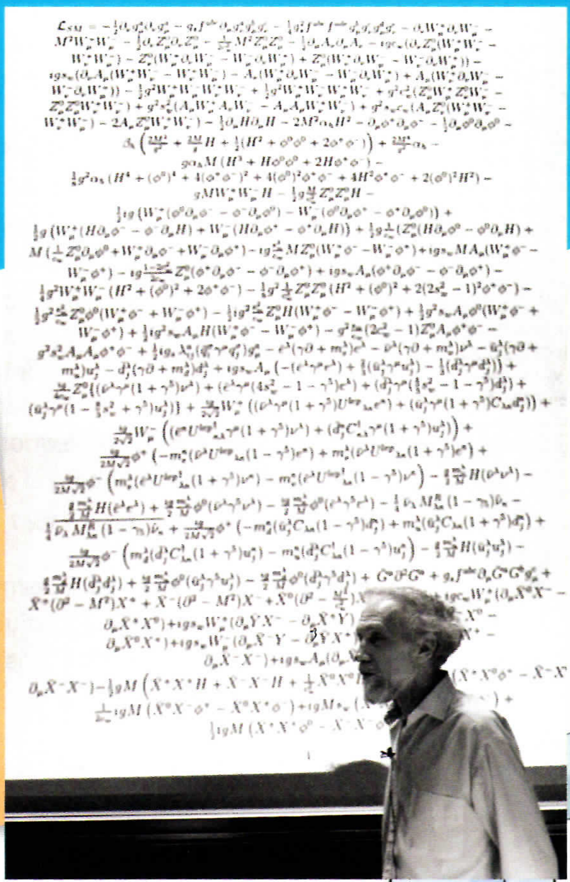
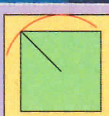
5 Identités remarquables Équations produit nul



Sur la photo ci-contre, **Alain Connes** se tient devant un tableau rempli de **calcul littéral**. Ce **mathématicien** n'avait que 35 ans quand il reçut la **prestigieuse médaille Fields** (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens) pour ses travaux en algèbre. Au fil de sa carrière de chercheur, il a accumulé les distinctions : le Prix Clay, le Prix Crafoord et, en 2004, la médaille d'or du CNRS.

François Viète (1540-1603) est un des savants les plus éminents du XVI^{e} siècle. Il est le **père de l'algèbre moderne**. C'est à lui que sont dues l'idée de **désigner par des lettres** des quantités que l'on veut soumettre au calcul et celle d'effectuer des opérations sur ces lettres à l'aide des **signes ×, +, − et /**… afin d'en déduire des **formules universelles**.



Dans son carnet, **Villard de Honnecourt**, un architecte du Moyen Âge, a dessiné deux carrés de même centre tels que la demi-diagonale du plus petit des carrés est égale au demi-côté du grand carré. Ainsi la **différence des deux aires** de ces carrés **est égale à l'aire du petit carré**… comme dans divers cloîtres de cette époque, où on s'aperçoit que l'espace découvert (en général planté d'arbustes) est sensiblement égal à la surface de l'espace couvert !

Pour bien commencer

QCM **Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?**

		A	B	C
1	$3x \times 2x =$	$6x$	$5x^2$	$6x^2$
2	L'expression réduite de $5x^2 - 3x + 8 - 2x$ est :	$5x^2 - 5x + 8$	$2x^2 + 8 - 2x$	8
3	$-(x+2) =$	$-x+2$	$-x-2$	$-2x$
4	$7 + (x-7) =$	x	$x+14$	$7x - 49$
5	$7 - (x+5) =$	$12 - x$	$7x + 5$	$2 - x$
6	$-3(x-2) =$	$-3x - 2$	$-3x + 6$	$-3x - 6$
7	$(x+2)(x+3) =$	$x^2 + 6$	$2x + 6$	$x^2 + 5x + 6$
8	$4x + 8 =$	$4(x+2)$	$4(x+8)$	$12x$
9	$2x^2 + 3x =$	$5x^2$	$x(2x+3)$	$x^2(2+3x)$
10	Le carré de $5x$ vaut :	$10x$	$5x^2$	$25x^2$
11	Le carré de $-2x$ vaut :	$4x^2$	$-4x^2$	$-4x$
12	Le double du produit de 3 par $5x$ vaut :	$15x$	$16x$	$30x$
13	On choisit un nombre x. On lui ajoute 7, puis on multiplie la somme obtenue par le nombre choisi. On obtient :	$(x+7) \times 7$	$(x+7)x$	$x + 7 \times x$

