Hochschule RheinMain
Wintersemester 2021/2022

FB DCSM
Prof. Dr. Steffen Reith

Übungsklausur zur Vorlesung

Diskrete Strukturen

13. Januar 2022

Name:	Reiß	Vorname:	Yannick
Matrikelnummer:	1291801	Unterschrift:	Yannick Reiß

Die folgende Tabelle ist nicht für Sie bestimmt, sondern für die Punkteverwaltung!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Erreichbare Punkte	8	11	8	8	10	12	45 (+12)
Erreichte Punkte							

- Die Dauer der Klausur beträgt 90 Minuten. Zum Bestehen benötigen Sie 50% der Punkte.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Entfernen Sie insbesondere Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch!
- Sollte es Unklarheiten mit den Aufgabenstellungen geben (z.B. aufgrund sprachlicher Probleme), dann können Sie, zur Klärung dieser Fragen, während der Klausur kurze Fragen stellen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig!
- Die Bindung der Blätter dieser Klausur darf nicht entfernt werden!
- Aufgabe 6 ist eine optionale Zusatzaufgabe.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis auf den Tisch!
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der Note 5 geahndet! Beachten Sie, dass auch elektronische Geräte (z.B. Mobiltelefone) unerlaubte Hilfsmittel darstellen!
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliche Lösungen werden nicht gewertet!
- Jeder Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. Algorithmen jeder Art sind zu kommentieren!
- Von der Vorlesung abweichende Notationen sind zu definieren!
- Am Ende finden Sie drei leere Seiten zur freien Verfügung. Sie können zusätzlich auch die Rückseite der Blätter benutzen, um Lösungen der Aufgaben darauf zu schreiben! Andere Papierbögen sind nicht zulässig!
- Nach der Korrektur Ihrer Klausur können Sie im Rahmen meiner Sprechstunde (oder nach Vereinbarung) in die Korrektur Einsicht nehmen.

Viel Erfolg!

Matrikelnummer: 1291801

Achten Sie in allen folgenden Aufgaben auf eine richtige und ordentliche mathematische Schreibweise (z.B. Mengenklammern). Falsche oder unklare Schreibweisen führen zu (evtl.vollständigen) Punktabzug!

Aufgabe 1 — Grundlagen — (8 Punkte)

Markieren Sie die folgenden Kästchen mit R für richtig und mit F für falsch. Beachten Sie, dass Kreuze als Markierung unzulässig sind!
(Hinweis: Falsche Antworten ergeben keinen Abzug von Punkten!)

- [R] Die Formel $\neg(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge y)$ ist weder eine Kontradiktion noch eine Tautologie.
- [R] Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist auch eine binäre Relation $f \subseteq A \times B$.
- [F] Jeder planare Graph ist zusammenhängend.
- [R] Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.
- [F] Sei $q(x)$ eine beliebige Aussagenform, dann gilt $\neg\forall x q(x) \equiv \exists x(\neg q(x))$.
- [F] Es gibt Gruppen, die kein neutrales Element enthalten.
- [R] Wenn $p > 2$ eine Primzahl und $2 \leq x \leq p-1$, dann sind x und p nicht teilerfremd.
- [R] Wenn $(R, \oplus, \odot)$ ein Ring ist, dann ist $(R, \oplus)$ eine Gruppe.

Aufgabe 2 — Logische Grundlagen und Induktion — (11 Punkte)

1. Gegeben sind die Formeln $H_1(x,y,z) = ((x \to y) \wedge (\neg y \vee x)) \vee z$ und $H_2(x,y) = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \vee y)$. Füllen Sie die folgende Wahrheitswertetabelle für die Formel $H(x,y,z) = H_1 \wedge H_2$ korrekt aus. Verwenden Sie die Wahrheitswerte 1 (wahr) und 0 (falsch).

x	y	z	$(x \to y) \wedge (\neg y \vee x)$	H_1	H_2	H
0	0	0	$1 \wedge 1 = 1$	1	1	1
0	0	1	$1 \wedge 1 = 1$	1	1	1
0	1	0	$1 \wedge 0 = 0$	0	1	0
0	1	1	$1 \wedge 0 = 0$	1	1	1
1	0	0	$0 \wedge 1 = 0$	0	1	0
1	0	1	$0 \wedge 1 = 0$	1	1	1
1	1	0	$1 \wedge 1 = 1$	1	1	1
1	1	1	$1 \wedge 1 = 1$	1	1	1

2. Geben Sie alle Belegungen, die die Formel H wahr machen, als Menge von Tupeln an.

$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Matrikelnummer: 1291801

3. Seien $g(x)$: "‘x ist gerade”’ und $u(x)$: "‘x ist ungerade”’. Formulieren Sie mit Hilfe der Aussageformen g und u eine prädikatenlogische Formel H_G für die folgende Aussage über natürlichen Zahlen:

   "‘Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass n genau dann gerade ist, wenn n nicht ungerade ist”’

   $H_G = g(x) \wedge (\neg u(x))$

4. Sei $q \neq 1$. Wir betrachten nun die Summe der Potenzen von q, d.h.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

   Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ gilt.

