Mathematisches Beweisen

These: Sei $p >=$ eine Primzahl, dann teilt 24 die Zahl p^2-1 glatt.

Beweis:

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ P ist eine Primzahl => ungerade
damit sind $p-1$ & $p+1$ gerade

$p-1$ p $p+1$

Entweder $p-1$, oder $p+1$ sind durch 3 teilbar. Sowohl $p-1$, als auch $p+1$ sind gerade.

Jede 4. Zahl ist durch 4 teilbar. Bei zwei geraden Zahlen muss eine dieser beiden diese Zahl sein.

Damit ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ durch $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ teilbar.

Einfache Tatsachen werden Axiome genannt.

Peano - Axiome:

1) 0 ist eine natürliche Zahl
2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $s(n)$
3) Aus $s(n) = s(m)$ folgt $n = m$
4) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl
5) Jede Menge, in der die 0 erhalten ist und für jedes n auch $s(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

Dieses Axiom wird "Induktionsaxiom" genannt

Der direkte Beweis

Für die Aussageform "wenn p dann q"
wird p als Hypothese (Prämisse) bezeichnet und
q als Konklusion (Konsequenz).

Beispiel:

Wenn eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist, dann ist a gerade

Beweis: Wenn a durch 6 teilbar ist, muss ein $k \in \mathbb{N}$
existieren, für welches gilt:

$a = 6k.$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot k$$
$$= 2(3k)$$

a ist gerade.

Beweis durch Kontraposition

Wir wissen: $p \to q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

(IV) $3^{2n}+7$ ist durch 8 teilbar.

(IS) $3^{2(n+1)}+7 = 3^{2n+2}+7$

$= 9 \cdot 3^{2n}+7$

$= \underbrace{(3^{2n}+7)}_{(IV)} + \underbrace{8 \cdot 3^{2n}}_{\text{Vielfaches von } 8}$

E1) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$; $a_n = \frac{n+1}{n}$

(IS) $a_{n+2} = 2 - \frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

Beweis durch Widerspruch

Soll $p \to q$ gezeigt werden, so kann man auch wie folgt vorgehen:

I) Annahme: Die Hypothese p ist erfüllt und $\neg q$ ist richtig.

II) Widerspruch wird gestellt: $(p \wedge \neg q) \to \text{false}$

III) Wenn $(p \wedge \neg q) \to \text{false}$ wahr ist, muss die Ursprüngliche Theorie wahr sein.

Beispiel:

Seien $\overbrace{a, b \in \mathbb{N} \text{ gerade}}^{p}$, dann ist auch $\overbrace{ab \text{ gerade}}^{q}$.

Beweis:

Angenommen $a \cdot b$ ist ungerade und a bzw. b gerade.

Dann gibt es ein k, sodass $a = 2k$ ist, also ist $a \cdot b = 2kb$ gerade.

Da aber $a \cdot b$ nicht gerade und ungerade sind, muss $a \cdot b$ gerade sein. $\Rightarrow 2(kb)$ ist immer gerade.

Äquivalenzen

Oft sollen Aussagen der Form $p \to q$ gezeigt werden. Allerdings gibt es auch Aussagen $p \leftrightarrow q$.

Logisch: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Beispiel:

Sei $a \in \mathbb{N}$. Die Zahl $\overbrace{a \text{ ist gerade}}^{p}$ genau dann, wenn $\overbrace{a^2 \text{ gerade}}^{q}$.

Beweis:

Wenn a gerade, dann ex. ein k, sodass $a = 2k$. Also $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, d.h. auch a^2 ist gerade.

Es gilt $a^2 = a \cdot a$ ist gerade. Angenommen a sei ungerade

$a^2 = (2k+1)^2$.

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 4(k^2+k) + 1 \; ↯$$

Da a^2 für ein ungerades a ungerade wäre, muss a gerade sein, damit a^2 gerade ist.

Die Fallunterscheidung

Da $(q \to p) \wedge (\neg q \Rightarrow p) \equiv (\neg q \cup p) \wedge (q \cup p)$

$\equiv (\neg q \cap q) \cup p$

$\equiv p$

Wenn für beide Fälle q und $\neg q$ p gilt, dann gilt p immer.

Beispiel:

Sei $a \in \mathbb{N}$, dann entsteht beim Teilen von a^2 durch 4 entweder der Rest 1 oder 0.

Beweis:

Es gelte $q \triangleq$ „a ist gerade"

Fall q: $k \in \mathbb{N}$, $a = 2k$

$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow a^2$ ist ein Vielfaches von 4.

Fall $\neg q$: $k \in \mathbb{N}$, $a = 2k+1$

$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 4(k^2 + k) + 1$

$\Rightarrow (a-1)^2$ ist ein Vielfaches von 4, womit stehts ein Rest von 1 verbleibt.

Das Taubenschlagprinzip

Beispiel 1:

Reise nach Jerusalem: n Kinder werden auf $k=n-1$ Stühle verteilt: damit sitzen auf min. einem Stuhl $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Kinder.

Beispiel 2:

In einer Gruppe von min. 8 Leuten haben mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag.

Beweis:

Da es nur 7 Wochentage gibt, müssen 8 Personen auf 7 Tage verteilt werden: $\lceil \frac{8}{7} \rceil = 2$.

Beispiel 3:

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $\#A=3$, dann gibt es in A stets zwei Zahlen, deren Summe gerade ist.

Beweis:

Für eine ungerade Zahl werden eine gerade und eine ungerade Zahl benötigt. In A sind entweder 2 Zahlen gerade, oder ungerade sind und somit als Summe eine gerade Zahl haben.

Induktion und induktive Definitionen

Beispiel:

(IV) $\frac{2+a_n}{1+a_n}$ für $a_n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq a_{n+1} \leq 2$

(IS)

$$\frac{2+(a_n+1)}{1+(a_n+1)} = \frac{3+a_n}{2+a_n}$$

Da $(3+a_n) > (2+a_n)$, kann a_{n+1} nie kleiner als 1 sein. Da der Zähler nicht größer als 2x der Nenner sein kann, ist es unmöglich, dass a_{n+1} größer als 2 wird.