**C.1**

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x)-f(1)=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{-2+1}{2\times(-2)-1}=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{-1}{-4-1}$$

$$=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{2}{1}=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{1}{5}=\frac{5\cdot(x+1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}-\frac{1\cdot(2\cdot x-1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

$$=\frac{(5\cdot x+5)-(2\cdot x-1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{5\cdot x+5-2\cdot x+1}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

$$=\frac{3\cdot x+6}{5\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

- Ainsi, on a les transformations algébriques :

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\frac{\frac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}}{x+2}$$

$$=\frac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}\times\frac{1}{x+2}=\frac{3}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

2. On en déduit la valeur du nombre dérivée en $-2$ de la fonction $f$ :

$$f'(-2)=\lim_{x\mapsto-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\mapsto-2}\frac{3}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

$$=\frac{3}{5\cdot(2\times(-2)-1)}=\frac{3}{5\cdot(-4-1)}=\frac{3}{-25}=-\frac{3}{25}$$

**C.2** Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en $-1$, effectuons les calculs suivants :

- On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(-1+h)=(-1+h)^2+3\times(-1+h)+1$$
$$=(-1)^2+2\times(-1)\times h+h^2-3+3\cdot h+1$$
$$=1-2\cdot h+h^2-3+3\cdot h+1=h^2+h-1$$

- $f(-1)=(-1)^2+3\times(-1)+1=1-3+1=-1$

Le nombre dérivé $f'(-1)$ de la fonction $f$ en $-1$ a pour valeur :

$$f'(-1)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{h\cdot(h+1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}h+1=1$$

**C.3**

1. On a :

- $f(1+h)=2\cdot(1+h)^2-3\cdot(1+h)+1$
$$=2\cdot(1+2\cdot h+h^2)-3-3\cdot h+1$$
$$=2+4\cdot h+2\cdot h^2-3-3\cdot h+1=2\cdot h^2+h$$
- $f(1)=2\times1^2-3\times1+1=2-3+1=0$

On en déduit l'expression du quotient :

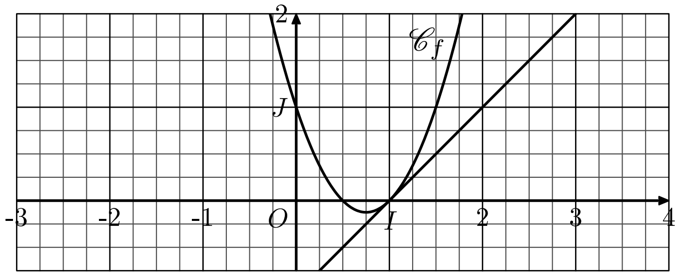
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2\cdot h^2+h-0}{h}=\frac{h\cdot(2\cdot h+1)}{h}=2\cdot h+1$$

Le nombre dérivé de la fonction $f$ en 1 a pour valeur :

$$f'(1)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}2\cdot h+1=1$$

2. La tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$
$$y=1\cdot(x-1)+0$$
$$y=x-1$$




**C.4**

1. $f'(x)=3\cdot x^2-5\times(2\cdot x)+7\times1-0=3x^2-10x+7$

2. On a les valeurs :

- $f(2)=2^3-5\times2^2+7\times2-2=8-5\times4+14-2$
$=8-20+14-2=0$
- $f'(2)=3\times2^2-10\times2+7=3\times4-20+7$
$=12-20+7=-1$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite :

$$y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$$
$$y=-1(x-2)+0$$
$$y=-x+2$$

3. La fonction $f'$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-10)^2-4\times3\times7=100-84=16$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4.$

Le discriminant étant strictement positif, cette fonction admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-10)-4}{2\times3}=\frac{10-4}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-10)+4}{2\times3}=\frac{10+4}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{7}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit les variations de la fonction $f$ :

- La fonction $f$ est croissante sur les intervalles $]-\infty\,;1[$ et $\left]\frac{7}{3}\,;+\infty\right[$
- La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $\left]1\,;\frac{7}{3}\right[$.

