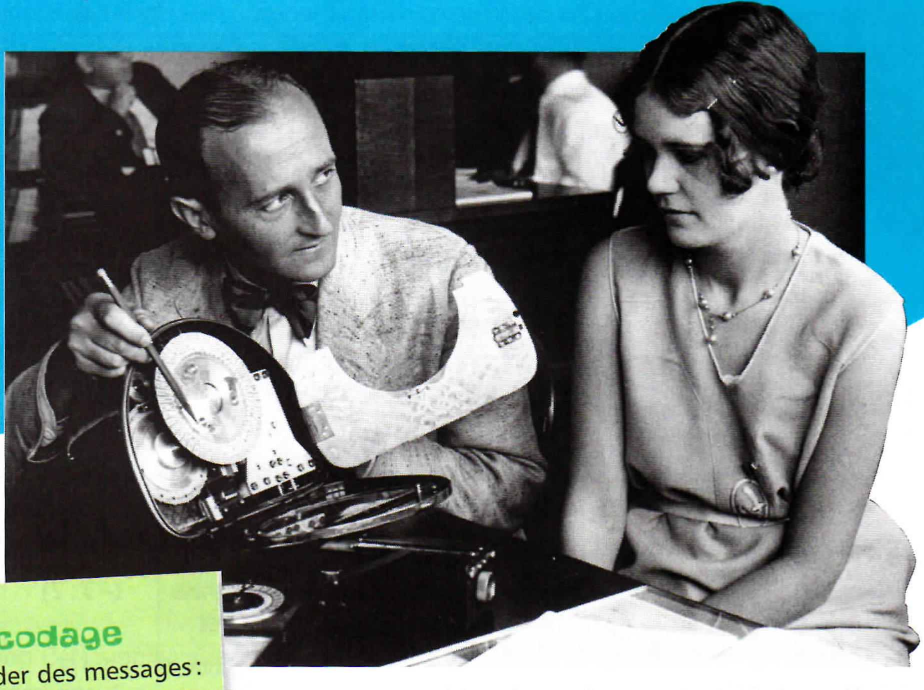
7 Notion de fonction



Certaines **machines de codage** utilisent des fonctions pour coder des messages : à chaque lettre du message d'origine est **associée** une nouvelle lettre **selon une logique définie**. Le message ainsi obtenu n'est pas compréhensible par une personne **ne connaissant pas la fonction appliquée** !

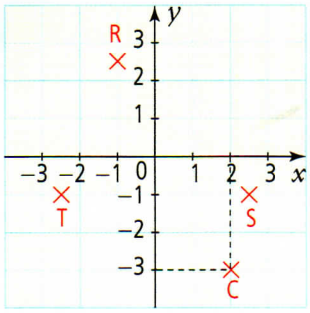
Agent des services secrets américains expliquant à une nouvelle recrue le fonctionnement d'une machine de codage (1930)

La machine de codage Kryha a été utilisée entre 1920 et 1950.
Cette machine comprenait **deux disques concentriques** portant chacun l'alphabet sur le pourtour.
La **fonction de codage** est une rotation de la roue interne qui décale les lettres par rapport à leur position de base : par exemple, si le A était transformé en W, le B en X, etc., le mot **BONJOUR** serait codé en **XKJFKQN**.
Pour éviter que les messages codés ne soient trop faciles à déchiffrer, un dispositif permettant d'obtenir une **rotation irrégulière** des disques a été intégré à cette machine...

Un rêve ! Dès 1772, Euler a remarqué que la fonction $f : x \rightarrow x^2 + x + 41$ donnait **un nombre premier** lorsque $x = 0 ; 1 ; \ldots 39$.
Chercher une fonction générant tous les nombres premiers est **un vieux rêve de mathématicien** !

