Suites

Plan du cours

I. Quelques rappels ... utiles

A. Evolutions

Dans cette partie, on considère une grandeur passant d'une valeur de départ v_0 à une valeur d'arrivée v_1.

Variation absolue

On appelle **variation absolue** le nombre $v_1 - v_0$.
La variation absolue s'exprime dans l'unité de la grandeur étudiée.

Taux d'évolution

On appelle **Taux d'évolution** ou encore **variation relative** le rapport $\dfrac{v_1 - v_0}{v_0}$.
Ce nombre peut s'exprimer sous la forme d'un pourcentage en le multipliant par 100.

Remarques :

- La variation relative s'exprime sans unités !
- Le pourcentage d'évolution dépend des valeurs de départ et d'arrivée, et peut donc être positif ou négatif.

Soit t le pourcentage d'évolution de v_0 à v_1.

- Si t est positif, alors la grandeur a augmenté de v_0 à v_1, et on dit que v_0 a subit une augmentation.
- Si t est négatif, alors la grandeur a diminué de v_0 à v_1, et on dit que v_0 a subit une diminution.

$t = \dfrac{v_1 - v_0}{v_0} \times 100$ équivaut à $v_1 = v_0 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$

Faire évoluer de $t\%$ une quantité, c'est multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{t}{100}$.
On nomme le nombre $1 + \dfrac{t}{100}$ **coefficient multiplicateur** de l'évolution (que l'on notera généralement CM).

- si $CM > 1$, alors l'évolution est une augmentation.
- si $CM < 1$, alors l'évolution est une diminution.

Soit CM le coefficient multiplicateur d'une évolution de $t\%$. Alors on a :

$$t = (CM - 1) \times 100$$

B. Suites numériques

(1) Généralités

On appelle suite numérique réelle, une **liste ordonnée** de nombres réels.
Chaque élément de la suite est précisément repéré par sa position dans la liste, position pouvant être définie simplement par un entier naturel.
On note (u_n) la suite u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1} , ...

- n est l'indice.
- u_n est le terme général de la suite (u_n), le terme de rang n ou le terme d'indice n.

Il existe principalement deux modes de génération d'une suite :

- Par la donnée de l'expression de u_n en fonction de n (comme pour une fonction).
  On dit alors que l'on donne **la forme explicite** de la suite
  Dans ce cas, on sait calculer n'importe quel terme de la suite (voir exemple précédent).

- Par la donnée d'un terme initial et d'une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent.
  La suite est alors dite **définie par récurrence**, et la relation est appelée **relation de récurrence**.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite est appelé **un nuage de points**.
Ce nuage est formé des points de coordonnées $(n; u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(2) Variations

- Une suite (u_n) est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
- Une suite (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
- Une suite (u_n) est constante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

On dit qu'une suite est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante

Méthodologie : Soit (u_n) une suite. Pour étudier son sens de variation, on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

▹ comparer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.

▹ dans le cas où les u_n sont **strictement positifs**, comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante.
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est décroissante.

C. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

- En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si la **variation absolue** entre deux termes consécutifs est constante égale à r. Autrement dit

$$(u_n) \text{ est arithmétique de raison } r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$$

Variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. alors :

- (u_n) est croissante si $r > 0$.
- (u_n) est décroissante si $r < 0$.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique de raison r est représentée dans le plan par des points alignés sur une droite de coefficient directeur r.

D. Quelques petits exercices pour reprendre la main

Exercice 1

Le prix d'un objet augmente de 125 € à 150 €.

1. Déterminer la variation absolue du prix.
2. Déterminer la variation relative de ce prix et en déduire le pourcentage d'évolution de cet objet.

Exercice 2

Le prix du baril de pétrole coûte 105 dollars. Ce prix augmente de 5 %.
Déterminer le prix du baril après l'augmentation.

Exercice 3

Dans une entreprise, le nombre d'employés passe de 400 à 350 en un an.
Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre d'employés sur l'année.

Exercice 4

Si la population d'une ville augmente de 20 %, alors cette population a été multipliée par . . . .

Exercice 5

Si une population augmente de 20 % puis de 15 %, alors cette population augmente de . . . %.

Exercice 6

Le cours d'une action a baissé de 20 %.
Déterminer le taux d'augmentation nécessaire pour que cette action retrouve son cours initial.

Exercice 7

(u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n$ et $v_n = n^2 + 2n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}.
2. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_{10}.
3. Exprimer v_{n+1} en fonction de n.

Exercice 8

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 9

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{6}{n+2}$.
Placer dans un repère les cinq premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n).

Exercice 10

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 1$.
Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 11

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 4$.
Montrer que la suite est décroissante.

Exercice 12

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 8$.
Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 13

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{50}.

Exercice 14

(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1{,}5$.

1. Calculer u_{32}
2. Calculer u_0.

Nous ferons également les quatre exercices (Vrai-Faux et QCM) du livre page 10.

II. Suites géométriques

A. Définition et propriétés

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si, et seulement si, il existe un réel q non nul tel que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

La définition précédente nous donne la forme de récurrence de la suite. Or il est souvent (très souvent) bien plus utile de connaître la forme explicite de la suite. Les deux théorèmes suivant nous la fournissent.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Il est parfois un peu « difficile » de déterminer si une suite est ou non géométrique. Pour cela, on utilisera le résultat suivant.

