

Quotients égaux

- 1** Recopier et compléter chaque égalité par le nombre qui convient.

a. $\frac{5}{9} = \frac{\square}{36}$

b. $\frac{-6}{7} = \frac{24}{\square}$

c. $\frac{\square}{4} = \frac{-6}{-8}$

d. $\frac{21}{-14} = \frac{3}{\square}$

e. $\frac{17}{21} = \frac{\square}{-42}$

f. $\frac{5}{\square} = \frac{45}{63}$

- 2** Écrire chaque quotient sous la forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 15.

$\frac{2}{3}$; $\frac{-4}{5}$; $\frac{-7}{30}$; $\frac{0,8}{1,5}$; $\frac{-20}{-300}$; $\frac{12}{75}$

- 3** Recopier et compléter par les nombres qui conviennent.

$\frac{\square}{-25} = \frac{-24}{\square} = \frac{-4}{5} = \frac{\square}{-15} = \frac{8}{\square} = \frac{\square}{2,5} = \frac{-32}{\square}$

- 4** Simplifier chaque quotient en l'écrivant sous la forme $\frac{a}{3}$ où a est un nombre entier relatif.

a. $\frac{12}{18}$

b. $\frac{-40}{24}$

c. $\frac{-45}{-27}$

d. $\frac{140}{105}$

- 5** Simplifier le plus possible chaque quotient.

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{-14}{21}$

c. $\frac{36}{42}$

d. $\frac{-27}{-18}$

e. $\frac{44}{55}$

f. $\frac{-48}{-54}$

g. $\frac{50}{75}$

h. $\frac{-26}{39}$

6 Calcul mental

Simplifier le plus possible chaque quotient.

a. $\frac{-3}{15}$

b. $\frac{-18}{-81}$

c. $\frac{8}{28}$

d. $\frac{-35}{20}$

- 7** Trouver, parmi les quotients suivants, celui qui n'est pas égal aux autres.

$\frac{-12}{-16}$; $\frac{1,5}{2}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{-15}{-20}$; $\frac{18}{30}$; $\frac{21}{28}$

- 8** Écrire chaque quotient sous la forme d'une fraction.

a. $\frac{-4,6}{0,7}$

b. $\frac{6,24}{1,3}$

c. $\frac{7}{0,009}$

d. $\frac{-2,8}{0,03}$

- 9** Simplifier chaque quotient en le mettant sous la forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 6.

a. $\frac{5 \times 7 \times (-9)}{9 \times 2 \times 15}$

b. $\frac{49 \times (-20)}{(-12) \times 14}$

c. $\frac{5 \times (-7) \times 11}{(-22) \times (-3) \times 7}$

d. $\frac{40 \times 42}{18 \times 16}$

- 10** **1 a.** Écrire les cinq premiers multiples non nuls de 18, puis les cinq premiers multiples non nuls de 24.

b. En déduire le plus petit multiple non nul commun aux deux nombres 18 et 24.

- 2** Écrire alors les quotients $\frac{-5}{18}$ et $\frac{7}{24}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

- 11** **1** Écrire les premiers multiples non nuls de 20 et s'arrêter dès que l'on obtient un multiple de 15.

- 2** Écrire alors les quotients $\frac{2}{15}$ et $\frac{-3}{20}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

- 12** **1** Déterminer le plus petit multiple non nul commun aux deux nombres 8 et 9.

- 2** Écrire alors les quotients $\frac{-5}{8}$ et $\frac{2}{9}$ avec le même dénominateur entier le plus petit possible.

Pour les exercices 13 à 16, écrire dans chaque cas les deux quotients avec le même dénominateur.

On choisira le dénominateur entier le plus petit possible.

13 a. $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{14}$ b. $\frac{7}{6}$ et $\frac{2}{9}$ c. $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$

14 a. $\frac{1}{12}$ et $\frac{-9}{4}$ b. $\frac{4}{15}$ et $\frac{5}{18}$ c. $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{5}$

15 a. $\frac{9}{14}$ et $\frac{4}{21}$ b. $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{12}$ c. $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$

16 a. $\frac{3}{25}$ et $\frac{4}{75}$ b. $\frac{6}{7}$ et $\frac{2}{9}$ c. $\frac{-11}{30}$ et $\frac{9}{25}$

- 17** Indiquer, dans chaque cas, si les deux quotients sont égaux. On justifiera les réponses en utilisant des produits en croix.

a. $\frac{15}{29}$ et $\frac{345}{667}$ b. $\frac{8,5}{5,4}$ et $\frac{13,6}{8,64}$ c. $\frac{-23}{15}$ et $\frac{392}{-255}$

- 18** **1** Calculer les produits 8×288 et 9×256 .

- 2** En déduire une fraction égale à $\frac{8}{9}$ puis une fraction égale à $\frac{9}{288}$.

Pour les exercices 19 et 20, calculer dans chaque cas le nombre x pour lequel l'égalité est vraie.

