VERON

Mathis

821

Devoir surveillé - Mathématiques

Départ 11h25

Exercice 1

1- X peut prendre des valeurs allant de 0 à n.

$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

Le lancer d'une pièce est en réalité une expérience de Bernoulli de probabilité p ($P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$) on associe donc "pile" au succès et "face" à l'échec.

Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) car les lancers sont indépendants et on a en réalité une succession d'épreuves de Bernoulli.
de n épreuves

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= np(p+1-p)^{n-1} = np$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{(n-2)-k}$$

$$= n(n-1)\, p^2 \times (1)^{n-2}$$

Or $E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$

Donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens.

$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= np((n-1)p + 1 - np)$

$= np(np - p + 1 - np)$

$= (1-p)np$

2- Toujours d'après la formule de Koenig-Huygens :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

D'où $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

$= (1-p)np + np^2$

$= np(1 - p + np)$

$= np(1 - (1-n)p)$

3- $P(Y=0 \mid X=0) = 1$

En effet dans l'urne n° 0 il n'y a que des boules rouges.

$P(Y=0 \mid X=n) = 0$

En effet dans l'urne n° n il n'y a aucune boule rouge.

On voit bien que X et Y ne sont pas indépendantes car la valeur de X change la probabilité $P(Y=0)$.

4- Soit $k \in [\![0, n]\!]$

Dans l'urne n° k, il y a k boules vertes et (n-k) boules rouges

Soit V l'évènement "je tire une verte" alors $P(V) = \dfrac{k}{n}$ ← nombre cas favorables / ← nombre de cas totaux

Donc $P(Y=1 \mid X=k) = \dfrac{k}{n}$

5- $(X=k)_{0 \leq k \leq n}$ forme un système complet d'évènements.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, P(Y=1 \mid X=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times \dfrac{k}{n}$

2/2

$= \cancel{\dfrac{\sum k\, P(X=k)}{}}$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)}{n} = \frac{E(X)}{n}$$

On a bien $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n}$.

6- Y suit une loi de Bernoulli de probabilité $p' = \dfrac{E(X)}{n}$.

$P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n} = p$ $\quad P(Y=0) = 1-p = 1 - \dfrac{E(X)}{n}$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{1} k\, P(X=k)$$

$$= 0 \times (1-p) + 1 \times p)$$

$$= p' = \frac{E(X)}{n}$$

7- $E(XY) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(XY=k) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(XY=k)$

Or $(Y=0, Y=1)$ forme un système complet d'évènements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(XY=k) = \underbrace{P(XY=k \mid Y=0)}_{\substack{=0 \\ \text{car } k \in \{1, \dots, n\}}} P(Y=0) + P(XY=k \mid Y=1)\, P(Y=1)$$

$$P(XY=k) = P(XY=k \cap Y=1)$$

$$= P(X=k \cap Y=1)$$

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(X=k \cap Y=1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\, P(X=k)\, P(Y=1 \mid X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\, P(X=k) \times \frac{k}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [k^2\, P(X=k)] \times \frac{1}{n} = \frac{E(X^2)}{n}$$

8- $\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n}$$

$$= \frac{E(X^2) - E(X)^2}{n}$$

Donc $Cov(X, Y) = \frac{V(X)}{n} = (1-p)p$

9-
```
def expeY(n):
    L = [ ]
    for i in range(n)
        a = random.rand( )
        if a < p:
            L.append("v")
        else:
            L.append("r")
    Y = L[random.randint(0, n-1)]
```

10-
```
def espY(nb, n)
    Somme = 0
    for i in range(nb)
        Somme = Somme + expeY(n)
    return Somme / nb
```

~~n n'est pas défini dans mon programme~~

11- Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Soient $X_1, X_2, ... X_n$ des variables indépendantes et suivant la même loi que X.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nE(X)\right| \geq n\varepsilon\right)$$

$$= n\,P(|X_i - E(X)| \geq n\varepsilon) \text{ avec } i \in \{1, ..., n\}$$

car $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes

Or $\forall i \in \{1, ..., n\}$ X_i suit la même loi que X donc $E(X) = E(X_i)$

D'après la loi de Bienaimé - Tchebytchev :

$$n\, P(|X_i - E(X)| \geq n\varepsilon) \leq n \frac{V(X)}{n^2 \varepsilon^2}$$

$$< \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$$

On a bien $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$.

