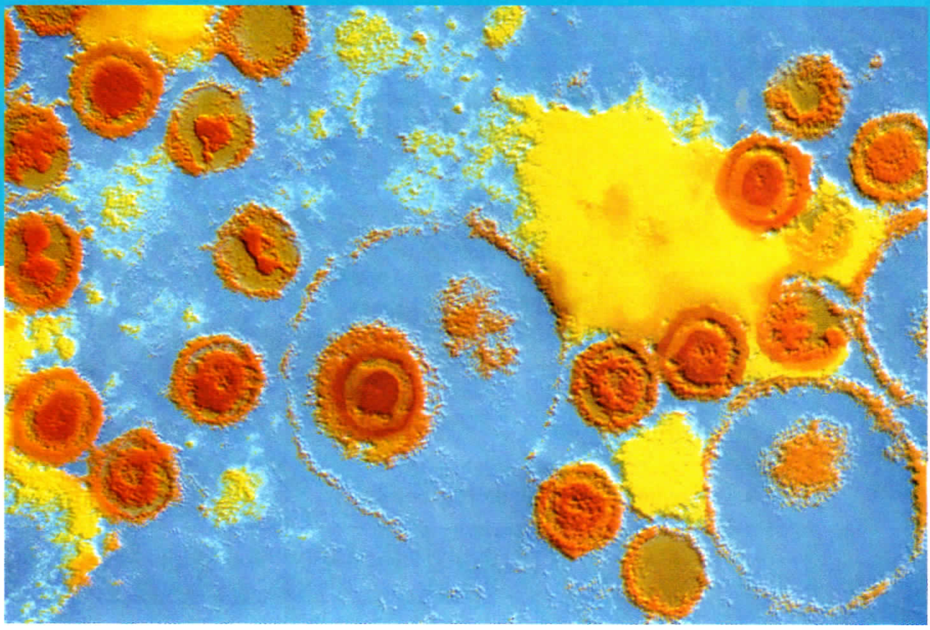
4 Puissances d'exposant entier relatif



Le virus d'Epstein Barr responsable d'une maladie, la mononucléose infectieuse (microscopie électronique x 100 000 = x 10^5).

Avec les **puissances de 10**, les mathématiciens se **facilitent** le travail. Un des arts du mathématicien est d'avoir de bonnes notations pour noter les nombres de **façon commode**. Il sait que **multiplier** un nombre entier **par 10** revient à ajouter un zéro à droite, que le **multiplier par 100** revient à ajouter deux zéros à droite, etc.

La taille d'une molécule est environ un **cent millionième** de mètre. Celle d'une cellule environ un **cent millième** de mètre. Écrire cela sous la forme d'une fraction demande beaucoup de temps… C'est pour s'éviter une peine inutile que les mathématiciens ont inventé la notation par les puissances de 10. La paresse oblige parfois à **réfléchir**…

L'écriture décimale de la **taille de l'Univers**, exprimée en mètre, est un 7 suivi de… **26 zéros**, ce qui s'avère peu maniable. Il fallait bien trouver une notation : avouez qu'il est plus facile, comme vous allez le voir dans ce chapitre, d'écrire 7×10^{26} mètres.

Pour bien commencer

QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	L'aire d'un carré de côté a est égale à	$4 \times a$	a^2	$a \times 2$
2	5^3 est une écriture du produit	5×3	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	$5 \times 5 \times 5$
3	Le produit de trois facteurs égaux à 2 s'écrit	$2 \times 2 \times 2$	3×2	$2 + 2 + 2$
4	$0{,}147 =$	$\frac{14{,}7}{100}$	$\frac{147}{100}$	$\frac{1{,}47}{100}$
5	$427{,}87 \times 1\,000 =$	427 870	0,427 87	42 787 000
6	$5\,321{,}6 : 100 =$	5,3216	53,216	532 160
7	$931 \times 0{,}1 =$	0,931	9 310	93,1
8	$752{,}8 : 0{,}01 =$	75 280	7,528	752 800
9	Un ordre de grandeur de $0{,}09 \times 989$ est	100	1 000	10
10	Le produit $(-2) \times (-2) \times (-2)$ est	positif	négatif	on ne peut rien dire
11	Le produit $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$ est	positif	négatif	on ne peut rien dire

Exercice 1 Calculer, sans poser les opérations :

a. 15×100. **b.** $5\,700 : 100$. **c.** $905 : 1\,000$.

d. $0{,}008\,5 \times 10\,000$. **e.** $0{,}53 : 100$. **f.** $9\,100 \times 0{,}1$.

g. $457{,}3 \times 0{,}01$. **h.** $32{,}4 \times 0{,}001$. **i.** $2\,155 : 0{,}1$.

j. $61{,}5 : 0{,}01$. **k.** $0{,}008 : 0{,}001$. **l.** $3{,}14 : 0{,}000\,1$.

