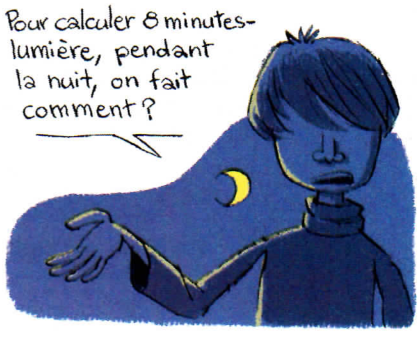
10 Le théorème de Thalès et sa réciproque Agrandissement et réduction

Géomètres prenant des mesures. Gravure allemande, 1594

Comment mesurer les grandeurs qui sont **inaccessibles** ? Au cours des siècles, les savants ont inventé différents instruments de mesure… Mais la plupart ne permettaient pas d'obtenir **immédiatement** les mesures, il fallait appliquer quelques **principes de géométrie**, par exemple le théorème de Thalès pour avoir le résultat recherché.

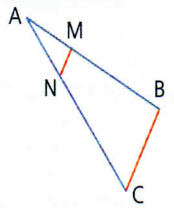
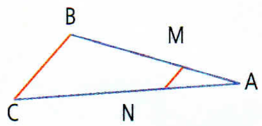
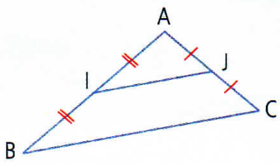
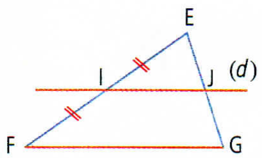
Gerbert, qui fut pape en l'an 1000 sous le nom de Sylvestre II, a été le seul **pape mathématicien**. Il a écrit un traité de géométrie où il explique de **manière moderne** les termes comme base, hauteur, côté perpendiculaire à la base, hypoténuse, etc. Il **a introduit le zéro** malgré la grande résistance des clercs et a inventé des instruments de mesure, dont certains nécessitent l'utilisation du théorème de Thalès.

Des situations particulières comme le **passage de Vénus** entre la **Terre** et le **Soleil** ont permis, à partir de la **mesure des ombres** sur le Soleil et en appliquant le **théorème de Thalès**, de calculer la distance Terre-Soleil. Aujourd'hui nous savons que le Soleil est à **8 minutes-lumière** de la Terre, ce qui correspond à une distance que vous pouvez calculer sachant que la vitesse de la lumière est de **300 000 kilomètres par seconde**.



Pour bien commencer

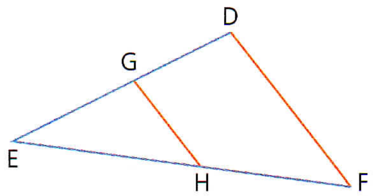
QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	Si $\frac{x}{3} = \frac{7}{5}$, alors :	$x = \frac{7 \times 3}{5}$	$x = \frac{7}{5 \times 3}$	$x = \frac{5}{7 \times 3}$
2	Si, pour $x \neq 0$, $\frac{2}{9} = \frac{5}{x}$, alors :	$x = \frac{2 \times 5}{9}$	$x = \frac{5 \times 9}{2}$	$x = \frac{5}{9 \times 2}$
3	Si $M \in [AB]$, alors les points sont alignés dans l'ordre :	A, M puis B	M, A puis B	A, B puis M
4	Dans le triangle ABC ci-contre, on a : $M \in [AB]$ $N \in [AC]$ $(MN) /\!/ (BC)$. Alors on peut écrire : 	$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{MB}$	$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$	$\frac{MN}{BC} = \frac{NC}{AC}$
5	Dans le triangle ci-dessous, on a : $(MN) /\!/ (BC)$ $AB = 12$ $AM = 4$ $MN = 2$. On a alors : 	$BC = 8$	$BC = 4$	$BC = 6$
6	D'après la figure ci-contre : 	$(IJ) /\!/ (BC)$	(IJ) et (BC) sont sécantes	on ne peut rien dire
7	Sur la figure ci-contre, on a : $(d) /\!/ (FG)$ Alors : 	$EJ = \frac{1}{3}EG$	$EJ = 2EG$	$EJ = \frac{1}{2}EG$
8	Si un quadrilatère $\mathcal{F}'$ est une réduction d'un quadrilatère $\mathcal{F}$ de facteur $\frac{1}{3}$ et si $\mathcal{F}$ a un périmètre de 36 cm, alors le périmètre de $\mathcal{F}'$ mesure :	108 cm	12 cm	39 cm

