Äquivalenzrelationen & (Halb)ordnungen

Def: Sei R eine binäre Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dann heißt R Äquivalenzrelation.

Beispiel:

Sei $A =$ „Menge aller Waren eines Supermarkts"

$R = \{(x,y) \in A \times A \mid x$ hat den gleichen Preis wie $y\}$

Beispiel 2:

Sei $B =$ „Menge aller Menschen"

$S = \{(x,y) \in B^2 \mid x$ ist Freund von $y\}$

$\Rightarrow S$ ist eine Äquivalenzrelation

Beispiel 3:

Sei $L = \{H \mid H$ ist aussagenlogische Formel$\}$

$\equiv = \{(H_1, H_2) \in L^2 \mid H_1$ ist logisch äquivalent zu $H_2)$

$\Rightarrow$ Ist eine Äquivalenzrelation

Beispiel 4:

Sei $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\sim \subseteq \{((a,b),(c,d)) \in B^2 \mid a \cdot d = b \cdot c\}$, dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

reflexiv: $(a,b) \sim (a,b)$, da $a \cdot b = b \cdot a$

symmetrie: $(a,b) \sim (c,d)$, dann $a \cdot d = b \cdot c$

$\Rightarrow c \cdot b = d \cdot a$

$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

transitiv: $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$, dann $a \cdot d = b \cdot c$ und $cf = de$. Also gilt $adf = bcf$ und mit einsetzen $adf = bde$ gekürzt $af = be$. Somit $(a,b) \sim (e,f)$

Def:

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation über A und $a \in A$. Dann heißt
$$[a]_\sim = \{ b \in A \mid a \sim b \}$$
die Äquivalenzklasse von a (bzgl. $\sim$).
Die Elemente in $[a]_\sim$ heißen Repräsentanten von $[a]_\sim$.

Def:

Sei $A \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Eine Zerlegung oder Partition von A ist eine Familie $Z \subseteq \mathcal{P}(A)$ mit

1) $A = \bigcup_{X \in Z} X$

11) $\emptyset \notin Z$

111) Für $M_1, M_2 \in Z$ mit $M_1 \neq M_2$ gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

„disjunkt"

Satz:

Sei $A \neq \emptyset$. Eine beliebige Äquivalenzrelation R über A definiert eine Zerlegung Z von A und umgekehrt legt jede Zerlegung Z von A wieder eine Äquivalenzrelation R von A fest.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $A_a = \{ b \in A \mid aRb \}$ und Z sei die Menge aller Mengen A_a, wobei $a \in A$.

Da R reflexiv ist, kann A_a nicht klar sein und
$$\bigcup_{a \in A} A_a = \bigcup_{X \in Z} X = A$$
Nun ist noch zu zeigen, dass für A_a und A_b mit $A_a \neq A_b$ gilt $A_a \overset{!}{\cap} A_b = \emptyset$

Angenommen es gäbe $A_a \neq A_b$ mit $d \in A_a$ und A_b, dann gilt aRd und bRd. Wegen der Symmetrie auch dRb. Mit der Transitivität aRb. ↯ Damit wäre $A_a = A_b$!

Dieser Widerspruch bedeutet: $A_a \cap A_b = \emptyset$

„$\Leftarrow$" Sei Z eine Zerlegung und $A_x \in Z$. Weiterhin ist $A_x \in Z$ die Klasse von Z, die das Element $x \in A$ enthält. Es kann passieren, dass eine Klasse evtl. mehrere „Namen" hat, da ja mehr als ein Element in A_x vorkommen kann.

Sei $R = \{(a,b) \in A^2 \mid A_a = A_b\}$

Klar: R ist reflexiv, da $A_a = A_b$, d.h. $(a,a) \in R$. Ebenso ist R symmetrisch, denn aus $A_a = A_b$ folgt auch $A_b = A_a$. Aus aRb folgt bRa.

Gilt aRb und bRc, dann bedeutet dies $A_a = A_b$ und $A_b = A_c$, d.h. $A_a = A_c$ und daraus ergibt sich aRc, d.h. R ist transitiv.