Pour bien commencer

QCM **Pour chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré s'exprime, en fonction de la longueur x de son côté, par la formule :	$\mathcal{A} = 4x$	$\mathcal{A} = x^2$	$\mathcal{A} = 4x^2$
2	Soit l'expression $E = -5x^2 + 2x$. Si $x = -3$, alors $E =$	-51	3	39
3	La solution de l'équation $2(x-5) = 8$ est le nombre :	-1	4	9
4	Soit l'expression $F = -7x + 3$. Si $F = 17$, alors $x =$	2	-2	21
5	Le nombre 16 :	est le carré de deux nombres distincts	n'est le carré d'aucun nombre	est le carré d'un seul nombre
6	L'équation $4x^2 = 25$:	n'admet pas de solution	admet une seule solution	admet deux solutions exactement
7	 Dans le repère ci-contre, le point C :	a pour abscisse -3	a pour ordonnée 2	a pour abscisse 2
8	Dans le repère ci-contre, le couple de coordonnées associé au point C est :	$(-3 ; 2)$	$(2 ; -3)$	$(-3 ; -2)$
9	Dans le repère ci-contre, le couple de coordonnées $(-1 ; 2{,}5)$ correspond au point :	R	S	T

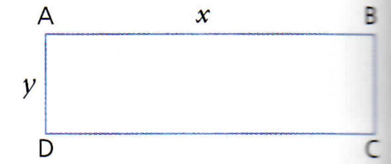
Exercice 1 Toutes les longueurs sont exprimées en cm.

❶ Exprimer, en fonction de sa longueur L, l'aire d'un rectangle de largeur 5.

❷ Exprimer, en fonction de sa hauteur h, le volume d'un prisme droit dont l'aire de la base est égale à 18 cm^2.

❸ Exprimer, en fonction du rayon r de son disque de base et du nombre π, le volume d'un cône de révolution de hauteur 9.

Exercice 2 x et y désignent les dimensions non nulles, exprimées en cm, du rectangle ABCD.
On souhaite que l'aire du rectangle ABCD soit égale à 6 cm^2.



❶ Recopier et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs qui conviennent.

x	3	4	5	6	8
y					

❷ L'égalité $xy = 6$ permet de traduire que l'aire du rectangle ABCD est égale à 6 cm^2. En déduire l'expression de y en fonction de x.

❸ En utilisant l'expression de y en fonction de x, calculer y lorsque x prend les valeurs suivantes : 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 et 20. On arrondira les résultats au dixième si nécessaire.
Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de y lorsque les valeurs de x augmentent ?

Activité 1 Fonction et représentation graphique

Un opérateur de téléphonie propose le tarif suivant pour les communications vers des téléphones fixes : 0,01 euro par minute, après une charge de mise en relation facturée 0,12 euros.

1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Il donne les valeurs du coût C de communication pour une durée d'appel t donnée.

Durée t de l'appel (en min)	2	4	7	10	12	13	15
Coût C de l'appel (en euros)	0,14						

2 Exprimer C en fonction de t.
La formule obtenue permet d'associer à toute valeur de t une unique valeur de C, qui dépend de t. On la note $C(t)$.
Le « procédé » qui, à une valeur quelconque de la variable t, fait correspondre un unique nombre $C(t)$ s'appelle une **fonction.**
On dit que **la fonction C** fait correspondre au nombre t le nombre $C(t)$, et on note :

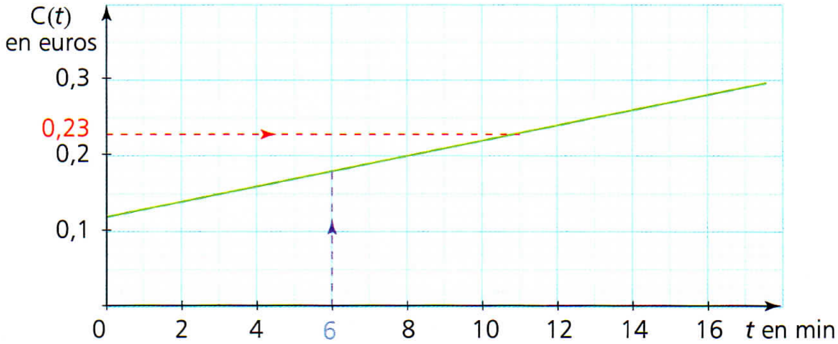
$$\mathbf{C : t \mapsto C(t).}$$

$C(t)$ se lit : « C de t ».

