1 Arithmetik

1.1 Mengen

Die in der Mathematik betrachteten Gegenstände werden oftmals durch Symbole, meistens Buchstaben, bezeichnet. Dabei kennzeichnen manche Symbole feste Dinge, zum Beispiel π das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises. Andere Symbole sind Veränderliche (auch Variable oder Platzhalter genannt), das heißt, sie können jeden Gegenstand einer Klasse von Gegenständen bezeichnen.

In der Mathematik wird jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit eine Menge genannt. Eine Menge ist definiert, wenn feststeht, welche Objekte zu dieser Menge gehören und welche nicht. Die zur Menge gehörenden Objekte heißen ihre Elemente. Mengen werden meistens mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet und die Elemente mit kleinen Buchstaben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

- Durch Aufzählen ihrer Elemente, die in beliebiger Reihenfolge zwischen geschweiften Klammern (Mengenklammern) gesetzt sind und durch Kommata getrennt werden (Schreibweise: {Element 1, Element 2, ...}).
- Durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft (Schreibweise: $\{x|x$ erfüllt Eigenschaft$\}$).

Eine Menge von Punkten heißt Punktmenge.

■ **Beispiele:**

1. $A = \{1, 2, 3\}$ (die Menge A besteht aus den Elementen 1,2 und 3)
2. $B = \{x|x^2 - 1 = 0\}$ (die Menge B besteht aus den Elementen x, für die $x^2 - 1 = 0$ gilt)
3. $B = \{1, -1\}$ (da $x^2 - 1 = 0$ die Lösungen $x = 1$ und $x = -1$ besitzt, kann man die Menge B auch in dieser Form schreiben)
4. $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (die Menge C besteht aus den Elementen $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

Gehört ein Objekt a einer Menge M an, so schreibt man $a \in M$ (gelesen: a ist Element von M). Gehört a nicht zu M, so schreibt man $a \notin M$.

Wenn jedes Element einer Menge M auch Element einer Menge N ist, so nennt man M Teilmenge von N und schreibt $M \subseteq N$. Nach dieser Definition ist offenbar jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Die leere Menge $\emptyset = \{\}$ enthält kein Element.

■ **Beispiele:**

$2 \in A$; $2 \in C$; $4 \in C$; $4 \notin A$; $A \subseteq C$; $\emptyset = \{x|x \neq x\}$

Die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen Elementen, die in A oder in B, also in mindestens einer der beiden Mengen A, B enthalten sind:

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen Elementen, die sowohl in A als auch in B, also gleichzeitig in beiden Mengen A, B enthalten sind:

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ und } x \in B\}$$

A. Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn,* DOI 10.1007/978-3-8348-8258-5_1,

■ **Beispiel:**
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, -1\}$; $\quad A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1\}$

Eine Menge heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente besitzt. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt Mächtigkeit der Menge, bezeichnet mit $|M|$.

■ **Beispiele:**

1. $M = \{2, 4, 6, 8, 10\} \;\Rightarrow\; |M| = 5$
2. $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\} \;\Rightarrow\; |M| = 100$

1.2 Aussageformen und logische Zeichen

1.2.1 Aussageformen

Eine Aussageform ist ein mathematischer Ausdruck, in dem Variable vorkommen.

Aussageformen erhalten einen Wahrheitswert, wenn allen in ihnen vorkommenden Variablen ein Wert zugeordnet wird.

■ **Beispiele:**

1. Die Aussageform „$x - 3 = 5$“ wird zu einer wahren Aussage, wenn man für x die Zahl 8 einsetzt ($x = 8$ ist die Lösung der Gleichung).
2. Die Aussageform „$x^2 = 1$“ wird zu einer wahren Aussage, wenn man für x die Zahl 1 oder -1 einsetzt ($x_{1,2} = \pm 1$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung).
3. Die Aussageform „$x + 1 = 3$“ wird zu einer falschen Aussage, wenn man für x die Zahl 1 einsetzt (denn die Lösung der Gleichung ist $x = 2$).

1.2.2 Logische Zeichen

In der Mathematik ist es häufig sinnvoll, kompliziertere Aussagen mit Hilfe logischer Zeichen zu formalisieren.

Sind A und B Aussagen, dann bedeutet

$A \wedge B$,	dass A und B gelten,
$A \vee B$,	dass A oder B gilt,
$\neg A$ (nicht A),	dass das Gegenteil von A gilt,
$A \Rightarrow B$,	dass B aus A folgt,
$A \Leftrightarrow B$,	dass sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ gelten.

Die logischen Zeichen bezeichnet man auch als Junktoren. Das Symbol $\vee$ ist das nicht ausschließende Oder (also nicht entweder ... oder).

Eine Aussage $A \Rightarrow B$ heißt eine Implikation, man sagt: A impliziert B. Man nennt A die Prämisse, B die Konklusion. Die Prämisse enthält die Voraussetzungen, unter denen die Aussage B gilt.

Gilt $A \Leftrightarrow B$, so sagt man, die beiden Aussagen A und B sind äquivalent oder gleichwertig.

■ **Beispiele:**

1. Für eine natürliche Zahl n ist die Implikation „6 teilt $n \Rightarrow$ 2 teilt n“ wahr. Die umgekehrte Implikation gilt nicht.
2. „6 teilt n“ und „2 teilt n und 3 teilt n“ sind zwei äquivalente Aussagen.

1.2.3 Vollständige Induktion

Mathematische Aussagen müssen in der Regel bewiesen werden. Neben direkten Beweisen und Widerspruchsbeweisen ist eine häufig verwendete Beweismethode die vollständige Induktion. Dieses Beweisverfahren lässt sich bei Aussagen über natürliche Zahlen (vgl. Abschnitt 1.3) anwenden.

Ein Beweis mit vollständiger Induktion, dass eine Aussage $A(n)$ (eine Eigenschaft oder eine Formel) für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ (also von m an) richtig ist, besteht aus drei Schritten:

1. Induktionsanfang (Induktionsverankerung):
   $A(n)$ ist richtig für $n = m$. Dies muss meistens auf direktem Weg nachgewiesen werden.
2. Induktionsannahme (Induktionsvoraussetzung):
   Die Aussage $A(n)$ ist für eine beliebige natürliche Zahl n_0 ($n_0 \geq m$) richtig, es gilt also $A(n_0)$.
3. Induktionsschluss (Induktionsschritt):
   Unter Benutzung der Induktionsannahme wird gezeigt, dass die Aussage $A(n)$ dann auch für $n_0 + 1$ richtig ist, das heißt, aus $A(n_0)$ folgt $A(n_0 + 1)$. Man nennt diesen Schritt auch Schluss von n_0 auf $n_0 + 1$.

Man beachte, dass sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschluss durchgeführt werden müssen. Der Induktionsschluss von n_0 auf $n_0 + 1$ macht den Nachweis der Gültigkeit für $n = m$ (Induktionsanfang) nicht überflüssig. Der Induktionsschluss kann gelingen, auch wenn die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen falsch ist.

■ **Beispiel:**

Behauptung:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis der Behauptung mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens steht 1:

$1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Induktionsannahme:

Für eine beliebige natürliche Zahl n_0 ist die Behauptung richtig:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n_0 = \dfrac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2}$

Induktionsschluss (von n_0 auf $n_0 + 1$):

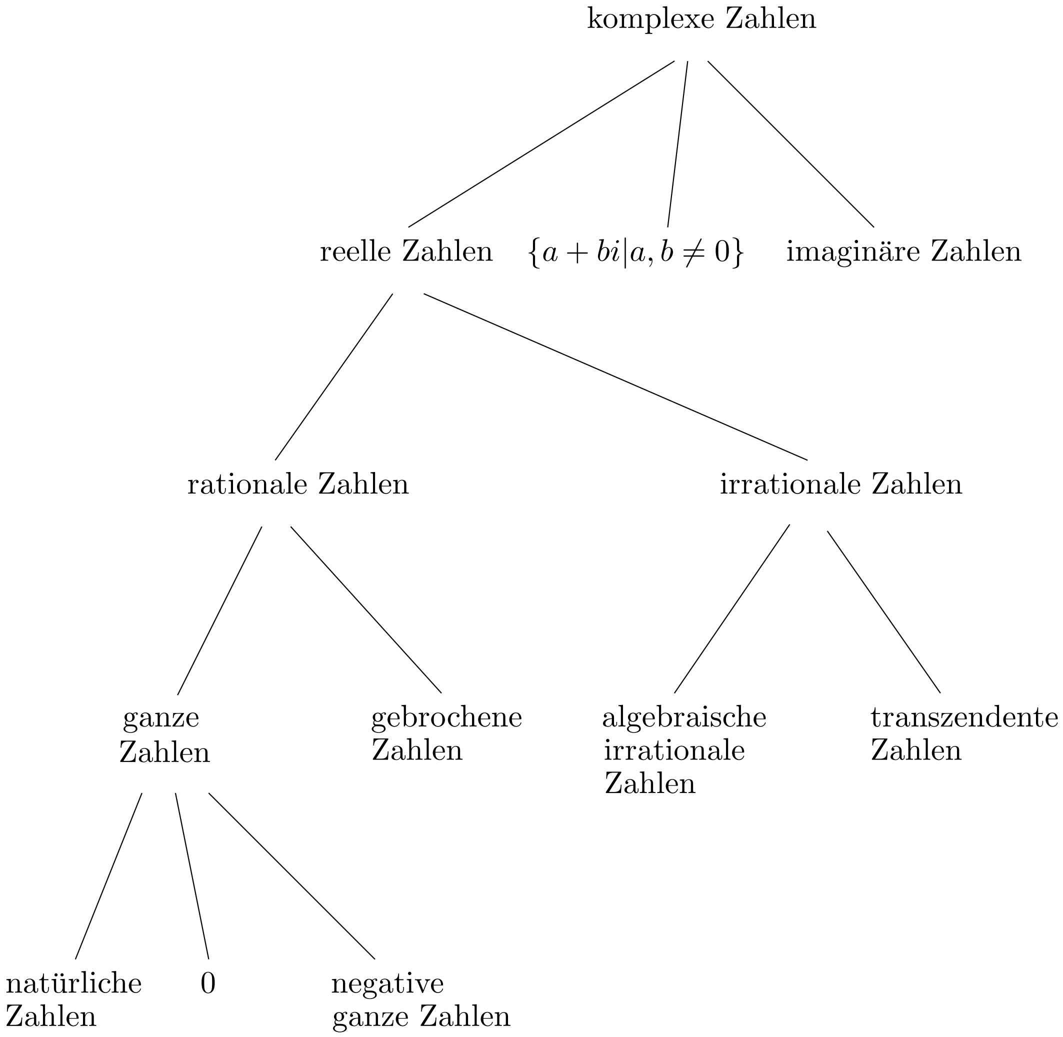
Addiert man auf beiden Seiten der Induktionsannahme $n_0 + 1$, so folgt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n_0 + (n_0 + 1) = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2} + (n_0 + 1)$$

$$= (n_0 + 1) \cdot (\frac{n_0}{2} + 1) = \frac{(n_0 + 1)(n_0 + 2)}{2} = \frac{(n_0 + 1)[(n_0 + 1) + 1]}{2}$$

Aus der Richtigkeit der Annahme für n_0 folgt somit auch die Richtigkeit für $n_0 + 1$. Damit gilt die Formel für alle $n \geq 1$.

1.3 Einteilung der Zahlen



Einige der Zahlenbereiche werden häufig in Mengenschreibweise dargestellt:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$	Menge der komplexen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die positiven ganzen Zahlen.

Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen sind die Primzahlen. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar ist.

Die Primzahlen sind die Zahlen 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,..., die Zahl 1 ist keine Primzahl. Es gibt unendlich viele Primzahlen, das heißt, es gibt keine größte Primzahl, zu jeder Primzahl gibt es noch größere. 2 ist die einzige gerade Primzahl. Alle Primzahlen zusammen bilden die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen, die eine Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist.

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, die Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren (sogenannte Primfaktorzerlegung).

■ **Beispiele zur Primfaktorzerlegung:**

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$; $546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$

Die ganzen Zahlen setzen sich zusammen aus den natürlichen Zahlen, der Null und den negativen ganzen Zahlen.

Die rationalen Zahlen sind alle ganzen und gebrochenen Zahlen. Rationale Zahlen lassen sich als Brüche aus ganzen Zahlen darstellen. Jede rationale Zahl kann als endlicher oder unendlicher periodischer Dezimalbruch dargestellt werden.

Der Dezimalbruch einer rationalen Zahl ist die Darstellung der rationalen Zahl als Dezimalzahl, also als Zahl „mit Stellen hinter dem Komma“ (siehe auch Abschnitt 1.8.1). Bei einem endlichen Dezimalbruch ist die Anzahl der Stellen nach dem Komma endlich, bei einem periodischen Dezimalbruch wiederholen sich die Stellen nach dem Komma nach einem gewissen Muster (Periode).

Die reellen Zahlen sind alle Zahlen, die auf der reellen Achse der Zahlenebene (gaußsche Zahlenebene, vgl. Abschnitt 1.12.1), der sogenannten Zahlengeraden, darstellbar sind.

Die reellen Zahlen setzen sich zusammen aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen. Der Dezimalbruch einer irrationalen Zahl hat unendlich viele Stellen und keine Periode.

Man unterteilt die irrationalen Zahlen in algebraische irrationale Zahlen und transzendente Zahlen.

Eine algebraische irrationale Zahl ist eine irrationale Zahl, die Lösung (Wurzel) einer algebraischen Gleichung (Bestimmungsgleichung) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ mit rationalen Zahlen als Koeffizienten $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ ist, wobei n für eine natürliche Zahl steht (Koeffizienten sind Beizahlen von Variablen, vgl. Abschnitt 2.1). Irrationale Zahlen, die nicht algebraisch irrational sind, heißen transzendent.

Es gibt keine reelle Zahl, die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist. Deshalb werden die reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen erweitert.

Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $z = a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit, $i^2 = -1$ (i ist eine Lösung der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$).