**C.5**

1. La fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :

$$f'(x)=3\cdot x^2+4\times2\cdot x+5=3\cdot x^2+8\cdot x+5$$

(2) On a les valeurs :

- $f(-2) = (-2)^3 + 4\times(-2)^2 + 5\times(-2) + 2$
  $\qquad = -8 + 4\times4 - 10 + 2 = -8 + 16 - 10 + 2 = 0$
- $f'(-2) = 3\times(-2)^2 + 8\times(-2) + 5 = 12 - 16 + 5 = 1$

On en déduit l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-2$ :

$$y = f'(-2)\cdot\big[x - (-2)\big] + f(-2)$$
$$y = 1\cdot\big(x+2\big) + 0$$
$$y = x + 2$$

(3) L'expression de la fonction $f'$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 8^2 - 4\times3\times5 = 64 - 60 = 4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8-2}{2\times3} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8+2}{2\times3} = \frac{-6}{6} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2+8x+5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit les sens de variations de la fonction $f$ :

- La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right]$ et sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$
- La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{3}\,;-1\right]$.

C.6

(1) la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :

$$f'(x) = -\big(3\cdot x^2\big) - 3\cdot\big(2\cdot x\big) - 2 = -3\cdot x^2 - 6\cdot x - 2$$

(2) On a les valeurs :

- $f(-1) = -(-1)^3 - 3\times(-1)^2 - 2\times(-1) + 4$
  $\qquad = 1 - 3 + 2 + 4 = 4$
- $f'(-1) = -3\cdot(-1)^2 - 6\times(-1) - 2 = -3\times1 + 6 - 2$
  $\qquad = -3 + 6 - 2 = 1$

La tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$ admet pour expression :

$$y = f'(-1)\cdot\big[x - (-1)\big] + f(-1)$$
$$y = 1\cdot\big(x+1\big) + 4$$
$$y = x + 1 + 4$$
$$y = x + 5$$

(3) La fonction $f'$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-6)^2 - 4\times(-3)\times(-2) = 36 - 24 = 12$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, la fonction $f'$ admet deux zéros qui ont pour valeurs :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)-2\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2\big(-3+\sqrt{3}\big)}{-2\times3} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)+2\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2\big(-3-\sqrt{3}\big)}{-2\times3} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ :

- la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur l'intervalle $\left[\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$.
- la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $\left]\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\,;\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right]$.

C.7

(1) La fonction $f$ a pour expression :
$f(x) = 3\times x^2$

Ainsi, la fonction $f'$ admet pour expression :
$f'(x) = 3\times(2x) = 6\cdot x$

(2) La fonction $g$ a pour expression :
$$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12}\times x^6$$

Ainsi, la fonction $g'$ admet pour expression :
$$g'(x) = \frac{1}{12}\times\big(6\cdot x^5\big) = \frac{1}{2}\cdot x^5$$

(3) La fonction $h$ a pour expression :
$h(x) = 4\sqrt{x} = 4\times\sqrt{x}$

Ainsi, la fonction $h'$ admet pour expression :
$$h'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(4) La fonction $j$ a pour expression :
$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction $j'$ admet pour expression :
$$j'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

(5) La fonction $k$ a pour expression :
$$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction $k'$ admet pour expression :
$$k'(x) = \frac{1}{2}\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{1}{2x^2}$$

(6) La fonction $\ell$ a pour expression :
$$l(x) = -\frac{2}{x} = -2\times\frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction $\ell'$ admet pour expression :
$$\ell'(x) = -2\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{2}{x^2}$$

C.8

1. La dérivée de la fonction $f$ a pour expression :
$$f'(x) = 1 - \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

2. La fonction $g$ admet pour expression :
$$g(x) = 2\cdot\sqrt{x} = 2\times\sqrt{x}$$
Ainsi, sa dérivée $g'$ admet pour expression :
$$g'(x) = 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. La fonction $h$ admet pour expression :
$$h(x) = \frac{3}{x} - 2\cdot\sqrt{x} = 3\times\frac{1}{x} - 2\times\sqrt{x}$$
Ainsi, sa dérivée $h'$ admet pour expression :
$$h'(x) = 3\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= -\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x}-x^2}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}+x^2}{x^2\sqrt{x}}$$