19 a. $\frac{x}{7} = \frac{3}{2}$ b. $\frac{3,4}{x} = \frac{4}{5}$ c. $\frac{5}{6} = \frac{-4}{x}$

20 a. $\frac{0,6}{x} = \frac{4}{3}$ b. $\frac{x}{6} = \frac{-9}{2}$ c. $\frac{10}{7} = \frac{8}{x}$

Addition et soustraction

21 Calculer chaque somme.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \frac{5}{7} + \frac{3}{7} & \text{b. } \frac{-2}{9} + \frac{7}{9} & \text{c. } \frac{-4}{3} + \frac{-7}{3} \\ \text{d. } \frac{-1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{-17}{6} & \text{e. } \frac{4}{11} + \frac{-7}{11} + \frac{-6}{11} & \text{f. } \frac{-5}{13} + \frac{15}{13} + \frac{-10}{13} \end{array}$$

22 Calculer chaque expression.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$\begin{array}{lll} \text{A} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} & \text{B} = \frac{14}{15} - \frac{8}{15} & \text{C} = \frac{-7}{12} + \frac{-5}{12} \\ \text{D} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} & \text{E} = \frac{-3}{8} + \frac{7}{8} & \text{F} = \frac{-5}{18} - \frac{1}{18} \end{array}$$

23 Calculer chacune des sommes suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 1 + \frac{2}{3} & \text{b. } 1 + \frac{-7}{6} & \text{c. } \frac{4}{7} + 1 \\ \text{d. } 2 + \frac{1}{6} & \text{e. } \frac{2}{9} + 5 & \text{f. } \frac{-3}{8} + 3 \end{array}$$

24 Calcul mental

$$\begin{array}{ll} \text{A} = \frac{-2}{3} + \frac{7}{3} & \text{B} = \frac{-5}{7} + \frac{-8}{7} \\ \text{C} = 1 + \frac{-5}{6} & \text{D} = \frac{-2}{9} - \frac{5}{9} \\ \text{E} = \frac{5}{11} - \frac{-7}{11} & \text{F} = \frac{-5}{3} + 2 \end{array}$$

25 Recopier et compléter chaque égalité pour qu'elle soit vraie.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{4}{7} + \text{---} = \frac{-3}{7} & \text{b. } \frac{-2}{9} + \text{---} = \frac{5}{9} \\ \text{c. } 1 + \text{---} = \frac{13}{8} & \text{d. } \frac{-1}{11} + \text{---} = \frac{12}{11} \\ \text{e. } \frac{5}{3} + \text{---} = -\frac{2}{3} & \text{f. } 1 + \text{---} = \frac{-1}{6} \end{array}$$

26 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

$\begin{array}{c} + \\ \nearrow \end{array}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$
1					
2					
-3					

27 ① Recopier et compléter par les nombres qui conviennent :

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{\square}{30} + \frac{\square}{30} = \frac{\square}{30}$$

② Calculer chaque expression en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$\text{A} = \frac{-7}{10} - \frac{4}{15} \quad \text{B} = \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \quad \text{C} = \frac{7}{20} - \frac{5}{8}$$

Pour les exercices **28** à **31**, calculer chaque expression.

$$\text{28} \quad \text{A} = \frac{-5}{4} + \frac{3}{8} \quad \text{B} = \frac{9}{14} - \frac{13}{21} \quad \text{C} = \frac{7}{20} + \frac{4}{15}$$

$$\text{29} \quad \text{A} = \frac{1}{16} - \frac{5}{12} \quad \text{B} = \frac{-3}{5} + \frac{-2}{7} \quad \text{C} = \frac{5}{6} - \frac{-1}{9}$$

$$\text{30} \quad \text{A} = \frac{1}{4} + \frac{-3}{5} \quad \text{B} = \frac{7}{18} - \frac{4}{27} \quad \text{C} = \frac{-1}{6} + \frac{5}{-8}$$

$$\text{31} \quad \text{A} = \frac{25}{21} - \frac{3}{14} \quad \text{B} = \frac{-4}{15} + \frac{1}{12} \quad \text{C} = \frac{1}{45} - \frac{-5}{36}$$

32 Reproduire et compléter le tableau suivant. On simplifiera le résultat lorsque cela est possible.

x	y	$x+y$	$x-y$
$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{21}$		
$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{4}$		
$\frac{1}{6}$		0	

33 Déterminer, dans chaque cas, le nombre x pour lequel l'égalité est vraie.

$$\text{a. } x + \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \quad \text{b. } x - \frac{5}{6} = \frac{4}{9} \quad \text{c. } 2 + x = \frac{-3}{11}$$

34 Calculer chaque expression.

$$\begin{array}{ll} \text{A} = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} & \text{B} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ \text{C} = \frac{-5}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} & \text{D} = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3} - \frac{8}{25} \end{array}$$

35 Calculer en regroupant astucieusement les termes :

$$\begin{array}{ll} \text{A} = \frac{2}{3} - \frac{5}{7} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{8}{3} - \frac{3}{7} & \text{B} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{7}{6} - \frac{1}{3} \\ \text{C} = 2 - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{3}{2} & \text{D} = \frac{5}{16} + \frac{7}{15} - \frac{3}{16} + \frac{2}{15} - \frac{1}{8} + \frac{2}{5} \end{array}$$

36 Calculer chaque expression.

$$\begin{array}{ll} \text{A} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) & \text{B} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) \\ \text{C} = -\frac{4}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4} \right) & \text{D} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{15} + \frac{3}{25} \right) + \frac{2}{3} \end{array}$$

37 Les élèves de 4^e 3 ont participé à la randonnée du *Raid Aventure*, qui se déroulait en trois étapes.

Lors de la première étape, ils ont parcouru $\frac{5}{12}$ du trajet.

