Plan du cours

Activité d'introduction 1

PARTIE A

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique de France.
En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme. Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

1) Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
2) On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en $2020 + n$.
(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Calculer ensuite les valeurs u_{40} et u_{50} à l'aide de la calculatrice.
(b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter.

PARTIE B

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singe dans une réserve naturelle.
En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

1) Déterminer le nombre de singes en 2021 et en 2022.
2) On note v_n le nombre de singes en $2020 + n$.
(a) Exprimer v_n en fonction de n. Calculer ensuite les valeurs v_{40} et v_{50}
(b) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter. Que peut-on penser de cette évolution ?

I. Limites de suites

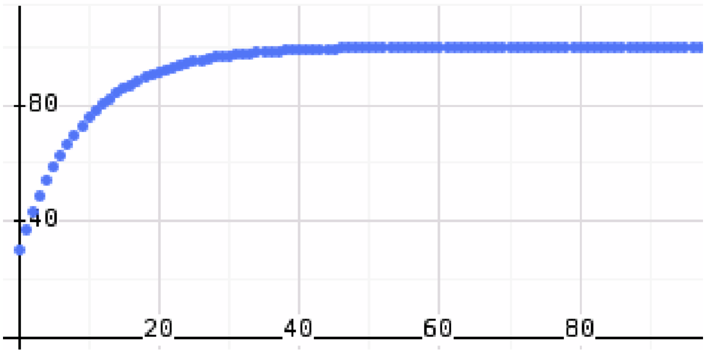
Étudier la limite d'une suite (u_n) c'est chercher ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :
- Les nombres u_n finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

1. Limite d'une suite

Définition **Les suites convergentes**

Une suite u converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

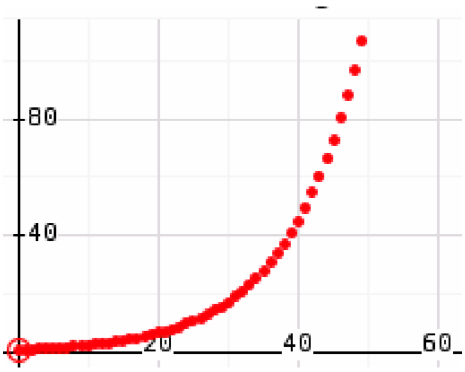
On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$



Définition **Les suites divergentes**

Une suite u diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout réel $A > 0$ (respectivement $B < 0$), il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A (respectivement B).

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)



Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{n}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

  Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$

  La suite $\left(-\dfrac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^n} + n^2\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$
  De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

  Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} + n^2 = +\infty$

La suite $\left(\dfrac{1}{e^n} + n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - e^n = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$. Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + e^{-n} = 1$

Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-e^n}{1+e^{-n}} = -\infty$

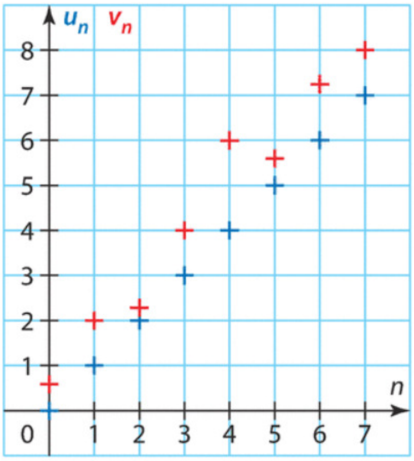
La suite $\left(\dfrac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

2. Limites et comparaison

Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$



On remarque par lecture graphique que $u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Donc par comparaison des limites on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exemples :

1) Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n + 3n$

A l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

On cherche donc une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$.

Pour tout entier n,

$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3n \leq (-1)^n + 3n \leq 1 + 3n$ (car $n > 0$ donc $3n > 0$)

$\Leftrightarrow -1 + 3n \leq u_n \leq 1 + 3n$ On choisit donc $v_n = -1 + 3n$.

On a pour tout entier n, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et la suite diverge aussi vers $+\infty$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2sin(n)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

- **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$.**

  Pour tout entier n,$-1 \leq sin(n) \leq 1$

  $\Leftrightarrow -2 \leq sin(n) \times 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + n \leq 2sin(n) + n \leq 2 + n$ (car $n > 0$)

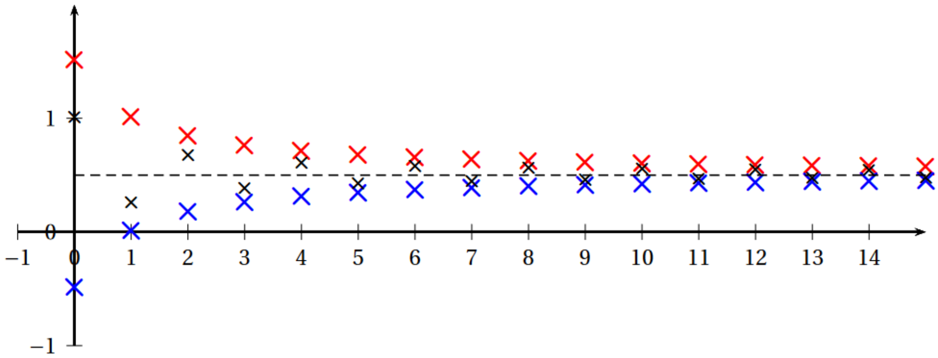
  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$.

