

# **Gravitationswellen im Hinblick auf die Entdeckung am LIGO**

Yannik Schüler

Bachelorarbeit in Physik  
angefertigt im Physikalischen Institut

vorgelegt der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität  
Bonn

August 2016

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Bonn, .....  
Datum

.....  
Unterschrift

1. Gutachter: Prof. Dr. Albrecht Klemm
2. Gutachter: Dr. Hans Jockers

# Inhaltsverzeichnis

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Linearisierung der Einstein'schen Gleichungen</b>                                | <b>3</b>  |
| 2.1      | Entwicklung bis zur ersten Ordnung der Störung . . . . .                            | 3         |
| 2.2      | Die Lorentz-Eichung . . . . .   | 5         |
| 2.3      | Vakuum Lösungen und die TT-Eichung . . . . .  | 7         |
| <b>3</b> | <b>Interaktion mit Testmassen</b>   | <b>9</b>  |
| 3.1      | Die Geodätische Gleichung und die Deviationsgleichung . . . . .                     | 9         |
| 3.2      | Das TT-Bezugssystem . . . . .   | 11        |
| 3.3      | Das lokale Lorentz-System . . . . .   | 12        |
| 3.4      | Polarisation von Gravitationswellen . . . . .                                       | 14        |
| 3.5      | Das Detektorsystem . . . . .  | 15        |
| <b>4</b> | <b>Produktion von Gravitationswellen</b>  | <b>17</b> |
| <b>5</b> | <b>Die mit Gravitationswellen transportierte Energie</b>                            | <b>21</b> |
| 5.1      | Die Kurzwellennäherung . . . . .  | 21        |
| 5.2      | Der Energieimpulstensor von Gravitationswellen . . . . .                            | 23        |
| 5.3      | Die abgestrahlte Energie nichtrelativistischer Quellen . . . . .                    | 24        |
| <b>6</b> | <b>Binäre Systeme</b>   | <b>27</b> |
| 6.1      | Produzierte Gravitationswellen . . . . .  | 27        |
| 6.2      | Strahlungsrückwirkung und die charakteristische Wellenform . . . . .                | 29        |
| <b>7</b> | <b>Detektion von Gravitationswellen am LIGO</b>                                     | <b>33</b> |
| 7.1      | Das Michelson-Interferometer . . . . .  | 33        |
| 7.2      | Die Wirkung von Gravitationswellen auf ein Michelson-Interferometer . . . . .       | 34        |
| 7.3      | Realisierung eines Gravitationswelleninterferometers am Beispiel von LIGO . . . . . | 36        |
| 7.4      | Störungsquellen und Sensitivität . . . . .  | 37        |
| <b>8</b> | <b>Interpretation der ersten Messung von Gravitationswellen</b>                     | <b>39</b> |
| <b>9</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>43</b> |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>45</b> |
| <b>A</b> | <b>Rechnungen zur TT-Eichung</b>  | <b>47</b> |
| A.1      | Existenz der Eichfunktion . . . . .   | 47        |
| A.2      | Projektor von der Lorentz- in die TT-Eichung . . . . .                              | 49        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>B Störungsrechnung über einem gekrümmten Hintergrund</b>                      | <b>51</b> |
| <b>C Ausführliche Herleitung des Energieimpulstensors von Gravitationswellen</b> | <b>63</b> |
| C.1 Eichinvarianz . . . . .  | 63        |
| C.2 Woran der erste Ansatz für den Energieimpulstensor scheitert . . . . .       | 65        |
| C.3 Ein neuer Ansatz: Der Brill-Hartle Energieimpulstensor . . . . .             | 66        |
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>   | <b>69</b> |

## Einleitung

---

Es war eine Sensation, als Anfang diesen Jahres bekannt gegeben wurde, dass es am 14. September 2015 zum ersten Mal gelungen war, Gravitationswellen direkt zu messen [1]. Im Jahre 1916 von Einstein postuliert [2, 3] brauchte es fast ein ganzes Jahrhundert, bis der erste Nachweis glückte. In dieser Zeit hatte es über die Frage nach der Existenz von Gravitationswellen angeregte Diskussionen gegeben. Einstein erkannte schon früh, dass ihr Effekt sehr klein sein sollte und kam sogar 1936 zwischenzeitlich zu dem Schluss, Gravitationswellen würden doch nicht existieren [4]. Über die Jahre konnte jedoch ein allgemein akzeptiertes Bild von diesem Sachverhalt erarbeitet werden und nach ersten Evidenzen für gravitationelle Strahlung im Jahre 1979 durch die Beobachtung des Energieverlusts eines binären Systems [5] fehlte bis vor Kurzem bloß noch eine direkte Messung dieses Effekts.

Diese Ausarbeitung soll als Einführung in das weite Feld der Gravitationswellen dienen. In Kapitel 2 wollen wir dazu den selben Weg wie damals Einstein einschlagen und die Einstein'schen Feldgleichungen für schwache Felder entwickeln. Wir werden sehen, dass in dieser Approximation Wellenlösungen für die Metrik auftreten können und werden anschließend in Kapitel 3 ihren Einfluss auf Testmassen untersuchen, was die Grundlage für eine später diskutierte Detektionsmöglichkeit sein wird. Im Anschluss daran wird sich in Kapitel 4 mit der Frage beschäftigt werden, wie Gravitationswellen produziert werden können.

Im Laufe dieser Untersuchungen werden wir einige Hinweise darauf finden, dass Gravitationswellen Energie transportieren sollten. Wir werden jedoch schnell erkennen, dass eine Berechnung dieser Energieabgabe eine genauere Herangehensweise an das Problem erfordert als zuvor angenommen. Mit der Lösung dieses Problems wird sich Kapitel 5 befassen, bevor wir anschließend in Kapitel 6 das erste Mal unser erlangtes Wissen anwenden wollen. Wir werden dort die gravitationelle Strahlung eines binären Systems unter Beachtung der Strahlungsrückwirkung bestimmen.

In Kapitel 7 wollen wir nachfolgend am Beispiel vom *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (kurz LIGO) über die Detektionsmöglichkeit von Gravitationswellen mit Hilfe von Interferometern sprechen. Abschließend wollen wir uns dann in Kapitel 8 der ersten Messung von Gravitationswellen am LIGO widmen und werden sehen, dass wir mit dem Wissen, welches wir in den vorangegangenen Kapiteln gesammelt haben, in der Lage sind, die Messung in kleinen Teilen zu interpretieren.

Ziel dieser Ausarbeitung ist es vor allem, Lücken in Rechnungen und Beweisen zu schließen, wie sie in vielen Standardlehrbüchern, wie zum Beispiel [6–8], zu finden sind. Die Notation wird sich dabei vor allem an [6] orientieren. Auf abweichende oder weiterführende Bezeichnungen werde ich an gegebener Stelle aufmerksam machen.



## Linearisierung der Einstein'schen Gleichungen

Das zentrale Element der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die von Einstein aufgestellte Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Sie beschreibt wie Materie und Energie, repräsentiert durch  $T_{\mu\nu}$ , den Raum krümmen, in welchem sich die Materie bewegt. Die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit wird durch die Metrik  $g_{\mu\nu}$  und den daraus abgeleiteten Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  repräsentiert.

Da es sich bei der Gleichung um ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen handelt, ist ein großes mathematisches Problem exakte Lösungen für diese zu finden. Im Jahr 1916 präsentierte Einstein daher einen approximativen Lösungsansatz für schwache Gravitationsfelder [2]. Man nimmt dazu an, dass die Metrik die Form

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.2)$$

annimmt, das heißt bis auf eine geringe Abweichung der Minkowskimetrik entspricht. Mit Hilfe dieses Ansatzes lassen sich alle Größen in (2.1) bis zu einer beliebigen Ordnung in  $\varepsilon$  entwickeln. Mit dieser Prozedur wird sich der erste Abschnitt dieses Kapitel befassen. In den weiteren betrachten wir dann die Implikationen dieser Näherung und befassen uns speziell mit dem quellenfreien Fall  $T_{\mu\nu} = 0$ .

In dieser Notation sollte natürlich  $h_{\mu\nu}(x)$  in der Größenordnung von  $\eta_{\mu\nu}$  liegen, was ich mit  $h_{\mu\nu}(x) \sim 1$  notiere. In den meisten Büchern wird  $\varepsilon = 1$  gesetzt und gefordert, dass  $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ . Dass ich die  $\varepsilon$ -Notation wie in [9] bevorzuge hat verschiedene Gründe: Zum einen ist es einfacher Terme in Ordnungen eines Skalars als in denen von Tensorkomponenten zu sortieren und zum anderen lassen sich so später einfacher Forderungen an  $\partial_\rho h_{\mu\nu}(x)$  und höhere Ableitungen stellen. Ein Ziel dieser Ausarbeitung ist es nämlich unter anderem die Forderungen an  $h_{\mu\nu}(x)$  möglichst genau herauszuarbeiten, denn ein Großteil der Lehrbücher lässt diesen wichtigen Punkt in der Diskussion der Schwachfeldnäherung zumeist wegfallen. Die Vorgehensweise orientiert sich in diesem Kapitel vor allem an [6, 8, 10].

### 2.1 Entwicklung bis zur ersten Ordnung der Störung

Im Folgenden wird die Notation  $f(x) = O(g(\varepsilon))$  genutzt, sofern eine Konstante  $M$  existiert, sodass  $f(x) < M \cdot g(\varepsilon)$ , während  $\varepsilon$  gegen Null geht. Diese Notation wird auch in [9] vorgeschlagen.

Wir möchten (2.1) bis zur ersten Ordnung in der Störung (erste Ordnung in  $\varepsilon$ ) entwickeln. Indices werden dabei im Folgenden immer über  $\eta^{\mu\nu}$  gehoben und gesenkt; so auch  $h^{\mu\nu} := \eta^{\mu\alpha}\eta^{\mu\beta}h_{\alpha\beta}$ . Dies ist

eine sinnvolle Wahl, da

$$\begin{aligned}
 (\eta_{\mu\alpha} + \varepsilon h_{\mu\alpha})(\eta^{\alpha\nu} - \varepsilon h^{\alpha\nu}) &= \delta_\mu^\nu - \varepsilon \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\gamma} h_{\beta\gamma} + \varepsilon \eta^{\alpha\nu} h_{\mu\alpha} - \varepsilon^2 \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\gamma} h_{\mu\alpha} h_{\beta\gamma} \\
 &= \delta_\mu^\nu - \varepsilon \eta^{\gamma\gamma} h_{\mu\gamma} + \varepsilon \eta^{\alpha\nu} h_{\mu\alpha} + O(\varepsilon^2) \\
 &= \delta_\mu^\nu + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Damit gilt in erster Näherung  $g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\nu} - \varepsilon h^{\alpha\nu} + O(\varepsilon^2)$ . Die Christoffel Symbole berechnen sich somit zu

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Daraus lässt sich nun der Riemann-Tensor in Ordnungen von  $\varepsilon$  entwickeln.

$$\begin{aligned}
 R_{\nu\rho\sigma}^\mu &= \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \underbrace{\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu}_{\text{Terme zweiter Ordnung in } \varepsilon} \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} \partial_\rho \eta^{\mu\lambda} (\partial_\nu h_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\nu\sigma}) - \varepsilon \frac{1}{2} \partial_\sigma \eta^{\mu\lambda} (\partial_\nu h_{\rho\lambda} + \partial_\rho h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\nu\rho}) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\sigma}) + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

An dieser Stelle schleicht sich ganz unauffällig eine weitere Einschränkung für  $h_{\mu\nu}$  ein: Die Terme zweiter Ordnung in  $\varepsilon$  enthalten Ausdrücke der Form  $(\partial_\rho h_{\mu\nu})(\partial_\alpha h_{\beta\gamma})$ . Damit die Entwicklung in  $\varepsilon$  gerechtfertigt ist, muss daher  $(\partial_\rho h_{\mu\nu})(\partial_\alpha h_{\beta\gamma}) \sim \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}$  gelten. Ansonsten könnten vernachlässigte Terme trotz zweiter Ordnung in  $\varepsilon$  größer als die Terme erster Ordnung werden.

Bei den Christoffelsymbolen trat ein solches Skalenproblem noch nicht auf. Hier werden erst weitere Einschränkungen folgen, wenn wir uns in Kapitel 5 ein genaueres Bild von Gravitationswellen erarbeiten.

Durch Kontrahieren von  $\mu$  und  $\rho$  in (2.5) erhält man aus dem Riemann-Tensor den Ricci-Tensor

$$\begin{aligned}
 R_{\nu\sigma} &= R_{\nu\mu\sigma}^\mu \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\nu\mu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\nu\sigma}) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu}^\mu - \partial_\sigma \partial_\nu h - \square h_{\nu\sigma}) + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei  $h := \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  gesetzt wurde. Weiteres Kontrahieren ergibt den Ricci-Skalar

$$\begin{aligned}
 R &= (\eta^{\nu\sigma} - \varepsilon h^{\nu\sigma}) R_{\nu\sigma} \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\mu\sigma} - \square h - \square h_{\nu}^\nu) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h) + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

All dies zusammen liefert uns den Einstein-Tensor

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\
 &= \varepsilon \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu h_{\nu}^\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda h_{\mu}^\lambda - \partial_\nu \partial_\mu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned} \tag{2.8}$$



welcher die linke Seite von Gleichung (2.1) repräsentiert.

## 2.2 Die Lorentz-Eichung

Um den Ausdruck für den Einstein-Tensor (2.8) weiter zu vereinfachen, nutzen wir eine wichtige Eigenschaft der Einstein'schen Gleichungen aus: Sie sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Nun haben wir zwar durch die Forderung, dass die Metrik unseres Koordinatensystems, abgesehen von einer kleinen Störung, der Minkowskimetrik entsprechen soll, diese Symmetrie gebrochen, jedoch bleibt immer noch eine gewisse Eichfreiheit erhalten.

Betrachte dazu ein Vektorfeld  $\xi^\mu$  mit  $\partial_\sigma \xi_\rho \sim h_{\mu\nu}$  und die damit assoziierte Koordinatentransformation

$$\psi_\xi : x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu(x), \quad (2.9)$$

die alle Koordinaten um  $-\varepsilon \xi^\mu$  verschiebt. Unter dieser ändert sich die Störung gemäß

$$\begin{aligned} \varepsilon h_{\mu\nu} &\mapsto \varepsilon \tilde{h}_{\mu\nu} = (\psi_\xi^{-1})^* g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ &= g_{\alpha\beta} (\tilde{\partial}_\mu x^\alpha) (\tilde{\partial}_\nu x^\beta) - \eta_{\mu\nu} \\ &= (\eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}) (\delta_\mu^\alpha + \varepsilon \partial_\mu \xi^\alpha + O(\varepsilon^2)) (\delta_\nu^\beta + \varepsilon \partial_\nu \xi^\beta + O(\varepsilon^2)) - \eta_{\mu\nu} \\ &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \varepsilon \partial_\mu \xi_\nu + \varepsilon \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dass es sich bei (2.9) um eine Eichtransformation handelt, sieht man daran, dass sie den Riemann-Tensor in der von uns betrachteten Näherung invariant lässt:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\tilde{\partial}_\rho \tilde{\partial}_\nu \tilde{h}_{\lambda\sigma} + \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\lambda \tilde{h}_{\nu\rho} - \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\nu \tilde{h}_{\lambda\rho} - \tilde{\partial}_\rho \tilde{\partial}_\lambda \tilde{h}_{\nu\sigma}) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\partial_\rho \partial_\nu (h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\lambda) + \partial_\sigma \partial_\lambda (h_{\nu\rho} + \partial_\nu \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\nu) - \partial_\sigma \partial_\nu (h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\lambda) \\ &\quad - \partial_\rho \partial_\lambda (h_{\nu\sigma} + \partial_\nu \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\nu)) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\nu\sigma}) + O(\varepsilon^2) \\ &= R^\mu_{\nu\rho\sigma} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Daraus ergibt sich, dass der Einstein-Tensor ebenfalls invariant unter dieser Transformation ist.

Um die Einstein'schen Gleichungen weiter zu vereinfachen, wählen wir nun  $\xi_\mu$  so, dass es

$$\square \xi_\mu = -\partial_\nu h^\nu_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu h \quad (2.12)$$

erfüllt. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{h}^\mu_\nu &= \partial_\mu h^\mu_\nu + \partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \xi^\mu \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \partial_\mu h^\mu_\nu - \partial_\mu h^\mu_\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu h + \partial_\mu \partial_\nu \xi^\mu \\ &= \frac{1}{2} \partial_\nu (h + 2 \partial_\mu \xi^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\nu \tilde{h}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

womit sich der Einstein-Tensor zu

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} &= \varepsilon \frac{1}{2} \left( \partial_\lambda \partial_\nu \tilde{h}^\lambda_\mu + \partial_\mu \partial_\lambda \tilde{h}^\lambda_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} - \square \tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\rho \tilde{h}^{\lambda\rho} + \eta_{\mu\nu} \square \tilde{h} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{h} + \partial_\mu \frac{1}{2} \partial_\nu \tilde{h} - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} - \square \tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \frac{1}{2} \partial^\lambda \tilde{h} + \eta_{\mu\nu} \square \tilde{h} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \frac{1}{2} \square \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square \tilde{h} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (2.14)$$

vereinfacht. Führt man nun die Notation  $\bar{h}_{\mu\nu} := \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{h}$  ein, so lassen sich die Einsteingleichungen kompakt als

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{\varepsilon} T_{\mu\nu} + O(\varepsilon) \quad (2.15)$$

schreiben. Auf Grund dieses Resultats wird die an dieser Stelle genutzte Eichung aus Ähnlichkeit zur Elektrodynamik oft als Lorentz-Eichung bezeichnet [8, S. 6]. Die Komponenten  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  erhalten wir nach der Bestimmung von  $\bar{h}_{\mu\nu}$  über

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} &= \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{h} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( \tilde{h} - \frac{1}{2} \cdot 4 \tilde{h} \right) \\ &= \tilde{h}_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Oftmals wird  $\bar{h}_{\mu\nu}$  als die spurumgekehrte Störung bezeichnet, da  $\bar{h}^\mu_\mu = -h^\mu_\mu$ .

Die Allgemeine Lösung von (2.15) lautet

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{\text{ret}} + \bar{h}_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (2.17)$$

wobei

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{ret}} = \frac{4G}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.18)$$

und  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(0)}$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  ist. Im anschließenden Kapitel werden wir uns detaillierter mit diesen Vakuumlösungen beschäftigen. Eine Diskussion der retardierten Lösung der Wellengleichung mit nicht verschwindenden Energieimpulstensor folgt erst in Kapitel 4.

Zu bemerken ist an dieser Stelle noch, dass die Eichbedingung (2.13) äquivalent zur Forderung

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu_\nu = 0 \quad (2.19)$$

ist, womit man in dieser Approximation die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{\varepsilon}{16\pi G} \partial^\mu \square \bar{h}_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = 0 + O(\varepsilon^2) \quad (2.20)$$

erhält. Diesen Ausdruck sollte man mit der vollständigen Kontinuitätsgleichung  $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$  vergleichen, wobei  $\nabla_\mu$  die kovariante Ableitung bezeichnet. Gleichung (2.20) sagt uns, dass sich die Massen, die als Quellen von Gravitationswellen dienen, in einer flachen Raumzeit auf Trajektorien, die durch ihre gegenseitige Wechselwirkung festgelegt werden, bewegen. Dass die Hintergrundmetrik der Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$  entspricht, bedeutet, dass die Bewegung dieser Körper in dieser Näherung durch das Newton'sche Gravitationsgesetz gegeben ist [8, S. 7]. Dies kann man als Hinweis darauf werten, dass die hier entwickelte Theorie zum einen nicht in der Lage ist, die Gravitationswellen von relativistischen

Quellen zu beschreiben und zum anderen nicht die Strahlungsrückwirkung auf das System der Massen berücksichtigt. Diesem Problem wenden wir uns in Kapitel 5 zu.

Bevor wir hier jedoch mit der Diskussion der Vakuumlösungen fortfahren, seien hier noch einmal kurz alle Forderungen zusammengefasst, die wir bisher an  $h_{\mu\nu}$  stellen müssen:

$$(2.I) \quad h_{\mu\nu} \sim 1$$

$$(2.II) \quad (\partial_\rho h_{\mu\nu})(\partial_\alpha h_{\beta\gamma}) \sim \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}$$

In Kapitel 5 werden diese beiden Forderungen noch einmal verschärft werden. Bis zu diesem Punkt reichen diese beiden jedoch aus.

## 2.3 Vakuum Lösungen und die TT-Eichung

Nun wollen wir uns speziell mit den Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.21)$$

beschäftigen. Dies entspricht dem quellenfreien Fall  $T_{\mu\nu} = 0$ . Gelöst wird diese Differentialgleichung durch

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(k) \cdot e^{ik^\lambda x_\lambda}, \quad (2.22)$$

wobei  $k^\lambda k_\lambda = 0$  gelten muss um (2.21) zu erfüllen und  $a_{\mu\nu} k^\mu = 0$  um die Eichbedingung (2.19) zu erfüllen. In der ersten, scheinbar simplen Forderung verbirgt sich eine interessante physikalische Konsequenz: Gravitationswellen breiten sich wie elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit aus. Dies zeigt einen weiteren Unterschied zwischen Allgemeiner Relativitätstheorie und Newton'scher Gravitation auf, da sich dort gravitationelle Effekte instantan bemerkbar machen.

Um Ausdruck 2.22 noch weiter vereinfachen zu können, betrachten wir nun die Koordinatentransformation

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + B^\mu(x, k). \quad (2.23)$$

mit  $B^\mu(x, k) = b^\mu(k) e^{ik^\lambda x_\lambda}$ . Angenommen,  $k^\mu b_\mu(k)$  ist in der Größenordnung von  $\tilde{h}_{\mu\nu}$ , dann transformiert die Störung nach

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} := \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + O(\varepsilon^2) \quad (2.24)$$

und damit die spurumgekehrte Störung nach

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} &:= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda B^\lambda + O(\varepsilon^2) \\ &= \underbrace{(a_{\mu\nu} - ik_\mu b_\nu - ik_\nu b_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda b^\lambda)}_{=: \tilde{a}_{\mu\nu}} \cdot e^{ik^\lambda x_\lambda} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Diese Transformation hat keinen Einfluss auf die Lorentzeichbedingung, da weiterhin  $\partial_\mu \tilde{\tilde{h}}^\mu_\nu = 0$  erfüllt ist. Im Anhang A.1 zeige ich, dass sich durch geschickte Wahl von  $b^\mu$  für jedes  $k^\mu$  und jeden zeitartigen Vektor  $u^\mu$  mit  $u_\mu u^\mu = -1$  folgende Eichbedingungen erfüllen lassen:

$$(i) \quad \tilde{a}_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (ii) \quad \tilde{a}^\mu_\mu = 0 \quad (iii) \quad \tilde{a}_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (2.26)$$

Man bezeichnet diese Eichung als die TT-Eichung (*transverse traceless gauge*). Ich nutze daher ab jetzt die Notation  $h_{\mu\nu}^{TT} := \tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}$ . Betrachtet man die Definition der spurumgekehrten Störung, so erkennt man,

dass mit Bedingung (ii) die Identität  $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu}$  erfüllt wird. Es muss folglich nicht mehr zwischen der spurumgekehrten und der ursprünglichen Störung unterschieden werden.