Lors de la deuxième étape, ils ont parcouru $\frac{7}{18}$ du trajet.

Quelle fraction du trajet leur restait-il à parcourir pour la troisième étape ?

- 38** Dans un collège, les élèves de quatrième peuvent choisir comme deuxième langue vivante l'anglais, l'allemand, l'espagnol ou l'italien.

Cette année, $\frac{1}{3}$ des élèves ont choisi l'anglais, $\frac{1}{6}$ des élèves ont choisi l'allemand et $\frac{1}{9}$ des élèves ont choisi l'italien.

Calculer la fraction des élèves de quatrième de ce collège qui ont choisi l'espagnol.

- 39** Calculer chaque expression après avoir effectué toutes les simplifications possibles.

$$A = \frac{21}{28} + \frac{2}{5} \quad B = \frac{15}{25} - \frac{6}{15} \quad C = \frac{30}{24} + \frac{63}{36}$$

$$D = -\frac{20}{12} + \frac{12}{30} \quad E = \frac{33}{44} - \frac{5}{8} \quad F = -\frac{14}{14} + \frac{5}{21}$$

- 40** Calculer A, B, C pour : $x = \frac{2}{15}$, $y = \frac{-1}{12}$ et $z = \frac{-3}{20}$.

$$A = x + y + z. \quad B = x - y + z. \quad C = x - (y + z).$$

Multiplication

- 41** Calculer chaque produit.

$$a. \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} \quad b. \frac{-2}{11} \times \frac{-6}{5} \quad c. \frac{7}{5} \times \frac{-4}{9}$$

$$d. \frac{-4}{11} \times \frac{2}{7} \quad e. \frac{5}{3} \times \frac{4}{3} \quad f. \frac{0,25}{7} \times \frac{4}{5}$$

$$g. 3 \times \frac{5}{7} \quad h. \frac{-3}{8} \times 7 \quad i. -5 \times \frac{-2}{3}$$

- 42** Recopier et compléter chaque égalité par les nombres qui conviennent.

$$a. \frac{-2}{5} \times \frac{7}{\square} = \frac{\square}{15} \quad b. -4 \times \frac{\square}{9} = \frac{-20}{\square}$$

$$c. \frac{-0,2}{\square} \times \frac{\square}{3} = \frac{1}{33} \quad d. \frac{9}{\square} \times \frac{\square}{4} = \frac{-45}{16}$$

- 43** ① Recopier et compléter par les nombres qui conviennent :

$$\frac{-8}{25} \times \frac{-15}{4} = \frac{8 \times \square}{25 \times 4} = \frac{4 \times \square \times 3 \times \square}{5 \times \square \times 4} = \frac{\square}{5}$$

② En procédant comme dans la question ①, calculer chaque produit. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

$$A = \frac{7}{9} \times \frac{3}{14} \quad B = \frac{-15}{8} \times \frac{-6}{25} \quad C = \frac{-28}{27} \times \frac{36}{7}$$

- 44** Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$\times \left(-\frac{2}{3}\right)$	-3	-2	9	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

45 Calcul mental

Calculer chaque produit. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$a. \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \quad b. \frac{-2}{9} \times \frac{-3}{5} \quad c. \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$$

$$d. 5 \times \frac{7}{15} \quad e. \frac{5}{6} \times (-2) \quad f. \frac{-4}{15} \times (-5)$$

- 46** Alexiane a gagné 725,20 € en travaillant pendant le mois de juillet. Elle dépense $\frac{1}{7}$ de ce montant la première semaine d'août, puis $\frac{3}{8}$ de ce montant la deuxième semaine de ce mois.
Combien reste-t-il à Alexiane pour terminer ses vacances ?

- 47** Dans un collège, $\frac{2}{5}$ des élèves font partie de l'Association sportive. Parmi ces élèves, $\frac{3}{8}$ pratiquent le badminton.
Quel est le pourcentage d'élèves du collège pratiquant le badminton dans le cadre de l'Association sportive ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le badminton est le deuxième sport le plus pratiqué dans le monde, après le football, avec environ 100 millions de pratiquants. C'est une discipline olympique depuis 1992 (Jeux Olympiques de Barcelone). Le badminton a de nombreux ancêtres : un jeu indien, le poona, vieux de 2 000 ans, le battledore and shuttlecock pratiqué en Angleterre dès le Moyen-Âge, et le jeu de volant, pratiqué en Europe dès le XVII^e siècle à la cour des rois. Le philosophe Jean-Jacques Rousseau écrivit : « Quand un enfant joue au volant, il exerce l'œil et le bras à la justesse. » Il devrait son nom à la Badminton House, résidence du Duc de Beaufort en Angleterre, où le volant sous sa forme actuelle aurait été inventé en 1873 par des officiers anglais revenus des Indes : voulant montrer le poona à leurs hôtes mais n'ayant pas de balle sous la main, ils utilisèrent un bouchon de champagne auquel ils attachèrent quelques plumes.



- 48** Dans une salle de théâtre, $\frac{4}{9}$ des places sont en catégorie 1. Au cours d'un spectacle, $\frac{7}{8}$ des places en catégorie 1 sont occupées.

- ① Quelle fraction du nombre de places de cette salle représentent les places occupées en catégorie 1 ?
② La salle de théâtre peut contenir 414 spectateurs. Combien de spectateurs occupent des places en catégorie 1 ?

