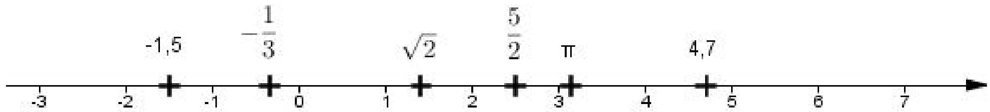
2^{nde} Fonctions : Généralités Cours

Définition :

L'ensemble de tous les nombres vus au collège est l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.
On le représente à l'aide d'une droite graduée.



I Définition et exemples

Définition :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur D, c'est associer à tout nombre réel x appartenant à D un unique nombre réel noté $f(x)$

On note $\begin{array}{lllll} f & : & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Vocabulaire :

- D s'appelle l'ensemble de définition de f.
- x s'appelle la variable.

Exercice 1

On considère un cylindre. On note h sa hauteur, R le rayon de sa base et V son volume. (h, R et V sont donc trois réels strictement positifs)
1) Exprimer V en fonction de h et R.
2) On suppose que $V = 10$
a) Exprimer h en fonction de R.
b) Exprimer R en fonction de h.

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....

II Image et antécédent

Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ est l'image de x par f.
Si $f(x) = y$ on dit que :
- y est l'image de x par f. (ou que x a pour image y par f)
- x est un antécédent de y par f. (ou que y a pour antécédent x par f)

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

....

....

Remarques :

- Tout réel de D a une unique image.
- Tout réel de $\mathbb{R}$ peut avoir plusieurs antécédents ou n'en avoir aucun.

Exemple

....

....

Méthodes pour calculer une image ou un antécédent

- pour calculer l'**image** d'un réel a de l'ensemble de définition, on remplace la variable par a
- pour calculer les **antécédents** éventuels de a par f, on résout l'équation $f(x) = a$.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 5$ et $g(x) = x^2 + 1$

1)

a) Déterminer les images par f de 4 et $\frac{1}{3}$

b) Déterminer les antécédents par f de : -5 et $\frac{1}{2}$

2)

a) Déterminer les images par g de -3 et $\sqrt{2}$

b) Déterminer les antécédents par g de $5,\ 1$ et -2

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III Détermination de l'ensemble de définition

Exemples

▸ Lorsque l'on étudie la température extérieure en fonction de l'heure sur une journée, l'ensemble de définition est ....
▸ Lorsque l'on étudie l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté, l'ensemble de définition est ....
▸ Lorsque l'on étudie la recette d'une entreprise en fonction du nombre d'objets vendus, l'ensemble de définition est ....

Définition

> L'ensemble de définition d'une fonction *f* est l'ensemble des réels qui ont une image par *f*.

Exemple

La fonction *f* définie par $f(x) = x^{16} - \sqrt{3}x^2 + x - \pi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Méthodes :

▸ Etude d'une fonction avec "une variable au dénominateur"

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$
Pour que la fonction soit définie, il ne faut pas que le dénominateur soit nul
Nous posons l'équation $x - 1 = 0$ équivaut à $x = 1$. La valeur interdite est 1
L'ensemble de définition de la fonction *f* est $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[= \mathbb{R}\backslash\{1\}$

▸ Etude d'une fonction avec "une racine carrée"

On considère la fonction *r* définie par $r(x) = \sqrt{x-5}$
Pour que la fonction soit définie, il faut que "l'expression sous la racine carrée" soit positive ou nulle.
Nous posons l'inéquation $x - 5 \geq 0$ équivaut à $x \geq 5$
L'ensemble de définition de la fonction *r* est $[5;+\infty[$

Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$f(x) = \dfrac{4x+3}{3x-8}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ $\qquad h(x) = \dfrac{-3x+7}{x^2+1}$

$m(x) = \sqrt{2x-9}$ $\qquad p(x) = \sqrt{-3x+6}$

2)

a) Créer une fonction f_1 ayant comme seule valeur interdite 2.

b) Créer une fonction f_2 ayant deux valeurs interdites dont l'une est 2. Quelle est la seconde valeur interdite que vous avez choisie ?

c) Créer une fonction f_3 ayant comme ensemble de définition $[4;+\infty[$

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

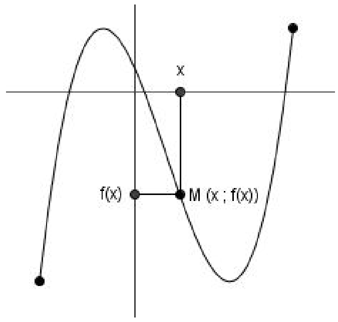
....
....
....
....

