E.1 ♠ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x+1}{2\cdot x-1}$$

1. Établir l'identité ci-dessous, pour tout $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$:
$$\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\frac{3}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

2. En déduire la valeur du nombre dérivée en -2 de la fonction f.

C.1

1. • On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x)-f(1)=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{-2+1}{2\times(-2)-1}=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{-1}{-4-1}$$
$$=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{2}{1}=\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{1}{5}=\frac{5\cdot(x+1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}-\frac{1\cdot(2\cdot x-1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$
$$=\frac{(5\cdot x+5)-(2\cdot x-1)}{5\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{5\cdot x+5-2\cdot x+1}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$
$$=\frac{3\cdot x+6}{5\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

• Ainsi, on a les transformations algébriques :

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\frac{\dfrac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}}{x+2}$$
$$=\frac{3\cdot(x+2)}{5\cdot(2\cdot x-1)}\times\frac{1}{x+2}=\frac{3}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$

2. On en déduit la valeur du nombre dérivée en -2 de la fonction f :
$$f'(-2)=\lim_{x\mapsto-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\mapsto-2}\frac{3}{5\cdot(2\cdot x-1)}$$
$$=\frac{3}{5\cdot(2\times(-2)-1)}=\frac{3}{5\cdot(-4-1)}=\frac{3}{-25}=-\frac{3}{25}$$

E.2 ♣ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+3\cdot x+1$$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1.

C.2 Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en -1, effectuons les calculs suivants :

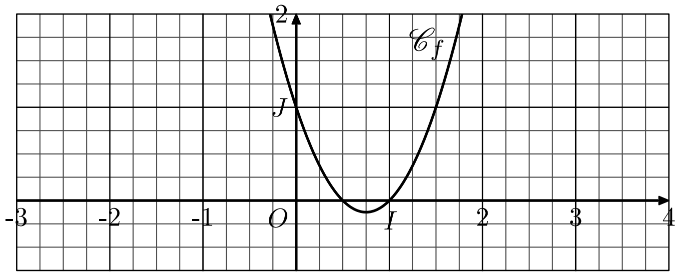
- On a les transformations algébriques suivantes :
$$f(-1+h)=(-1+h)^2+3\times(-1+h)+1$$
$$=(-1)^2+2\times(-1)\times h+h^2-3+3\cdot h+1$$
$$=1-2\cdot h+h^2-3+3\cdot h+1=h^2+h-1$$
- $f(-1)=(-1)^2+3\times(-1)+1=1-3+1=-1$

Le nombre dérivé $f'(-1)$ de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{h\cdot(h+1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}h+1=1$$

E.3 ♣ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\cdot x^2-3\cdot x+1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;I;J)$ ci-dessous



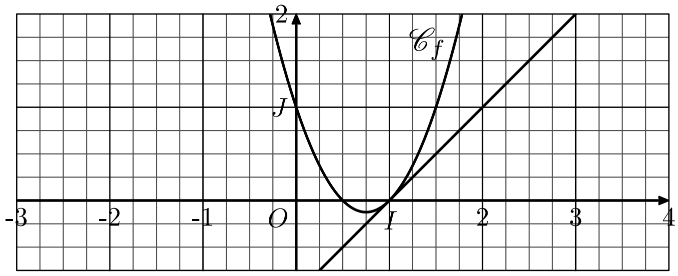
1. Établir que : $f'(1)=1$
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

C.3

1. On a :
   - $f(1{+}h)=2\cdot(1{+}h)^2-3\cdot(1+h)+1$
   $=2\cdot(1+2\cdot h+h^2)-3-3\cdot h+1$
   $=2+4\cdot h+2\cdot h^2-3-3\cdot h+1=2\cdot h^2+h$
   - $f(1)=2\times1^2-3\times1+1=2-3+1=0$

   On en déduit l'expression du quotient :
$$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\frac{2\cdot h^2+h-0}{h}=\frac{h\cdot(2\cdot h+1)}{h}=2\cdot h+1$$
   Le nombre dérivé de la fonction f en 1 a pour valeur :
$$f'(1)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto0}2\cdot h+1=1$$

2. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
$$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$
$$y=1\cdot(x-1)+0$$
$$y=x-1$$



E.4

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-5x^2+7x-2$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

C.4

1. $f'(x)=3\cdot x^2-5\times(2\cdot x)+7\times1-0=3x^2-10x+7$
2. On a les valeurs :
   - $f(2)=2^3-5\times2^2+7\times2-2=8-5\times4+14-2$
   $=8-20+14-2=0$

- $f'(2) = 3\times 2^2 - 10\times 2 + 7 = 3\times 4 - 20 + 7$
  $= 12 - 20 + 7 = -1$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite :

$$y = f'(2)\cdot(x-2) + f(2)$$
$$y = -1(x-2) + 0$$
$$y = -x + 2$$

(3) La fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-10)^2 - 4\times 3\times 7 = 100 - 84 = 16$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$.

