## Plan du cours

## Activité d'introduction 1

**PARTIE A**

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique de France.
En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme. Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

**1)** Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
**2)** On note $u_n$ le nombre d'abonnés en milliers en $2020 + n$.
**(a)** Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Calculer ensuite les valeurs $u_{40}$ et $u_{50}$ à l'aide de la calculatrice.
**(b)** Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter.

**PARTIE B**

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singe dans une réserve naturelle.
En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

**1)** Déterminer le nombre de singes en 2021 et en 2022.
**2)** On note $v_n$ le nombre de singes en $2020 + n$.
**(a)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. Calculer ensuite les valeurs $v_{40}$ et $v_{50}$
**(b)** Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice. Interpréter. Que peut-on penser de cette évolution ?

# I. Limites de suites

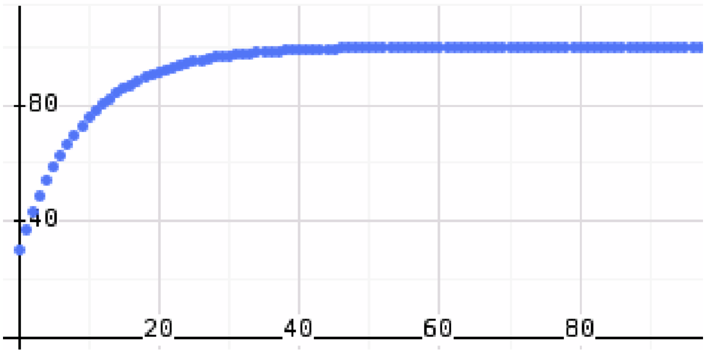
Étudier la limite d'une suite $(u_n)$ c'est chercher ce que deviennent les nombres $u_n$ lorsque $n$ devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :
- Les nombres $u_n$ finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres $u_n$ finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

## 1. Limite d'une suite

**Définition** **Les suites convergentes**

Une suite $u$ converge lorsqu'il existe un réel $\ell$ tel que tout intervalle ouvert I centré en $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

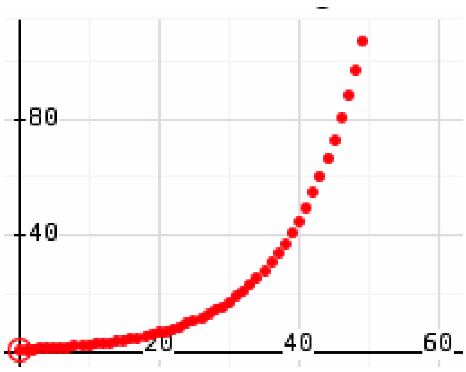
On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$




**Définition** **Les suites divergentes**

Une suite $u$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout réel $A > 0$ (respectivement $B < 0$), il existe un rang $p$ à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A (respectivement B).

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)




Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{n}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

  **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$

  La suite $\left(-\dfrac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^n} + n^2\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

  On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$
  De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

  Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} + n^2 = +\infty$

La suite $\left(\frac{1}{e^n}+n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)$ et en déduire si la suite converge ou diverge.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-e^n=-\infty$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n}=0$. Donc **Par somme,** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{-n}=1$

Donc **Par quotient,** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}=-\infty$

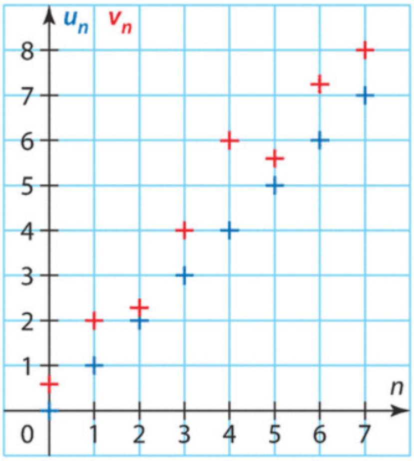
La suite $\left(\frac{3-e^n}{1+e^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

## 2. Limites et comparaison

**Propriété**

Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leq v_n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$




On remarque par lecture graphique que $u_n<v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Donc par comparaison des limites on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Exemples :

**1)** Etudier la limite de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+3n$

A l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

On cherche donc une suite $(v_n)$ telle que $u_n\geq v_n$.