Exercice 1 Réduire chaque expression.

$A = 6x + 4 - 8x^2 - 7x + 5 + 3x^2$

$B = -3a + 5a^2 - 2a - 3 - 7a^2 + 3$

$C = 3x^2 - (6x - 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x)$

$D = -(2a+1) + 4a^2 + 6 - (-3a^2 + a)$

$E = 7 - x + (3x^2 - 1) - (-3x + 2x^2)$

$F = 4x - x^2 - (5 - 2x) + (6x^2 - 7)$

Exercice 2 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

$A = 3(2x+5) + 2(x-4)$

$B = 4(-x+3) - 3(x-2)$

$C = (3x+4)(2x+5)$

$D = (-2x+3)(3x-7)$

$E = 5(x-3) + (x+2)(x-4)$

$F = 4(5-x) - (x+3)(x+2)$

Exercice 3 Factoriser chacune des expressions suivantes :

a. $2x + 6$ **b.** $3x^2 + 9$ **c.** $8x + 8$ **d.** $8x - 12$

e. $x^2 + 7x$ **f.** $5x^2 - 10x$ **g.** $4x^2 - 8x + 12$ **h.** $x^3 + 2x^2 + x$

Exercice 4 Recopier, puis relier chaque phrase à l'expression littérale qui lui correspond.

Le carré de la somme de x et de 3 •	• $(x-3)^2$
La différence des carrés de x et de 3 •	• $x^2 + 3^2$
La somme des carrés de x et de 3 •	• $(x+3)^2$
Le carré de la différence de x et de 3 •	• $x^2 - 3^2$

Activités

Activité 1 Carré d'une somme

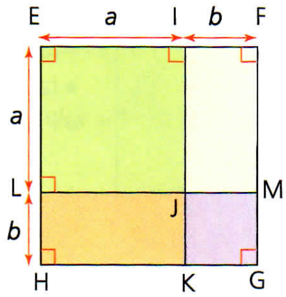
1 Carré d'une somme et somme des carrés

Dans chaque cas, calculer les deux expressions proposées, puis indiquer si elles sont égales ou non. Que constate-t-on ?

- $(3+4)^2$ et 3^2+4^2
- $(7+2)^2$ et 7^2+2^2
- $[3+(-1)]^2$ et $3^2+(-1)^2$

2 À l'aide des aires

Soient a et b deux nombres positifs. On considère le carré EFGH de la figure ci-contre.



a. Exprimer l'aire du carré EFGH en fonction de $a+b$.

b. Exprimer l'aire de chacun des carrés EIJL et JMGK, puis l'aire de chacun des rectangles IFMJ et LJKH en fonction de a et de b.
En déduire une expression de l'aire du carré EFGH en fonction de a et b.

c. Quelle égalité peut-on déduire des questions précédentes ?

lité qui donne
ision de $(a+b)^2$
ie pour tous les
es a et b : une
galité s'appelle
ıe **identité**.

3 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres.
Écrire $(a+b)^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
Développer, puis réduire le produit obtenu.

Cette identité est très souvent utilisée ; on dit que c'est une **identité remarquable**.