Eine komplexe Zahl z besteht also aus einem reellen Teil a (Realteil) und einem imaginären Teil b (Imaginärteil). Komplexe Zahlen z mit Realteil gleich 0 (also $a = 0$) heißen imaginäre Zahlen, die komplexen Zahlen z mit Imaginärteil gleich 0 (also $b = 0$) sind die reellen Zahlen.

Komplexe Zahlen lassen sich in der Zahlenebene darstellen.

■ **Beispiele für ganze Zahlen:**

38; $-700\,632$; 0; 105

■ **Beispiele für rationale Zahlen:**

-2; $\frac{3}{2} = 1,5$; $\frac{4}{3} = 1,3333... = 1,\overline{3}$; $-\frac{1}{8} = -0,125$;
$-\frac{16}{11} = -1,454\,545... = -1,\overline{45}$ (der periodische Teil wird überstrichen)

■ **Beispiele für reelle Zahlen:**

$-4;\ \frac{3}{4};\ 4-\pi;\ e^3;\ \sqrt{3};\ \sin 5^0$

■ **Beispiele für irrationale Zahlen:**

$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808\ldots;\ \sqrt[3]{4} = 1{,}587\,401\,052\ldots;\ 5-2\sqrt{3} = 1{,}535\,898\,385\ldots;$
$-\pi = -3{,}141\,592\,654\ldots;\ e = 2{,}718\,281\,828\ldots$

■ **Beispiele für algebraische irrationale Zahlen:**

$\sqrt{3}$ (denn $\sqrt{3}$ ist Lösung der Gleichung $x^2-3=0$);
$\sqrt[3]{4}$ (denn $\sqrt[3]{4}$ ist Lösung der Gleichung $x^3-4=0$);
$5-2\sqrt{3}$ (denn $5-2\sqrt{3}$ ist Lösung der Gleichung $x^2-10x+13=0$)

■ **Beispiele für transzendente Zahlen:**

$-\pi;\ e$

■ **Beispiele für komplexe Zahlen:**

$3+\sqrt{2}\,i;\ -1+5i;\ e+\pi^2 i;\ -4i$ (imaginäre Zahl); $3\sqrt{2}$ (reelle Zahl)

Ein hochgestellter Stern bedeutet die entsprechende Menge ohne die Null:

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots,-3,-2,-1,1,2,3,\ldots\} = \{x|x\in\mathbb{Z},\ x\neq 0\}$:
Menge der ganzen Zahlen ohne die Null
$\mathbb{Q}^* = \{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z}^*\} = \{x|x\in\mathbb{Q},\ x\neq 0\}$:
Menge der rationalen Zahlen ohne die Null
$\mathbb{R}^* = \{x|x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}$:
Menge der reellen Zahlen ohne die Null

Ein hochgestelltes Plus bedeutet die Menge der entsprechenden positiven Zahlen:

$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} = \{x|x\in\mathbb{Z},\ x>0\}$:
Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{N}\} = \{x|x\in\mathbb{Q},\ x>0\}$:
Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{R}^+ = \{x|x\in\mathbb{R},\ x>0\}$:
Menge der positiven reellen Zahlen

1.4 Grundrechenarten

Die vier Grundrechenarten sind die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division.

Addition:	Summand plus Summand gleich Summe
Subtraktion:	Minuend minus Subtrahend gleich Differenz
Multiplikation:	Faktor mal Faktor gleich Produkt
Division:	Dividend geteilt durch Divisor gleich Quotient

■ **Beispiele:**

$4+5=9$ (Addition); $7-2=5$ (Subtraktion); $3\cdot 8=24$ (Multiplikation);
$87:3=29$ (Division)

Vereinbarung:
Der Multiplikationspunkt (Malpunkt) kann weggelassen werden zwischen zwei Variablen,

zwischen einer Zahl und einer Variablen, zwischen einer Zahl und einer Klammer, zwischen einer Variablen und einer Klammer sowie zwischen zwei Klammern.

■ **Beispiele:**

$a \cdot b = ab,\ 4 \cdot a = 4a,\ 2 \cdot (a+b) = 2(a+b),\ a \cdot (3+a) = a(3+a),$
$(a+b) \cdot (c-d) = (a+b)(c-d)$

Achtung: Der Multiplikationspunkt zwischen zwei Zahlen darf nicht weggelassen werden.

■ **Beispiel:** $3 \cdot 4 \neq 34$

Eine Variable oder Veränderliche oder Platzhalter ist eine Größe, die in der Regel verschiedene Werte annehmen kann. Variable werden durch Symbole dargestellt (meist lateinische Buchstaben). Variable sind zum Beispiel die Platzhalter für die gesuchten Lösungen von einer oder mehreren gegebenen Gleichungen.

1.5 Grundlegende Rechenregeln

1.5.1 Buchstabenrechnen

Buchstabenrechnen ist das Rechnen mit unbestimmten Zahlen. Formuliert man eine mathematische Aussage, die nicht nur für eine bestimmte Zahl, sondern für einen ganzen Zahlbereich oder sogar für alle Zahlen gilt, dann benutzt man statt einer Zahl einen Buchstaben. Der Buchstabe heißt unbestimmte Zahl.

■ **Beispiele:**

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (binomische Formel, sie gilt für alle reellen Zahlen a, b)
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ (Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation, gilt für alle reellen Zahlen a, b, c)
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$)

1.5.2 Kehrwert, Quersumme

Der Kehrwert einer Zahl $a \neq 0$ ist die Zahl $\dfrac{1}{a}$. Man sagt statt Kehrwert auch reziproker Wert.

So ist zum Beispiel der Kehrwert von 3 gleich $\frac{1}{3}$, der Kehrwert von -17 ist $-\frac{1}{17}$, der Kehrwert von $\frac{1}{4}$ ist 4.

Die Quersumme einer ganzen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

So ist zum Beispiel die Quersumme der Zahl 239 503 618 gleich $2+3+9+5+0+3+6+1+8 = 37$, die Quersumme von 3 972 611 028 ist $3+9+7+2+6+1+1+0+2+8 = 39$, und die Quersumme der Zahl 209 334 042 ist $2+0+9+3+3+4+0+4+2 = 27$.

1.5.3 Teilbarkeitsregeln

Die einzelnen Zeichen einer Zahl sind ihre Ziffern. Aus Eigenschaften der Ziffern lassen sich Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen ableiten.

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

- 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist
- 3, wenn die Quersumme der Zahl (also die Summe der Ziffern) durch 3 teilbar ist
- 4, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist
- 5, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist (also 0 oder 5 ist)
- 6, wenn die letzte Ziffer durch 2 und die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist
- 8, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist
- 9, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist
- 11, wenn die alternierende Quersumme der Zahl (also die Summe der Ziffern, die abwechselnd positives und negatives Vorzeichen erhalten) durch 11 teilbar ist

■ **Beispiele:**

1. 2486 ist teilbar durch 2, denn 6 ist teilbar durch 2
2. 263 451 ist teilbar durch 3, denn die Quersumme $2 + 6 + 3 + 4 + 5 + 1 = 21$ ist teilbar durch 3
3. 2 563 488 ist teilbar durch 4, denn 88 ist teilbar durch 4
4. 823 620 ist teilbar durch 5, denn 0 ist teilbar durch 5
5. 2 598 018 ist teilbar durch 6, denn 8 ist teilbar durch 2 und die Quersumme $2+5+9+8+0+1+8 = 33$ ist teilbar durch 3
6. 524 299 168 ist teilbar durch 8, denn 168 ist teilbar durch 8
7. 11 929 545 ist teilbar durch 9, denn die Quersumme $1+1+9+2+9+5+4+5 = 36$ ist teilbar durch 9
8. 14 739 296 ist teilbar durch 11, denn die alternierende Quersumme $1-4+7-3+9-2+9-6 = 11$ ist teilbar durch 11

1.5.4 Punktrechnung vor Strichrechnung

Die Rechenzeichen $\cdot$ und $:$ binden stärker als $+$ und $-$, das heißt, Multiplikation und Division müssen vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden.

$$\boxed{\begin{aligned} a + b \cdot c &= a + (b \cdot c) \\ a - b : c &= a - (b : c) \end{aligned}}$$

■ **Beispiele:**

$a : b \cdot c - d = (a : b) \cdot c - d$; $3 + 4 \cdot 5 - 6 = 3 + (4 \cdot 5) - 6 = 17$

$8 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + 36 : 9 + 6 \cdot (12 + 2 \cdot 7) = 8 - 60 + 4 + 6 \cdot 26 = 108$

Die Klammern geben an, welcher Teil der Rechnung zuerst ausgeführt wird.

1.5.5 Potenzrechnung vor Punktrechnung

Potenzieren bindet stärker als Multiplizieren und Dividieren.

$$\boxed{a \cdot b^2 = a \cdot (b^2)}$$

Es gilt also $ab^2 \neq (ab)^2$.

■ **Beispiele:**
$a : b^2 - 3 \cdot 2^3 = \frac{a}{b^2} - 3(2^3) = \frac{a}{b^2} - 24;\;\; 4 \cdot 5^3 - 7 \cdot 4^2 = 4 \cdot 125 - 7 \cdot 16 = 388$

1.5.6 Grundgesetze der Addition und Multiplikation

1. *Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)*

   Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das Kommutativgesetz:

   $$\boxed{a + b = b + a} \quad \boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

   Bei der Addition kann man also die Summanden vertauschen, bei der Multiplikation kann man die Faktoren vertauschen.

   ■ **Beispiele:** $3 + 4 = 4 + 3;\; 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

2. *Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz)*

   Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das Assoziativgesetz:

   $$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c} \quad \boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$$

   Bei der Addition kann man also Summanden beliebig verknüpfen (zusammenfassen), bei der Multiplikation kann man Faktoren beliebig verknüpfen.

   ■ **Beispiele:** $(3 + 4) + 7 = 3 + (4 + 7) = 3 + 4 + 7 :\; (3 \cdot 4) \cdot 7 = 3 \cdot (4 \cdot 7) = 3 \cdot 4 \cdot 7$

3. *Distributivgesetze (Zerlegungsgesetze)*

   Für reelle Zahlen gelten die Distributivgesetze:

   $$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c} \quad \boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

   ■ **Beispiele:** $(3 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7;\; 3 \cdot (4 + 7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$

Aus diesen Grundgesetzen ergeben sich die wichtigen Regeln der Klammerrechnung.

1.5.7 Grundregeln der Klammerrechnung

Klammern gehören immer paarweise zusammen. Ein durch ein Klammerpaar zusammengefasster Ausdruck ist eine Einheit.

Wichtige Regeln der Klammerrechnung

- Ein Klammerpaar nach einem Pluszeichen kann weggelassen werden.

  $$\boxed{+(a + b) = a + b}$$

- Beim Weglassen der Klammern nach einem Minuszeichen müssen alle zwischen den Klammern vorkommenden Vorzeichen umgedreht werden.

  $$\boxed{\begin{aligned} -(a + b) &= -a - b \\ -(a - b) &= -a + b \end{aligned}}$$

Vorzeichenregeln

Für die Multiplikation und die Division zweier reeller Zahlen a und b ($b \neq 0$) gelten die Vorzeichenregeln.

$$\boxed{\begin{gathered}(+a)\cdot(+b) = (-a)\cdot(-b) = a\cdot b\\ a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -a\cdot b\\ \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}\\ \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}\end{gathered}}$$

■ **Beispiele:**

1. $(a+b)+(c-d+e) = a+b+c-d+e$
2. $(3+5-2)+(5+8) = 3+5-2+5+8 = 19$
3. $a+b-(c-d-e) = a+b-c+d+e$
4. $(4+7)-(-6+3-8) = 4+7+6-3+8 = 22$
5. $3a-(4b+2c-8d)+(3a-5c)-(6a+3b-d)$
   $= 3a-4b-2c+8d+3a-5c-6a-3b+d = -7b-7c+9d$
6. $3a(-4b) = -12ab$
7. $\dfrac{-4a+b}{-2} = 2a - \dfrac{1}{2}b$

1.5.8 Multiplikation mit Klammern

- Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe (Differenz), indem man die Zahl mit jedem Glied multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert (subtrahiert).

$$\boxed{\begin{gathered}a(b+c) = ab+ac\\ a(b-c) = ab-ac\\ (a+b)c = ac+bc\\ (a-b)c = ac-bc\end{gathered}}$$

  Fehlerwarnung: $(a\cdot b)\cdot c \neq ac\cdot bc$, sondern $(a\cdot b)\cdot c = abc$

- Enthalten alle Glieder einer Summe oder Differenz den gleichen Faktor, so kann man diesen ausklammern.

$$\boxed{\begin{gathered}ab+ac = a(b+c)\\ ac-bc = (a-b)c\end{gathered}}$$

- Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd\\(a+b)(c-d) &= ac-ad+bc-bd\\(a-b)(c+d) &= ac+ad-bc-bd\\(a-b)(c-d) &= ac-ad-bc+bd\end{aligned}}$$

Fehlerwarnung: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$, sondern $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (siehe Abschnitt 1.5.10)

- Bei verschachtelten Klammern sind die Klammnern immer von innen nach außen aufzulösen.

$$\boxed{a(b+c(d+e)) = a(b+cd+ce) = ab+acd+ace}$$

■ **Beispiele:**

1. $3(200+7) = 3\cdot 200 + 3\cdot 7$
2. $6x^2(16x-0,05y+7,2z) = 96x^3 - 0,3x^2y + 43,2x^2z$
3. $(-\frac{p}{3}+\frac{q}{4}-\frac{r}{5})(-\frac{p}{2}) = \frac{1}{6}p^2 - \frac{1}{8}pq + \frac{1}{10}pr$
4. $abc - acd + ace = ac(b-d+e)$
5. $-5x^2+25xy-35zx = -5x(x-5y+7z)$
6. $(3x-a)(a+2b) = 3ax+6bx-a^2-2ab$
7. $(x+5)(x-a+3) = x^2-ax+3x+5x-5a+15 = x^2-ax+8x-5a+15$
8. $(x+2)(x-5)-(x-3)(x-7) = x^2-5x+2x-10-(x^2-7x-3x+21)$
   $= x^2-3x-10-x^2+10x-21 = 7x-31$
9. $(x-1)(a+3)(2-c) = (x-1)(2a-ac+6-3c)$
   $= 2ax-acx+6x-3cx-2a+ac-6+3c$
10. $(4x-y)(-2a(b-4c)-3bc) = (4x-y)(-2ab+8ac-3bc)$
    $= -8abx+32acx-12bcx+2aby-8acy+3bcy$
11. $5(x-2(x-y-3y-6x-3y)+2y) = 5(x-2(-5x-7y)+2y)$
    $= 5(x+10x+14y+2y) = 5(11x+16y) = 55x+80y$

1.5.9 Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen

Ein Index (Plural Indizes) ist ein Zeichen, das an Symbole für Variable, Funktionen oder Operationen angebracht wird.

