3 Puissances d'exposant entier relatif

Galaxie spirale NGC 7331 dans Pégase

Les objets de l'Univers **les plus éloignés** que l'on peut observer sont situés à **10^{25} mètres** : ce sont des amas de galaxies très brillantes créés au début de l'Univers, il y a environ **10^{10} années**. **Les plus petites** structures dont on peut obtenir des images sont des grosses molécules, comme la molécule de benzène de quelque **10^{-10} mètre**. Sans la notation scientifique, il serait bien long d'écrire ces nombres…

Le **gogol** vaut **10^{100}**. Le moteur de recherche **Google** a repris la version anglaise de ce nom (*googol*), faisant ainsi allusion à sa **puissance** d'organisation des données sur le web.

Imaginez que vous **doubliez** le nombre de grains de blé sur les **64 cases** successives d'un échiquier en partant d'un grain. Le nombre total de grains **($1 + 2 + 4 + \ldots$)** sera environ égal à **2^{64}**, soit plus que la récolte mondiale de blé !

Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	Le nombre 3^4 est égal à :	3×4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$
2	Le nombre $(-4)^0$ est égal à :	1	-1	0
3	Le nombre 2^{-1} est :	un nombre négatif	l'opposé de 2	l'inverse de 2
4	$2^2 \times 2^3 =$	2^5	2^6	$2 \times 2 \times 2 \times 3$
5	$\frac{2^7}{2^5} =$	2^{12}	2^2	$\frac{7}{5}$
6	$(-3)^4$ est un nombre :	positif	négatif	On ne peut rien dire
7	$(-2)^7$ est un nombre :	positif	négatif	On ne peut rien dire
8	Soit n un entier tel que $n > 1$. L'écriture décimale de 10^n comporte :	10 zéros	n chiffres	n zéros
9	L'écriture décimale de 10^{-5} comporte :	4 zéros	5 zéros	6 zéros
10	$10^4 \times 10^{-7} \times 10^{-1} =$	10^{12}	10^{-4}	10^{28}
11	$\frac{10^2}{10^5} =$	10^{-3}	10^3	10^7
12	$(10^2)^{-3} =$	10^{-1}	-10^6	10^{-6}
13	Le nombre $467{,}3 \times 10^4$ a pour notation scientifique :	$4{,}673 \times 10^4$	$4{,}673 \times 10^6$	$4{,}673 \times 10^2$

Exercice 1 **a.** Recopier et compléter :

$(-3)^2 \times (-3)^5 = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = (-3)^{\_\_\_}$

$\frac{2^4}{2^3} = \frac{\_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_}{\_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_} = 2^{\_\_\_}$

$(3^2)^4 = 3^2 \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = 3^{\_\_\_}$

b. En utilisant la méthode de la question **a**, écrire chacune des expressions suivantes sous la forme a^n où n est un entier relatif.

- $7^4 \times 7^{-1}$
- $5^{-2} \times 5$
- $\frac{3^2}{3^7}$
- $\frac{(-5)^{-2}}{(-5)^{-7}}$
- $(5^{-1})^3$
- $(11^{-4})^{-2}$

Exercice 2 Écrire les expressions suivantes sous la forme 10^n où n est un entier relatif.

$A = 10^7 \times 10^2 \times 10^{-1}$ $\quad B = \frac{10^{-5} \times 10^3}{10^8}$ $\quad C = (10^5)^{-2}$

$D = 10^3 \times 10^5 \times 10^0$ $\quad E = \frac{10^{11} \times 10^{-4}}{10^2}$ $\quad F = 10 \times (10^{-3})^{-4}$

Exercice 3 **a.** Parmi les nombres ci-dessous, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

$A = 13\,563$ $\quad B = 0{,}0095$ $\quad C = 1{,}72 \times 10^{-3}$ $\quad D = 15{,}4 \times 10^2$ $\quad E = 0{,}87 \times 10^5$

$F = -2{,}85 \times 10^4$ $\quad G = -12\,000 \times 10^{-2}$ $\quad H = 0{,}56 \times 10^{-7}$ $\quad I = -1{,}8.$

b. Donner la notation scientifique des autres nombres.

Exercice 4 Soient $A = 367{,}9 \times 10^{12}$ et $B = 0{,}0076 \times 10^{16}$.

Donner un ordre de grandeur de A et B, puis en déduire une comparaison de A et B.

Activités

Activité 1 Produit et quotient de deux puissances d'un même nombre

A Produit

Soit a un nombre non nul.