12 - Cette inégalité montre bien que plus n grandit, plus la probabilité que ~~la somme des réal.~~ la moyenne des n réalisations de X s'éloigne de $E(\cdot)$ est petite.
Donc la moyenne d'un grand nombre de réalisations de X s'approche, avoisine la valeur réelle de l'espérance.

Problème : Étude de l'interpolation

18 - On dispose de $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in [-1, 1]^{n+1}$.
Soit L_i la famille des polynômes de Lagrange associés au point x_i :

$$L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Les L_i sont de degrés n.

$\widetilde{L_i}(x_j) = \delta_{ij}$ càd $= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$

19 - $P = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$

$$\widetilde{P}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \widetilde{L_i}(x_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \delta_{i,j} = f(x_j)$$

$\forall j \in \{0, \dots, n\}\quad P(x_j) = f(x_j)$

20 - $L_0 = \frac{X}{-1} \times \frac{X-1}{-2} = \frac{X(X-1)}{2} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$

$L_1 = \frac{X+1}{1} \times \frac{X-1}{-1} = -[(X+1)(X-1)] = -(X^2-1) = -X^2+1$

$L_2 = \frac{X+1}{2} \times \frac{X}{1} = \frac{1}{2}(X^2+X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$

$f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{2}$ $\quad f(x_1) = f(0) = 1$ $\quad f(x_2) = f(1) = \frac{1}{2}$

$$P = \frac{1}{2} L_0 + L_1 + \frac{1}{2} L_2$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1 - x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$\boxed{P = -\frac{1}{2}x^2 + 1}$$

21 - Soit $i \in \{0, \dots, n\}$

$P = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$

P est de degré inférieur ou égal à n car $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ L_i est de degré n. $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Supposons P' de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $P'(x_i) = f(x_i)$

~~$\forall i \in \{0, \dots, n\}$~~ $P(x_i) - P'(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$

Donc le polynôme $P - P'$ admet n racines or, il est de degré inférieur ou égal à n.

On arrive à une contradiction, P est unique.

22 - $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$x \to \cos(n \arccos(x))$

Soit $x \in [-1, 1]$.

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos((n+2)\arccos(x)) + \cos(n \arccos(x)).$$
$$= 2\cos\left(\frac{(n+2-n)\arccos x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2+n)\arccos x}{2}\right)$$
$$= 2\cos(\arccos x)\cos((n+1)\arccos x)$$
$$= 2x\, T_{n+1}(x)$$

23 - $T_0 = 1$, T_0 est la fonction constante égale à 1.

$T_1 = \cos(\arccos x) = x$, T_1 est la fonction identité.

$T_2 = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$

6/7

$T_3 = \cos(3\arccos x) = \cos(2\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(2\arccos x)\sin(\arccos x)$

$T_3 = x(2x^2-1) - \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-(2x^2-1)^2}$

$\cancel{= x(2x^2-1) - \sqrt{\ldots}}$

$= 2x^3 - x - \sqrt{4x^6 - 8x^4 + 4x^2}$

$= 2x^3 - x - \sqrt{4x^2(x^4-2x^2+1)}$

$= 2x^3 - x - \sqrt{4x^2(x^2-1)^2}$

$= 2x^3 - x - 2x(x^2-1)$

$= x$, T_3 est la fonction identité

24 -

25 - $\cos(n \arccos(x)) = 0 \iff n \arccos(x) = \pi$

$\iff \arccos x = \frac{\pi}{n}$

Exercice 2