Plan du cours

Chapitre 4 : Vecteurs (Partie 1)

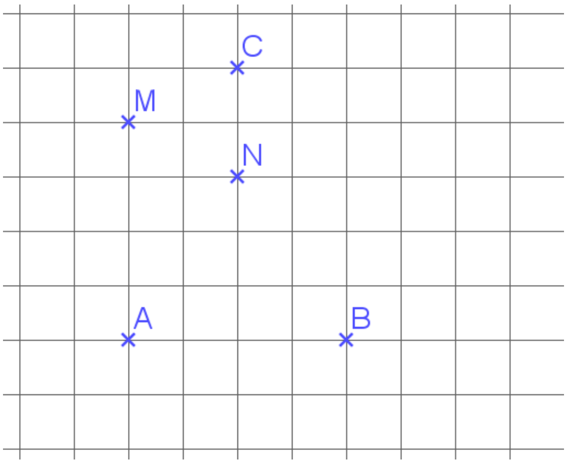
I. Notion de vecteurs

1. Translations et vecteurs

Définition

On dit que D est l'image de C par **la translation qui transforme A en B** lorsque le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
A cette translation on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on dit que cette translation est **une translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **.**

<u>Exercice :</u> Tracer l'image du triangle ABC par la transaltion de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

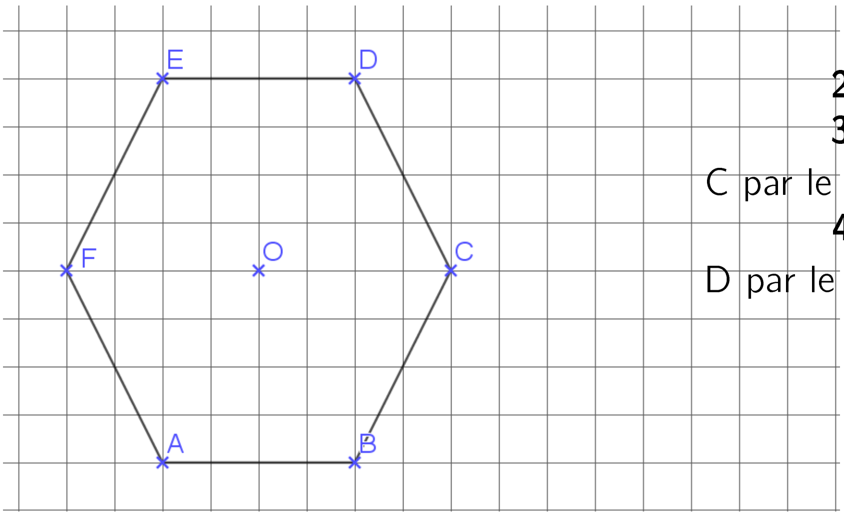


Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
- sa direction : celle de la droite (AB)
- son sens : celui de A vers B
- sa longueur que l'on appelle sa norme : la longueur AB du segment [AB] soit sa norme $||\overrightarrow{AB}||$.

Remarque :
- A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice :



1) Tracer le vecteur $\overrightarrow{EO}$.
2) Tracer le vecteur $-\overrightarrow{OF}$.
3) Construire M l'image du point C par le le vecteur $\overrightarrow{EO}$.
4) Construire N l'image du point D par le le vecteur $-\overrightarrow{OF}$.

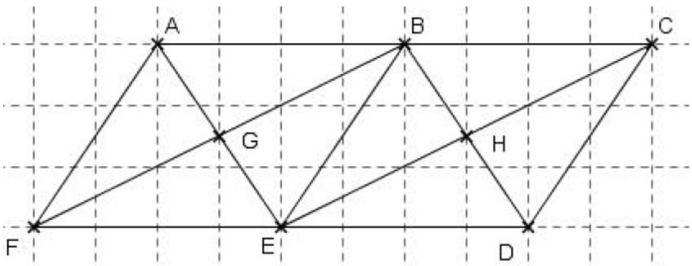
2. Egalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls **sont égaux** lorsquils ont :
- **la même direction** *(les droites (AB) et (CD) sont parallèles)*
- **le même sens** *(on va de A vers B comme on va de C vers D.)*
- **la même norme** *(les longueurs AB et CD sont égales).*

On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

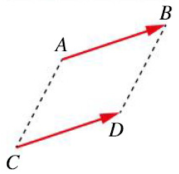
Exercice :ABEF, BCDE et ABDE sont des parallélogrammes.