IV Représentation graphique d'une fonction

1- Définition

Définition :

> Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
> Dans le plan muni d'un repère, l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ où $x \in D$ est appelé représentation graphique de f ou courbe représentative de f. En général, on la note C_f



Conséquences : $M(x\ ;\ y) \in C_f$ équivaut à $x \in D$ et $y = f(x)$

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $D_g = \left[-2\ ;\ 3\right]$ par $g(x) = x^2 + 2x - 1$.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère.
Quels sont, parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à C_g. Justifier.

$A(-3\ ;\ -4)$ $B(0;-1)$ $C(\frac{9}{2};-\frac{25}{4})$ $D\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ $E(\sqrt{2}\ ;\ 3\sqrt{2})$

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

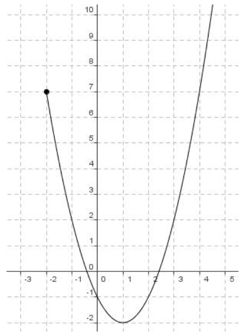
Définition

> Lorsque une fonction est représentée graphiquement dans un repère, on dit que sa courbe représentative a pour équation $y = f(x)$.

2- Lectures graphiques

a) Lecture graphique d'ensemble de définition

Exemple : On considère ci-dessous la représentation graphique C_f d'une fonction f.



C_f est limitée à gauche et illimitée à droite
donc l'ensemble de définition de f est
$D =$…………………

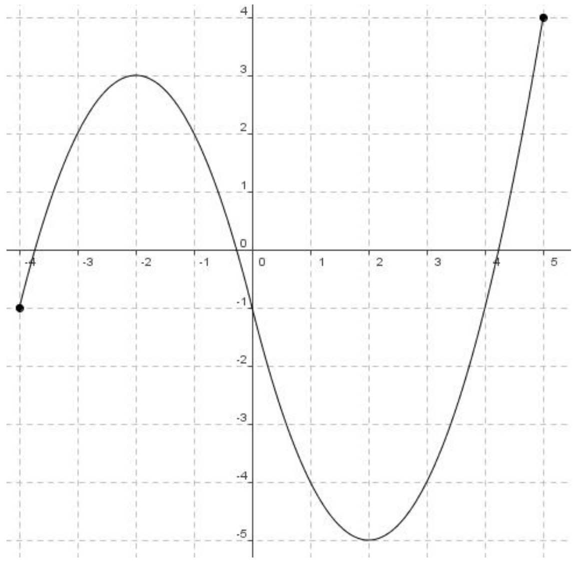
b) Lecture graphique d'images et d'antécedents

Méthodes :

▹ Pour lire l'**image** d'un réel a de l'ensemble de définition :
- On repère a sur l'axe des abscisses et on trace par ce point, la parallèle à l'axe des ordonnées
- Cette droite coupe la courbe en un point.
- On lit l'ordonnée de ce point.

▹ Pour lire les **antécédents** éventuels d'un réel a :
- On repère a sur l'axe des ordonnées et on trace par ce point la parallèle à l'axe des abscisses.
- Elle rencontre la courbe en un certain nombre de points (ou en aucun point).
- On lit l'abscisse de chacun de ces points.

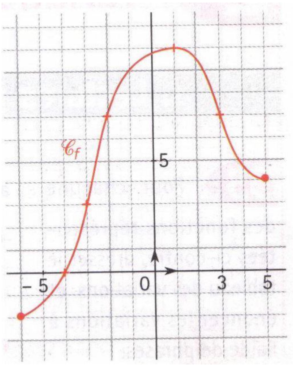
Exemple : On considère ci-dessous l'intégralité de la représentation graphique C_f d'une fonction f.



L'image de -2 par f est ……….
L'image de 2 par f est …….
Les antécédents de -1 par f sont ……………
Les antécédents de -4 par f sont ……………
L'antécédent de 4 par f est …………
5 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 5

Soit f la fonction représentée ci dessous.



1) Donner l'ensemble de définition de f.