Le discriminant étant strictement positif, cette fonction admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)-4}{2\times 3} = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)+4}{2\times 3} = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction f :
- La fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty\,;1[$ et $\left]\frac{7}{3}\,;+\infty\right[$
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]1\,;\frac{7}{3}\right[$.

E.5

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

(3) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

C.5

(1) La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = 3\cdot x^2 + 4\times 2\cdot x + 5 = 3\cdot x^2 + 8\cdot x + 5$$

(2) On a les valeurs :
- $f(-2) = (-2)^3 + 4\times(-2)^2 + 5\times(-2) + 2$
  $= -8 + 4\times 4 - 10 + 2 = -8 + 16 - 10 + 2 = 0$
- $f'(-2) = 3\times(-2)^2 + 8\times(-2) + 5 = 12 - 16 + 5 = 1$

On en déduit l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 :

$$y = f'(-2)\cdot[x-(-2)] + f(-2)$$
$$y = 1\cdot(x+2) + 0$$
$$y = x + 2$$

(3) L'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 8^2 - 4\times 3\times 5 = 64 - 60 = 4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8-2}{2\times 3} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-8+2}{2\times 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		-1		$+\infty$
$3x^2+8x+5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les sens de variations de la fonction f :
- La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right]$ et sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{3}\,;-1\right]$.

E.6

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

(3) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

C.6

(1) la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = -(3\cdot x^2) - 3\cdot(2\cdot x) - 2 = -3\cdot x^2 - 6\cdot x - 2$$

(2) On a les valeurs :
- $f(-1) = -(-1)^3 - 3\times(-1)^2 - 2\times(-1) + 4$
  $= 1 - 3 + 2 + 4 = 4$
- $f'(-1) = -3\cdot(-1)^2 - 6\times(-1) - 2 = -3\times 1 + 6 - 2$
  $= -3 + 6 - 2 = 1$

La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 admet pour expression :

$y = f'(-1)\cdot[x-(-1)] + f(-1)$

$y = 1\cdot(x+1)+4$

$y = x+1+4$

$y = x+5$

3) La fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-6)^2 - 4\times(-3)\times(-2) = 36-24 = 12$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, la fonction f' admet deux zéros qui ont pour valeurs :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)-2\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2(-3+\sqrt{3})}{-2\times3} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)+2\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2(-3-\sqrt{3})}{-2\times3} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur l'intervalle $\left[\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$.
- la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\,;\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$.

E.7 ♡

Proposition : ci-dessous les dérivées de la fonction inverse et de la fonction racine carrée.

Formule générale : $f(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	
$g(x) = \frac{5}{x} \rightsquigarrow g'(x) = -\frac{5}{x^2}$	$h(x) = -\frac{7}{3x} \rightsquigarrow h'(x) = \frac{7}{3x^2}$

Formule générale : $f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$g(x) = 3\sqrt{x} \rightsquigarrow g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$	$h(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3} \rightsquigarrow h'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}}$

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2$ 2) $g(x) = \frac{1}{12}\cdot x^6$ 3) $h(x) = 4\sqrt{x}$

4) $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 5) $k(x) = \frac{1}{2x}$ 6) $l(x) = -\frac{2}{x}$

C.7

1) La fonction f a pour expression :

$f(x) = 3\times x^2$

Ainsi, la fonction f' admet pour expression :

$f'(x) = 3\times(2x) = 6\cdot x$

2) La fonction g a pour expression :

$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12}\times x^6$

Ainsi, la fonction g' admet pour expression :

$g'(x) = \frac{1}{12}\times(6\cdot x^5) = \frac{1}{2}\cdot x^5$

3) La fonction h a pour expression :

$h(x) = 4\sqrt{x} = 4\times\sqrt{x}$

Ainsi, la fonction h' admet pour expression :

