Chapitre 8 : Triangle rectangle - cosinus d'un angle

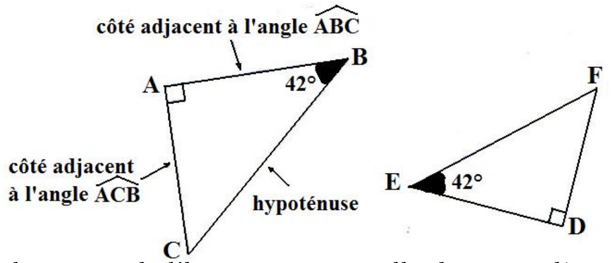
1 Cosinus et triangle rectangle :

1.1 Conjecture : Activité sur le cosinus d'un angle aigu

De la conjecture ...

Données :

- ABC et DEF sont des triangles rectangles.
- $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 42^o$

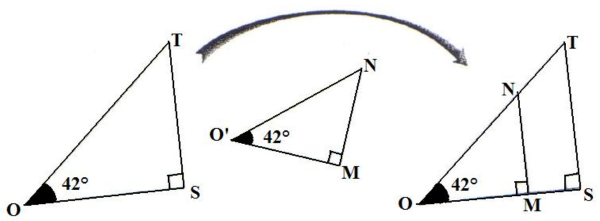


1. Pour chacun des deux triangles, mesurer la longueur de l'hypoténuse et cellc du côté adjacent à l'angle de 42^o, puis, à l'aide de la calculatrice, évaluer le rapport des longueurs :
$$\frac{\text{côté adjacent à l'angle de } 42^o}{\text{hypoténuse}}.$$
2. Construire un triangle GHI rectangle en G tel que $\widehat{GHI} = 42^o$, puis, à l'aide de la calculatrice, évaluer le rapport des longueurs :
$$\frac{\text{côté adjacent à l'angle de } 42^o}{\text{hypoténuse}}.$$
3. A partir des questions précédentes, quelle conjecture peut-on faire ? Recopier et compléter :
"' *Conjecture : d'après les questions précédentes, il semble que ...."'*

... à la démonstration.

Données :

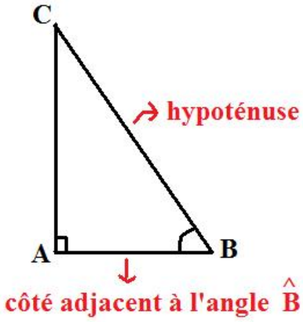
- OST est un triangle rectangle en S.
- O'MN est un triangle rectangle en M.
- $\widehat{MO'N} = \widehat{SOT} = 42^o$.

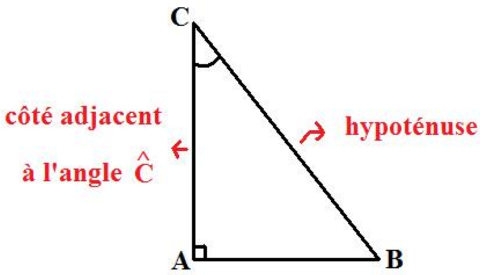


On veut démontrer que le rapport $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle de } 42^o}{\text{hypoténuse}}$ est égal dans les triangles O'MN et OST.
On positionne le triangle O'MN de telle sorte que les points O et O' soient confondus.
Le point M appartient au segment [OS] et le point N appartient au segment [OT].

1. Démontrer que les droites (MN) et (ST) sont parallèles.
2. En justifiant la réponse, recopier et compléter :
$$\frac{OM}{OS} = \frac{....}{....} = \frac{....}{....}.$$
3. Démontrer l'égalité des rapports de longueurs $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OS}{OT}$.
4. Recopier et compléter :
"'Dans des triangles .... qui ont le même angle aigu $\hat{a}$, le rapport $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{a}}{\text{hypoténuse}}$ *est ....
Ce quotient s'appelle le cosinus de l'angle $\hat{a}$ et se note $\cos \hat{a}$."'*

1.2 Vocabulaire





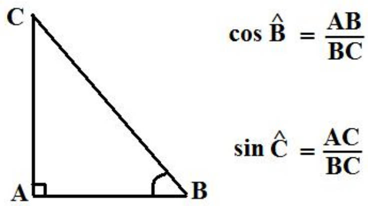
1.3 Définition

Remarque : Le cosinus est un outil mathématique qui permet de calculer des longueurs de segments et des mesures d'angles.