4. La fonction $j$ admet pour expression :
$$j(x) = 2\cdot x^3 + \frac{2}{x} = 2\times x^3 + 2\times\frac{1}{x}$$
Ainsi, sa dérivée $j'$ admet pour expression :
$$j'(x) = 2\times(3x^2) + 2\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 6\cdot x^2 - \frac{2}{x^2}$$
$$= \frac{6\cdot x^4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6\cdot x^4-2}{x^2}$$

C.9

1. L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ où :
$$u(x) = x^5 \quad ; \quad v(x) = x^2-1$$
qui admettent les fonctions dérivées :
$$u'(x) = 5\cdot x^4 \quad ; \quad v'(x) = 2x$$
Ainsi, la fonction $g$ admet pour dérivée la fonction $g'$ dont l'expression est :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 5\cdot x^4\cdot\big(x^2-1\big) + x^5\cdot(2x)$$
$$= 5\cdot x^6 - 5\cdot x^4 + 2\cdot x^6 = 7\cdot x^6 - 5\cdot x^4$$

2. L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$$u(x) = 2\cdot x^2 - 5\cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = 1 - x^2$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 4\cdot x - 5 \quad ; \quad v'(x) = -2\cdot x$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= \big(4\cdot x-5\big)\big(1-x^2\big) + \big(2\cdot x^2-5\cdot x+1\big)\big(-2\cdot x\big)$$
$$= 4\cdot x - 4\cdot x^3 - 5 + 5\cdot x^2 - 4\cdot x^3 + 10\cdot x^2 - 2\cdot x$$
$$= -8\cdot x^3 + 15\cdot x^2 + 2\cdot x - 5$$

C.10

1. L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions $u$ et $v$ définies par :
$$u(x) = 3 - x \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{x}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= -1\times\frac{1}{x} + (3-x)\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{-1}{x} - \frac{3-x}{x^2}$$
$$= \frac{-x}{x^2} - \frac{3-x}{x^2} = \frac{-x-(3-x)}{x^2} = \frac{-x+x-3}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

2. L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs $u$ et $v$ dont les expressions sont :
$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x + \frac{1}{x}$$
qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + x\cdot\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)$$
$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2\cdot x$$

C.11 L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions $u$ et $v$ définies par :
$$u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$ :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 2\cdot x\cdot\sqrt{x} + (x^2-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4\cdot x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4\cdot x^2+x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

C.12

1. L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$$u(x) = 2x + 2 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) = 2\cdot\sqrt{x} + \big(2x+2\big)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$
$$= 2\cdot\sqrt{x} + \frac{2x+2}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{2\cdot\sqrt{x}\times2\cdot\sqrt{x} + \big(2x+2\big)}{2\cdot\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4\cdot x + \big(2x+2\big)}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{6\cdot x+2}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{2\cdot\big(3\cdot x+1\big)}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{3\cdot x+1}{\sqrt{x}}$$
On en déduit : $f'(4) = \dfrac{3\times4+1}{\sqrt{4}} = \dfrac{12+1}{2} = \dfrac{13}{2}$

2. De plus, on a la valeur :
$$f(4) = \big(2\times4+2\big)\times\sqrt{4} = \big(8+2\big)\times2 = 10\times2 = 20$$
On en déduit l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 :

$y = f'(4)\cdot(x-4) + f(4)$

$y = \dfrac{13}{2}\cdot(x-4) + 20$

$y = \dfrac{13}{2}\cdot x - 26 + 20$

$y = \dfrac{13}{2}\cdot x - 6$

**C.13** L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions $u$ et $v$ telles que :
$u(x) = 3 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\times(2-x) - 3\times(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{3}{(2-x)^2}$$

**C.14** la fonction $f$ est définie par le produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x) = 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 2\cdot x + 3$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x - 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\cdot(x^2-2\cdot x+3) - 4\cdot(2\cdot x-2)}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

$$= \frac{-8\cdot x + 8}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

**C.15**

- L'expression de la fonction $f$ est définie par le quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $u(x) = 4\cdot x^2 + x - 3 \quad ; \quad v(x) = 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1$