$h'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

4) La fonction j a pour expression :

$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{x}$

Ainsi, la fonction j' admet pour expression :

$j'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

5) La fonction k a pour expression :

$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$

Ainsi, la fonction k' admet pour expression :

$k'(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$

6) La fonction ℓ a pour expression :

$l(x) = -\frac{2}{x} = -2\times\frac{1}{x}$

Ainsi, la fonction ℓ' admet pour expression :

$\ell'(x) = -2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$

E.8 ♣

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1) $f: x \longmapsto x - \frac{1}{x}$ 2) $g: x \longmapsto 2\cdot\sqrt{x}$

3) $h: x \longmapsto \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ 4) $j: x \longmapsto 2\cdot x^3 + \frac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

C.8

1) La dérivée de la fonction f a pour expression :

$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$

2) La fonction g admet pour expression :

$g(x) = 2\cdot\sqrt{x} = 2\times\sqrt{x}$

Ainsi, sa dérivée g' admet pour expression :

$g'(x) = 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) La fonction h admet pour expression :

$h(x) = \frac{3}{x} - 2\cdot\sqrt{x} = 3\times\frac{1}{x} - 2\times\sqrt{x}$

Ainsi, sa dérivée h' admet pour expression :

$$h'(x) = 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x}-x^2}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}+x^2}{x^2\sqrt{x}}$$

4) La fonction j admet pour expression :

$j(x) = 2\cdot x^3 + \frac{2}{x} = 2\times x^3 + 2\times\frac{1}{x}$

Ainsi, sa dérivée j' admet pour expression :

$$j'(x) = 2\times(3x^2) + 2\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 6{\cdot}x^2 - \frac{2}{x^2}$$
$$= \frac{6{\cdot}x^4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6{\cdot}x^4-2}{x^2}$$

E.9 ♣ Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f : x \longmapsto x^5{\cdot}\big(x^2-1\big)$ (2) $g : x \longmapsto \big(2{\cdot}x^2-5x+1\big)\big(1-x^2\big)$

C.9

(1) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où :

$u(x) = x^5$; $v(x) = x^2 - 1$

qui admettent les fonctions dérivées :

$u'(x) = 5{\cdot}x^4$; $v'(x) = 2x$

Ainsi, la fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 5{\cdot}x^4{\cdot}\big(x^2-1\big) + x^5{\cdot}(2x)$$
$$= 5{\cdot}x^6 - 5{\cdot}x^4 + 2{\cdot}x^6 = 7{\cdot}x^6 - 5{\cdot}x^4$$

(2) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 2{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 1$; $v(x) = 1 - x^2$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 4{\cdot}x - 5$; $v'(x) = -2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= \big(4{\cdot}x-5\big)\big(1-x^2\big) + \big(2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+1\big)\big(-2{\cdot}x\big)$$
$$= 4{\cdot}x - 4{\cdot}x^3 - 5 + 5{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x^3 + 10{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x$$
$$= -8{\cdot}x^3 + 15{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 5$$

E.10 ♠ Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f : x \longmapsto (3-x){\cdot}\frac{1}{x}$ (2) $g : x \longmapsto x{\cdot}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

C.10

(1) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :

$u(x) = 3 - x$; $v(x) = \frac{1}{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = -1$; $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= -1\times\frac{1}{x} + (3-x){\cdot}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{-1}{x} - \frac{3-x}{x^2}$$
$$= \frac{-x}{x^2} - \frac{3-x}{x^2} = \frac{-x-(3-x)}{x^2} = \frac{-x+x-3}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

(2) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :

$u(x) = x$; $v(x) = x + \frac{1}{x}$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :

$u'(x) = 1$; $v'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + x{\cdot}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)$$
$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2{\cdot}x$$

E.11 ♣ Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous :

$g : x \longmapsto \big(x^2-3\big){\cdot}\sqrt{x}$

On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

C.11 L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :

$u(x) = x^2 - 3$; $v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 2x$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 2{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x} + (x^2-3){\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4{\cdot}x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4{\cdot}x^2+x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{5{\cdot}x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

E.12 ♠ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x) = \big(2x+2\big){\cdot}\sqrt{x}$