2)

a) Lire l'image de 3 par f ; $f(1)$; $f(-4)$; $f(-2)$; $f(5)$

b) Donner un réel qui n'a pas d'image par f.

3)

a) Déterminer les antécédents éventuels de 7 par f.

b) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.

c) Déterminer les antécédents éventuels de -3 par f.

d) Peut-on trouver un réel qui a exactement un antécédent par f ?

e) Peut-on trouver un réel qui a exactement deux antécédents par f ?

f) Peut-on trouver un réel qui a exactement trois antécédents par f ?

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

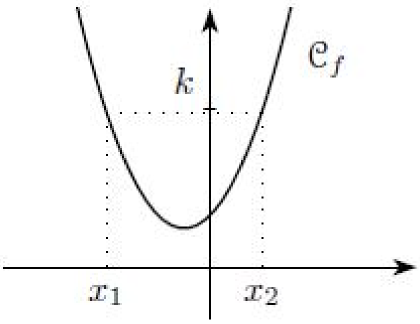
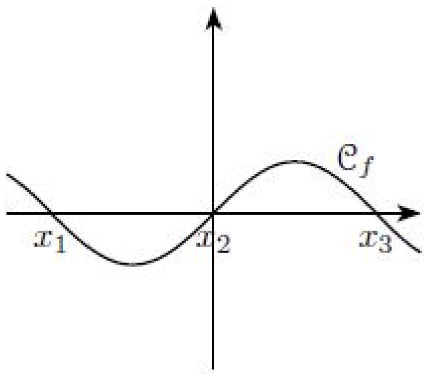
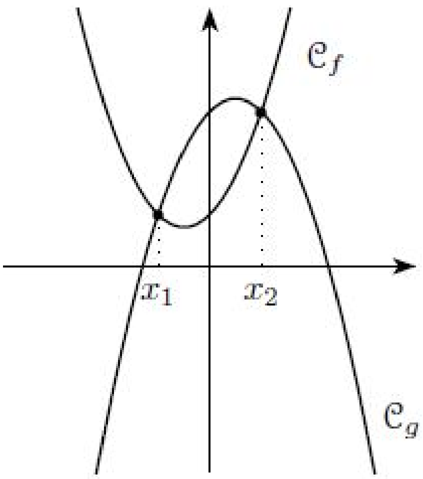
....

....

3- Résolution graphique d'équations et d'inéquations

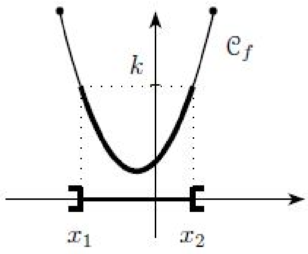
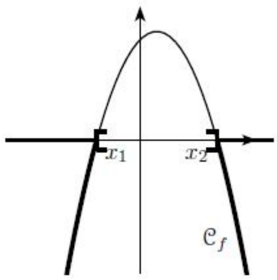
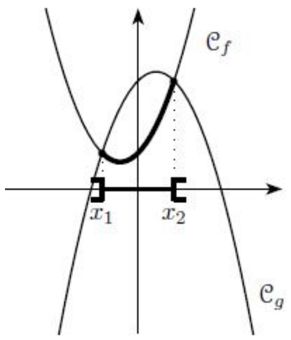
a) Equations

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble de définition D , C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan. Soit k un nombre réel.

<table>
<tr><td>$f(x) = k$</td><td>$f(x) = 0$</td></tr>
<tr><td>Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est k.
$S = \{x_1 ; x_2\}$
</td><td>Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
$S = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$
</td></tr>
<tr><td>$f(x) = g(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes C_f et C_g.
$S = \{x_1 ; x_2\}$
</td><td></td></tr>
</table>

b) Inéquations

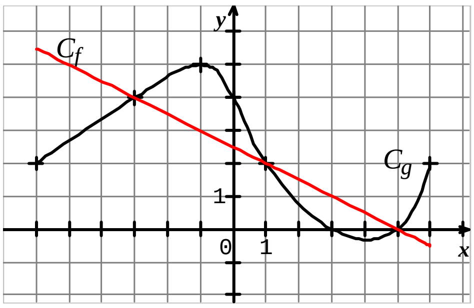
Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble de définition D , C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan. Soit k un nombre réel.

