RAPPEL : f est une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ appartiennent à I($h \neq 0$).

f est dite **dérivable en** a lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ.

On note alors $\ell = f'(a)$. f'(a) s'appelle **nombre dérivé de** f **en** a.

Introduction

1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$.
Etudier la dérivabilité de la fonction f en $a = 3$.

2) Considérons la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Etudier la dérivabilité de la fonction g en $a = 0$.
En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction g.

Exercices d'entraînement

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)^2$.
Calculer le nombre dérivé de f en $a = 1$.
En déduire la dérivabilité de f en 1.

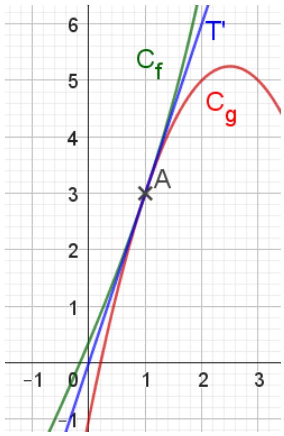
Exercice 2 Soit la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
Calculer le nombre dérivé de t en $a = -2$.
En déduire la dérivabilité de f en -2.

Exercice 3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{3}{x}$.
Montrer que la fonction g est dérivable en 1 et déterminer $g'(1)$.

Exercice 4 Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $k(x) = \dfrac{-7}{3-x}$.
Montrer que la fonction k est dérivable en 2 et déterminer $g'(2)$.

Fonctions dérivées et tangentes

Exercice 5



Sur le graphique ci-contre, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x-1} + 2x$; $g(x) = -x^2 + 5x - 1$, ainsi que leurs tangentes respectives T et T' au point d'abscisse 1.
Que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

On conjecture que la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f est confondue avec celle de g.

Pour confirmer cette conjecture, nous allons déterminer les tangentes au point d'abscisse 1 des fonctions f et g.

Equation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 :
Pour cela nous devons déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f.

f est la somme de $u(x) = e^{x-1}$ dérivable là où la fonction $x \to x - 1$ est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$. Et $v(x) = 2x$ est une fonction linéaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1e^{x-1} + 2 = e^{x-1} + 2$

L'équation réduite T est donc $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Or, $f'(1) = e^0 + 2 = 3$ et $f(1) = e^0 + 2 = 3$

Donc, T : $y = 3(x - 1) + 3$ c'est-à-dire $\boxed{\text{T} : y = 3x - 3 + 3 = 3x}$

Equation réduite de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 1 :
Pour cela nous devons déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g.

g est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g'(x) = -2x + 5$

Or, $g'(1) = -2 \times 1 + 5 = 3$ et $g(1) = -1 + 5 - 1 = 3$

L'équation réduite T' est donc $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$
Donc, T' : $y = 3(x - 1) + 3$ c'est-à-dire $\boxed{\text{T'} : y = 3x - 3 + 3 = 3x}$

Conclusion : On a bien $T = T'$, donc C_f etC_g ont des tangentes confondues au point (1 ;3).

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O ; I ; J).
1) Etablir que f'(1)=1.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

1) f est une fonction polynôme,dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = 4x - 3$
$f'(1) = 4 \times 1 - 3 = 4 - 3 = 1$.

2) L'équation réduite T au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
Or, $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$
Donc, T' : $y = 1(x - 1) + 0$ autrement dit $\boxed{\text{T} : y = x - 1}$

Exercice 7

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

1) f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$
2) L'équation réduite T au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
Or, $f'(2) = 3 \times 2^2 - 10 \times 2 + 7$.
$f'(2) = 3 \times 2^2 - 10 \times 2 + 7$.
$f'(2) = -1$.

Et $f(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 7 \times 2 - 2$
$f(2) = 8 - 20 + 14 - 2 = 0$
Donc, T : $y = -1(x - 1) + 0$ autrement dit $\boxed{\text{T} : y = -x + 1}$

Exercice 8

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

1) f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = -3x^2 - 6x - 2$
2) L'équation réduite T au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$
Or, $f'(-1) = -3 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) - 2$.
$f'(-1) = -3 + 6 - 2$.
$f'(-1) = 1$.