Bezeichnet man zum Beispiel Variable mit x, dann kennzeichnet man verschiedene Variable dadurch, dass man an das x verschiedene tiefgestellte Indizes anhängt: $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Ein Index ist meistens eine Zahl.

Das Summenzeichen $\sum$ (entstanden aus dem griechischen Buchstaben für S) dient zur vereinfachten Darstellung von Summen (gesprochen: Summe über a_k von $k=1$ bis $k=n$).

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}$$

Man erhält alle Summanden der Summe, wenn man in a_k für den Index k zunächst 1, dann 2 usw. und schließlich n setzt. Dieser Buchstabe k heißt Summationsindex und kann durch einen beliebigen anderen Buchstaben ersetzt werden. Es gilt also zum Beispiel $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

■ **Beispiele:**

1. $\sum\limits_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

2. $\sum\limits_{i=1}^{3} \log(2i) = \log 2 + \log 4 + \log 6$

3. $\sum\limits_{j=1}^{5} 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \cdot 6 = 30$

Das Produktzeichen $\prod$ dient zur vereinfachten Darstellung von Produkten (gesprochen: Produkt über a_k von $k = 1$ bis $k = n$).

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Man erhält alle Faktoren des Produkts, wenn man in a_k für den Index k zunächst 1, dann 2 usw. und schließlich n setzt. Der Index k kann durch einen beliebigen anderen Buchstaben ersetzt werden. Zum Beispiel gilt $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j$.

■ **Beispiele:**

1. $\prod\limits_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2$

2. $\prod\limits_{i=2}^{4} 3^i = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

3. $\prod\limits_{j=1}^{5} 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

1.5.10 Binomische Formeln

Ein Binom ist ein zweigliedriger Ausdruck der Form $a+b$ oder $a-b$. Die Multiplikation von Binomen führt zu den binomischen Formeln (zwei Faktoren) und zum binomischen Lehrsatz (n Faktoren, $n \geq 1$ beliebig, vgl. Abschnitt 10.2).

Die folgenden Rechenregeln heißen binomische Formeln oder binomische Gleichungen 2. Grades (a und b sind beliebige reelle Zahlen).

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

■ **Beispiele:**

1. $21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2\cdot 20\cdot 1 + 1^2 = 441$
2. $(2c+3)^2 = (2c)^2 + 2\cdot 2c\cdot 3 + 3^2 = 4c^2 + 12c + 9$
3. $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot 1 + 1^2 = 361$
4. $(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$
5. $21\cdot 19 = (20+1)(20-1) = 20^2 - 1^2 = 399$
6. $(3x+4y)(3x-4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

1.5.11 Division mit Klammern

Man dividiert eine Summe (Differenz) durch eine Zahl, indem man jedes Glied durch die Zahl dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert (subtrahiert):

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b):c &= a:c+b:c\\ (a-b):c &= a:c-b:c\end{aligned}}$$

■ **Beispiele:**

1. $(10ax - 15bx) : 5x = 10ax : 5x - 15bx : 5x = 2a - 3b$
2. $(12a^2xy + 39ax^2y - 27axy^2) : 3axy = 12a^2xy : 3axy + 39ax^2y : 3axy - 27axy^2 : 3axy$
   $= 4a + 13x - 9y$

1.6 Bruchrechnung

1.6.1 Definitionen

Ein Bruch ist eine Zahl, die durch einen Ausdruck $\frac{m}{n}$ (m geteilt durch n) dargestellt wird. Die Zahl m heißt Zähler und die Zahl n Nenner des Bruches.

Es gilt dabei $n \neq 0$, denn die Division durch Null ist nicht möglich. Die Division einer von Null verschiedenen Zahl durch Null ergibt keine Zahl.

Ein Bruch ist ein Quotient, der Zähler ist der Dividend, und der Nenner ist der Divisor.

$$\boxed{\frac{m}{n} = m : n}$$

Brüche, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, heißen echte Brüche.

■ **Beispiele:**

$\frac{2}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{12}{13}$

Brüche, bei denen der Zähler größer ist als der Nenner, heißen unechte Brüche.

■ **Beispiele:**
$\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{12}{11}$

Brüche mit dem Zähler 1 heißen Stammbrüche.

■ **Beispiele:**
$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{243}$

Ganzzahlige Anteile von Brüchen können vorgezogen werden.

■ **Beispiele:**
$\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; $\frac{25}{17} = 1\frac{8}{17}$

Fehlerwarnung: $1\frac{2}{3} \neq 1 \cdot \frac{2}{3}$. Richtig ist $1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Der Kehrwert eines Bruches $\frac{p}{q}$ ist der Bruch $\frac{q}{p}$, also der Bruch, bei dem Zähler und Nenner vertauscht sind, denn $\frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$.

■ **Beispiele:**
Der Kehrwert von $\frac{16}{19}$ ist $\frac{19}{16}$; der Kehrwert von $\frac{1}{2}$ ist 2; der Kehrwert von $-\frac{11}{3}$ ist $-\frac{3}{11}$.

1.6.2 Erweitern und Kürzen

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{-6}{-9}$ sind verschiedene Schreibweisen desselben Bruchs. Der Übergang von einer Schreibweise zur anderen erfolgt durch Erweitern und Kürzen.

Erweitern heißt, Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl zu multiplizieren. Der Wert des Bruches bleibt durch Erweitern unverändert.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}} \quad (c \neq 0)$$

■ **Beispiele:**
$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$; $\frac{-3}{-4} = \frac{(-3) \cdot (-1)}{(-4) \cdot (-1)} = \frac{3}{4}$; $\frac{ab^2}{c^3d} = \frac{ab^2e^3}{c^3de^3}$

Fehlerwarnung: Unterscheide Erweitern und Multiplizieren!

■ **Beispiel:**
Erweitern mit 3: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$

Multiplizieren mit 3: $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$

Kürzen heißt, Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl zu dividieren. Der Wert des Bruches bleibt durch Kürzen unverändert.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}} \quad (c \neq 0)$$

■ **Beispiele:**

$\frac{27}{24} = \frac{27:3}{24:3} = \frac{9}{8}$; $\frac{a^2bc^2}{a^3bc} = \frac{a^2bc^2 : a^2bc}{a^3bc : a^2bc} = \frac{c}{a}$

Fehlerwarnung: Unterscheide Kürzen und Dividieren!

■ **Beispiel:**

Kürzen durch 3: $\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$

Dividieren durch 3: $\frac{6}{15} : 3 = \frac{6:3}{15} = \frac{2}{15}$

1.6.3 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche

Gleichnamige Brüche (Brüche mit dem gleichen Nenner) werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält.

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \quad \boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

■ **Beispiele:**

$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$; $\frac{3x^2}{4yz} + \frac{x^2}{4yz} = \frac{4x^2}{4yz} = \frac{x^2}{yz}$; $\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2-5}{7} = -\frac{3}{7}$

1.6.4 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie auf den Hauptnenner bringt, also durch Erweitern gleichnamig macht. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner.

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad+bc}{bd}} \quad \boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad-bc}{bd}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

   Der Hauptnenner der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ ist $3 \cdot 5$.

   Addition der Brüche:

   $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$

2. $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

   Der Hauptnenner der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ ist $3 \cdot 4 = 12$.

   Subtraktion der Brüche:

   $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12}$

3. $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}$

Der Hauptnenner der Brüche $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$ ist $5 \cdot 6$.

Addition der Brüche:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{1 \cdot 5 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 2}+\frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6}+\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5}=\frac{10+18+25}{30}=\frac{53}{30}$$

4. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$

Der Hauptnenner der Brüche $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ ist $4 \cdot 9$.

Addition bzw. Subtraktion der Brüche:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 9}+\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 2 \cdot 3}-\frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4}=\frac{9+6-4}{36}=\frac{11}{36}$$

5. $\frac{a-b}{2x}+\frac{a}{x}+\frac{b}{3y}+\frac{a+b}{4y}$

Der Hauptnenner der Brüche $\frac{a-b}{2x}, \frac{a}{x}, \frac{b}{3y}, \frac{a+b}{4y}$ ist $3 \cdot 4 \cdot xy$.

Addition der Brüche:

$$\frac{a-b}{2x}+\frac{a}{x}+\frac{b}{3y}+\frac{a+b}{4y}=\frac{(a-b) \cdot 6y}{2x \cdot 6y}+\frac{a \cdot 12y}{x \cdot 12y}+\frac{b \cdot 4x}{3y \cdot 4x}+\frac{(a+b) \cdot 3x}{4y \cdot 3x}$$

$$=\frac{(a-b) \cdot 6y+a \cdot 12y+b \cdot 4x+(a+b) \cdot 3x}{12xy}=\frac{3ax+18ay+7bx-6by}{12xy}$$

Fehlerwarnungen:

1. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ darf nicht verwechselt werden mit $\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c}$, wie man zum Beispiel durch Einsetzen von $a=1, b=2, c=3$ sofort bestätigt. Richtig ist $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a \cdot c}{b \cdot c}+\frac{a \cdot b}{c \cdot b}=\frac{ac+ab}{bc}=\frac{a(b+c)}{bc}$.
2. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$, wie man zum Beispiel durch Einsetzen von $a=1, b=2, c=3, d=4$ bestätigt. Die Verwechslung mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ist naheliegend.

1.6.5 Multiplizieren von Brüchen

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Vor dem Multiplizieren sollte man kürzen.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d}=\frac{ac}{bd}}$$

Sonderfall: Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot c=\frac{a \cdot c}{b}=\frac{ac}{b}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$
2. $1\dfrac{3}{4} \cdot 2\dfrac{2}{5} = \dfrac{7 \cdot 12}{4 \cdot 5} = \dfrac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \dfrac{21}{5}$
3. $\dfrac{a^2 - 1}{2b} \cdot \dfrac{12b}{ac - c} = \dfrac{(a+1)(a-1) \cdot 12b}{2b \cdot c(a-1)} = \dfrac{6(a+1)}{c}$
4. $\dfrac{15uv}{8w^2} \cdot 12w^3 = \dfrac{15uv}{8w^2} \cdot \dfrac{12w^3}{1} = \dfrac{15 \cdot 12 \cdot uvw^3}{8w^2} = \dfrac{45}{2}\,uvw$

Fehlerwarnung: $1\dfrac{3}{4} \cdot 2\dfrac{2}{5} \neq 1 \cdot 2 + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{5}$; richtig siehe Beispiel 2.

1.6.6 Dividieren von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

Sonderfall: Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert oder den Nenner mit der Zahl multipliziert.

$$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \dfrac{5}{6}$
2. $\dfrac{22ax^2y^2}{27brs^2} : \dfrac{66x^2y}{18r^2s} = \dfrac{22 \cdot 18 \cdot ax^2y^2r^2s}{27 \cdot 66 \cdot bx^2yrs^2} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot ayr}{3 \cdot 3 \cdot bs} = \dfrac{2ary}{9bs}$
3. $8\dfrac{3}{4} : 7 = \dfrac{35}{4 \cdot 7} = \dfrac{5}{4}$
4. $\dfrac{35a^2}{43b^2} : 14a = \dfrac{35a^2}{43b^2} : \dfrac{14a}{1} = \dfrac{35a^2 \cdot 1}{43b^2 \cdot 14a} = \dfrac{5a}{86b^2}$

1.7 Potenz- und Wurzelrechnung

1.7.1 Definition der Potenz

Eine Zahl der Form a^x (gesprochen: a hoch x) heißt Potenz. Dabei ist a die Basis oder die Grundzahl und x der Exponent oder die Hochzahl der Potenz.

a^x	Potenz
a	Basis (Grundzahl)
x	Exponent (Hochzahl)

Ist die Basis a eine beliebige reelle Zahl und der Exponent x eine natürliche Zahl, dann steht a^x für die Vorschrift, die Basis a insgesamt x-mal mit sich selbst zu multiplizieren.

$$\boxed{a^x = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (x \text{ Faktoren}, \ x \in \mathbb{N})}$$

Man spricht vom Potenzieren für diese algebraische Operation.

Ist der Exponent x eine natürliche Zahl n, dann kann die Basis a eine beliebige reelle Zahl sein. Man nennt a^n dann n-te Potenz von a.

Ist der Exponent x eine beliebige reelle Zahl, dann ist die Potenz nur für positive Basen a definiert ($a \in \mathbb{R}^+$). Dabei sind Potenzen mit irrationalen Exponenten mit Hilfe eines Grenzübergangs erklärt (vgl. Abschnitt 8).

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = c \quad \Leftrightarrow \quad a^p = c^q}$$

Für negative Exponenten gilt

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

Für die Exponenten 1 und 0 gilt

$$\boxed{a^1 = a} \quad \boxed{a^0 = 1 \quad (a \neq 0)}$$

Eine spezielle Potenz für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\boxed{(-1)^k = \begin{cases} +1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}}$$

■ **Beispiele:**

1. $2^{\frac{3}{2}} = 2,8284\ldots$ Potenz mit Basis 2 und Exponent $\frac{3}{2} = 1,5$
2. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
3. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
4. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$
5. $6^0 = 1$
6. $\left(-\frac{1}{6}\right)^0 = 1$
7. $8^{\frac{4}{3}} = c \quad \Leftrightarrow \quad 8^4 = c^3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 16$
8. $8^{-\frac{4}{3}} = c \quad \Leftrightarrow \quad 8^{-4} = c^3 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{16}$
9. $4^1 = 4, \ (-12)^1 = -12$
10. $(-1)^5 = -1, \ (-1)^4 = 1, \ (-1)^0 = 1, \ (-1)^{-11} = -1$

1.7.2 Regeln der Potenzrechnung

1. *Potenzrechnung vor Punktrechnung*

$$\boxed{ba^n = b \cdot (a^n)}$$

Soll erst Punktrechnung erfolgen, dann muss ein Klammerpaar gesetzt werden.