Exercice 2 Recopier et compléter chaque égalité pour qu'elle soit vraie.

a. $32{,}4 \times \square = 3\,240$. **b.** $5{,}7 \times \square = 0{,}57$. **c.** $69\,200 \times \square = 6{,}92$.

d. $426 : \square = 0{,}426$. **e.** $723 : \square = 723\,000$. **f.** $0{,}03 : \square = 3$.

Exercice 3 ❶ Écrire chaque nombre sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 2.

a. 4. **b.** 8. **c.** 32.

❷ Écrire chaque nombre sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 3 :

a. 9. **b.** 27. **c.** 81.

Activités

Activité 1 Puissances d'exposant entier strictement positif

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.
On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

1 Par quel produit le nombre initial de bactéries a-t-il été multiplié :

a. au bout de 2 heures ? **b.** au bout de 5 heures ? **c.** au bout de 8 heures ?

2 **a.** Comment note-t-on le produit 3×3 ?

b. Proposer une notation pour $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ et pour $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Pour conclure

n désignant un nombre entier supérieur ou égal à 2, que représente la notation 3^n ?
À quel nombre correspond l'écriture 3^1 ?
Le nombre 3^n est une **puissance de 3** et le nombre n est appelé **l'exposant**.
3^n se lit « 3 exposant n » (ou « 3 puissance n »).

3 Recopier et compléter les égalités suivantes.

$5^{\square} = 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

$\square^7 = 1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}4$.

$(-3{,}2)^{\square} = (-3{,}2) \times (-3{,}2) \times (-3{,}2) \times (-3{,}2) \times (-3{,}2) \times (-3{,}2)$.

$\square^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$.

Activité 2 Puissances d'exposant nul ou strictement négatif

1 **a.** Recopier et compléter l'échelle de puissances ci-contre.

b. Que peut-on dire de l'exposant lorsque l'on divise une puissance de 7 par 7 ?

c. Quelle valeur convient-il de donner à 7^0 pour que le processus se poursuive ?

$7^4 \xrightarrow{:7} 7^{\square} \xrightarrow{:7} 7^{\square} \xrightarrow{:7} 7^{\square}$

2 **a.** Recopier et compléter l'échelle de puissances ci-contre en admettant que le même processus se poursuit.

b. Recopier et compléter les égalités suivantes.

$7^0 \xrightarrow{:7} 7^{-1} \xrightarrow{:7} 7^{-\square} \xrightarrow{:7} 7^{-\square} \xrightarrow{:7} 7^{-\square}$

$7^0 : 7 = \square : 7 = \dfrac{\square}{7}$; d'où : $7^{-1} = \dfrac{\square}{7}$.

$7^{-1} : 7 = \dfrac{\square}{7} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{\square}{7^2}$; d'où : $7^{-2} = \dfrac{\square}{\square}$.

$7^{-2} : 7 = \dfrac{\square}{\square} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{\square}{\square} \times \dfrac{\square}{\square} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{\square}{\square}$; d'où : $7^{-3} = \dfrac{\square}{\square}$.

Pour conclure

n désignant un nombre entier supérieur ou égal à 1, que représente la notation 7^{-n} ?

Activité 3 Signe d'une puissance d'un nombre entier relatif

1 **a.** Écrire les puissances de 2 suivantes sous la forme d'un produit : 2^4 et 2^5.

b. Quel est le signe de 2^4 et de 2^5 ? Justifier.

2 **a.** Écrire les puissances de –2 suivantes sous la forme d'un produit : $(-2)^3$ et $(-2)^6$.

b. Quel est le signe de $(-2)^3$? le signe de $(-2)^6$? Justifier.

Pour conclure

- Quel est le signe d'une puissance d'un nombre positif ?
- Que peut-on dire du signe d'une puissance d'un nombre négatif : lorsque l'exposant est pair ? lorsque l'exposant est impair ?

Activité 4 Puissances de 10

1 Écrire sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 10 puis d'une puissance de 10 :
100 ; 1 000 ; 100 000.
Observer le nombre de zéros de l'écriture décimale de chaque nombre et l'exposant de son écriture sous la forme d'une puissance de 10. Que remarque-t-on ?

