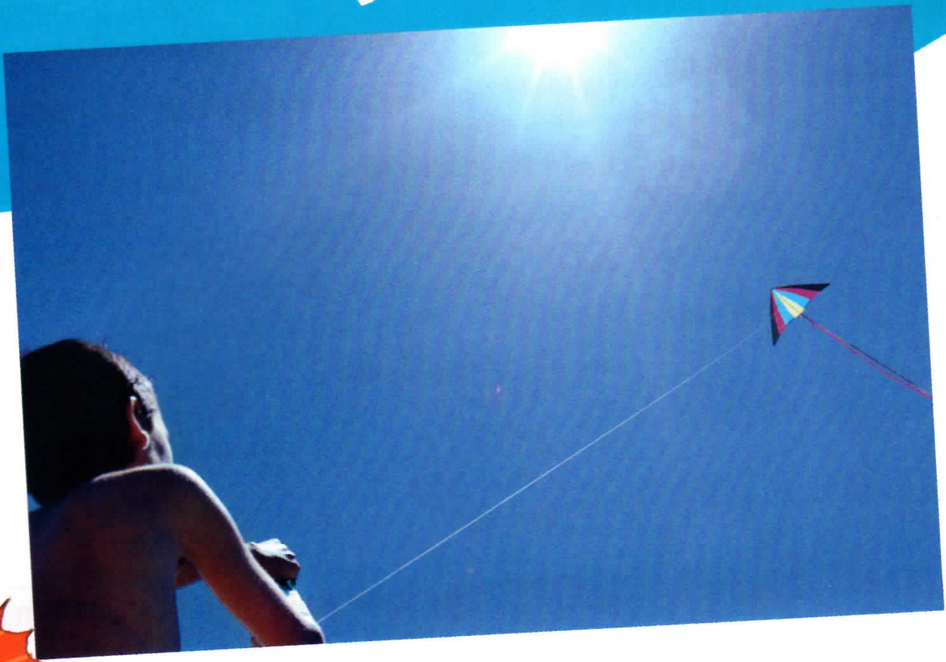
12 Triangle rectangle et cosinus d'un angle aigu



À quelle hauteur vole ce cerf-volant ?

Grâce au cosinus, vous saurez à quelle **hauteur** vole le cerf-volant si la **longueur de la corde** est 100 mètres et si **l'angle** formé par la corde et la verticale mesure 60°.

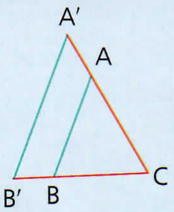
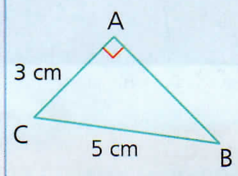
Les géomètres arabes Mohammed al Battani (850-929) et Muhammad Abu'l-Wafa (940- 998) ont calculé les **premières tables** donnant la valeur du cosinus en fonction de la mesure de l'angle. Elles furent perfectionnées par le mathématicien français François Viète (encore lui !) qui publia en 1579, le premier véritable ouvrage de **trigonométrie** (*Canon mathematicus*), nom donné à cette branche des mathématiques qui traite des **rapports de distances et d'angles** dans les triangles.
Les mathématiques ont une longue histoire internationale !

Quand on connaît le **cosinus** d'un angle, on peut alors facilement **calculer l'éloignement** d'un objet. Le géomètre grec Thalès (encore lui !) mesura par une telle méthode l'éloignement d'un navire par rapport à la côte.
Ainsi, nous mesurons ce qui nous **semblait impossible** à mesurer !

Pour bien commencer

QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	L'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en A est le côté …	[AB].	[BC].	[CA].
2	Le quotient $\frac{4}{7}$ est …	inférieur à 1.	supérieur à 1.	un nombre décimal.
3	Si $0{,}8 = \frac{x}{5}$, alors :	$x = \frac{5}{0{,}8}$.	$x = 5 \times 0{,}8$.	$x = \frac{0{,}8}{5}$.
4	Si $\frac{3}{4} = \frac{x}{5}$, alors :	$x = \frac{4}{3 \times 5}$.	$x = \frac{4 \times 3}{5}$.	$x = \frac{3 \times 5}{4}$.
5	Si $\frac{3}{x} = 5$, alors :	$x = 3 \times 5$.	$x = \frac{3}{5}$.	$x = \frac{5}{3}$.
6	 Dans la figure ci-contre : $A \in [CA']$, $B \in [CB']$ et $(AB) \mathbin{/\!/} (A'B')$. Donc :	$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB'}{CB}$.	$\frac{CA}{CA'} = \frac{A'B'}{AB}$.	$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}$.
7	 Dans le triangle ABC ci-contre :	AB = 4 cm.	AB = 3 cm.	AB = 2 cm.
8	Si $EF^2 = ED^2 + DF^2$, alors le triangle EDF est	rectangle en E.	rectangle en D.	rectangle en F.

Exercice 1 Déterminer l'arrondi à l'unité, au dixième, au centième et au millième de chacun des nombres suivants.

a. $\frac{123}{7}$. **b.** $\frac{7}{13}$. **c.** $\frac{2}{17}$. **d.** $\frac{19}{23}$.

Exercice 2 Calculer le nombre x dans chacun des cas suivants.

a. $\frac{x}{3} = 0{,}25$. **b.** $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$. **c.** $\frac{2}{x} = 0{,}5$. **d.** $\frac{5}{x} = \frac{1}{8}$.