■ **Beispiele:** $5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot (3^4)$; $(5 \cdot 3)^4 = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 15^4$

Fehlerwarnung: $ba^n \neq (ba)^n$ für $a, b \neq 0,\ b, n \neq 1$.

2. *Addieren und Subtrahieren*

Potenzen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie in Basis *und* Exponent übereinstimmen.

$$\boxed{pa^n + qa^n = (p+q)a^n}$$

■ **Beispiel:** $2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^4 = (2+5) \cdot 3^4 = 7 \cdot 3^4$

Fehlerwarnungen: $2^4 + 3^4 \neq 5^4$, $3^2 + 3^4 \neq 3^6$

3. *Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis*

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert (genauer: indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert).

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert (genauer: indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert).

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Der Wert einer Potenz bleibt erhalten, wenn man gleichzeitig die Basis durch ihren Kehrwert und das Vorzeichen des Exponenten durch das entgegengesetzte ersetzt.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Fehlerwarnungen: $3^6 \cdot 3^4 \neq 3^{6 \cdot 4} = 3^{24}$, $3^{12} : 3^4 \neq 3^{12:4} = 3^3$, $a^{-2} \neq -a^2$

■ **Beispiele:**

1. $3^6 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10} = 3^{6+4}$

2. $\dfrac{3^6}{3^4} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 3^{6-4}$

3. $3^5 : 3^4 = 3^{5-4} = 3^1 = 3$

4. $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0 = 1$

5. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 : \left(\dfrac{3}{2}\right)^6 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4-6} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

4. *Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Exponenten*

   Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert (genauer: indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert).

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Fehlerwarnung: $a^n \cdot b^n \neq (ab)^{2n}$ (außer in Sonderfällen wie $n = 0$), zum Beispiel: $2^3 \cdot 5^3 \neq 10^6$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert (genauer: indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert).

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Fehlerwarnung: $\dfrac{a^n}{b^n} \neq \dfrac{a}{b}$ (außer in Sonderfällen) im Gegensatz zu $\dfrac{a \cdot n}{b \cdot n} = \dfrac{a}{b}$

Umkehrungen

Ein Produkt wird potenziert, indem man die einzelnen Faktoren potenziert (genauer: indem man die Potenzen der einzelnen Faktoren miteinander multipliziert).

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln potenziert (genauer: indem man die Potenzen von Zähler und Nenner durcheinander dividiert).

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Fehlerwarnung: Die Berechnung von $(a+b)^n$ darf nicht verwechselt werden mit der von $(a \cdot b)^n$. Es gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, aber $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ (außer in Sonderfällen).

■ **Beispiele:**

1. $2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
2. $\dfrac{3^4}{5^4} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = 0,6^4 = 0,1296$
3. $30^5 = (3 \cdot 10)^5 = 3^5 \cdot 10^5 = 243 \cdot 100\,000 = 24\,300\,000 = 2,43 \cdot 10^7$
4. $0,3^5 = \left(\dfrac{3}{10}\right)^5 = \dfrac{3^5}{10^5} = \dfrac{243}{100\,000} = 0,00243 = 2,43 \cdot 10^{-3}$

5. *Potenzieren einer Potenz*

   Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert (genauer: indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert).

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Bei der Potenz einer Potenz kann man die Exponenten miteinander vertauschen.

$$\boxed{(a^n)^m = (a^m)^n}$$

Fehlerwarnung: $(2^3)^4 \neq 2^7$

■ **Beispiele:**

1. $(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
2. $(3^4)^2 = 81^2 = 6561 = 9^4 = (3^2)^4$

■ **Beispiele zur gesamten Potenzrechnung:**

1. $ar^p + bs^p - cr^p + ds^p = (a-c)r^p + (b+d)s^p$

2. $x^{3m-1}x^{m+1} = x^{3m-1+m+1} = x^{4m}$

3. $\dfrac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 + 6^2} = \dfrac{(4 \cdot 2)^2 \cdot 5^2}{64 + 36} = \dfrac{4^2 \cdot (2 \cdot 5)^2}{100} = 4^2 = 16$

4. $\dfrac{5a^{x+y}b^{3u+v}}{7c^2} : \dfrac{5c^4}{28a^{y-x}b^{v-2u}} = \dfrac{5 \cdot 28 \cdot a^{x+y}a^{y-x}b^{3u+v}b^{v-2u}}{7 \cdot 5 \cdot c^2c^4} = \dfrac{4a^{2y}b^{u+2v}}{c^6} \qquad (c \neq 0)$

5. $(-u^2)^3 = (-1)^3u^{2 \cdot 3} = -u^6, \;\; (-u^3)^2 = (-1)^2u^{3 \cdot 2} = u^6,$
   $((-u)^2)^3 = ((-1)^2u^2)^3 = (u^2)^3 = u^{2 \cdot 3} = u^6$

6. $\left(\dfrac{5a^{-1}}{-2^2b^{-3}}\right)^{-4} = \begin{cases} \left(-\dfrac{5b^3}{2^2a}\right)^{-4} = \left(-\dfrac{4a}{5b^3}\right)^4 = \dfrac{256a^4}{625b^{12}} \\ \dfrac{5^{-4}a^4}{(-1)^{-4}2^{-8}b^{12}} = \dfrac{2^8a^4}{5^4b^{12}} = \dfrac{256a^4}{625b^{12}} \end{cases} \qquad (a, b \neq 0)$

7. $\left(\dfrac{2}{3}x^{-1} - 3x\right)\left(3x^{-1} - \dfrac{2}{3}x\right) = 2x^{-2} - \dfrac{4}{9} - 9 + 2x^2 = \dfrac{2}{x^2} - 9\dfrac{4}{9} + 2x^2 \qquad (x \neq 0)$

1.7.3 Definition der Wurzel

Eine Zahl der Form $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (gesprochen: n-te Wurzel aus a) heißt Wurzel. Dabei heißt a Radikand der Wurzel und ist eine reelle Zahl größer als 0, und n heißt Wurzelexponent und ist eine natürliche Zahl größer als 1.

$\sqrt[n]{a}$	Wurzel
$a > 0$	Radikand
$n > 1$	Wurzelexponent

Die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ ist definiert als die eindeutig bestimmte Zahl $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Die n-te Wurzel aus $a \geq 0$ ist also die nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a}$$

Man spricht vom Radizieren oder Wurzelziehen für diese algebraische Operation.

Ist der Wurzelexponent gleich 2, so heißt $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (der Wurzelexponent 2 braucht nicht geschrieben zu werden) Quadratwurzel (oder einfach Wurzel) aus a; $\sqrt[3]{a}$ heißt Kubikwurzel aus a.

Bemerkungen:

1. Nach der Definition der Wurzel ist die Wurzel aus einer positiven Zahl wieder eine positive Zahl: $\sqrt{a^2} = |a|$ für jede reelle Zahl a (zum Absolutbetrag $|a|$ einer Zahl a vgl. Abschnitt 1.11.2). Es gilt daher zum Beispiel nur $\sqrt{4} = 2$, nicht auch $\sqrt{4} = -2$. Dagegen hat die Gleichung $x^2 = 4$ die Lösungen $x_1 = +\sqrt{4} = +2$ und $x_2 = -\sqrt{4} = -2$.
2. Für ungerade n (zum Beispiel $n = 3$) kann die n-te Wurzel auch für negative Zahlen a eindeutig definiert werden, denn die n-te Potenz einer negativen Zahl ist selbst negativ. Zum Beispiel gilt $\sqrt[3]{-27} = -3$.
3. Wegen $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ergeben sich die Regeln der Wurzelrechnung aus den entsprechenden Regeln der Potenzrechnung.

   Wegen der besonderen Bedeutung werden die übertragbaren Regeln hier in Wurzelschreibweise wiederholt.

1.7.4 Regeln der Wurzelrechnung

1. *Addieren und Subtrahieren*

   Wurzeln kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie in Radikand *und* Wurzelexponent übereinstimmen.

$$\boxed{p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q)\sqrt[n]{a}}$$

■ **Beispiel:** $2 \cdot \sqrt[4]{3} + 5 \cdot \sqrt[4]{3} = (2+5) \cdot \sqrt[4]{3} = 7 \cdot \sqrt[4]{3}$

Fehlerwarnungen: $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} \neq \sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} \neq \sqrt[7]{2}$ (beides lässt sich nicht zusammenfassen)

2. *Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Radikanden*

   Wurzeln mit gleichem Radikanden und den Wurzelexponenten n, m werden multipliziert, indem man aus dem in die $(m+n)$-te Potenz erhobenen Radikanden die nm-te Wurzel zieht (denn $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$).

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt[3]{4096} \cdot \sqrt[4]{4096} = \begin{cases} 16 \cdot 8 = 128 \\ \sqrt[12]{4096^7} = 2^7 = 128 \end{cases}$

Fehlerwarnung: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[12]{a}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[12]{a^2}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[7]{a}$
(richtig: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^{4+3}} = \sqrt[12]{a^7}$)

Wurzeln mit gleichem Radikanden und den Wurzelexponenten n und m werden dividiert, indem man aus dem in die $(m-n)$-te Potenz erhobenen Radikanden die nm-te Wurzel zieht (denn $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$).

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}}$$

■ **Beispiel:** $\dfrac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[4]{4096}} = \begin{cases} 16 : 8 = 2 \\ \sqrt[3\cdot 4]{4096^{4-3}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2 \end{cases}$

3. *Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Wurzelexponenten*

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert (genauer: indem man die Wurzel aus dem Produkt der Radikanden zieht) (denn $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$).

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \begin{cases} 2 \cdot 3 = 6 \\ \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6 \end{cases}$

Fehlerwarnung: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ (außer in Sonderfällen); der gegebene Ausdruck lässt sich nicht vereinfachen

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert (genauer: indem man die Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden zieht) (denn $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$).

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = \begin{cases} 2 : 3 = \dfrac{2}{3} \\ \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Umkehrungen

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt, indem man die Wurzel aus den einzelnen Faktoren zieht (genauer: indem man die Wurzeln aus den einzelnen Faktoren miteinander multipliziert).

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt{36} = \begin{cases} 6 \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$

Fehlerwarnung: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (außer in Sonderfällen)

Man zieht die Wurzel aus einem Bruch, indem man sie aus Zähler und Nenner einzeln zieht (genauer: indem man die Wurzeln aus Zähler und Nenner durcheinander dividiert).

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Spezialfall

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 2 : 3 = \dfrac{2}{3}$
2. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{625}} = \dfrac{1}{5}$

4. *Radizieren und Potenzieren einer Wurzel*

Man zieht die Wurzel aus einer Wurzel, indem man die Wurzelexponenten multipliziert (genauer: indem man aus dem Radikanden die Wurzel mit dem aus dem Produkt beider Wurzelexponenten gebildeten neuen Wurzelexponenten zieht) (denn $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$).

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \begin{cases} \sqrt[4]{16} = 2 \\ \sqrt[12]{4096} = 2 \end{cases}$

Fehlerwarnung: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} \neq \sqrt[8]{7}$ (richtig: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$)

Bei der Wurzel aus einer Wurzel kann man die Wurzelexponenten miteinander vertauschen (denn $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$).

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \begin{cases} \sqrt[4]{16} = 2 \\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$
2. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[4]{3}$

Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert (genauer: indem man die Wurzel aus der Potenz des Radikanden zieht) (denn $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$).

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

■ **Beispiele:**

1. $(\sqrt[3]{8})^4 = \begin{cases} 2^4 = 16 \\ \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{4096} = 16 \end{cases}$
2. $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{16} = 2$

Umkehrung

Man zieht die Wurzel aus einer Potenz, indem man die Wurzel aus der Basis in die entsprechende Potenz erhebt.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt{4^3} = \begin{cases} \sqrt{64} = 8 \\ (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \end{cases}$

Spezialfall

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$$

■ **Beispiel:** $(\sqrt[5]{3})^5 = \sqrt[5]{3^5} = 3$

Exponenten und Wurzelexponenten kann man gegeneinander kürzen.

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{nq}} = (\sqrt[np]{a})^{nq} = \sqrt[p]{a^q} = (\sqrt[p]{a})^q}$$

■ **Beispiel:** $\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

5. *Rationalmachen des Nenners*

Zum Rationalmachen des Nenners eines Bruches erweitert man den Bruch so, dass die Wurzel im Nenner wegfällt.