Betrachten wir nun eine in  $z$ -Richtung propagierende Welle  $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$  und setzen  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Damit übersetzt sich Eichbedingung (iii) in  $\tilde{a}_{\mu 0} = 0$  und (i) in  $\tilde{a}_{\mu 3} = 0$  für nicht verschwindendes  $k^0$ . Beachtet man nun, dass  $\tilde{a}_{\mu\nu}$  symmetrisch und (ii) erfüllt sein muss, so erhält man

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-ik^0(x^0 - x^3)} \quad (2.27)$$

mit freien Parametern  $h_+$  und  $h_\times$ . Ähnlich wie bei linear polarisierten elektromagnetischen Wellen findet man somit zwei linear unabhängige Polarisationen „+“ und „ $\times$ “ für Gravitationswellen. Was diese verschiedenen Polarisierungen physikalisch bedeuten, wird Kapitel 3 zeigen.

Betrachten wir nun die Superposition von Einzellösungen, das heißt

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4k \, a_{\mu\nu}(k) e^{ik^\lambda x_\lambda} \delta(k_\lambda k^\lambda). \quad (2.28)$$

Wir wissen, dass für jedes  $k^\mu$  ein  $b^\mu$  gefunden werden kann, sodass (2.26) erfüllt werden. Damit kann auch die Superposition in die TT-Eichung überführt werden:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4k \, \tilde{a}_{\mu\nu}(k) e^{ik^\lambda x_\lambda} \delta(k_\lambda k^\lambda). \quad (2.29)$$

Ist  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , dann gilt auch in diesem allgemeinen Fall  $h_{\mu 0}^{\text{TT}} = 0$  und  $h^{\text{TT}\mu}_\mu = 0$ .

In Anhang A.2 wird darüber hinaus gezeigt, dass der Projektor

$$\Lambda(k^\mu / |\vec{k}|)_{ij}^{kl} = \left( P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) \quad (2.30)$$

mit  $P_j^i = \delta_j^i - k^i k_j / |\vec{k}|^2$  eine ebene Welle in Lorentz-Eichung in die TT-Eichung überführt. Das heißt,

$$a_{ij}^{\text{TT}}(k) = \Lambda(k^\mu / |\vec{k}|)_{ij}^{kl} a_{kl}(k) \quad (2.31)$$

und (2.29) lässt sich somit auch als

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4k \, \Lambda(k^\mu / |\vec{k}|)_{ij}^{kl} a_{kl}(k) e^{ik^\lambda x_\lambda} \delta(k_\lambda k^\lambda) \quad (2.32)$$

schreiben.

Der  $\Lambda$ -Projektor stellt somit ein praktisches Hilfsmittel dar, um bei Bedarf von der Lorentz-Eichung in die TT-Eichung zu wechseln. Dies wird vor allem dann wichtig werden, wenn wir mit den Lösungen der inhomogenen Wellengleichung rechnen, welche im Allgemeinen nur in der Lorentz-Eichung sind, wir jedoch trotzdem die Eigenschaften (i) bis (iii) in (2.26) verwenden wollen.

## Interaktion mit Testmassen

In diesem Kapitel wollen wir den physikalischen Effekt von Gravitationswellen auf Testmassen untersuchen. Dies wird zum Einen helfen, ein recht anschauliches Bild von Gravitationswellen zu entwickeln und zum Anderen ist diese Diskussion notwendig, um später über ihre Detektion reden zu können.

Nun haben wir in Kapitel 2 gesehen, dass wir durch geschickte Wahl der Eichbedingungen – genauer gesagt in der TT-Eichung – die Komponenten des metrischen Tensors auf eine recht einfache Form bringen können. Die Wahl einer Eichung entspricht jedoch physikalisch gesehen der Wahl eines gewissen Bezugssystems, welches im Allgemeinen nicht mit dem übereinstimmen muss, in welchem wir später Messungen durchführen wollen.

Nach einer kurzen Wiederholung der Bewegung von Testmassen in der Allgemeinen Relativitätstheorie betrachten wir zuerst einmal die Bewegung von Teilchen im TT-System und beantworten die Frage, was es physikalisch heißt, sich in diesem Bezugssystem zu befinden. Anschließend stellen wir den Zusammenhang zum lokalen Lorenz-System her und diskutieren Einflüsse auf erdgebundene Detektoren, die sich in einem Nicht-Inertialsystem befinden (dem sog. *proper detector frame*).

Die Inhalte dieses Kapitels orientieren sich vor allem an [8, S. 13 ff.] und [7, S. 950 ff.].

### 3.1 Die Geodätische Gleichung und die Deviationsgleichung

Sei  $x^\mu(\lambda)$  die Trajektorie einer Testmasse parametrisiert durch einen Parameter  $\lambda \in (a, b)$ . Die Eigenzeit  $\tau$ , dh. die Zeit welche eine Uhr misst, die sich entlang der Bahnkurve bewegt, ist gegeben durch

$$\tau(\lambda) = \int_a^\lambda d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (3.1)$$

Die Vierergeschwindigkeit  $u^\mu$  eines Teilchens ist darüber definiert als

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.2)$$

Die Trajektorie einer Punktmasse muss die Geodätische Gleichung

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0} \quad (3.3)$$

erfüllen. Diese Forderung folgt aus der, dass die Bahnkurven von Punktmassen die Eigenzeit maximieren

sollen.

Betrachtet man nun eine zweite, benachbarte Geodäte  $x^\mu(\tau) + n^\mu(\tau)$ , so muss diese

$$\frac{d^2(x^\mu + n^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + n) \frac{d(x^\nu + n^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + n^\rho)}{d\tau} = 0 \quad (3.4)$$

erfüllen. Subtrahiert man (3.3) von (3.4) erhält man daraus

$$\frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) u^\nu u^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + n) u^\nu u^\rho + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + n) u^\nu \frac{dn^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + n) \frac{dn^\nu}{d\tau} \frac{dn^\rho}{d\tau} = 0 \quad (3.5)$$

Angenommen,  $n^\mu$  ist so klein, dass sich  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  und die partiellen Ableitungen nur minimal ändern, so gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) - \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + n) \approx n^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x). \quad (3.6)$$

Vernachlässigt man nun Terme zweiter Ordnung in  $\frac{dn^\rho}{d\tau}$ , erhält man

$$\frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) u^\nu \frac{dn^\rho}{d\tau} + n^\alpha (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)) u^\nu u^\rho = 0. \quad (3.7)$$

Führt man die Notation

$$\frac{DV^\mu}{d\tau} := \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (3.8)$$

für die kovariante Ableitung eines Vektorfelds  $V^\mu$  entlang einer Kurve  $x^\mu$  ein, so lässt sich (3.7) mit Hilfe des Riemann Tensors kompakt als

$$\boxed{\frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} n^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}} \quad (3.9)$$

schreiben. Dass dieser Ausdruck wirklich zu (3.7) äquivalent ist, zeigt sich, indem man beide Seiten der Gleichung ausschreibt:

$$\begin{aligned} \frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} &= \frac{D}{d\tau} \left( \frac{dn^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu n^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu n^\nu \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu) n^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha n^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho n^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu) n^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha n^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} n^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \left( \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \right) n^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (3.11)$$

Eine Addition der beiden Ausdrücke führt dann, wie behauptet, auf (3.7). Mit Hilfe dieser Gleichung können wir im Folgenden eine Aussage darüber machen, in wie weit sich der Abstand zwischen zwei Testmassen mit der Zeit im jeweils gewählten Bezugssystem ändert. Es handelt sich dabei jedoch nur um

den Koordinatenabstand zwischen zwei Punkten. Damit hängt dieser Wert natürlich stark von der Wahl des Bezugssystems ab.

## 3.2 Das TT-Bezugssystem

Um eine erste physikalische Intention zu bekommen, wie Gravitationswellen auf Materie wirken, betrachten zuerst einmal die Geodätische und die Deviations-Gleichung im TT-System.

Da  $h_{\mu 0}^{\text{TT}}(x^\lambda) = h_{0\mu}^{\text{TT}}(x^\lambda) = 0$  an jedem Koordinatenpunkt, gilt dort

$$\Gamma_{00}^\mu(x) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\partial_0 h_{0\lambda} + \partial_0 h_{\lambda 0} - \partial_\lambda h_{00}) = 0 \quad (3.12)$$

Setzt man den Ansatz  $u^\mu(\tau) = (1, 0, 0, 0)$  in die Geodätische Gleichung ein, erhält man damit

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) u^\nu u^\rho &= 0 + \Gamma_{00}^\mu(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

womit gezeigt ist, dass

$$x^\mu(\tau) = u^\mu \cdot \tau + x^\mu(0) \quad (3.14)$$

die Trajektorie einer Testmasse im TT-System beschreibt. Ein Teilchen behält in diesem Bezugssystem scheinbar unbeeinflusst von den Gravitationswellen seine gleichförmige Bewegung bei bzw. bleibt in Ruhe. Nun heißt „in Ruhe“ in diesem Fall jedoch nichts weiter, als dass sich die Position der Testmasse im Koordinatensystem nicht ändert.

Dass  $\tau$  in Gleichung (3.14) auch der Eigenzeit des Teilchens entspricht zeigt

$$\int_0^\tau d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \int_0^\tau d\lambda \sqrt{-g_{00}} = \int_0^\tau d\lambda = \tau. \quad (3.15)$$

Mit diesem Ergebnis vereinfacht sich die Deviationsgleichung (3.7) für im Koordinatensystem ruhende Testmassen zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2 \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) u^\nu \frac{dn^\rho}{d\tau} + n^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) u^\nu u^\rho \\ &= \frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2 \Gamma_{0\rho}^\mu(x) \frac{dn^\rho}{d\tau} + n^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{00}^\mu(x) \\ &= \frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2 \Gamma_{0\rho}^\mu(x) \frac{dn^\rho}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese Gleichung wird natürlich durch  $n^\mu(\tau) = \text{const}$  erfüllt. Dies ist in Übereinstimmung mit unserer Lösung der Geodätischen Gleichung. Der Koordinatenabstand zwischen zwei Testmassen, die sich zu Anfang im TT-System in Ruhe befinden, ändert sich daher auf Grund von Gravitationswellen nicht. Anschaulich strecken und stauchen sich die Koordinaten, sodass ein zuvor ruhendes Teilchen in diesem Koordinatensystem durch die Wellen nicht in Bewegung gerät.

Dies gilt jedoch nicht für das Längenquadrat  $s^2 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$  zwischen zwei Massen an den Stellen

$x^\mu = (\tau, x^1, 0, 0)$  und  $x'^\mu = (\tau, x'^1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu)} \\
 &= \sqrt{g_{ij} n^i n^j} \\
 &= \sqrt{(\eta_{ij} + \varepsilon h_{ij}^{\text{TT}}) n^i n^j} \\
 &\approx \sqrt{n_i n^i} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n_i n^i}} h_{lk}^{\text{TT}} n^l(0) n^k(0)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Im letzten Schritt wird bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  entwickelt. Die Diskussion dieses Ergebnis wird in Abschnitt 3.4 verschoben. Zuerst werden wir uns mit einem geeigneterem Koordinatensystem für Experimente befassen – dem lokale Lorentz-System.

### 3.3 Das lokale Lorentz-System

Wir möchten nun den Einfluss von Gravitationswellen auf ein Bezugssystem untersuchen, in welchem später auch Messungen durchgeführt werden können, dh. die Koordinatenzeit gleich der Eigenzeit des Systems ist und alle Achsen orthonormal sind. Ein solches Koordinatensystem lässt sich in einer Umgebung um einen gewissen Punkt – in diesem Fall spricht man von einem lokalen Lorentz-System – oder sogar entlang einer Geodäte konstruieren [11]. Man spricht in diesem Fall von den *Fermi normal coordinates*. Die Metrik nimmt im zuletzt genannten die Form

$$\begin{aligned}
 dn^2 &= \left(-1 - R_{0l0m} x^l x^m\right) dx^{02} + \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iljm} x^l x^m\right) dx^i dx^j \\
 &\quad - \left(\frac{4}{3} R_{0ljm} x^l x^m\right) dt dx^j + O(|x^j|^3) dx^\mu dx^\nu
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

an [12], wobei  $R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}$  die Komponenten des Riemann Tensors ausgewertet an der jeweiligen Stelle der Weltlinie von  $x^j = 0$  sind. Man sieht, dass wie gefordert für  $x^j \rightarrow 0$  die Metrik gegen die Minkowskimetrik konvergiert.

Betrachten wir nun die Deviationsgleichung (3.9) entlang  $x^j = 0$ . Mit der dazugehörigen Vierergeschwindigkeit  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  erhält man

$$\frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma} n^\rho u^\nu u^\sigma = -R^\mu_{0\rho 0} n^\rho. \tag{3.19}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieses Koordinatensystems ist, dass die Christoffelsymbole entlang der Weltlinie  $x^j = 0$  verschwinden, womit ebenfalls  $d\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x(\tau))/d\tau = 0$  gilt. Das wiederum hat zur Folge, dass alle Terme, die Christoffelsymbole oder deren Ableitung enthalten, in  $D^2 n^\mu/d\tau^2$  wegfallen. Womit sich Gleichung (3.19) zu

$$\frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{0\rho 0} n^\rho \tag{3.20}$$

vereinfacht. Nun haben wir in Kapitel 2 gezeigt, dass der Riemann Tensor in erster Ordnung invariant gegenüber der Transformation in die TT-Eichung ist, sofern  $h_{\mu\nu}$  zuvor Kriterium (2.I) und (2.I) erfüllte. Beachtet man zusätzlich, dass die Koordinatenzeit der Eigenzeit entspricht, findet man in erster Ordnung



in  $h_{\mu\nu}$ , dass

$$\frac{d^2 n^\mu}{dx^{02}} = -R^{\text{TT}\mu}_{0\rho 0} n^\rho = \frac{\varepsilon}{2} \partial_0^2 h^{\text{TT}\mu}_{\rho} n^\rho, \quad (3.21)$$

da alle anderen Terme auf Grund der TT-Eichung verschwinden. Da  $h^{\text{TT}}_{0\mu} = 0$  gilt, löst  $n^0 = \text{const}$  die Bewegungsgleichung für  $\mu = 0$ . Man setze nun  $\delta n^i(t) := n^i(t) - n^i(0)$ . Für vergleichsweise kleine Auslenkungen  $\delta n^i(t)$  gilt dann  $n^i(t) \approx n^i(0)$ . Damit geht (3.21) in

$$\partial_0^2 \delta n^i(t) = \frac{\varepsilon}{2} n^j(0) \partial_0^2 h^{\text{TT}i}_j \quad (3.22)$$

über. Integrieren liefert dann die Lösung

$$\delta n^i(t) = \frac{\varepsilon}{2} h^{\text{TT}}(t)^i_j n^j(0), \quad (3.23)$$

womit

$$n^i(t) = \left( \delta^i_j + \frac{\varepsilon}{2} h^{\text{TT}}(t)^i_j \right) n^j(0). \quad (3.24)$$

Der Abstand, den ein Photon von  $x^\mu(t) = (t, 0, 0, 0)$  nach  $x'^\mu(t) = (t, \vec{n})$  durchqueren muss, ist damit gleich

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{g_{ij}(x) n^i(t) n^j(t)} \\ &= \sqrt{\eta_{ij} \left( \delta^i_l + \frac{\varepsilon}{2} h^{\text{TT}}(t)^i_l \right) n^l(0) \left( \delta^j_k + \frac{\varepsilon}{2} h^{\text{TT}}(t)^j_k \right) n^k(0)} \\ &= \sqrt{\left( \delta_{lk} + \varepsilon h^{\text{TT}}_{lk} + \frac{1}{4} \varepsilon^2 h^{\text{TT}}_{ik} h^{\text{TT}i}_l \right) n^l(0) n^k(0)} \\ &\approx \sqrt{n_i(0) n^i(0)} + \frac{\varepsilon}{2 \sqrt{n_i(0) n^i(0)}} h^{\text{TT}}_{lk} n^l(0) n^k(0). \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei wir im letzten Schritt den Ausdruck bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  entwickeln. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem aus der Diskussion des TT-Systems. Dass Gravitationswellen auf die Länge von Photontrajektorien wirken, wird das zentrale Element der in Kapitel 7 vorgestellten Detektionsmöglichkeit sein.

Bevor wir jedoch weiter die physikalischen Implikationen dieses Ergebnisses studieren, soll zuerst noch einmal die in Abschnitt 3.1 verwendete Forderung  $\frac{dn^\rho}{d\tau} \ll 1$  diskutiert werden, die wir benötigten um Gleichung (3.5) in (3.7) umformen zu können. Dieses Kriterium ist mit der in (3.24) vorgestellten Lösung für  $n^\rho$  gegeben, da dort  $\frac{dn^\rho}{d\tau} \sim \varepsilon h^{\text{TT}}(\tau)_{\mu\nu}$  gilt. Die in (3.5) vernachlässigten Terme waren somit zweiter Ordnung in  $\varepsilon$ , womit die Approximation gerechtfertigt war.

Des Weiteren wurde gefordert, dass sich die Christoffelsymbole von  $x^\mu$  nach  $x^\mu + n^\mu$  nahezu nicht ändern. Dies ist vor allem eine Einschränkung für Detektoren, da dies bedeutet, dass ihre Länge wesentlich kleiner sein muss als die übliche Länge auf der sich die Christoffelsymbole ändern. Sei daher  $\lambda$  die effektive Wellenlänge von  $h_{\mu\nu}$ . Dann ist  $\Gamma^\rho_{\mu\nu} \sim \partial_\alpha h_{\beta\gamma} \sim h_{\beta\gamma}/\lambda$  und so müssen wir fordern, dass  $|n^\mu| \ll \lambda$ . Natürlich können Detektoren prinzipiell größer sein, jedoch müssen in diesem Fall Korrekturen zu den hier präsentierten Ergebnissen hinzugezogen werden.

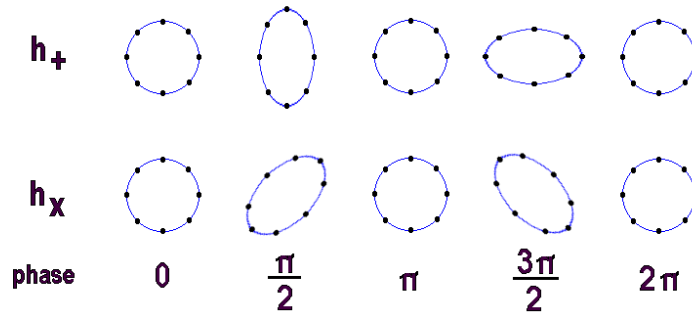


Abbildung 3.1: + und x-Polarisation von Gravitationswellen [13].

### 3.4 Polarisation von Gravitationswellen

Betrachten wir nun den Spezialfall einer monochromatischen, sich in  $z$ -Richtung ausbreitenden Welle. Zuerst untersuchen wir ihre Wirkung auf Testmassen in der  $xy$ -Ebene mit  $h_+ \neq 0$  und  $h_\times = 0$ . In diesem Fall liefert (3.23)

$$\delta n^1(t) = \frac{\varepsilon h_+}{2} n^1(0) \sin(\omega t) \quad (3.26)$$

$$\delta n^2(t) = -\frac{\varepsilon h_+}{2} n^2(0) \sin(\omega t). \quad (3.27)$$

Ein Blick auf Abbildung 3.1 erklärt nun, weshalb man diesen Fall auch als +-Polarisation bezeichnet, da in diesem Fall ein Ring von Testmassen über eine Periode in etwa die Form eines Plus zeichnet.

Im Falle der  $\times$ -Polarisation ergibt sich für die Verschiebung der Massen

$$\delta n^1(t) = \frac{\varepsilon h_\times}{2} n^2(0) \sin(\omega t) \quad (3.28)$$

$$\delta n^2(t) = \frac{\varepsilon h_\times}{2} n^1(0) \sin(\omega t) \quad (3.29)$$

Hier beobachtet man, wie Abbildung 3.1 illustriert, dass die Testmassen auf einem Kreuz schwingen. Gravitationswellen tragen daher ihren Namen nicht ohne Grund, da sie, wie wir hier sehen, Testmassen um ihren Ruhepunkt oszillieren lassen.

Fassen wir daher noch einmal unser bisher erlangtes physikalisches Wissen von Gravitationswellen zusammen:

- Gravitationswellen bezeichnen kleine Störungen der Metrik.
- Diese Störungen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.
- Gravitationswellen versetzen Testmassen relativ zueinander in Bewegung. Klassisch gesehen müssen sie daher Energie übertragen.
- Ähnlich wie in der Elektrodynamik treten sie in verschiedenen Polarisationen auf.
- Die Größe eines Detektors sollte um einiges kleiner als die effektive Wellenlänge der zu beobachtenden Wellen sein. Ansonsten treten Korrekturen zu den von uns hergeleiteten Formeln auf.

### 3.5 Das Detektorsystem

Wir sind nun einen Schritt näher, zu verstehen, wie Gravitationswellen detektierbar sind. Es soll an dieser Stelle jedoch angesprochen werden, weshalb für erdgebundene Detektoren gewisse Einschränkungen eintreten.

Ein Problem dieser Detektoren ist, dass sie sich nicht in einem wie in 3.3 beschriebenen lokalen Inertialsystem befinden, da sie zum Einen eine ständige Beschleunigung  $\vec{a} = -\vec{g}$  erfahren und zum Anderen gegenüber lokalen Gyroskopen rotieren.

Ni und Zimmermann korrigieren daher in [14] die in Gleichung (3.18) vorgestellte Metrik für lokale Inertialsysteme für beschleunigte und rotierende Systeme. Sie zeigen, dass die geodätische Gleichung in diesem Fall die Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = & -(1 + \vec{a} \cdot \vec{x})a^i - (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}))^i - (\vec{\eta} \times \vec{x})^i - 2(\vec{\omega} \times \vec{u})^i + 2(\vec{a} \cdot \vec{u})(\vec{\omega} \times \vec{x})^i \\ & + u^i(2\vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) + 2\vec{a} \cdot \vec{u}(1 - \vec{a} \cdot \vec{x}) + \vec{b} \cdot \vec{x}) - x^l R_{0i0l} - 2x^l u^j R_{ijl0} \\ & + \frac{2}{3}x^l u^j u^k R_{ijkl} + 2x^l u^i u^j R_{0j0l} + \frac{2}{3}x^l u^i u^j u^k R_{0jkl} + O((x^i)^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

annimmt, wobei  $u^\mu$  der in diesem Nicht-Inertialsystem gemessenen Geschwindigkeit der Testmasse,  $\vec{\omega}$  dem Rotationsvektor entspricht und  $b^\mu$  und  $\eta^\mu$  Vektoren sind, die allein von  $\vec{a}$  und  $\vec{\omega}$  abhängen. Für eine genauere Diskussion und Erklärung der einzelnen Terme siehe [14].

Man erkennt zwar, dass wie zuvor  $x^\mu = (\tau, 0, 0, 0)$  die Gleichung löst, jedoch hängt für Massen außerhalb des Ursprungs die Lösung im Allgemeinen von  $\vec{a}$  und  $\vec{\omega}$  ab. Es treten daher verschiedene Effekte auf, die mit der Wirkung von Gravitationswellen auf Testmassen in Wettstreit treten.

Nun wissen wir jedoch, dass der Riemann-Tensor in etwa in der Größenordnung von  $\partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}$  liegt. Unsere Hoffnung ist daher, dass die zu untersuchenden Gravitationswellen möglichst hochfrequent sind, sodass  $R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sim \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}/\lambda^2$  mit einer effektiven Wellenlänge  $\lambda$  wesentlich größer ist als alle Terme in (3.30), die  $\vec{a}$  und  $\vec{\omega}$  enthalten. In diesem Falle würde sich die Bewegung von Testmassen in diesem System aus einer hochfrequenten Bewegung auf Grund von Gravitationswellen und einer langsamen auf Grund von Rotation und Beschleunigung zusammensetzen. Sie könnte somit separiert werden, sodass sich die auf Gravitationswellen zurückzuführende Komponente aus der Diskussion in Abschnitt 3.3 ergibt.