3 La notation $C(t)$ signifie que C est fonction de t. La lettre C désigne une fonction et non un nombre. Dans l'expression $C(t)$, les parenthèses jouent-elles le même rôle que dans l'expression $2(t+1)$? Justifier.

4 **a.** Dans la formule obtenue à la question **2**, la variable t peut, *a priori*, prendre n'importe quelle valeur ; calculer $C(-3)$.
b. Dans la réalité, la variable t peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier.

5 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté en vert les valeurs $C(t)$ du coût d'un appel, en euros, en fonction de la durée t de communication, en minutes.
On a ainsi obtenu la **représentation graphique de la fonction C**, ou courbe représentative de C, pour t positif.
Les valeurs de t figurent sur l'axe des abscisses et celles de $C(t)$ sur l'axe des ordonnées.
a. Retrouver graphiquement les résultats obtenus à la question **1**.
b. Déterminer graphiquement le coût d'une communication de 6 min.
c. Déterminer graphiquement la durée d'un appel ayant coûté 0,23 euros.

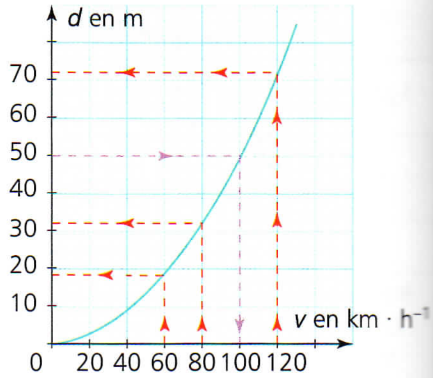


Activités

Activité 2 Lecture graphique et formule

> La distance de freinage d'un véhicule est la distance parcourue par le véhicule entre l'instant où le frein est actionné et celui où le véhicule est arrêté.

Le graphique ci-contre représente la distance de freinage (en mètres) d'un véhicule en fonction de sa vitesse avant le freinage (en km · h^{-1}).



1 En utilisant ce graphique :

a. Déterminer la distance de freinage sur route sèche d'un véhicule qui se déplace :

- à 60 km · h^{-1}
- à 80 km · h^{-1}
- à 120 km · h^{-1}.

b. Indiquer à quelle vitesse correspond une distance de freinage égale à 50 m.

c. Peut-on être sûr de la précision des valeurs obtenues aux questions précédentes ?

> Le quotient $\frac{d}{v^2}$ est constant.

2 Sur route sèche, la distance de freinage d'un véhicule est proportionnelle au carré de sa vitesse.
La relation entre la distance d de freinage et la vitesse v du véhicule est donnée par la formule $d = 0{,}005v^2$, dans laquelle d est exprimée en m et v en km · h^{-1}.
La **fonction** d ainsi définie fait correspondre à toute valeur de la variable v une unique valeur $d(v)$.

a. La variable v peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier.

b. Calculer $d(60)$, $d(80)$, puis $d(120)$.

c. En déduire la distance de freinage sur route sèche d'un véhicule qui, avant de freiner, roulait à :

- 60 km · h^{-1}
- 80 km · h^{-1}
- 120 km · h^{-1}

3 **a.** Vérifier que les résultats obtenus par le calcul dans la question **2 c** concordent avec ceux obtenus par les lectures graphiques de la question **1 a**.

b. Pour une valeur donnée de v, la valeur exacte de $d(v)$ est-elle donnée par une lecture graphique ou par un calcul ?

Activité 3 Image et antécédent

1 Recopier et compléter le tableau ci-contre, dans lequel x désigne un nombre non nul. Écrire les nombres sous forme fractionnaire.

x	-4	-3	2	5	8	10
$\frac{1}{x}$						

> $f(x)$ se lit « f de x ». Cette fonction s'écrit aussi $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

2 À tout nombre x non nul, on a associé un nombre unique : son inverse $\frac{1}{x}$. On a ainsi défini la **fonction f** qui, à tout nombre x non nul, associe **le nombre $f(x)$** tel que : $f(x) = \frac{1}{x}$.