$\Rightarrow$ R ist eine Äquivalenzrelation

Def:

Sei R eine binäre Relation über A, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, dann nennt man R eine <u>Halbordnung</u>.

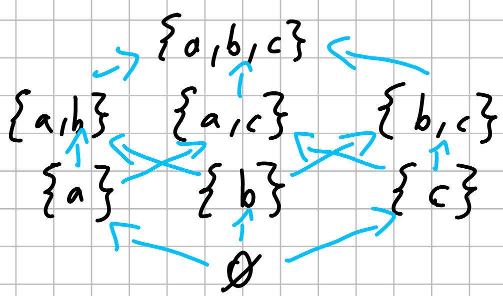
Gilt zusätzlich, dass für alle $a, b \in A$ aRb oder bRa, dann heißt R <u>Ordnung</u>. Statt aRb schreibt man oft $a \leq b$.

Beispiel:

Die übliche „kleiner-gleich" Relation auf den reellen Zahlen ist eine Ordnung.

Beispiel 2:

Sei $A = \{a, b, c\}$, dann kann man die $P(A)$ graphisch wie folgt darstellen:



Dann ist die übliche Teilmengenrelation eine Halbordnung auf $P(A)$, da

reflexiv: $\forall\ X \in P(A)$ gilt $X \subseteq X$

antisymmetrisch: $\forall\ X, Y \in P(A)$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ gilt $X = Y$

transitiv: $\forall\ X, Y, Z \in P(A)$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z$ gilt dass $X \subseteq Z$

Funktionen

Def: Sei $f \subseteq A \times B$ und somit eine Relation zwischen A und B. Gibt es für jedes $a \in A$ maximal ein $b \in B$, sodass $(a,b) \in f$, dann heißt f Abbildung oder Funktion.

Schreibweise: $f: A \to B$

Gilt $(a,b) \in f$ schreibt man auch $f(a) = b$ oder auch $f: a \mapsto b$

Gibt es für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$, sodass $f(a) = b$, dann heißt f total.

Die Menge $D_f = \{a \in A \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } f(a) = b\}$ heißt Definitionsbereich (Domain) von f und $W_f = \{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$ wird Wertebereich (Range) genannt.

Die inverse Relation f^{-1} heißt Umkehrfunktion, wenn sie selbst eine Funktion ist. Dann heißt f invertierbar.

Die Menge $f^{-1}(N) = \{a \in A \mid f(a) \in N\}$ heißt Urbild von N.

Statt $f^{-1}(\{b\})$ schreibt man kurz $f^{-1}(b)$.

Bemerkung:

Diese Definition deckt auch Mehrstellige Funktionen ab, da A ja das kartesische Produkt von Mengen sein kann.

Def: Eine Funktion $f: A \to B$ heißt

- surjektiv, wenn ihr Wertebereich $= B$
- injektiv, wenn $\forall\, a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt

$f(a) \neq f(a')$

- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist

Beispiel:

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+3$ ist bijektiv:

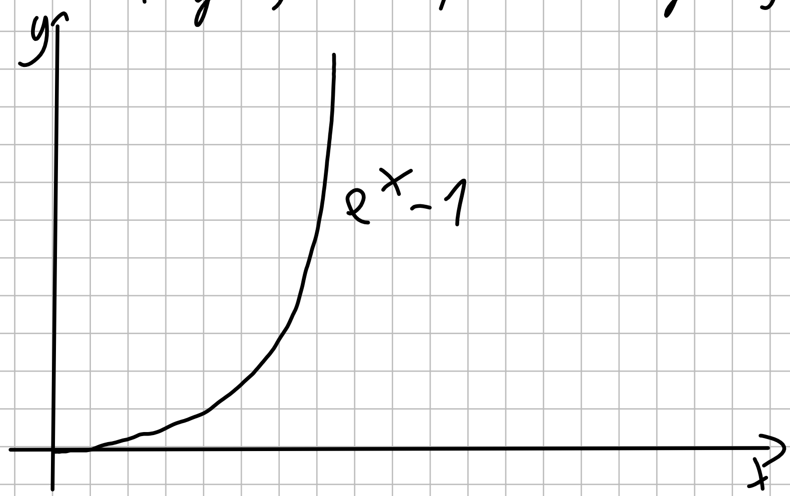
- f ist surjektiv, da für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $f\left(\frac{b-3}{2}\right) = b$
- f ist injektiv, wenn $f(a) = f(a')$, dann folgt $a = a'$ (via Kontraposition)

$$\text{Sei } f(a) = f(a') \Rightarrow 2a+3 = 2a'+3$$
$$\Rightarrow 2a = 2a'$$
$$\Rightarrow a = a'$$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv

Beispiel 2:

Sei $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = e^x - 1$, dann ist g bijektiv



Bem:

Wenn f bijektiv ist, dann auch f^{-1} und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Abzählbare und Überabzählbare Menge

Def: Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Funktion $f: A \to B$ existiert.

Def: Eine Menge A heißt abzählbar, wenn A endlich ist, oder A gleichmächtig $\mathbb{N}$.

Beispiel:

- Jede endliche Menge ist abzählbar
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar vermöge $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerad} \\ \frac{1+n}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

0	1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	-1	2	-2	3	-3

- $\mathbb{Q}^+$ ist abzählbar

	1	2	3	4
1	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$
4	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$

Def: Seien M und I beliebige Mengen, wobei $I \neq \emptyset$. Eine Abbildung $f: I \to M$ heißt Indexfunktion (von I nach M) und I heißt Indexmenge.

Die Werte $f(i)$ werden oft mit m_i bezeichnet und i heißt Index von m_i.

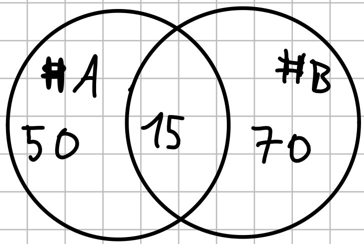
Oft notiert man eine Indexfunktion mit $(m_i)_{i \in I}$ oder (m_i).

Aufgabe 9.1

I) $\#A + \#B - 15 = 65 + 85 - 15$

$= 135$ Idioten

II)



III) $\#(A \cup B \cup C)$ zählt alle Elemente genau einmal. Durch $\#A$, $\#B$ und $\#C$ werden die Überschneidungen doppelt gezählt und deshalb wieder abgezogen. Da $\#(A \cap B \cap C)$ genauso oft gezählt, wie abgezogen wurde, muss diese Mächtigkeit nochmal addiert werden.

Aufgabe 8.2

$A \diamond B$ gdw. $A \cup B = \mathbb{N}$ $\quad \diamond = \{(A,B) \in \mathbb{N}^2 \mid A \cup B = \mathbb{N}\}$

reflexiv: Nein: $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ gerade}\}$ $\quad B = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ungerade}\}$

anti-symmetrisch: Ja, da bei „$\cup$" das Kommutativgesetz gilt.

symmetrisch: Ja, ebenfalls Kommutativgesetz

transitiv: Nein, da A_{Gerad}, $B_{ungerad}$, C_{prim}: Widerspruch bei $A \diamond C$!

Grundlagen der Graphentheorie

Def:
Ein gerichteter Graph $G=(V,E)$ ist ein Paar, das aus einer Menge von Knoten V und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten besteht.

Eine Kante $k=(u,v) \in E$ kann als Verbindung zwischen den Knoten $u,v \in V$ aufgefasst werden. Der Knoten u ist der Startknoten, v der Endknoten.

Knoten, die durch eine Kante verbunden sind heißen „benachbart" oder „adjazent".
Ein Graph (V,E) heißt endlich genau dann, wenn die Menge der Knoten V endlich ist.

Beispiel:

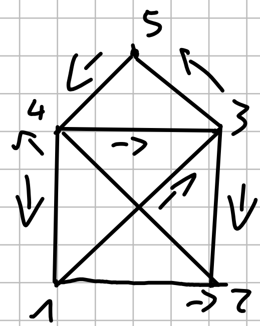
$G_0^V = (V, \emptyset)$ "Nullgraph"

$G_4^V = (V, V \times V)$ "vollständiger Graph" -> Jeder Knoten ist mit jedem verbunden.