(1) Établir que : $f'(4) = \frac{13}{2}$

(2) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

C.12

(1) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 2x + 2$; $v(x) = \sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 2$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v(x) = 2{\cdot}\sqrt{x} + \big(2x+2\big){\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$= 2{\cdot}\sqrt{x} + \frac{2x+2}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{2{\cdot}\sqrt{x}\times2{\cdot}\sqrt{x} + \big(2x+2\big)}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4{\cdot}x + \big(2x+2\big)}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{6{\cdot}x+2}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{2{\cdot}\big(3{\cdot}x+1\big)}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{3{\cdot}x+1}{\sqrt{x}}$$

On en déduit : $f'(4) = \dfrac{3\times4+1}{\sqrt{4}} = \dfrac{12+1}{2} = \dfrac{13}{2}$

(2) De plus, on a la valeur :

$f(4) = (2\times4+2)\times\sqrt{4} = (8+2)\times2 = 10\times2 = 20$

On en déduit l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 :

$$y = f'(4)\cdot(x-4) + f(4)$$
$$y = \frac{13}{2}\cdot(x-4) + 20$$
$$y = \frac{13}{2}\cdot x - 26 + 20$$
$$y = \frac{13}{2}\cdot x - 6$$

E.13 ♣ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

C.13 L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v telles que :

$u(x) = 3 \quad ; \quad v(x) = 2-x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\times(2-x) - 3\times(-1)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{3}{(2-x)^2}$$

E.14 ♣ On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{4}{x^2-2x+3}$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

C.14 la fonction f est définie par le produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 2\cdot x + 3$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x - 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\cdot(x^2-2\cdot x+3) - 4\cdot(2\cdot x-2)}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$
$$= \frac{-8\cdot x+8}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

E.15 ◇ On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{4\cdot x^2+x-3}{3\cdot x^2+2\cdot x-1}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5}{\big(3\cdot x-1\big)^2}$

C.15

- L'expression de la fonction f est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

  $u(x) = 4\cdot x^2 + x - 3 \quad ; \quad v(x) = 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1$

  Ces deux fonctions admettent pour dérivées :

  $u'(x) = 8\cdot x + 1 \quad ; \quad v'(x) = 6\cdot x^2 + 2$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(8\cdot x+1)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-1) - (4\cdot x^2+x-3)\cdot(6\cdot x+2)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$
$$= \frac{\big(24x^3+16x^2-8x+3x^2+2x-1\big) - \big(24x^2+8x^2+6x^2+2x-18x-6\big)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$
$$= \frac{\big(24x^3+19x^2-6x-1\big) - \big(24x^3+14x^2-16x-6\big)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$
$$= \frac{24x^3+19x^2-6x-1-24x^3-14x^2+16x+6}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$
$$= \frac{5x^2+10x+5}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2} = \frac{5\big(x^2+2x+1\big)}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2} = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big(3\cdot x^2+2\cdot x-1\big)^2}$$

- Le polynôme $3\cdot x^2+2\cdot x-1$ du second degré admet pour discriminant :

  $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times3\times(-1) = 4+12 = 16$

  On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

  Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$
$= \dfrac{-2-4}{2\times3}$	$= \dfrac{-2+4}{2\times3}$
$= \dfrac{-6}{6}$	$= \dfrac{2}{6}$
$= -1$	$= \dfrac{1}{3}$

  Ce polynôme admet la factorisation :

$$3\cdot x^2+2\cdot x-1 = 3\cdot\big[x-(-1)\big]\Big(x-\frac{1}{3}\Big) = \big(x+1\big)\big(3\cdot x-1\big)$$

- Simplifions l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big[(x+1)(3\cdot x-1)\big]^2} = \frac{5\big(x+1\big)^2}{\big(x+1\big)^2\cdot\big(3\cdot x-1\big)^2}$$
$$= \frac{5}{\big(3\cdot x-1\big)^2}$$

E.16 ♠ On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$f(x) = \big(x^2-3\cdot x\big)\cdot\sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

C.16

1. La fonction f est définie par :
$f(x)=\left(x^2-3{\cdot}x\right){\cdot}\sqrt{x}$

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x)=x^2-3{\cdot}x \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=2{\cdot}x-3 \quad ; \quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=(2{\cdot}x-3){\cdot}\sqrt{x}+(x^2-3{\cdot}x){\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(2{\cdot}x-3){\cdot}\sqrt{x}{\cdot}2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2-3{\cdot}x}{2\sqrt{x}}=\frac{2{\cdot}x{\cdot}(2{\cdot}x-3)+x^2-3{\cdot}x}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{4{\cdot}x^2-6{\cdot}x+x^2-3{\cdot}x}{2\sqrt{x}}=\frac{5{\cdot}x^2-9{\cdot}x}{2\sqrt{x}}$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un quotient des deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+1 \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$$g'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}=\frac{1{\cdot}\sqrt{x}-(x+1){\cdot}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{2{\cdot}x}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$=\frac{\dfrac{2{\cdot}x-(x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

