

Repart
11h25

Exercice 1

1- X peut prendre des valeurs allant de 0 à n .

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

Le lancer d'une pièce est en réalité une expérience de Bernoulli de probabilité p ($P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$) on essaie donc "pile" ou succès et "face" si l'échec.

Ainsi X suit une loi binomiale car les lancers sont indépendants, et on a en réalité une succession d'épreuves de Bernoulli.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{de } n \text{ épreuves}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \\ &= np(p + 1 - p)^{n-1} = np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{(n-2)-k} \\ &= n(n-1) p^2 \times (1)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{Or } E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

D'où $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygas.

$$\begin{aligned} V(X) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np((n-1)p + 1 - np) \\ &= np(np - p + 1 - np) \\ &= (1-p)np \end{aligned}$$

2- Toujours d'après la formule de Koenig-Huygas :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } E(X^2) &= V(X) + E(X)^2 \\ &= (1-p)np + np^2 \\ &= np(1-p + np) \\ &= np(1 - (1-n)p) \end{aligned}$$

$$3- P(X=0 | X=n) = 1$$

En effet dans l'urne n°0, il n'y a que des boules rouges.

$$P(X=0 | X=n) = 0$$

En effet dans l'urne n°n, il n'y a aucune boule rouge.

On voit bien que X et Y ne sont pas indépendantes car la valeur de X change la probabilité $P(Y=0)$.

$$4- Soit k \in [0, n]$$

Dans l'urne n°k, il y a k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges

Soit V l'événement "je tire une verte" alors $P(V) =$

$\frac{k}{n} \leftarrow \text{nombre de probabilités}\right.$
 $n \leftarrow \text{nombre de cas totaux}$

$$\text{D'où } P(Y=1 | X=k) = \frac{k}{n}$$

5- $(X=k)$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \sum_{k=0}^n P(X=k) P(Y=1 | X=k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X=k) \times \frac{k}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^n k P(X=k)}{n} = \frac{E(X)}{n}$$

$$\text{On sait bien } P(Y=1) = \frac{E(X)}{n}.$$

6 - Y suit une loi de Bernoulli de probabilité $p' = \frac{E(X)}{n}$.

$$P(Y=1) = \frac{E(X)}{n} = p' \quad P(Y=0) = 1-p' = 1 - \frac{E(X)}{n}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^1 k P(X=k) \\ &= 0 \times (1-p') + 1 \times p' \\ &= p' = \frac{E(X)}{n} \end{aligned}$$

$$7 - E(XY) = \sum_{k=0}^n k P(XY=k) = \sum_{k=0}^n k P(XY=k)$$

Or $(Y=0, Y=1)$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(XY=k) &= P(XY=k | Y=0) P(Y=0) + P(XY=k | Y=1) P(Y=1) \\ &\quad = 0 \quad \text{car } k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(XY=k) &= P(XY=k \cap Y=1) \\ &= P(X=k \cap Y=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^n k P(X=k \cap Y=1) = \\ &= \sum_{k=1}^n k P(X=k) P(Y=1 | X=k) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(X=k) \times \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n [k^2 P(X=k)] \times \frac{1}{n} = \frac{E(X^2)}{n} \end{aligned}$$

$$8 - \text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n}$$

$$= \frac{E(x^2) - E(x)^2}{n}$$

$$\text{Dac} \text{ Cov}(x, y) := \frac{y(x)}{n} = (1-p)p$$

9- def expeY(n):

| L = []

| for i in range(n):

| | a = random.rand()

| | if a < p:

| | | L.append("v")

| | else:

| | | L.append("r")

| y = L[random.randint(0, n-1)]

10- def espY(nb, n)

| Somme = 0

| for i in range(nb):

| | Somme = Somme + expeY(n)

| return Somme / nb

A n'est pas défini dans mon programme

11- Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n des variables indépendantes et suivant la même loi que X .