4 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 3 :

a. Développer les produits : $(x+3)^2$; $(x+5)^2$; $(5x+2)^2$; $(3+7x)^2$.

b. Recopier et compléter :
- $21^2 = (20 + \_\_\_)^2 = \_\_\_^2 + 2 \times \_\_\_ \times \_\_\_ + \_\_\_^2 = \_\_\_$
- $99^2 + 2 \times 99 + 1 = 99^2 + 2 \times 99 \times \_\_\_ + 1 = (99 + \_\_\_)^2 = \_\_\_$

c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible : 31^2 ; 32^2 ; $999^2 + 2 \times 999 + 1$.

Activité 2 Carré d'une différence

1 Carré d'une différence et différence des carrés

Dans chaque cas, calculer les deux expressions proposées, puis indiquer si elles sont égales ou non. Que constate-t-on ?

- $(7-4)^2$ et 7^2-4^2
- $(10-2)^2$ et 10^2-2^2
- $(5-6)^2$ et 5^2-6^2

2 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres.
Écrire $(a-b)^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
Développer, puis réduire le produit obtenu.

L'égalité qui donne l'expression de $(a-b)^2$ est une **identité remarquable**.

3 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 2 :

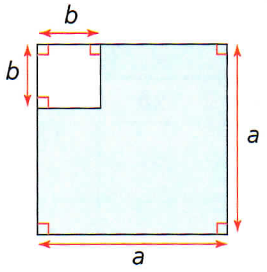
a. Développer les produits : $(x-2)^2$; $(x-6)^2$; $(3x-4)^2$; $(5-6x)^2$.

b. Recopier et compléter :
- $39^2 = (40 - \_\_\_)^2 = \_\_\_^2 - 2 \times \_\_\_ \times \_\_\_ + \_\_\_^2 = \_\_\_$
- $101^2 - 2 \times 101 + 1 = 101^2 - 2 \times 101 \times \_\_\_ + 1 = (101 - \_\_\_)^2 = \_\_\_$

c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible : 99^2 ; 48^2 ; $401^2 - 2 \times 401 + 1$.

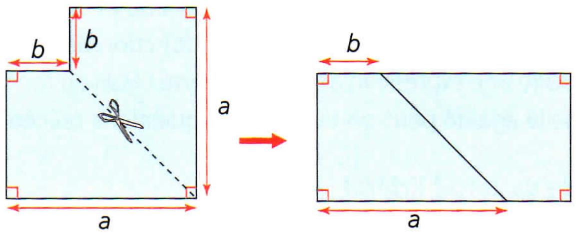
Activité 3 Différence de deux carrés

1 À l'aide des aires



a. Exprimer l'aire de la figure bleue ci-contre en fonction des deux nombres positifs a et b $(b < a)$.

b. On découpe deux trapèzes rectangles superposables dans la figure bleue, puis on les assemble de façon à obtenir un rectangle.
Exprimer, en fonction de a et de b :
- la longueur du rectangle ;
- la largeur du rectangle ;
- l'aire du rectangle.



c. Quelle égalité peut-on déduire des questions précédentes ?

2 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres.
Développer, puis réduire le produit $(a+b)(a-b)$.

L'égalité qui donne l'expression de $(a+b)(a-b)$ est une **identité remarquable**.

3 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 2 :

a. Développer les produits : $(x+3)(x-3)$; $(x+7)(x-7)$; $(3x+5)(3x-5)$.

b. Recopier et compléter :
- $31 \times 29 = (30 + \_\_\_)(30 - \_\_\_) = \_\_\_^2 - \_\_\_^2 = \_\_\_$
- $65^2 - 35^2 = (65 + \_\_\_)(65 - \_\_\_) = \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$

c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible :
41×39 ; 52×48 ; $78^2 - 22^2$; $8{,}6^2 - 1{,}4^2$.

Activité 4 Factorisations

A Factoriser avec un facteur commun

1 Calculer mentalement :

A $= 9{,}23 \times 4 + 9{,}23 \times 6$ B $= 47 \times 16 - 47 \times 6$ C $= 8{,}4 \times 1{,}3 - 8{,}4 \times 0{,}9 - 8{,}4 \times 0{,}4$

2 Parmi les expressions ci-dessous, indiquer celles qui sont factorisées, c'est-à-dire mises sous la forme d'un produit de facteurs. Factoriser ensuite les autres expressions.