E.17 ♣ On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{2x^2-2x+3}$

1. Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2. Établir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression : $f'(x)=\dfrac{-6x+3}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$

3. a. Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2} \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

4. En déduire les extrémums de la fonction f.

C.17

1. Le dénominateur étant un polynôme du second degré, son discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times3=4-24=-20<0$
Ce polynôme n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.

On a en déduit que la fonction f est définie pour tout nombre réel : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définie par :
$u(x)=x^2-x+3 \quad ; \quad v(x)=2x^2-2x+3$
qui admette pour dérivée :
$u'(x)=2x-1 \quad ; \quad v'(x)=4x-2$

Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$
$$=\frac{(2x-1)\left(2x^2-2x+3\right)-\left(x^2-x+3\right)\times(4x-2)}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$
$$=\frac{\left(4x^3-4x^2+6x-2x^2+2x-3\right)-\left(4x^3-2x^2-4x^2+2x+12x-6\right)}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$
$$=\frac{\left(4x^3-6x^2+8x-3\right)-\left(4x^3-6x^2+14x-6\right)}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$
$$=\frac{4x^3-6x^2+8x-3-4x^3+6x^2-14x+6}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$
$$=\frac{-6x+3}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$

3. a. Le dénominateur étant strictement positif *(voir question 1)*, le signe de f' ne dépend que de son numérateur. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   b. L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+3}{2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times\dfrac{1}{2}+3}=\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+3}{2\times\dfrac{1}{4}-1+3}=\frac{\dfrac{1-2+12}{4}}{\dfrac{1}{2}+2}$$
$$=\frac{\dfrac{11}{4}}{\dfrac{5}{2}}=\frac{11}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{10}$$

On a le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{11}{10}$	↘	$\frac{1}{2}$

4. Ainsi, la fonction f admet pour maximum $\dfrac{11}{10}$, et atteint son maximum pour $x=\dfrac{1}{2}$.

E.18 ♡ Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x \in \left[100\,;+\infty\right[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300\times1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Étude du prix P proposé par le fournisseur.

1. Montrer que : $P'(x) = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $\left[100\,;+\infty\right[$.

2. Donner le sens de variations de la fonction P sur $\left[100\,;+\infty\right[$.

Partie B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme)*.
Cette somme est donc égale à :
$S(x) = x\cdot P(x)$ pour $x \in \left[100\,;+\infty\right[$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $\left[100\,;+\infty\right[$:
$$S'(x) = \frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

2. Montrer que pour tout x appartenant à $\left[100\,;+\infty\right[$:
$$S(x) = x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}$$

C.18 **Partie A**

1. L'expression de la fonction P est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x+300$; $v(x) = x+100$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1$; $v'(x) = 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction P' dérivée de la fonction P :

$$P'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{1\cdot(x+100)-(x+300)\cdot 1}{(x+100)^2}$$
$$= \frac{x+100-x-300}{(x+100)^2} = \frac{-200}{(x+100)^2}$$

2. Le quotient définissant l'expression de la fonction P' est strictement négatif sur $\left[100\,;+\infty\right[$.
On en déduit que la fonction P est strictement décroissante sur $\left[100\,;+\infty\right[$.

Partie B

1. La fonction S est définie comme le produit de la fonction u et P où la fonction u est définie par :
$u(x) = x$; $u'(x) = 1$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction S' dérivée de la fonction S :