2 Recopier et compléter chaque égalité :

$10^{-1} = \frac{1}{10^{\square}} = 0{,}1$; $10^{-3} = \frac{1}{10^{\square}} = \frac{1}{\square \times \square \times \square} = \frac{1}{\square} = \square$;

$10^{-4} = \frac{1}{10^{\square}} = \frac{1}{\square \times \square \times \square \times \square} = \frac{1}{\square} = \square$.

Observer le nombre de zéros de l'écriture décimale de chaque nombre et l'exposant de son écriture sous la forme d'une puissance de 10. Que remarque-t-on ?

Pour conclure

n désignant un nombre entier positif, combien y a-t-il de zéros dans l'écriture décimale de 10^n ? dans l'écriture décimale de 10^{-n} ?

3 **a.** Donner l'écriture décimale de $21{,}65 \times 10^3$ et de $105{,}4 \times 10^{-2}$.

b. Recopier et compléter les phrases suivantes.
Multiplier 21,65 par 10^3 revient à déplacer la virgule de $\square$ rangs vers la ______.
Multiplier 105,4 par 10^{-2} revient à diviser 105,4 par $\square$, ce qui revient à déplacer la virgule de $\square$ rangs vers la ______.

Activité 5 Opérations sur les puissances de 10

1 **Produit de deux puissances de 10**

Écrire sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 10 ou de l'inverse d'un produit de facteurs égaux à 10, puis d'une puissance de 10 :
$10^2 \times 10^3$; 10×10^2 ; $10^{-1} \times 10^3$; $10^{-2} \times 10^{-4}$.

Pour conclure *n et p désignant deux nombres entiers relatifs, le produit $10^n \times 10^p$ est égal à une puissance de 10. Quel est son exposant ?*

2 Quotient de deux puissances de 10

Écrire sous la forme d'un quotient de facteurs égaux à 10 puis d'une puissance de 10 :

$\frac{10^5}{10^3}$; $\frac{10^2}{10^7}$; $\frac{10^0}{10^{-6}}$; $\frac{10^{-4}}{10^{-3}}$.

Pour conclure *n et p désignant deux nombres entiers relatifs, le quotient $\frac{10^n}{10^p}$ est égal à une puissance de 10. Quel est son exposant ?*

3 Puissance d'une puissance de 10

a. Écrire le nombre $(10^2)^3$ sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 10^2, puis de facteurs égaux à 10. En déduire l'écriture de $(10^2)^3$ sous la forme d'une puissance de 10.

b. Recopier et compléter :

$$(10^{-2})^2 = 10^{\square} \times 10^{\square} = \frac{1}{10^{\square} \times 10^{\square}} = \frac{1}{\square \times \square \times \square \times \square} = \frac{1}{\square} = 10^{\square} ;$$

c. En procédant comme dans la question précédente, écrire chacun des nombres $(10^3)^{-2}$ et $(10^{-2})^{-4}$ sous la forme d'une puissance de 10.

Pour conclure *n et p désignant deux nombres entiers relatifs, la puissance d'exposant p de 10^n, qui s'écrit $(10^n)^p$, est égale à une puissance de 10. Quel est son exposant ?*

Activité 6 Notation scientifique d'un nombre décimal

1 **a.** Recopier et compléter : $452 \times 10^{\square} = 4\,520$; $\square \times 10^{-2} = 4\,520$.

b. Ainsi, on a écrit le nombre 4 520 de deux façons différentes sous la forme d'un produit d'un nombre décimal par une puissance de 10.
Donner trois autres écritures de 4 520 sous cette forme.

c. Écrire 4 520 sous la forme du produit d'un nombre décimal compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu) par une puissance de 10.
On admet que cette écriture est unique, elle est appelée **la notation scientifique** de 4 520.

2 L'unité astronomique, symbole ua, est la distance Terre-Soleil, soit environ 149,6 millions de kilomètres.
On donne ci-dessous la distance de Mercure, de Jupiter et de Neptune au Soleil.
Mercure : 0,39 ua ; Jupiter 5,2 ua ; Neptune : 30,1 ua.

a. Donner la notation scientifique de chacune des distances Mercure-Soleil, Jupiter-Soleil et Neptune-Soleil exprimées en kilomètre.

b. En déduire un ordre de grandeur de chacune de ces distances, exprimées en kilomètre, sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre entier compris entre 1 inclus et 10 exclu, et p un nombre entier positif.