1) Citer les vecteurs égaux aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FA}$.
2) Nommer le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine B.
3) Nommer le représentant du vecteur $\overrightarrow{FE}$ d'origine G.

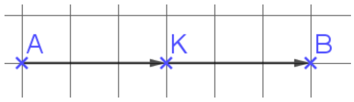
Propriété

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **sont égaux** si et seulement si **ABDC** est un parallélogramme (éventuellement aplati).



- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si B = C.

- K est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$



3. Vecteurs particuliers

Le vecteur nul

Un vecteur nul est un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{EE}$

Opposé d'un vecteur

L'opposé d'un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$, qu'on note $-\overrightarrow{v}$, est le vecteur qui a la même direction et la même norme que v, mais qui est de sens contraire à $\overrightarrow{v}$.

Remarque :

- L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.
- L'opposé du vecteur nul $\overrightarrow{0}$.

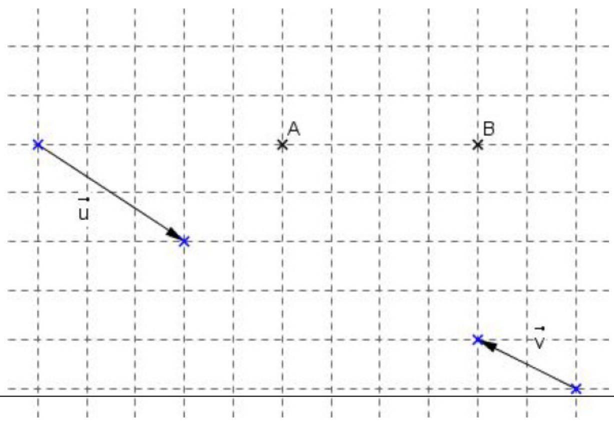
Exercice :

Sur la figure ci-contre, placer les points

- L tel que $\overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{u}$

- M tel que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{v}$

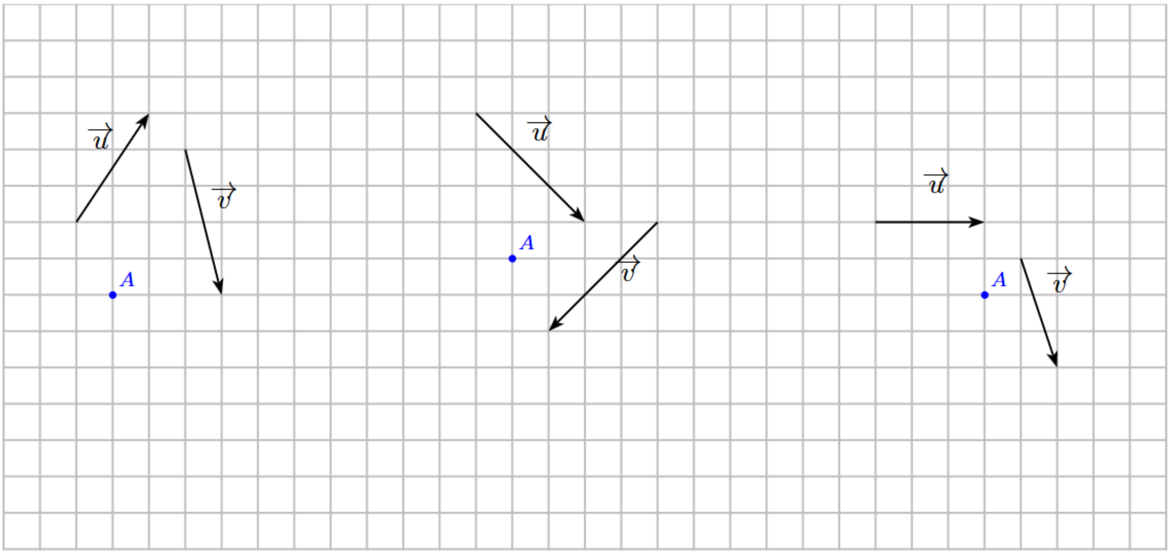
- K tel que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KA}$



