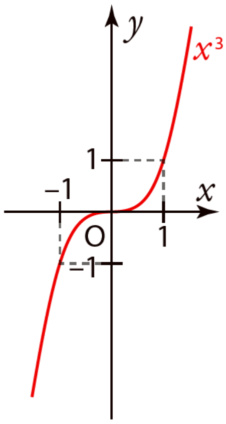
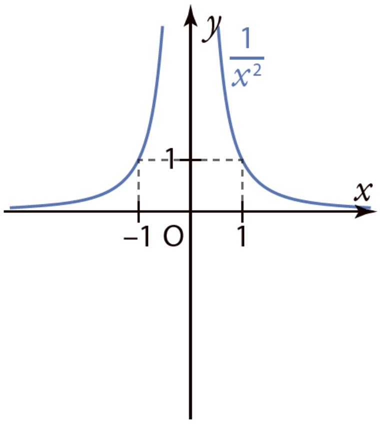
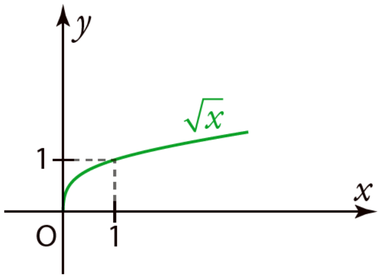
Plan du cours

Activité d'introduction 1 : Notion de limites, notion d'asymptote

On donne les représentations des fonctions cube $x \mapsto x^3$, inverse au carré $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.







1) En lisant les courbes, donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

2) **(a)** Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

(b) Comment se comporte la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des abscisses ?
On dit alors que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

3) **(a)** Donner la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}$

(b) Comment se comporte la courbe en 0 de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des ordonnées ?
On dit alors que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

4) Donner la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$.

Activité d'introduction 2 : Faire des opérations sur les limites

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1) Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 3$. Pourquoi peut-on affirmer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 3$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

3) Vérifier que pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$. Donner la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$.
Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

I. Limites de fonctions

1) Limite en l'infini

(a) Limite finie et asymptote horizontale

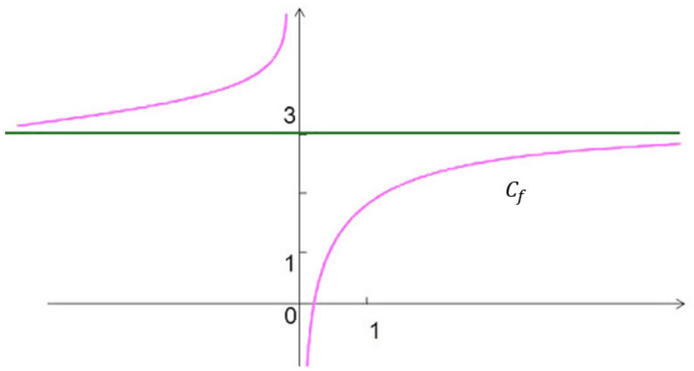
Définition **Asymptote horizontale**

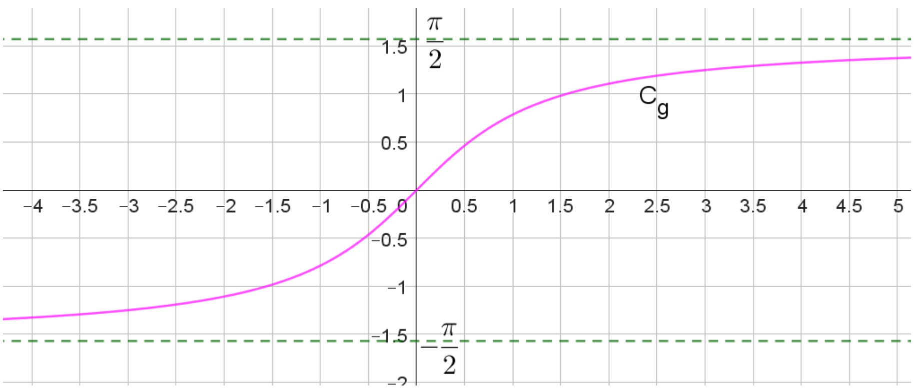
Soit a un réel.
Dire que $f(x)$ tend vers a quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de a, pour x suffisamment grand (ou petit).