Définition : Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient :

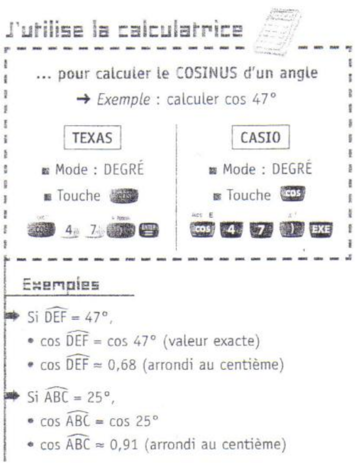
$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}.$$

Remarque : Ce quotient ne dépend que de l'angle :



Attention : le cosinus d'un angle aigu est toujours compris entre 0 et 1,
car l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours le plus grand côté.

1.4 Cosinus et calculatrice



J'utilise la calculatrice

... pour calculer le COSINUS d'un angle

→ *Exemple* : calculer cos 47°

TEXAS	CASIO
■ Mode : DEGRÉ	■ Mode : DEGRÉ
■ Touche cos	■ Touche cos
cos 4 7) ENTER	cos 4 7) EXE

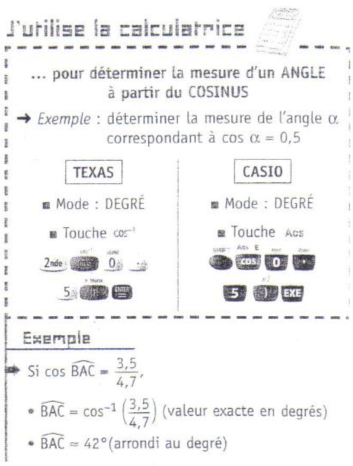
Exemples

➡ Si $\widehat{DEF} = 47°$,

- $\cos \widehat{DEF} = \cos 47°$ (valeur exacte)
- $\cos \widehat{DEF} \approx 0,68$ (arrondi au centième)

➡ Si $\widehat{ABC} = 25°$,

- $\cos \widehat{ABC} = \cos 25°$
- $\cos \widehat{ABC} \approx 0,91$ (arrondi au centième)



J'utilise la calculatrice

... pour déterminer la mesure d'un ANGLE à partir du COSINUS

→ *Exemple* : déterminer la mesure de l'angle α correspondant à $\cos \alpha = 0,5$

TEXAS	CASIO
■ Mode : DEGRÉ	■ Mode : DEGRÉ
■ Touche $\cos^{-1}$	■ Touche Acs
2nde cos 0 . 5) ENTER	SHIFT cos 0 . 5) EXE

Exemple

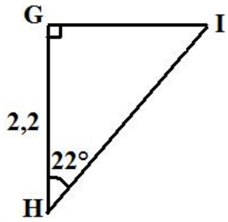
➡ Si $\cos \widehat{BAC} = \frac{3,5}{4,7}$,

- $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{3,5}{4,7}\right)$ (valeur exacte en degrés)
- $\widehat{BAC} \approx 42°$(arrondi au degré)

1.5 Calculer une longueur

Méthode : Dans un triangle rectangle, quand on connaît la mesure d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle, on peut calculer la longueur de l'autre côté de l'angle :
→ triangle rectangle : on peut utiliser le cosinus.
→ on écrit le quotient de longueurs qui permet de calculer le cosinus de l'angle connu.
→ on fait un produit en croix pour trouver la longueur cherchée.

Exemple :
Enoncé :
GHI est un triangle rectangle en G
tel que $GH = 2,2$ cm et $\widehat{GHI} = 52^o$.
Calculer la valeur exacte de la longueur HI,
puis l'arrondi au dixième.