II. Opérations sur les vecteurs

1. Somme de deux vecteurs

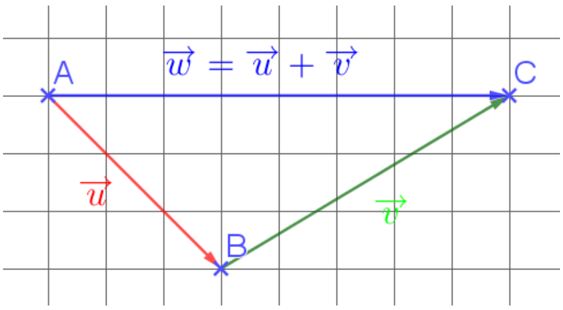
Exercice : Dans chacun des cas de la figure suivante, construire en rouge le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'origne A tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$



- **Avec la relation de Chasles**

Définition

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de lenchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On note ce vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

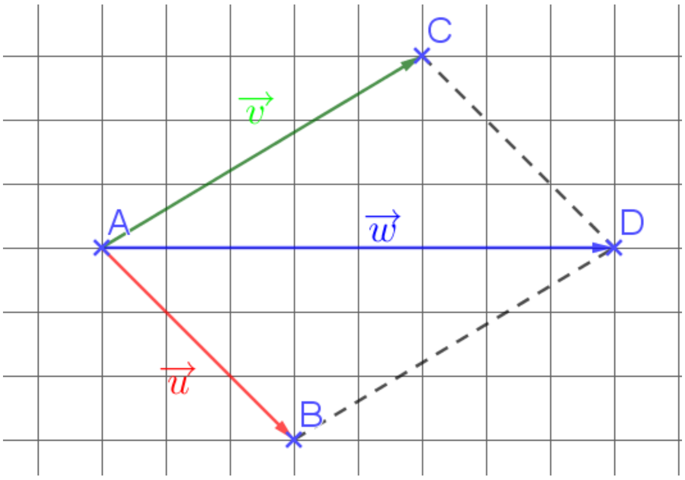


Propriété

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette égalité s'appelle **la relation de Chasles**.

<u>Cas particulier</u> : pour tous points A et B : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
On admet alors que la somme de deux vecteurs opposés est égale au vecteur nul.

- **Par la construction d'un parallélogramme (ou par la règle du parallélogramme**



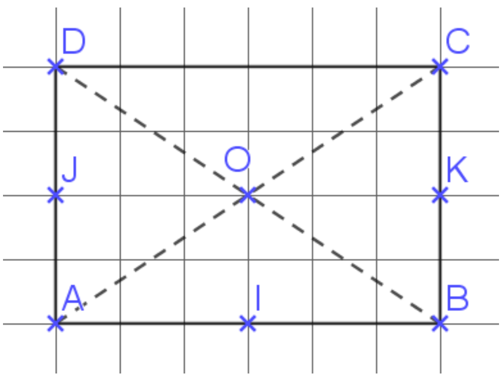
On définit les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
Soit D le point tel que ABDC soit un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$.

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ *car ABDC est un parallélogramme donc* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
Ainsi, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

Propriété

Soit ABDC un parallélogramme. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

<u>Exercice :</u> ABCD est un rectangle de centre O. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD] et [BC].



Compléter les égalités suivantes :

1) En utilisant la relation de Chasles :

(a) $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{J.} + \overrightarrow{O.}$

(b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{.I} + \overrightarrow{I.}$

(c) $\overrightarrow{D.} = \overrightarrow{.K} + \overrightarrow{.C}$

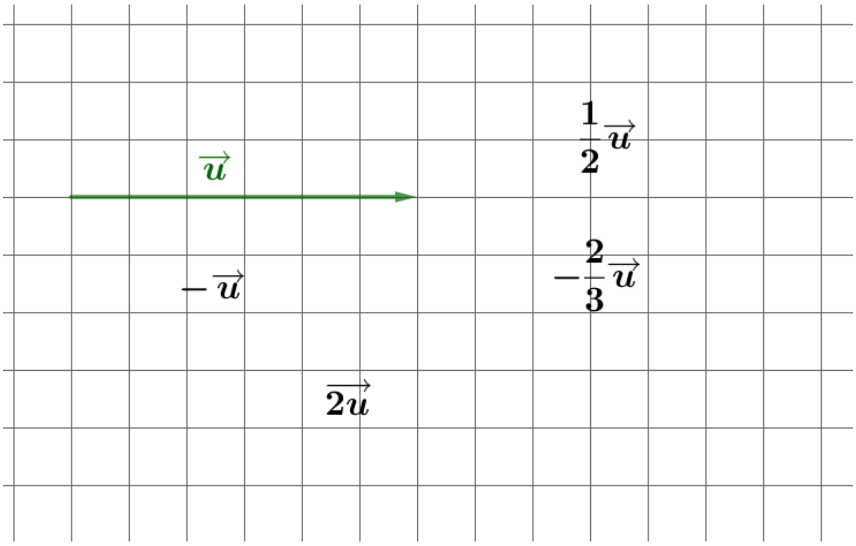
(d) $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AJ} + \ldots = \ldots$