- **On a pour tout entier** n, $u_n \geq n - 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$

  Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème **Théorème des gendarmes**

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$



Exemple : Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{1}{n} \leq 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n} + 3$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + 3 = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 3$

3. Comportement des suites géométriques

Revenons un instant sur les suites géométriques.

Théorème

Soit la suite de terme général q^n, où q est un réel positif.

- Si $q > 1$ alors la suite a pour limite $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et on dit que la suite est divergente.
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. On dit, dans ce cas, que la suite converge vers 0.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = 0$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = +\infty$ si $a > 0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = -\infty$ si $a < 0$.

Exemples :

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = -3$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis la limite de (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_0 \times q^n = -3 \times 0,5^n$

On a $u_0 < 0$ et $q = 0,5$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$.
Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
Exprimer S_n, la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite puis la limite de cette somme .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_n = 5 \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{10}{2-\sqrt{2}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On a $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{10}{2-\sqrt{2}}$

II. Recherche d'un seuil

La recherche d'un seuil consiste dterminer l'entier n_0 partir duquel la suite est plus petite qu'une valeur donne (cas des suites convergentes) ou plus grand qu'une valeur donne (cas des suite ayant pour limite $+\infty$).

Considrons comme exemple la suite gomtrique (u_n) dfinie pour tout entier n par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Cette suite est dcroissante car sa raison est infrieure 1 et converge vers 0.

On se propose de dterminer un seuil partir duquel u_n est plus petit que 10^{-40}, c'est--dire trouver le plus petit entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.

On labore pour cela un algorithme permettant la recherche de ce seuil

1 est le premier terme de la suite
K dsigne n_0 cherch.
Tant que $u_K > 10^{-40}$, on effectue ce qui suit :

- chaque boucle, on incrmente l'indice de 1 ;
- on calcule u_K
La boucle s'arrte lorsque $u_K < 10^{-40}$

La valeur affiche aprs la mise en oeuvre de cet algorithme fournit le seuil n_0 cherch. Dans cet exemple on obtient $n_0 = 321$. Ainsi, si n est suprieur ou gal 321, alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.
Cet algorithme se programme sur la calculatrice Texas Instrument de cette manire :
Dans le cas des suite qui tendent vers $+\infty$, on remplacera la condition dans la boucle *tant que* par une condition du type $A < 10^{40}$.

Application :

Soit (u_n) la suite gomtrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 10$.
crire un algorithme permettant de dterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $u_n < 10^{-90}$. Programmer cet algorithme l'aide de la calculatrice et en dduire la valeur de n_0.

Correction :

III. Suites arithmético-géométriques

Définition

On appelle suite arithmtico-gomtrique une suite dfinie par son premier terme et pour tout entier naturel n, par une relation de la forme :

$u_{n+1} = au_n + b$ o a et b sont deux rels donns

Remarque : : si $a = 1$ alors la suite est arithmtique ; si $b = 0$ alors la suite est gomtrique. Vous comprendrez donc le nom donn ces suites !

L'tude d'une suite arithmtico-gomtrique se ramne l'tude d'une suite auxiliaire gomtrique. Cette suite est « toujours » donne par l'nonc.

Petite activit prparatoire : un couple dpose au premier janvier 2011 une somme de 10 000 euros sur un compte rmunr au taux annuel de 4 %. Par la suite, ce couple possde une capacit annuelle de 3 000 euros, pargne verse tous les premiers janvier sur le compte prcdent.
Les intrts sont capitaliss au 31 dcembre de chaque anne. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme dont le couple dispose au 1er janvier de l'anne (2011+nn).

(1). (a) Calculer les valeur S_0, S_1, S_2 et S_3.

(b) La suite (S_n) est-elle arithmtique ? gomtrique ?

9

(2). (a) Montrer que l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n est donne par la relation :

$$S_{n+1} = (1,04)S_n + 3000$$

(b) l'aide de la calculatrice, obtenir le tableau de valeurs de S_n pour n variant de 0 20.

(c) Au 1er janvier de quelle anne le couple possdera-t-il une pargne suprieure 50 000 euros ?

Une entreprise du secteur du BTP doit rduire la quantit de dchets qu'elle rejette .
Elle s'engage, terme, rejeter moins de 30 000 tonnes de dchets par na.
En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de dchets.
Depuis cette date, l'entreprise rduit chaque anne la quantit de dchets qu'elle rejette de 5 % par rapport la quantit rejete l'anne prcdente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux dchets par an en raison du dveloppement de nouvelles activits.
On note r_n la quantit, en tonnes, des dchets rejets pour l'anne (2007+n).

(1). Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $r_{n+1} = 0,95n + 200$.

(2). Soit (s_n) la suite dfinie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4\,000$.

(a) Dmontrer que la suite (s_n) est une suite gomtrique de raison 0,95. Donner son premier terme.
En dduire l'expression de s_n en fonction de n.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

(c) Le contexte restant le mme, partir de quelle anne l'entreprise russira-t-elle respecter son engagement ?