Exercice 3 Calculer le nombre x dans chacun des cas suivants.

a. $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$. **b.** $\frac{x+1}{x} = \frac{9}{5}$. **c.** $\frac{x-5}{x} = \frac{12}{13}$. **d.** $\frac{x}{x-3} = \frac{11}{5}$.

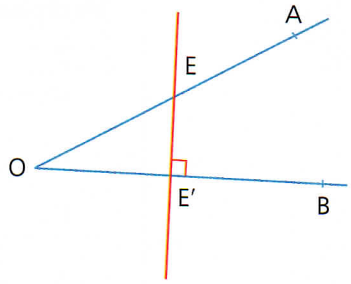
Activités

Activité 1 Cosinus d'un angle aigu

A Conjecturer sans logiciel

1. Tracer un angle aigu $\widehat{AOB}$ de sommet O.

2. **a.** Placer un point E appartenant à la demi-droite [OA) et tracer la droite perpendiculaire à [OB) passant par E ; elle coupe [OB) en E'.
b. Mesurer OE et OE'.
En déduire une valeur approchée du quotient $\frac{OE'}{OE}$.



3. **a.** Choisir un point F, distinct de E, appartenant à la demi-droite [OA).
Tracer la droite perpendiculaire à [OB) passant par F ; elle coupe [OB) en F'.
b. Mesurer OF et OF'.
En déduire une valeur approchée du quotient $\frac{OF'}{OF}$.
Que remarque-t-on ?

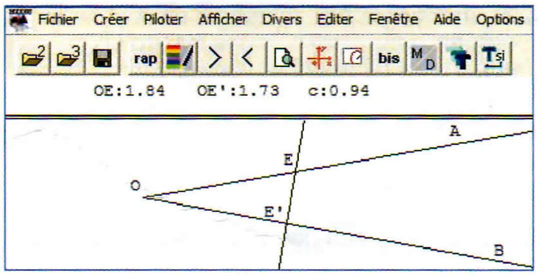
4. Reprendre les questions 1 à 3 avec un autre angle.

5. Quelle conjecture peut-on émettre ?

B Conjecturer avec un logiciel de géométrie

1. **a.** Créer trois **points** O, A et B tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit aigu.
b. Créer les **demi-droites** [OA) et [OB).
c. Créer un **point** E **sur** la demi-droite [OA) **(O exclu)**.
d. Créer la **droite perpendiculaire** à la demi-droite [OB) et passant par E, puis créer le **point d'intersection** E' de cette droite et de la demi-droite [OB).

2. **a.** Afficher la **longueur** des segments [OE] et [OE'], arrondie au centième.
b. À l'aide de la **fonction calculatrice** du logiciel afficher la valeur de $\frac{OE'}{OE}$, arrondie au centième.



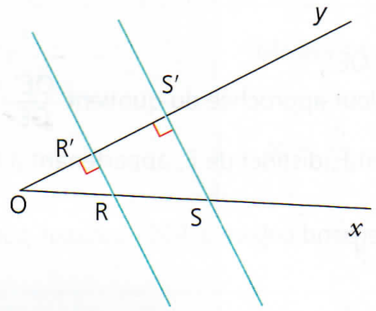
3. **Déplacer** le point E sur la demi-droite [OA).
Que remarque-t-on ?

4. **Déplacer** les points A et B, puis **déplacer** de nouveau le point E sur la demi-droite [OA).

5. Quelle conjecture peut-on émettre ?

C Démontrer

1 Faire une figure analogue à la figure ci-dessous dans laquelle :
$\widehat{xOy}$ est un angle aigu ;
R et S sont deux points de la demi-droite [Ox) ;
R′ et S′ sont deux points de la demi-droite [Oy) ;
les droites (RR′) et (SS′) sont perpendiculaires à [Oy).



2 **a.** Que peut-on dire des points O, R, S d'une part, O, R′, S′ d'autre part ?
b. Que peut-on dire des droites (RR′) et (SS′) ?
c. Quelle propriété permet d'obtenir l'égalité : $\frac{OR}{OS} = \frac{OR'}{OS'}$?
d. Que peut-on dire des produits $OR \times OS'$ et $OR' \times OS$?
e. En déduire l'égalité : $\frac{OS'}{OS} = \frac{OR'}{OR}$.

Pour conclure

Le quotient $\frac{OR'}{OR}$ est indépendant de la position du point R sur le côté [Ox) de l'angle $\widehat{xOy}$ mais il dépend de l'angle formé par les deux demi-droites [Ox) et [Oy).
Le quotient $\frac{OR'}{OR}$ s'appelle **le cosinus de l'angle $\widehat{xOy}$**.

Activité 2 Dans un triangle rectangle

1 Tracer un triangle ABC rectangle en A.

2 **a.** Quels sont les côtés de l'angle $\widehat{ABC}$?
b. Exprimer le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ à l'aide des longueurs des côtés du triangle ABC.

3 Exprimer le cosinus de l'angle $\widehat{BCA}$ à l'aide des longueurs des côtés du triangle ABC.

4 Dans un triangle rectangle, celui des deux côtés d'un angle aigu qui n'est pas l'hypoténuse est appelé **le côté adjacent** à l'angle.
Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$? à l'angle $\widehat{BCA}$?

Pour conclure

Recopier et compléter la propriété suivante :
Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté ... à cet angle par ...