Aufgabe 1
Vermutung:
$(2a - 1)^n - 1$ ist für a, n € $\mathbb{N}$ und a > 0 immer gerade.

Tatsachen:
I 2a ist für jedes a € $\mathbb{N}$ > 0 gerade
II Eine gerade Zahl ist von zwei ungeraden Zahlen umgeben
III da die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade ist, ist die Summe aller gerader Anzahlen von ungeraden Zahlen gerade
IV da die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist und die Summe aller gerader Anzahlen von ungeraden Zahlen gerade ist, ergibt eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen immer eine ungerade Zahl

Schlussfolgerung/Beweis:
Aufgrund der 4 Tatsachen ergibt sich, dass jede der Zahlen aus $(2a - 1)^n - 1$ gerade ist. Im Einzelnen betrachtet deshalb, weil 2a immer gerade Werte ergibt. Durch das Dekrementieren wird diese Zahl ungerade, wie in Tatsache II beschrieben. Für die Potenz betrachten wir uns die Tatsachen III und IV. Beim Potenzieren werden diese ungeraden Zahlen mit einer ungeraden Zahl multipliziert, also eine ungerade Zahl ungerade oft addiert. Deshalb bleiben ungerade Zahlen bei jedem Exponent ungerade. Durch das erneute Dekrementieren wird die Zahl wieder gerade. Somit müssen alle Ergebnisse gerade sein.

Aufgabe 2
(IA)
$a_1 = 2$
$a_2 = 3/2$
$a_3 = 4/3$
$a_4 = 5/4$
$a_5 = 6/5$

(IS)
$a_{n+1} = 2 - (1 / a_n)$

(IV)
$a_n = (n + 1) / n$
$(n + 1) / n = 2 - 1 / (n / (n - 1))$ / *(n / (n - 1))
$(n^2 + n) / (n^2 - n) = 1$ / n ausklammern und kürzen

$(n + 1) / (n - 1) = 1$ $\quad / *(n - 1)$

$n + 1 = n - 1$

Aufgabe 3

$n \geq 1$ $B^n = \{b_1, b_2 ... b_n \mid b_i € \{0; 1\}, 1 \leq i \leq n\}$

B^n ist die Menge aller Bitstrings der Länge n.

Induktionsbeweis für $B^n = 2^n$:

(IA) $n_1 = 2, n_2 = 8$

(IV) $B^n = 2^{n-1} * 2$

(IS) $B^n = 2B^{n-1}$

Beweis:

$2^8 = 2B^{8-1}$

$2^8 = 2B^7$ $\quad / \log_2$

$8 = \log_2(B) + 7$ $\quad / -7$

$1 = \log_2(B)$ $\quad / \log_a(b) = c <=> b = a^c$

$B = 2^1$

$B = 2$