Exercice 1 Sur la figure ci-contre, on a :

- $G \in [ED]$ et $H \in [EF]$
- $(GH) /\!/ (DF)$
- $EG = 5$ cm, $ED = 9$ cm, $GH = 4$ cm et $EH = 7$ cm.

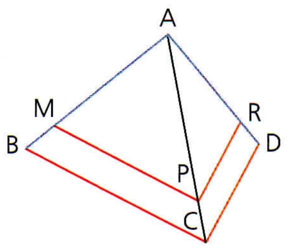
Calculer les longueurs DF et EF.



Exercice 2 ABC et ACD sont deux triangles tels que :

- $M \in [AB]$, $P \in [AC]$, $R \in [AD]$
- $(MP) /\!/ (BC)$, $(PR) /\!/ (CD)$
- $CD = 10$ cm et $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$

Calculer la longueur PR.



Activité 1 Théorème de Thalès

A Position d'une droite par rapport à une autre

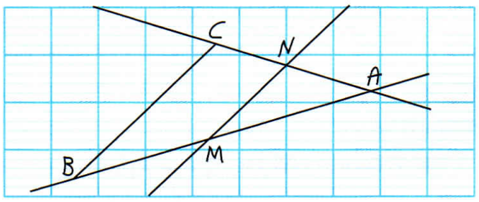
1. Tracer deux droites d et d' sécantes en A.
Placer un point B distinct de A sur la droite d et un point C distinct de A sur la droite d', puis tracer la droite (BC).

2. On imagine une droite Δ passant par un point M de d et parallèle à la droite BC. Quelles sont les trois portions de la droite d sur lesquelles peut se trouver le point M ?

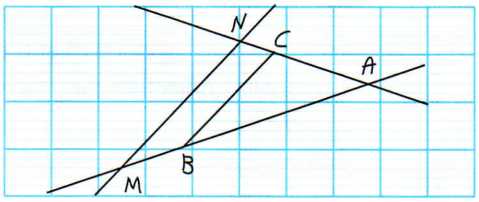
B Des situations déjà étudiées

Sur les figures de Maude et Matéo ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1. Figure de Maude



2. Figure de Matéo

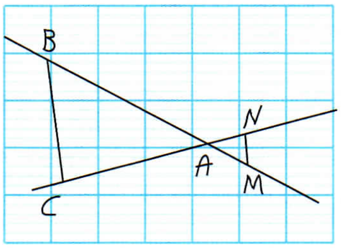


Les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont-ils égaux dans chacune des deux situations ? Justifier.

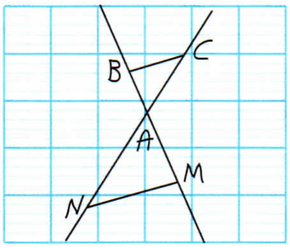
C Une nouvelle situation

1. **Conjecture**
Voici les figures de trois autres élèves de la classe. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

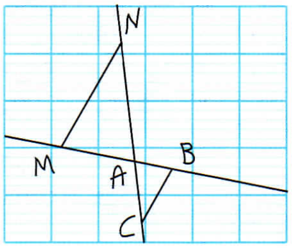
a. Figure de Sara



b. Figure de Karim



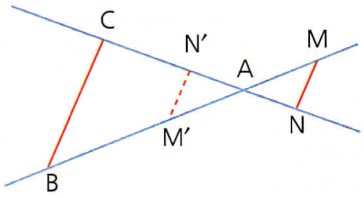
c. Figure d'Alexandre



a. Mesurer les longueurs AM, AB, AN, AC, MN et BC, puis comparer les quotients de longueurs $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ pour chacune des trois figures ci-dessus.

b. Que peut-on conjecturer ?