Eine Konsequenz dieses Abschnittes ist somit, dass die Frequenz von Gravitationswellen, die von erdgebundenen Detektoren detektiert werden können, nach unten hin begrenzt ist. Oberhalb dieser Grenze kann jedoch ohne Korrekturen weiterhin auf alle in Abschnitt 3.3 hergeleiteten Beziehungen zurückgegriffen werden.



## Produktion von Gravitationswellen

Bisher haben wir gezeigt, dass im Vakuum Gravitationswellen als eine Lösung der Feldgleichungen theoretisch vorkommen können. Doch ist bisher nicht geklärt, wie sie überhaupt erzeugt werden können. Dieser Frage wird sich dieses Kapitel widmen, wobei ich mich in meinen Ausführungen eng an [6] orientieren werde.

In Abschnitt 2.2 zeigten wir, dass die linearisierten Feldgleichungen unter der Lorentzbeziehung in

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{\varepsilon} T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

übergehen. Die retardierte Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \frac{4G}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (4.2)$$

Betrachten wir nun die Fouriertransformierte dieses Ausdrucks bezüglich der Zeitkomponente:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\bar{h})_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \\ &= \frac{4G}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^4} dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ &= \frac{4G}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^4} dt' d^3y e^{i\omega(t' + |\vec{x} - \vec{y}|)} \frac{T_{\mu\nu}(t', \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ &= \frac{4G}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt' e^{i\omega t'} T_{\mu\nu}(t', \vec{y}) \\ &= \frac{4G}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} (\mathcal{F}T)_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Von der zweiten zur dritten Zeile wurde dabei  $t$  mit  $t' = t - |\vec{x} - \vec{y}|$  substituiert und in der darauf folgenden Zeile werden die Terme umsortiert, sodass im letzten Schritt die Definition der Fouriertransformierten ein weiteres Mal angewendet werden kann.

Wir machen nun die Annahme, dass die Quelle in einer Kugel mit Radius  $\delta r$  lokalisiert ist und der Abstand  $r$  des Beobachters von der Quelle, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, wesentlich größer ist als die

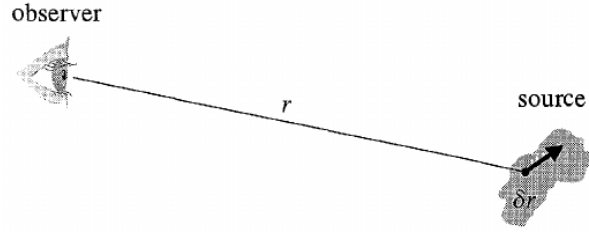


Abbildung 4.1: Eine von einem entfernten Beobachter in einem kleinen Raumgebiet lokalisierte betrachtete Quelle [6, S. 303].

Ausdehnung der Quelle. In diesem Fall ist die Näherung  $e^{i\omega|\vec{x}-\vec{y}|}/|\vec{x}-\vec{y}| \approx e^{i\omega r}/r$  zulässig und wir erhalten

$$(\mathcal{F}\bar{h})_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{4G}{\varepsilon} \frac{e^{i\omega r}}{r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y (\mathcal{F}T)_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}). \quad (4.4)$$

Da  $(\mathcal{F}(\frac{\partial f}{\partial t}))(\omega) = i\omega(\mathcal{F}f)(\omega)$  gilt, übersetzt sich die Lorentz-Eichbedingung  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 0$  für die Fouriertransformierte in

$$i\omega(\mathcal{F}\bar{h})^{0\nu} + \partial_i(\mathcal{F}\bar{h})^{i\nu} = 0 \quad (4.5)$$

Es genügt folglich die Komponenten  $(\mathcal{F}\bar{h})^{ij}$  über (4.4) zu bestimmen, da sich daraus  $(\mathcal{F}\bar{h})^{0j}$  über

$$(\mathcal{F}\bar{h})^{0j} = -\frac{i}{\omega} \partial_i(\mathcal{F}\bar{h})^{ij} \quad (4.6)$$

berechnen lässt und daraus unter Verwendung der Symmetrie von  $(\mathcal{F}\bar{h})^{\mu\nu}$  die 00-Komponente

$$(\mathcal{F}\bar{h})^{00} = -\frac{i}{\omega} \partial_i(\mathcal{F}\bar{h})^{i0}. \quad (4.7)$$

Wir konzentrieren uns daher von nun an allein auf die raumartigen Komponenten und bringen das Integral in (4.4) durch partielle Integration in die Form

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3y (\mathcal{F}T)^{ij}(\omega, \vec{y}) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3y \partial_k (y^i (\mathcal{F}T)^{kj}(\omega, \vec{y}))}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y^i (\partial_k (\mathcal{F}T)^{kj}(\omega, \vec{y})), \quad (4.8)$$

wobei das erste Integral nach Satz von Gauß verschwindet, sofern  $(\mathcal{F}T)^{kj}$  kompakt getragen ist. Dies ist Beispielsweise für periodische Bewegungen der Quelle erfüllt. Um den zweiten Term zu vereinfachen nutzen wir aus, dass in unserer Näherung  $\partial_\mu T^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 0$  gilt, womit auch auf  $(\mathcal{F}T)_{\mu\nu}$  Gleichung (4.5)

anwendbar ist. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} d^3y (\mathcal{F}T)^{ij}(\omega, \vec{y}) &= i\omega \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y^i (\mathcal{F}T)^{0j}(\omega, \vec{y}) \\
&= \frac{i\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left( y^i (\mathcal{F}T)^{0j}(\omega, \vec{y}) + y^j (\mathcal{F}T)^{0i}(\omega, \vec{y}) \right) \\
&= \frac{i\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left( \partial_k (y^i y^j (\mathcal{F}T)^{0k}(\omega, \vec{y})) - y^i y^j \partial_k (\mathcal{F}T)^{0k}(\omega, \vec{y}) \right) \\
&= -\frac{i\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left( y^i y^j \partial_k (\mathcal{F}T)^{0k}(\omega, \vec{y}) \right) \\
&= -\frac{\omega^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left( y^i y^j (\mathcal{F}T)^{00}(\omega, \vec{y}) \right). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Von Reihe eins zu zwei wurde hierbei ausgenutzt, dass  $T^{\mu\nu}$  symmetrisch in der Vertauschung von  $\mu$  und  $\nu$  ist. Die nächste Zeile erhält man durch partielle Integration. Hier nutzt man noch einmal den Satz von Gauß aus um zu sehen, dass das Integral über dem ersten Summanden verschwindet. Am Schluss wird ein letztes mal Relation (4.5) für  $T^{\mu\nu}$  ausgenutzt.

Führen wir nun die Notation

$$I_{ij}(t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y_i y_j T_{00}(t, \vec{y}) \tag{4.10}$$

ein. Man bezeichnet  $I_{ij}(t)$  häufig als das Quadrupolmoment von  $T^{00}$ . Mit dieser Definition nimmt Gleichung (4.4) unter Verwendung von (4.9) die Form

$$(\mathcal{F}\bar{h})_{ij}(\omega, \vec{x}) = -\frac{2G\omega^2}{\varepsilon} \frac{e^{i\omega r}}{r} (\mathcal{F}I)_{ij}(\omega) \tag{4.11}$$

an. Transformiert man diesen Ausdruck nun zurück, erhält man

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) &= -\frac{2G}{\varepsilon r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{-i\omega(t-r)} \omega^2 (\mathcal{F}I)_{ij}(\omega) \\
&= \frac{2G}{\varepsilon r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{-i\omega(t-r)} \left( \mathcal{F} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right)_{ij}(\omega) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

und schlussendlich ergibt sich daraus die sogenannte Quadrupolformel

$$\boxed{\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{\varepsilon r} \frac{\partial^2 I_{ij}}{\partial t^2}(t-r).} \tag{4.13}$$

Die von einer weit entfernten lokalisierten nichtrelativistischen Quelle abgestrahlten Gravitationswellen sind somit proportional zur zweiten Ableitung ihres Quadrupolmoments. Dass nicht schon niedrigere Momente beitragen, erklärt sich aus den Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses. So gilt für das Monopolmoment

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{00}(t, \vec{x}) = \frac{dE}{dt} = 0 \tag{4.14}$$

auf Grund der Energieerhaltung und für das Dipolmoment

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, x^i T^{00}(t, \vec{x}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, x^i \partial_0 T^{00}(t, \vec{x}) \\
 &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, x^i \partial_j T^{j0}(t, \vec{x}) \\
 &= -\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \partial_j (x^i T^{j0}(t, \vec{x}))}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, T^{i0}(t, \vec{x}) \right) \\
 &= \frac{dP^i}{dt} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

da der Gesamtimpuls der Quelle in unserer Näherung eine Erhaltungsgröße ist. In dieser Rechnung wurde im zweiten Umformungsschritt die Kontinuitätsgleichung (2.20) genutzt.

Kommen wir noch einmal auf Formel (4.13) zurück. In den meisten Fällen ist es wesentlich einfacher in der TT-Eichung zu arbeiten, als in der Loretz-Eichung. In Kapitel 2 hatten wir gesehen, dass sich mit Hilfe des dort definierten  $\Lambda$ -Projektors ein Ausdruck aus der Lorentzeichung recht einfach in die TT-Eichung überführen lässt.<sup>1</sup> Siehe dazu Gleichung (2.31). Dazu muss nur noch der Wellenvektor von (4.13) bestimmt werden. Betrachtet man (4.11), so erkennt man, dass es sich bei Gravitationswellen von den hier betrachteten Quellen um ebene Wellen handelt, die radial auslaufen. Ihr Wellenvektor ist damit proportional zum Einheitsvektor  $\vec{n} = \vec{x}/r$  des betrachteten Raumpunktes und es gilt somit

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \Lambda(\vec{x}/r)_{ij}^{kl} \bar{h}_{kl}(t, \vec{x}) = \Lambda(\vec{x}/r)_{ij}^{kl} \frac{2G}{\epsilon r} \frac{\partial^2 I_{kl}}{\partial t^2}(t - r). \tag{4.16}$$

Dieser Ausdruck stellt auf den ersten Blick keine große Vereinfachung dar. In der Tat ist es auch nicht unbedingt einfach mit dem  $\Lambda$ -Projektor konkrete Rechnungen durchzuführen. Doch haben wir den Vorteil, dass wir in den nachfolgenden Rechnungen auf alle Eigenschaften der TT-Eichung zurückgreifen können, bevor wir  $h_{ij}^{\text{TT}}$  mit (4.16) explizit ausschreiben.

---

<sup>1</sup> Für eine detaillierte Rechnung siehe Anhang A.2.



## Die mit Gravitationswellen transportierte Energie

In Kapitel 3 sahen wir, dass Testmassen auf Grund von Gravitationswellen relativ zueinander in Bewegung versetzt werden. Die Wellen müssen folglich Energie transportieren. Bei der Überlegung, wie bzw. ob man diesen Wellen einen Energieimpulstensor zuordnen kann, stößt man jedoch schnell auf Probleme.

Zum einen wissen wir, dass man, gegeben eine Geodäte, Koordinaten wählen kann, in denen die Metrik entlang dieser Geodäte der Minkowskimetrik entspricht, und damit das, was wir unter Gravitationswellen verstehen, lokal einfach „weggeeeicht“ werden kann. Es ist demnach nicht möglich ein Maß für die Energiedichte von Gravitationswellen zu finden, das allein vom Wert der Metrik und deren Ableitungen im betrachteten Punkt abhängt.

Zum anderen sagen uns die Einstein’schen Feldgleichungen, dass der Raum auf Grund des Energieimpulstensors gekrümmt wird. Die Frage nach der Energiedichte von Gravitationswellen entspricht demnach der Frage, in wie weit diese selbst die Raumzeit krümmen. Wir sind in Kapitel 2 jedoch davon ausgegangen, dass dem Hintergrund die Minkowskimetrik zugrunde liegt – er also nicht gekrümmt ist. Damit ist eine Rückwirkung der Gravitationswellen auf diesen Hintergrund per Annahme schon ausgeschlossen. Um einen Ausdruck für die emittierte Energie zu finden, müssen die Einsteingleichungen folglich um eine nicht konstante Metrik entwickelt werden.

Eine Lösung dieser beiden Probleme wurden von Isaacson mit der Kurzwellennäherung in [9] und [15] präsentiert. Ich werde mich bei meiner Ausführung hauptsächlich an diesen Artikeln und an [7, S. 964 ff.] orientieren.

### 5.1 Die Kurzwellennäherung

Wie zuvor angesprochen, müssen in dieser Diskussion zuerst einmal die Einsteingleichungen um eine nicht konstante Metrik  $\gamma_{\mu\nu}(x)$  entwickelt werden, damit der Einfluss der Gravitationswellen auf den Untergrund untersucht werden kann. Wir betrachten folglich eine Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) + \varepsilon h_{\mu\nu}(x), \quad (5.1)$$

wobei  $\gamma_{\mu\nu}(x)$  eine langsam variierende Hintergrundmetrik und  $h_{\mu\nu}(x)$  eine schnell variierenden Störung bezeichnet. Diesen Ansatz hatten wir auch schon in der Diskussion zu Nicht-Inertialsystemen in Abschnitt 3.5 motiviert. Die Amplituden von  $\gamma_{\mu\nu}$  und  $h_{\mu\nu}$  seien beschränkt, in der gleichen Größenordnung und  $\varepsilon \ll 1$ .

Mit „schnell“ und „langsam“ variieren ist gemeint, dass effektive Wellenlängen  $L$  und  $\lambda$  existieren, sodass die Ableitungen der Metrikkomponenten in der Größenordnung

$$\partial_\rho \gamma_{\mu\nu} \sim \gamma_{\mu\nu}/L, \quad \partial_\rho h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}/\lambda \quad (5.2)$$

liegen und  $\lambda/L \approx \varepsilon \ll 1$ . Betrachtet man  $L$  nun als konstant, gilt  $\lambda(\varepsilon) \approx \varepsilon L$  und damit  $f(x) = O(\lambda)$  genau dann, wenn  $f(x) = O(\varepsilon)$ . Mit dieser Notation lassen sich die Bedingungen an die Metrikkomponenten wie folgt formulieren:

$$\gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad h_{\mu\nu} = O(1), \quad (5.3)$$

$$\partial_\rho \gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad \partial_\rho h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-1}), \quad (5.4)$$

$$\partial_\sigma \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-2}). \quad (5.5)$$

Diese Kriterien sind etwas stärker als (2.I) und (2.II), welche wir in Kapitel 2 erarbeitet haben. Weshalb diese weiteren Einschränkungen sinnvoll sind, zeigt die nun folgende Diskussion.

Wie in Kapitel 2 müssen nun die für den Einstein-Tensor wichtigen Größen in Ordnungen von  $\varepsilon$  entwickelt werden. Eine genaue Berechnung der einzelnen Ausdrücke findet sich aus Platzgründen im Anhang B, wobei ich auf das Mathematicapaket `xAct` [16] zurückgreifen musste, da sich die Rechnungen als recht umfangreich herausstellten.

Als Ergebnis der Rechnung erhält man für den Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu}(\gamma_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}) =: R_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon R_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 R_{\mu\nu}^{(2)} + \varepsilon^3 R_{\mu\nu}^{(3+)}, \quad (5.6)$$

wobei

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}(\gamma_{\alpha\beta}), \quad (5.7)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(-\nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\mu\nu} + \nabla_\alpha \nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu h^\alpha_\alpha), \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2}(\nabla^\alpha h_{\mu\nu} \nabla_\beta h_\alpha^\beta + h^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha h_{\mu\nu} - h^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\nu\alpha} - h^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\mu\alpha} \\ & - \nabla_\alpha h_{\nu\beta} \nabla^\beta h_\mu^\alpha + \nabla_\beta h_{\nu\alpha} \nabla^\beta h_\mu^\alpha - \nabla_\beta h_\alpha^\beta \nabla_\mu h_\nu^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\mu h^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\alpha\beta} \\ & - \nabla_\beta h_\alpha^\beta \nabla_\nu h_\mu^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h^\beta_\beta (-\nabla^\alpha h_{\mu\nu} + \nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha) + h^{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das Symbol  $\nabla_\mu$  bezeichnet hier die kovariante Ableitung bezüglich der Hintergrundmetrik  $\gamma_{\mu\nu}$ . Wir nutzen diese Metrik des Weiteren auch um Indices zu heben und zu senken. Der (+3)-Term enthält darüber hinaus alle weiteren Ordnungen der Entwicklung.

Da  $\nabla_\alpha \nabla_\beta h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}/\lambda^2$  ist, gilt  $\varepsilon R_{\mu\nu}^{(1)} = O(\varepsilon^{-1})$ , während  $R_{\mu\nu}^{(0)}$  und  $\varepsilon^2 R_{\mu\nu}^{(2)} = O(1)$ . Den kleinsten Beitrag liefert  $\varepsilon^2 R_{\mu\nu}^{(3+)} = O(\varepsilon)$ . Es bietet sich folglich anstatt einer Ordnung wie in (5.6) gezeigt eine Ordnung der Terme nach ihrer  $O(\varepsilon^n)$ -Abhängigkeit an.

Betrachten wir nun die Vakuum-Feldgleichung

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R &= 0 \\ \Leftrightarrow R_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

In der ersten Ordnung von  $\varepsilon$  findet man in diesem Fall

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0 \quad (5.11)$$

und in zweiter Ordnung

$$R_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon^2 R_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (5.12)$$

Gleichung (5.11) sollte man mit dem in Abschnitt 2.1 erhaltenen Ergebnis (2.6) vergleichen, wo wir noch einen glatten Hintergrund angenommen hatten. Man sieht, dass dieser Ausdruck mit (5.8) übereinstimmt, außer dass die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt wurden, was allein daher rührt, dass wir in unserer ersten Betrachtung einen nicht gekrümmten Hintergrund angenommen hatten. In lokalen Inertialsystemen stimmen damit beide Ausdrücke überein. Das wiederum zeigt, dass unser bisheriges Bild von Gravitationswellen in diese allgemeinere Betrachtung eingebettet werden kann.

## 5.2 Der Energieimpulstensor von Gravitationswellen

Was uns die allgemeinere Diskussion Neues liefert, ist Gleichung (5.12). Sie sagt uns nämlich, auf welche Weise Gravitationswellen den Hintergrund krümmen. Da wir wissen, dass der Raum durch den Energieimpulstensor gekrümmt wird, liegt folgende Umformung nahe:

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{eff}}, \quad (5.13)$$

wobei wir an dieser Stelle den effektiven Energieimpulstensor für hochfrequente Gravitationswellen als

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} := -\frac{\varepsilon^2}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)}) \quad (5.14)$$

angesetzt haben. Die Komponenten des Riccitors wurden dabei mit der Hintergrundmetrik zu  $R^{(0)} := \gamma^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(0)}$  und  $R^{(2)} := \gamma^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)}$  kontrahiert.

Wie in Kapitel 2 kann auch für den hier behandelten Fall gezeigt werden, dass eine Koordinatentransformation

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu(x) \quad (5.15)$$

mit  $\xi^\mu = O(\varepsilon)$  und  $\partial_\nu \xi^\mu = O(1)$  den Riemannstensor invariant lässt. Es zeigt sich jedoch, dass unser Ansatz für den Energieimpulstensor (5.14) nicht invariant unter dieser Eichtransformation ist und somit keine physikalische Größe darstellen kann. Für eine ausführliche Rechnung siehe Anhang C.

Dieses Problem wird durch das sogenannte Brill-Hartle Mittelungsschema gelöst. Wir hatten zuvor angesprochen, dass es nicht möglich sein wird, einen Energieimpulstensor an einem Punkt allein über den Wert der Metrik und deren Ableitungen in diesem Punkt zu definieren. Die Hoffnung ist, dass, umgangssprachlich ausgedrückt, durch die Einführung einer Mittlung  $\langle \cdot \rangle$  über ein gewisses Volumen der Raumzeit, das den Radius einiger Wellenlängen  $\lambda$  umfasst, genug physikalische Krümmung eingefangen wird, sodass man einen eichinvarianten Ausdruck für den Energieimpulstensor erhält.

Es wird daher der gemittelte Energieimpulstensor

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} := -\frac{\varepsilon^2}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)} \right\rangle \quad (5.16)$$

eingeführt. Seine wichtigste Eigenschaft ist, wie gefordert, unter Eichtransformationen (5.15) invariant zu sein. In Anhang C zeige ich, dass sich (5.16) in der TT-Eichung darüber hinaus zu

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{\varepsilon^2}{32\pi G} \left\langle \nabla_\mu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \nabla_\nu h^{\text{TT}\alpha\beta} \right\rangle \quad (5.17)$$

vereinfacht.

### 5.3 Die abgestrahlte Energie nichtrelativistischer Quellen

In diesem Abschnitt wollen wir nun den zuvor hergeleiteten Ausdruck für den Energieimpulstensor (5.17) mit der Quadrupolformel (4.16) für lokalisierte Quellen verbinden, um herauszufinden, wie groß die abgestrahlte Energie solcher Systeme ist.

Wir reduzieren dazu als erstes (5.17) auf Terme von Ordnung  $O(1)$ . Beachte dabei, dass

$$\nabla_\mu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} = \underbrace{\partial_\mu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}}}_{=O(\varepsilon^{-1})} - \underbrace{\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda h_{\lambda\beta}^{\text{TT}} - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda h_{\alpha\lambda}^{\text{TT}}}_{=O(1)} \quad (5.18)$$

und damit

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{GW}} &= -\frac{\varepsilon^2}{32\pi G} \left\langle \left( \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda h_{\lambda\beta}^{\text{TT}} - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda h_{\alpha\lambda}^{\text{TT}} \right) \left( \partial_\nu h^{\text{TT}\alpha\beta} + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha h^{\text{TT}\lambda\beta} + \Gamma_{\nu\lambda}^\beta h^{\text{TT}\alpha\lambda} \right) \right\rangle \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \partial_\nu h^{\text{TT}\alpha\beta} \right\rangle + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Da in dieser Näherung ebenfalls in höchster Ordnung  $\partial_\nu T_{\text{GW}}^{\mu\nu} = 0$  gilt, lässt sich die Strahlungsleistung, in einem Volumen  $V$  zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_V}{\partial x^0} &= \int_V d^3x \partial_0 T_{\text{GW}}^{00} \\ &= - \int_V d^3x \partial_i T_{\text{GW}}^{i0} \\ &= - \int_S dS n_i T_{\text{GW}}^{0i} \end{aligned} \quad (5.20)$$

berechnen. Hier bezeichnet  $n_i$  die Einträge des äußeren Normalenvektors an  $S$ . Sei nun  $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < R\}$  die Kugel mit Radius  $R$  und  $S$  dementsprechend ihrem Rand. In diesem Fall gilt  $n_i = x_i/r$  und für eine Funktion  $f(|\vec{x}|)$

$$n^i \partial_i f(|\vec{x}|) = n^i \frac{x_i}{r} f'(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|), \quad (5.21)$$

womit sich (5.20) im Fall der Kugel als

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_V}{\partial x^0} &= - \int_{S^2} d\Omega R^2 n_i T_{\text{GW}}^{0i} \\ &\stackrel{(5.19)}{=} \frac{\varepsilon^2 R^2}{32\pi G} \int_{S^2} d\Omega n^i \left\langle \partial_0 h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \partial_i h^{\text{TT}\alpha\beta} \right\rangle \\ &= \frac{\varepsilon^2 R^2}{32\pi G} \int_{S^2} d\Omega \left\langle \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_r h^{\text{TT}ij} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

schreiben lässt. Bemerke, dass an dieser Stelle nur Ausdruck (5.19) eingesetzt werden darf, falls  $V$  die Quelle komplett einschließt, da diese Gleichung nur im Vakuum gilt. Im letzten Schritt wurde außerdem verwendet, dass in der TT-Eichung  $h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0$  gilt.

