Plan du cours

Chapitre 2 : Fonctions affines

I. Introduction

(Voir cahier d'exercices)

II. Fonction affine

1. Définition

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est **affine** s'il existe deux réels m et p tel que, pour tout x, $f(x) = mx + p$.

Où m est **le coefficient directeur** et p est **l'ordonnée à l'origine**.

Exemples :

(a) $f : x \mapsto -2x + 7$ est une fonction affine

car $-2x + 7 = mx + p \quad$ avec $\begin{cases} m = -2 \\ p = 7 \end{cases}$

(b) $f : x \mapsto \dfrac{8x-5}{9}$ est une fonction affine

car $\dfrac{8x-5}{9} = \dfrac{8}{9}x - \dfrac{5}{9} = mx + p \quad$ avec $\begin{cases} m = \dfrac{8}{9} \\ p = -\dfrac{5}{9} \end{cases}$

(c) $f : x \mapsto 11x$ est une fonction affine

car $11x = mx + p \quad$ avec $\begin{cases} m = 11 \\ p = 0 \end{cases}$

On dit alors que f est **une fonction linéaire.**

(d) $f : x \mapsto 450$ est une fonction affine

car $450 = mx + p \quad$ avec $\begin{cases} m = 0 \\ p = 450 \end{cases}$

On dit alors que f est **une fonction constante.**

(e) $f : x \mapsto 11 - \sqrt{2}x$ est une fonction affine

car $11 - \sqrt{2}x = -\sqrt{2}x + 11 = mx + p \quad$ avec $\begin{cases} m = -\sqrt{2} \\ p = 11 \end{cases}$

(f) $f : x \mapsto 12x^2 + 30$ **n'est pas une fonction affine**.

(g) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2}$ **n'est pas une fonction affine**.

Définition

Soit f une fonction **affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $p = 0$ alors $f(x) = mx$. La fonction f est alors **une fonction linéaire**.
- Si $m = 0$ alors $f(x) = p$. La fonction f est alors **une fonction constante**.

2. Réprésentation graphique d'une fonction affine

a) Propriétés

Propriété

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.
La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

On appelle m **le coefficient directeur** et p **l'ordonnée à l'origine**.
Autrement dit, p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées, soit l'image de 0 par la fonction f.

Remarques :

- Lorsque la fonction est linéaire, elle est représentée par une droite passant par l'origine du repère.
- Lorsque la fonction est constante, elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété

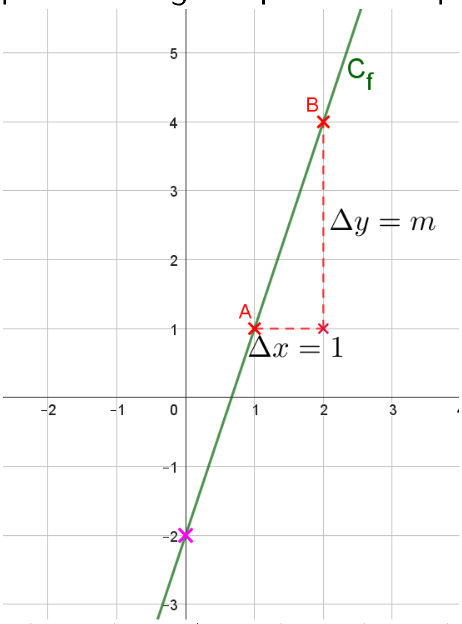
Soient f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ et (d) la droite qui la représente dans un repère.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points **quelconques** de (d).

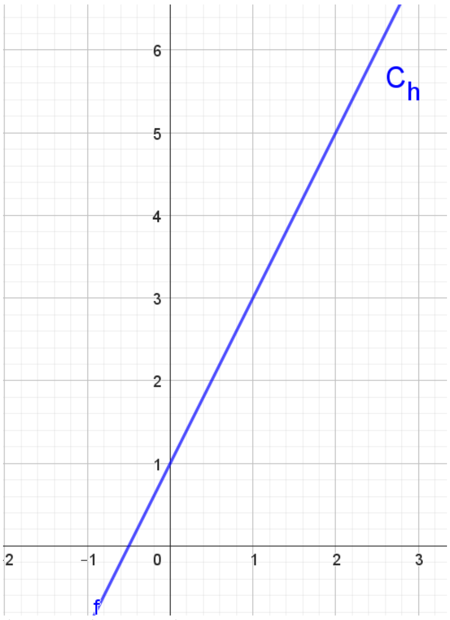
- $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

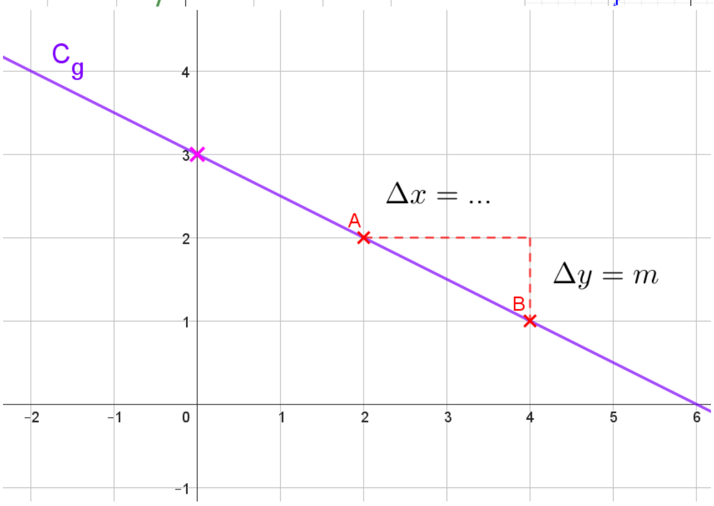
  Lorsque $\Delta x = x_B - x_A = 1$, alors $\Delta y = y_B - y_A = m$

- p est l'image de 0 par la fonction f, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.

