2) Limite en un point

(a) Limite infinie et asymptote verticale

Définition

Soit un réel a qui appartient ou est une borne de lensemble de définition de f.
Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x très proche de a.

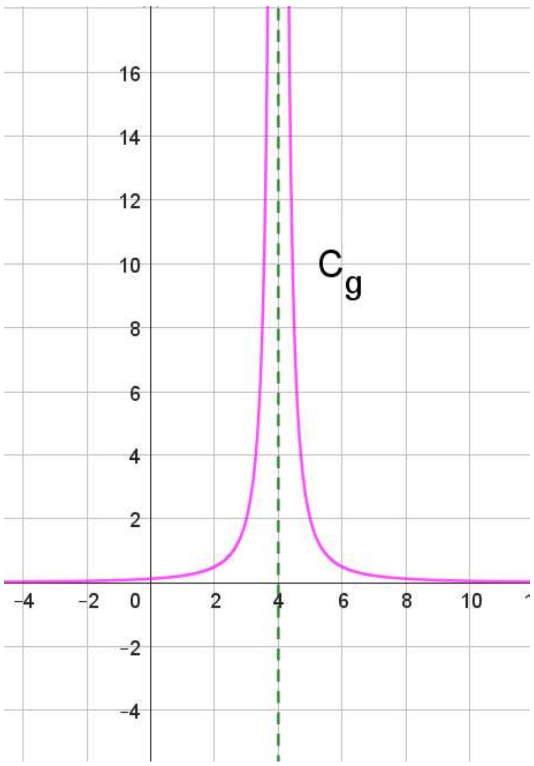
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

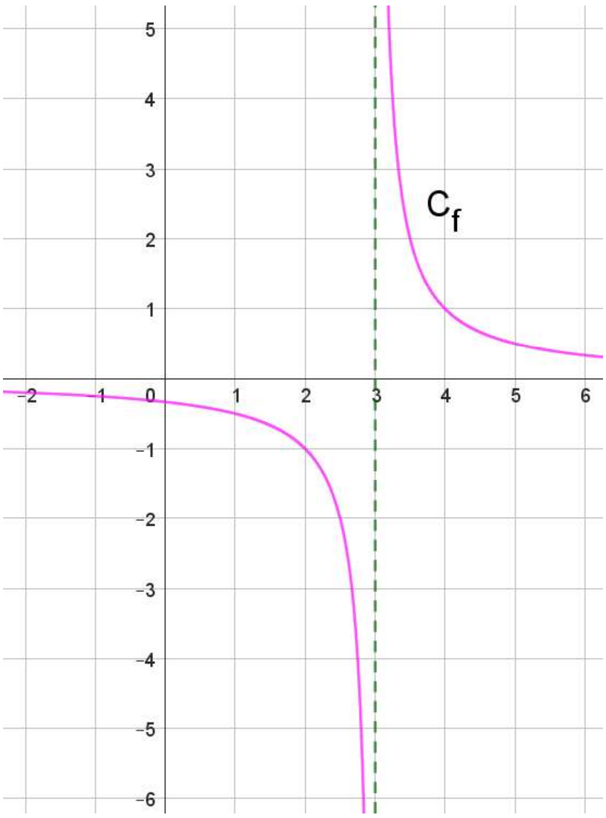
On dit que la droite déquation $x = a$ est asymptote à la courbe.

Remarques :

- De manière analogue, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue quand x est très proche de a.
- Il peut y a voir une limite à droite et à gauche.

Exemples : Soient $g(x) = \dfrac{2}{(x-4)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$:





(b) Limite à gauche et à droite

Exemple : Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

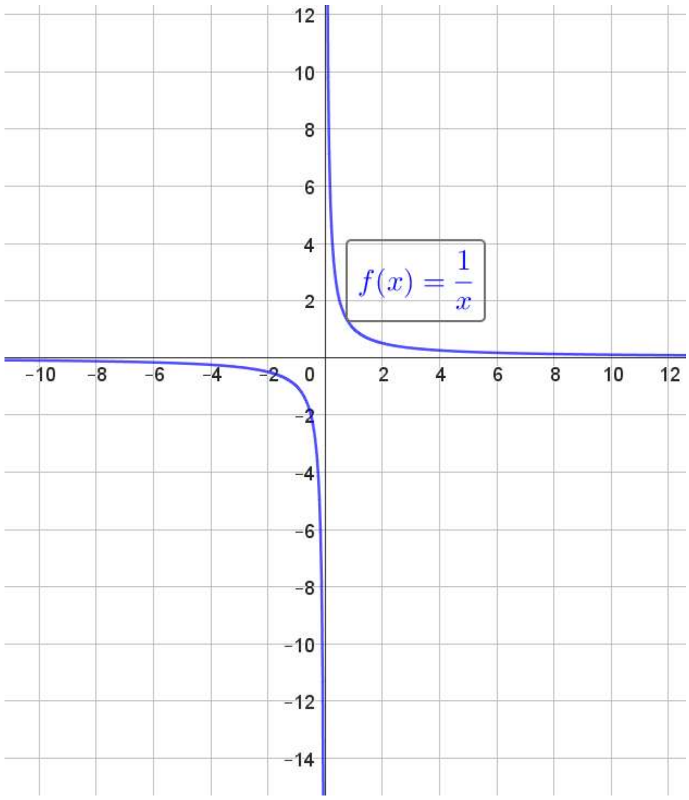
La fonction f admet des limites différentes en 0 selon que :
$x > 0$ *(soit* 0^+*)* ou $x < 0$ *(soit* 0^-*)*.

Calculons ces 2 limites :

- **Si** $x > 0$ **:** *(on parle de limite à droite de 0)*
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

- **Si** $x < 0$ **:** *(on parle de limite à gauche de 0)*
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Remarque : Les limites à gauche et à droite de $\dfrac{1}{x}$ en 0 ne sont pas égales, **on dit donc que la limite de la fonction** f **en 0 n'existe pas**.



(c) Limite finie

Définition

Soit une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et ℓ deux réels.
On dit que f admet ue limite ℓ lorsque x tend vers a si les valeurs de $f(x)$ dont aussi proches de ℓ que l'on veut quand x est très proche de a.

Òn écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$

Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2, x^3 est très proche de 8, donc $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de $f(2) = 3$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

(d) Limite des fonctions de références

$f(x) =$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non définie

II. Opération sur les limites

f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels.
α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)] =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

*Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\frac{1}{x} = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\frac{1}{x} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x-3 = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x-3 =$ est **une forme indéterminée**, on ne peut donc rien conclure.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)] =$	$\ell\times\ell'$	∞	∞	F.I.

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$: on applique la règle des signes pour déterminer si le produit est positif ou négatif.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)(5+x^2) = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+x^2 = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)(5+x^2) = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\sqrt{x} = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\sqrt{x} = -\infty$

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\dfrac{1-2x}{x-3} = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} 1-2x = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-$

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\dfrac{1-2x}{x-3} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{7-x}{\sqrt{x}} = \textbf{?}$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} 7-x = 7$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x} = 0^+$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{7-x}{\sqrt{x}} = +\infty$