Et $f(-1) = 1 - 3 + 2 + 4$
$f(-1) = 4$

Donc, T : $y = 1(x - 1) + 4$ autrement dit $\boxed{\text{T} : y = x + 3}$

Exercice 9

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = -3x^2$
(b) $h(x) = 4\sqrt{x}$
(c) $k(x) = x - \dfrac{1}{x}$
(d) $g(x) = \dfrac{1}{12}x^6$
(e) $j(x) = \dfrac{1}{2x}$
(f) $m(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{x}$

CORRECTION

(a) $f'(x) = -6x$
(b) $h'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
(c) $k'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
(d) $g(x) = \dfrac{6}{12}x^5 = \dfrac{1}{2}x^5$
(e) $j(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$
(f) $m(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{6x^4-2}{x^2}$

Exercice 10

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :
(a) $f(x) = x^3(2x-5)$
(b) $h(x) = (3-x)\dfrac{1}{x}$
(c) $g(x) = (2x^2-5x+1)(1-x^2)$
(d) $j(x) = (x^2-3)\sqrt{x}$
(e) $k(x) = (4-3x)e^{2x-1}$

FORMULE UTILISEE : (uv)'=u'v+v'u

(a) $f(x) = x^3(2x-5)$
On pose $u(x) = x^3$ $\quad v(x) = 2x-5$
$u'(x) = 3x^2$ $\quad v'(x) = 2$

Ainsi, $f'(x) = 3x^2(2x-5) + 2x^3 = 6x^3 - 15x^2 + 2x^3 = 8x^3 - 15x^2$

(b) $h(x) = (3-x)\dfrac{1}{x}$

$h'(x) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}(3-x)$
$h'(x) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{x}{x^2}$
$h'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

(c) $g(x) = (2x^2-5x+1)(1-x^2)$

$g'(x) = (4x-5)(1-x^2) - 2x(2x^2-5x+1)$
$g'(x) = -8x^3 + 15x^2 + 2x - 5$

(d) $j(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$

$j'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 3)$

$j'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$

$j'(x) = \dfrac{4x^2 + x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$

$j'(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$

(e) $k(x) = (4 - 3x)e^{2x-1}$

$k'(x) = -3e^{2x-1} + 2e^{2x-1}(4 - 3x)$

$k'(x) = -3e^{2x-1} + 8e^{2x-1} - 6xe^{2x-1}$

$k'(x) = (5 - 6x)e^{2x-1}$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (2x + 2)\sqrt{x}$.

1) Etablir que $f'(4) = \dfrac{13}{2}$

Déterminons la fonction dérivée f' :

$f'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 2)$

$f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x + 2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{4x + 2x + 2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{6x + 2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x}}$

Ainsi, $f'(4) = \dfrac{3 \times 4 + 1}{\sqrt{4}} = \dfrac{13}{2}$

2) On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 4.

L'équation réduite T au point d'abscisse 4 est $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$

Or, $f'(4) = \dfrac{13}{2}$.

Et $f(4) = 10\sqrt{4} = 20$

Donc, T : $y = \dfrac{13}{2}(x - 4) + 20$ autrement dit $\boxed{\text{T} : y = \dfrac{13}{2}x - 6}$

Fonctions dérivées et variation de fonctions

Exercice 12

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

$$f'(x) = \frac{0(2-x)+3}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$$

(b) $h(x) = \dfrac{x+1}{2x-5}$

$$h'(x) = \frac{1(2x-5)-2(x+1)}{(2x-5)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2}$$

(c) $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{1\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

(d) $j(x) = \dfrac{2x^4-5x^3}{x^2+1}$

$$j'(x) = \frac{(8x^3-15x^2)(x^2+1)-2x(2x^4-5x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$j'(x) = \frac{4x^5-5x^4+8x^3-15x^2}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 13

Déterminer l'expression des dérivées suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

(b) $h(x) = (2x^2 - x + 1)^6$

$h'(x) = 6(4x - 1)(2x^2 - x + 1) = (24x - 6)(2x^2 - x + 1)$

(c) $g(x) = e^{2x^2+1}$

$g'(x) = 4xe^{2x^2+1}$

(d) $j(x) = 2x + 1 - e^{4x^2-1}$

$j'(x) = 2 - 8xe^{4x^2-1}$

Exercice 14

Vrai ou Faux.
Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous.

x	-5		2		5
f	1	↗	3	↘	-1

1) $f'(x) \geq 0$ pour tout x de [-5 ; 2].

2) $f'(2) = 3$

3) On donne $f'(5) = 2$.
La tangente à la courbe de f en 5 a pour équation $y = 2x - 11$.

4) On donne $f(3) = 4$ et $f'(3) = 5$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 3 est égal à 5.

CORRECTION
1) Vrai **2)** Faux **3)** Vrai **4)** Vrai

Exercice 15

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur [-20 ; 20].

