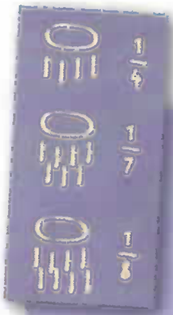
2 Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire

Un scribe vers 1400-1390 avant notre ère.



La **notation** des fractions « égyptiennes » est un nombre de **traits** correspondant à la valeur du dénominateur surmonté d'un **hiéroglyphe** en forme de bouche ouverte représentant le numérateur 1.

Pour les Égyptiens, une fraction représentait le **partage d'un bien**. Aussi ne considéraient-ils, pour les calculs, que des fractions de **numérateur 1** (les fractions nommées aujourd'hui « égyptiennes »). Quand ils rencontraient une fraction différente, ils la **transformaient** en une somme de fractions égyptiennes.

Comment connaissons-nous les fractions égyptiennes ? Par le **papyrus de Rhind**, document égyptien datant d'environ 1700 avant notre ère, qui s'ouvre sur la transformation de fractions de numérateur 2 en une somme de fractions de numérateur 1. Ces **manipulations peu pratiques** ont été reprises par les Grecs : un terrible **handicap** qui retarda autant le progrès des calculs que la numération romaine avec ses C, V, L et M...

QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Le nombre $\frac{1{,}6}{1{,}7}$ est égal à :	0,941 176 471	$\frac{16}{17}$	$\frac{6}{7}$
2	Le nombre $\frac{12}{15}$ est égal à :	12,15	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
3	La somme $\frac{1}{7}+\frac{3}{14}$ est égale à :	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{4}{21}$
4	La différence $3-\frac{1}{3}$ est égale à :	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$
5	Le produit $\frac{5}{3}\times\frac{4}{3}$ est égal à :	$\frac{20}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{20}{9}$
6	Le produit $\frac{2}{3}\times\frac{7}{4}$ est égal à :	$\frac{9}{12}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{21}$
7	Le produit $7\times\frac{2}{3}$ est égal à :	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{21}$	$\frac{2}{21}$
8	La somme de $\frac{1}{3}$ et du produit de $\frac{2}{3}$ par 5 peut s'écrire :	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+5$	$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\times 5$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 5$
9	Le produit de la somme de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{1}{6}$ par $\frac{1}{9}$ peut s'écrire :	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}$
10	On obtient $\frac{4}{9}$ en calculant :	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}-1$

Exercice 1 Calculer chaque expression.

$A = 2\times\frac{5}{7}-\frac{9}{14}.$ $B = \left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\right)\times\frac{1}{3}.$ $C = \frac{1}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}.$ $D = 1+\frac{5}{3}.$

$E = 2-\frac{4}{9}.$ $F = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$ $G = \left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1+\frac{1}{7}\right).$ $H = \frac{1}{3}\times\frac{7}{2}-\frac{4}{9}\times\frac{5}{2}.$

Exercice 2 Thomas a mangé $\frac{2}{9}$ d'un gâteau. Guillaume a mangé $\frac{1}{3}$ du même gâteau. Quelle fraction du gâteau reste-t-il alors ?

Exercice 3 Les $\frac{5}{6}$ des élèves d'un collège ont participé à un cross. Parmi ces élèves, les $\frac{3}{7}$ ont effectué le parcours en moins de 14 minutes.

1. Quelle fraction des élèves du collège représentent ceux qui ont réussi cette performance ?
2. Il y a 560 élèves au collège. Calculer le nombre d'élèves du collège ayant effectué le parcours en moins de 14 minutes.

Activité 1 Quotients égaux

1. Voici une liste de quotients : $\frac{6}{9}$; $\frac{11}{15}$; $\frac{0,2}{0,3}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{14}{21}$.
Parmi ces quotients, quels sont ceux qui sont égaux à $\frac{2}{3}$? Justifier.

2. En utilisant la règle des signes d'un quotient et la question 1, démontrer que :
a. $\frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$. **b.** $\frac{-0,2}{0,3} = \frac{-2}{3}$. **c.** $\frac{14}{-21} = \frac{2}{-3}$.

3. Recopier et compléter chacune des égalités suivantes par les nombres qui conviennent.
a. $\frac{-6}{-9} = \frac{2 \times \square}{3 \times \square}$. **b.** $\frac{-0,2}{0,3} = \frac{-2 : \square}{3 : \square}$. **c.** $\frac{14}{-21} = \frac{2 \times \square}{-3 \times \square}$.