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

On dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ ou en $+\infty$.

<u>Exemples :</u> Soient $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $g(x) = tan^{-1}(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:





(b) Limite infinie

Définition

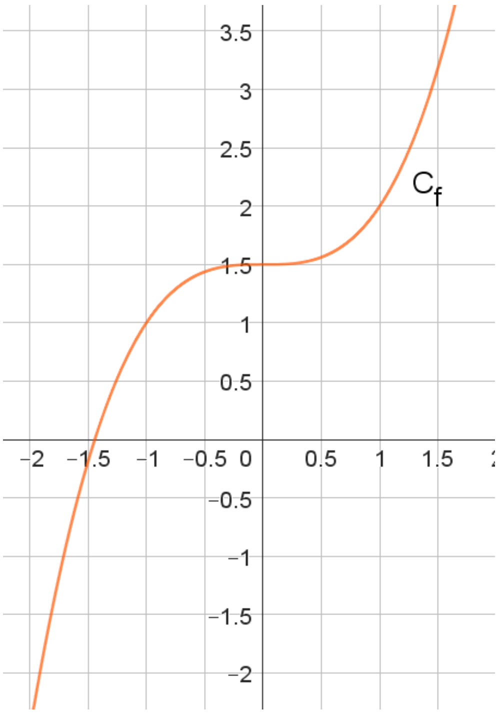
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

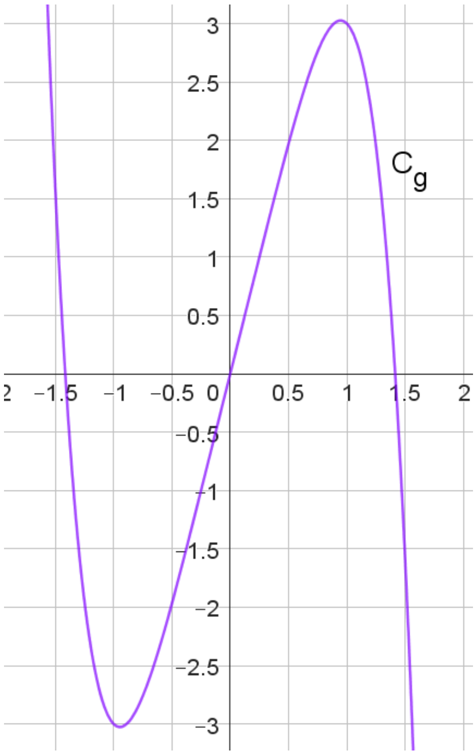
On écrit alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : On définit de façon analogue :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

<u>Exemples :</u> Soient $f(x) = -0,5x^3 + 1,5$ et $g(x) = -x^5 + 4x$ définies sur $\mathbb{R}$:





Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite en l'infini. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

(c) Limite des fonctions de références

$f(x) =$	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	e^{ax}
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$	non définie	0 si $a > 0$ $-\infty$ si $a < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $a > 0$ 0 si $a < 0$

2) Limite en un point

(a) Limite infinie et asymptote verticale

Définition

Soit un réel a qui appartient ou est une borne de lensemble de définition de f.
Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x très proche de a.