  Ces deux fonctions admettent pour dérivées :
  $u'(x) = 8\cdot x + 1 \quad ; \quad v'(x) = 6\cdot x^2 + 2$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(8\cdot x+1)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-1) - (4\cdot x^2+x-3)\cdot(6\cdot x+2)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

$$= \frac{(24x^3+16x^2-8x+3x^2+2x-1)-(24x^2+8x^2+6x^2+2x-18x-6)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

$$= \frac{(24x^3+19x^2-6x-1) - (24x^3+14x^2-16x-6)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

$$= \frac{24x^3+19x^2-6x-1-24x^3-14x^2+16x+6}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

$$= \frac{5x^2+10x+5}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2} = \frac{5\big(x^2+2x+1\big)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2} = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

- Le polynôme $3\cdot x^2+2\cdot x-1$ du second degré admet pour discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times3\times(-1) = 4 + 12 = 16$
  On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

  Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2-4}{2\times3} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2+4}{2\times3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

  Ce polynôme admet la factorisation :

$$3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1 = 3\cdot\big[x-(-1)\big]\Big(x-\frac{1}{3}\Big) = \big(x+1\big)\big(3\cdot x-1\big)$$

- Simplifions l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x) = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big[\big(x+1\big)\big(3\cdot x-1\big)\big]^2} = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big(x+1\big)^2\cdot\big(3\cdot x-1\big)^2}$$

$$= \frac{5}{\big(3\cdot x-1\big)^2}$$

**C.16**

1. La fonction $f$ est définie par :
   $f(x) = \big(x^2 - 3\cdot x\big)\cdot\sqrt{x}$

   L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du produit des fonctions $u$ et $v$ définies par :

   $u(x) = x^2 - 3\cdot x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 2\cdot x - 3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = (2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x} + (x^2-3\cdot x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x\cdot(2\cdot x-3) + x^2-3\cdot x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4\cdot x^2 - 6\cdot x + x^2 - 3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2 - 9\cdot x}{2\sqrt{x}}$$

2. L'expression de la fonction $g$ est donnée sous la forme d'un quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définies par :
   $u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée $g'$ :

$$g'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{2\cdot x}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{\dfrac{2\cdot x-(x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

**C.17**

(1) Le dénominateur étant un polynôme du second degré, son discriminant a pour valeur :

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times3=4-24=-20<0$

Ce polynôme n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.

On a en déduit que la fonction $f$ est définie pour tout nombre réel : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

(2) L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions $u$ et $v$ définie par :

$u(x)=x^2-x+3$ ; $v(x)=2x^2-2x+3$

qui admette pour dérivée :

$u'(x)=2x-1$ ; $v'(x)=4x-2$

Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction $f'$ :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{(2x-1)(2x^2-2x+3)-(x^2-x+3)\times(4x-2)}{(2x^2-2x+3)^2}$$

$$=\frac{(4x^3-4x^2+6x-2x^2+2x-3)-(4x^3-2x^2-4x^2+2x+12x-6)}{(2x^2-2x+3)^2}$$

$$=\frac{(4x^3-6x^2+8x-3)-(4x^3-6x^2+14x-6)}{(2x^2-2x+3)^2}$$

$$=\frac{4x^3-6x^2+8x-3-4x^3+6x^2-14x+6}{(2x^2-2x+3)^2}$$

$$=\frac{-6x+3}{(2x^2-2x+3)^2}$$

(3) (a) Le dénominateur étant strictement positif *(voir question (1))*, le signe de $f'$ ne dépend que de son numérateur. On a le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

(b) L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction $f$ a pour valeur :

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2-\dfrac{1}{2}+3}{2\times\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2-2\times\dfrac{1}{2}+3}=\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+3}{2\times\dfrac{1}{4}-1+3}=\frac{\dfrac{1-2+12}{4}}{\dfrac{1}{2}+2}$$

$$=\frac{\dfrac{11}{4}}{\dfrac{5}{2}}=\frac{11}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{10}$$

On a le tableau de variations ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\frac{1}{2}$ ↗ | $\frac{11}{10}$ | ↘ $\frac{1}{2}$ |

(4) Ainsi, la fonction $f$ admet pour maximum $\dfrac{11}{10}$, et atteint son maximum pour $x=\dfrac{1}{2}$.