Pour les exercices 49 à 51, calculer chaque expression. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

49 $A = \frac{-25}{8} \times \frac{4}{15}$

$B = \frac{-11}{3} \times \frac{-9}{22}$

$C = \frac{13}{30} \times \frac{15}{26}$

$D = \frac{6}{7} \times \frac{49}{18}$

$E = \frac{35}{12} \times \frac{3}{14}$

$F = \frac{-17}{52} \times \frac{-39}{34}$

$G = \frac{0,07}{0,3} \times \frac{0,9}{0,14}$

$H = \frac{0,15}{2,6} \times \frac{3,9}{0,45}$

50 $A = \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7}$

$B = \frac{-6}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{-11}{6}$

$C = \frac{2}{3} \times \frac{-6}{13} \times \frac{5}{2}$

$D = 3 \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{4}$

$E = \frac{-3}{4} \times 8 \times \frac{7}{9}$

$F = \frac{-33}{7} \times \frac{-21}{25} \times \frac{-15}{44}$

51 Calcul mental

$A = \frac{-5}{3} \times \frac{7}{6} \times \frac{3}{5}$

$B = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

Nombres inverses

52 Recopier et compléter chaque égalité par le nombre qui convient.

a. $6 \times \square = 1$ b. $-3 \times \square = 1$ c. $\square \times 13 = 1$

d. $\frac{2}{3} \times \square = 1$ e. $\square \times \frac{-5}{7} = 1$ f. $\frac{2}{-9} \times \square = 1$

53 ① a. Quel est l'inverse du nombre 11 ? Justifier la réponse par un calcul.

b. L'inverse du nombre 11 est-il un nombre décimal ?

② Reprendre la question ① avec les nombres 8, $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{2}$.

54 Donner l'inverse de chacun des nombres suivants en écriture fractionnaire. Lorsque cela est possible, on en donnera aussi une écriture décimale.

5 ; 3 ; -8 ; 0,4 ; $\frac{2}{7}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{-5}{3}$

55 Recopier et compléter chaque égalité par le nombre qui convient.

$4^{-1} = \square$ $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \square$ $0,1^{-1} = \square$ $(-2)^{-1} = \square$

56 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{7}$				
Inverse de x			3	-11		
Opposé de x					-5	$\frac{5}{9}$

57 Vrai ou faux

a. L'inverse de -0,25 est -4.

b. L'inverse de -5 est 5.

c. L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$.

d. L'inverse de $\frac{9}{11}$ est $\frac{11}{9}$.

e. L'inverse de l'inverse de 8 est 8.

f. L'inverse de l'opposé de -3 est $-\frac{1}{3}$.

Division

58 Recopier et compléter chaque égalité par les nombres qui conviennent.

a. $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $4 : \frac{1}{7} = 4 \times \square = \square$

c. $\frac{4}{3} : \frac{-11}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

d. $\frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{6} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Pour les exercices 59 à 61, calculer chaque quotient et donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

59 a. $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

b. $\frac{9}{11} : \frac{4}{3}$

c. $\frac{-2}{7} : \frac{3}{7}$

d. $\frac{4}{3} : \frac{4}{-7}$

e. $(-2) : \frac{9}{8}$

f. $\frac{5}{3} : (-5)$

60 a. $\frac{7}{9} : \frac{5}{3}$

b. $\frac{3}{-13} : \frac{-2}{9}$

c. $\frac{15}{14} : \frac{-20}{21}$

d. $\frac{-8}{25} : \frac{12}{5}$

e. $\frac{-1}{9} : 4$

f. $8 : \frac{3}{2}$

61 a. $\frac{9}{28} : \frac{15}{-4}$

b. $\frac{-1}{6} : 4$

c. $\frac{4}{13} : \frac{7}{26}$

d. $1 : \frac{-2}{9}$

e. $\frac{-7}{8} : 2$

f. $\frac{5}{-12} : \frac{-25}{6}$

62 Déterminer, dans chaque cas, le nombre x pour lequel l'égalité est vraie.

a. $\frac{2}{7} \times x = \frac{5}{3}$

b. $x \times \frac{3}{8} = \frac{-1}{7}$

c. $\frac{-1}{3} \times x = 5$

d. $2 \times x = \frac{1}{6}$

e. $-3 \times x = \frac{2}{9}$

f. $x \times \left(\frac{-1}{9}\right) = \frac{4}{3}$

63 ① Calculer : $18 : \frac{2}{3}$

② Clara a dépensé les deux tiers de son argent de poche pour acheter un CD coûtant 18 €.

Quel était le montant de son argent de poche ?

64 Combien de bouteilles de $\frac{3}{4}$ de litre peut-on remplir avec le contenu d'un fût de 60 L ?

65 Thème de convergence

Les eaux pluviales

Quelle est la contenance d'une citerne de récupération des eaux pluviales qui, remplie aux $\frac{3}{5}$, contient 5 700 L ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

L'eau de pluie qui ruisselle sur les surfaces la réceptionnant est dénommée eau pluviale. Elle n'est pas potable, mais 54 % de l'eau que nous utilisons n'a pas besoin de l'être. Ainsi, les eaux pluviales filtrées sont suffisantes pour une utilisation industrielle (lavage de surfaces, refroidissement, ...), collective (alimentation de blocs sanitaires, arrosage d'espaces verts) ou domestique (usages non alimentaires et non corporels). Elles présentent donc un réel intérêt, non seulement en termes d'économies d'énergie, mais aussi de développement durable.