   (IA)

$$S_0 = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

   (IV) Sei $q \neq 1$ und $n \geq 0$, dann gilt $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

   (IS) $n \to n+1$:

$$S_{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-(q^{n+1}\, q)}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}\cdot(-q)}{1-q}$$

5. Sei $(1,1,\ldots,1)_2$ die Binärdarstellung, die aus genau n 1-Bits besteht und die die natürliche Zahl x repräsentiert. Verwenden Sie Teilaufgabe 4 um zu belegen, dass $x = 2^n - 1$ gilt.

   (IA) $x = 2^0 - 1 = 0$ (IS) $2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 1$

   (IV) $x = 2^n - 1$

   Verdopplung durch Bit (IV)

Matrikelnummer: 1291801

Aufgabe 3 Mengen und Mengenoperationen (8 Punkte)

1. Gegeben sei die Menge $Z = \{K, U, R, T\}$. Geben Sie alle Elemente von

   $\{A \in \mathcal{P}(Z) \mid \#(A) \text{ gerade}\} =$ $\{K, U\}, \{K, R\}, \{K, T\}, \{U, R\}, \{U, T\}, \{R, T\}$

   an.

2. Seien
   - $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \equiv 0 \bmod 3\}$, durch drei teilbar
   - $B = \{2, 3, 5, 7\}$ und
   - $C = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist keine Primzahl und } p < 20\}$ $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

   Mengen, wobei $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist das Universum. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

   i) $B \cup \overline{(\overline{B} \cup C)} =$ $\{2, 3, 5, 7\}$

   ii) $(A \cap C) \cup B =$ $\{2, 3, 5, 7, 6, 9, 12, 15, 18\}$

3. Seien $B = \{\pi, \delta, \psi\}$, $C = \{\odot, \oplus\}$ und $D = \{0, 1\}$.

   i) Wieviele Elemente sind in B^3 enthalten? $\#(B^3) =$ 27

   ii) Geben Sie

   $C \times C \times C =$ $\{\odot, \odot, \odot\}, \{\odot, \odot, \oplus\}, \{\odot, \oplus, \odot\}, \{\odot, \oplus, \oplus\}, \ldots +$ vollständig $\emptyset$

   an.

   iii) Schreiben Sie alle Elemente der folgenden Menge auf:

   $(D \times D) \circ (D \times D) =$

   Hinweis: Die Verknüpfung $\circ$ bezeichnet die Komposition von Relationen.

Matrikelnummer: 1291801

Aufgabe 4 Relationen und Funktionen (8 Punkte)

Nun definieren wir eine (binäre) Relation "'$\sim$"' auf der Grundmenge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Seien $(x, y), (v, w) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dann gilt

$$(x, y) \sim (v, w) \text{ gdw. } x \cdot y = v \cdot w.$$

1. Welche drei Eigenschaften hat eine Äquivalenzrelation?

   Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

2. Zeigen Sie, dass "'$\sim$"' diese drei Eigenschaften hat:

   Reflexivität: $(x,y) \sim (x,y) \equiv xy = xy$

   Symmetrie: $(x,y) \sim (y,x) \equiv xy = yx$ Kommutativgesetz

   Transitivität: $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

   I $a \cdot b = (cd)$

   II $(cd) = ef$

   I und II gleichsetzen

   $ab = ef$

Matrikelnummer: 1291801

3. Seien nun p und q zwei beliebige Primzahlen. Geben Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse $[(p, q)]_\sim$ explizit an.

4. Beweisen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ dann $[(a, 0)]_\sim = [(0, 0)]_\sim$ gilt.

Aufgabe 5 Graphentheorie und Induktion (10 Punkte)

1. Gegeben sei der ungerichtete Graph $G = (V, E)$.

   i) Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten von G. Geben Sie eine mathematische Beschreibung für die Eigenschaft "'v ist isoliert"'. Führen Sie dazu eine geeignete Aussagenform ein und verwenden Sie diese geeignet.