(a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 11$

Déterminons la fonction dérivée de f : $f'(x) = -4x + 3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left[-20; \frac{3}{4}\right]$
On en déduit donc que la fonction f est strictement croissante sur $\left[-20; \frac{3}{4}\right]$ et f est strictement

décroissante sur $\left[\frac{3}{4}; 20\right]$.

x	-20		$\frac{3}{4}$		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) $g(x) = (3 - 4x)e^{-0,5x}$

Déterminons la fonction dérivée de g : $g'(x) = -4e^{-0,5x} - 0,5e^{-0,5x}(3 - 4x)$
$g'(x) = -4e^{-0,5x} - 1,5e^{-0,5x} + 2xe^{-0,5x}$
$g'(x) = (-5,5 + 2x)e^{-0,5x}$

On en déduit le tableau de signe de g' et de variation de g ci-dessous :

x	-20		$\frac{11}{4}$		20
$-5,5 + 2x$		$-$	0	$+$	
$e^{-0,5x}$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(\frac{11}{4})$	$\nearrow$	

(c) $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 4}$

Pour tout x de $[-20; -4[] - 4; 20]$, $f'(x) = \dfrac{2(x + 4) - (2x - 1)}{(x + 4)^2}$

$$f'(x) = \frac{9}{(x + 4)^2}$$

Etude du signe de f'(x) :
Pour tout x de $[-20; -4[] - 4; 20]$, 9>0 et $(x + 4)^2 > 0$
Donc $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[-20; -4[] - 4; 20]$.

x	-20		-4		20
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Exercice 16

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$
Etude du signe du polynôme $3x^2 - 10x + 7$:
$\Delta = 100 - 84 = 16$, le discriminant étant positif, ce polynôme admet 2 racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{10-4}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{10+4}{6} = \frac{7}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

<u>Exercice 17</u>

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = -3x^2 - 6x - 2$
Etude du signe du polynôme $-3x^2 - 6x - 2$:
$\Delta = 36 - 24 = 12$, le discriminant étant positif, ce polynôme admet 2 racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{12}}{-6} \qquad x_2 = \frac{6+\sqrt{12}}{-6}$$

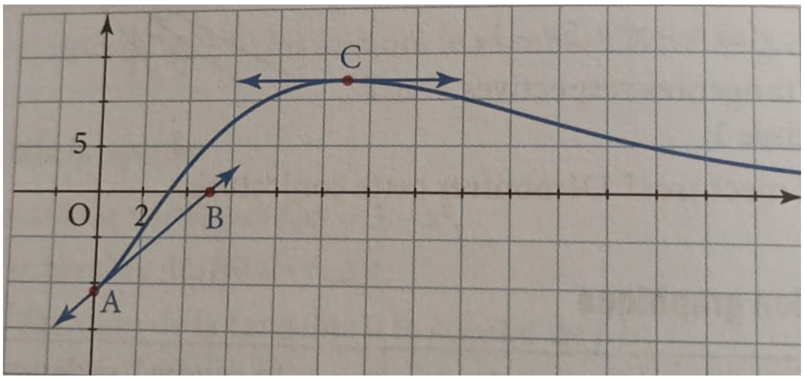
$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{-6} \qquad x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 18



Dans le repère orthogonal donné ci-dessus, C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 30].
On donne A(0 ; -11), B(5 ; 0), C(11 ; y_c).
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse A passe par le point B.
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse C est parallèle à l'axe de abscisses.

PARTIE A

1) Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.
Le point A a pour coordonnée A(0 ; -11) donc f(0)=-11.

En utilisant les coordonnées des points A et B, on calcule le coefficient directeur de la droite (AB) tangente à C_f :

$f'(0) = \dfrac{0-(-11)}{5-0} = \dfrac{11}{5}$

La tangente à C_f au point est horizontale donc $f'(11) = 0$.

2) L'affirmation "La fonction f' est positive sur [3 ; 30]" est-elle vraie ?
f est croissante sur [3 ; 11] et décroissante sur [11 ; 30], donc f'(x)>0 sur [3 ; 11] et f'(x)<0 sur [11 ; 30].
L'affirmation est donc fausse.