Hababa, Yémen

Dans les forteresses du Djebel, les Yéménites ont appris à stocker avec art la précieuse eau de pluie dans des citernes construites à flanc de roc sur les parois escarpées.

66 Calcul mental

Donnez le résultat sous la forme la plus simple possible.

- a. $\frac{5}{3} : \frac{2}{3}$ b. $\frac{6}{7} : \frac{6}{5}$ c. $\frac{-2}{5} : 2$
 d. $\frac{9}{4} : (-3)$ e. $(-4) : \frac{-2}{7}$ f. $\frac{3}{4} : \frac{4}{3}$

67 1 $A = \frac{5}{\frac{6}{7}}$. Quel est le numérateur de A ? Quel est le dénominateur de A ? Calculer A.

2 Reprendre la question 1 pour : $B = \frac{5}{\frac{6}{7}}$.

Pour les exercices 68 et 69, calculer chaque quotient. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

68 $A = \frac{8}{\frac{3}{11}}$ $B = \frac{6}{\frac{7}{9}}$ $C = \frac{1}{\frac{8}{5}}$ $D = \frac{-5}{\frac{3}{10}}$

69 $A = \frac{-5}{\frac{7}{3}}$ $B = \frac{12}{\frac{13}{6}}$ $C = \frac{-25}{\frac{21}{-7}}$ $D = \frac{26}{\frac{33}{13}}$

Priorités opératoires

Pour les exercices 70 à 72, calculer chaque expression en donnant le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

On vérifiera les résultats avec une calculatrice.

INDICATION : Pour l'utilisation d'une calculatrice, on peut se reporter à la page 44.

70 $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ $B = \frac{4}{7} : \left(2 - \frac{3}{5}\right)$
 $C = \frac{7}{8} - \frac{3}{15} \times \frac{25}{12}$ $D = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} : \left(1 + \frac{1}{8}\right)$

71 $A = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{7}{15}$ $B = \frac{12}{15} - \frac{8}{15} : \frac{16}{9}$
 $C = -\frac{5}{7} + \frac{5}{21} \times \frac{9}{25}$ $D = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{5}$
 $E = -\frac{4}{3} + \frac{11}{12} \times \frac{22}{18}$ $F = \frac{5}{2} : \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{2}\right)$
 $G = \frac{5}{4} + \frac{11}{4} \times \frac{20}{33}$ $H = 5 + \left(1 + \frac{1}{8}\right) : \frac{3}{4}$

72 $A = \left(1 - \frac{1}{7}\right) : \frac{12}{5}$ $B = \frac{15}{14} - \frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$
 $C = 3 + \frac{5}{4} \times \left(2 - \frac{1}{5}\right)$ $D = \frac{25}{17} : \frac{15}{14} - \frac{11}{3}$
 $E = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{9}{16}$ $F = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} : \frac{35}{12}$
 $G = \frac{5}{6} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{14} + \frac{2}{3}$ $H = \left(1 - \frac{2}{3}\right) : \left(1 + \frac{2}{3}\right)$

73 Monsieur et Madame K ont acheté une cuisine intégrée. Ils ont payé le sixième du prix à la commande, un quart du prix à la livraison et le reste en six mensualités d'un même montant.

- 1 Quelle fraction du prix représentent les six mensualités ?
 2 La cuisine, TVA et installation comprises, a coûté 3 600 €. Calculer le montant d'une mensualité.

74 1 Calculer : $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$.

On donnera le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

- 2 Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2007 et les quatre cinquièmes du reste en 2008.
 a. Quelle fraction de la propriété a-t-il vendue en 2008 ?
 b. Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?
 c. Quelle était la superficie de la propriété, sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

75 Calculer X, Y, Z pour : $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{6}$ et $c = -\frac{5}{3}$.
 $X = a + 2b - c$; $Y = (a + b) : c$; $Z = 2a - b + ac$.

76 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C	D
1	Le nombre $\frac{-18}{24}$ est égal à :	$\frac{-20}{22}$	$\frac{-9}{12}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{36}{-48}$
2	$2 + \frac{-1}{4} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$	$\frac{8}{10}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{15}{24}$
4	$\frac{2}{5} + \frac{4}{7} =$	$\frac{34}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$ est le résultat de :	$1 + \frac{-3}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{4}$
6	$\frac{-5}{7} \times \frac{14}{-3} =$	$\frac{(-5) \times 14}{7 \times (-3)}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{5 \times 14}{7 \times 3}$	$\frac{9}{4}$
7	$3 \times \frac{-5}{9} =$	$\frac{-15}{27}$	$\frac{-5}{27}$	$\frac{-15}{9}$	$-\frac{5}{3}$
8	$\frac{1}{9}$ est le résultat de :	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{-5}{18} \times \frac{-2}{5}$	$2 - \frac{1}{9}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$
9	L'inverse de $\frac{-9}{11}$ est :	$\frac{9}{11}$	$\frac{11}{-9}$	$-\frac{11}{9}$	$\frac{11}{9}$
10	$5^{-1} =$	-5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0,2
11	$\frac{-2}{3} : \frac{5}{7} =$	$\frac{-10}{21}$	$\frac{-14}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{3}{10}$
12	$12 : \frac{2}{3} =$	$\frac{6}{3}$	$\frac{1}{2}$	$12 \times \frac{3}{2}$	18
13	$\frac{3}{14}$ est le résultat de :	$\frac{3}{7} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{7} : 2$	$\frac{3}{2} \times \frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