Ist nun zusätzlich der Radius der Kugel wesentlich größer als der Durchmesser der Quelle, so wissen wir aus Gleichung (4.16), dass  $h_{ij}^{\text{TT}}$  als

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r) \quad (5.23)$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\partial_r h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t-r) + \frac{1}{r} \partial_r f_{ij}(t-r) \\ &= -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t-r) - \frac{1}{r} \partial_0 f_{ij}(t-r) \\ &= -\partial_0 h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) + O(1/r^2).\end{aligned}\quad (5.24)$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt, da wir die Gravitationswellen in großer Distanz  $R$  beobachten. Für den Energieimpulstensor bedeutet diese Relation, dass

$$\left\langle \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_r h^{\text{TT}ij} \right\rangle = -\left\langle \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_0 h^{\text{TT}ij} \right\rangle = -T_{00}^{\text{GW}} \quad (5.25)$$

und (5.22) lässt sich somit als

$$\frac{\partial E_V}{\partial x^0} = -\frac{\varepsilon^2 R^2}{32\pi G} \int_{S^2} d\Omega \left\langle \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_0 h^{\text{TT}ij} \right\rangle \quad (5.26)$$

schreiben. Wir setzen nun die Quadrupolformel (4.16) in den letzten Ausdruck ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_V}{\partial x^0} &= -\frac{\varepsilon^2 G}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \left\langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}}(t-R) \ddot{I}_{\text{TT}}^{ij}(t-R) \right\rangle \\ &= -\frac{\varepsilon^2 G}{8\pi} \left\langle \ddot{I}_{kl}(t-R) \ddot{I}^{nm}(t-R) \int_{S^2} \Lambda(\vec{x}/r)_{ij}^{kl} \Lambda(\vec{x}/r)_{nm}^{ij} d\Omega \right\rangle\end{aligned}\quad (5.27)$$

wobei an dieser Stelle die Notation  $\dot{f} := \partial_0 f$  verwendet wurde. Wir ersetzen nun das Quadrupolmoment  $I_{ij}$  mit dem sogenannten reduzierten Quadrupolmoment  $J_{ij} := I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_k^k$ . Dies ist ohne Probleme machbar, da der  $\Lambda$ -Projektor jeden Tensor unter anderem spurlos macht und  $J_{ij}$  einfach der spurlosen Komponente von  $I_{ij}$  entspricht. Somit gilt  $\Lambda_{ij}^{kl} J_{kl} = \Lambda_{ij}^{kl} I_{kl}$ .

Wir expandieren nun die beiden  $\Lambda$ -Projektoren im Integral und erhalten

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{x}/r)_{ij}^{kl} \Lambda(\vec{x}/r)_{nm}^{ij} &= \delta_n^k \delta_m^l - \delta_n^k n^l n_m - \delta_m^l n^k n_n + \frac{1}{2} n^k n^l n_m n_n \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_{nm} \delta^{kl} + \frac{1}{2} \delta_{nm} n^k n^l + \frac{1}{2} \delta^{kl} n_m n_n,\end{aligned}\quad (5.28)$$

wobei  $\vec{n} = \vec{x}/r$ . Da  $J_{ij}$  bereits spurlos ist verschwinden die Summanden mit  $\delta_{nm}$  und  $\delta^{kl}$  in (5.27). Man findet so nun

$$\dot{E} = -\frac{\varepsilon^2 G}{8\pi} \left\langle \ddot{J}_{kl}(t-R) \ddot{J}^{nm}(t-R) \int_{S^2} (\delta_n^k \delta_m^l - \delta_n^k n^l n_m - \delta_m^l n^k n_n + \frac{1}{2} n^k n^l n_m n_n) d\Omega \right\rangle \quad (5.29)$$

vor. Die Integrale über die Einheitskugel sind in [6, S. 314] angegeben als

$$\int_{S^2} d\Omega = 4\pi \quad (5.30)$$

$$\int_{S^2} d\Omega n^k n_n = \frac{4\pi}{3} \delta_n^k \quad (5.31)$$

$$\int_{S^2} d\Omega n^k n^l n_m n_n = \frac{4\pi}{15} (\delta^{kl} \delta_{mn} + \delta_m^k \delta_n^l + \delta_n^k \delta_m^l). \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

Damit erhält man

$$\dot{E} = -\frac{\varepsilon^2 G}{8\pi} \left\langle \ddot{I}_{kl}(t-R) \ddot{I}^{nm}(t-R) \left( 4\pi \delta_n^k \delta_m^l - \frac{4\pi}{3} \delta_n^k \delta_m^l - \frac{4\pi}{3} \delta_m^l \delta_n^k + \frac{2\pi}{15} (\delta_m^k \delta_n^l + \delta_n^k \delta_m^l) \right) \right\rangle.$$

Zählt man alle Terme zusammen, lässt sich dies zu

$$\boxed{\dot{E} = -\frac{\varepsilon^2 G}{5} \left\langle \ddot{J}_{kl}(t-R) \ddot{J}^{kl}(t-R) \right\rangle} \quad (5.34)$$

vereinfachen. Wir haben somit eine Formel gefunden, mit der wir den Energieverlust durch gravitative Strahlung für weit entfernte, nicht-relativistische Systeme berechnen können. In Kapitel 6 werden wir diese Formel auf binäre Systeme anwenden.

## Binäre Systeme

Nach einer langen Reihe allgemeiner Überlegungen, wollen wir in diesem Kapitel unser erlangtes Wissen auf ein konkretes physikalisches Problem anwenden – genauer gesagt auf ein sogenanntes binäres System. Dabei handelt es sich um zwei Massen, welche auf Grund von Gravitation aneinander gebunden sind.

Da die von uns erarbeitete Theorie eine nicht relativistisch Bewegung der Massen voraussetzt, entspricht dieses Problem dem klassischen Zwei-Körper-Problem. Dessen Lösung soll an dieser Stelle noch einmal kurz skizziert werden. Wir werden uns dabei auf solche Systeme beschränken, bei denen sich die Massen auf Kreisbahnen umeinander bewegen.

Nachdem dann die abgestrahlten Wellen berechnet sind, werden wir die Strahlungsrückwirkung auf das System untersuchen, da wir im vorangegangenen Kapitel sahen, dass die Abstrahlung von Gravitationswellen mit einem Energieverlust der Quelle einhergeht.

Die Inhalte dieses Kapitels orientieren sich dabei vor allem an [8, S. 167 ff.].

### 6.1 Produzierte Gravitationswellen

Betrachten wir zwei kompakte Sterne bzw. schwarze Löcher als punktförmige Massen  $m_1$  und  $m_2$  an den Positionen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ . In der Näherung eines newtonschen Systems lässt sich dieses Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem reduzieren [17, 35]. Der Lagrangian

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (6.1)$$

dieses Problems lässt sich mit der reduzierten Masse  $\mu := m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , der Gesamtmasse  $m = m_1 + m_2$  und dem relativen Abstand  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  als

$$L = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{Gm\mu}{r} \quad (6.2)$$

schreiben, sofern der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt gelegt wird. Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm}{r^3} \vec{r}. \quad (6.3)$$

Durch Einsetzen kann gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} r_1(t) &= R \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ r_2(t) &= R \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ r_3(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, falls  $\omega^2 = Gm/R^3$  erfüllt ist. Ich werde mich in dieser Ausführung allein auf solche Kreisbewegungen beschränken. Für eine Diskussion elliptischer Bewegungen siehe [8, S. 176 ff.].

Für die Massendichte gilt im Schwerpunktsystem  $\rho(x) = \mu \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}(t) - \vec{x})$  und da wir von einer nicht relativistischen Bewegung der Quelle ausgehen, entspricht diese schon der 00-Komponente des Energieimpulstensors der Quelle. Damit erhält man dessen Quadrupolmoment

$$I_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(x) x_i x_j = \mu r_i(t) r_j(t). \quad (6.5)$$

Die einzigen nicht verschwindenden Komponenten sind dabei

$$I_{11}(t) = \mu R^2 \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}, \quad I_{22}(t) = \mu R^2 \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}, \quad I_{12}(t) = -\frac{1}{2} \mu R^2 \sin(2\omega t). \quad (6.6)$$

Aus den Ableitungen des Quadrupolmoments

$$\ddot{I}_{11}(t) = 2\mu R^2 \omega^2 \cos(2\omega t), \quad \ddot{I}_{22}(t) = -\ddot{I}_{11}(t), \quad \ddot{I}_{12}(t) = 2\mu R^2 \omega^2 \sin(2\omega t) \quad (6.7)$$

lassen sich dann die abgestrahlten Gravitationswellen über (4.13) berechnen:

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{|\vec{x}|} \frac{\partial^2 I_{ij}}{\partial t^2}(t - |\vec{x}|) = \frac{4G\mu R^2 \omega^2}{|\vec{x}|} \begin{pmatrix} \cos(2\omega(t - |\vec{x}|)) & \sin(2\omega(t - |\vec{x}|)) & 0 \\ \sin(2\omega(t - |\vec{x}|)) & -\cos(2\omega(t - |\vec{x}|)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Diesen Ausdruck möchten wir nun mit Hilfe des  $\Lambda$ -Projektors in die TT-Eichung überführen. Speziell interessieren uns natürlich die einzelnen Polarisierungen  $h_+$  und  $h_\times$ . Mit Gleichung (4.16) gilt

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij}^{kl}(\vec{x}/r) \bar{h}_{kl}(t, r). \quad (6.9)$$

Wählen wir nun das Koordinatensystem des Detektors so, dass die Welle entlang der  $z$ -Achse propagiert. Dazu bildet die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

den Propagationsvektor  $\vec{x}/r = (\sin(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta))$  auf  $(0, 0, 1)$  ab und wir erhalten im neuen Koordinatensystem

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij}^{kl}(\vec{e}_z) R_k^m R_l^n \bar{h}_{nm}(t, r). \quad (6.11)$$



Mit Hilfe von Mathematica berechnen sich damit die einzelnen Moden zu

$$\begin{aligned} h_+(t, \vec{x}) &= \Lambda_{11}^{kl}(\vec{e}_z) R_k^m R_l^n \bar{h}_{nm}(t, r) \\ &= \frac{4G\mu R^2 \omega^2}{|\vec{x}|} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega(t - |\vec{x}|) + 2\phi), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} h_\times(t, \vec{x}) &= \Lambda_{12}^{kl}(\vec{e}_z) R_k^m R_l^n \bar{h}_{nm}(t, r) \\ &= \frac{4G\mu R^2 \omega^2}{|\vec{x}|} \cos \theta \sin(2\omega(t - |\vec{x}|) + 2\phi). \end{aligned} \quad (6.13)$$

## 6.2 Strahlungsrückwirkung und die charakteristische Wellenform

In Kapitel 5 haben wir uns eine Formel für die durch Gravitationswellen abgestrahlte Energie hergeleitet. Natürlich wirkt dieser Energieverlust auf das von uns betrachtete binäre System zurück und es kommt zur Abnahme des Radius der Rotationsbewegung. In diesem Abschnitt soll genau dieser Effekt und sein Einfluss auf die abgestrahlten Wellen untersucht werden.

Wir wollen zuerst einmal Gleichung (5.34) verwenden, um die abgestrahlte Energie des Systems zu berechnen. Dazu benötigen wir an sich das reduzierte Quadrupolmoment  $J_{ij}$  der Quelle. Da die Ableitung des normalen Quadrupolmoments  $I_{ij}$  jedoch schon spurlos ist, gilt  $\dot{J}_{ij} = \dot{I}_{ij}$ . Wir erhalten mit Gleichung (5.34) somit

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\frac{G}{5} \left\langle \ddot{I}_{kl}(t-R) \ddot{I}^{kl}(t-R) \right\rangle \\ &= -\frac{G}{5} \left\langle \ddot{I}_{11}^2(t-R) + \ddot{I}_{22}^2(t-R) + 2\ddot{I}_{12}^2(t-R) \right\rangle \\ &= -\frac{32}{5} G\mu^2 R^4 \omega^6 \left\langle \cos^2(2\omega(t-R)) + \sin^2(2\omega(t-R)) \right\rangle \\ &= -\frac{32}{5} G\mu^2 R^4 \omega^6. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Dieser Energieverlust wirkt auf die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\ &= \frac{v^2}{2\mu} - G \frac{m_1 m_2}{R} \\ &= \frac{R^2 G m}{2\mu R^3} - G \frac{m_1 m_2}{R} \\ &= -\frac{G m_1 m_2}{2R}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Durch eine Abnahme der Energie fällt somit ebenfalls der Radius  $R$  der Kreisbewegung. Damit steigt über  $\omega^2 = Gm/R^3$  die Rotationsfrequenz und die Energieabgabe nimmt zu. Es handelt sich hierbei folglich um einen Prozess, bei dem  $R$  gegen Null läuft und die Quellen somit ineinander fallen.

Ein solcher Energieverlust wurde zum ersten mal am Hulse-Taylor-Pulsar PSR 1913+16 im Jahre 1979 nachgewiesen [5]. Es wurde, wie gerade argumentiert, beobachtet, dass die Rotationsfrequenz des binären Systems mit der Zeit zunahm. Dies war die erste Evidenz für gravitationelle Strahlung. Es sollten jedoch weitere 30 Jahre vergehen, bis zum ersten Mal Gravitationswellen direkt gemessen werden konnten.

Ersetzen wir nun in (6.15)  $R$  durch  $\omega$  und leiten diesen Ausdruck ab.

$$\dot{E}_{\text{tot}} = -\frac{d}{dt} \frac{Gm_1m_2}{2\sqrt[3]{Gm\omega^{-2}}} = -\frac{1}{3} \left( \frac{G^2m_1^3m_2^3}{m\omega} \right)^{1/3} \dot{\omega} = -\frac{1}{3} \left( \frac{G^2\mathcal{M}^5}{\omega} \right)^{1/3} \dot{\omega}, \quad (6.16)$$

wobei die sogenannte *Chripmasse*  $\mathcal{M}$  über

$$\mathcal{M} := \mu^{3/5} m^{2/5} = \frac{(m_1m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} \quad (6.17)$$

definiert wurde. Setzen wir als nächstes (6.16) gleich der in (6.14) berechneten abgestrahlten Energie und eliminieren  $R$  durch  $\omega$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \left( \frac{G^2\mathcal{M}^5}{\omega} \right)^{1/3} \dot{\omega} &= -\frac{32}{5} G\mu^2 \left( \frac{Gm}{\omega^2} \right)^{4/3} \omega^6 \\ \Leftrightarrow \dot{\omega} &= \frac{96}{5} (G\mathcal{M})^{5/3} \omega^{11/3}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Integrieren führt in diesem Fall zur Lösung

$$-\frac{3}{8} \left( \omega^{-8/3}(t_2) - \omega^{-8/3}(t_1) \right) = \frac{96}{5} (G\mathcal{M})^{5/3} (t_2 - t_1). \quad (6.19)$$

Setzen wir nun  $t_2 = t_{\text{Koal}}$ , dem Koaleszenzzeitpunkt der beiden Massen, und betrachten die Abhängigkeit der Frequenz von der Zeit  $t = t_{\text{Koal}} - t_1$  bis zur Koaleszenz. Da für  $t \rightarrow 0$  die Frequenz divergieren muss, ergibt sich

$$\omega(t) = \left( \frac{256}{5} t \right)^{-3/8} (G\mathcal{M})^{-5/8}. \quad (6.20)$$

Wir haben somit die zeitliche Abhängigkeit der Frequenz bestimmt, mit der die Gravitationswellen (6.12) und (6.13) zu gewissen Zeitpunkten schwingen. Es lässt sich jedoch nicht einfach  $\omega$  durch  $\omega(t)$  substituieren, denn  $\omega t$  in den cos-Termen sollte viel eher mit der gesamten aufgesammelten Phase

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t dt' \omega(t') = \Phi_0 + \frac{8}{5} \left( \frac{256}{5} \right)^{-3/8} (G\mathcal{M})^{-5/8} t^{5/8} \quad (6.21)$$

substituiert werden. Eliminiert man außerdem  $R$  durch  $\omega$  so nehmen Gleichungen (6.12) und (6.13) die Form

$$h_+(t, \vec{x}) = \frac{4}{|\vec{x}|} (G\mathcal{M})^{5/3} \omega^{2/3}(t - |\vec{x}|) \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\Phi(t - |\vec{x}|)) \quad (6.22)$$

$$h_\times(t, \vec{x}) = \frac{4}{|\vec{x}|} (G\mathcal{M})^{5/3} \omega^{2/3}(t - |\vec{x}|) \cos \theta \sin(2\Phi(t - |\vec{x}|)) \quad (6.23)$$

an. Ein typischer Verlauf einer solchen Gravitationswelle wird in Abbildung 6.1 gezeigt. Man erkennt sehr gut, dass sowohl Frequenz als auch Amplitude stark ansteigen, nähert man sich dem Zeitpunkt der Koaleszenz der beiden Quellen. Dieses Verhalten wird auch als *Chirping* (engl. für „Zwitschern“) bezeichnet, da die Form der Gravitationswelle der Tonspur von Vogelgezwitscher ähnelt.

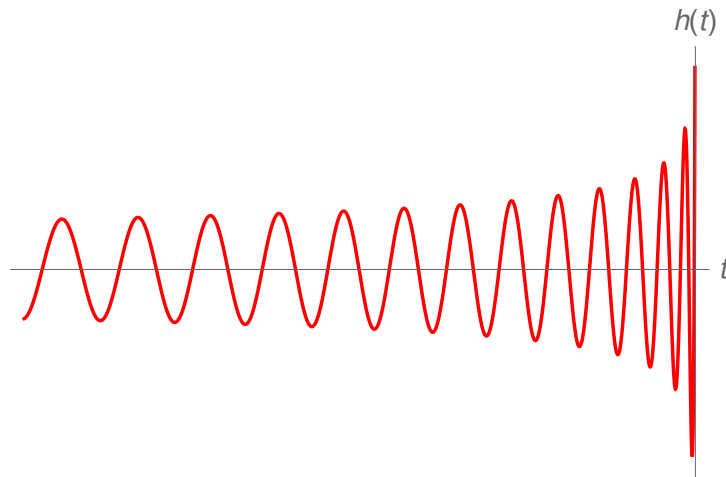


Abbildung 6.1: Der Wellenverlauf gravitationeller Strahlung eines binären Systems wie in (6.22) und (6.23) beschrieben. Charakteristisch ist die Zunahme der Frequenz bei gleichzeitig wachsender Amplitude, bevor es zur Koaleszenz der Massen kommt.

Zu den Grenzen der in diesem Abschnitt verwendeten Näherungen sei gesagt, dass sie kurz vor der Koaleszenz der Quellen nicht mehr erfüllt sind. Betrachten wir dazu die Bahngeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ &= (Gm\omega)^{1/3}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Wir sahen in (6.19), dass  $\omega(t)$  für  $t \rightarrow 0$ , sprich zum Zeitpunkt der Kollision, divergiert, womit ebenfalls  $v$  divergiert. Das bedeutet, dass man ein binäres System kurz vor seiner Koaleszenz keinesfalls rein newtonsch beschreiben darf. Auch schon aus dem Grund, dass für kleine Radien die Näherung der Massen als Punktquellen unzulässig ist.

In Kapitel 8 wird die hier berechnete Wellenform mit der Messung von Gravitationswellen am LIGO verglichen werden. Wir werden sehen, dass unsere Berechnungen die tatsächliche Messung zum Teil reproduzieren können und dass sie, wie vorausgesagt, kurz vor der Kollision versagen.



## Detektion von Gravitationswellen am LIGO

Bevor wir uns jedoch der Messung vom LIGO zuwenden, soll in diesem Kapitel zuerst einmal die Funktionsweise dieses Observatoriums in ihren Grundzügen erklärt werden. Die zentrale Idee der dort verwendeten Detektionsmethode ist die Beobachtung aus Kapitel 3, dass Gravitationswellen die Abstände zwischen Testmassen strecken und stauchen. Ein Verfahren, welches in der Lage ist kleine Abstandsänderungen zu detektieren, stellt die Interferometrie nach Michelson dar.

Dieses Kapitel soll daher die Grundidee der Detektion von Gravitationswellen mit Hilfe eines modifizierten Michelson-Interferometers vermitteln. Diese Beschreibung wird sich an [8, S. 470 ff.] orientieren, wobei ich jedoch nur auf die wichtigsten Aspekte eingehen werde, die zum Verständnis des Aufbaus nötig sind.

Anschließend betrachten wir dann speziell LIGO und werden sehen, wie dort der Messaufbau realisiert wurde. Am Schluss werde ich über die Sensitivität dieses Aufbaus reden und aufzählen, welche Effekte diese begrenzen.

### 7.1 Das Michelson-Interferometer

Der schematische Aufbau eines Michelson-Interferometers wird in Abbildung 7.1 dargestellt. Ein Laserstrahl wird dabei an einem Strahlteiler in zwei Strahlen aufgeteilt. Nachdem sie eine Länge  $L_x$  bzw.  $L_y$  zurückgelegt haben, werden die Strahlen an Spiegeln reflektiert und erreichen nach der selben Strecke erneut den Strahlteiler. Während ein Teil der Strahlen zurück in den Laser geleitet wird, wandert der andere Teil nach unten in einen Photodetektor. Natürlich kommt es dabei zur Überlagerung der beiden Strahlen und sie interferieren.

Propagiert man die elektromagnetischen Wellen beider Strahlen über die Distanzen  $2L_x$  bzw.  $2L_y$  und addiert diese beiden Komponenten anschließend, so erhält man für die zu messende Intensität am Photodetektor [8, 471]

$$I = I_0 \sin^2(\omega_L(L_y - L_x)) , \quad (7.1)$$

wobei  $\omega_L$  der Frequenz des Lasers entspricht. Man findet folglich eine Abhängigkeit der messbaren Intensität vom Längenunterschied der beiden Arme vor. Genau solch einen Sachverhalt hatten wir uns erhofft, da wir aus Kapitel 3 wissen, dass Gravitationswellen den Abstand zwischen zwei Testmassen verändern.

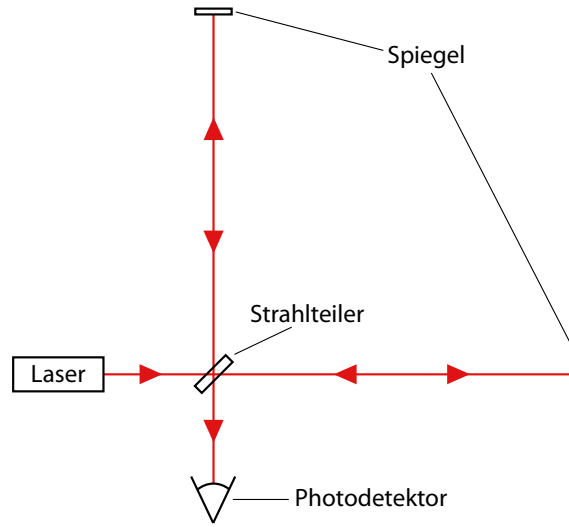


Abbildung 7.1: Aufbau eines einfachen Michelson-Interferometers.

