Cours

A Nature des nombres

1 Les nombres entiers

Définitions

- Les nombres **entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.
- Les nombres **entiers relatifs** sont les nombres entiers positifs et les nombres entiers négatifs.

Exemples

▸ Les nombres tels que : 0 ; 1 ; 2 ; 3 sont des nombres entiers positifs.

▸ Les nombres tels que : –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 sont des nombres entiers relatifs.

Remarque : Tout entier naturel est un entier relatif, mais tout entier relatif n'est pas un entier naturel. Par exemple, –2 est un entier relatif, mais n'est pas un entier naturel.

2 Les nombres décimaux

Définition

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10.

Exemples

On peut écrire : $-0{,}18 = \frac{-18}{100} = \frac{-18}{10^2}$; $4 = \frac{4}{1} = \frac{4}{10^0}$ et $\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = \frac{12}{10^2}$.

Donc les nombres –0,18 ; 4 et $\frac{3}{25}$ sont des nombres décimaux.

En revanche $\frac{8}{9}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. $\frac{8}{9}$ n'est donc pas un nombre décimal.

Remarque : Tout entier relatif est un nombre décimal, mais tout nombre décimal n'est pas un entier relatif. Par exemple, $\frac{3}{10}$ est un nombre décimal, mais n'est pas un entier relatif.

3 Les nombres rationnels

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs.

Exemples

▸ $\frac{8}{9}$; $\frac{-5}{7}$ et $\frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.

▸ On peut écrire : $-12{,}9 = \frac{-129}{10}$ et $8 = \frac{8}{1}$. Donc –12,9 et 8 sont des nombres rationnels.

Remarques :

- Tout nombre décimal est un nombre rationnel, mais tout nombre rationnel n'est pas un nombre décimal. Par exemple, $\frac{7}{6}$ est un nombre rationnel, mais n'est pas un nombre décimal.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ ou π. Ces nombres sont appelés des **nombres irrationnels**.

Exercice 83, page 24

B Diviseurs, multiples et PGCD

1 Diviseurs et multiples

Définition Soient a et b deux nombres entiers relatifs, avec b non nul.
On dit que **le nombre b est un diviseur du nombre a** s'il existe un nombre entier n tel que : $a = bn$.
On dit aussi que **b divise a** ou que **a est un multiple de b**.

Exemples

▸ $48 = 6 \times 8$, donc 8 et 6 sont des diviseurs de 48.
▸ $48 = (-2) \times (-24)$, donc –2 et –24 sont des diviseurs de 48.

b est un diviseur de a signifie que le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier.

Remarques :
- 1 est un diviseur de tous les nombres.
- Tout nombre entier non nul est un diviseur de 0.

2 Nombres premiers

Définition On dit qu'un nombre entier naturel est **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.

Exemples

▸ Les seuls diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, donc 5 est un nombre premier.
▸ Les seuls diviseurs positifs de 31 sont 1 et 31, donc 31 est un nombre premier.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car 1 n'admet qu'un seul diviseur positif égal à 1.

3 Plus grand diviseur commun à deux nombres entiers strictement positifs

Propriété Parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers strictement positifs a et b, il en existe un qui est plus grand que tous les autres.
Le plus grand diviseur commun à a et b est noté : **PGCD(a ; b)**.

Exemples

Un **diviseur commun** à a et à b est un nombre qui est à la fois un diviseur de a et un diviseur de b.

▸ Trouver PGCD(48 ; 18).
Les diviseurs positifs de 48 sont :
1 ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48.
Les diviseurs positifs de 18 sont : **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 9 ; 18.
Les diviseurs communs à 48 et à 18 sont : **1** ; **2** ; **3** et **6**.
Le plus grand diviseur commun à 48 et 18 est donc **6**.
On écrit : **PGCD(48 ; 18) = 6.**
▸ Trouver PGCD(80 ; 76).
Les diviseurs positifs de 80 sont : **1** ; **2** ; **4** ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 40 ; 80.
Les diviseurs positifs de 76 sont : **1** ; **2** ; **4** ; 19 ; 38 ; 76.
Les diviseurs communs à 80 et 76 sont : **1** ; **2** et **4**.
Le plus grand diviseur commun à 80 et 76 est **4**. On écrit **PGCD(80 ; 76) = 4.**

Propriétés

Ces propriétés justifient l'algorithme des différences
Savoir-faire 1, page 15
et l'algorithme d'Euclide
Savoir-faire 2, page 15.

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs (avec $a > b$) et soit r le reste de la division euclidienne de a par b.

- $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;a-b)$
- $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r)$

Exemples

Soient $a = 48$ et $b = 18$. On a vu dans l'exemple précédent que $\text{PGCD}(48\,;18) = 6$.

▸ $a-b = 30$ et on a bien $\text{PGCD}(30\,;18) = 6$.

▸ $48 = 18 \times 2 + 12$, donc le reste de la division euclidienne de 48 par 18 est 12, et on a bien $\text{PGCD}(18\,;12) = 6$.

Remarques :

- Si a est un multiple de b, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = b$.
- $\text{PGCD}(a\,;a) = a$.

4 Nombres premiers entre eux

Définition

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemple

Les nombres 48 et 35 sont premiers entre eux.
En effet, les diviseurs positifs de 48 sont : **1** ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48 et les diviseurs positifs de 35 sont : **1** ; 5 ; 7 ; 35. Le plus grand diviseur commun à 48 et 35 est **1**.

C Fraction irréductible

Définition

Soient deux nombres entiers strictement positifs a et b.
On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple

On a vu précédemment que 48 et 35 étaient premiers entre eux, donc $\frac{48}{35}$ et $\frac{35}{48}$ sont deux fractions irréductibles.

Une fraction **irréductible** est une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Règle

Savoir-faire 3, page 16

Soient deux nombres entiers strictement positifs a et b.
Pour obtenir la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{a}{b}$, il suffit de diviser a et b par leur plus grand diviseur commun.

Exemple

On a vu précédemment que PGCD (48 ; 18) = 6. On a : $\frac{48}{18} = \frac{48:6}{18:6} = \frac{8}{3}$.

$\frac{8}{3}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{48}{18}$.