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{a} = a\sqrt{a}$
2. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$
3. $\dfrac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} = \dfrac{(x+\sqrt{y})(x+\sqrt{y})}{(x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})} = \dfrac{(x+\sqrt{y})^2}{x^2-y} = \dfrac{x^2+2x\sqrt{y}+y}{x^2-y}$

■ **Beispiele zur gesamten Wurzelrechnung:**

1. $(\sqrt[3]{6})^3 = 6$
2. $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
4. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{256}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4^4}} = \dfrac{1}{4}$
5. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$
6. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^{3+5}} = \sqrt[15]{2^8}$
7. $(\sqrt{0,5})^{-2} = (0,5)^{\frac{1}{2}(-2)} = (0,5)^{-1} = \dfrac{1}{0,5} = 2$ oder

   $(\sqrt{0,5})^{-2} = \dfrac{1}{(\sqrt{0,5})^2} = \dfrac{1}{0,5} = 2$
8. $(-2^{\frac{3}{4}})^2 = +2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

9. $(\sqrt{18}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{18}-\sqrt{2})^2=18+2\sqrt{36}+2-(18-2\sqrt{36}+2)=4\sqrt{36}=4\cdot 6=24$

10. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3=5\sqrt{5}+15\sqrt{3}+9\sqrt{5}+3\sqrt{3}=14\sqrt{5}+18\sqrt{3}$

11. $(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})(7\sqrt[3]{2}+5\sqrt{3})=21\sqrt[6]{2^5}+15\sqrt{6}-14\sqrt[3]{6}-10\sqrt[6]{3^5}$

12. $\dfrac{a}{a+\sqrt{a}}=\dfrac{a(a-\sqrt{a})}{(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})}=\dfrac{a(a-\sqrt{a})}{a^2-a}=\dfrac{a(a-\sqrt{a})}{a(a-1)}=\dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}$

13. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{xy^2}}=\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{xy^2}\,\sqrt[3]{x^2y}}=\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x^2y}}{xy}=\dfrac{1}{y}\sqrt[3]{x^2y}$

14. $\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2-4}}=\dfrac{(a-2)\sqrt{a^2-4}}{\sqrt{a^2-4}\sqrt{a^2-4}}=\dfrac{(a-2)\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}=\dfrac{(a-2)\sqrt{a^2-4}}{(a-2)(a+2)}=\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a+2}$

15. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}}=\sqrt[20]{2^{10}}=2^{\frac{10}{20}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

16. $\sqrt{9\sqrt[3]{\dfrac{1}{18}}}=\sqrt[6]{\dfrac{9^3}{18}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{18}}=\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt[6]{18}}\\ \sqrt[6]{\dfrac{3^4}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{2^5\cdot 3^4}\end{cases}$

1.8 Dezimalzahlen und Dualzahlen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung von Zahlen. Die einzelnen Zeichen zur Darstellung von Zahlen sind die Zahlzeichen oder Ziffern. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen sogenannten Positions- oder Stellenwertsystemen und Additionssystemen. Bei einem Positionssystem ist der Wert einer Ziffer abhängig von der Position dieser Ziffer innerhalb der Zahl. Bei Additionssystemen wird der Wert aller Zahlzeichen einfach addiert, um den Wert der Zahl festzulegen.

Ein Beispiel für ein Positionssystem ist unser Dezimalsystem, ein Beispiel für ein Additionssystem ist das römische Zahlensystem.

1.8.1 Dezimalsystem

Die heute übliche Schreibweise der Zahlen ist die Dezimalschreibweise, das heißt, es gibt 10 verschiedene Ziffern (0,1,2,...,9) zur Darstellung der Zahlen. Jede Ziffer hat den zehnfachen Stellenwert der ihr rechts folgenden Ziffer. Im Dezimalsystem dargestellte Zahlen nennt man Dezimalzahlen.

■ **Beispiel:**

$3607=3\cdot 10^3+6\cdot 10^2+0\cdot 10^1+7\cdot 10^0=3000+600+0+7$

Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich also folgendermaßen: Die Einerstelle bleibt unverändert (Multiplikation mit $10^0=1$), die Zehnerstelle wird mit $10^1=10$, die Hunderterstelle wird mit $10^2=100$, die Tausenderstelle wird mit $10^3=1000$, …, die n-te Stelle wird mit 10^{n-1} multipliziert.

Das Dezimalsystem (auch Zehnersystem genannt) ist also ein Positionssystem zur Basis

10. Eine solche Schreibweise wurde erst möglich nach Einführung der Null (für „nichts“).

Unser Zahlensystem wurde im ersten Jahrtausend nach der Zeitenwende in Indien entwickelt. Es gelangte über den arabischen Raum zunächst nach Spanien und dann nach Mitteleuropa, wo noch bis zum 16. Jahrhundert mit dem römischen Zahlensystem gerechnet wurde. Wegen dieses Ursprungs nennt man unsere Ziffern auch indisch-arabische Ziffern.

Im Dezimalsystem lassen sich auch rationale und reelle Zahlen darstellen. Die Darstellung einer reellen (rationalen oder irrationalen) Zahl als Dezimalzahl nennt man auch Dezimalbruch (vgl. auch Abschnitt 1.3).

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} 486,2545 &= 4\cdot 10^2+8\cdot 10^1+6\cdot 10^0+2\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}+4\cdot 10^{-3}+5\cdot 10^{-4} \\ &= 400+80+6+0,2+0,05+0,004+0,0005 \end{aligned}$$

Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich dadurch, dass die n-te Stelle vor dem Komma mit 10^{n-1} und die m-te Stelle nach dem Komma mit 10^{-m} multipliziert wird.

Ist $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ eine Zahl mit den Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ vor dem Komma und den Ziffern $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}$ nach dem Komma, dann gilt also

$$\boxed{a = \sum_{i=-m}^{n} a_i 10^i} \qquad (*)$$

Die Stellen mit $i \geq 0$ bilden den ganzen Teil, die mit $i < 0$ den gebrochenen Teil der Zahl.

Für andere Zahlensysteme, nämlich Positionssysteme zur Basis B, gilt $(*)$ ganz analog, wenn man 10 durch die entsprechende Basis B ersetzt (zum Beispiel $B = 2$ für das Dualsystem).

1.8.2 Dualsystem

Das Dualsystem ist ein System zur Darstellung der Zahlen, in dem es nur zwei Ziffern (0 und 1) gibt. Das Dualsystem wird deshalb manchmal auch Binärsystem oder Zweiersystem genannt. Es ist ein Positionssystem zur Basis 2. Der Wert einer Ziffer ist also abhängig von der Position innerhalb der Zahl. Jede Ziffer hat den doppelten Stellenwert der ihr rechts folgenden Ziffer. Im Dualsystem dargestellte Zahlen nennt man Dualzahlen.

■ **Beispiel:**

Der Dualzahl 1 001 101 entspricht die Dezimalzahl
$1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 64+0+0+8+4+0+1 = 77.$

Die Umrechnung von einem Zahlensystem in ein anderes wird als Konvertierung bezeichnet. Werden mehrere Zahlensysteme gleichzeitig benutzt, so ist es zur Vermeidung von Irrtümern üblich, die Basis als Index anzuhängen.

■ **Beispiel:**

$1\,001\,101_2 = 77_{10}$

Die Darstellung reeller Zahlen im Dualsystem ist analog der Darstellung im Dezimalsystem. Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich dadurch, dass die n-te Stelle vor dem Komma mit 2^{n-1} und die m-te Stelle nach dem Komma mit 2^{-m} multipliziert wird.

■ **Beispiel:**

$$101\,100\,011,1011_2 = 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4}$$
$$= 256 + 64 + 32 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 355\,\frac{11}{16} = 355,6875_{10}$$

Dualsysteme sind sehr bedeutend in Elektrotechnik und Datenverarbeitung. Computer sind zeichenverarbeitende Maschinen. Die externen Zeichen (Buchstaben, Ziffern, Sonderzeichen) werden intern im Binärcode in Form von Bitfolgen dargestellt. Ein Bit (Abkürzung von Binary Digit) ist die kleinste darstellbare Informationseinheit mit den Werten 0 und 1. Acht Bit werden zur nächsthöheren Einheit, dem Byte, zusammengefasst. Zahlen werden in Computern in mehreren aufeinanderfolgenden Bytes dargestellt. Die interne Durchführung arithmetischer Operationen erfolgt im Computer also im Dualsystem.

Andere Zahlensysteme, die im Zusammenhang mit der Nutzung von Computern eine Rolle spielen, sind das Oktalsystem (Positionssystem zur Basis 8) mit den Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7 und das Hexadezimalsystem (Positionssystem zur Basis 16) mit den Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F (die Buchstaben A,. . . ,F stehen für die Werte 10,. . . ,15).

1.8.3 Runden

Als Dezimalstellen einer Dezimalzahl bezeichnet man die Stellen nach dem Komma. Runden ist das Verkürzen einer Dezimalzahl, also die Darstellung einer Dezimalzahl mit einer vorgegebenen Anzahl von Dezimalstellen.

Rundungsregel

Ist die erste weggelassene Ziffer 0,1,2,3,4, dann bleibt die letzte geschriebene Ziffer unverändert. Ist die erste weggelassene Ziffer 5,6,7,8,9, dann erhöht sich die letzte geschriebene Ziffer um 1.

Ist die gerundete Zahl kleiner als die ursprüngliche Zahl (die erste weggelassene Ziffer ist dann 0,1,2,3 oder 4), spricht man von Abrunden. Ist die gerundete Zahl jedoch größer als die ursprüngliche Zahl (die erste weggelassene Ziffer ist dann 5,6,7,8 oder 9), so spricht man von Aufrunden.

■ **Beispiele:**

1. $3,456 \approx 3,46$ (aufgerundet)
2. $23,699 \approx 23,70$ (aufgerundet)
3. $14,3449 \approx 14,34$ (abgerundet)
4. $17,249\,638\,9 \approx 17,2496$ (auf 4 Dezimalstellen gerundet)

1.9 Logarithmen

1.9.1 Definition des Logarithmus

Eine Zahl der Form $\log_a b$ (gesprochen: Logarithmus b zur Basis a) heißt Logarithmus. Dabei heißt b Numerus des Logarithmus und ist eine reelle Zahl größer als 0, und a heißt Basis des Logarithmus und ist eine positive reelle Zahl ungleich 1.

$\log_a b$	Logarithmus b zur Basis a
$b > 0$	Numerus
$a > 0,\ a \neq 1$	Basis

Der Logarithmus $\log_a b$ ist definiert als die eindeutige Lösung x der Gleichung $a^x = b$.

$$\boxed{\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b}$$

Der Logarithmus $x = \log_a b$ ist also der Exponent zu der Basis a, für den die Potenz a^x gleich dem Numerus b ist.
Aus der Definition folgt (denn $a^1 = a$ und $a^0 = 1$)

$$\boxed{\log_a a = 1} \quad \boxed{\log_a 1 = 0}$$

■ **Beispiele:**

1.	$\log_2 8 = x$	$\Rightarrow\ x = 3$	denn $2^3 = 8$
2.	$\log_4 16 = x$	$\Rightarrow\ x = 2$	denn $4^2 = 16$
3.	$\log_7 7 = x$	$\Rightarrow\ x = 1$	denn $7^1 = 7$
4.	$\log_5 1 = x$	$\Rightarrow\ x = 0$	denn $5^0 = 1$
5.	$\log_3 81 = x$	$\Rightarrow\ x = 4$	denn $3^4 = 81$
6.	$\log_5 5^7 = x$	$\Rightarrow\ x = 7$	denn $5^7 = 5^7$
7.	$\log_{10} 1000 = x$	$\Rightarrow\ x = 3$	denn $10^3 = 1000$
8.	$\log_2 0,5 = x$	$\Rightarrow\ x = -1$	denn $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
9.	$\log_a 8 = 1$	$\Rightarrow\ a = 8$	denn $8^1 = 8$
10.	$\log_a \frac{1}{125} = -3$	$\Rightarrow\ a = 5$	denn $5^{-3} = \frac{1}{125}$
11.	$\log_a \frac{3}{5} = -1$	$\Rightarrow\ a = \frac{5}{3}$	denn $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$
12.	$\log_{10} b = -1$	$\Rightarrow\ b = 0,1$	denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
13.	$\log_4 b = \frac{5}{2}$	$\Rightarrow\ b = 32$	denn $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = 2^5 = 32$

1.9.2 Spezielle Basen

Logarithmen zur Basis $a = 10$ heißen Zehnerlogarithmen oder dekadische Logarithmen oder briggssche Logarithmen (nach dem englischen Mathematiker Henry Briggs, 1556-1630). Man schreibt statt $\log_{10} b$ auch einfach $\lg b$.

$$\boxed{\log_{10} b = \lg b}$$

Logarithmen mit der eulerschen Zahl $e = 2,718\,281\,82\ldots$ als Basis (vgl. Abschnitt 8.4.5) werden natürliche Logarithmen oder nepersche Logarithmen (nach dem schottischen Mathematiker John Neper (Napier), 1550-1617) genannt. Man schreibt $\ln b$ für $\log_e b$.

$$\boxed{\log_e b = \ln b}$$

Die eulersche Zahl e ist der Grenzwert der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ (vgl. Abschnitt 8.1.5):
$e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2,718\,281\,828\,4\ldots$.
Sie hat ihren Namen nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783). Die eulersche Zahl ist eine irrationale Zahl.

Logarithmen zur Basis $a = 2$ heißen Zweierlogarithmen oder binäre Logarithmen oder duale Logarithmen. Man schreibt statt $\log_2 b$ manchmal auch ld b.

$$\boxed{\log_2 b = \mathrm{ld}\ b}$$

■ **Beispiele:**

1.	$\log_2 32 = \mathrm{ld}\ 32 = x$	$\Rightarrow\ x = 5$	denn $2^5 = 32$
2.	$\mathrm{ld}\ \sqrt{2} = x$	$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2}$	denn $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
3.	$\log_{10} 10\,000 = \lg 10\,000 = x$	$\Rightarrow\ x = 4$	denn $10^4 = 10\,000$
4.	$\lg 0,01 = x$	$\Rightarrow\ x = -2$	denn $10^{-2} = 0,01$
5.	$\log_e 5 = \ln 5 = x$	$\Rightarrow\ x = 1,6094\ldots$	denn $e^{1,6094\ldots} = 5$

1.9.3 Regeln der Logarithmenrechnung

1. Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. Oder: Addiert man zum Logarithmus einer Zahl u den Logarithmus einer Zahl v, dann erhält man als Summe den Logarithmus des Produkts uv.

$$\boxed{\log_a(u\cdot v) = \log_a u + \log_a v}$$

Beweis:
Setze $\log_a u = x,\ \log_a v = y \ \Rightarrow\ \log_a u + \log_a v = x + y$
$a^x = u,\ a^y = v \ \Rightarrow\ u\cdot v = a^x\cdot a^y = a^{x+y} \ \Rightarrow\ \log_a(u\cdot v) = x + y$

■ **Beispiel:** $\log_2 256 =$ld $256 =$ ld $(4\cdot 64)$ =ld 4+ld $64 = 2+6 = 8$

2. Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler (Dividend) und Nenner (Divisor). Oder: Subtrahiert man vom Logarithmus einer Zahl u den Logarithmus einer Zahl v, dann erhält man als Differenz den Logarithmus des Bruches (Quotienten) $\frac{u}{v}$.

$$\boxed{\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v}$$

Beweis:
Setze $\log_a u = x,\ \log_a v = y \ \Rightarrow\ \log_a u - \log_a v = x - y$
$a^x = u,\ a^y = v \ \Rightarrow\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ \Rightarrow\ \log_a \dfrac{u}{v} = x - y$

■ **Beispiel:** $\log_3 \dfrac{9}{243} = \log_3 9 - \log_3 243 = 2 - 5 = -3$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Basis. Oder: Multipliziert man den Logarithmus einer Zahl u mit einer Zahl r, dann erhält man den Logarithmus der Potenz u^r.

$$\boxed{\log_a(u^r) = r\cdot\log_a u}$$

Beweis:
Setze $\log_a u = x \quad\Rightarrow\quad a^x = u \quad\Rightarrow\quad u^r = (a^x)^r = a^{rx} \quad\Rightarrow\quad rx = \log_a(u^r) = r\log_a u$

■ **Beispiele:**

1. $\log_2 8^3 = 3\log_2 8 = 3\log_2 2^3 = 3\cdot 3 = 9$
2. $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4\lg 10 = 4$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten dividierten Logarithmus des Radikanden. Oder: Dividiert man den Logarithmus einer Zahl u durch eine Zahl n, dann erhält man den Logarithmus der Wurzel $\sqrt[n]{u}$.

