II. Suites arithmético-géométriques

Définition

On appelle suite arithmético-géométrique une suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n, par une relation de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont deux réels donnés

Remarque : : si $a = 1$ alors la suite est arithmétique ; si $b = 0$ alors la suite est géométrique.

L'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite auxiliaire géométrique. Cette suite est « toujours » donnée par l'énoncé.

Exercice-type 1

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.
On définit pour tout n, une suite auxiliaire v par : $v_n = u_n - 4$.
(a) Montrer que v est géométrique. On en précisera la raison.
(b) Exprimer le terme v_n en fonction de n.
(c) En déduire alors l'expression de u_n en fonction de n.
(d) Déterminer la limite de la suite u.

Résolution :

(a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{2}u_n + 2\right) - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$
Donc pour tout n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. La suite v est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n$. On a $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.
Ainsi, $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) Comme $v_n = u_n - 4$ alors $u_n = v_n + 4 = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

(d) Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Exercice-type 2

Une entreprise du secteur du BTP doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette .
Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
On note r_n la quantité, en tonnes, des déchets rejetés pour l'année (2007+n).

(1). Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$.

(2). Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4\,000$.

(a) Démontrer que la suite (s_n) est une suite géomérique de raison 0,95. Donner son premier terme.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

(c) Déterminer les limites des suites (s_n) et (r_n). Interpréter la limite de la suite (r_n).

Résolution :

1) $r_0 = 40\,000$. Et chaque année la quantité de déchets est réduite de 5 % mais l'entreprise produit 200 tonnes de nouveaux déchets également.

Donc pour tout n, $r_{n+1} = r_n \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) + 200 = 0,95r_n + 200$

2) **(a)** Pour tout entier naturel n, $s_n = r_n - 4\,000$. Donc

$$s_{n+1} = r_{n+1} - 4\,000$$

$$s_{n+1} = 0,95r_n + 200 - 4\,000$$

$$s_{n+1} = 0,95r_n - 3\,800$$

$$s_{n+1} = 0,95(r_n - 4\,000)$$

$$s_{n+1} = 0,95s_n$$

On en déduit que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $s_0 = r_0 - 4\,000 = 40\,000 - 4\,000 = 36\,000$.
Ainsi, pour tout entier naturel n , $s_n = 36\,000 \times 0,95^n$

(b) Comme $s_n = r_n - 4\,000$ alors $r_n = s_n + 4\,000 = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$

(c) Puisque $0 < 0,95 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 4\,000$
La quantitté de déchets au fil des années tend vers 4 000 tonnes.