Méthodes

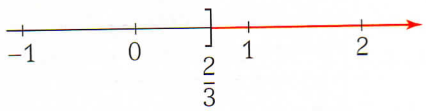
Savoir-faire 1 Résoudre une inéquation du 1er degré à une inconnue

Énoncé Résoudre l'inéquation $-9x+4<2(1-3x)$.

Solution

Méthode Pour trouver les solutions d'une inéquation de ce type, on se ramène à une inéquation d'inconnue x de la forme $ax<b$.
Pour cela, on **isole** x en transformant l'inéquation proposée en inéquations successives ayant les mêmes solutions grâce aux règles 1 et 2 du cours.
Attention : – si a est strictement **positif**, l'inégalité $ax<b$ se traduit par $x<\frac{b}{a}$;
– si a est strictement **négatif**, l'inégalité $ax<b$ se traduit par $x>\frac{b}{a}$.

$-9x+4<2(1-3x)$ $-9x+4<2-6x$	On développe $2(1-3x)$.
$-9x+4+6x<2-6x+6x$	On supprime les « termes en x » dans le deuxième membre de l'inéquation en ajoutant $6x$ à chaque membre.
$-3x+4<2$	On réduit chaque membre de l'inéquation.
$-3x+4-4<2-4$	On isole le « terme en x » dans le premier membre de l'inéquation en retranchant 4 à chaque membre.
$-3x<-2$	On réduit chaque membre de l'inéquation.
$-3x\times\left(-\frac{1}{3}\right)>-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$ $x>\frac{2}{3}$	On multiplie chaque membre de l'inéquation par le nombre négatif $-\frac{1}{3}$, donc l'ordre est inversé.
Les solutions de l'inéquation $-9x+4<2(1-3x)$ sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{3}$. Elles sont représentées en rouge sur la droite graduée.	On conclut.



Le crochet est tourné vers la partie non colorée car le nombre $\frac{2}{3}$ n'est pas solution de l'inéquation.

Savoir-faire 2 Mettre un problème en inéquation et le résoudre

Énoncé Un vidéo-club propose à ses clients deux formules de location de DVD :
- formule A : le client paie 5 € par DVD loué ;
- formule B : le client paie un abonnement annuel de 30 €, puis 3 € par DVD loué.

À partir de combien de DVD loués en une année la formule B est-elle plus intéressante que la formule A ?

Solution

Soit x le nombre de DVD loués en un an.

On choisit l'inconnue selon la question posée dans l'énoncé.

Avec la formule A, le montant, en euros, que devra payer le client est : $5x$.
Avec la formule B, le montant, en euros, que devra payer le client est : $3x + 30$.

On exprime les données de l'énoncé en fonction de x.

La formule B sera plus intéressante que la formule A lorsque :

$$3x + 30 < 5x$$

On traduit l'information suivante : « la formule B est plus intéressante que la formule A » par l'inéquation d'inconnue x. On a donc mis le problème en inéquation.

$$3x + 30 - 5x < 5x - 5x$$
$$-2x + 30 < 0$$
$$-2x + 30 - 30 < 0 - 30$$
$$-2x < -30$$
$$-2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) > -30 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x > 15$$

On résout l'inéquation trouvée.

La formule B est plus intéressante que la formule A à partir de 16 DVD loués sur une année.

On interprète le résultat.

Savoir-faire 3 Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Énoncé 1 **Résoudre par la méthode de substitution le système :**

$$\begin{cases} x - y = 4 & (1) \\ 2x + 5y = -6 & (2) \end{cases}$$

Solution

De l'équation (1), on déduit que :

$$x = 4 + y.$$

On exprime une des deux inconnues (celle pour laquelle les calculs sont les plus simples ; ici c'est x) en fonction de l'autre grâce à l'une des deux équations du système.

On peut aussi dire : « **On substitue** ».

On remplace x par $4 + y$ dans l'équation (2) :

On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation.

$$2(4 + y) + 5y = -6$$

On obtient ainsi une équation à une inconnue.

$$8 + 2y + 5y = -6$$
$$7y = -14$$

On résout l'équation.

$$y = -2$$

On a trouvé la première inconnue (y).

On calcule x :
$x = 4 + y = 4 + (-2)$ donc $x = 2$.

On calcule l'autre inconnue (x).

Vérification

Pour $x = 2$ et $y = -2$, on a :

- $x - y = 2 - (-2) = 4$ donc l'équation (1) est vérifiée.
- $2x + 5y = 2 \times 2 + 5(-2) = -6$ donc l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple (2 ; –2).