2. **Démonstration**
Sur la figure ci-contre, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et les points M′ et N′ sont respectivement les symétriques des points M et N par rapport à A.



a. Montrer que les droites (M′N′) et (BC) sont parallèles.

b. Comparer les longueurs AM et AM′, puis les longueurs AN et AN′ et enfin les longueurs MN et M′N′.

c. En déduire que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Activités

Activité 2 Réciproque du théorème de Thalès

A Avec un logiciel de géométrie

a. Créer quatre points R, S, T et V tels que les droites (RS) et (TV) soient sécantes.
b. Créer le point A intersection des droites (RS) et (TV).
c. Placer un point B distinct de A sur la droite (RS), puis un point C distinct de A sur la droite (TV).
d. Tracer la droite (BC), puis masquer les points R, S, T et V.
e. Placer un point M sur la demi-droite [AB) et un point N sur la demi-droite [AC).
Tracer la droite (MN).
f. À l'aide de l'outil Calculatrice ou Table du logiciel, calculer et afficher les réels m et n tels que $m = \dfrac{AM}{AB}$ et $n = \dfrac{AN}{AC}$.
g. Déplacer le point N sur la demi-droite [AC) jusqu'à ce que les deux réels m et n soient égaux. Dans ce cas, que semble-t-on pouvoir dire des droites (MN) et (BC) ?
h. Déplacer à nouveau le point N. Existe-t-il d'autres positions pour le point N sur la demi-droite [AC) telles que les rapports m et n soient égaux ?
i. Quelle conjecture peut-on faire ?
j. Reprendre les questions **f** à **i** pour un point M sur la droite (AB) tel que les points M, A et B soient alignés dans cet ordre et pour un point N sur la droite (AC) tel que les points N, A et C soient alignés dans cet ordre.

B Avec une règle et un crayon

1 Tracer deux droites d et d', graduées en centimètres, sécantes en A, puis placer un point B sur la droite d tel que AB = 6 cm et un point C sur la droite d' tel que AC = 3 cm.

2 On veut placer un point M sur d et un point N sur d' tels que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{2}{3}$.
a. Combien doit mesurer la longueur AM ? Combien doit mesurer la longueur AN ?
b. À combien d'endroits peut-on placer le point M ? À combien d'endroits peut-on placer le point N ?

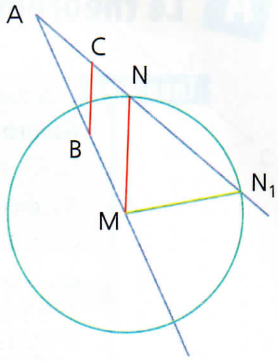
3 **a.** Placer les points M_1 et N_1 vérifiant $\dfrac{AM_1}{AB} = \dfrac{AN_1}{AC} = \dfrac{2}{3}$ et tels que les points A, M_1 et B soient alignés dans cet ordre et les points A, N_1 et C dans cet ordre.
Que semble-t-on pouvoir dire des droites (M_1N_1) et (BC) ?
b. Placer les points M_2 et N_2 vérifiant $\dfrac{AM_2}{AB} = \dfrac{AN_2}{AC} = \dfrac{2}{3}$ et tels que les points M_2, A et B soient alignés dans cet ordre et les points N_2, A et C dans cet ordre.
Que semble-t-on pourvoir dire des droites (M_2N_2) et (BC) ?