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u}$$

Beweis:
Wegen $\sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$ folgt $\log_a \sqrt[n]{u} = \log_a u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\log_a u$ aus der Potenzregel.

■ **Beispiele:**

1. $\log_5 \sqrt[3]{5} = \dfrac{1}{3}\log_5 5 = \dfrac{1}{3}$
2. $\log_2 \sqrt[3]{64} = \dfrac{1}{3}\cdot\log_2 64 = \dfrac{1}{3}\cdot\log_2 2^6 = \dfrac{1}{3}\cdot 6 = 2$

5. Aus den Regeln ergeben sich die folgenden Spezialfälle (denn $\log_a \frac{1}{v} = \log_a 1 - \log_a v = 0 - \log_a v$).

$$\boxed{\log_a(a^r) = r}$$

$$\boxed{\log_a \frac{1}{v} = -\log_a v}$$

1.9.4 Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen

Für Logarithmen mit verschiedenen Basen a und c gilt folgende Umrechnungsregel

$$\boxed{\log_a u = \frac{\log_c u}{\log_c a}}$$

Beweis:
Setze $\log_a u = x$. Es folgt $a^x = u$, also auch $\log_c a^x = \log_c u$. Nach der Potenzregel ergibt sich $x\log_c a = \log_c u$ und nach x aufgelöst $x = \dfrac{\log_c u}{\log_c a}$. Wegen $x = \log_a u$ folgt die Behauptung: $\log_a u = \dfrac{\log_c u}{\log_c a}$.

Logarithmen zu verschiedenen Basen (a und c) unterscheiden sich also nur durch einen konstanten Faktor $(\frac{1}{\log_c a})$.

Für $c = u = b$ ergibt sich der Spezialfall

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

■ **Beispiele:**

1. $\ln u = \dfrac{1}{\lg e} \cdot \lg u = \dfrac{1}{0,4342\ldots} \cdot \lg u$
2. $\lg u = \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \ln u = \dfrac{1}{2,3025\ldots} \cdot \ln u$
3. $\log_5 u = \dfrac{1}{\lg 5} \cdot \lg u = \dfrac{1}{0,6989\ldots} \cdot \lg u$
4. $\ln 1000 = \dfrac{1}{\lg e} \cdot \lg 1000 \approx \dfrac{1}{0,434\,294\,481\,9} \cdot 3 \approx 6,907\,755\,279$

1.9.5 Dekadische Logarithmen

Die dekadischen Logarithmen (auch Briggssche Logarithmen oder Zehnerlogarithmen genannt) haben den Vorteil, dass man mit den Logarithmen der Dezimalzahlen zwischen 1 und 10 über die Logarithmen aller positiven reellen Zahlen verfügt.

Begründung: Jede reelle Zahl x lässt sich durch Abspalten einer Zehnerpotenz 10^k mit ganzzahligem k in der Form $x = 10^k \cdot \bar{x}$ mit $1 \leq \bar{x} < 10$ schreiben. Dabei ist $\bar{x}$ durch die Ziffernfolge von x bestimmt, während 10^k die Größenordnung von x angibt. Logarithmieren ergibt $\lg x = \lg(10^k \cdot \bar{x}) = \lg(10^k) + \lg \bar{x} = k + \lg \bar{x}$ mit $0 \leq \lg \bar{x} < 1$ (also $\lg \bar{x} = 0,\ldots$). Man nennt k die Kennzahl und die Ziffernfolge hinter dem Komma von $\lg \bar{x}$ die Mantisse des Logarithmus von x.

Von einer vor dem Komma n-stelligen Zahl ist die Kennzahl $n-1$ (also um 1 kleiner). Für Zahlen kleiner als 1 sind die Kennzahlen negativ.

Logarithmentafeln enthalten in der Regel nur die Mantisse.

Alle Zahlen, die sich nur durch Zehnerpotenzen unterscheiden, haben die gleiche Mantisse, aber unterschiedliche Kennzahlen.

■ **Beispiele:**

1. $\lg 2250 = \lg(1000 \cdot 2,25) = \lg(10^3 \cdot 2,25) = \lg 10^3 + \lg 2,25 \approx 3 + 0,3522 = 3,3522$
2. $\lg 0,0315 = \lg(3,15 \cdot \frac{1}{100}) = \lg(3,15 \cdot 10^{-2}) = \lg 3,15 + \lg 10^{-2} \approx 0,4983 - 2$
3. $\lg 2000 = \lg(10^3 \cdot 2) = \lg 10^3 + \lg 2 \approx 3 + 0,3010 = 3,3010$,
   $\lg 200 \approx 2,3010$, $\lg 20 \approx 1,3010$, $\lg 2 \approx 0,3010$,
   $\lg 0,2 \approx 0,3010 - 1$, $\lg 0,02 \approx 0,3010 - 2$, $\lg 0,002 \approx 0,3010 - 3$

1.10 Mittelwerte

1.10.1 Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $\bar{x}_a = \bar{x}$ zweier reeller Zahlen a und b ist die Hälfte ihrer Summe.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{a+b}{2}}$$

Das arithmetische Mittel $\bar{x}_a = \bar{x}$ von n reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist

$$\boxed{\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}$$

■ **Beispiele:**

1. Das arithmetische Mittel von 3 und 17 ist $\dfrac{3+17}{2} = 10.$
2. Das arithmetische Mittel von $6, -4, 3, 12, 5, 2$ ist
   $\dfrac{6-4+3+12+5+2}{6} = 4.$

1.10.2 Geometrisches Mittel

Das geometrische Mittel $\bar{x}_g$ zweier positiver reeller Zahlen a und b ist die Quadratwurzel aus ihrem Produkt.

$$\boxed{\bar{x}_g = \sqrt{a \cdot b}}$$

Das geometrische Mittel $\bar{x}_g$ von n positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist

$$\boxed{\bar{x}_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

■ **Beispiele:**

1. Das geometrische Mittel von 3 und 12 ist $\sqrt{3 \cdot 12} = 6.$
2. Das geometrische Mittel von 3,5,9,15 ist $\sqrt[4]{3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15} = \sqrt[4]{2025} = 3\sqrt[4]{25}.$

1.10.3 Harmonisches Mittel

Das harmonische Mittel $\bar{x}_h$ zweier von Null verschiedener reeller Zahlen a und b ist Zwei geteilt durch die Summe ihrer Kehrwerte.

$$\boxed{\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}$$

Das harmonische Mittel $\bar{x}_h$ von n von Null verschiedenen reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist

$$\boxed{\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}$$

■ **Beispiele:**

1. Das harmonische Mittel von 3 und 6 ist $\dfrac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$
2. Das harmonische Mittel von $3, 4, 6, 12$ ist $\dfrac{4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \dfrac{4}{\frac{10}{12}} = \dfrac{24}{5} = 4,8.$

1.10.4 Quadratisches Mittel

Das quadratische Mittel $\bar{x}_q$ zweier reeller Zahlen a und b ist die Quadratwurzel der halben Summe ihrer Quadrate.

$$\boxed{\bar{x}_q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

Das quadratische Mittel $\bar{x}_q$ von n reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist

$$\boxed{\bar{x}_q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}}$$

■ **Beispiele:**

1. Das quadratische Mittel von 1 und 7 ist $\sqrt{\frac{1^2+7^2}{2}} = \sqrt{25} = 5$.
2. Das quadratische Mittel von 2, 6, 10, 16 ist $\sqrt{\frac{2^2+6^2+10^2+16^2}{4}} = \sqrt{\frac{396}{4}} = \sqrt{99}$.

1.11 Ungleichungen

1.11.1 Definitionen und Rechenregeln

Zwischen zwei reellen Zahlen a und b besteht genau eine der drei Beziehungen: $a = b$ (a ist gleich b), $a < b$ (a ist kleiner als b), $a > b$ (a ist größer als b). Der Winkelhaken ist dabei immer nach der größeren Seite hin geöffnet.

$$\boxed{a, b \in \mathbb{R}: \quad a = b \quad \text{oder} \quad a < b \quad \text{oder} \quad a > b}$$

Wegen dieser Eigenschaft nennt man die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen geordnet.

Im Falle $a \neq b$ (a ungleich b) gilt genau eine der beiden Ungleichungen $a < b$ oder $a > b$.

$$\boxed{a \neq b \quad \Rightarrow \quad a < b \quad \text{oder} \quad a > b}$$

Die Ungleichung $a \leq b$ bedeutet, dass a kleiner oder gleich b ist (a ist also nicht größer als b), und die Ungleichung $a \geq b$ bedeutet entsprechend, dass a größer oder gleich b ist (b ist also nicht größer als a).

Ist $a < b$ und $b < c$, dann kann man die beiden Ungleichungen fortlaufend schreiben: $a < b < c$. Man nennt dies fortlaufende Ungleichung oder Ungleichungskette.

$$\boxed{a < b < c \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad \text{und} \quad b < c}$$

Entsprechend schreibt man zum Beispiel $a < x$ und $x \leq b$ zusammenfassend als $a < x \leq b$. Fortlaufende Ungleichungen werden oft benutzt, um einen Bereich oder ein Intervall anzugeben, aus dem eine Größe x gewählt werden darf oder gewählt werden soll.

Eigenschaften von Ungleichungen:

1. $a \leq a$ (Reflexivität)
2. $a \leq b$ und $b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$ (Transitivität)
3. $a \leq b$ und $b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$ (Antisymmetrie)

Rechenregeln für Ungleichungen:

- Eine Ungleichung kann von beiden Seiten gelesen werden:

  $a < b \;\Leftrightarrow\; b > a \quad$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

- Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf dieselbe Zahl addiert werden:
  $a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c \quad$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Zwei gleichgerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden:
  $a \le b$ und $c \le d \;\Rightarrow\; a + c \le b + d \quad$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
  $a < b$ und $c \le d \;\Rightarrow\; a + c < b + d \quad$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- Eine Ungleichung darf mit einer nichtnegativen Zahl multipliziert werden:
  $a \le b$ und $c \ge 0 \;\Rightarrow\; ac \le bc \quad$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
  Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:
  $a \le b$ und $c \le 0 \;\Rightarrow\; ac \ge bc \quad$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
- Bildet man auf beiden Seiten einer Ungleichung den Kehrwert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:
  $a \le b \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b} \quad$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^*$

Aus der Multiplikationsregel folgt im besonderen (Multiplikation mit -1), dass das Vertauschen der Vorzeichen auf beiden Seiten einer Ungleichung das Ungleichheitszeichen umdreht:
$a < b \;\Rightarrow\; -a > -b.$

■ **Beispiele:**

1. $3 \le 3;\; 5 \ge 5;\; -12{,}2 \le -12{,}2$
2. $3 \le 5,\; 5 \le 6 \;\Rightarrow\; 3 \le 6; \quad -4 \ge -5,\; -5 \ge -7{,}1 \;\Rightarrow\; -4 \ge -7{,}1$
3. $3 \le 3,\; 3 \ge 3 \;\Rightarrow\; 3 = 3$
4. $3 < 5 \;\Leftrightarrow\; 5 > 3; \;\; -1 > -2 \;\Leftrightarrow\; -2 < -1$
5. $5 \le 7 \;\Rightarrow\; 5 + 2 \le 7 + 2; \quad 4 > 1 \;\Rightarrow\; 4 - 3 > 1 - 3$
6. $3 < 4,\; 7 < 9 \;\Rightarrow\; 3 + 7 < 4 + 9; \quad 4 \ge 3,\; -2 \ge -5 \;\Rightarrow\; 4 - 2 \ge 3 - 5$
7. $5 \le 7 \;\Rightarrow\; 5 \cdot 3 \le 7 \cdot 3; \quad -3 > -4 \;\Rightarrow\; -3 \cdot 2 > -4 \cdot 2$
8. $4 > 2 \;\Rightarrow\; 4 \cdot (-2) < 2 \cdot (-2); \quad 6 \le 7 \;\Rightarrow\; 6 \cdot (-1) \ge 7 \cdot (-1) \;\Rightarrow\; -6 \ge -7$
9. $2 < 3 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}; \quad -5 > -6 \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{5} < -\dfrac{1}{6}$

1.11.2 Absolutbetrag

Der Betrag oder Absolutbetrag $|a|$ einer Zahl a stellt auf der Zahlengeraden den Abstand der Zahl a vom Nullpunkt dar. Da Abstände nicht negativ sind, gilt $|a| = a$ für $a \ge 0$ und $|a| = -a$ für $a < 0$.