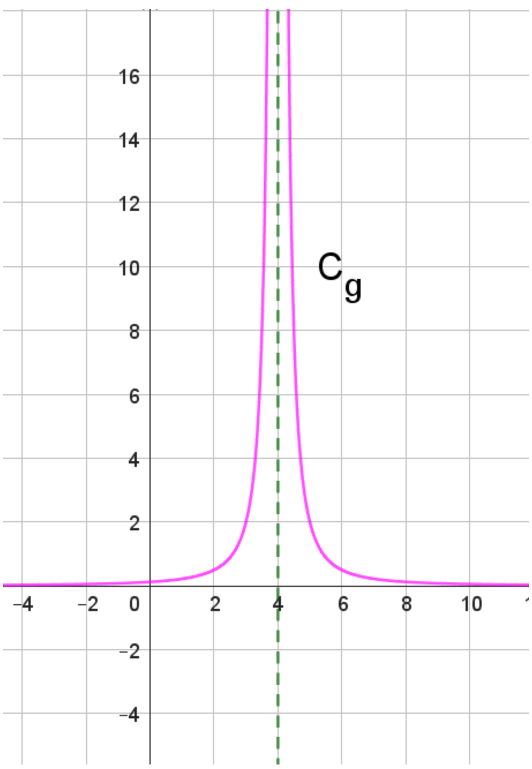
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

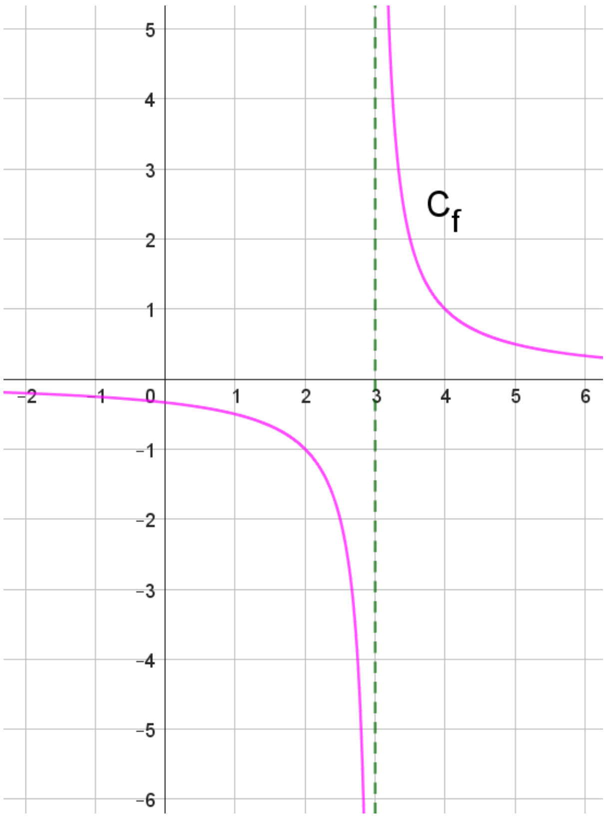
On dit que la droite déquation $x = a$ est asymptote à la courbe.

Remarques :

- De manière analogue, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue quand x est très proche de a.
- Il peut y a voir une limite à droite et à gauche.

Exemples : Soient $g(x) = \dfrac{2}{(x-4)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$:





(b) Limite à gauche et à droite

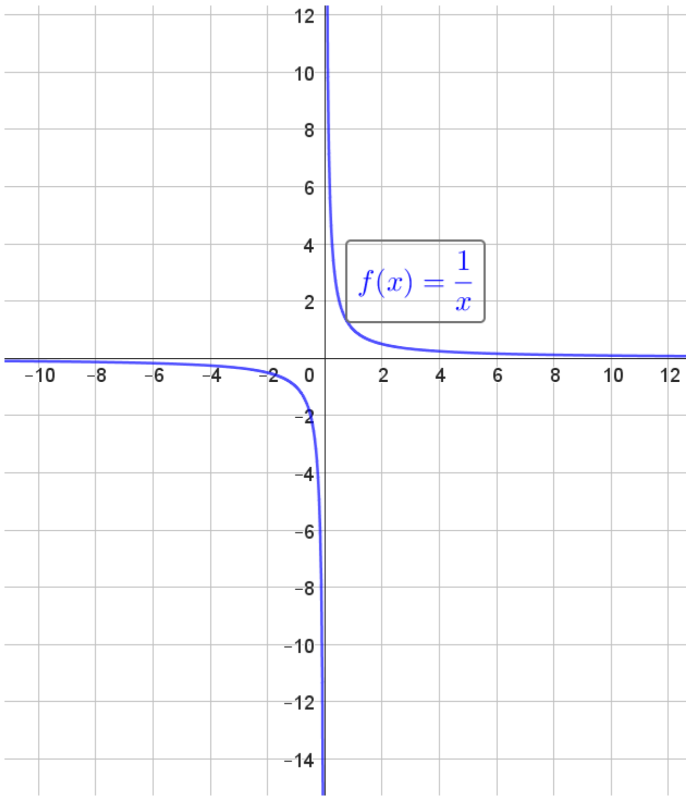
Exemple : Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction f admet des limites différentes en 0 selon que :
$x > 0$ *(soit 0^+)* ou $x < 0$ *(soit 0^-)*.

Déterminons ces 2 limites :

- **Si $x > 0$:** *(on parle de limite à droite de 0)*
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- **Si $x < 0$:** *(on parle de limite à gauche de 0)*
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Remarque : Les limites à gauche et à droite de $\dfrac{1}{x}$ en 0 ne sont pas égales, **on dit donc que la limite de la fonction f en 0 n'existe pas**.



(c) Limite finie

Définition

Soit une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et ℓ deux réels.
On dit que f admet ue limite ℓ lorsque x tend vers a si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de ℓ que l'on veut quand x est très proche de a.

Òn écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$

Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2, x^3 est très proche de 8, donc $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de $f(2) = 3$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

(d) Limite des fonctions de références

$f(x) =$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non définie

II. Opération sur les limites

f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels.
α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

*Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 + \frac{1}{x} = ?$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 + \frac{1}{x} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x - 3 = ?$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3 = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x - 3 =$ est **une forme indéterminée**, on ne peut donc rien conclure.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} [f(x) \times g(x)] =$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	F.I.

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$: on applique la règle des signes pour déterminer si le produit est positif ou négatif.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)(5+x^2) = \mathbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+x^2 = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)(5+x^2) = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\sqrt{x} = \mathbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-1 = -1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\sqrt{x} = -\infty$

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\dfrac{1-2x}{x-3} = \mathbf{?}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} 1-2x = -5$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-$

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\dfrac{1-2x}{x-3} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{7-x}{\sqrt{x}} = \mathbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} 7-x = 7$
et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x} = 0^+$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{7-x}{\sqrt{x}} = +\infty$

III. Continuité d'une fonction

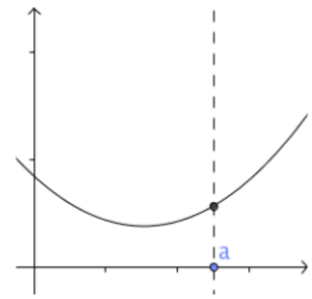
La notion de continuité d'une fonction f est très importante, car elle permet,entre autre, de déterminer l'existence de solution(s) pour des équations du type $f(x) = k$.

1) Notion intuitive de continuité

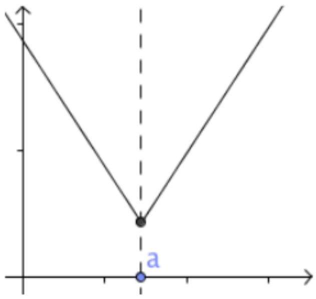
Définition

On considère une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

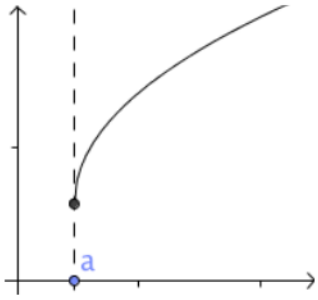
Exemples et contre-exemples :