**C.18** **Partie A**

(1) L'expression de la fonction $P$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions $u$ et $v$ définies par :

$u(x)=x+300$ ; $v(x)=x+100$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=1$ ; $v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $P'$ dérivée de la fonction $P$ :

$$P'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{1\cdot(x+100)-(x+300)\cdot1}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x+100-x-300}{(x+100)^2}=\frac{-200}{(x+100)^2}$$

(2) Le quotient définissant l'expression de la fonction $P'$ est strictement négatif sur $\big[100\,;+\infty\big[$.

On en déduit que la fonction $P$ est strictement décroissante sur $\big[100\,;+\infty\big[$.

**Partie B**

(1) La fonction $S$ est définie comme le produit de la fonction $u$ et $P$ où la fonction $u$ est définie par :

$u(x)=x$ ; $u'(x)=1$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction $S'$ dérivée de la fonction $S$ :

$$S(x)=u'(x)\cdot P(x)+u(x)\cdot P'(x)$$

$$=1\cdot\frac{x+300}{x+100}+x\cdot\Big[-\frac{200}{(x+100)^2}\Big]=\frac{x+300}{x+100}-\frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{(x+300)(x+100)}{(x+100)^2}-\frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x^2+100\cdot x+300\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}-\frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$

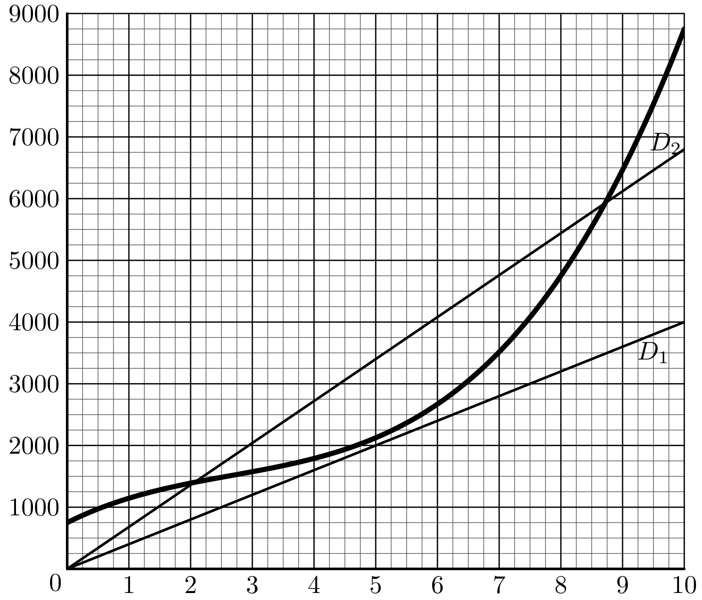
$$=\frac{x^2+400\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}-\frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$

$$=\frac{x^2+400\cdot x+30\,000-200\cdot x}{(x+100)^2}=\frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

(2) On a les transformations algébriques suivantes :

$$x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}=x+200-\frac{20\,000}{x+100}$$
$$=\frac{(x+200)(x+100)}{x+100}-\frac{20\,000}{x+100}$$
$$=\frac{x^2+100\cdot x+200\cdot x+20\,000}{x+100}-\frac{20\,000}{x+100}$$
$$=\frac{x^2+300\cdot x+20\,000-20\,000}{x+100}=\frac{x^2+300\cdot x}{x+100}$$
$$=\frac{x\cdot(x+300)}{x+100}=x\cdot\frac{x+300}{x+100}=x\cdot P(x)$$

C.19 **Partie A**




1. En traçant la droite $D_1$, on observe que la courbe de la recette reste toujours inférieure au coût de production : aucun bénéfice ne sera réalisé.

2. a. Des bénéfices seront réalisés lorsque la courbe des coûts de production se situe sous la courbe des coûts des recettes.