- Calculer une expression contenant plusieurs opérations

77 Calculer :

$$A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \times 7 + \frac{4}{9}$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{3}\right) : \frac{20}{9}$$

$$C = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} : \left(\frac{-3}{4} + \frac{1}{6}\right)$$

$$D = \frac{3}{8} - \frac{3}{14} \times \frac{7}{6}$$

$$E = \left(1 + \frac{2}{7}\right) : \left(1 - \frac{2}{7}\right)$$

$$F = \frac{-5}{6} + 3 \times \frac{11-1}{11+1}$$

$$G = \frac{-3}{11} \times \left(1 - \frac{1}{14} - \frac{1}{7}\right)$$

$$H = 1 - \frac{1}{3} : \frac{5}{3} - \frac{28}{35}$$

- Déterminer si deux quotients sont égaux

78 Déterminer, dans chaque cas, si les deux quotients sont égaux. Justifier en utilisant des produits en croix.

a. $\frac{-2,7}{8,2}$ et $\frac{-1,88}{5,8}$

b. $\frac{16}{37}$ et $\frac{464}{1\,073}$

- Résoudre un problème

79 Pour réaliser le cocktail des îles, il faut :

$\frac{1}{3}$ de jus d'orange, $\frac{1}{4}$ de jus de mangue, $\frac{1}{6}$ de jus de goyave et de la limonade.

① Quelle fraction du cocktail représente la limonade ?

② Calculer, en cL, la quantité de chaque ingrédient nécessaire pour réaliser 1,5 L de ce cocktail.

80 Carrés magiques

Recopier et compléter chacun des carrés suivants de telle sorte que la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit la même.

a.

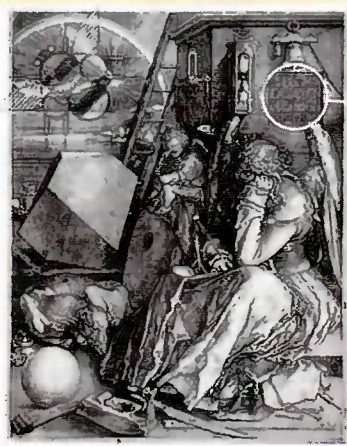
	$\frac{1}{4}$	
	$-\frac{7}{4}$	
	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{11}{4}$

b.

$\frac{4}{3}$		1
	$\frac{5}{6}$	
		$\frac{1}{3}$

LE SAVIEZ-VOUS ?

L'origine des carrés magiques, étudiés depuis plus de 4 000 ans, serait en Chine et en Inde. On les retrouve aussi dans les mathématiques arabes. Les plus grands mathématiciens les ont étudiés et Blaise Pascal (1623-1662) y a consacré tout un ouvrage, intitulé. *Traité des nombres magiquement magiques.* Il existe beaucoup de sortes de carrés magiques. Par exemple, les carrés magiques géométriques, pour lesquels l'addition est remplacée par la multiplication. Un type de carré magique a particulièrement fasciné, le carré magique dit normal, comme celui que le peintre allemand Albrecht Dürer (1471-1528) a représenté dans l'une de ses gravures, *Melancolia I*.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En observant ce carré magique, pouvez-vous trouver ce qui caractérise un carré magique normal ? Pour vous aider un peu, voici un autre carré magique normal, dit Lo Shu (écrit de Lo), apparu, selon une légende remontant à plus de 2 000 ans, sur le dos d'une tortue sortant de la rivière chinoise Lo.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Pour en savoir plus :
http://www.recreomath.qc.ca/dict_magique_carre.htm
<http://serge.mehl.free.fr/anx/magique.html>

81 Calculer l'inverse du nombre $A = \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$.

82 Vérifier que chacune des égalités suivantes est vraie.

a. $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} - \frac{1}{40}$
b. $\frac{5}{6} - \frac{8}{5} \times \frac{15}{28} = \left(\frac{8}{7} - 1\right) \times \left(\frac{5}{6} - 1\right)$

83 Vrai ou faux

a. $\frac{4}{7} - \frac{-1}{7} = \frac{3}{7}$
b. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$
c. $\frac{-2}{3} \times \frac{-5}{4} = \frac{5}{6}$
d. $4 \times \frac{-7}{3} = \frac{-28}{12}$
e. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times 5 = 1$
f. $2^{-1} = -2$
g. $\frac{3}{7} : \frac{7}{3} = 1$
h. $\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{10}{21}$
i. $\frac{1}{3} : 2 = \frac{2}{3}$
j. $2 : \frac{1}{3} = 6$

84 Soit le nombre $A = \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{11}{6} - \frac{2}{5}\right)$.
Prouver que A est un nombre entier.

Pour les exercices **85** et **86**, recopier et compléter chaque égalité par le signe d'opération qui convient.