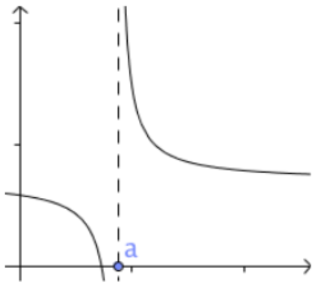
f est continue en a



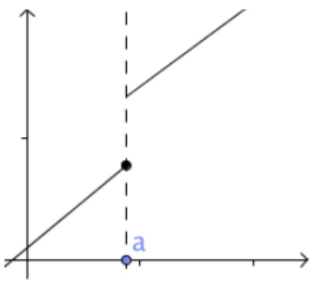
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

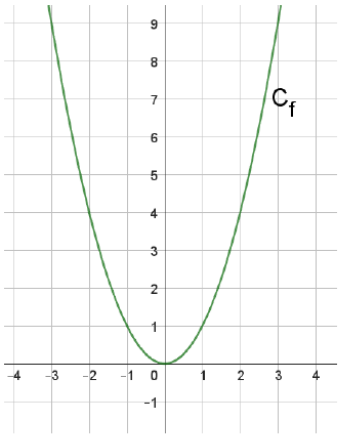
2) Continuité des fonctions de références

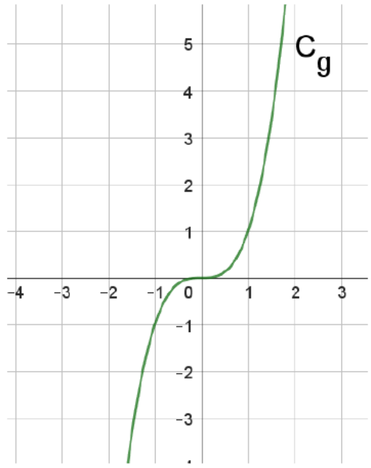
Propriété

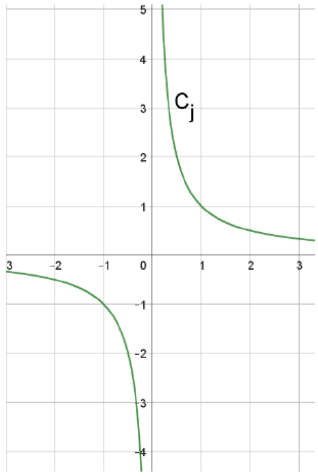
Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

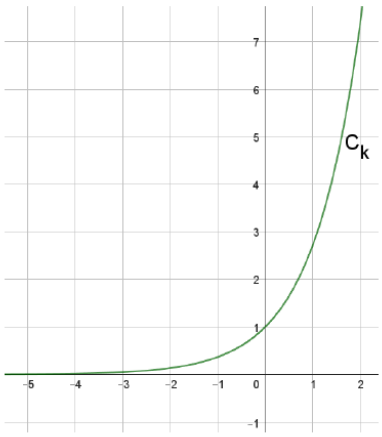
f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

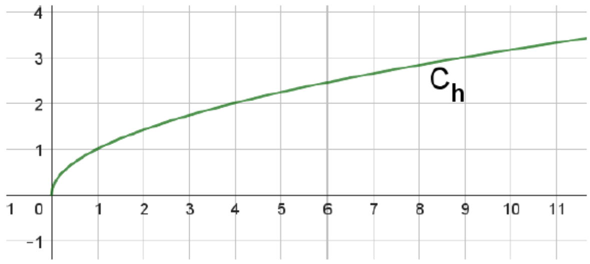
Remarque : jusqu'à présent la flèche oblique dans un tableau de variation traduisait la stricte monotonie d'une fonction, on convient à partir de maintenant qu'elle traduit aussi la continuité de la fonction sur l'intevalle considéré.