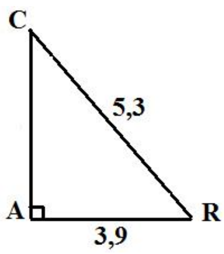


Résolution :
GHI est un triangle rectangle en G, d'où :
$\cos(\widehat{GHI}) = \dfrac{GH}{HI}$
il vient : $\dfrac{\cos(52)}{1} = \dfrac{2,2}{HI}$
On applique alors le produit en croix : $HI \times \cos(52) = 2,2$.
Donc $HI = \dfrac{2,2}{\cos(52)}$ qui est la **valeur exacte**.
Pour avoir la **valeur arrondi au dixième**, on se sert de la calculatrice :
on pense à la mettre en mode degré et l'on tape : $2,2 \div \cos(52)$.
On obtient : $HI \approx 3,6$ cm. (arrondi au mm).

1.6 Calculer la mesure d'un angle

Méthode : Dans un triangle rectangle, quand on connaît les longueurs des deux côtés d'un angle, on peut calculer la mesure de cet angle :
→ triangle rectangle : on peut utiliser le cosinus.
→ on écrit le quotient de longueurs qui permet de calculer le cosinus de l'angle inconnu.
→ on utilise la calculatrice pour déterminer la mesure de l'angle grâce à la touche $\cos^{-1}$ ou $Acos$.

Exemple :
Enoncé :
ARC est un triangle rectangle en A
tel que $AR = 3,9$ cm et $RC = 5,3$ cm.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ARC}$.
Donner l'arrondi au degré de cette mesure.



Résolution :
Le triangle ARC est un triangle rectangle en A,
donc on peut utiliser le cosinus : $\cos(\widehat{ARC}) = \dfrac{AR}{RC}$
d'où : $\cos(\widehat{ARC}) = \dfrac{3,9}{5,3}$
Pour avoir la **valeur arrondi au degré**, on se sert de la calculatrice :
on pense à la mettre en mode degré et l'on tape : $\cos^{-1}\left(\dfrac{3,9}{5,3}\right)$.

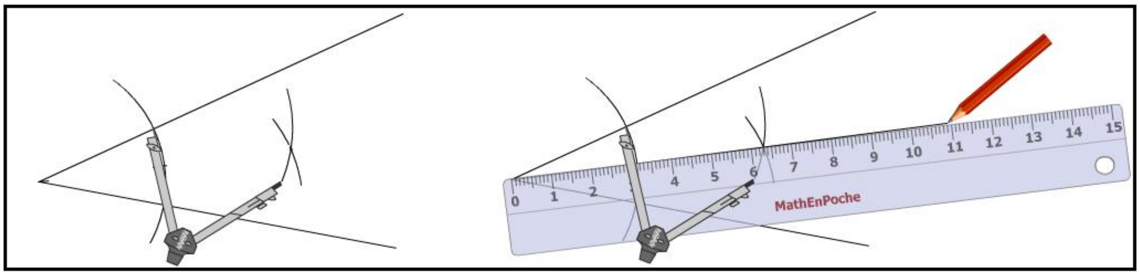
On obtient : $\widehat{ARC} \approx 43^o$.

2 Bissectrice et cercle inscrit :

2.1 Bissectrice : définition et rappels

Définition : Le bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Construction au compas :



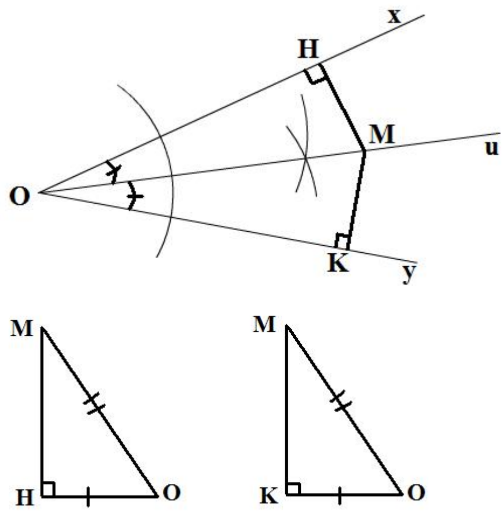
Rappel : La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

2.2 Caractéristique de la bissectrice :

(à faire selon la classe et le temps)

Démonstration 1 :

M est un point de la bissectrice $[Ox)$ de l'angle $\widehat{xOy}$.