   Ainsi, l'entreprise va réaliser des bénéfices lorsqu'il produira entre 2 et 8,75 kilomètre de tissu.

   b. La fonction $B$ admet pour expression :

   $$B(x)=680\cdot x-C(x)$$
   $$=680\cdot x-\big(15\cdot x^3-120\cdot x^2+500\cdot x+750\big)$$
   $$=680\cdot x-15\cdot x^3+120\cdot x^2-500\cdot x-750$$
   $$=-15\cdot x^3+120\cdot x^2+180\cdot x-750$$

   Ainsi, la fonction $B$ admet pour dérivée la fonction $B'$ dont l'expression est :

   $$B'(x)=-15\cdot(3\cdot x^2)+120\cdot(2\cdot x)+180$$
   $$=-45\cdot x^2+240\cdot x+180$$

   c. Le polynôme du second degré définissant la fonction $B'$ admet pour discriminant :

   $$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=240^2-4\times(-45)\times180$$
   $$=57\,600+32\,400=90\,000$$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{90\,000}=300$.

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-240-300}{2\times(-45)}=\frac{-540}{-90}=6$$

   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-240+300}{2\times(-45)}=\frac{60}{-90}=-\frac{2}{3}$$

   Le coefficient du second degré étant strictement négatif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-45x^2+240x+180$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   On a les images suivantes par la fonction $B$ :

   - $B(0)=680\times0-C(0)=-750$
   - $B(6)=680\times6-\big(15\times6^3-120\times6^2+500\times6+750\big)$
     $=4080-(3240-4320+3000+750)$
     $=1410$
   - $B(10)=680\times10-\big(15\times10^3-120\times10^2+500\times10+750\big)$
     $=6800-15000+12000-5000-750$
     $=-1950$

   On en déduit le tableau de signes de la fonction $B'$ sur l'intervalle $[0\,;10]$ ainsi que le sens de variation de la fonction $B$ sur ce même intervalle.

| $x$ | $0$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'$ | | $+$ | $0$ | - | |
| Variation de $B$ | $-750$ | $\nearrow$ | $1410$ | $\searrow$ | $-1950$ |

**Partie B**

1. La fonction $C_M$ admet pour expression :

   $$C_M(x)=\frac{15\cdot x^3-120\cdot x^2+500\cdot x+750}{x}$$

   Ainsi, la fonction $C_M$ est définie par le quotient des fonctions $u$ et $v$ définies par :

   $u(x)=15\cdot x^3-120\cdot x^2+500\cdot x+750\quad;\quad v(x)=x$

   qui admettent pour dérivée :

   $u'(x)=45\cdot x^2-240\cdot x+500\quad;\quad v'(x)=1$

   En utilisant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient l'expression de la fonction $C'_M$ :

$$C'_M(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{(45\cdot x^2-240\cdot x+500)\times x-(15\cdot x^3-120\cdot x^2+500\cdot x+750)\times1}{x^2}$$
$$=\frac{45\cdot x^3-240\cdot x^2+500\cdot x-15\cdot x^3+120\cdot x^2-500\cdot x-750}{x^2}$$
$$=\frac{30\cdot x^3-120\cdot x^2-750}{x^2}$$

   Montrons que cette expression coïncide avec celle proposée :

$$\frac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \frac{(30{\cdot}x-150)(x^2+x+5)}{x^2}$$
$$= \frac{30{\cdot}x^3+30{\cdot}x^2+150{\cdot}x-150{\cdot}x^2-150{\cdot}x-750}{x^2}$$
$$= \frac{30{\cdot}x^3-120{\cdot}x^2-750}{x^2}$$
$$= C'_M(x)$$

2 a Le polynôme $x^2{+}x{+}5$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4{\times}1{\times}5 = 1 - 20 = -19$

Le discriminant étant strictement négatif et son coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Les facteurs 30, $x^2{+}x{+}5$ et $x^2$ étant strictement positif, on en déduit que le signe de $C'_M$ ne dépend que du signe du facteur $x{-}5$.

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant de la fonction $C'_M$ qui permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction $C_M$ :

| $x$ | 0 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $C'_M$ | ‖ | - | 0 | + | |
| Variation de $C_M$ | ‖ | ↘ | 425 | ↗ | 875 |

b
- D'après le tableau de variation, le coût moyen de production est minimum obtenu lorsque l'entreprise produit 5 kilomètres de tissu et vaut alors 425.
  $C_M(5) = 425$
- Le coût total de production a alors pour valeur :
  $C(5) = 15{\times}5^3 - 120{\times}5^2 + 500{\times}5 + 750$
  $= 1875 - 3000 + 2500 + 750 = 2125$