1 **a.** En utilisant la définition de la puissance d'un nombre, recopier et compléter :

- $a^3 \times a^2 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = a^{\dots}$
- $a^{-4} \times a^7 = \dfrac{\dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots}{\dots \times \dots \times \dots \times \dots} = a^{\dots}$
- $a^{-3} \times a^{-1} = \dfrac{1}{\dots \times \dots \times \dots} \times \dfrac{1}{\dots} = \dfrac{1}{a^{\dots}} = a^{\dots}$

b. Peut-on calculer rapidement $a^{1977} \times a^{-436}$ en utilisant la définition de la puissance d'un nombre ? Pourquoi ?

2 Dans chacun des cas précédents, quelle est la relation entre les exposants de l'expression initiale et l'exposant du résultat final ?

3 De manière générale, n et p étant deux nombres entiers relatifs, le produit $a^n \times a^p$ est égal à une puissance de a. Quel est son exposant ?

4 **Applications**

a. Calculer le plus rapidement possible les expressions suivantes :

$A = 3^4 \times 3^{-7}$ $\quad$ $B = 2^{11} \times 2^{-5} \times 2^3$ $\quad$ $C = 5^{364} \times 5^{763}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = (-x)^3 \times (-x)^2 \times (-x)^1$ $\quad$ $E = (-x)^0 \times (-x)^5$ $\quad$ $F = x^{-17} \times x^{80} \times x^{-63}$

c. À la calculatrice, calculer les nombres 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; 3^6 ; 3^7 et 3^8. Que constate-t-on concernant les derniers chiffres de ces puissances ?

Sans calculatrice, mais en utilisant la règle de calcul établie précédemment, donner le dernier chiffre de l'écriture décimale du nombre 3^{27}.

B Quotient

Soient a un nombre non nul et n et p deux entiers relatifs.

On s'intéresse au quotient $\dfrac{a^n}{a^p}$.

1 Le quotient $\dfrac{a^n}{a^p}$ est égal à une puissance de a. Écrire le quotient $\dfrac{a^n}{a^p}$ sous la forme d'un produit, puis, en utilisant le résultat trouvé dans la question A3, déterminer son exposant.

2 **Applications**

a. Calculer le plus rapidement possible :

$A = \dfrac{7^{12}}{7^5}$ $\quad$ $B = \dfrac{2^0}{2^{-6}}$ $\quad$ $C = \dfrac{(-3)^{-65}}{(-3)^{-98}}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = \dfrac{a^{-3}}{a^2}$ $\quad$ $E = \dfrac{a^4}{a^{-9}}$ $\quad$ $F = \dfrac{a^{678} \times a^{-5}}{a^{-7}}$

Activité 2 Puissance d'une puissance d'un nombre

Soit a un nombre non nul.

1 **a.** En utilisant la définition de la puissance d'un nombre, recopier et compléter :

- $(a^2)^4 = \text{---}\times\text{---}\times\text{---}\times\text{---} = a^{\text{---}}$
- $(a^{-3})^2 = \text{---}\times\text{---} = a^{\text{---}}$
- $(a^5)^{-2} = \dfrac{1}{(a^5)^{\text{---}}} = \dfrac{1}{\text{---}}\times\dfrac{1}{\text{---}} = \dfrac{1}{a^{\text{---}}} = a^{\text{---}}$
- $(a^{-3})^{-1} = \dfrac{1}{a^{\text{---}}} = a^{\text{---}}$

b. Peut-on calculer rapidement $(a^{120})^{40}$ en utilisant la définition de la puissance d'un nombre ? Pourquoi ?

2 Dans chacun des cas précédents, quelle est la relation entre les exposants de l'expression initiale et l'exposant du résultat final ?

3 De manière générale, n et p étant deux nombres entiers relatifs, la puissance de puissance $(a^n)^p$ est égale à une puissance de a. Quel est son exposant ?

4 **Applications**

a. Calculer le plus rapidement possible :

$A = (2^4)^5$ $B = (6^{-1})^7$ $C = (3^{45})^{-10}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = (a^0)^{-3}$ $E = (a^{-3})^{-8}$ $F = (3^{-67})^{-20}$

c. Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^4 ? Écrire 24 sous la forme d'un produit de deux entiers, puis en déduire le dernier chiffre de 7^{24}.