4. Que peut-on alors dire des quotients :
a. $\frac{2}{3}$ et $\frac{2 \times (-3)}{3 \times (-3)}$? **b.** $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-2 : 10}{0,3 : 10}$? **c.** $\frac{14}{-21}$ et $\frac{2 \times 7}{-3 \times 7}$?

Pour conclure On a observé, sur des exemples, que l'on ne change pas un quotient en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre relatif non nul.

5. Démontrer, en utilisant la conclusion précédente, que les quotients suivants sont égaux.
$\frac{-14}{6}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{-35}{15}$; $\frac{-2,1}{0,9}$; $\frac{42}{-18}$.

Activité 2 Quotients égaux et produits en croix

1. **a.** Démontrer que $\frac{-4}{7} = \frac{12}{-21}$, puis calculer les produits $(-4) \times (-21)$ et 7×12.
b. Que constate-t-on ?

2. **a.** Vérifier que : $20 \times 27 = 36 \times 15$.
b. Simplifier les quotients $\frac{20}{36}$ et $\frac{15}{27}$.
c. Que constate-t-on ?

3. **a.** a, b, c et d étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, recopier et compléter :
$$\frac{a}{b} = \frac{---}{b \times d} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} = \frac{---}{b \times d}.$$
b. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors que peut-on dire des produits en croix $a \times d$ et $b \times c$?
c. Si $a \times d = b \times c$, alors que peut-on dire des quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$?

Pour conclure De quelle nouvelle méthode dispose-t-on pour déterminer si les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont ou ne sont pas égaux ?

4. Déterminer, dans chaque cas, si les deux quotients sont égaux.
a. $\frac{23}{32}$ et $\frac{56}{74}$. **b.** $\frac{-4}{3}$ et $\frac{-7,6}{5,7}$. **c.** $\frac{-15,3}{6,8}$ et $\frac{20,7}{-9,2}$. **d.** $\frac{82}{123}$ et $\frac{-74}{-111}$.

Activité 3 Recherche d'un multiple commun à deux nombres entiers

1 **a.** Écrire les six premiers multiples non nuls de 12, puis les six premiers multiples non nuls de 15.

b. En déduire le plus petit multiple non nul commun aux nombres 12 et 15.

c. Écrire les quotients $\frac{5}{12}$ et $\frac{4}{15}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

d. Dans chacun des cas suivants, trouver le plus petit multiple non nul commun aux deux nombres donnés : 9 et 12 ; 12 et 18 ; 15 et 20 ; 8 et 14 ; 5 et 7.

2 **a.** Pour trouver le plus petit multiple non nul commun aux nombres 9 et 21, Ryan procède ainsi :
– il repère le plus grand des deux nombres, c'est-à-dire 21 ;
– il écrit les multiples non nuls successifs de 21 et s'arrête dès qu'il obtient un multiple de 9.
En procédant comme Ryan, trouver le plus petit multiple non nul commun aux nombres 9 et 21, puis écrire les quotients $\frac{-4}{9}$ et $\frac{8}{21}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

b. En utilisant la même méthode, trouver le plus petit multiple non nul commun aux nombres 6 et 20, puis écrire les quotients $\frac{5}{6}$ et $\frac{-7}{20}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

Activité 4 Addition et soustraction

1 **Les dénominateurs sont les mêmes**

On admet que la règle d'addition et de soustraction de nombres positifs en écriture fractionnaire de même dénominateur est valable pour tous les nombres relatifs (positifs ou négatifs).
Calculer les sommes et les différences suivantes.

$A = \frac{-5}{3} + \frac{-8}{3}$. $B = \frac{5}{7} - \frac{9}{7}$. $C = \frac{-13}{9} - \frac{-7}{9}$. $D = \frac{1}{5} + \frac{-1}{5}$. $E = \frac{-1{,}4}{3} + \frac{-0{,}6}{3}$. $F = \frac{1}{6} - \frac{-1}{6}$.

2 **Les dénominateurs sont différents**

a. Écrire les quotients $\frac{-3}{4}$ et $\frac{5}{6}$ avec le même dénominateur, puis calculer $A = \frac{-3}{4} + \frac{5}{6}$.

b. Calculer les sommes et les différences suivantes.