## 7.2 Die Wirkung von Gravitationswellen auf ein Michelson-Interferometer

Dieser Abschnitt soll nun zeigen, in welcher Art Gravitationswellen auf das Michelson-Interferometer einwirken. In der Rechnung werde ich einige Annahmen treffen, welche diese stark vereinfachen werden. Eine genauere Rechnung würde, meiner Meinung nach, dem Verständnis wenig beitragen und ich werde in dieser Arbeit auch nicht auf die Ergebnisse einer genaueren Rechnung zurückgreifen müssen. Ich verweise interessierte Leser daher auf Kapitel 9 aus [8].

Mit Gleichung (3.25) hatten wir uns einen Ausdruck für die Änderung des Längenquadrats  $s^2 = g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$  zwischen zwei Punkten mit Koordinatenabstand  $n^\mu = (0, \vec{n})$  auf Grund einer Störung  $h_{ij}^{\text{TT}}$  hergeleitet. Dies entspricht für kleine  $|\vec{n}|$  der Strecke, die ein Photon zwischen diesen Punkten zurücklegen muss. Betrachten wir daher nun den Spezialfall  $n^\mu = (0, \Delta x, 0, 0)$ . In diesem Fall liefert (3.25)

$$s \approx \Delta x + \frac{1}{2} h_{11}^{\text{TT}} \Delta x \quad (7.2)$$

Nehmen wir nun an, dass die Wellenlänge der Gravitationswelle  $\lambda_{\text{GW}}$  wesentlich größer ist, als die Armlänge des Detektors. In diesem Fall bleibt  $h_{ij}^{\text{TT}}$ , während das Photon vom Strahlteiler zum Spiegel und wieder zurück wandert, nahezu konstant. Damit müsste das Photon die Strecke

$$s_x \approx 2L_x + h_{11}^{\text{TT}} L_x \quad (7.3)$$

überwinden. Ein Photon, welches in  $y$ -Richtung fliegt würde dementsprechend die Strecke

$$s_y \approx 2L_y + h_{11}^{\text{TT}} L_y \quad (7.4)$$

zurücklegen. Gehen wir nun von einer in  $z$ -Richtung  $+$ -Polarisierten Welle aus, dh.  $h_{11}^{\text{TT}} = -h_{22}^{\text{TT}} = h_+ \sin(\omega_{\text{GW}}(t - z))$ . Die Wegstreckendifferenz beider Strahlen würde somit

$$s_x - s_y \approx 2(L_x - L_y) + h_+(L_x + L_y) \sin(\omega_{\text{GW}}(t - z)) \quad (7.5)$$

betragen. Dies beeinflusst natürlich die am Photodetektor gemessene Strahlenintensität. Für diese erhält man im Vergleich zum zuvor diskutierten Fall

$$I = I_0 \sin^2 \omega_L \left( (L_x - L_y) + \frac{1}{2} h_+ (L_x + L_y) \sin(\omega_{\text{GW}}(t - z)) \right). \quad (7.6)$$

Wie zu erwarten war, beobachten wir somit eine Änderung der Intensität auf Grund einfallender Gravitationswellen. Wir beobachten außerdem, dass ein solcher Effekt erst beobachtbar sein sollte, sofern  $\omega_L h_+ L$  mit  $L = (L_x + L_y)/2$  in einem Bereich ist, in dem der Photodetektor einen Intensitätsunterschied messen kann. Da wir ein sehr kleines  $h_+$  erwarten, bedeutet dies, dass die mittlere Armlänge  $L$  und die Laserfrequenz  $\omega_L$  möglichst groß sein sollten.

Sei nun noch kurz ein etwas allgemeinerer Fall angesprochen. Gewöhnlich findet man natürlich eine Überlagerung von  $+$  und  $\times$ -Polarisierten Wellen, die in einem beliebigen Winkel eintreffen können. In diesem Fall findet man eine Phasenverschiebung um  $\Delta\phi = \omega_L h L$  in (7.6), wobei  $h$  über

$$h = F_+ h_+ + F_\times h_\times \quad (7.7)$$

gegeben ist. Die Koeffizienten  $F_+$  und  $F_\times$  hängen dabei vom Einfallswinkel der Welle ab [18]. In dieser Größe werden zumeist die Messungen von Gravitationswellendetektoren angegeben.

### 7.3 Realisierung eines Gravitationswelleninterferometers am Beispiel von LIGO

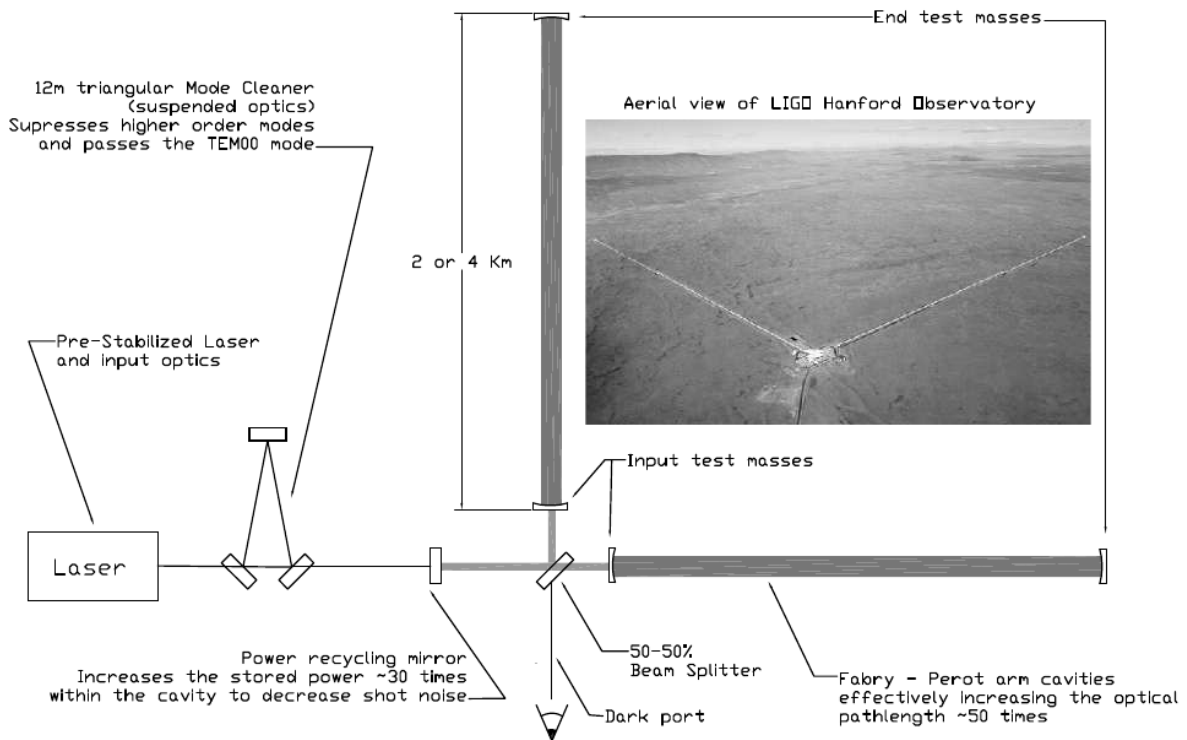


Abbildung 7.2: Schematischer Aufbau des LIGO Interferometers mit einem Foto der Anlage in Hanford [18].

Beim *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* handelt es sich um einen Zusammenschluss zweier Observatorien, die sich in Hanford und Livingston befinden.

Sie basieren auf dem Michelson-Interferometer, jedoch beträgt eine Armlänge ganze 4 km, wie Abbildung 7.2 illustriert. Da diese Länge jedoch nicht genügt, dass durch Gravitationswellen hervorgerufene Abstandsänderungen zu einer hinreichenden Änderung der Intensität führen, befinden sich zwischen Strahlteiler und Spiegeln Fabry-Perot Resonatoren, welche die Weglänge eines Photons im Strahl effektiv um etwa einen Faktor 280 erhöhen [19].

Das Interferometer wird mit einem 200 W starkem Laser bei 1 064 nm betrieben. Eine hohe Laserleistung liefert kleinere statistische Schwankungen, worauf ich später noch einmal zurückkommen werde. Aus diesem Grund befindet sich zwischen Laser und Strahlteiler ein Spiegel, welcher nur Licht in Richtung des Strahlteilers passieren lässt und alles andere reflektiert [19]. Auf diese Weise wird die im Spiegelsystem gespeicherte Energie noch einmal um etwa einen Faktor 30 erhöht. Betreibt man den Aufbau nun so, dass am Photodetektor immer möglichst wenig Photonen eintreffen, wird diese Energie zusätzlich noch einmal maximiert [18].



## 7.4 Störungsquellen und Sensitivität

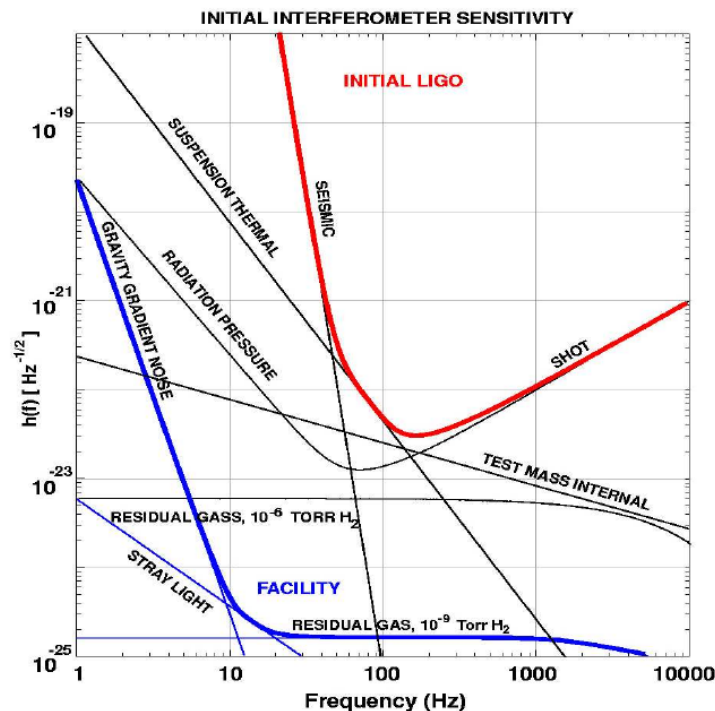


Abbildung 7.3: Zeigt die Amplituden verschiedener Rauschquellen, die die Sensitivität von LIGO einschränken. Die Kurve „Initial LIGO“ zeigt die Genauigkeit an, welche man bei der Errichtung von LIGO zum Ziel hatte und „Facility“ zeigt die Grenze, welche nicht unterschritten werden kann, auch wenn alle anderen Rauschquellen minimiert wurden [18].

Die Sensitivität von LIGO und allgemein auch anderer erdgebundenen Interferometer ist durch verschiedene Rauschquellen stark begrenzt. Wir wollen hier daher die in Abbildung 7.3 gezeigten wichtigsten Quellen diskutieren [18]:

**Seismisches Rauschen.** Die Bewegung des Erdbodens liegt natürlich bei etwa 150 mHz. Zusätzlich dazu können kulturell bedingte Bewegungen im Bereich von meist einigen Hz kommen. Damit Testmassen nicht von diesem Rauschen beeinflusst werden, müssen sie möglichst von diesen Bewegungen isoliert werden.

**Thermisches Rauschen.** Die Testmassen, dh. die Spiegel, besitzen gewisse thermische Vibrationsmoden. Diese beeinflussen die Resonanzen des Gesamtsystems in einer nicht zu vernachlässigbarer Weise. Dieser Einfluss lässt sich durch geeignete Wahl der Komponenten minimieren.

**Schrotrauschen.** Die Zahl der Strahlphotonen ist statistischen Schwankungen ausgesetzt. Dies führt jedoch zu einem ungenauen Ergebnis am Photodetektor. Durch eine Erhöhung der Strahlintensität kann dieses Rauschen jedoch minimiert werden. Aus diesem Grund wird das System mit einem möglichst starkem Laser betrieben und mit Hilfe des Power Recycling Spiegels die Strahlintensität im System möglichst hoch gehalten.

Für weitere Rauschquellen und Erklärungen, wie diese zu minimieren sind, siehe [20, S. 11 ff.] und für eine quantitative Betrachtung einiger Quellen siehe [8, S. 515 ff.].



## Interpretation der ersten Messung von Gravitationswellen

Mit all diesem Hintergrundwissen wollen wir uns nun die Messung des LIGOs vom 14.09.2015 09:50:45 UTC<sup>1</sup> anschauen. In der Veröffentlichung [1] vom 12.02.2016 erklären Benjamin P. Abbott et al., dass bei dieser Messung zum ersten Mal Gravitationswellen detektiert werden konnten. Ein großer Teil der Veröffentlichung befasst sich mit dem Punkt, dass es sich wirklich um Gravitationswellen handelte, welche gemessen wurden und nicht etwa um ein Zufallsereignis. Ein recht offensichtlicher Hinweis für diese Behauptung ist, dass sowohl der Detektor in Hanford als auch der in Livingston leicht zeitversetzt ein ähnliches Signal detektieren konnten. Die Signifikanz dieser Messung wird mit einer Analyse des Rauschens auf  $5,1 \sigma$  abgeschätzt [1]. Der gemessene Signalverlauf findet sich in Abbildung 8.1.

Des Weiteren zeigen die Autoren auf, dass es sich bei der Quelle dieser Wellen um zwei umeinander kreisende schwarze Löcher handeln muss, welche sich am Ende vereinigen. Vergleicht man den Wellenverlauf aus Abbildung 8.2 mit dem aus Abbildung 6.1, welchen wir uns für ein binäres System hergeleitet hatten, so lässt sich im Bereich vor der Vereinigung klar das charakteristische Ansteigen von Frequenz und Amplitude erkennen. Ab einem gewissen Zeitpunkt vor der Vereinigung versagt jedoch unsere Voraussage. Dies war aber, wie in Kapitel 6 diskutiert, zu erwarten, da an dieser Stelle relativistische Effekte nicht mehr zu vernachlässigen sind.

Die Wellenform, die in Abbildung 8.2 an die Messung angepasst wurde, enthält zum einen höhere Ordnungen der sogenannten Post Newtonschen Entwicklung<sup>2</sup> [21] und beachtet zusätzlich Effekte, welche auftreten, sofern die Massen einen Spin tragen [22]. Aus einer Kombination analytischer und numerischer Methoden kann so die Wellenform verschiedener Binärekonfigurationen bis zur Vereinigung der Massen bestimmt werden [23].

Die Chirpmasse des Binary kann über die Relation (6.18)

$$\mathcal{M} = \frac{1}{G} \left( \frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad (8.1)$$

und deren höheren Ordnungen der PN-Entwicklung auf  $\mathcal{M} \approx 30 M_{\odot}$  abgeschätzt werden [1]. Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel ergibt sich zwischen reduzierter und Gesamtmasse die Ungleichung  $\mu \leq m/4$ , womit wir die Gesamtmasse auf  $m \gtrsim 4^{3/5} \mathcal{M} \approx 70 M_{\odot}$  abschätzen können. Durch eine Analyse der Wellenform im Bereich der Vereinigung stellt sich in der Tat

<sup>1</sup> Auch kurz als Ereignis GW150914 bezeichnet.

<sup>2</sup> Eine Entwicklung in Ordnungen von  $v/c$ . Damit entspricht unsere Betrachtung des Problems der nullten Ordnung dieser Entwicklung.

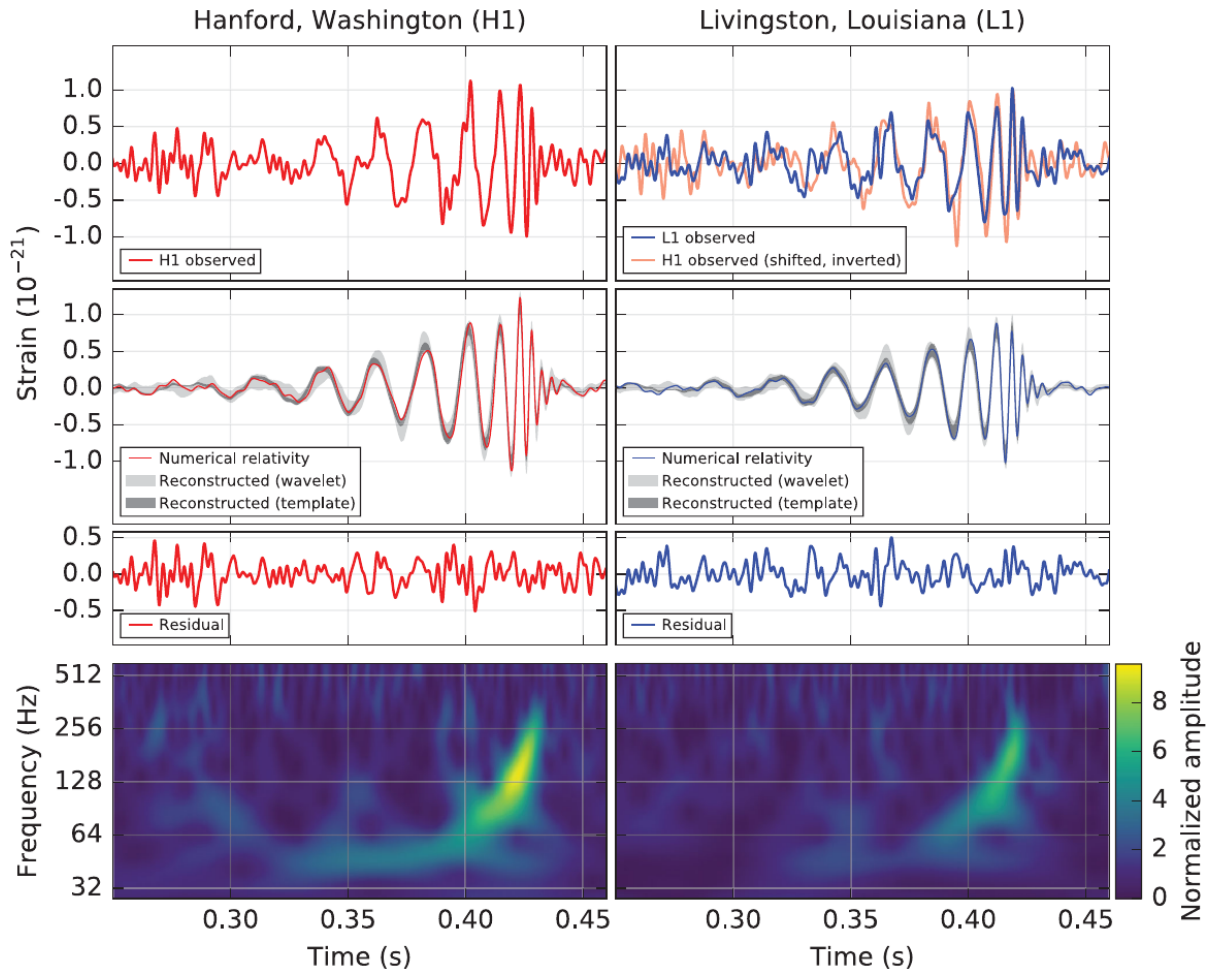


Abbildung 8.1: Es werden die Messresultate des Gravitationswellenereignisses GW150914 aufgenommen von LIGO Hanford (linke Spalte) und Livingston (rechte Spalte) dargestellt. Von oben nach unten zeigen die Grafiken (1.) die gemessene Streckung  $h$ , wobei die Frequenz mit einem 35–350 Hz Bandpass gefiltert wurde. (2.) Die Rekonstruktion eines möglichen Wellenverlaufs (graue Regionen) und eine Anpassung eines Wellenverlaufs einer Vereinigung zweier Schwarzer Löcher. (3.) Die Differenz aus Messung und angepasster Kurve. (4.) Die Frequenz-Zeit-Darstellung der Messung von  $h$  [1].

heraus, dass die Gesamtmasse  $m = (70,6 \pm 5,0) M_{\odot}$  beträgt [24].

Die Rotationsfrequenz der Massen vor der Vereinigung beträgt etwa 75 Hz.<sup>3</sup> Dies entspricht in der Newtonschen Betrachtung etwa einem Abstand von  $R = (Gm\omega)^{1/3} \approx 350$  km. Da alle Systeme außer dem bestehend aus zwei schwarzen Löchern schon bei größeren Abständen kollidieren sollten, ist die Quelle der Strahlung somit als ein System zweier Schwarzer Löcher identifiziert [1].

Es handelt sich beim Gravitationswellenereignis GW150914 folglich nicht nur um die erste direkte Messung von Gravitationswellen, sondern gleichzeitig um die erste Beobachtung der Vereinigung zweier schwarzer Löcher.

<sup>3</sup> Beachte hier, dass die Rotationsfrequenz der halben Frequenz der Gravitationswellen entspricht, wie in Kapitel 6 gezeigt wird.

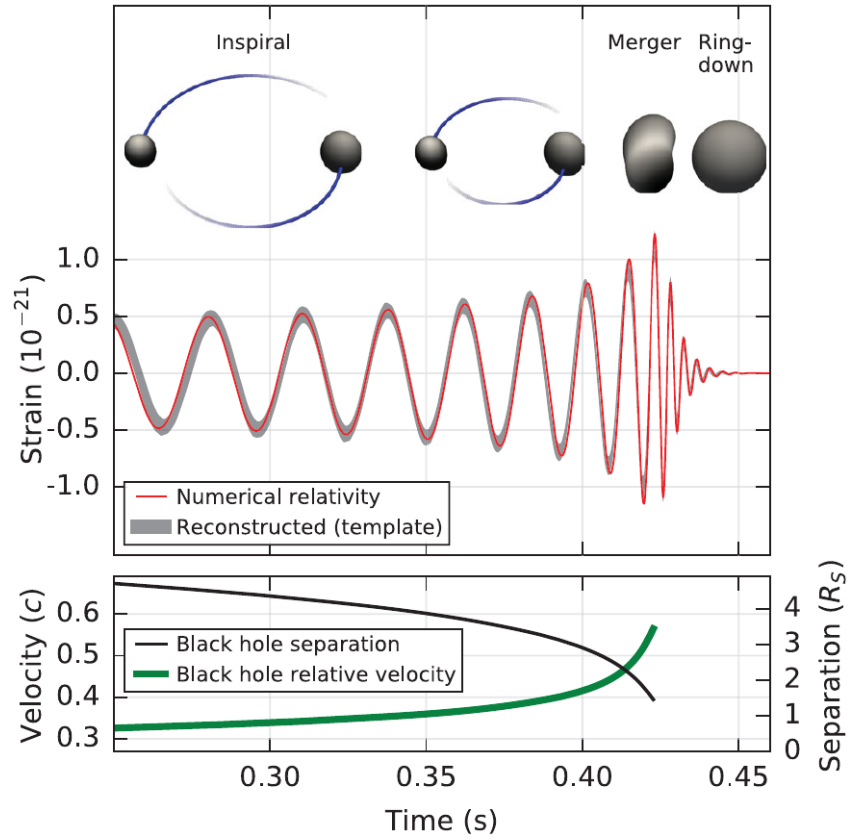


Abbildung 8.2: Die obere Grafik zeigt den rekonstruierten Wellenverlauf der Messung am LIGO Hanford mit einer angepassten Kurve. Im Vergleich zu 8.1 wurde hier kein Frequenzfilter verwendet. Zusätzlich werden die verschiedenen Stadien der Koaleszenz der schwarzen Löcher illustriert. In der unteren Grafik wird der rekonstruierte Abstand der schwarzen Löcher in Einheiten des Schwarzschildradius  $R_S$  und deren relative Geschwindigkeit dargestellt [1].



## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Ausarbeitung konnten wir das Fundament der Gravitationswellenphysik erarbeiten. Ausgehend von der Beobachtung, dass im Vakuum Wellenlösungen der Metrik auftreten können, untersuchten wir einige physikalische Eigenschaften dieser Wellen.

So fanden wir heraus, dass sich diese Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und sich physikalisch bemerkbar machen, indem sie Abstände zwischen Testmassen strecken und stauchen. Des Weiteren konnten wir feststellen, dass Gravitationswellen auch Energie transportieren und dass ihre Quellen auf diese Weise Energie verlieren. In der Diskussion möglicher Quellen zeigte sich außerdem, dass das niedrigste beitragende Moment zur gravitationellen Strahlung das Quadrupolmoment der Energiedichte der Quelle ist.

Anschließend wurde dieses theoretische Wissen mit der Behandlung binärer Systeme auf ein konkretes physikalisches Beispiel angewendet. Unter Beachtung der Strahlungsrückwirkung war es uns möglich den charakteristischen Wellenverlauf gravitationeller Strahlung eines solchen Systems vor der Vereinigung der Massen zu bestimmen. Diesen theoretisch berechneten Wellenverlauf verglichen wir anschließend mit der Messung GW150914 am LIGO und fanden im vorhergesagten Bereich eine gewisse Übereinstimmung. Darüber hinaus können mit den hergeleiteten Beziehungen Parameter des beobachteten Systems in erster Ordnung bestimmt werden.

Man sieht folglich, dass schon eine Behandlung der untersten Ordnung in sowohl der Störung als auch der Geschwindigkeit  $v/c$  der Quelle die Beobachtungen von LIGO zum Teil reproduzieren. Einen guten Überblick über höhere Ordnungen und modernere Ansätze in der Diskussion gravitationeller Strahlung von binären Systemen stellt vor allem [21] dar. Während der Verfassung dieser Arbeit wurde darüber hinaus eine weitere Messung von Gravitationswellen veröffentlicht [25], die einen ähnlichen Wellenverlauf wie den der ersten Messung zeigt und so ebenfalls auf ein binäres System zurückzuführen ist.

Sollten in näherer Zukunft weitere Observatorien ähnliche Sensitivität wie LIGO erreichen, wird zusätzlich eine Ortsbestimmung der Strahlungsquelle möglich werden. Mit dem eLISA Projekt soll dann im Jahre 2034 der erste Detektor im All seine Arbeit aufnehmen, der für höhere Frequenzen als erdgebundene Detektoren sensitiv sein wird [26]. So erhofft man sich neben der Detektion weiterer Strahlungsquellen einen tieferen Blick in unser Universum, über welches bisher nur Informationen durch elektromagnetische Strahlung und Neutrinostrahlung gewonnen werden konnten. Man bekommt daher alles in allem eine Ahnung, dass die Untersuchung von Gravitationswellen wohl eine der großen Aufgaben der Physik dieses Jahrhunderts werden wird und wir wohl in Zukunft noch einiges bezüglich dieses Themas hören werden.





# Literatur

---

- [1] B. P. Abbott u. a., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (6 2016) 061102, URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102> (siehe S. 1, 39–41).
- [2] A. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 688-696. (1916) (siehe S. 1, 3).
- [3] A. Einstein, *Über Gravitationswellen*, Gesamtsitzung vom 14. Februar 1918 () 154–167 (siehe S. 1).
- [4] M. Born, *The Einstein Born Letters*, MacMillan, 1971 Brief Nr. 71 (siehe S. 1).
- [5] J. H. Taylor, L. A. Fowler und P. M. McCulloch, *Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913 + 16*, *Nature* **277**.5696 (1979) 437, URL: <http://dx.doi.org/10.1038/277437a0> (siehe S. 1, 29).
- [6] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Pearson, 2003, ISBN: 0805387323 (siehe S. 1, 3, 17, 18, 26, 50, 64).
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman & Co Ltd, 1973, ISBN: 0716703343 (siehe S. 1, 9, 21, 50, 66).
- [8] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2007, ISBN: 0198570740 (siehe S. 1, 3, 6, 9, 27, 28, 33, 34, 37, 50).
- [9] R. A. Isaacson, *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics*, *Phys. Rev.* **166** (5 1968) 1263, URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.166.1263> (siehe S. 3, 21).
- [10] B. Metsch und H. Petry, „General Relativity and Cosmology, SS 2014“, University Lecture, 2015 (siehe S. 3).
- [11] E. Fermi, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 31 (1922) 21 (siehe S. 12).
- [12] F. K. Manasse und C. W. Misner, *Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry*, *Journal of Mathematicle Physics* **4**.6 (1963) 735 (siehe S. 12).
- [13] *johnstonsarchive.net: Gravitational wave-related images*, URL: <http://www.johnstonsarchive.net/relativity/pictures.html> (besucht am 24.05.2016) (siehe S. 14).
- [14] W.-T. Ni und M. Zimmermann, *Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer*, *Phys. Rev. D* **17** (6 1978) 1473, URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.1473> (siehe S. 15).

- [15] R. A. Isaacson, *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor*, *Phys. Rev.* **166** (5 1968) 1272,  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.166.1272> (siehe S. 21, 65, 66).
- [16] *xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language*,  
URL: <http://www.xact.es/> (besucht am 31. 05. 2016) (siehe S. 22, 51).
- [17] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Mechanik*, Bd. 8, Akademie Verlag, 1973 (siehe S. 27).
- [18] S. A. Hughes u. a., *New physics and astronomy with the new gravitational-wave observatories* (2001), eprint: [arXiv:astro-ph/0110349](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0110349) (siehe S. 35–37).
- [19] *LIGO's Interferometer*,  
URL: <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo> (besucht am 05. 07. 2016)  
(siehe S. 36).
- [20] M. Pitkin u. a., *Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space)* (2011),  
eprint: [arXiv:1102.3355](https://arxiv.org/abs/1102.3355) (siehe S. 37).
- [21] L. Blanchet,  
*Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*,  
*Living Reviews in Relativity* **17.2** (2014),  
URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-2> (siehe S. 39, 43).
- [22] T. A. Apostolatos u. a., *Spin-induced orbital precession and its modulation of the gravitational waveforms from merging binaries*, *Phys. Rev. D* **49** (12 1994) 6274,  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.6274> (siehe S. 39).
- [23] Y. Pan u. a., *Inspiral-merger-ringdown waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the effective-one-body formalism*, *Phys. Rev. D* **89** (8 2014) 084006,  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.084006> (siehe S. 39).
- [24] B. P. Abbott u. a., *Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914*,  
*Phys. Rev. Lett.* **116** (24 2016) 241102,  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.241102> (siehe S. 40).
- [25] B. P. Abbott u. a., *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (24 2016) 241103,  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.241103> (siehe S. 43).
- [26] *eLISA*, URL: <https://www.elisascience.org/> (besucht am 25. 07. 2016) (siehe S. 43).
- [27] *Universe in Problems: Plane wave TT gauge transformation*, URL: [http://universeinproblems.com/index.php/Transverse\\_traceless\\_gauge#Problem\\_3:\\_Plane\\_wave\\_TT\\_gauge\\_transformation](http://universeinproblems.com/index.php/Transverse_traceless_gauge#Problem_3:_Plane_wave_TT_gauge_transformation) (besucht am 19. 05. 2016) (siehe S. 47).
- [28] *xAct: Dokumentation*,  
URL: <http://www.xact.es/Documentation/PDF/xTensorDoc.nb.pdf> (besucht am 13. 06. 2016) (siehe S. 51).

## Rechnungen zur TT-Eichung

### A.1 Existenz der Eichfunktion

Wir betrachten eine eben Welle  $\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(k) \cdot e^{ik^\lambda x_\lambda}$ , welche die Lorentzeichbedingung  $k^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  erfüllt. Es soll nun gezeigt werden, dass eine Eichfunktion  $B^\mu(x, k) = b^\mu(k) e^{ik^\lambda x_\lambda}$  existiert, sodass unter Einhaltung der Lorentzeichbedingung zusätzlich für einen zeitartigen Vektor  $u^\mu$  gilt, dass  $u^\mu \tilde{\bar{h}}_{\mu\nu} = 0$  und  $\tilde{\bar{h}}^\mu{}_\mu = 0$ .

In Kapitel 2 zeigten wir, dass die Eichfunktion die spurumgekehrte Störung nach

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{\bar{h}}_{\mu\nu} := \underbrace{(a_{\mu\nu} - ik_\mu b_\nu - ik_\nu b_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda b^\lambda)}_{=: \tilde{a}_{\mu\nu}} e^{ik^\lambda x_\lambda} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.1})$$

transformiert. Durch geschickte Wahl von  $b^\mu$  lässt sich nun folgender Satz beweisen:

**Satz.** Sei  $a_{\mu\nu}$  symmetrisch,  $k^\mu \neq 0$  lichtartig und  $u^\mu$  zeitartig mit  $u_\mu u^\mu = -1$ . Des Weiteren gelte  $a_{\mu\nu} k^\mu = 0$ . Dann existiert ein  $b^\mu$ , sodass  $ik_\mu b_\nu$  in der Größenordnung von  $a_{\mu\nu}$  liegt und

$$\tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - ik_\mu b_\nu - ik_\nu b_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda b^\lambda \quad (\text{A.2})$$

folgende drei Bedingungen erfüllt:

$$(i) \tilde{a}_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (ii) \tilde{a}^\mu{}_\mu = 0 \quad (iii) \tilde{a}_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (\text{A.3})$$

*Beweis:* Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung des Beweises aus [27].

Zeigen wir zuerst, dass  $\omega := -k_\mu u^\mu$  ungleich Null ist und nehmen dazu erst einmal das Gegenteil an, dh. dass  $\omega = 0$  gilt. Es existiert eine Lorentztransformation  $\Lambda$ , sodass  $\Lambda^\mu{}_\nu u^\nu = (u, 0, 0, 0)$  mit  $u \neq 0$ , da  $u^\mu$  zeitartig ist. Dann gilt  $\omega = -k_\nu \Lambda_\rho{}^\nu \Lambda^\rho{}_\mu u^\mu = -u \Lambda_0{}^\nu k_\nu$ .

$$\Rightarrow \Lambda_0{}^\nu k_\nu = 0 \quad (\text{A.4})$$

Da  $k^\mu$  lichtartig ist, muss es  $\Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$  ebenfalls sein. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 k_\nu \Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\mu k^\mu &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\Lambda^0{}_\mu k^\mu)^2 &= \sum_i (\Lambda^i{}_\mu k^\mu)^2 \\
 \Rightarrow 0 &= \sum_i (\Lambda^i{}_\mu k^\mu)^2 \\
 \Rightarrow \forall i : \Lambda^i{}_\mu k^\mu &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Damit ist  $\Lambda^\nu{}_\mu k^\mu = 0$ , was im Widerspruch dazu steht, dass  $\Lambda$  ein Automorphismus ist. Folglich muss  $\omega \neq 0$  sein.

Setze nun  $a := a^\mu{}_\mu$  und

$$b_\mu := -\frac{a_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta}{8i\omega^4} k_\mu + \frac{a}{4i\omega^2} l_\mu - \frac{1}{2i\omega^2} a_{\mu\alpha} l^\alpha. \tag{A.6}$$

wobei  $l^\mu := 2u^\mu \omega - k^\mu$ . Mit dieser Wahl ist  $ib_\mu k_\nu$  in der Größenordnung von  $a_{\mu\nu}$ , da

$$ib_\mu k_\nu \sim i \left( -\frac{a_{\alpha\beta} \omega \omega}{8i\omega^4} \omega - \frac{a}{4i\omega^2} \omega + \frac{1}{2i\omega^2} a_{\mu\alpha} \omega \right) \omega \sim a_{\alpha\beta}. \tag{A.7}$$

Bleibt zu zeigen, dass (i) bis (iii) mit dieser Wahl ebenfalls erfüllt sind. Beachte dabei die Identitäten

$$k_\mu l^\mu = -2\omega^2, \quad u_\mu l^\mu = -\omega. \tag{A.8}$$

(i) Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{\mu\nu} k^\nu &= a_{\mu\nu} k^\nu - ik_\mu b_\nu k^\nu - ik_\nu k^\nu b_\mu + i\eta_{\mu\nu} k^\nu k_\lambda b^\lambda \\
 &= 0 - ik_\mu b_\nu k^\nu - 0 + ik_\mu k_\lambda b^\lambda \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

(ii) Die Forderung lässt sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned}
 0 &= \tilde{a}^\mu{}_\mu \\
 &= a^\mu{}_\mu - ik^\mu b_\mu - ik_\mu b^\mu + 4ik_\lambda b^\lambda \\
 &= a + 2ik^\mu b_\mu \\
 \Leftrightarrow k^\mu b_\mu &= \frac{i}{2} a.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Diese Relation lässt sich durch Einsetzen von  $b_\mu$  zeigen:

$$\begin{aligned}
 k^\mu b_\mu &= -\frac{a_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta}{8i\omega^4} k^\mu k_\mu + \frac{a}{4i\omega^2} k^\mu l_\mu - \frac{1}{2i\omega^2} k^\mu a_{\mu\alpha} l^\alpha \\
 &= 0 + \frac{a}{4i\omega^2} \cdot (-2\omega^2) - 0 \\
 &= \frac{i}{2} a.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

(iii) Auch die letzte Relation lässt sich ebenfalls durch Nachrechnen zeigen:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{\mu\nu}u^\nu &= a_{\mu\nu}u^\nu - ik_\mu b_\nu u^\nu - ik_\nu u^\nu b_\mu + iu_\mu k_\lambda b^\lambda \\
&= a_{\mu\nu}u^\nu - i(k_\mu u_\nu - \omega\eta_{\mu\nu} - u_\mu k_\nu)b^\nu \\
&= a_{\mu\nu}u^\nu + i(k_\mu u_\nu - \omega\eta_{\mu\nu} - u_\mu k_\nu)\left(-\frac{a_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta}{8i\omega^4}k^\nu + \frac{a}{4i\omega^2}l^\nu - \frac{1}{2i\omega^2}a^\nu{}_\alpha l^\alpha\right) \\
&= a_{\mu\nu}u^\nu + \frac{a_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta}{8\omega^4}k_\mu u_\nu k^\nu - \frac{a_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta}{8\omega^3}k_\mu + 0 - \frac{a}{4\omega^2}k_\mu u_\nu l^\nu + \frac{a}{4\omega}l_\mu \\
&\quad + \frac{a}{4\omega^2}u_\mu k_\nu l^\nu + \frac{1}{2\omega^2}a_{\nu\alpha}u^\nu l^\alpha k_\mu - \frac{1}{2\omega}a_{\mu\alpha}l^\alpha + 0 \\
&= a_{\mu\nu}u^\nu - \frac{1}{\omega}a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta k_\mu + \frac{1}{4\omega}a k_\mu + \frac{1}{2}a u_\mu - \frac{1}{4\omega}a k_\mu - \frac{1}{2}a u_\mu \\
&\quad + \frac{1}{\omega}a_{\nu\alpha}u^\alpha u^\nu k_\mu - a_{\mu\alpha}u^\alpha \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

□

## A.2 Projektor von der Lorentz- in die TT-Eichung

Die Frage nach der Existenz der TT-Eichung ist nun geklärt. Dieser Abschnitt befasst sich nun damit, einen Projektor zu konstruieren, der auf eine beliebige ebene Welle angewandt werden kann, um sie von der Lorentzeichung in die TT-Eichung zu überführen. Dieser Projektor wird vor allem dann wichtig sein, wenn wir mit Lösungen der inhomogenen Wellengleichung rechnen, da sich diese im Allgemeinen erst einmal nur in der Lorentzeichung befinden. Da man in vielen Rechnungen jedoch die Eigenschaften der TT-Eichung nutzen will, wird uns an diesen Stellen der Projektor sehr von Nutzen sein.

Wir beginnen zuerst einmal damit, dass  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  gewählt wird. In diesem Fall gilt für die im vorangegangenen Satz definierten Variablen

$$\omega = k^0, \quad l^\mu = 2u^\mu\omega - k^\mu = (k^0, -k^1, -k^2, -k^3). \tag{A.13}$$

Definiere nun  $n^\mu := k^\mu/\omega$  und  $n'^\mu := l^\mu/\omega$  und setze dies in den Ansatz für  $b^\mu$  aus (A.6) ein:

$$\begin{aligned}
b_\mu &= -\frac{a_{\alpha\beta}n'^\alpha n'^\beta}{8i\omega}n_\mu + \frac{a}{4i\omega}n'_\mu - \frac{1}{2i\omega}a_{\mu\alpha}n'^\alpha \\
&= \frac{1}{i\omega}\left(-\frac{1}{8}a_{00}n_\mu + \frac{1}{4}a_{0k}n^k n_\mu - \frac{1}{8}a_{kl}n^k n^l n_\mu + \frac{a}{4}n'_\mu - \frac{1}{2}a_{\mu 0} + \frac{1}{2}a_{\mu k}n^k\right).
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Nutze nun aus, dass mit  $a_{\mu\nu}n^\nu = 0$  die Relation  $a_{\mu 0} = -a_{\mu k}n^k$  gilt.

$$\begin{aligned}
b_\mu &= \frac{1}{i\omega}\left(-\frac{1}{8}a_{kl}n^k n^l n_\mu - \frac{1}{4}a_{kl}n^k n^l n_\mu - \frac{1}{8}a_{kl}n^k n^l n_\mu + \frac{a}{4}n'_\mu + \frac{1}{2}a_{\mu k}n^k + \frac{1}{2}a_{\mu k}n^k\right) \\
&= \frac{1}{i\omega}\left(-\frac{1}{2}a_{kl}n^k n^l n_\mu + \frac{a}{4}n'_\mu + a_{\mu k}n^k\right).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Da mit der Wahl  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  schon  $a_{\mu 0} = 0$  gilt, genügt es im Weiteren die räumlichen Einträge von

$a_{\mu\nu}$  zu betrachten. Dazu setzen wir (A.15) in (A.1) und erhalten

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^{\text{TT}} &= \left( a_{ij} - n_i \left( -\frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n_j + \frac{a}{4} n'_j + a_{jk} n^k \right) - n_j \left( -\frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n_i + \frac{a}{4} n'_i + a_{ik} n^k \right) \right. \\
 &\quad \left. + \eta_{ij} n_\lambda \left( -\frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n^\lambda + \frac{a}{4} n'^\lambda + a^\lambda_{\phantom{\lambda}k} n^k \right) \right) e^{ik^\lambda x_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \left( a_{ij} + \frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n_i n_j - \frac{a}{4} n'_j n_i - a_{jk} n^k n_i + \frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n_i n_j - \frac{a}{4} n'_i n_j - a_{ik} n^k n_j \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a}{4} \eta_{ij} n_\lambda n'^\lambda \right) e^{ik^\lambda x_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \left( a_{ij} + a_{kl} n^k n^l n_i n_j + \frac{1}{2} n_i n_j (-a_{00} + \eta^{kl} a_{kl}) - a_{jk} n^k n_i - a_{ik} n^k n_j \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_{ij} (-a_{00} + \eta^{kl} a_{kl}) \right) e^{ik^\lambda x_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \left( a_{ij} + \frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l n_i n_j + \frac{1}{2} \eta^{kl} a_{kl} n_i n_j - a_{jk} n^k n_i - a_{il} n^l n_j - \frac{1}{2} \eta^{kl} a_{kl} \eta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} a_{kl} n^k n^l \eta_{ij} \right) e^{ik^\lambda x_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \left( \delta_i^k \delta_j^l + \frac{1}{2} n^k n^l n_i n_j + \frac{1}{2} \eta^{kl} n_i n_j - \delta_j^l n^k n_i - \delta_i^k n^l n_j - \frac{1}{2} \eta^{kl} \eta_{ij} + \frac{1}{2} n^k n^l \eta_{ij} \right) \bar{h}_{kl} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \underbrace{\left( (\delta_i^k - n^k n_i)(\delta_j^l - n^l n_j) - \frac{1}{2} (\eta_{ij} - n_i n_j)(\eta^{kl} - n^k n^l) \right)}_{=: \Lambda(n)_{ij}^{kl}} \bar{h}_{kl} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

Mit  $\Lambda(n)_{ij}^{kl} \bar{h}_{kl}$  haben wir den gesuchten Projektor auf die transversale und spurlose Komponente der Störung gefunden. Wir definieren die TT-Komponente eines beliebigen symmetrischen (0,2)-Tensors bezüglich  $n^i$  daher von nun als

$$X_{ij}^{\text{TT}} := \Lambda(n)_{ij}^{kl} X_{kl}. \tag{A.17}$$

Die hier verwendete Form des  $\Lambda$ -Projektors findet sich in den meisten Lehrbüchern, wie zum Beispiel [6, 312], [7, 948] und [8, 9], wieder. Dort wird jedoch kein Beweis geliefert, dass die Anwendung des Projektors äquivalent zur Koordinatentransformation (2.23) ist.

---

## Störungsrechnung über einem gekrümmten Hintergrund

---

In diesem Abschnitt wird die Störungsrechnung ausgehend von einer Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) + \varepsilon h_{\mu\nu}(x) \tag{B.1}$$

präsentiert. Dabei bezeichnet  $\gamma_{\mu\nu}(x)$  die langsam variierende Hintergrundmetrik und  $h_{\mu\nu}(x)$  eine schnell variierende Störung, wie in Kapitel 5 motiviert wurde. Der Ordnungsparameter der Störungsrechnung ist  $\varepsilon \ll 1$ . Ziel ist es, den Ricci-Tensor bis zur 2. Ordnung in diesen Variablen zu bestimmen und anschließend den Ansatz für den effektiven Energieimpulstensor aus Gleichung (5.14) möglichst weit zu vereinfachen.

Bei der nachfolgenden Rechnung wurden die `xAct`-Pakete [16] für Mathematica genutzt. Es handelt sich hierbei um eine Sammlung von Paketen, die die Benutzung der Indexnotation in Mathematica erlauben. Für eine Einführung in die Benutzung dieser Pakete siehe [28].

Das von mir erstellte Mathematica-Skript zur Bestimmung des Ricci-Tensors und des effektiven Energieimpulstensors findet sich auf den nachfolgenden Seiten.

---

## Initialisierung und Definitionen

Hier werden die Pakete geladen, die Mannigfaltigkeit  $M$  und die Hintergrundmetrik  $metric[-\alpha, -\beta]$  initialisiert und die Störung  $h[-\alpha, -\beta]$ , der Ordnungsparameter  $\epsilon$ , die Gesamtmatrix  $g[-\alpha, -\beta]$  sowie ihr Inverses  $ghoch[a, b]$  definiert.

```
<< xAct`xTensor`
<< xAct`TexAct`
DefManifold[M, 4, {\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi}]
DefTensor[h[-\alpha, -\beta], M, Symmetric[{-\alpha, -\beta}]]
DefConstantSymbol[eps, PrintAs -> "\epsilon"]
DefConstantSymbol[G]
DefMetric[-1, metric[-\alpha, -\beta], cd, {";", "\n"}, PrintAs -> "\gamma"]
g[-a_, -b_] := metric[-a, -b] + eps * h[-a, -b]
ghoch[a_, b_] := Module[{alpha}, metric[a, b] - eps * h[a, b] + eps * eps * h[a, alpha] h[b, -alpha]]
-----
```

---

## Inverse Metrik 2. Ordnung

Hier soll gezeigt werden, dass die Wahl  $(\gamma^{\rho\nu} - \epsilon h^{\rho\nu} + \epsilon^2 h^\nu_\alpha h^{\rho\alpha})$  als Inverses, der Metrik in der zu betrachtenden Näherung gerechtfertigt ist. Das heißt, dieser Ausdruck kontrahiert mit der Metrik

`ScreenDollarIndices[g[-\mu, -\rho] ghoch[\rho, \nu]]`

$$(\epsilon h_{\mu\rho} + \gamma_{\mu\rho}) (\epsilon^2 h^\nu_\alpha h^{\rho\alpha} - \epsilon h^{\rho\nu} + \gamma^{\rho\nu})$$

muss dem Einheitsensor bis zur zweiten Ordnung in  $\epsilon$  entsprechen :

`Expand[%]`

`Simplification[ToCanonical[ContractMetric[%]]]`

$$\delta_\mu^\nu + \epsilon^3 h_{\mu\rho} h^\nu_\alpha h^{\rho\alpha} - \epsilon^2 h_{\mu\rho} h^{\rho\nu} + \epsilon^2 h^\nu_\alpha h^{\rho\alpha} \gamma_{\mu\rho} - \epsilon h^{\rho\nu} \gamma_{\mu\rho} + \epsilon h_{\mu\rho} \gamma^{\rho\nu}$$

$$\delta_\mu^\nu + \epsilon^3 h_{\alpha\rho} h_\mu^\alpha h^{\nu\rho}$$

Dies ist offensichtlich gegeben. Dazu können wir in der weiteren Rechnung  $ghoch[\mu, \nu]$  als inverse Metrik verwenden. Indices werden jedoch immer über die zugrunde liegende Metrik  $metric[-\mu, -\nu]$  gehoben und gesenkt.