2) En utilisant la règle du parallélogramme :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A.} = \overrightarrow{AC}$ **(b)** $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} = \ldots$ **(c)** $\overrightarrow{BK} + \ldots = \overrightarrow{BO}$

2. Produit d'un vecteur par un réel

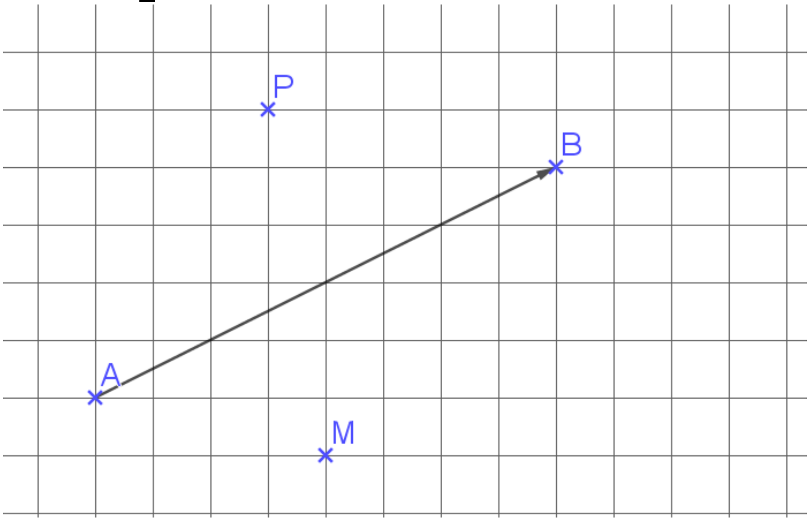
Exercice : Construire les vecteurs demandés à partir du vecteur $\vec{u}$.



Définition

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :
- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont **la même direction**
- $k\vec{u}$ a **le même sens** que $k\vec{u}$ si $k > 0$, autrement si $k < 0$, $k\vec{u}$ a **le sens contraire** de $\vec{u}$
- $k\vec{u}$ a pour norme $|k| \times ||\vec{u}||$

Exercice : Soient A et B deux points distincts. Tracer les points N et Q tels que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



3. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Autrement dit, deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont sont colinéaires.

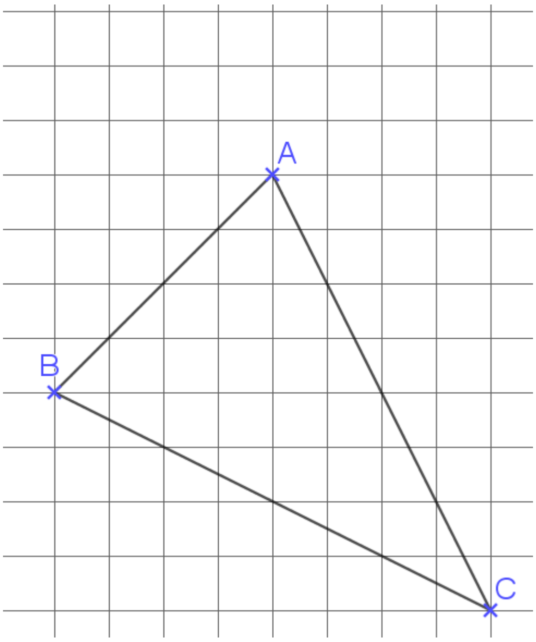
Exemple : Dans l'exercice précédent, on avait que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
De même, les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarque :
Par convention, on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice : ABC est un triangle. D et E sont deux points définis par $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$.



1) Placer les points D et E sur la figure ci-dessous.
2) Exprimer le vecteurs $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) En déduire que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.