85 a. $\frac{2}{3} \dots \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$
b. $\frac{-2}{3} \dots \frac{5}{6} = \frac{-5}{9}$
c. $\frac{-2}{3} \dots \frac{-5}{6} = \frac{1}{6}$
d. $\frac{2}{3} \dots \frac{-5}{6} = \frac{-4}{5}$
86 a. $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$
b. $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$
d. $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2} = 2$

87 Si $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ et $\frac{y}{z} = \frac{5}{3}$, alors $\frac{x}{z}$ vaut :
a. $\frac{5}{6}$
b. $\frac{6}{5}$
c. $\frac{3}{2}$
d. $\frac{2}{3}$
e. On ne peut pas savoir.

D'après Concours KANGOUROU

88 Prouver que chacune des égalités suivantes est vraie.

a. $\frac{1}{5} : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{4}{5} - 8\right) : 3$
b. $\frac{5}{-2} \times \frac{\frac{7}{9}}{\frac{3}{3}} = \left(2 - \frac{11}{9}\right) \times \frac{1}{\frac{-2}{5}}$

Pour les exercices 89 à 91, calculer chaque expression. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$89 \quad A = \frac{1 + \frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} \quad B = \frac{2 - \frac{2}{3}}{3 + \frac{1}{6}} \quad C = \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$$

$$90 \quad A = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \quad B = \frac{\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times 4}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{4}{9}} \quad C = \frac{(1 - \frac{1}{3}) \times 7}{1 - \frac{1}{3} \times 7}$$

$$91 \quad A = \frac{\frac{5}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{4}}{\frac{5}{9} - 11 \times \frac{3}{44}} \quad B = 3 \times \frac{1 - \frac{2}{7}}{1 - \frac{1}{6}} \times \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{3}{7}}$$

92 Recopier et compléter chaque égalité par le nombre qui convient.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 7 \times \square = 4. & \text{b. } -3 \times \square = 5. & \text{c. } \square \times 6 = 11. \\ \text{d. } 5 \times \square = \frac{2}{3}. & \text{e. } \square \times 9 = \frac{4}{7}. & \text{f. } -4 \times \square = -\frac{7}{3}. \\ \text{g. } \square \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}. & \text{h. } \frac{2}{7} \times \square = \frac{9}{7}. & \text{i. } \frac{5}{3} \times \square = -\frac{3}{11}. \end{array}$$

93 Calculer chaque expression pour $a = -\frac{2}{3}$.

$$A = (a + 2)(a - 2). \quad B = 2 - \frac{1}{a}. \quad C = \frac{a}{a + 2}.$$

$$D = (2a - 1)(2a + 1). \quad E = \left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right).$$

94 On donne : $x = -2$ et $y = \frac{3}{7}$. Calculer :

$$\text{a. } \frac{x}{y}. \quad \text{b. } x\left(1 - \frac{2}{y}\right). \quad \text{c. } \frac{1}{x} - \frac{1}{y}. \quad \text{d. } \frac{x}{x + y}.$$

95 Calculer X, Y, Z, T pour :

$$a = \frac{5}{9}, \quad b = -2 \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{6}.$$

$$X = \frac{a + b}{c}; \quad Y = a + \frac{b}{c}; \quad Z = \frac{a}{b + c}; \quad T = \frac{a + c}{b + c}.$$

96 Quinze élèves de 4^e A ont eu une note supérieure à 12 à leur dernier contrôle. Ils représentent trois quarts des $\frac{5}{6}$ des élèves de cette classe.

Combien y a-t-il d'élèves en 4^e A ?

97 Par quelle fraction faut-il multiplier un nombre :

- a. pour l'augmenter de son tiers ?
- b. pour le diminuer de ses trois cinquièmes ?

98 Un philatéliste a vendu deux tiers de sa collection de timbres en janvier et trois cinquièmes du reste en février. Quelle fraction de sa collection de timbres reste invendue à l'issue de ces deux mois ?

99 Vu au brevet

Quatre enfants découpent un pain d'épice pour leur goûter.

Aziza en prend le tiers, Bilal prend $\frac{3}{5}$ de ce qu'a laissé Aziza. Enfin Cécile et Clément, qui sont jumeaux, se partagent la manière égale le reste.

Choisir parmi les expressions X, Y, Z, celle qui permet d'obtenir la fraction du pain d'épice reçue par chacun des jumeaux et effectuer le calcul.

$$X = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) : 2; \quad Y = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times 2;$$

$$Z = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}.$$

100 Un écureuil a fait ses réserves de noisettes.

La première semaine, il mange un cinquième de sa réserve ; la deuxième semaine, il mange un quart du reste de sa réserve ; la troisième semaine, il mange un tiers du nouveau reste. Quelle fraction de sa réserve de noisettes reste-t-il après cette troisième semaine ?

101 La bonne réponse

Pour quelle valeur de x l'égalité $\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$ est-elle vraie ?

$$\text{a. } 0. \quad \text{b. } \frac{20}{21}. \quad \text{c. } \frac{6}{5}. \quad \text{d. } -\frac{6}{5}. \quad \text{e. } \frac{21}{20}.$$

D'après Concours KANGOUROU

102 Deux nombres x et y sont tels que :

$$x + y = 2 \quad \text{et} \quad x \times y = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Calculer } Z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

103 Fractions égyptiennes

Le papyrus de Rhind (~ 1650 av. J.-C.) montre que les Égyptiens n'utilisaient pour leurs calculs, essentiellement administratifs et commerciaux, que des fractions de numérateur 1 et dont les dénominateurs étaient des nombres entiers strictement positifs. Ces fractions portent le nom de fractions égyptiennes. Deux exceptions cependant : ils utilisaient $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, qu'ils représentaient par des signes spéciaux.