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \ge 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}}$$

Beträge sind nicht negativ.

Eigenschaften:

1. $|-a| = |a|$
2. $|a| \ge 0; \quad |a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$; $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ für $b \neq 0$
5. $|a^n| = |a|^n$ für $n \in \mathbb{N}$; $\left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$ für $n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (sogenannte Dreiecksungleichung)

■ **Beispiele:**

1. $|4,3| = 4,3$; $|-2| = 2$; $|-\pi| = \pi$; $|0| = 0$
2. $|3 \cdot 4| = |3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$; $|(-3) \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$
3. $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{|-2|}{|3|} = \frac{2}{3}$; $\left|\frac{1}{-4}\right| = \frac{1}{|-4|} = \frac{1}{4}$
4. $|(-3)^5| = |-3|^5 = 3^5$; $\left|\frac{1}{(-2)^3}\right| = \frac{1}{|-2|^3} = \frac{1}{2^3}$
5. $|4 + 2| \leq |4| + |2| \;\Rightarrow\; 6 \leq 4 + 2 = 6$; $|5 - 3| \leq |5| + |-3| \;\Rightarrow\; 2 \leq 5 + 3 = 8$

1.11.3 Intervalle

Es seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen x, die die fortlaufende Ungleichung $a < x < b$ erfüllen, heißt Intervall oder Zahlenintervall mit den Endpunkten oder Randpunkten a und b (genauer: offenes und beschränktes Intervall).

Gehört der Randpunkt nicht selbst zum Intervall, so spricht man von einem offenen Intervallende, im entgegengesetzten Fall von einem abgeschlossenen Intervallende.

Die Angabe eines Intervalls erfolgt durch seine Randpunkte a und b, indem diese in Klammern gesetzt werden. Eine eckige Klammer steht für ein abgeschlossenes Intervallende, eine runde für ein offenes Intervallende. Gehören beide Randpunkte zu dem Intervall, so heißt es abgeschlossen. Gehört nur einer der Randpunkte (also entweder a oder b) zum Intervall, so heißt es halboffen. Gehört keiner der Randpunkte zum Intervall, so heißt es offen.

Intervalle dienen der Beschreibung von Zahlenmengen. Man unterscheidet beschränkte und nicht beschränkte Intervalle.

Bei einem beschränkten Intervall sind die Intervallgrenzen a und b reelle Zahlen. Es besteht aus allen reellen Zahlen x, die zwischen diesen beiden Grenzen liegen.

Beschränkte Intervalle	$[a, b]$	$= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
	(a, b)	$= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$	(offenes Intervall)
	$[a, b)$	$= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$	(halboffenes Intervall)
	$(a, b]$	$= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$	(halboffenes Intervall)

Das Symbol mit der Schreibweise ∞ heißt unendlich und steht für „beliebig groß“. Das Symbol $-\infty$ heißt entsprechend minus unendlich und steht für „beliebig klein“. Die Symbole ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen; $-\infty$ ist kleiner als jede reelle Zahl, ∞ ist größer als jede reelle Zahl.

Bei einem nicht beschränkten Intervall ist mindestens eine der Intervallgrenzen $-\infty$ oder ∞. Solche Intervalle können durch eine Ungleichung beschrieben werden.

Nicht beschränkte Intervalle	$[a, \infty)$	$=$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq a\}$	(halboffenes Intervall, nach rechts unbeschränkt)
	(a, ∞)	$=$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > a\}$	(offenes Intervall, nach rechts unbeschränkt)
	$(-\infty, a]$	$=$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq a\}$	(halboffenes Intervall, nach links unbeschränkt)
	$(-\infty, a)$	$=$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < a\}$	(offenes Intervall, nach links unbeschränkt)
	$(-\infty, \infty)$	$=$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	(offenes Intervall, nach links und nach rechts unbeschränkt)

■ **Beispiele:**

1. $[3, 4] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 \leq x \leq 4\}$
   Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; sowohl 3 als auch 4 gehören zum Intervall.
2. $[3, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 \leq x < 4\}$
   Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; 3 gehört zum Intervall, 4 jedoch nicht.
3. $(3, 4] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 < x \leq 4\}$
   Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; 3 gehört nicht zum Intervall, aber 4.
4. $(3, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 < x < 4\}$
   Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; weder 3 noch 4 gehören zum Intervall.
5. $[3, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 3\}$
   Alle reellen Zahlen größer oder gleich 3 gehören zum Intervall (3 gehört dazu).
6. $(3, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 3\}$
   Alle reellen Zahlen größer als 3 gehören zum Intervall (3 gehört nicht dazu).
7. $(-\infty, 4] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq 4\}$
   Alle reellen Zahlen kleiner oder gleich 4 gehören zum Intervall (4 gehört dazu).
8. $(-\infty, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < 4\}$
   Alle reellen Zahlen kleiner als 4 gehören zum Intervall (4 gehört nicht dazu).
9. $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   Alle reellen Zahlen gehören zum Intervall.

1.12 Komplexe Zahlen

1.12.1 Algebraische Form

Im Bereich der reellen Zahlen besitzt die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung. Ebenso stellen $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt[4]{-6}$ keine reellen Zahlen dar.

Falls eine quadratische Gleichung keine reelle Lösung besitzt, ist es trotzdem möglich, Lösungen anzugeben und zwar komplexe Zahlen als Lösungen. Zur Darstellung dieser komplexen Zahlen wird eine Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen vorgenommen.

Ausgangspunkt ist die imaginäre Einheit i, deren Quadrat gleich -1 ist: $i^2 = -1$.

Imaginäre Einheit i $\boxed{i^2 = -1}$

Für die imaginäre Einheit gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1 \\ i^{4n-3} = i,\ i^{4n-2} = -1,\ i^{4n-1} = -i,\ i^{4n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}}$$

Die Zahlen i und $-i$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Mit dieser imaginären Einheit i und zwei reellen Zahlen a und b stellt $z = a + bi$ eine komplexe Zahl dar.

$$\boxed{z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1}$$

Eine komplexe Zahl z besteht also aus einem reellen Teil a (Realteil) und einem imaginären Teil b (Imaginärteil).

Wenn a und b alle möglichen reellen Werte durchlaufen, dann werden alle möglichen komplexen Zahlen z erzeugt. Alle komplexen Zahlen bilden zusammen die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}}$$

Komplexe Zahlen z mit Realteil gleich 0 (also $a = 0$) heißen imaginäre Zahlen, die komplexen Zahlen z mit Imaginärteil gleich 0 (also $b = 0$) sind die reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen umfassen also die imaginären Zahlen und die reellen Zahlen.

$z = a + bi$	komplexe Zahlen
$z = bi \ (a = 0)$	imaginäre Zahlen
$z = a \ (b = 0)$	reelle Zahlen

Komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$, also mit gleichem Realteil und entgegengesetzt gleichem Imaginärteil, heißen konjugiert komplex.

Komplexe Zahlen sind nicht mehr auf einer Zahlengeraden, sondern nur noch in einer Zahlenebene, der sogenannten gaußschen Zahlenebene, darstellbar (Name nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777-1855).

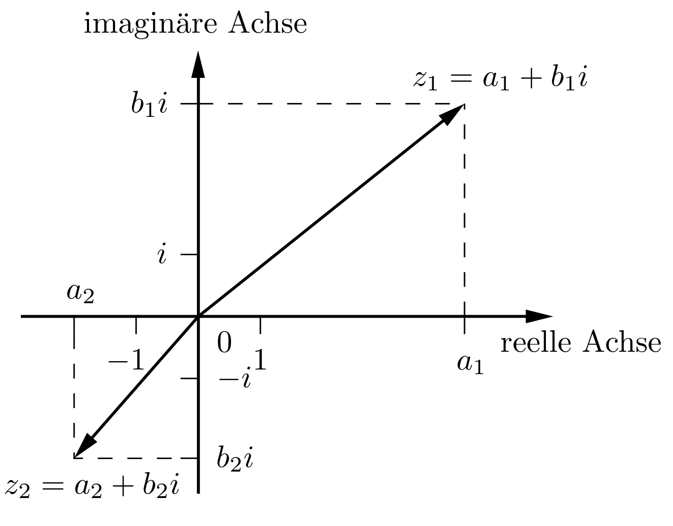


Abbildung 1.1 Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Dabei wird in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene (siehe Abschnitt 7.1.1) der Realteil a von z auf der Abszissenachse und der Imaginärteil b von z auf der Ordinatenachse abgetragen. Jeder komplexen Zahl entspricht ein Punkt der Ebene und umgekehrt. Die Zuordnung von Zahl und Punkt ist eineindeutig. Die reellen Zahlen liegen auf der Abszissenachse, die imaginären Zahlen liegen auf der Ordinatenachse. Deshalb nennt man die Abszissenachse auch reelle Achse und die Ordinatenachse imaginäre Achse.

Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form $z = a + bi$, bei der kartesische Koordinaten verwendet werden, heißt algebraische Form. Daneben gibt es für die Darstellung der komplexen Zahlen die trigonometrische Form und die Exponentialform.

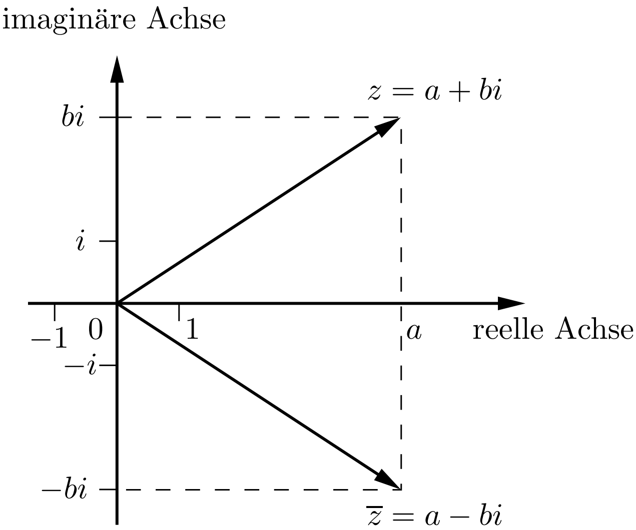


Abbildung 1.2 Konjugiert komplexe Zahlen z und $\bar{z}$ in algebraischer Form

1.12.2 Trigonometrische Form

Neben der Darstellung der komplexen Zahlen in algebraischer Form gibt es die Darstellung in trigonometrischer Form (vgl. Abschnitt 6): $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dabei heißt r Modul oder Absolutbetrag (also $r = |z|$) und φ Argument der komplexen Zahl z. Der (orientierte) Winkel φ wird im Bogenmaß (vgl. Abschnitt 3.10.9) gemessen und ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Deshalb wählt man meist für φ das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$, also $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \in \mathbb{R},\ r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi}$$

Für $\varphi = 0$ ergeben sich die positiven reellen Zahlen, für $\varphi = \pi$ die negativen reellen Zahlen, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die positiven imaginären Zahlen und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ die negativen imaginären Zahlen.

Statt trigonometrischer Form sagt man mitunter auch goniometrische Form der komplexen Zahlen.

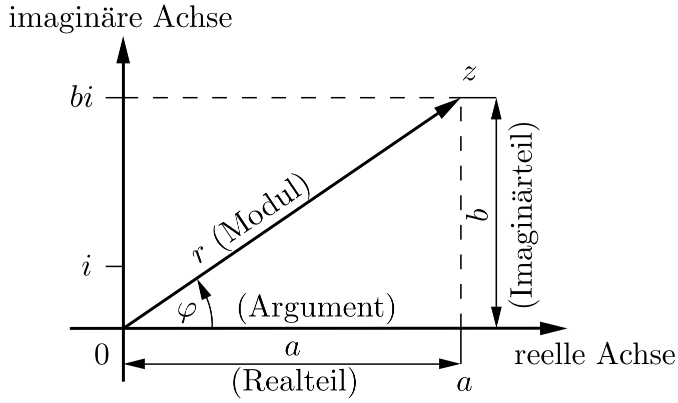


Abbildung 1.3 Algebraische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl z

Für die Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene werden für die trigonometrische Form Polarkoordinaten (siehe Abschnitt 7.1.2) verwendet, wohingegen für die algebraische Form kartesische Koordinaten (siehe Abschnitt 7.1.1) benutzt werden.

Für den Zusammenhang zwischen algebraischer und trigonometrischer Form gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \\ a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi \end{array}}$$

Derselbe Zusammenhang gilt für die kartesischen Koordinaten und die Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene.

Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen lassen sich in der trigonometrischen Form einfacher durchführen.

1.12.3 Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ werden addiert, indem man die Realteile addiert und die Imaginärteile addiert.

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

Komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ werden voneinander subtrahiert, indem man die Realteile subtrahiert und die Imaginärteile subtrahiert.

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

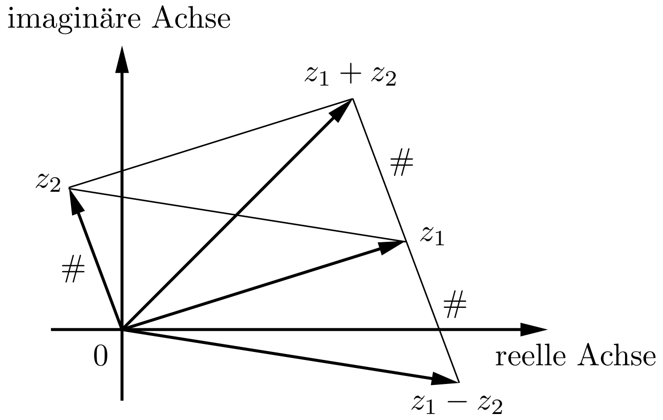


Abbildung 1.4 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen z_1 und z_2 (die mit # gekennzeichneten Strecken sind parallel und gleich lang)

Die Summe konjugiert komplexer Zahlen $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$ ist reell, die Differenz konjugiert komplexer Zahlen ist imaginär.

$$\boxed{z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a, \; z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi}$$

■ **Beispiele:**

1. $z_1 + z_2 = (2,66 + 0,89i) + (-0,81 + 1,49i) = 1,85 + 2,38i$
2. $z_1 - z_2 = (2,66 + 0,89i) - (-0,81 + 1,49i) = 3,47 - 0,60i$
3. $z + \bar{z} = (2,4 + 0,9i) + (2,4 - 0,9i) = 4,8$
4. $z - \bar{z} = (2,4 + 0,9i) - (2,4 - 0,9i) = 1,8i$

1.12.4 Multiplizieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ in algebraischer Form werden wie algebraische Summen multipliziert (denn $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ wegen $i^2 = -1$).