Exemples : A partir des représentations graphiques ci-dessous, retrouver l'expression algébrique de chaque fonction.







b) Comment représenter graphiquement une fonction affine

- **En utilisant 2 points et leur image :**

On veut représenter graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x + 2$.
On sait que la représentation graphique de f est une droite.
Pour tracer une droite, il suffit de connaître **deux points** de celle-ci. Pour cela, nous allons choisir deux abscisses quelconques et calculer ensuite l'image de chacune d'elles par la fonction f.

x	....	....
$f(x)$	....	....

On place ensuite les deux points dont les coordonnées se lisent en colonnes dans le tableau et on trace la droite.

- **En utilisant le coefficient directeur (m) :**

On veut représenter graphiquement la fonction affine $g : x \mapsto 2x + 3$.

La fonction g est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite d.
Son ordonnée à l'origine est égale à $p = 3$, donc le point $A(0; 3)$ appartient à d.
Le coefficient directeur est $m = 2$, donc $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ cest-à-dire $\Delta y = 2 \times \Delta x$.
On choisit par exemple $\Delta x = 1$; on obtient alors $\Delta y = 2$.
En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.

Exemples : A partir des expressions algébriques de chaque fonction, tracer les représentations graphiques de celle-ci dans un repère orthonormé.

On définit deux fonctions affines telles que $f(x) = -5x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{4}x - 3$

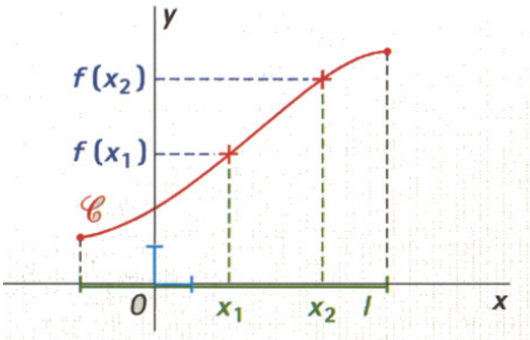
III. Variations et signe d'une fonction affine

1. Variations d'une fonction affine

Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
(On dit qu'une fonction croissante conserve lordre.)

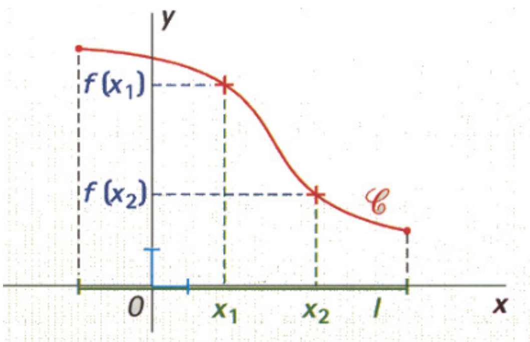
Illustration graphique :



Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent aussi.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
(On dit qu'une fonction décroissante inverse lordre.)

Illustration graphique :



Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = mx + p$.

- f est croissante si, et seulement si, $m > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $m = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $m < 0$.

DEMONSTRATION :

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$ et une fonction affine f telle que $f(x) = mx + p$
On a $f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = mx_2 + p - mx_1 - p = mx_2 - mx_1$
Donc $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$.

On sait que $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$.
Le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est alors le même que celui de m.

Trois cas sont possibles :

- Si $m > 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$ soit $f(x_2) > f(x_1)$
  Donc f est croissante.
- Si $m = 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) = 0$ soit $f(x_2) = f(x_1)$
  Donc f est constante.
- Si $m < 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) < 0$ soit $f(x_2) < f(x_1)$
  Donc f est décroissante.

Construction des tableaux de variations.

On en déduit les tableaux de variations possibles de f, selon le signe de m.

- Pour $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

- Pour $m < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

2. Signe d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine, avec $m \neq 0$.

On cherche ici pour quelle valeur de x, la fonction f s'annule.

On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$.

La fonction affine $f(x) = mx + p$ s'annule pour $x = -\dfrac{p}{m}$.

On en déduit les tableaux de signes possibles de f, selon le signe de m.

- Pour $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$-$	0	$+$	

- Pour $m < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$+$	0	$-$	

<u>**Exemples :**</u> Dresser le tableau de signes des fonctions affines définies par $f(x) = 2x + 5$ et $g(x) = -3x + 6$.

1) On cherche le réel x qui a pour image 0 par f.
Pour cela on résout léquation $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

On sait que $m = 2 > 0$, donc la fonction f est croissante.
On en déduit le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + 5$		$-$	0	$+$	

2) On cherche le réel x qui a pour image 0 par g.
Pour cela on résout léquation $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

On sait que $m = -3 < 0$, donc la fonction g est décroissante.
On en déduit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $-3x + 6$		$+$	0	$-$	