Ainsi, pour exprimer ce qui est, aujourd'hui, la fraction $\frac{3}{5}$, ils utilisaient une décomposition en une somme de fractions égyptiennes distinctes, comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ par exemple.

On se propose, dans cet exercice, de décomposer quelques fractions en une somme de fractions égyptiennes distinctes.

1 a. Vérifier que chacune des égalités suivantes est vraie :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \times 5}.$$

b. Démontrer que, n étant un nombre entier positif non nul,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

c. En utilisant la question précédente, écrire $\frac{1}{5}$ puis $\frac{1}{6}$ sous la forme d'une somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

2 a. Vérifier que : $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

b. En utilisant la question 1, écrire $\frac{2}{3}$ sous la forme d'une somme de quatre fractions égyptiennes distinctes.

c. Démontrer que, p étant un nombre entier positif non nul :

$$\frac{2}{3 \times p} = \frac{1}{2 \times p} + \frac{1}{6 \times p}.$$

d. En utilisant la question précédente, écrire $\frac{2}{9}$ puis $\frac{2}{15}$ sous la forme d'une somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

3 a. Recopier et compléter :

$$\frac{7}{11} = \frac{14}{22} = \frac{11+2+1}{22} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}.$$

b. En utilisant la démarche de la question précédente, écrire $\frac{5}{7}$ sous la forme d'une somme de trois fractions égyptiennes distinctes.

104 1 Calculer chacun des nombres suivants.

$$A = 3 + \frac{1}{7} \quad B = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} \quad C = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{7}}}$$

$$D = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$$

2 En utilisant une calculatrice, vérifier que les quatre nombres A, B, C et D sont proches d'un nombre bien connu.

Argumenter et débattre

105 Mélanie et Corentin veulent savoir si les quotients $\frac{22\,619\,537}{54\,608\,393}$ et $\frac{131\,836\,323}{318\,281\,039}$ sont égaux.

Mélanie utilise sa calculatrice et affirme que les deux quotients sont égaux.

Corentin affirme, en faisant un calcul très simple, que les deux quotients ne sont pas égaux.

Qui faut-il croire ? Justifier.

106 Vrai ou faux

1 $-\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{8}$ sont deux nombres inverses.

2 L'inverse d'un nombre décimal non nul est un nombre décimal.

3 L'inverse de l'inverse d'un nombre non nul x est égal à x .

4 L'inverse de l'opposé d'un nombre non nul x est égal à l'opposé de l'inverse de x .

5 Le carré de l'inverse d'un nombre non nul x est égal à l'inverse du carré de x .

6 Le produit des inverses de deux nombres non nuls x et y s'écrit $\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}$.

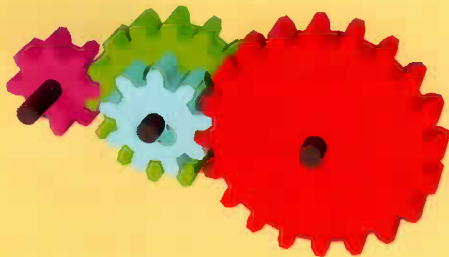
107 L'inverse du produit de deux nombres non nuls x et y est-il égal au produit des inverses de x et y ? Justifier.

108 L'inverse de la somme de deux nombres non nuls x et y est-il égal à la somme des inverses de x et y ? Justifier.

POUR LES CURIEUX

Sur les dents

1 Sur l'engrenage ci-dessous, le pignon de l'axe A possède 20 dents et le pignon de l'axe B en possède 9.



Le pignon A tourne d'un tour complet.

Quelle fraction exprime le nombre de tours que va faire le pignon B ?

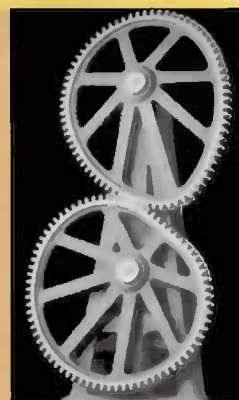
2 On ajoute sur l'axe B un pignon de 15 dents et, en face de celui-ci, sur l'axe C, un pignon de 8 dents.

a. De combien de tours le pignon C tournera-t-il à chaque tour du pignon B ?

Quand cela ne tourne pas rond

En mécanique, les engrenages peuvent servir à des tâches beaucoup plus complexes que des simples multiplications de fractions. Ainsi, la photo ci-contre montre des engrenages qui ne sont pas circulaires.

On peut voir une animation du mouvement de cet engrenage et s'apercevoir qu'il produit un mouvement à vitesse variable sur le site www.mathcurve.com/courbes2d/engrenage/engrenagefin.shtml



Engrenages de Clair, 1860.

b. De combien de tours le pignon C tournera-t-il à chaque tour du pignon A ?

Pouvait-on calculer simplement ce nombre de tour à partir des deux résultats précédents ?

3 Calculer : $A = \left(\frac{6}{9} - \frac{7}{15}\right) \times \left(\frac{12}{11} + \frac{18}{5}\right)$; $B = \frac{\frac{3}{21} - \frac{9}{12}}{\frac{11}{42} + \frac{15}{60}}$; $C = \frac{-7}{2} \times \frac{\frac{2}{65} + \frac{5}{52}}{\frac{12}{5}}$.