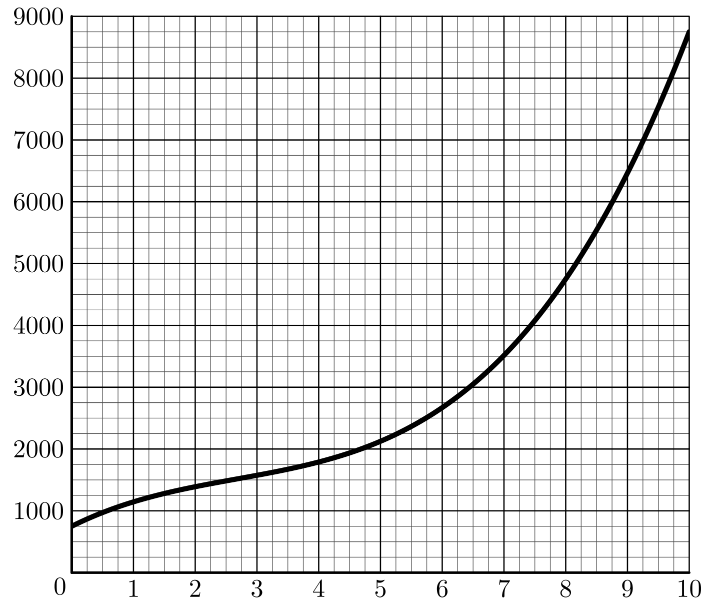
$$S(x) = u'(x)\cdot P(x) + u(x)\cdot P'(x)$$
$$= 1\cdot\frac{x+300}{x+100} + x\cdot\Big[-\frac{200}{(x+100)^2}\Big] = \frac{x+300}{x+100} - \frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$
$$= \frac{(x+300)(x+100)}{(x+100)^2} - \frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$
$$= \frac{x^2+100\cdot x+300\cdot x+30\,000}{(x+100)^2} - \frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$
$$= \frac{x^2+400\cdot x+30\,000}{(x+100)^2} - \frac{200\cdot x}{(x+100)^2}$$
$$= \frac{x^2+400\cdot x+30\,000-200\cdot x}{(x+100)^2} = \frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

2. On a les transformations algébriques suivantes :
$$x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100} = x+200-\frac{20\,000}{x+100}$$
$$= \frac{(x+200)(x+100)}{x+100} - \frac{20\,000}{x+100}$$
$$= \frac{x^2+100\cdot x+200\cdot x+20\,000}{x+100} - \frac{20\,000}{x+100}$$
$$= \frac{x^2+300\cdot x+20\,000-20\,000}{x+100} = \frac{x^2+300\cdot x}{x+100}$$
$$= \frac{x\cdot(x+300)}{x+100} = x\cdot\frac{x+300}{x+100} = x\cdot P(x)$$

E.19 ♣ L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p\cdot x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
   $y = 400{\cdot}x$.
   Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

   a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
   $y = 680{\cdot}x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

   b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right[$ par :
   $B(x) = 680{\cdot}x - C(x)$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, on a :
   $B'(x) = -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180$

   c. Étudier les variations de la fonction B sur $\left[0\,;10\right]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

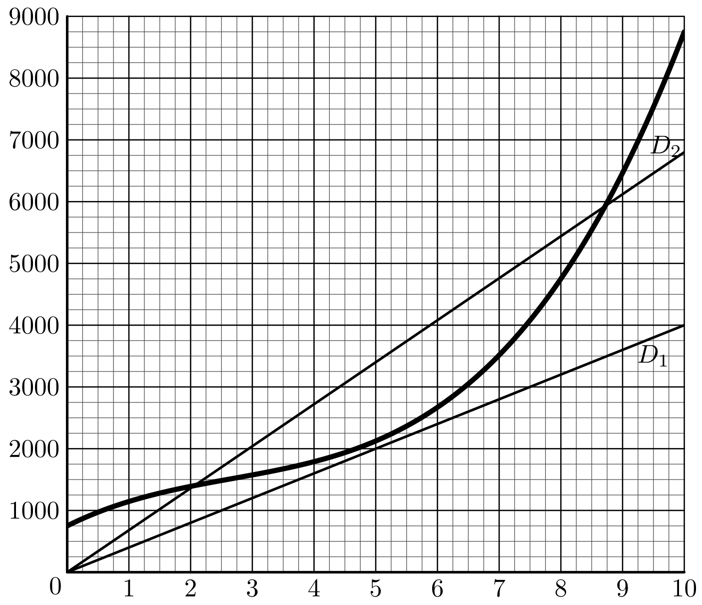
On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $\left]0\,;10\right]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;10\right]$, on a : $C'_M(x) = \dfrac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;10\right]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $\left]0\,;10\right]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

C.19 **Partie A**



1. En traçant la droite D_1, on observe que la courbe de la recette reste toujours inférieure au coût de production : aucun bénéfice ne sera réalisé.