Nikolausgraph:

$G_N = (V_N, E_N)$, $V_N = \{1,2,3,4,5\}$ und

$E_N = \{(1,2),(2,4),(4,3),(3,5),(5,4),(4,1),(1,3),(3,2)\}$



Def:
Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph.
Ist die Kantenrelation E symmetrisch, dann ist G ein ungerichteter Graph.

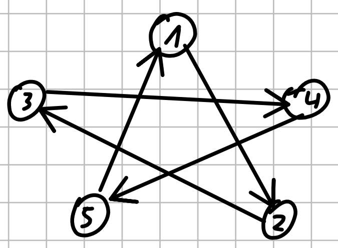
Notation:
bei einem ungerichteten Graph kann eine Kante statt (a,b) auch mit $\{a,b\}$ bezeichnet werden.

Euler Pfad:
Jede Kante darf nur einmal benutzt werden.
- Muss an geradem Punkt starten.

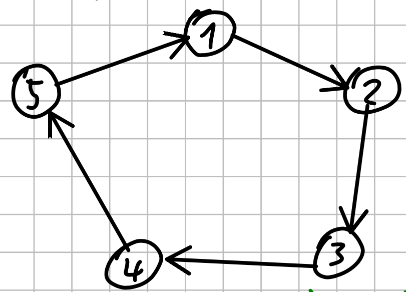
Die graphische Darstellung von Graphen

Beispiele:

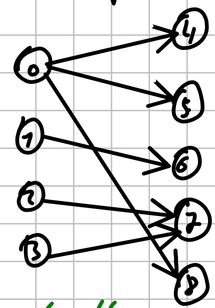
(A) gerichteter Graph mit 5 Knoten



(B) planarer gerichteter Graph mit 5 Knoten



(C) Ein gerichteter bipartiter Graph



Es kann mehrere (gleichwertige) graphische Darstellungen eines Graphens geben.

Def:
Ein Graph G heißt planar, wenn er ohne Überkreuzung von Kanten gezeichnet werden kann.

Wichtig: Es geht um eine überkreuzungsfreie Darstellbarkeit.

Teilgraphen

Def: (Teilgraph) Seien $G=(V_G, E_G)$ und $H=(V_H, E_H)$ Graphen. Gilt $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$, dann heißt H Teilgraph, Untergraph oder Subraph (von G).

Def: (Induzierter Teilgraph) Seien $G=(V,E)$ und $(V' \subseteq V)$ eine Teilmenge von Knoten. Dann heißt $G_{V'}=(V',E')$ mit

$$E'=\{(u,v) \in V' \times V' \mid (u,v) \in E\}$$

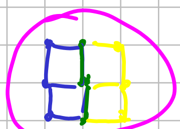
der von V' induzierte Teilgraph.

Boolsche Operationen auf Graphen

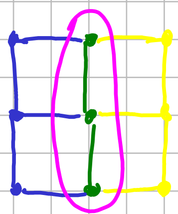
Def: Seien $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ Graphen, dann heißt

- $\rightarrow G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$ „Vereinigungsgraph"
- $\rightarrow G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ „Schnittgraph"
- $\rightarrow \neg G = (V, (V \times V) \setminus E)$ „Komplementgraph"

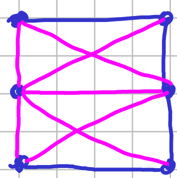
Beispiel:



$H = G \cup G'$



$H = G \cap G'$



$H = \neg G$

Der Grad eines Knotens

Def: (Grad) Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Die Anzahl von Kanten, wobei 'v' Startknoten ist, heißt "Ausgrad von v".

Notation: $outdeg_G(v)$

Die Anzahl von Kanten, wobei 'v' Endknoten ist, heißt "Eingrad von 'v'".

Notation: $indeg_G(v)$

Da sich der Ein- und Ausgrad in ungerichteten Graphen nicht unterscheidet, spricht man hier kurz von Grad:

Notation: $deg_G(v)$

Anmerkung: Ein Knoten 'v' mit $indeg_G('v') = outdeg_G('v') = 0$ heißt <u>isoliert</u>.

