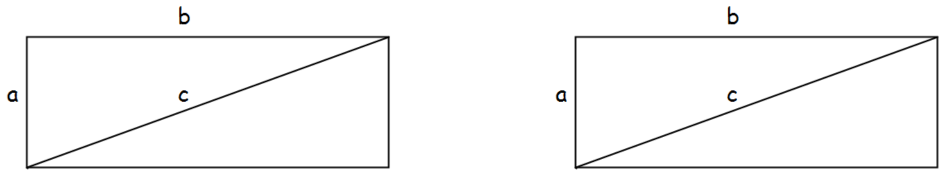
Séance d'AP 2 : Démonstration du théorème de Pythagore

Consignes :

- On découpe (deux fois) quatre triangles dans deux rectangles de même dimension a et b, de diagonale c.



- On les assemble ensuite comme indiqué en fabriquant deux carrés ABCD et IJKL.

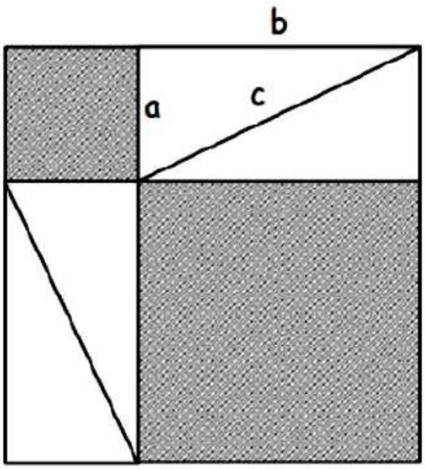


Figure A

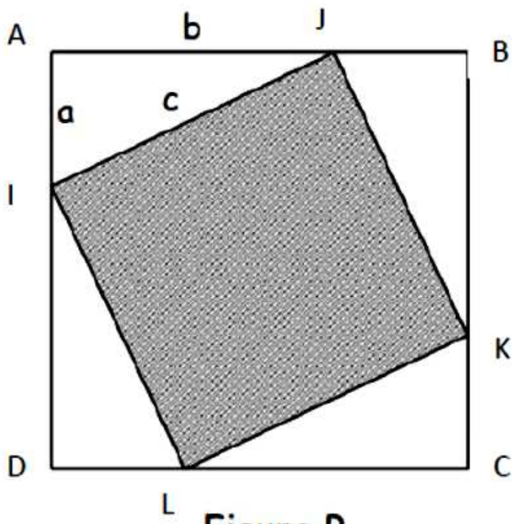


Figure B

On considère deux carrés identiques de longueur de côté $a + b$. Chaque figure est constituée de 4 triangles rectangles identiques de longueur a, b et c et d'une partie grise. Le but est de comparer les aires des parties grises des deux figures et d'en déduire une relation entre les mesures a, b et c.

1. Pourquoi les aires des parties grises sont égales ?
2. Dans la **figure A**, quelle est l'expression de l'aire de la partie grise en fonction de a et b.
3. Dans la figure B :
   (a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ILK}$.
   (b) Que peut-on donc dire du quadrilatère IJKL ?
   (c) Déterminer l'expression de l'aire de la partie grise en fonction de c.
4. En fonction des questions précédentes, trouver une relation liant les longueurs a, b et c.

<u>Démonstration :</u>

1. Les aires des surfaces grises dans chaque carré sont égales à l'aire du grand carré moins les aires des quatre triangles identiques.
Ces aires sont donc égales.

2. Dans la première figure la surface grise est composée de deux carrés, l'un de côté a et l'autre de côté b : **l'aire grise A est donc égale à** $a^2 + b^2$.

3. (d) On sait que les angles $\widehat{DLI}$ et $\widehat{ILK}$ d'une part et les angles $\widehat{ILK}$ et $\widehat{KLC}$ d'autre part sont adjacents. Par ailleurs, par construction, les points D, L et C sont alignés.

On a ainsi : $\widehat{DLI} + \widehat{ILK} + \widehat{KLC} = \widehat{DLC} = 180\,^\circ$

Or, comme les 4 triangles sont identiques, on déduit que $\widehat{KLC}$ et $\widehat{DLI}$ sont complémentaires.

On en déduit que : $\widehat{ILK} = 180 - 90 = 90\,^\circ$.

(e) On vient de montrer que le quadrilatère IJKL a un angle droit. Par ailleurs, par construction, les quatre côtés ont la même longueur c. Or, si un losange possède un angle droit alors il en possède 4 et c'est un carré.
On en déduit ainsi que IJKL est un carré.

(f) On déduit de ce qui précède que dans la deuxième figure la surface grise est un carré de côté c : **l'aire grise B est donc égale à** c^2.

Comme les aires grises des deux figures sont égales, les deux expressions trouvées dans les questions précédentes sont égales.

On a donc $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$. Ce qui prouve le théorème de Pythagore.

<u>Pour mercredi 3 ou jeudi 4 octobre :</u> Construire sur une grande feuille blanche la démonstration du théorème de Pythagore.