2. a. Des bénéfices seront réalisés lorsque la courbe des coûts de production se situe sous la courbe des coûts des recettes.
   Ainsi, l'entreprise va réaliser des bénéfices lorsqu'il produira entre 2 et 8,75 kilomètre de tissu.

   b. La fonction B admet pour expression :
   $$\begin{aligned} B(x) &= 680{\cdot}x - C(x) \\ &= 680{\cdot}x - \big(15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750\big) \\ &= 680{\cdot}x - 15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 - 500{\cdot}x - 750 \\ &= -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 750 \end{aligned}$$
   Ainsi, la fonction B admet pour dérivée la fonction B' dont l'expression est :
   $$\begin{aligned} B'(x) &= -15{\cdot}(3{\cdot}x^2) + 120{\cdot}(2{\cdot}x) + 180 \\ &= -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180 \end{aligned}$$

   c. Le polynôme du second degré définissant la fonction B' admet pour discriminant :
   $$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 240^2 - 4{\times}(-45){\times}180 \\ &= 57\,600 + 32\,400 = 90\,000 \end{aligned}$$
   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{90\,000} = 300$.
   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240-300}{2{\times}(-45)} = \frac{-540}{-90} = 6$$

   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-240+300}{2{\times}(-45)} = \frac{60}{-90} = -\frac{2}{3}$$

   Le coefficient du second degré étant strictement négatif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
$-45x^2+240x+180$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On a les images suivantes par la fonction B :
   - $B(0) = 680{\times}0 - C(0) = -750$
   - $$\begin{aligned} B(6) &= 680{\times}6 - \big(15{\times}6^3 - 120{\times}6^2 + 500{\times}6 + 750\big) \\ &= 4080 - (3240 - 4320 + 3000 + 750) \\ &= 1410 \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} B(10) &= 680{\times}10 - \big(15{\times}10^3 - 120{\times}10^2 + 500{\times}10 + 750\big) \\ &= 6800 - 15000 + 12000 - 5000 - 750 \\ &= -1950 \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de signes de la fonction B' sur l'intervalle $\left[0\,;\,10\right]$ ainsi que le sens de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

x	0		6		10
Signe de B'		$+$	0	-	
Variation de B	-750	$\nearrow$	1410	$\searrow$	-1950

Partie B

(1) La fonction C_M admet pour expression :

$$C_M(x) = \frac{15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750}{x}$$

Ainsi, la fonction C_M est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x + 750 \quad ; \quad v(x) = x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 45{\cdot}x^2 - 240{\cdot}x + 500 \quad ; \quad v'(x) = 1$$

En utilisant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient l'expression de la fonction C'_M :

$$C'_M(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(45{\cdot}x^2-240{\cdot}x+500)\times x-(15{\cdot}x^3-120{\cdot}x^2+500{\cdot}x+750)\times 1}{x^2}$$

$$= \frac{45{\cdot}x^3 - 240{\cdot}x^2 + 500{\cdot}x - 15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 - 500{\cdot}x - 750}{x^2}$$

$$= \frac{30{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 - 750}{x^2}$$

Montrons que cette expression coïncide avec celle proposée :

$$\frac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \frac{(30{\cdot}x - 150)(x^2+x+5)}{x^2}$$

$$= \frac{30{\cdot}x^3 + 30{\cdot}x^2 + 150{\cdot}x - 150{\cdot}x^2 - 150{\cdot}x - 750}{x^2}$$

$$= \frac{30{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 - 750}{x^2}$$

$$= C'_M(x)$$

(2) (a) Le polynôme $x^2{+}x{+}5$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times1\times5 = 1 - 20 = -19$$

Le discriminant étant strictement négatif et son coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Les facteurs 30, $x^2{+}x{+}5$ et x^2 étant strictement positif, on en déduit que le signe de C'_M ne dépend que du signe du facteur $x{-}5$.

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant de la fonction C'_M qui permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction C_M :

x	0		5		10
Signe de C'_M	‖	-	0	+	
Variation de C_M	‖	↘	425	↗	875

(b) • D'après le tableau de variation, le coût moyen de production est minimum obtenu lorsque l'entreprise produit 5 kilomètres de tissu et vaut alors 425.

$$C_M(5) = 425$$

• Le coût total de production a alors pour valeur :

$$C(5) = 15\times5^3 - 120\times5^2 + 500\times5 + 750$$
$$= 1875 - 3000 + 2500 + 750 = 2125$$