$f(x) < k$	$f(x) < 0$
Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est strictement inférieur au nombre k. $S = \left]x_1\ ;\ x_2\right[$  	Les solutions de $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement en dessous de l'axe des abscisses. $S =]-\infty\ ;\ x_1[\cup]x_2\ ;\ +\infty[$ 
$f(x) < g(x)$	
Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement en dessous de la courbe C_g. $S = \left]x_1\ ;\ x_2\right[$  	

c) Exemple

Exercice 6

C_f et C_g représentent les fonctions f et g définies sur $[-6;6]$.



1) Résolvez graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a) $g(x) = 2$ **b**) $f(x) = 0$ **c**) $f(x) = g(x)$ **d**) $g(x) \geq 4$ **e**) $g(x) < 0$ **f**) $f(x) \leq g(x)$

2) Dresser le tableau de signe de la fonction g

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

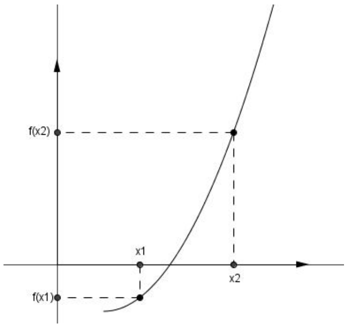
V Variations d'une fonction

1- Sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Définition :

> On dit que la fonction f est **croissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I :
>
> $$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) \leq f(x_2)$$
>
> Autrement dit une fonction croissante ne change pas l'ordre.



Graphiquement : f croissante équivaut à si x augmente alors $f(x)$augmente.

Définition :

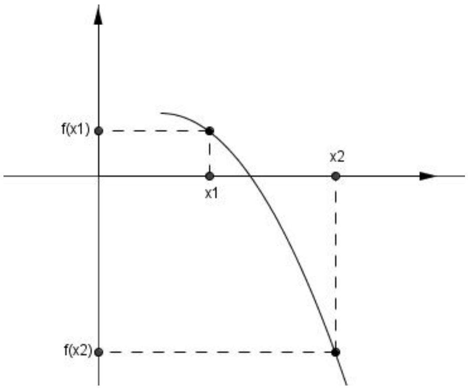
> On dit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I :
>
> $$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2)$$

Définition :

On dit que la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I

Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Autrement dit une fonction décroissante change l'ordre.



Graphiquement : f est décroissante équivaut à si x augmente alors $f(x)$ diminue.

Définition :

On dit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I

Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

Définition :

On dit que la fonction f est **constante** sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I, on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Définition :

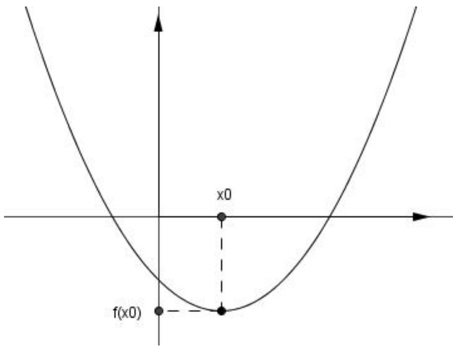
On dit que la fonction f est **monotone** sur l'intervalle I lorsque f est croissante sur I ou décroissante sur I.

2- Extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit x_0 un réel de I.

Définition :

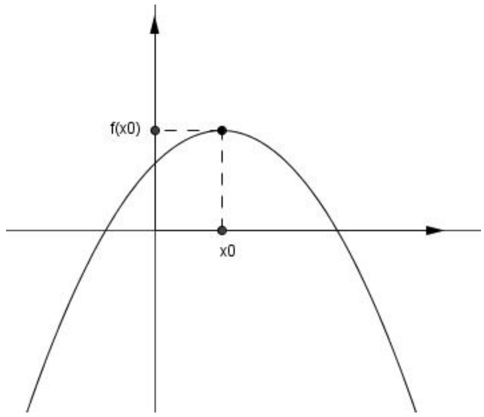
On dit que $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I lorsque pour tout réel x de I on a $f(x_0) \leq f(x)$.



Graphiquement : $f(x_0)$ est le minimum de f lorsque le point de coordonnées $(x_0\ ,\ f(x_0))$ est le point le plus bas de la représentation graphique de f.

Définition :

On dit que $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I lorsque pour tout réel x de I on a $f(x_0) \geq f(x)$.