$B = \frac{-9}{14} + \frac{-4}{21}$. $C = \frac{4}{9} - \frac{5}{6}$. $D = \frac{7}{12} - \frac{-4}{9}$. $E = -1 - \frac{3}{8}$. $F = \frac{4}{7} + \frac{8}{9}$. $G = \frac{3}{8} + \frac{-9}{20}$.

Activité 5 Multiplication

1 **a.** Calculer le produit $\frac{5}{9} \times \frac{4}{7}$ puis, à l'aide de la règle des signes d'un produit, calculer le produit $A = \frac{-5}{9} \times \frac{-4}{7}$.

b. Calculer le quotient $B = \frac{(-5) \times (-4)}{9 \times 7}$, puis comparer A et B.

Pour conclure On admet que la règle de multiplication de deux nombres positifs en écriture fractionnaire est valable lorsque les deux nombres sont relatifs (positifs ou négatifs).

2 En utilisant la conclusion précédente, calculer de deux façons différentes le produit $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{11}$.

Activité 6 Nombres inverses

1 **a.** Recopier, et compléter lorsque c'est possible, les égalités suivantes.

$0{,}2 \times 5 = \square$; $\quad -4 \times (-0{,}25) = \square$; $\quad 3 \times \dfrac{\square}{\square} = 1$; $\quad \square \times \dfrac{1}{-7} = 1$;

$\dfrac{3}{2} \times \dfrac{\square}{\square} = 1$; $\quad \dfrac{\square}{\square} \times \dfrac{11}{5} = 1$; $\quad \dfrac{-5}{3} \times \dfrac{\square}{\square} = 1$; $\quad 0 \times \square = 1$.

b. On dit que **deux nombres sont inverses** lorsque leur produit est égal à 1.
Donner l'inverse de chacun des nombres suivants.

6 ; $\dfrac{1}{9}$; -11 ; $\dfrac{-1}{8}$; $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{-9}{2}$; $\dfrac{7}{-4}$; $\dfrac{-11}{-13}$.

c. Pourquoi le nombre 0 n'admet-il pas d'inverse ?

d. x étant un nombre relatif non nul, comment peut-on justifier que l'inverse de x est $\dfrac{1}{x}$?

e. a et b étant deux nombres relatifs non nuls, quel est l'inverse de $\dfrac{a}{b}$? Justifier.

2 Exécuter la séquence de touches :
[4] [SHIFT] [(] [EXE] sur une calculatrice CASIO Collège 2D,
[4] [2nde] [x10ⁿ] [ENTRER] sur une calculatrice TI-Collège.
Quel résultat obtient-on ?
À quoi correspond la séquence [SHIFT] [(] ou [2nde] [x10ⁿ] sur le clavier de la calculatrice ?

Pour conclure L'inverse d'un nombre non nul x est noté aussi x^{-1}, ce qu'on lit « x exposant -1 ».

3 Recopier et compléter les égalités suivantes par les nombres qui conviennent.

$5^{-1} = \square$; $\quad (-3)^{-1} = \square$; $\quad \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1} = \square$; $\quad \left(\dfrac{2}{7}\right)^{-1} = \square$; $\quad \left(\dfrac{-5}{11}\right)^{-1} = \square$; $\quad 1^{-1} = \square$.

Activité 7 Division

1 **a.** Recopier et compléter les égalités suivantes par les nombres qui conviennent.

$8 : 11 = \dfrac{8}{11} = 8 \times \dfrac{\square}{\square}$; $\quad (-9) : 7 = \dfrac{-9}{7} = -9 \times \dfrac{\square}{\square}$.

b. Démontrer que le quotient de 2 par 9 est égal au produit de 2 par l'inverse de 9.

c. Recopier et compléter les égalités suivantes, dans lesquelles a et b sont deux nombres relatifs, avec b non nul.

$a : \square = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times \square}{b} = a \times \dfrac{\square}{\square}$.

Pour conclure Recopier et compléter :
Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par ...

2 Énoncer de même une règle pour diviser par $\dfrac{c}{d}$ (avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$).

3 Effectuer chaque division.

$5 : \dfrac{1}{4}$; $\quad 3 : \dfrac{7}{5}$; $\quad \dfrac{3}{8} : \dfrac{2}{7}$; $\quad \dfrac{-4}{5} : \dfrac{5}{9}$; $\quad \dfrac{2}{11} : 3$; $\quad \dfrac{4}{3} : \dfrac{3}{-7}$.