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2}$$

■ **Beispiele:**

1. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(5 - 2i) = (3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2)) + (3 \cdot (-2) + 5 \cdot 4)i = 23 + 14i$
2. $z \cdot \bar{z} = (2,4 + 0,9i)(2,4 - 0,9i) = (2,4)^2 + (0,9)^2 = 5,76 + 0,81 = 6,57$

Komplexe Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ in trigonometrischer Form werden multipliziert, indem man die Moduln (r_1 und r_2) multipliziert und die Argumente (φ_1 und φ_2) addiert.

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\ &= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)i]\\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],\end{aligned}$$

denn $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1+\varphi_2)$ und $\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 = \sin(\varphi_1+\varphi_2)$ (siehe Abschnitt 6.6).

■ **Beispiele:**

3. $z_1 = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ),\ z_2 = 7(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ)$
   $\Rightarrow\ z_1\cdot z_2 = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\cdot 7(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ) = 21(\cos 85^\circ + i\sin 85^\circ)$

4. $z_1 = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i;\ \ z_2 = 13(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = \frac{13}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i$
   (denn $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$). Es folgt
   $z_1\cdot z_2 = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\cdot 13(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 65(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 65i$
   oder
   $$z_1\cdot z_2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i\right)\left(\frac{13}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i\right) = \frac{65}{4}\sqrt{3} - \frac{65}{4}\sqrt{3} + \left(\frac{65\cdot 3}{4} + \frac{65}{4}\right)i = 65i$$

1.12.5 Dividieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ in algebraischer Form werden dividiert, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners (Divisors) erweitert.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i \quad (z_2 \neq 0)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}\\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i\end{aligned}$$

Der Quotient konjugiert komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.

$$\boxed{\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}\,i \quad (z \neq 0)}$$

■ **Beispiele:**

1. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{5 - 2i} = \frac{3\cdot 5 + 4\cdot(-2)}{5^2 + (-2)^2} + \frac{4\cdot 5 - 3\cdot(-2)}{5^2 + (-2)^2}\,i = \frac{15 - 8}{25 + 4} + \frac{20 + 6}{25 + 4}\,i = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}\,i$

2. $$\begin{aligned}\frac{z}{\bar{z}} &= \frac{2,4 + 0,9i}{2,4 - 0,9i} = \frac{(2,4)^2 - (0,9)^2}{(2,4)^2 + (0,9)^2} + \frac{2\cdot 2,4\cdot 0,9}{(2,4)^2 + (0,9)^2}\,i\\ &= \frac{5,76 - 0,81}{5,76 + 0,81} + \frac{4,32}{5,76 + 0,81}\,i = \frac{4,95}{6,57} + \frac{4,32}{6,57}\,i\end{aligned}$$

3. $\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = -i$

Komplexe Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ in trigonometrischer Form werden dividiert, indem man die Moduln (r_1 und r_2) dividiert und die Argumente (φ_1 und φ_2) subtrahiert.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\,i}{\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]
\end{aligned}$$

denn $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ (siehe Abschnitt 6.6).

■ **Beispiele:**

4. $z_1 = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ),\ z_2 = 7(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ)$

   $$\Rightarrow\ \frac{z_2}{z_1} = \frac{7(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ)}{3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)} = \frac{7}{3}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

5. $z_1 = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\,i,$

   $z_2 = 13(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = \frac{13}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i$

   Es folgt

   $$\begin{aligned}
   \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)}{13(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \frac{5}{13}\,(\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))\\
   &= \frac{5}{13}\,(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ) = \frac{5}{13}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,i\right) = \frac{5}{26}\sqrt{3} - \frac{5}{26}\,i
   \end{aligned}$$

   oder

   $$\begin{aligned}
   \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\,i}{\frac{13}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i} = \frac{\left(\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\,i\right)\left(\frac{13}{2} - \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i\right)}{\left(\frac{13}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i\right)\left(\frac{13}{2} - \frac{13}{2}\sqrt{3}\,i\right)}\\
   &= \frac{\frac{65}{4}\sqrt{3} - \frac{65}{4}\cdot 3\,i + \frac{65}{4}\,i + \frac{65}{4}\sqrt{3}}{169} = \frac{5}{26}\sqrt{3} - \frac{5}{26}\,i
   \end{aligned}$$

1.12.6 Potenzieren komplexer Zahlen

Ist n eine nichtnegative ganze Zahl, so wird die n-te Potenz z^n von z wie üblich durch $z^0 = 1,\ z^n = z^{n-1}\cdot z$ definiert.

■ **Beispiele:**

1. $z^3 = (a+bi)^2(a+bi) = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\,i$
2. $$\begin{aligned} z^4 &= (a+bi)^3(a+bi) = [a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i](a+bi)\\ &= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)\,i\end{aligned}$$

Einfacher lässt sich das Potenzieren komplexer Zahlen in der trigonometrischen Form durchführen. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen (vgl. Abschnitt 6.6) erhält man die Formel von Moivre (nach dem französischen Mathematiker Abraham de Moivre, 1667-1754).

$$\boxed{z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N})}$$

Eine komplexe Zahl in trigonometrischer Form wird also in die n-te Potenz erhoben, indem man den Modul (r) in die entsprechende Potenz r^n erhebt und das Argument (φ) mit dem Exponenten n multipliziert.

■ **Beispiel:**

3. $z = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i$

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left[\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i\right]^4 \\
&= \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^4 + \left[4\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^3\cdot\frac{5}{2} - 4\,\frac{5}{2}\sqrt{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]i \\
&= \frac{625\cdot 9}{16} - \frac{6\cdot 25\cdot 3\cdot 25}{4\cdot 4} + \frac{625}{16} + \left[\frac{4\cdot 125\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot 5}{8\cdot 2} - \frac{4\cdot 5\cdot\sqrt{3}\cdot 125}{2\cdot 8}\right]i \\
&= -\frac{625}{2} + \frac{625\cdot\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^4 &= [5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)]^4 = 5^4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) \\
&= 5^4(-\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ) = 5^4\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) = -\frac{625}{2} + \frac{625\cdot\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Die Moivresche Formel lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Ihre Gültigkeit lässt sich schrittweise bis auf reelle Exponenten ausdehnen.

1.12.7 Radizieren komplexer Zahlen

Die n-te Wurzel $\sqrt[n]{z}$ einer komplexen Zahl z ist definiert als eine komplexe Zahl w, deren n-te Potenz gleich z ist, also eine Lösung der Gleichung $w^n = z$.

Setzt man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, dann folgt mit der Formel von Moivre $w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ und wegen $w^n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ weiter $\rho^n = r$, $\cos n\psi = \cos\varphi$, $\sin n\psi = \sin\varphi$. Aus $\rho^n = r$ ergibt sich $\rho = \sqrt[n]{r}$, während es für $\cos n\psi = \cos\varphi$, $\sin n\psi = \sin\varphi$ wegen $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$, $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$ genau n verschiedene Lösungen $\psi_k = \dfrac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, gibt.

Somit gilt:

Für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $w^n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ genau n verschiedene Lösungen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (die n-ten Wurzeln aus z).

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}\right),\quad k = 1, 2, \ldots, n}$$

Die n-te Wurzel aus z ist also nicht eindeutig. Für $k = 1$ ergibt sich der sogenannte Hauptwert w_1 der n-ten Wurzel.

Hauptwert $$\boxed{w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)}$$

Stellt man die n-ten Wurzeln $w_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n$ in der Gaußschen Zahlenebene dar, so ergeben sich die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Punkte liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\rho = \sqrt[n]{r}$. Der Hauptwert w_1 besitzt das Argument $\frac{\varphi}{n}$. Durch wiederholte Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ erhält man die weiteren Lösungen.

■ **Beispiel:**

$z = 2,985\,984(\cos 60° + i\sin 60°) = (1,2)^6(\cos 60° + i\sin 60°),\ \ n = 6$

Wegen $\sqrt[n]{r} = \sqrt[6]{(1,2)^6} = 1,2$ und $\frac{\varphi}{n} = \frac{60°}{6} = 10°$ lauten die sechsten Wurzeln aus z:

$w_1 = 1,2(\cos 10° + i\sin 10°)$, $w_2 = 1,2(\cos 70° + i\sin 70°)$
$w_3 = 1,2(\cos 130° + i\sin 130°)$, $w_4 = 1,2(\cos 190° + i\sin 190°)$
$w_5 = 1,2(\cos 250° + i\sin 250°)$, $w_6 = 1,2(\cos 310° + i\sin 310°)$

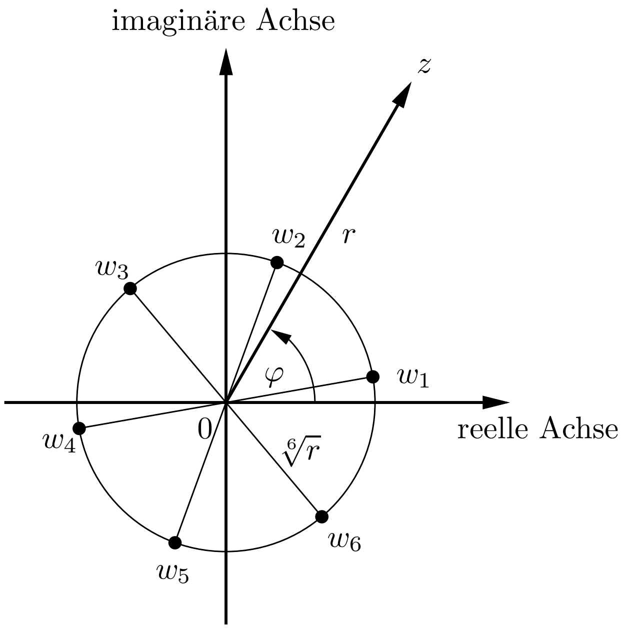


Abbildung 1.5 Die sechsten Wurzeln $w_1, w_2, \ldots, w_6$ aus $z = (1,2)^6(\cos 60° + i\sin 60°)$

Die n-ten Wurzeln aus $z = 1$ sind die sogenannten n-ten Einheitswurzeln.

n-te Einheitswurzeln $$\boxed{\text{Lösungen von } w^n = z = 1}$$

■ **Beispiele:**

1. $n = 2:\ \ z = w^2 = 1$
   $w_1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°) = 1;\ \ w_2 = 1(\cos 180° + i\sin 180°) = -1$

2. $n = 3: \quad z = w^3 = 1$
   $w_1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1$
   $w_2 = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 1(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$
   $w_3 = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 1(-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$
3. $n = 4: \quad z = w^4 = 1$
   $w_1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1$
   $w_2 = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = i$
   $w_3 = 1(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -1$
   $w_4 = 1(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -i$

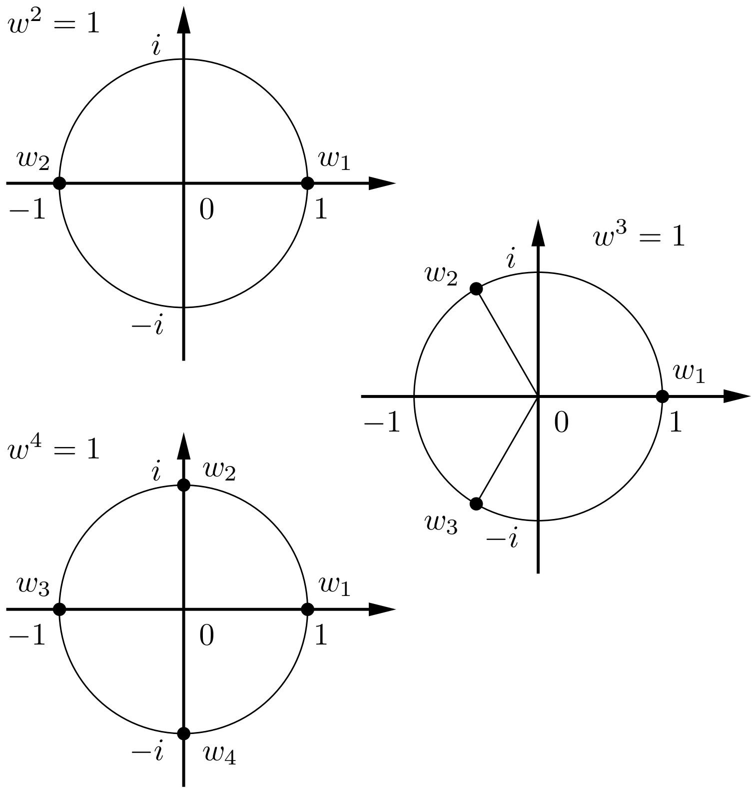


Abbildung 1.6 Die n-ten Einheitswurzeln für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$

1.12.8 Eulersche Formel

Die eulersche Formel für komplexe Zahlen z verknüpft die Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 5.7.1) und die trigonometrischen Funktionen (siehe Abschnitt 6) miteinander (nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707-1783). Dabei ist e die eulersche Zahl (vgl. Abschnitt 1.8).

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}}$$

Für reelle Zahlen x (die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen) gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Setzt man $x = \varphi$, dann erhält man die sogenannte Exponentialform der komplexen Zahlen.

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

Dabei ist r der Modul und φ das Argument der komplexen Zahl z.

Für das Produkt und den Quotienten zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ ergibt sich

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\[2mm] \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0) \end{array}}$$

■ **Beispiel für eine komplexe Zahl in verschiedenen Formen:**

$$\begin{aligned} z &= 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\Big) = 1 + \sqrt{3}\,i && \text{(algebraische Form)} \\ &= 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) && \text{(trigonometrische Form)} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} && \text{(Exponentialform)} \end{aligned}$$