Une démonstration de cette réciproque fait l'objet de l'exercice 52 page 194

4 Reprendre la question **3a** pour placer les point I_1 sur (d) et J_1 sur (d'), puis la question **3b** pour placer les points les point I_2 sur (d) et J_2 sur (d') tels que : $\dfrac{AI_1}{AB} = \dfrac{AJ_1}{AC} = \dfrac{AI_2}{AB} = \dfrac{AJ_2}{AC} = \dfrac{4}{3}$.

5 Quelle conjecture peut-on faire ?

C Quotients égaux et droites non parallèles



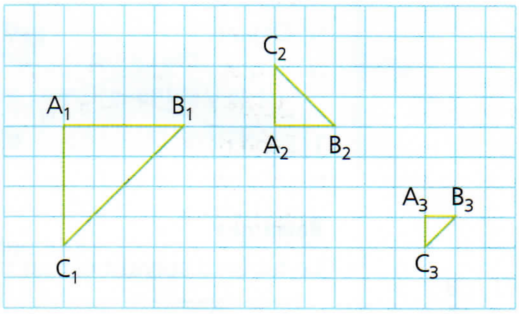
Soient les triangles ABC et AMN ci-contre tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN] et soit le point N_1 tel que $MN_1 = MN$.

a. Sachant que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$, que permettrait de supposer la conjecture établie dans les questions **A** et **B** ?

b. Montrer que $\dfrac{MN_1}{BC} = \dfrac{MN}{BC}$. L'égalité $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN_1}{BC}$ permet-elle de dire que les droites (MN_1) et (BC) sont parallèles ?

c. Que peut-on en déduire concernant la réciproque du théorème de Thalès ?

Activité 3 Agrandissement et réduction



1 Longueurs des côtés

a. En prenant le quadrillage comme repère, comparer les longueurs des côtés des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ en recopiant et complétant :

- $A_1B_1 = \text{---}\ A_3B_3$
- $A_2B_2 = \text{---}\ A_1B_1$
- $B_1C_1 = \text{---}\ B_3C_3$
- $B_2C_2 = \text{---}\ B_1C_1$
- $A_1C_1 = \text{---}\ A_3C_3$
- $A_2C_2 = \text{---}\ A_1C_1$

b. Quel(s) triangle(s) correspond(ent) à un agrandissement du triangle $A_3B_3C_3$? Préciser le facteur d'agrandissement dans chaque cas.
Quel(s) triangle(s) correspond(ent) à une réduction du triangle $A_1B_1C_1$? Préciser le facteur de réduction dans chaque cas.

c. Que peut-on dire du périmètre du triangle $A_2B_2C_2$ par rapport à celui du triangle $A_1B_1C_1$? Que peut-on dire du périmètre du triangle $A_1B_1C_1$ par rapport à celui du triangle $A_3B_3C_3$?

d. *Par quel facteur doit-on multiplier le périmètre d'un triangle pour obtenir le périmètre de son triangle réduit ou agrandi ?*

2 Aires

a. En prenant la longueur d'un carreau comme unité de longueur, donner l'aire des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$.

b. Recopier et compléter :
- $\text{Aire}_{A_2B_2C_2} = \text{---}\ \text{Aire}_{A_1B_1C_1}$
- $\text{Aire}_{A_1B_1C_1} = \text{---}\ \text{Aire}_{A_3B_3C_3}$

c. *Par quel facteur doit-on multiplier l'aire d'un triangle pour obtenir l'aire de son triangle réduit ou agrandi ?*

3 Angles

a. Tracer un triangle ABC quelconque, puis placer un point O n'appartenant ni à la droite (AB), ni à la droite (AC), ni à la droite (BC).

b. Construire les points G, H et I sur les demi-droites [OA), [OB) et [OC) tels que : $OG = \dfrac{3}{2}OA$, $OH = \dfrac{3}{2}OB$ et $OI = \dfrac{3}{2}OC$.

c. Le triangle GHI est-il un agrandissement du triangle ABC ? Justifier.

d. Que peut-on dire sur les angles de ces deux figures ?

Cette démonstration nécessite le théorème de Thalès et sa réciproque.