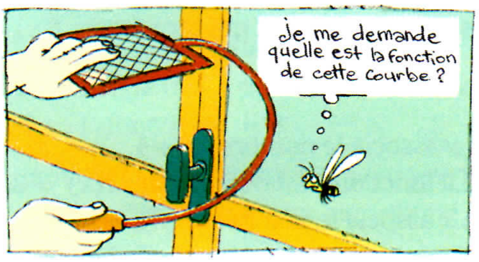
a. On dit que $f(x)$ est l'**image de x par la fonction f**. Quelles sont les images par la fonction f des nombres -4 ; 2 et 5 ?

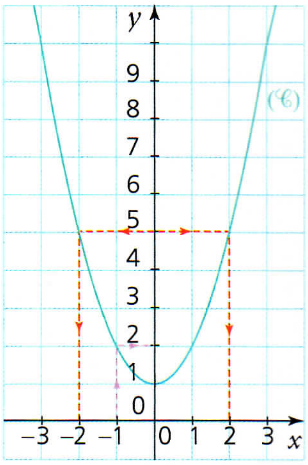
b. On a : $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Le nombre $-\frac{1}{2}$ est donc l'image de -2 par la fonction f ; on dit aussi que -2 est un **antécédent par la fonction f** de $-\frac{1}{2}$. Utiliser le tableau de la question **1** pour déterminer un antécédent du nombre $-\frac{1}{3}$, puis du nombre $\frac{1}{5}$.

c. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$, et en déduire que le nombre $\frac{1}{5}$ admet un seul antécédent.

Activité 4 Utilisations de la courbe représentative d'une fonction

La courbe ($\mathscr{C}$) tracée dans le repère ci-contre représente la fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$.
Elle est constituée de tous les points de coordonnées x et y tels que $y = h(x)$.





A Image d'un nombre par une fonction

1 Les flèches en violet indiquent comment lire, sur la courbe ($\mathscr{C}$), l'image du nombre -1 par la fonction h.

a. Quelle est l'image du nombre -1 par la fonction h ? Recopier et compléter : $h(-1) = \dots$

b. Procéder de la même façon pour déterminer graphiquement l'image du nombre -3, puis celle du nombre 3. Que remarque-t-on ?

2 Reproduire le graphique ci-dessus, puis tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $(1{,}5 ; 0)$. En combien de points cette droite coupe-t-elle la courbe ($\mathscr{C}$) ? Le nombre 1,5 a-t-il plusieurs images par la fonction h ?

B Antécédents d'un nombre par une fonction

1 Les flèches rouges montrent comment lire, sur la courbe ($\mathscr{C}$), les antécédents par la fonction h du nombre 5.

a. Quels semblent être les antécédents du nombre 5 ? Vérifier en résolvant l'équation $h(x) = 5$.

b. Déterminer graphiquement les antécédents du nombre 2, puis résoudre l'équation correspondante pour vérifier la réponse.

c. Déterminer approximativement, par lecture graphique, les antécédents du nombre 4. Quelles sont les valeurs exactes de ces antécédents ?

2 Tracer sur votre graphique la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0 ; 6)$. Combien d'antécédents le nombre 6 admet-il ?

C Coordonnées de points

1 Placer le point $A(0 ; 1)$; ce point semble-t-il appartenir à la courbe ($\mathscr{C}$) ? Vérifier la réponse par un calcul.

2 Placer le point B de la courbe ($\mathscr{C}$) dont l'abscisse est égale à 3. Vérifier par un calcul que son ordonnée est égale à 10.

3 Placer le point $C(-1{,}5 ; 3)$. Ce point semble-t-il appartenir à la courbe ($\mathscr{C}$) ? Vérifier la réponse par un calcul.