Pour tout entier $n$,

$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -1+3n \leq (-1)^n + 3n \leq 1+3n$ (car $n > 0$ donc $3n > 0$)

$\Leftrightarrow -1+3n \leq u_n \leq 1+3n$ On choisit donc $v_n = -1+3n$.

On a pour tout entier $n$, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et la suite diverge aussi vers $+\infty$.

**2)** Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2sin(n)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n-2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)$.

- **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n-2$.**

  Pour tout entier $n$,$-1 \leq sin(n) \leq 1$

  $\Leftrightarrow -2 \leq sin(n) \times 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2+n \leq 2sin(n)+n \leq 2+n$ (car $n > 0$)

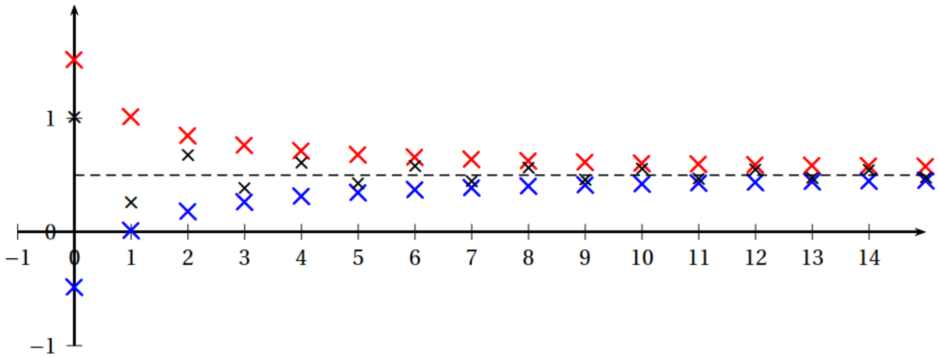
  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n-2$.

- **On a pour tout entier** $n$, $u_n \geq n-2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n-2 = +\infty$

  Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**Théorème** **Théorème des gendarmes**

Soient trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$




Exemple : Etudier la limite de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$
$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{1}{n} \leq 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n} + 3$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} + 3 = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 3$

## 3. Comportement des suites géométriques

Revenons un instant sur les suites géométriques.

**Théorème**

Soit la suite de terme général $q^n$, où $q$ est un réel positif.

- Si $q > 1$ alors la suite a pour limite $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et on dit que la suite est divergente.
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. On dit, dans ce cas, que la suite converge vers 0.

**Propriété**

Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = 0$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = +\infty$ si $a > 0$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = -\infty$ si $a < 0$.

Exemples :

**1)** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = -3$.
Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis la limite de $(u_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_0 \times q^n = -3 \times 0,5^n$

On a $u_0 < 0$ et $q = 0,5$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

**2)** Soit $(v_n)$ une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$.
Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
Exprimer $S_n$, la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite puis la limite de cette somme .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$S_n = 5 \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{10}{2 - \sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On a $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{10}{2 - \sqrt{2}}$

## II. Suites arithmético-géométriques

**Définition**

On appelle suite arithmético-géométrique une suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel $n$, par une relation de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont deux réels donnés

**Remarque :** : si $a = 1$ alors la suite est arithmétique ; si $b = 0$ alors la suite est géométrique.

L'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite auxiliaire géométrique. Cette suite est « toujours » donnée par l'énoncé.

**Exercice-type 1**

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.
On définit pour tout $n$, une suite auxiliaire $v$ par : $v_n = u_n - 4$.
**(a)** Montrer que $v$ est géométrique. On en précisera la raison.
**(b)** Exprimer le terme $v_n$ en fonction de $n$.
**(c)** En déduire alors l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
**(d)** Déterminer la limite de la suite $u$.