PARTIE B

La fonction f est définie sur [0 ; 30] par $f(x) = (x^2 - 11)e^{-0,2x}$.
1) Déterminer $f'(x)$.
En utilisant la formule permettant de dériver un produit de fonctions, et en posant $u(x) = x^2 - 11$ et $v(x) = e^{-0,2x}$, on a :
$f'(x) = 2xe^{-0,2x} - 0,2e^{-0,2x}(x^2 - 11)$
$f'(x) = (2x - 0,2x^2 + 2,2)e^{-0,2x}$

2) Etudier le signe de f' sur [0 ; 30] puis dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 30].
Pour tout $x \in [0; 30]$, $e^{-0,2x} > 0$ donc f'(x) a le même signe que le trinôme du second degré $2x - 0,2x^2 + 2,2$.
$\Delta = 5,76$, le discriminant étant positif, ce polynôme admet 2 racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-2-2,4}{-0,4}$

$x_1 = 11$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-2+2,4}{-0,4}$

$x_2 = -1$

x_2 ne fait pas partie de l'intervalle d'étude.

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de variation suivant :

$f(0) = -11 < 0$

$f(11) = 110e^{-2,2} > 0$

$f(30) = 889e^{-6} > 0$

x	0		11		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-11	$\nearrow$	$110e^{-2,2}$	$\searrow$	$889e^{-6}$

PARTIE C

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-2} *si nécessaire.*

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[5\,;\,30]$ par la fonction f étudiée dans la **partie B**.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaine de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1) Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.

$f(15) = (15^2 - 11)e^{-0,2\times 15} \approx 10,65.$

Soit 10,65 centaines de milliers, où 1 065 000. 1 065 000 objets seront demandés si le prix unitaire esr fixé à 15 euro.

2) L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix.

On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \text{ lorsque } x \in [5; 30]$$

Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.

Pour un prix de 15 euros (soit $x = 15$),

$$E(15) = \frac{f'(15)}{f(15)} \times 15 = -\frac{192}{214} \approx -0,90.$$

Cela signifie que si le prix de 15 euros augmente de 1 %, la demande diminuera alors d'environ 0,9 %.

Exercice 19

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule : $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100; +\infty[$.
Par exemple, si le supermarché achète 300 kg de fruits, il devra payé $300 \times P(300) = 450$ *euros au fournisseur pour cette commande.*

PARTIE A : Etude du prix P proposé par le fournisseur.

1) Montrer que $P'(x) = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100; +\infty[$.

2) Donner le sens de variation de la fonction P sur $[100; +\infty[$.

PARTIE B : Etude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (*Ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme*).
Cette somme est égale à : $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100; +\infty[$.

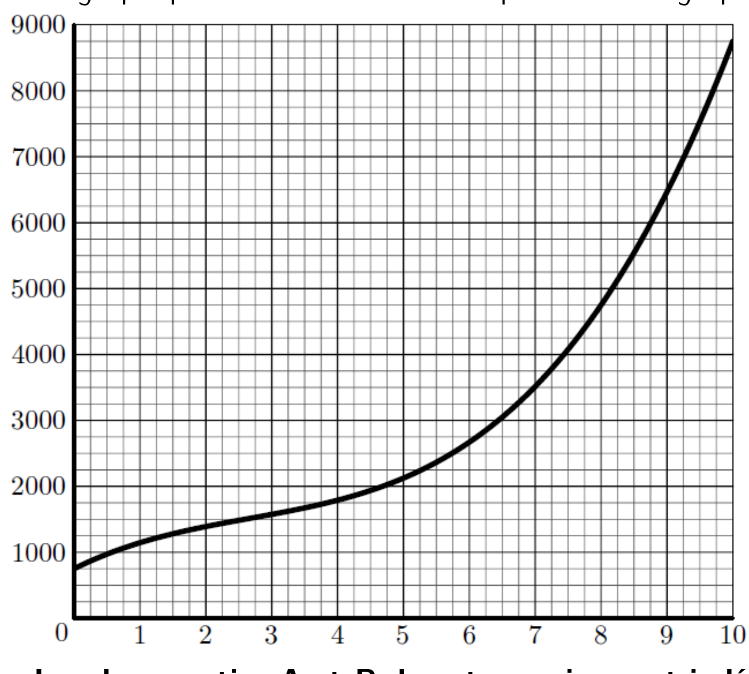
1) Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2+200x+30000}{(x+100)^2}$

2) Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:$S(x) = x + 200 - 20000 \times \dfrac{1}{x+100}$

Exercice 20

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule : $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1) Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation : $y = 400x$.
Expliquer pourquoi, au vu de ce tracé, l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2) Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
(a) Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation : $y = 680x$.

(b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix du marché p est de 680 euros.

(c) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$, on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$

(d) Etudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B : Etude du coût moyen

On rapelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par : $C_M = \dfrac{C(x)}{x}$.

1) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, $C'_M = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

2) **(a)** Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, C'_M est du signe de $(x - 5)$. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $[0; 10]$.

(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?