Activité 3 Produit et quotient des puissances de deux nombres ayant le même exposant

A Produit

1 En participant à un concours de mathématiques, Maxime a dû résoudre le problème suivant :
« Combien de zéros terminent l'écriture décimale du nombre 30^{27} ? »
Voici son raisonnement :

$$30^{27} = \underbrace{(3\times10)\times(3\times10)\times(3\times10)\times\dots\times(3\times10)}_{27\text{ fois}}$$
$$= \underbrace{3\times3\times\dots\times3}_{27\text{ fois}}\times\underbrace{10\times10\times\dots\times10}_{27\text{ fois}}$$
$$= 3^{27}\times10^{27}$$

$3^0=1$; $3^1=3$; $3^2=9$; $3^3=27$; $3^4=81$; $3^5=243$; $3^6=729$; $3^7=2187$; $3^8=6561$... donc 3^{27} ne peut pas se terminer par 0... D'où le nombre 30^{27} se termine par 27 zéros.

a. Le raisonnement de Maxime est-il correct ?

b. Soient a et b des nombres non nuls, recopier et compléter :

- $a^3 \times b^3 = a \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times b \times \_\_\_ \times \_\_\_ = (a \times b) \times (\_\_\_ \times \_\_\_) \times (\_\_\_ \times \_\_\_) = (a \times b)^{\_\_\_}$
- $a^{-2} \times b^{-2} = \dfrac{1}{\_\_\_ \times \_\_\_} \times \dfrac{1}{\_\_\_ \times \_\_\_} = \dfrac{1}{(\_\_\_ \times \_\_\_) \times (\_\_\_ \times \_\_\_)} = \dfrac{1}{(\_\_\_ \times \_\_\_)^{\_\_\_}} = (a \times b)^{\_\_\_}$

c. De quel nombre obtient-on une puissance quand on effectue les produits $a^3 \times b^3$ et $a^{-2} \times b^{-2}$?

d. De manière générale, n étant un nombre entier relatif, le produit $a^n \times b^n$ est égal à la puissance d'un nombre. De quel nombre s'agit-il et quel est son exposant ?

2 Applications

a. Calculer le plus rapidement possible :

$A = 2^4 \times 5^4$ $\quad$ $B = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times 2^2$ $\quad$ $C = 3^{-1} \times 5^{-1}$

b. x et y sont des nombres non nuls. Réduire les expressions suivantes :

$D = b^3 \times c^3$ $\quad$ $E = x^{-5} \times y^{-5}$

B Quotient

1 Soient a et b deux nombres non nuls.

a. n étant un entier relatif, quelle relation a-t-on entre $\left(\dfrac{1}{b}\right)^n$ et $\dfrac{1}{b^n}$?

b. n étant un entier relatif, le quotient $\dfrac{a^n}{b^n}$ est égal à la puissance d'un nombre. En utilisant le résultat trouvé dans la question A1, déterminer de quel nombre il s'agit et préciser son exposant.

2 Applications

a. b, c et y sont des nombres non nuls. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une puissance d'un nombre :

$A = \dfrac{5^7}{3^7}$ $\quad$ $B = \dfrac{6^2}{3^2}$ $\quad$ $C = \dfrac{7{,}2^{-1}}{2{,}4^{-1}}$ $\quad$ $D = \dfrac{b^{-3}}{c^{-3}}$ $\quad$ $E = \dfrac{x^{24}}{y^{24}}$

b. Écrire le nombre $1{,}5^4$ sous la forme d'un quotient de deux entiers (on commencera par écrire 1,5 sous la forme d'un quotient de deux entiers, puis on en déduira l'écriture recherchée de $1{,}5^4$).

Activité 4 De l'importance des parenthèses...

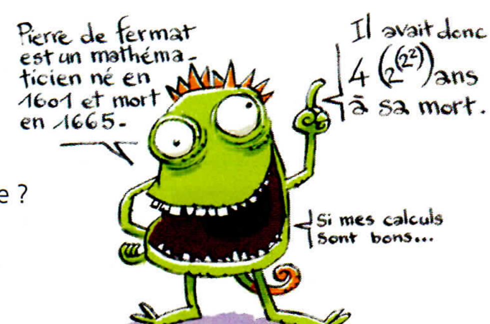
Soit le nombre $A = 2^{2^n} + 1$.

1 Le professeur demande de calculer A pour $n = 3$.
Rémi trouve 65 tandis que Jeanne a pour résultat 257.

a. Quel programme de calcul a effectué Rémi ?

b. Quel programme de calcul a effectué Jeanne ?

c. Peut-on savoir quel élève a donné la réponse correcte ? Pourquoi ?



2 On appelle nombres de Fermat les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$. Ils correspondent aux nombres $2^{(2^n)} + 1$.
Calculer un de ces nombres pour $n = 4$ et $n = 5$.