$P(|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - E(x)| \geq \varepsilon) = P(|\sum_{i=1}^n x_i - nE(x)| \geq n\varepsilon)$

$$= n P(|x_i - E(x)| \geq n\varepsilon) \text{ avec } i \in \{1, \dots, n\}$$

car x_1, \dots, x_n sont indépendantes

Or $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i$ suit la même loi que X donc $E(x_i) = E(x)$

D'après la loi de Bézoutine - Tchebytchev :

$$\wedge P(|X_i - E(X_i)| \geq n\varepsilon) \leq n \frac{V(X_i)}{n^2 \varepsilon^2}$$
$$\leq \frac{V(X_i)}{n \varepsilon^2}$$

$$\text{On a bien } P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{n \varepsilon^2}.$$

12. Cette inégalité montre bien que plus n grand, plus la probabilité que la somme des réels la moyenne des n réalisations de X s'éloigne de $E(X)$ est petite.

Donc la moyenne d'un grand nombre de réalisations de X s'approche, au voisinage de la valeur réelle de l'espérance.

Problème : Étude de l'interpolation

18. On dispose de $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in [-1, 1]^{n+1}$.

Soit L_i le polynôme de Lagrange associé au point x_i .

$$L_i = \prod_{0 \leq j \leq n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Les L_i sont de degrés n .

$$\tilde{L}_i(x_j) = \sum_{k=0}^n c_{ik} \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$19. P = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x_i) &= \sum_{j=0}^n f(x_j) \tilde{L}_i(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^n f(x_j) S_{i,j} = f(x_i) \end{aligned}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i)$$

$$20. L_0 = \frac{x}{-1} \times \frac{x-1}{-2} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$L_1 = \frac{x+1}{1} \times \frac{x-1}{-1} = -[(x+1)(x-1)] = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$$

$$L_2 = \frac{x+1}{2} \times \frac{x}{1} = \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{S/T}$$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{2} \quad f(x_1) = f(0) = 1 \quad f(x_2) = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} L_0 + L_1 + \frac{1}{2} L_2 \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x + 1 - x^2 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \end{aligned}$$

$$\boxed{P = -\frac{1}{2}x^2 + 1}$$

21- Soit $t \in \{0, \dots, n\}$

$$P = \sum_{i=0}^t f(x_i) L_i$$

P est de degré inférieur ou égal à n car $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ L_i est de degré n . $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Supposons P' de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

$$P'(x_i) = f(x_i)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) - P'(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Dès le polynôme $P - P'$ admet $n+1$ racines car il est de degré inférieur ou égal à n .

On arrive à une contradiction, P est unique.

22- $T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos(n \arccos(x))$$

Soit $x \in [-1, 1]$.

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos((n+2) \arccos(x)) + \cos(n \arccos(x))$$

$$= 2 \cos\left(\frac{(n+2-n) \arccos x}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2+n) \arccos x}{2}\right)$$

$$= 2 \cos(\arccos x) \cos((n+1) \arccos x)$$

$$= 2 \times T_{n+1}(x)$$

23- $T_0 = 1$, T_0 est la fonction constante égale à 1.

$T_1 = \cos(\arccos x) = x$, T_1 est la fonction identité.

$$T_2 = \cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$$

Q/F

$$T_3 = \cos(3 \arccos x) = \cos(2 \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(2 \arccos x) \sin(\arccos x)$$

$$T_3 = x(2x^2 - 1) - \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-(2x^2-1)^2}$$

$$= x(2x^2 - 1) - \sqrt{\dots}$$

$$= 2x^3 - x - \sqrt{4x^6 - 8x^4 + 4x^2}$$

$$= 2x^3 - x - \sqrt{4x^2(x^4 - 2x^2 + 1)}$$

$$= 2x^3 - x - 2x(x^2 - 1)$$

$\therefore T_3$ est la fraction identique

24-

$$25. \cos(n \arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x) = \frac{k\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Exercise 2