Def: (regulär) Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt k-regulär, wenn alle Knoten $'v' \in V$ den Grad k haben.

Wege und Kreise

Sei $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{e_1 \dots e_m\})$ ein ungerichteter Graph, dann heißt eine Folge $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k} \in \{e_1, \dots, e_n\}$ heißt Pfad / Weg (der Länge k) von u nach v, wenn für alle $e_{i_j} = (u_{i_j}, v_{i_j})$ gilt:

1) $e_{i_1} = (u, v_{i_1})$ und $e_{i_k} = (u_{i_k}, v)$
2) für $1 \leq j < k$ ist $v_{i_j} = u_{i_{j+1}}$

Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn für alle Knoten u und v von G ein Pfad von u nach v existiert.

Ein Pfad von u nach v heißt geschlossen, Zyklus oder Kreis, wenn $u = v$ gilt.

Kreisfreie Graphen

Ein Graph heißt kreisfrei/zyklenfrei, wenn er keinen Zyklus der Länge ≥ 1 hat. Ist ein kreisfreier Graph gerichtet, so heißt er DAG.

Ein zyklenfreier Graph heißt Wald. Ein Wald heißt Baum, wenn er zusammenhängend ist.

Theorem:

Ist G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und n-1 Kanten, dann ist G ein Baum.

Beweis:

Ein Graph muss, um einen Zyklus zu haben, mindestens so viele Kanten wie Knoten haben. Da G weniger Kanten als Knoten hat, kann G keinen Zyklus haben und ist deshalb ein Baum.

Datenstrukturen für Graphen

Def: Sei $G=(\{v_1,\dots,v_n\},E)$ ein gerichteter Graph und A_G eine $n \times n$ Matrix $A_G=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ mit

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{falls } (v_i,v_j)\in E\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

Diese Matrix heißt <u>Adjazenzmatrix</u>.

Grundlagen der Algebra

Gruppenbegriff

Def: Ein Paar $(G, \circ)$ heißt Gruppe, wenn

I) „$\circ$" ist eine Funktion der Form $\circ: G \times G \to G$
(Abgeschlossenheit

II) $\forall a, b, c \in G$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ "Assoziativität"

III) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $\forall a \in G$ gilt
$a \circ e = a = e \circ a$ (Existenz des neutralen Elements

IV) $\forall a \in G \; \exists a' \in G$, so dass $a \circ a' = e = a' \circ a$
(Existenz des inversen Elements)

V) Gilt zusätzlich $\forall a, b \in G$ auch $a \circ b = b \circ a$, dann heißt
$(G, \circ)$ kommutative oder abelsche Gruppe.

Beispiel:

$(\mathbb{N}, +)$

I) $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Abgeschlossenheit

II) $\mathbb{N}_1 + (\mathbb{N}_2 + \mathbb{N}_3) = (\mathbb{N}_1 + \mathbb{N}_2) + \mathbb{N}_3$ Assoziativität

III) $\mathbb{N} + 0 = \mathbb{N} = 0 + \mathbb{N}$ Neutrales Element existiert

IV) $5 + a' = 0 \quad / -5$ Es existiert kein Inverses Element

V) $a + b = b + a$ ist gültig Das Paar ist kommutativ

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit '+' sind keine Gruppe.

Verknüpfungstafel

Für eine Gruppe $G(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \circ)$ existiert
eine Gruppentafel:

$\circ$	α	β	γ	δ
α				
β				
γ				
δ				

- Ist diese Achsensymmetrisch, ist G kommutativ/Abelsch
- Verändert sich ein Wert einer Spalte/Zeile nicht, ist dieses Element das neutrale Element

Der Kongruenzbegriff

Def: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo m, wenn $m \mid (a-b)$.

Notation: $a \equiv b \mod m$

Beispiel:

$2 \equiv 4 \mod 2$ $\quad 2 - 4 = -2$ $\quad$ 2 teilt -2

$5 \equiv 7 \mod 2$ $\quad 5 - 7 = -2$ $\quad$ 2 teilt -2

$5 \equiv 8 \mod 3$ $\quad 5 - 8 = -3$ $\quad$ -3 teilt 3