Cf


Cg


Cj


Ck


Ch

3) Théorème des valeurs intermédiaires

Activité d'introduction : On donne le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		-3		-1		1
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

Lire dans le tableau de variation de la fonction f le ou les solution(s) des équations suivantes :

1) $f(x) = 18$ sur l'intervalle]-1 ;1[

f(-1)=-1 et f(1)=19 Donc, 18 est compris entre -1 et 19. L'équation $f(x) = 18$ possède une solution dans l'intervalle]-1 ;1[.

2) $f(x) = 0$ sur l'intervalle]-1 ;1[

f(-1)=-1 et f(1)=19 Donc, 0 est compris entre -1 et 19. L'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle]-1 ;1[.

3) $f(x) = 0$ sur l'intervalle]-4 ;1[

0 est compris entre -1 et 3, entre 3 et -1 et entre -1 et 19. L'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans chacun des intervalles suivants]-4 ;-3[,]-3 ;-1[et]-1 ;1[.

4) $f(x) = -3$ sur l'intervalle]-4 ;1[

L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

5) $f(x) = 3$ sur l'intervalle]-4 ;1[

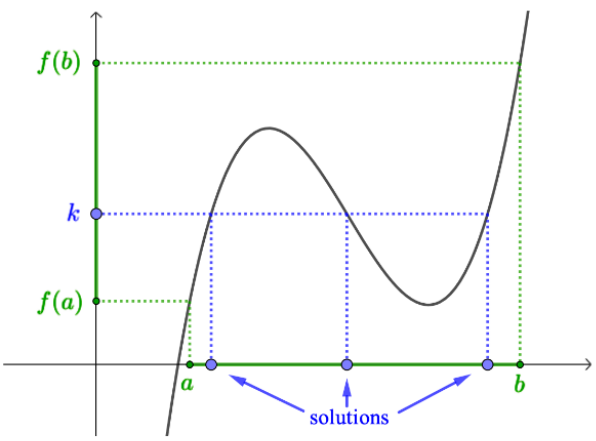
L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $]-1;1[$.

Comme nous l'avons dit en introduction, la continuité a une application très importante : la détermination de l'existence de solutions à pour des équations du type $f(x) = k$.

(a) Cas général

Propriété

Soit f une **fonction continue** sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** sur l'intervalle $[a;b]$.



Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation f(x)= 2 admet au moins une solution sur [-1 ; 4].

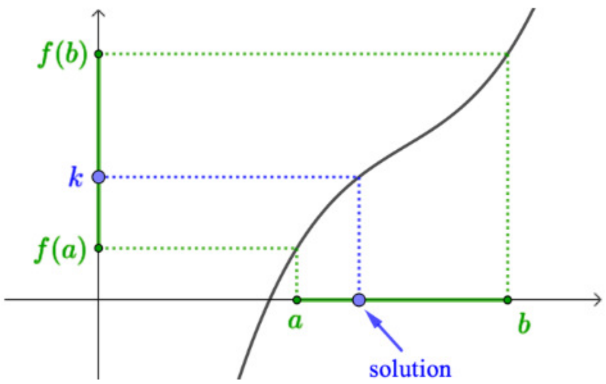
- f est continue sur [-1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-1) = 1$ et $f(4) = 6$
  Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation f(x) = 2 admet au moins une solution sur l'intervalle [-1 ; 4].

(b) Cas des fonctions strictement monotones

Propriété

Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** sur l'intervalle $[a; b]$.



Exemple :
Soit $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 12$ sur [4 ; 9].
Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique sur [4 ; 9].

- On admet que f est continue sur [4 ; 9] (car la somme de fonctions continues est continue)
- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 0$ sur [4 ; 9] donc f est strictement croissante sur [4 ; 9].
- $f(4) = -6$ et $f(9) = 9$
  Donc 0 est compris entre $f(4)$ et $f(9)$.

D'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f (x) = 0 admet une unique solution dans [4 ; 9].