D $= 3x + 6$ E $= (x+3)(x-5)$ F $= 5x^2 - 10x + 5$ G $= 2(4 - 3x)$
H $= 7x + x^2$ I $= x(2 + x)$ J $= (x-4)^2$ K $= 5x^2 - 15x$

3 Soit A $= (3x-1)(x-2) + 5(x-2)$.
Pour factoriser A, Cynthia observe que $(x-2)$ est un facteur commun à $(3x-1)(x-2)$ et à $5(x-2)$. Après factorisation, elle obtient : A $= (x-2)(3x+4)$. Retrouver le résultat de Cynthia.

B Factoriser à l'aide des identités remarquables

1 **a.** Recopier et compléter les égalités suivantes :

- $x^2+8x+16 = (x+\ldots)^2$
- $4x^2+12x+9 = (\ldots+3)^2$

b. Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

$A = x^2+12x+36$ $\qquad$ $B = 4x^2+20x+25$ $\qquad$ $C = 4x^2+14x+49$

2 **a.** Recopier et compléter les égalités suivantes :

- $x^2-2x+1 = (x-\ldots)^2$
- $9x^2-24x+16 = (3x-\ldots)^2$

b. Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

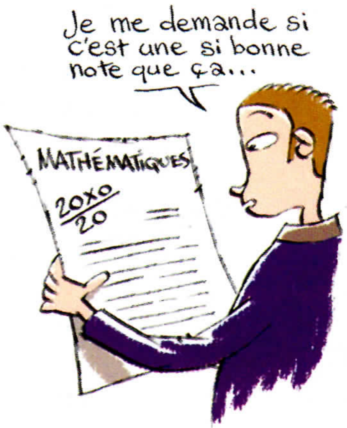
$D = x^2-6x+9$ $\qquad$ $E = 4x^2-10x+25$ $\qquad$ $F = 16x^2-8x+1$

3 **a.** Recopier et compléter les égalités suivantes :

- $x^2-25 = x^2-\ldots^2 = (\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots)$
- $4x^2-9 = (\ldots)^2-\ldots^2 = (\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots)$

b. Factoriser les expressions : x^2-16 ; x^2-1 ; $9x^2-49$; $25-16x^2$.

Activité 5 Équation produit nul



1 **a.** Calculer les produits suivants :

$A = 0\times(-3)$ $\qquad$ $B = 5{,}32\times 0$

$C = 0\times\sqrt{2}$ $\qquad$ $D = 0\times\dfrac{-5}{9}$

b. Soient a et b deux nombres.

- Si $a = 0$, que peut-on dire du produit $a\times b$?
- Que peut-on dire du produit $a\times b$ si $b = 0$?
- Recopier et compléter la phrase suivante :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit… .

2 **a.** Donner cinq couples de nombres $(a\ ;\ b)$ vérifiant l'égalité $a\times b = 0$.

b. Peut-on envisager un couple de nombres $(a\ ;\ b)$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$ tel que $a\times b = 0$?
Quelle conjecture peut-on émettre si un produit de deux facteurs est nul ?

3 On considère l'équation $(x+5)(2x-3) = 0$.

a. Cette équation est appelée **équation produit nul**. Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?
Est-ce une équation du premier degré à une inconnue ?

b. Déterminer x tel que $x+5$ soit nul.

c. Déterminer x tel que $2x-3$ soit nul.

d. Quelles sont alors les solutions de l'équation $(x+5)(2x-3) = 0$?

4 **a.** Résoudre l'équation produit nul $(3x-4)(7-x) = 0$.

b. Factoriser le premier membre de chaque équation, puis la résoudre.

- $2x^2-x = 0$
- $(2x-1)(-3x+2)+3(2x-1) = 0$
- $x^2-2x+1 = 0$