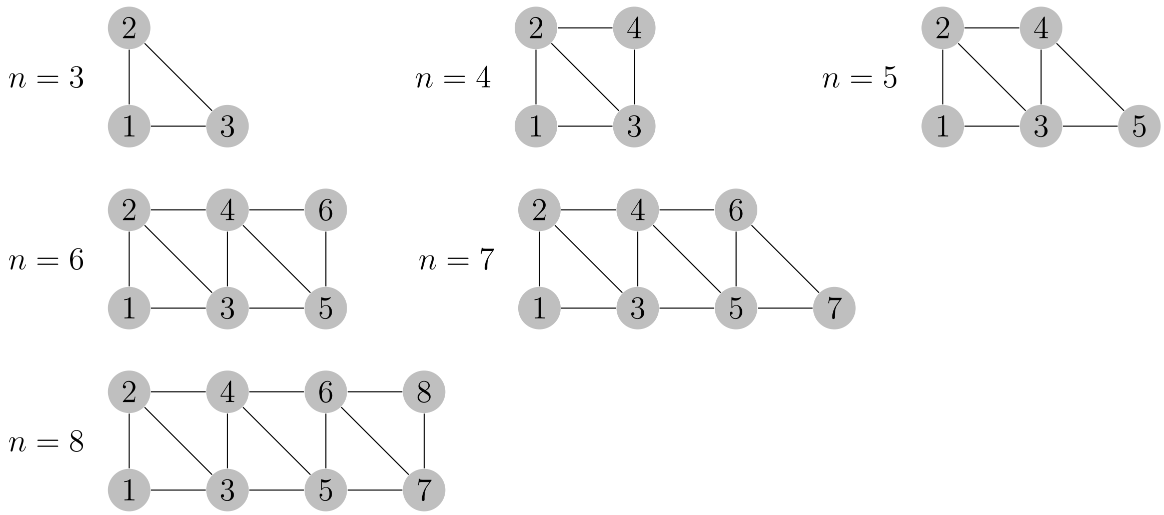
   ii) Sei die Aussagenform "'$\text{path}_G(x, y)$: Es gibt einen Pfad von x nach y"' gegeben. Finden Sie eine prädikatenlogische Formel H_Z, die genau dann wahr ist, wenn G zusammenhängend ist

Matrikelnummer: ____________________________

$H_Z =$

Matrikelnummer: ___________________________

2. Die Familie von ungerichteten Dreiecksgraphen $\mathcal{D} = (D_n)_{n \geq 3}$, wobei $D_n = (V_n, E_n)$, startet mit den folgenden Graphen:



i) Geben Sie zunächst die Knotenmenge des $n$ten Dreiecksgraphen D_n für $n \geq 3$ an:

$V_n =$

Finden Sie nun eine induktive Definition für die Kantenmenge E_n von D_n:

(IA)

(IS)

Matrikelnummer: ________________________

Beweisen Sie nun mit Hilfe einer Induktion, dass für $n \geq 3$ die Anzahl der Kanten im Graphen D_n genau $2 \cdot n - 3$ beträgt.
(IA)

(IV) Die Anzahl der Kanten in D_n beträgt $2 \cdot n - 3$.
(IS) $n \rightarrow n + 1$:

ii) Sind die Graphen D_n für $n \geq 3$ regulär? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 6 Bonusaufgabe (12 Punkte)

1. Nun wird eine (binäre Relation) $\simeq$ auf den natürlichen Zahlen definiert. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, dann

$$a \simeq b \text{ gdw. } a \text{ hat genauso viele Teiler wie } b$$

i) Belegen Sie, dass $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist:
$\boxed{}$:

Matrikelnummer: ____________________________

$\boxed{}$:

$\boxed{}$:

ii) Wie wird die Äquivalenzklasse $[2]_{\simeq}$ umgangssprachlich genannt?

Matrikelnummer: ______________________

2. Geben Sie bei dieser Aufgabe immer möglichst kleine, aber positive, natürliche Zahlen für x an, sodass die angegebene Kongruenz korrekt wird:

   i) $12 \cdot 12 \equiv x \bmod 10$, $x =$ $\boxed{}$

   ii) $11 + 11 \equiv x \bmod 12$, $x =$ $\boxed{}$

   iii) $11 * 11 \equiv x \bmod 12$, $x =$ $\boxed{}$

   iv) $3 + 6 \equiv x \bmod 6$, $x =$ $\boxed{}$

3. Sei $Z = \{0, 3, 6, 9\}$. Wir definieren nun eine Menge T von Dezimalzahlen induktiv wie folgt

   (IA) Alle Ziffern aus Z sind Zahlen aus T.

   (IS) Sei $w \in T$ eine Dezimalzahl und $z \in Z$ eine Ziffer, dann ist auch wz eine Dezimalzahl aus T.

   Sonst sind keine Dezimalzahlen in T enthalten.

   i) Geben Sie drei verschiedene Dezimalzahlen aus T mit genau drei Stellen an.

   ii) Beweisen Sie, dass alles diese Zahlen durch 3 teilbar sind.

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 1

Matrikelnummer: ______________________

Notizen 2

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 3