---

## Christoffelsymbole

Als erstes sollen die Christoffelsymbole bis zur zweiten Ordnung in  $\epsilon$  berechnet werden. Dazu definieren diese zuerst einmal über



```

gChristoffel[a_, -b_, -c_] :=
Module[{λ}, 1/2 ghoch[a, λ] * (PD[-b]@g[-c, -λ] + PD[-c]@g[-b, -λ] - PD[-λ]@g[-b, -c])]
ScreenDollarIndices[gChristoffel[ρ, -μ, -ν]]
1/2 (ε² hβ_α hρ_α - ε hρ_β + γρ_β) (-ε ∂_β h_{μν} - ∂_β γ_{μν} + ε ∂_μ h_{νβ} + ∂_μ γ_{νβ} + ε ∂_ν h_{μβ} + ∂_ν γ_{μβ})

```

## Expansion

Wir expandieren obigen Ausdruck und ersetzen die partiellen Ableitungen mit den kovarianten  $\nabla_\beta$  bzgl. der Hintergrundmetrik.  $\Gamma[\nabla]^\alpha_{\beta\mu}$  bezeichnen dabei ebenfalls die Christoffelsymbole bzgl. der Hintergrundmetrik.

```

ScreenDollarIndices[ChangeCovD[ContractMetric[Expand[%]], PD, cd]]
- 1/2 ε hρ_β (Γ[∇]γ_{νμ} γ_{γβ} + Γ[∇]α_{νβ} γ_{μα}) +
1/2 ε hρ_β (Γ[∇]α_{βμ} γ_{αγ} + Γ[∇]γ_{βν} γ_{μγ}) + 1/2 ε² hβ_α hρ_α (Γ[∇]δ_{νμ} γ_{δβ} + Γ[∇]γ_{νβ} γ_{μγ}) -
1/2 ε² hβ_α hρ_α (Γ[∇]γ_{βμ} γ_{γν} + Γ[∇]δ_{βν} γ_{μδ}) - 1/2 ε hρ_β (Γ[∇]γ_{μν} γ_{γβ} + Γ[∇]α_{μβ} γ_{να}) +
1/2 ε² hβ_α hρ_α (Γ[∇]δ_{μν} γ_{δβ} + Γ[∇]γ_{μβ} γ_{νγ}) + 1/2 (Γ[∇]γ_{νμ} γ_{γβ} + Γ[∇]α_{νβ} γ_{μα}) γρ_β -
1/2 (Γ[∇]α_{βμ} γ_{αγ} + Γ[∇]γ_{βν} γ_{μγ}) γρ_β + 1/2 (Γ[∇]γ_{μν} γ_{γβ} + Γ[∇]α_{μβ} γ_{να}) γρ_β +
1/2 ε² hρ_β (Γ[∇]α_{βμ} h_{αγ} + Γ[∇]γ_{βν} h_{μγ} + ∇_β h_{μν}) -
1/2 ε γρ_β (Γ[∇]α_{βμ} h_{αγ} + Γ[∇]γ_{βν} h_{μγ} + ∇_β h_{μν}) -
1/2 ε³ hβ_α hρ_α (Γ[∇]γ_{βμ} h_{γν} + Γ[∇]δ_{βν} h_{μδ} + ∇_β h_{μν}) -
1/2 ε² hρ_β (Γ[∇]γ_{μν} h_{γβ} + Γ[∇]α_{μβ} h_{να} + ∇_μ h_{νβ}) +
1/2 ε γρ_β (Γ[∇]γ_{μν} h_{γβ} + Γ[∇]α_{μβ} h_{να} + ∇_μ h_{νβ}) +
1/2 ε³ hβ_α hρ_α (Γ[∇]δ_{μν} h_{δβ} + Γ[∇]γ_{μβ} h_{νγ} + ∇_μ h_{νβ}) -
1/2 ε² hρ_β (Γ[∇]γ_{νμ} h_{γβ} + Γ[∇]α_{νβ} h_{μα} + ∇_ν h_{μβ}) +
1/2 ε γρ_β (Γ[∇]γ_{νμ} h_{γβ} + Γ[∇]α_{νβ} h_{μα} + ∇_ν h_{μβ}) +
1/2 ε³ hβ_α hρ_α (Γ[∇]δ_{νμ} h_{δβ} + Γ[∇]γ_{νβ} h_{μγ} + ∇_ν h_{μβ})

```

Dieser Ausdruck wird vereinfacht

**ToCanonical[Simplification[ContractMetric[%]]]**

$$\begin{aligned} & \Gamma[\nabla]^\rho{}_{\mu\nu} + \epsilon^3 \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\mu\nu} h_\alpha{}^\gamma h_{\beta\gamma} h^{\rho\beta} + \frac{1}{2} \epsilon^2 h^{\rho\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \epsilon \gamma^{\rho\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} - \\ & \frac{1}{2} \epsilon^3 h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\beta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \epsilon^2 h^{\rho\alpha} \nabla_\mu h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \epsilon^3 h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\mu h_{\nu\beta} + \\ & \frac{1}{2} \epsilon \nabla_\mu h_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{2} \epsilon^2 h^{\rho\alpha} \nabla_\nu h_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \epsilon^3 h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\nu h_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \epsilon \nabla_\nu h_{\mu}{}^\rho \end{aligned}$$

und in Ordnungen von  $\epsilon$  sortiert:

**Collect[%, eps]**

$$\begin{aligned} & \Gamma[\nabla]^\rho{}_{\mu\nu} + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} h^{\rho\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\rho\alpha} \nabla_\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} h^{\rho\alpha} \nabla_\nu h_{\mu\alpha} \right) + \\ & \epsilon^3 \left( \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\mu\nu} h_\alpha{}^\gamma h_{\beta\gamma} h^{\rho\beta} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\beta h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\mu h_{\nu\beta} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^\beta h^{\rho\alpha} \nabla_\nu h_{\mu\beta} \right) + \\ & \epsilon \left( -\frac{1}{2} \gamma^{\rho\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h_{\nu}{}^\rho + \frac{1}{2} \nabla_\nu h_{\mu}{}^\rho \right) \end{aligned}$$

In nullter Ordnung reduziert sich der Ausdruck, wie erwartet, zu den Christoffelsymbolen der Hintergrundmetrik.

## Riemann-Tensor

### Definitionen

Wir definieren den Riemann-Tensor über die Terme der soeben berechneten Christoffelsymbole, wobei jedoch nur Terme bis zur zweiten Ordnung in  $\epsilon$  mitgenommen werden.

```
gChristoffel2[ρ_, -μ_, -ν_] := Module[{α}, Christoffelcd[ρ, -μ, -ν] +
  eps * (cd[-μ][h[-ν, ρ]]/2 + cd[-ν][h[-μ, ρ]]/2 - cd[ρ][h[-μ, -ν]]/2) +
  eps^2 * ((h[ρ, α] * cd[-α][h[-μ, -ν]])/2 -
    (h[ρ, α] * cd[-μ][h[-ν, -α]])/2 - (h[ρ, α] * cd[-ν][h[-μ, -α]])/2)]
gRiemann[a_, -b_, -c_, -d_] := Module[{α}, PD[-c][gChristoffel2[a, -b, -d]] -
  PD[-d][gChristoffel2[a, -b, -c]] + gChristoffel2[α, -b, -d]
  gChristoffel2[a, -α, -c] - gChristoffel2[α, -b, -c] gChristoffel2[a, -α, -d]]
```

### Expansion

Wie im vorangehenden Abschnitt wird der Riemann-Tensor in Ordnungen von  $\epsilon$  sortiert. Auch hier finden wir in nullter Ordnung den entsprechenden Ausdruck bzgl. der Hintergrundmetrik vor.

ScreenDollarIndices[Collect[gRiemann[μ, -ν, -ρ, -σ], eps]]

$$\begin{aligned}
& \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\rho} - \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\rho} \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\sigma} + \\
& \epsilon^4 \left( \left( -\frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\delta h_{\nu\rho} + \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\nu h_{\rho\delta} + \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\rho h_{\nu\delta} \right) \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\alpha h_{\sigma\epsilon} + \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\epsilon h_{\alpha\sigma} - \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\sigma h_{\alpha\epsilon} \right) + \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\alpha h_{\rho\gamma} + \frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\gamma h_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\rho h_{\alpha\gamma} \right) \\
& \quad \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\beta h_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\sigma h_{\nu\beta} \right) \Big) + \\
& \epsilon^3 \left( \left( \frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\rho{}^\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\nu{}^\alpha \right) \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\alpha h_{\sigma\epsilon} + \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\epsilon h_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\sigma h_{\alpha\epsilon} \right) + \right. \\
& \quad \left( -\frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\delta h_{\nu\rho} + \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\nu h_{\rho\delta} + \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\rho h_{\nu\delta} \right) \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\sigma{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\alpha{}^\mu \right) + \\
& \quad \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\alpha h_{\rho\gamma} + \frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\gamma h_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} h^{\mu\gamma} \nabla_\rho h_{\alpha\gamma} \right) \left( -\frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\sigma{}^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\nu{}^\alpha \right) + \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\rho{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\alpha{}^\mu \right) \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\beta h_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \nabla_\sigma h_{\nu\beta} \right) \Big) + \\
& \partial_\rho \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\nu\rho} + \epsilon^2 \left( \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\sigma} \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\alpha h_{\rho\epsilon} + \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\epsilon h_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_\rho h_{\alpha\epsilon} \right) - \right. \\
& \quad \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\sigma} \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_\eta h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_\nu h_{\rho\eta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_\rho h_{\nu\eta} \right) - \\
& \quad \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\rho} \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_\alpha h_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_\kappa h_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_\sigma h_{\alpha\kappa} \right) + \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\rho{}^\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\nu{}^\alpha \right) \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\sigma{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\alpha{}^\mu \right) + \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\rho{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\alpha{}^\mu \right) \left( -\frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\sigma{}^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\nu{}^\alpha \right) + \\
& \quad \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\rho} \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\delta h_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\nu h_{\sigma\delta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_\sigma h_{\nu\delta} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left( \nabla_\beta h_{\nu\sigma} \partial_\rho h^{\mu\beta} + h^{\mu\beta} \partial_\rho \nabla_\beta h_{\nu\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( -\nabla_\nu h_{\sigma\beta} \partial_\rho h^{\mu\beta} - h^{\mu\beta} \partial_\rho \nabla_\nu h_{\sigma\beta} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left( -\nabla_\sigma h_{\nu\beta} \partial_\rho h^{\mu\beta} - h^{\mu\beta} \partial_\rho \nabla_\sigma h_{\nu\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( -\nabla_\gamma h_{\nu\rho} \partial_\sigma h^{\mu\gamma} - h^{\mu\gamma} \partial_\sigma \nabla_\gamma h_{\nu\rho} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left( \nabla_\nu h_{\rho\gamma} \partial_\sigma h^{\mu\gamma} + h^{\mu\gamma} \partial_\sigma \nabla_\nu h_{\rho\gamma} \right) + \frac{1}{2} \left( \nabla_\rho h_{\nu\gamma} \partial_\sigma h^{\mu\gamma} + h^{\mu\gamma} \partial_\sigma \nabla_\rho h_{\nu\gamma} \right) \Big) + \\
& \epsilon \left( \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\sigma} \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\rho{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\alpha{}^\mu \right) - \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\sigma} \left( -\frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\rho{}^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\rho h_\nu{}^\alpha \right) - \right. \\
& \quad \Gamma[\nabla]^\alpha{}_{\nu\rho} \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\sigma{}^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\alpha{}^\mu \right) + \Gamma[\nabla]^\mu{}_{\alpha\rho} \left( -\frac{1}{2} \nabla^\alpha h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_\nu h_\sigma{}^\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\sigma h_\nu{}^\alpha \right) - \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \partial_\rho \nabla^\mu h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\rho \nabla_\nu h_\sigma{}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\rho \nabla_\sigma h_\nu{}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\sigma \nabla^\mu h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \partial_\sigma \nabla_\nu h_\rho{}^\mu - \frac{1}{2} \partial_\sigma \nabla_\rho h_\nu{}^\mu \right)
\end{aligned}$$

Wir vereinfachen nun nach und nach die Ausdrücke in jeweiliger Ordnung von  $\epsilon$ .

## Erste Ordnung

### Definition

Wir setzen nun  $\text{gRiemann1}[\mu_-, -\nu_-, -\rho_-, -\sigma_-]$  gleich der soeben berechneten ersten Ordnung des

Riemann Tensors in  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \text{gRiemann1}[\mu_, -\nu_, -\rho_, -\sigma_] := & \text{Module}[\{\alpha, \beta\}, \\ & \left( \Gamma[\nabla]^{\alpha}_{\nu\sigma} \left( \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{2} \nabla^{\mu} h_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} h_{\alpha}^{\mu} \right) - \Gamma[\nabla]^{\mu}_{\alpha\sigma} \left( -\frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\alpha} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\alpha} \right) - \right. \\ & \left. \Gamma[\nabla]^{\alpha}_{\nu\rho} \left( \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h_{\sigma}^{\mu} - \frac{1}{2} \nabla^{\mu} h_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} \right) + \Gamma[\nabla]^{\mu}_{\alpha\rho} \left( -\frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\alpha} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\alpha} \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \partial_{\rho} \nabla^{\mu} h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \nabla^{\mu} h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\mu} \right) \end{aligned}$$

## Expansion und Vereinfachung

Im ersten Schritt ersetzen wir die Christoffelsymbole  $\Gamma[\nabla]^{\alpha}_{\nu\sigma}$  mit der Metrik  $\gamma^{\mu\epsilon}$  und deren Ableitungen und vereinfachen diesen Ausdruck

$$\begin{aligned} & \text{ScreenDollarIndices}[\text{Simplify}[\text{ChristoffelToGradMetric}[\text{gRiemann1}[\mu, -\nu, -\rho, -\sigma]]]] \\ & \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \gamma^{\mu\epsilon} \left( \nabla^{\alpha} h_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\alpha} - \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\alpha} \right) \left( \partial_{\alpha} \gamma_{\rho\epsilon} - \partial_{\epsilon} \gamma_{\alpha\rho} + \partial_{\rho} \gamma_{\alpha\epsilon} \right) - \right. \\ & \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\delta} \left( \nabla_{\alpha} h_{\sigma}^{\mu} - \nabla^{\mu} h_{\alpha\sigma} + \nabla_{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} \right) \left( -\partial_{\delta} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\rho\delta} + \partial_{\rho} \gamma_{\nu\delta} \right) - \partial_{\rho} \nabla^{\mu} h_{\nu\sigma} + \\ & \partial_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\mu} + \partial_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\gamma} \left( \nabla^{\alpha} h_{\nu\rho} - \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\alpha} - \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\alpha} \right) \left( \partial_{\alpha} \gamma_{\sigma\gamma} - \partial_{\gamma} \gamma_{\alpha\sigma} + \partial_{\sigma} \gamma_{\alpha\gamma} \right) + \\ & \left. \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \left( \nabla_{\alpha} h_{\rho}^{\mu} - \nabla^{\mu} h_{\alpha\rho} + \nabla_{\rho} h_{\alpha}^{\mu} \right) \left( -\partial_{\beta} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\sigma\beta} + \partial_{\sigma} \gamma_{\nu\beta} \right) + \partial_{\sigma} \nabla^{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\mu} - \partial_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\mu} \right) \end{aligned}$$

Nun werden partielle mit kovarianten Ableitungen ersetzt. Die Komponente erster Ordnung liest sich damit als

$$\begin{aligned} & \text{ToCanonical}[\text{Simplification}[\text{ContractMetric}[\text{ChangeCovD}[\%, \text{PD}, \text{cd}]]]] \\ & -\frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla^{\mu} h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\mu} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla^{\mu} h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\mu} \end{aligned}$$

## Zweite Ordnung

### Definition

Analog zur ersten Ordnung bezeichnet  $\text{gRiemann2}[-\mu_, -\nu_, -\rho_, -\sigma_]$  die zweite Ordnung des Riemann-Tensors in  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned}
& \text{gRiemanntief2}[-\mu, -\nu, -\rho, -\sigma] := \\
& \text{Module}\left[\{\alpha, \beta, \eta, \delta, \kappa, \gamma\}, \left( \Gamma[\nabla]^{\alpha}_{\nu\sigma} \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_{\alpha} h_{\rho\epsilon} + \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_{\epsilon} h_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \nabla_{\rho} h_{\alpha\epsilon} \right) - \right. \\
& \quad \Gamma[\nabla]^{\mu}_{\alpha\sigma} \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_{\eta} h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_{\nu} h_{\rho\eta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\eta} \nabla_{\rho} h_{\nu\eta} \right) - \\
& \quad \Gamma[\nabla]^{\alpha}_{\nu\rho} \left( -\frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_{\alpha} h_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} h_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} h^{\mu\kappa} \nabla_{\sigma} h_{\alpha\kappa} \right) + \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\alpha} \right) \left( \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h_{\sigma}^{\mu} - \frac{1}{2} \nabla^{\mu} h_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} \right) + \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{2} \nabla^{\mu} h_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} h_{\alpha}^{\mu} \right) \left( -\frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\alpha} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\alpha} \right) + \\
& \quad \Gamma[\nabla]^{\mu}_{\alpha\rho} \left( \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_{\delta} h_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_{\nu} h_{\sigma\delta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\delta} \nabla_{\sigma} h_{\nu\delta} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left( \nabla_{\beta} h_{\nu\sigma} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} + h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\beta} h_{\nu\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( -\nabla_{\nu} h_{\sigma\beta} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} - h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma\beta} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left( -\nabla_{\sigma} h_{\nu\beta} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} - h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( -\nabla_{\gamma} h_{\nu\rho} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} - h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\gamma} h_{\nu\rho} \right) + \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left( \nabla_{\nu} h_{\rho\gamma} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} + h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho\gamma} \right) + \frac{1}{2} \left( \nabla_{\rho} h_{\nu\gamma} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} + h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu\gamma} \right) \right) \Big]
\end{aligned}$$

## Expansion und Vereinfachung

Auch hier wird die Definition der Christoffelsymbole über die Metrik eingesetzt und der Ausdruck vereinfacht.

$$\begin{aligned}
& \text{ScreenDollarIndices} \left[ \right. \\
& \quad \text{Simplify} \left[ \text{ChristoffelToGradMetric} \left[ \text{gRiemanntief2}[-\mu, -\nu, -\rho, -\sigma] \right] \right] \Big] \\
& \frac{1}{4} \left( \left( \nabla^{\alpha} h_{\nu\rho} - \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\alpha} - \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\alpha} \right) \left( \nabla_{\alpha} h_{\sigma}^{\mu} - \nabla^{\mu} h_{\alpha\sigma} + \nabla_{\sigma} h_{\alpha}^{\mu} \right) - \right. \\
& \quad \left( \nabla_{\alpha} h_{\rho}^{\mu} - \nabla^{\mu} h_{\alpha\rho} + \nabla_{\rho} h_{\alpha}^{\mu} \right) \left( \nabla^{\alpha} h_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} h_{\sigma}^{\alpha} - \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\alpha} \right) + 2 \nabla_{\beta} h_{\nu\sigma} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} - \\
& \quad 2 \nabla_{\nu} h_{\sigma\beta} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} - 2 \nabla_{\sigma} h_{\nu\beta} \partial_{\rho} h^{\mu\beta} + 2 h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\beta} h_{\nu\sigma} - 2 h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma\beta} - \\
& \quad 2 h^{\mu\beta} \partial_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu\beta} - 2 \nabla_{\gamma} h_{\nu\rho} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} + 2 \nabla_{\nu} h_{\rho\gamma} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} + 2 \nabla_{\rho} h_{\nu\gamma} \partial_{\sigma} h^{\mu\gamma} - \\
& \quad h^{\alpha\eta} \gamma^{\mu\xi} \left( \nabla_{\eta} h_{\nu\rho} - \nabla_{\nu} h_{\rho\eta} - \nabla_{\rho} h_{\nu\eta} \right) \left( \partial_{\alpha} \gamma_{\sigma\xi} - \partial_{\xi} \gamma_{\alpha\sigma} + \partial_{\sigma} \gamma_{\alpha\xi} \right) - \\
& \quad h^{\mu\epsilon} \gamma^{\alpha\lambda} \left( \nabla_{\alpha} h_{\rho\epsilon} - \nabla_{\epsilon} h_{\alpha\rho} + \nabla_{\rho} h_{\alpha\epsilon} \right) \left( -\partial_{\lambda} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma} \gamma_{\nu\lambda} \right) - \\
& \quad 2 h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\gamma} h_{\nu\rho} + 2 h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho\gamma} + 2 h^{\mu\gamma} \partial_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu\gamma} + \\
& \quad h^{\mu\kappa} \gamma^{\alpha\tau} \left( \nabla_{\alpha} h_{\sigma\kappa} - \nabla_{\kappa} h_{\alpha\sigma} + \nabla_{\sigma} h_{\alpha\kappa} \right) \left( \partial_{\nu} \gamma_{\rho\tau} + \partial_{\rho} \gamma_{\nu\tau} - \partial_{\tau} \gamma_{\nu\rho} \right) + \\
& \quad \left. h^{\alpha\delta} \gamma^{\mu\phi} \left( \nabla_{\delta} h_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} h_{\sigma\delta} - \nabla_{\sigma} h_{\nu\delta} \right) \left( \partial_{\alpha} \gamma_{\rho\phi} + \partial_{\rho} \gamma_{\alpha\phi} - \partial_{\phi} \gamma_{\alpha\rho} \right) \right)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt werden die partiellen durch kovariante Ableitungen ersetzt.

$$\begin{aligned} & \text{ToCanonical}[\text{Simplification}[\text{ContractMetric}[\text{ChangeCovD}[\%, \text{PD}, \text{cd}]]]] \\ & -\frac{1}{4} \nabla_{\alpha} h_{\nu \sigma} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\rho} + \frac{1}{4} \nabla_{\alpha} h_{\nu \rho} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\sigma} + \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h_{\nu \sigma} \nabla^{\mu} h_{\rho \alpha} - \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h_{\nu \rho} \nabla^{\mu} h_{\sigma \alpha} - \\ & \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho \alpha} + \frac{1}{4} \nabla^{\mu} h_{\sigma \alpha} \nabla_{\nu} h_{\rho}^{\alpha} + \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma \alpha} - \frac{1}{4} \nabla^{\mu} h_{\rho}^{\alpha} \nabla_{\nu} h_{\sigma \alpha} + \frac{1}{4} \nabla_{\alpha} h_{\nu \sigma} \nabla_{\rho} h^{\mu \alpha} - \\ & \frac{1}{4} \nabla_{\nu} h_{\sigma \alpha} \nabla_{\rho} h^{\mu \alpha} - \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu \alpha} + \frac{1}{4} \nabla^{\mu} h_{\sigma \alpha} \nabla_{\rho} h_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\rho} \nabla_{\alpha} h_{\nu \sigma} - \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\rho} \nabla_{\nu} h_{\sigma \alpha} - \\ & \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu \alpha} - \frac{1}{4} \nabla_{\alpha} h_{\nu \rho} \nabla_{\sigma} h^{\mu \alpha} + \frac{1}{4} \nabla_{\nu} h_{\rho \alpha} \nabla_{\sigma} h^{\mu \alpha} + \frac{1}{4} \nabla_{\rho} h_{\nu \alpha} \nabla_{\sigma} h^{\mu \alpha} + \frac{1}{4} \nabla^{\alpha} h^{\mu}_{\rho} \nabla_{\sigma} h_{\nu \alpha} - \\ & \frac{1}{4} \nabla_{\rho} h^{\mu \alpha} \nabla_{\sigma} h_{\nu \alpha} - \frac{1}{4} \nabla^{\mu} h_{\rho \alpha} \nabla_{\sigma} h_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\sigma} \nabla_{\alpha} h_{\nu \rho} + \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu} h_{\rho \alpha} + \frac{1}{2} h^{\mu \alpha} \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} h_{\nu \alpha} \end{aligned}$$

## Ricci-Tensor

Da sich der Ricci-Tensor direkt aus der Kontraktion zweier Indices des Riemann-Tensors ergibt und dabei kein Index gehoben werden muss, liefert die n-te Ordnung des Riemann-Tensors auch sofort die n-te Ordnung des Ricci-Tensors.