> On vérifie que le couple $(x\ ;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

> On conclut.

Énoncé 2 **Résoudre par la méthode de combinaison le système :**

$$\begin{cases} 6x - 5y = 3 & (1) \\ 2x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Solution

On multiplie les deux membres de l'équation (2) par (-3) et on obtient le système :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 3 & (1) \\ -6x + 9y = -15 & (2') \end{cases}$$

> On multiplie les deux membres de l'une des équations du système par un nombre choisi de telle sorte que, lorsqu'on additionne membre à membre les deux équations, une des deux inconnues disparaisse.

On additionne membre à membre les équations (1) et (2′) et on obtient l'équation : $4y = -12$.

> On effectue l'opération :
> $$\begin{array}{rrcl} & 6x - 5y & = & 3 \\ + & -6x + 9y & = & -15 \\ \hline & 0 + 4y & = & -12 \end{array}$$

On en déduit que : $y = -3$.

> On résout l'équation obtenue pour obtenir la valeur de cette inconnue (y).

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par (–3), et les deux membres de l'équation (2) par 5 ; on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -18x + 15y = -9 \\ 10x - 15y = 25 \end{cases}$$

> On trouve une nouvelle **combinaison** permettant de faire disparaître par addition ou par soustraction l'inconnue calculée précédemment.

On additionne membre à membre les équations de ce système. On obtient : $-8x = 16$.

> On effectue l'opération :
> $$\begin{array}{rrcl} & -18x + 15y & = & -9 \\ + & 10x - 15y & = & 25 \\ \hline & -8x + 0 & = & 16 \end{array}$$

On en déduit que : $x = -2$.

> On résout l'équation permettant d'obtenir la valeur de la 2e inconnue (x).

Vérification

Pour $x = -2$ et $y = -3$, on a :

- $6x - 5y = 6 \times (-2) - 5 \times (-3) = 3$ donc l'équation (1) est vérifiée.
- $2x - 3y = 2 \times (-2) - 3 \times (-3) = 5$ donc l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple $(-2\ ;\ -3)$.

> On vérifie que le couple $(x\ ;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

> On conclut.

Savoir-faire 4 Traduire et résoudre un problème par un système de deux équations à deux inconnues

Énoncé **Un commerçant souhaite liquider son stock en vendant tous les pull-overs au même prix et tous les tee-shirts au même prix.**
Le premier jour, la vente de 7 pull-overs et de 11 tee-shirts rapporte 147 euros.
Le deuxième jour, la vente de 9 pull-overs et 15 tee-shirts rapporte 195 euros.
Calculer le prix de chaque article.

Solution

On note x le prix d'un pull-over et y le prix d'un tee-shirt.

> On choisit les inconnues selon la question posée dans l'énoncé.

La recette du premier jour est donnée par l'équation :

$$7x + 11y = 147$$

> On traduit la recette du premier jour par une équation.

La recette du deuxième jour est donnée par l'équation :

$$9x + 15y = 195$$

> On traduit la recette du deuxième jour par une équation.

Pour connaître le prix de chaque article, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x + 11y = 147 & (1) \\ 9x + 15y = 195 & (2) \end{cases}$$

> On obtient un système de deux équations à deux inconnues.

- On multiplie les deux membres de l'équation (1) par (–9) et les deux membres de l'équation (2) par 7.

> On résout le système obtenu. On choisit ici la méthode de combinaison.

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -63x - 99y = -1\,323 & (1') \\ 63x + 105y = 1\,365 & (2') \end{cases}$$

- On additionne membre à membre les équations (1′) et (2′). On obtient : $6y = 42$.

On en déduit que : $y = 7$.

- On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 15 et les deux membres de l'équation (2) par (–11). On obtient le système :

$$\begin{cases} 105x + 165y = 2\,205 & (1'') \\ -99x - 165y = -2\,145 & (2'') \end{cases}$$

On additionne membre à membre les équations (1″) et (2″). On obtient : $6x = 60$.

On en déduit que : $x = 10$.

Vérification

Pour $x = 10$ et $y = 7$, on a :

$7x + 11y = 7 \times 10 + 11 \times 7 = 147$ donc l'équation (1) est vérifiée.

$9x + 15y = 9 \times 10 + 15 \times 7 = 195$ donc l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple (10 ; 7).

Un pull-over coûte 10 euros et un tee-shirt coûte 7 euros.

> On conclut.