Graphiquement : $f(x_0)$ est le maximum de f lorsque le point de coordonnées $(x_0 \, , \, f(x_0))$ est le point le plus haut de la représentation graphique de f.

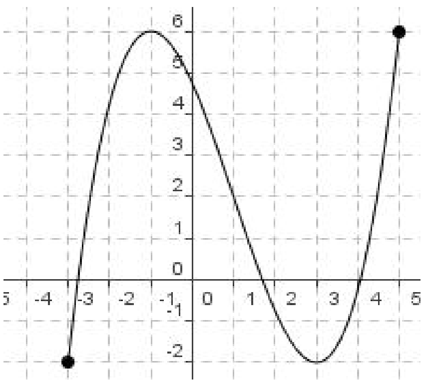
Remarque : Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

3- Tableau de variations

Définition

On peut résumer les variations d'une fonction dans un tableau appelé le tableau de variations.

Exemple :



x	
variations de f	

" ↗ " signifie strictement croissante

Exercice 7

1) Décrire les variations de la fonction f de l'exercice 5 à l'aide de phrases.
2) Donner son tableau de variations.

Solution

....
....
....
....
....
....

Remarque 1 : Réciproquement on peut tracer l'allure d'une courbe à partir de son tableau de variations

Exercice 8

On connaît le tableau de variations d'une fonction f

x	-3		-1		3		7
			6				1
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	4				-2		

1) Lorsque cela est possible, comparer les images suivantes. Justifier

a) $f(-3)$ et $f(7)$ **b**) $f(0)$ et $f(2)$ **c**) $f(4)$ et $f(6)$

d) $f(-3)$ et $f(4)$ **e**) $f(-2)$ et $f(5)$ **f**) $f(-2)$ et $f(0)$

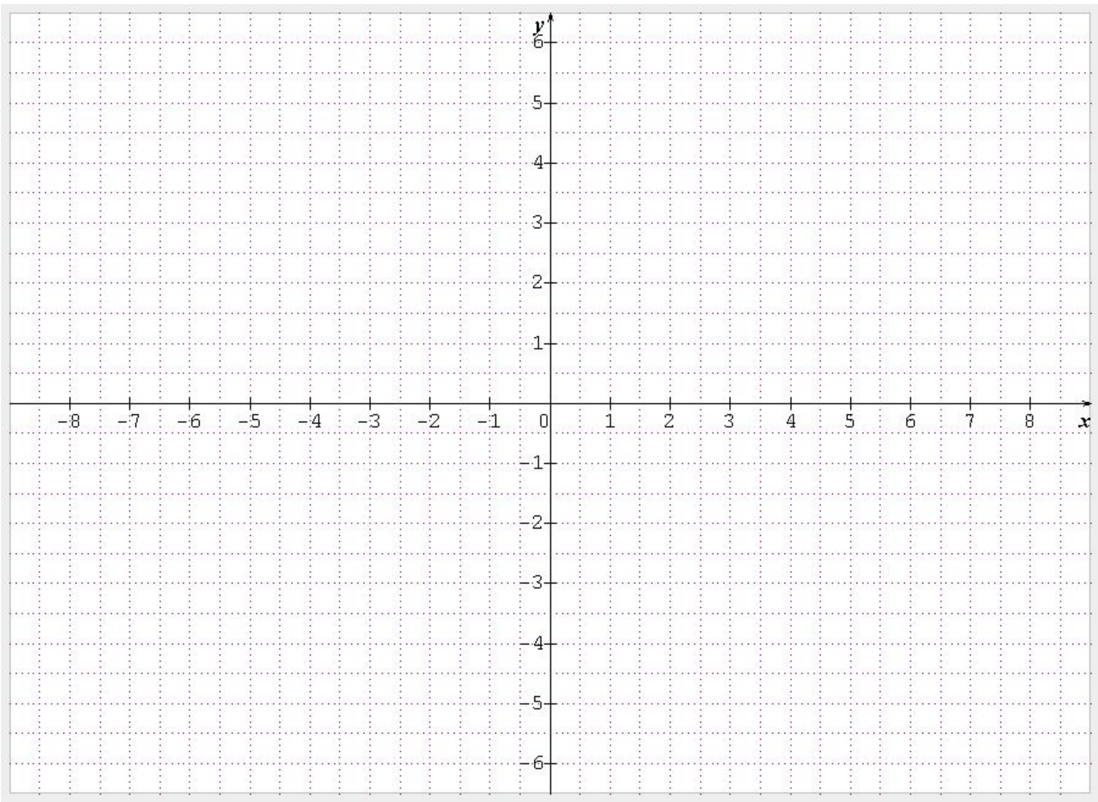
2) Tracer deux courbes possibles représentant la fonction f.