**Résolution :**

**(a)** Pour tout $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{2}u_n + 2\right) - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$
Donc pour tout $n$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. La suite $v$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**(b)** On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n$. On a $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.
Ainsi, $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**(c)** Comme $v_n = u_n - 4$ alors $u_n = v_n + 4 = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

**(d)** Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

**Exercice-type 2**

Une entreprise du secteur du BTP doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette .
Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
On note $r_n$ la quantité, en tonnes, des déchets rejetés pour l'année (2007+$n$).

**(1).** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$.

**(2).** Soit $(s_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $s_n = r_n - 4\,000$.

(a) Démontrer que la suite $(s_n)$ est une suite géomérique de raison 0,95. Donner son premier terme.
En déduire l'expression de $s_n$ en fonction de $n$.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel $n$, on a $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

(c) Déterminer les limites des suites $(s_n)$ et $(r_n)$. Interpréter la limite de la suite $(r_n)$.

**Résolution :**

**1)** $r_0 = 40\,000$. Et chaque année la quantité de déchets est réduite de 5 % mais l'entreprise produit 200 tonnes de nouveaux déchets également.
Donc pour tout $n$, $r_{n+1} = r_n \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) + 200 = 0,95r_n + 200$

**2)** **(a)** Pour tout entier naturel $n$, $s_n = r_n - 4\,000$. Donc

$$s_{n+1} = r_{n+1} - 4\,000$$

$$s_{n+1} = 0,95r_n + 200 - 4\,000$$

$$s_{n+1} = 0,95r_n - 3\,800$$

$$s_{n+1} = 0,95(r_n - 4\,000)$$

$$s_{n+1} = 0,95s_n$$

On en déduit que la suite $(s_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $s_0 = r_0 - 4\,000 = 40\,000 - 4\,000 = 36\,000$.
Ainsi, pour tout entier naturel $n$ , $s_n = 36\,000 \times 0,95^n$

**(b)** Comme $s_n = r_n - 4\,000$ alors $r_n = s_n + 4\,000 = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$

**(c)** Puisque $0 < 0,95 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 4\,000$
La quantitté de déchets au fil des années tend vers 4 000 tonnes.

## III. Recherche d'un seuil

La recherche d'un seuil consiste  dterminer l'entier $n_0$  partir duquel la suite est plus petite qu'une valeur donne (cas des suites convergentes) ou plus grand qu'une valeur donne (cas des suite ayant pour limite $+\infty$).

Considrons comme exemple la suite gomtrique $(u_n)$ dfinie pour tout entier $n$ par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Cette suite est dcroissante car sa raison est infrieure  1 et converge vers 0.

On se propose de dterminer un seuil  partir duquel $u_n$ est plus petit que $10^{-40}$, c'est--dire trouver le plus petit entier $n_0$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$ .

On labore pour cela un algorithme permettant la recherche de ce seuil

1 est le premier terme de la suite
$K$ dsigne $n_0$ cherch.
Tant que $u_K > 10^{-40}$, on effectue ce qui suit :

-  chaque boucle, on incrmente l'indice de 1 ;
- on calcule $u_K$
La boucle s'arrte lorsque $u_K < 10^{-40}$

La valeur affiche aprs la mise en oeuvre de cet algorithme fournit le seuil $n_0$ cherch. Dans cet exemple on obtient $n_0 = 321$. Ainsi, si $n$ est suprieur ou gal  321, alors $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-40}$.
Cet algorithme se programme sur la calculatrice Texas Instrument de cette manire :
Dans le cas des suite qui tendent vers $+\infty$, on remplacera la condition dans la boucle *tant que* par une condition du type $A < 10^{40}$.

**Application** :

Soit $(u_n)$ la suite gomtrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 10$.
crire un algorithme permettant de dterminer le plus petit entier $n_0$ tel que si $n > n_0$ alors $u_n < 10^{-90}$. Programmer cet algorithme  l'aide de la calculatrice et en dduire la valeur de $n_0$.

**Correction** :