Une suite (u_n) ne s'annulant pas est géométrique de raison q si et seulement pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$

B. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Somme des n premières puissances de q.

$$\text{Si } q \neq 0 \text{ , alors, } 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si $S = \underbrace{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n}_{\text{termes consécutifs}}$ est une somme de termes consécutifs de la suite (u_n), alors :

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes de } S}}{1 - \text{raison}}$$

Soit :

$$S = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Cas particulier - À retenir :

- si le terme initial est u_0 alors :

$$S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n+1 \text{ termes}} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- si le terme initial est u_1 alors :

$$S = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n \text{ termes}} = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Preuve : On remarquera simplement que l'on peut écrire

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + \underbrace{u_0 \times q}_{u_1} + \underbrace{u_0 \times q^2}_{u_2} + \ldots + \underbrace{u_0 \times q^n}_{u_n} = u_0 \times (1 + q + \ldots + q^n)$$

III. Étude du comportement d'une suite géométrique

A. Variations.

Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q positive, de termes positifs. Le sens de variation de la suite dépend de la valeur de q, à savoir :

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Dans le cas des suites géométriques, on parle de **croissance exponentielle**.

B. Notion de limite

Il est « simple » de connaitre le comportement et les valeurs prises par une suite lorsque l'on connait la valeur de n. or cette valeur peut prendre (en général) toutes les valeurs souhaitées, aussi grandes que désiré. Il est donc utile de pouvoir déterminer les valeurs prises par u_n lorsque n est de plus en plus grand, lorsqu'il « tend ver $+\infty$ ».

Plus précisément, c'est s'intéresser aux questions suivantes :

- Les nombres u_n finissent-ils par « s'accumuler » près d'une nombre particulier ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En terminale ES, on s'intéresse plus particulièrement au comportement des suites géométriques.

C. Limite de la suite $(q^n,\ q > 0)$

Soit la suite de terme général q^n, où q est un réel positif.

- Si $q > 1$ alors la suite a pour limite $+infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. On dit, dans ce cas, que la suite converge vers 0.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = 0$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = +\infty$ si $a > 0$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = -\infty$ si $a < 0$.

IV. Recherche d'un seuil

La recherche d'un seuil consiste à déterminer l'entier n_0 à partir duquel la suite est plus petite qu'une valeur donnée (cas des suites convergentes) ou plus grand qu'une valeur donnée (cas des suite ayant pour limite $+\infty$).

Considérons comme exemple la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Cette suite est décroissante car sa raison est inférieure à 1 et converge vers 0.

On se propose de déterminer un seuil à partir duquel u_n est plus petit que 10^{-40}, c'est-à-dire trouver le plus petit entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.

On élabore pour cela un algorithme permettant la recherche de ce seuil

A prend a valeur 1	1 est le premier terme de la suite
K prend la valeur 0	K désigne n_0 cherché.
Tant que $A > 10^{-40}$	Tant que $u_K > 10^{-40}$, on effectue ce qui suit :
K prend la valeur $K+1$	- à chaque boucle, on incrémente l'indice de 1 ;
A prend la valeur $\dfrac{3}{4} \times A$	- on calcule u_K
Fin Tant que	La boucle s'arrête lorsque $u_K < 10^{-40}$
Afficher K	

La valeur affichée après la mise en oeuvre de cet algorithme fournit le seuil n_0 cherché. Dans cet exemple on obtient $n_0 = 321$.
Ainsi, si n est supérieur ou égal à 321, alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.
Cet algorithme se programme sur la calculatrice Texas Instrument de cette manière :

../../Images/calculatrice2.eps

Dans le cas des suite qui tendent vers $+\infty$, on remplacera la condition dans la boucle *tant que* par une condition du type $A < 10^{40}$.

Application :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 10$.
Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $u_n < 10^{-90}$. Programmer cet algorithme à l'aide de la calculatrice et en déduire la valeur de n_0.

Correction :

A prend a valeur 10
K prend la valeur 0
Tant que $A > 10^{-90}$
    K prend la valeur $K+1$
    A prend la valeur $\dfrac{1}{3} \times A$
Fin Tant que
Afficher K

V. Suite arithmético-géométrique

Exo-Type 1

Petite activité préparatoire : un couple dépose au premier janvier 2011 une somme de 10 000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 4 %. Par la suite, ce couple possède une capacité annuelle de 3 000 euros, épargne versée tous les premiers janvier sur le compte précédent.
Les intérêts sont capitalisés au 31 décembre de chaque année. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme dont le couple dispose au 1[er] janvier de l'année (2011+nn).

1. (a) Calculer les valeur S_0, S_1, S_2 et S_3.
   (b) La suite (S_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

   9

2. (a) Montrer que l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n est donnée par la relation :

$$S_{n+1} = (1,04)S_n + 3000$$

   (b) À l'aide de la calculatrice, obtenir le tableau de valeurs de S_n pour n variant de 0 à 20.
   (c) Au 1[er] janvier de quelle année le couple possédera-t-il une épargne supérieure à 50 000 euros ?

On appelle suite arithmético-géométrique une suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n, par une relation de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels donnés}$$

Remarque : : si $a = 1$ alors la suite est arithmétique ; si $b = 0$ alors la suite est géométrique. Vous comprendrez donc le nom donné à ces suites !

L'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite auxiliaire géométrique. Cette suite est « toujours » donnée par l'énoncé.

Exo-Type 2

Une entreprise du secteur du BTP doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette .
Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par na.
En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
On note r_n la quantité, en tonnes, des déchets rejetés pour l'année (2007+n).

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $r_{n+1} = 0,95n + 200$.
2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 0,95. Donner son premier terme.
   En déduire l'expression de s_n en fonction de n.
   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.
   (c) Le contexte restant le même, à partir de quelle année l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?