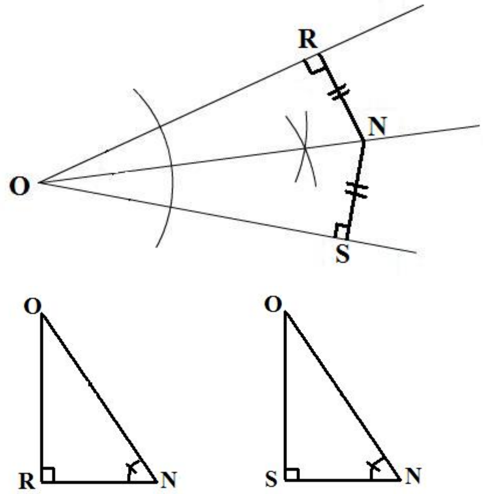


Le triangle HOM est rectangle en H,
d'où : $\cos(\widehat{HOM}) = \dfrac{OH}{OM}$.
De plus, le triangle KOM est rectangle en K,
d'où : $\cos(\widehat{KOM}) = \dfrac{OK}{OM}$.
Or, d'après la définition de la bissectrice,
les angles $\widehat{HOM}$ et $\widehat{KOM}$ sont égaux.
Donc $\dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OK}{OM}$, d'où $OH = OK$.

En utilisant le théorème de Pythagore,
dans les deux triangles, on trouve $HM = KM$.

Démonstration 2 :

On va démontrer la propriété réciproque.
N est équidistant des côtés de l'angle.

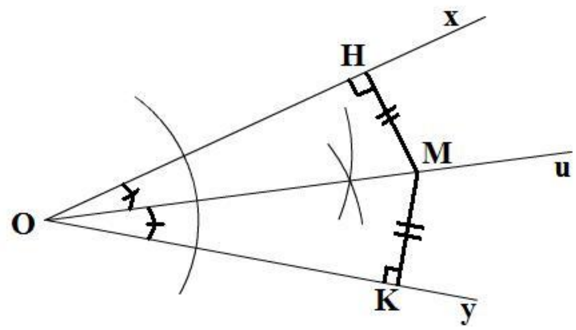


Le triangle ORN est rectangle en R,
d'où : $\cos(\widehat{ONR}) = \dfrac{RN}{ON}$.
De plus, le triangle OSN est rectangle en S,
d'où : $\cos(\widehat{ONS}) = \dfrac{SN}{ON}$.
Or, par construction, $RN = SN$
Donc $\cos\widehat{ONR} = \cos\widehat{ONS}$, d'où $\widehat{ONR} = \widehat{ONS}$.

En faisant la somme des angles dans les
triangles OSN et ORN, on trouve $\widehat{RON} = \widehat{SON}$.
D'où N est un point de la bissectrice de $\widehat{SOR}$.

Propriété :

- Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est à égale distance des deux côtés de cet angle.
- Si un point est à égale distance des deux côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.

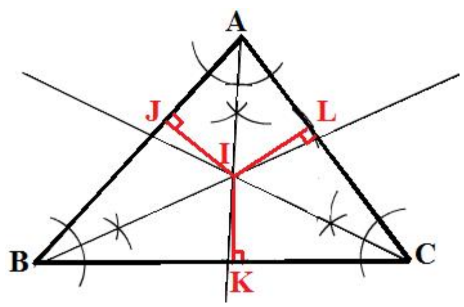


2.3 Cercle inscrit :

Démonstration :

Tracer un triangle ABC, puis construire les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
Les bissectrices se coupent en I.

Soient J, K et L les pieds respectifs des perpendiculaires aux droites (AB) ; (AC) et (BC) passant par I.



- I est un point de la bissectrice de $\widehat{ABC}$.
Donc il est équidistant de (AB) et de (BC).
Donc $IJ = JK$
- I est un point de la bissectrice de $\widehat{BCA}$.
Donc il est équidistant de (AC) et de (BC).
Donc $IK = IL$

Donc $\boxed{\text{IJ}} = IK\boxed{=\text{IL}}$.
Par conséquent, I est équidistant de (AB) et de (AC).
Il appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
De plus : $IJ = IK = IL$, donc K, J et L sont sur un même cercle de centre I.

Propriété : et **Définition :**

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Le point d'intersection des bissectrices est à égale distance des trois côtés du triangle : c'est le centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle.
Ce cercle est appelé le cercle inscrit dans le triangle.