Méthodes

Savoir-faire 1 Développer une expression comportant des racines carrées

Énoncé **Développer, puis simplifier les expressions suivantes :**

$A = 3(2\sqrt{5} - \sqrt{7})$ $\quad$ $B = \sqrt{2}(5\sqrt{7} + 4\sqrt{3})$ $\quad$ $C = (9 - 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} + 5)$

Solution

- $A = 3(2\sqrt{5} - \sqrt{7})$ — On applique la distributivité : $a(b - c) = ab - ac$ avec $a = 3$; $b = 2\sqrt{5}$ et $c = \sqrt{7}$.

$A = 3 \times 2\sqrt{5} - 3 \times \sqrt{7}$ — $2\sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5}$

$A = 3 \times 2 \times \sqrt{5} - 3 \times \sqrt{7}$ — On effectue les produits et on simplifie l'écriture.

$\mathbf{A = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{7}}$

- $B = \sqrt{2}(5\sqrt{7} + 4\sqrt{3})$ — On applique la distributivité.

$B = \sqrt{2} \times 5\sqrt{7} + \sqrt{2} \times 4\sqrt{3}$ — On change l'ordre des facteurs de chaque produit pour regrouper les racines carrées.

$B = 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} + 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ — On effectue les produits sous les radicaux en appliquant la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

$B = 5\sqrt{2 \times 7} + 4\sqrt{2 \times 3}$

$\mathbf{B = 5\sqrt{14} + 4\sqrt{6}}$

- $C = (9 - 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} + 5)$ — On applique la distributivité : $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$ avec $a = 9$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = 3\sqrt{7}$ et $d = 5$.

$C = 9 \times 3\sqrt{7} + 9 \times 5 - 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{7} - 2\sqrt{2} \times 5$

$C = 27\sqrt{7} + 45 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} - 2 \times 5 \times \sqrt{2}$ — • On regroupe les racines carrées. • On applique la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

$C = 27\sqrt{7} + 45 - 6\sqrt{2 \times 7} - 10\sqrt{2}$

$\mathbf{C = 27\sqrt{7} + 45 - 6\sqrt{14} - 10\sqrt{2}}$

Savoir-faire 2 Factoriser une expression contenant des racines carrées

Énoncé **1. Mettre $\sqrt{3}$ en facteur dans l'expression : $A = 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$ puis simplifier A.**

2. Simplifier l'expression suivante : $B = 5\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$.

Solution

1. $A = 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$

On applique la distributivité : $ba + ca = (b + c)a$.

$A = (2 - 7 + 24)\sqrt{3}$

On effectue les calculs dans la parenthèse.

$A = \mathbf{19\sqrt{3}}$

2. $B = 5\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$

On regroupe tous les termes avec des $\sqrt{2}$ d'une part et tous les termes avec des $\sqrt{3}$ d'autre part.

$B = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

$B = (9 - 3 + 15)\sqrt{2} + (5 - 12)\sqrt{3}$

On met en facteur $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

$B = \mathbf{21\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}$

Savoir-faire 3 Écrire un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$

Énoncé **Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible.**

- $A = \sqrt{72}$
- $B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{48}$

Solution

- $A = \sqrt{72}$

On veut écrire 72 sous la forme d'un produit dont un des facteurs est le plus grand carré entier possible. $72 = 18 \times 4 = 8 \times 9 = 2 \times 36$. 36 est le plus grand carré ici.

$A = \sqrt{36 \times 2}$

On applique la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$A = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$

On applique la règle : pour $a > 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

$A = \mathbf{6\sqrt{2}}$

- $B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{48}$

On veut écrire chacun des nombres sous un radical sous la forme d'un produit dont :
– l'un des facteurs est un carré (ici 4, 9 et 16) ;
– l'autre facteur est commun à chacun des produits et est le plus petit possible (ici 3).

$B = \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{16 \times 3}$

On applique la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$B = \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{16} \times \sqrt{3}$

$B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5 \times 4\sqrt{3}$

On applique la règle : pour $a > 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

$B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

On met $\sqrt{3}$ en facteur.

$B = (2 - 3 + 20)\sqrt{3}$

$B = 19 \times \sqrt{3}$

$B = \mathbf{19\sqrt{3}}$

Le résultat final s'écrit sous la forme d'un produit dont le deuxième facteur est la racine carrée.

Méthodes

Savoir-faire 4 Écrire une fraction sans racine carrée au dénominateur

Énoncé **Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur :**

- $\mathbf{A = \dfrac{5}{\sqrt{7}}}$
- $\mathbf{B = \dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}}$

Solution

- $A = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$

On applique la définition de $\sqrt{a}$ pour $a > 0$: $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$. Ici $a = 7$.

$A = \dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$\mathbf{A = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}}$

- $B = \dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\sqrt{5}$ car $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

$B = \dfrac{3\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{4\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

On applique la propriété : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
Ici : $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

$B = \dfrac{3\sqrt{10}}{4 \times 5}$

On vérifie que la fraction ne peut pas se simplifier davantage :

- $\dfrac{3}{20}$ est une fraction irréductible ;
- $\sqrt{10}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$.

$\mathbf{B = \dfrac{3\sqrt{10}}{20}}$

Savoir-faire 5 Racine carrée et priorité des opérations

Énoncé **Calculer** $\mathbf{A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$.

Solution

$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$

On commence par effectuer le calcul le plus à droite : $\sqrt{4} = 2$.

$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}$

On continue en effectuant les calculs toujours les plus à droite : $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.

$A = \sqrt{2 + \sqrt{4}}$

$A = \sqrt{2 + 2}$

$\mathbf{A = \sqrt{4} = 2}$