Solution

1)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2)



Remarque 2 : Soit une fonction f définie par une formule. On peut tracer la représentation graphique de f à partir de son tableau de variations et d'un tableau de valeurs.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[-4;3]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1) A l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de f sur $[-4;3]$ en choisissant un pas de 1.

2) Le tableau de variations de f est

x	-4		-1		3
variations de f	5	↘	-4	↗	12

Tracer la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (1 cm pour 1 en absicsse et 1 cm pour 2 en ordonnée)

3)

a) Déterminer tous les nombres de $[-4;3]$ dont l'image est inférieure ou égale à -3.

b) Déterminer tous les nombres de $[-4;3]$ dont l'image est positive ou nulle.

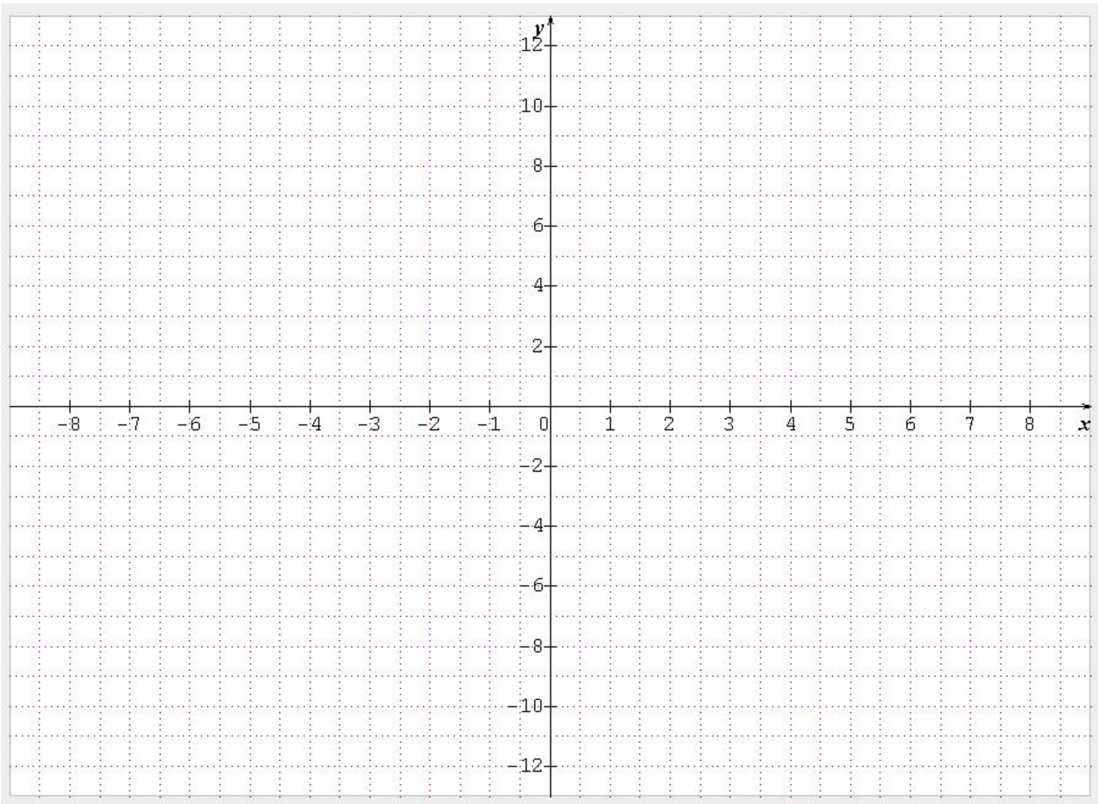
c) Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in \left[-3\ ;\ -2\right]$ puis lorsque $x \in \left[-2\ ;\ 2\right]$

Solution

1)

x								
$f(x)$								

2)



3)