### Erste Ordnung

Wir nutzen daher den zuvor berechneten Ausdruck des Riemann-Tensors erster Ordnung

$$\begin{aligned} & \text{gRiemann1}[\mu_{-}, -\nu_{-}, -\rho_{-}, -\sigma_{-}] := \\ & -\frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla^{\mu} h_{\nu \sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} h^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla^{\mu} h_{\nu \rho} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\rho} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} h^{\mu}_{\nu} \end{aligned}$$

und definieren den Ricci-Tensor über Kontraktion

$$\begin{aligned} & \text{gRiemann1}[\mu, -\nu, -\mu, -\sigma] \\ & -\frac{1}{2} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} h_{\nu \sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\sigma} + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\mu} h^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla^{\mu} h_{\nu \mu} - \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\mu} \end{aligned}$$

Vereinfacht man diesen Ausdruck, erhält man

$$\begin{aligned} & \text{Simplification}[\text{ToCanonical}[\%]] \\ & \frac{1}{2} \left( -\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} h_{\nu \sigma} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\sigma} + \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} h^{\mu}_{\nu} - \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu} h^{\mu}_{\mu} \right) \end{aligned}$$

### Zweite Ordnung

Man geht analog vor und erhält mit der 2. Ordnung des Riemann Tensors

```
gRiemann2[μ_, -ν_, -ρ_, -σ_] :=
Module[{α}, -1/4 ∇α hνσ ∇α hμρ + 1/4 ∇α hνρ ∇α hμσ + 1/4 ∇α hνσ ∇μ hρσ - 1/4 ∇α hνρ ∇μ hσσ -
1/4 ∇α hμσ ∇ν hρσ + 1/4 ∇μ hσσ ∇ν hρσ + 1/4 ∇α hμρ ∇ν hσσ - 1/4 ∇μ hρσ ∇ν hσσ + 1/4 ∇α hνσ ∇ρ hμσ -
1/4 ∇ν hσσ ∇ρ hμσ - 1/4 ∇α hμσ ∇ρ hνσ + 1/4 ∇μ hσσ ∇ρ hνσ + 1/2 hμσ ∇ρ ∇α hνσ - 1/2 hμσ ∇ρ ∇ν hσσ -
1/2 hμσ ∇ρ ∇σ hνσ - 1/4 ∇α hνρ ∇σ hμσ + 1/4 ∇ν hρσ ∇σ hμσ + 1/4 ∇ρ hνσ ∇σ hμσ + 1/4 ∇α hμρ ∇σ hνσ -
1/4 ∇ρ hμσ ∇σ hνσ - 1/4 ∇μ hρσ ∇σ hνσ - 1/2 hμσ ∇σ ∇α hνρ + 1/2 hμσ ∇σ ∇ν hρσ + 1/2 hμσ ∇σ ∇ρ hνσ ]
```

die zweite Ordnung des Ricci-Tensors in  $\epsilon$  zu

```
Simplification[ToCanonical[ScreenDollarIndices[gRiemann2[μ, -ν, -μ, -σ]]]]
1/4 (2 ∇α hνσ ∇μ hαμ + 2 hαμ ∇μ ∇α hνσ - 2 hαμ ∇μ ∇ν hσσ - 2 hαμ ∇μ ∇σ hνσ -
2 ∇α hσμ ∇μ hνσ + 2 ∇μ hσσ ∇μ hνσ - 2 ∇μ hαμ ∇ν hσσ + ∇ν hαμ ∇σ hαμ -
2 ∇μ hαμ ∇σ hνσ + ∇α hμμ (-∇α hνσ + ∇ν hσσ + ∇σ hνσ) + 2 hαμ ∇σ ∇ν hαμ)
```

## Energieimpulstensor für Gravitationswellen

Es wurde motiviert, dass man einen effektiven Energieimpulstensor für Gravitationswellen über

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\epsilon^2}{8\pi G} \left( R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R^{(2)} \right)$$

definieren kann, wobei  $R^{(2)} := \gamma^{\mu\nu} R^{(2)}_{\mu\nu}$ . Wir wollen an dieser eine möglichst einfache Schreibweise für diesen Ausdruck finden.

Wir nutzen dazu die zuvor berechnete zweite Ordnung des Ricci-Tensors

```
gRicci2[-ν_, -σ_] := Module[{α, β},
(2 * cd[α][h[-ν, -σ]] * cd[-β][h[-α, β]] + 2 * h[α, β] * cd[-β][cd[-α][h[-ν, -σ]]] -
2 * h[α, β] * cd[-β][cd[-ν][h[-σ, -α]]] -
2 * h[α, β] * cd[-β][cd[-σ][h[-ν, -α]]] - 2 * cd[-α][h[-σ, -β]] * cd[β][h[-ν, α]] +
2 * cd[-β][h[-σ, -α]] * cd[β][h[-ν, α]] - 2 * cd[-β][h[-α, β]] * cd[-ν][h[-σ, α]] +
cd[-ν][h[α, β]] * cd[-σ][h[-α, -β]] - 2 * cd[-β][h[-α, β]] * cd[-σ][h[-ν, α]] +
cd[-α][h[β, -β]] * (-cd[α][h[-ν, -σ]] + cd[-ν][h[-σ, α]] + cd[-σ][h[-ν, α]]) +
2 * h[α, β] * cd[-σ][cd[-ν][h[-α, -β]]]) / 4]
```

Und setzen dies in die Definition des Energieimpulstensors ein

```
T[-μ_, -ν_] := Module[{α, β},
-eps^2/(8πG) (gRicci2[-μ, -ν] - 1/2 metric[-μ, -ν] metric[α, β] gRicci2[-α, -β])]
```

Vereinfacht man diesen Ausdruck erhält man

$$\text{Simplification}\left[\text{ContractMetric}\left[\text{ToCanonical}\left[\text{ContractMetric}\left[\text{ScreenDollarIndices}\left[\mathbf{T}[-\mu, -\nu]\right]\right]\right]\right]\right]$$

$$\frac{1}{64 \, G \, \pi} \, \epsilon^2 \left( -4 \, \nabla^\alpha h_{\mu \nu} \, \nabla_\beta h_\alpha{}^\beta + \gamma^{\alpha \beta} \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\alpha h^{\gamma \delta} \, \nabla_\beta h_{\gamma \delta} + 2 \, h^{\alpha \beta} \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\beta \nabla_\alpha h^\gamma{}_\gamma - 4 \, h^{\alpha \beta} \, \nabla_\beta \nabla_\alpha h_{\mu \nu} - \right.$$

$$4 \, h^{\alpha \beta} \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\beta \nabla_\gamma h_\alpha{}^\gamma + 4 \, h^{\alpha \beta} \, \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\nu \alpha} + 4 \, h^{\alpha \beta} \, \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\mu \alpha} - \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\beta h^\gamma{}_\gamma \, \nabla^\beta h^\alpha{}_\alpha +$$

$$4 \, \nabla_\alpha h_{\nu \beta} \, \nabla^\beta h_\mu{}^\alpha - 4 \, \nabla_\beta h_{\nu \alpha} \, \nabla^\beta h_\mu{}^\alpha - 4 \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\alpha h^{\alpha \beta} \, \nabla_\gamma h_\beta{}^\gamma + 4 \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla^\beta h^\alpha{}_\alpha \, \nabla_\gamma h_\beta{}^\gamma -$$

$$2 \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\beta h_{\alpha \gamma} \, \nabla^\gamma h^{\alpha \beta} + 2 \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\gamma h_{\alpha \beta} \, \nabla^\gamma h^{\alpha \beta} + 2 \, h^{\alpha \beta} \, \gamma^{\gamma \delta} \, \gamma_{\mu \nu} \, \nabla_\delta \nabla_\gamma h_{\alpha \beta} + 4 \, \nabla_\beta h_{\alpha}{}^\beta \, \nabla_\mu h_\nu{}^\alpha -$$

$$2 \, \nabla_\mu h^{\alpha \beta} \, \nabla_\nu h_{\alpha \beta} + 2 \, \nabla_\alpha h^\beta{}_\beta \left( \nabla^\alpha h_{\mu \nu} - \nabla_\mu h_\nu{}^\alpha - \nabla_\nu h_\mu{}^\alpha \right) + 4 \, \nabla_\beta h_\alpha{}^\beta \, \nabla_\nu h_\mu{}^\alpha - 4 \, h^{\alpha \beta} \, \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\alpha \beta} \Big)$$

Man definiere nun  $Q_{\mu\nu}$  und  $S_{\mu\nu}{}^\sigma$  als

$$\mathbf{Q}[-\mu_, -\nu_] := \text{Module}\left[\{\alpha, \beta, \gamma\},\right.$$

$$\text{cd}[-\mu] @ \mathbf{h}[\alpha, \beta] \, \text{cd}[-\nu] @ \mathbf{h}[-\alpha, -\beta] / 2 - \text{cd}[\alpha] @ \mathbf{h}[-\nu, \beta] \, \text{cd}[-\alpha] @ \mathbf{h}[-\beta, -\mu] +$$

$$\text{cd}[\alpha] @ \mathbf{h}[-\nu, \beta] \, \text{cd}[-\beta] @ \mathbf{h}[-\alpha, -\mu] - \text{cd}[\beta] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] \, \text{cd}[-\nu] @ \mathbf{h}[-\beta, -\mu] / 2 -$$

$$\text{cd}[\beta] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] \, \text{cd}[-\mu] @ \mathbf{h}[-\beta, -\nu] / 2 + \text{cd}[\beta] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] \, \text{cd}[-\beta] @ \mathbf{h}[-\mu, -\nu] / 2 +$$

$$\text{metric}[-\mu, -\nu] \left( \text{cd}[\alpha] @ \mathbf{h}[\beta, \gamma] \, \text{cd}[-\alpha] @ \mathbf{h}[-\beta, -\gamma] / 2 - \text{cd}[\alpha] @ \mathbf{h}[\gamma, \beta] \, \text{cd}[-\beta] @ \mathbf{h}[-\gamma, -\alpha] + \right.$$

$$\left. \text{cd}[\beta] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] \, \text{cd}[\gamma] @ \mathbf{h}[-\beta, -\gamma] - \text{cd}[\gamma] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] \, \text{cd}[-\gamma] @ \mathbf{h}[\beta, -\beta] / 2 \right) / 2 \Big]$$

und

$$\mathbf{S}[-\mu_, -\nu_, \sigma_] := \text{Module}\left[\{\alpha, \beta\}, \text{delta}[-\nu, \sigma] \, \mathbf{h}[\alpha, \beta] \, \text{cd}[-\mu] @ \mathbf{h}[-\alpha, -\beta] + \right.$$

$$\mathbf{h}[\sigma, \beta] \left( \text{cd}[-\beta] @ \mathbf{h}[-\mu, -\nu] - \text{cd}[-\mu] @ \mathbf{h}[-\beta, -\nu] - \text{cd}[-\nu] @ \mathbf{h}[-\mu, -\beta] \right) + \text{metric}[-\mu, -\nu]$$

$$\left( \mathbf{h}[\sigma, \beta] \left( \text{cd}[\alpha] @ \mathbf{h}[-\beta, -\alpha] - \text{cd}[-\beta] @ \mathbf{h}[\alpha, -\alpha] / 2 \right) - \mathbf{h}[-\alpha, -\beta] \, \text{cd}[\sigma] @ \mathbf{h}[\alpha, \beta] / 2 \right) \Big]$$

Betrachte nun den Ausdruck

$$\text{ScreenDollarIndices}\left[\mathbf{T}[-\mu, -\nu] - \frac{\text{eps}^2}{16 \, G \, \pi} \left( \mathbf{Q}[-\mu, -\nu] - \text{cd}[-\sigma] @ \mathbf{S}[-\mu, -\nu, \sigma] \right) \right]$$

$$- \frac{1}{8 \, G \, \pi} \, \epsilon^2 \left( -\frac{1}{8} \, \gamma^{\alpha \delta} \, \gamma_{\mu \nu} \left( \nabla_\gamma h^\eta{}_\eta \left( \nabla_\alpha h_\delta{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha \delta} + \nabla_\delta h_\alpha{}^\gamma \right) + \nabla_\alpha h^{\gamma \eta} \, \nabla_\delta h_{\gamma \eta} + 2 \, h^{\gamma \eta} \, \nabla_\delta \nabla_\alpha h_{\gamma \eta} - \right. \right.$$

$$2 \, \nabla_\alpha h_\delta{}^\gamma \, \nabla_\eta h_\gamma{}^\eta + 2 \, \nabla^\gamma h_{\alpha \delta} \, \nabla_\eta h_\gamma{}^\eta - 2 \, \nabla_\delta h_\alpha{}^\gamma \, \nabla_\eta h_\gamma{}^\eta - 2 \, h^{\gamma \eta} \, \nabla_\eta \nabla_\alpha h_{\delta \gamma} +$$

$$2 \, h^{\gamma \eta} \, \nabla_\eta \nabla_\gamma h_{\alpha \delta} - 2 \, h^{\gamma \eta} \, \nabla_\eta \nabla_\delta h_{\alpha \gamma} - 2 \, \nabla_\gamma h_{\delta \eta} \, \nabla^\eta h_\alpha{}^\gamma + 2 \, \nabla_\eta h_{\delta \gamma} \, \nabla^\eta h_\alpha{}^\gamma \Big) +$$

$$\frac{1}{4} \left( 2 \, \nabla^\beta h_{\mu \nu} \, \nabla_\epsilon h_\beta{}^\epsilon + 2 \, h^{\beta \epsilon} \, \nabla_\epsilon \nabla_\beta h_{\mu \nu} - 2 \, h^{\beta \epsilon} \, \nabla_\epsilon \nabla_\mu h_{\nu \beta} - 2 \, h^{\beta \epsilon} \, \nabla_\epsilon \nabla_\nu h_{\mu \beta} - \right.$$

$$2 \, \nabla_\beta h_{\nu \epsilon} \, \nabla^\epsilon h_\mu{}^\beta + 2 \, \nabla_\epsilon h_{\nu \beta} \, \nabla^\epsilon h_\mu{}^\beta - 2 \, \nabla_\epsilon h_\beta{}^\epsilon \, \nabla_\mu h_\nu{}^\beta + \nabla_\mu h^\beta{}_\beta \, \nabla_\nu h_\beta{}^\epsilon -$$

$$2 \, \nabla_\epsilon h_\beta{}^\epsilon \, \nabla_\nu h_\mu{}^\beta + \nabla_\beta h^\epsilon{}_\epsilon \left( -\nabla^\beta h_{\mu \nu} + \nabla_\mu h_\nu{}^\beta + \nabla_\nu h_\mu{}^\beta \right) + 2 \, h^{\beta \epsilon} \, \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\beta \epsilon} \Big) \Big) -$$

$$\frac{1}{16 \, G \, \pi} \, \epsilon^2 \left( -\nabla_\alpha h_{\gamma \mu} \, \nabla^\alpha h_\nu{}^\gamma + \nabla^\alpha h_\nu{}^\gamma \, \nabla_\gamma h_{\alpha \mu} + \frac{1}{2} \, \nabla_\gamma h_{\mu \nu} \, \nabla^\gamma h^\alpha{}_\alpha + \right.$$

$$\frac{1}{2} \, \gamma_{\mu \nu} \left( \frac{1}{2} \, \nabla_\alpha h_{\gamma \epsilon} \, \nabla^\alpha h^\gamma{}_\epsilon - \nabla^\alpha h^{\epsilon \gamma} \, \nabla_\gamma h_{\epsilon \alpha} - \frac{1}{2} \, \nabla_\epsilon h^\gamma{}_\gamma \, \nabla^\epsilon h^\alpha{}_\alpha + \nabla^\gamma h^\alpha{}_\alpha \, \nabla^\epsilon h_{\gamma \epsilon} \right) -$$

$$\frac{1}{2} \, \nabla^\gamma h^\alpha{}_\alpha \, \nabla_\mu h_{\gamma \nu} + \frac{1}{2} \, \nabla_\mu h^{\alpha \gamma} \, \nabla_\nu h_{\alpha \gamma} - \nabla_\mu h_{\beta \delta} \, \nabla_\nu h^{\beta \delta} -$$

$$\frac{1}{2} \, \nabla^\gamma h^\alpha{}_\alpha \, \nabla_\nu h_{\gamma \mu} - h^{\beta \delta} \, \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\beta \delta} - \left( \nabla_\delta h_{\mu \nu} - \nabla_\mu h_{\delta \nu} - \nabla_\nu h_{\mu \delta} \right) \nabla_\sigma h^{\sigma \delta} -$$

$$h^{\sigma \delta} \left( \nabla_\sigma \nabla_\delta h_{\mu \nu} - \nabla_\sigma \nabla_\mu h_{\delta \nu} - \nabla_\sigma \nabla_\nu h_{\mu \delta} \right) - \gamma_{\mu \nu} \left( \left( \nabla^\beta h_{\delta \beta} - \frac{1}{2} \, \nabla_\delta h^\beta{}_\beta \right) \nabla_\sigma h^{\sigma \delta} + \right.$$

$$\left. h^{\sigma \delta} \left( \nabla_\sigma \nabla^\beta h_{\delta \beta} - \frac{1}{2} \, \nabla_\sigma \nabla_\delta h^\beta{}_\beta \right) + \frac{1}{2} \left( -h_{\beta \delta} \, \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^{\beta \delta} - \nabla_\sigma h_{\beta \delta} \, \nabla^\sigma h^{\beta \delta} \right) \right) \Big)$$

Er vereinfacht sich zu



`Simplification[ToCanonical[ContractMetric[%]]]`

$$\frac{1}{64 G \pi} \epsilon^2 \gamma_{\mu \nu} \left( \gamma^{\alpha \beta} \nabla_{\alpha} h^{\gamma \delta} \nabla_{\beta} h_{\gamma \delta} - \nabla_{\gamma} h_{\alpha \beta} \nabla^{\gamma} h^{\alpha \beta} - 2 h^{\alpha \beta} \left( \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} h_{\alpha \beta} - \gamma^{\gamma \delta} \nabla_{\delta} \nabla_{\gamma} h_{\alpha \beta} \right) \right)$$

Weshalb xAct diesen letzten Term nicht bis zu Ende vereinfacht, weiß ich nicht genau. Jedenfalls sieht man, dass durch heben der Indices mit  $\gamma^{\alpha \beta}$  der Ausdruck verschwindet. Es gilt somit die Identität

$$T_{\mu \nu} = - \frac{\epsilon^2}{16 \pi G} (Q_{\mu \nu} - \nabla_{\sigma} S_{\mu \nu}^{\sigma})$$

Diese Form des effektiven Energieimpulstensors ist für die nachfolgenden Rechnungen die praktischste, auch wenn die Vorteile dieser Notationsweise bis hier hin noch nicht erkennbar sind.



# Ausführliche Herleitung des Energieimpulstensors von Gravitationswellen

## C.1 Eichinvarianz

In Abschnitt 5.2 wurde der Ansatz

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} := -\frac{\epsilon^2}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)}) \quad (\text{C.1})$$

für den Energieimpulstensor von Gravitationswellen motiviert. In Anhang B wurde dieser Ausdruck in die Form

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = -\frac{\epsilon^2}{16\pi G} (Q_{\mu\nu} - \nabla_\sigma S_{\mu\nu}^\sigma) \quad (\text{C.2})$$

gebracht, wobei

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} = & -\nabla_\alpha h_{\beta\mu} \nabla^\alpha h_\nu^\beta + \nabla^\alpha h_\nu^\beta \nabla_\beta h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \nabla_\beta h_{\mu\nu} \nabla^\beta h^\alpha_\alpha \\ & - \frac{1}{2} \nabla^\beta h^\alpha_\alpha \nabla_\mu h_{\beta\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla^\beta h^\alpha_\alpha \nabla_\nu h_{\beta\mu} \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{\beta\gamma} \nabla^\alpha h^{\beta\gamma} - \nabla^\alpha h^{\gamma\beta} \nabla_\beta h_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_\gamma h^\beta_\beta \nabla^\gamma h^\alpha_\alpha + \nabla^\beta h^\alpha_\alpha \nabla^\gamma h_{\beta\gamma} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^\sigma = & \delta_\nu^\sigma h^{\alpha\beta} \nabla_\mu h_{\alpha\beta} + h^{\sigma\alpha} \left( \nabla_\alpha h_{\mu\nu} - \nabla_\mu h_{\alpha\nu} - \nabla_\nu h_{\mu\alpha} \right) \\ & + \gamma_{\mu\nu} \left( h^{\sigma\beta} (\nabla^\alpha h_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_\beta h^\alpha_\alpha) - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \nabla^\sigma h^{\alpha\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Dieser Energieimpulstensor bestimmt die Hintergrundmetrik  $\gamma_{\mu\nu}$  über

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R^{(0)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{eff}}, \quad (\text{C.5})$$

während die Störung  $h_{\mu\nu}$  im Vakuum eine Lösung von

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0 \quad (\text{C.6})$$

ist. In Kapitel 2 sahen wir, dass das Gegenstück zu (C.6) in einer flachen Raumzeit unter der Koordinatentransformation

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu - \epsilon \xi^\mu(x) \quad (\text{C.7})$$

im Rahmen der Näherung invariant ist. Wir wollen nun zeigen, dass dies auch für (C.6) im hier betrachteten Fall gilt.

Die Koordinatentransformation wirkt sich auf die Einträge der Metrik wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) &= g_{\alpha\beta}(x^\lambda) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \\
 &= (\gamma_{\alpha\beta}(x^\lambda) + \varepsilon h_{\alpha\beta}(x^\lambda)) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \\
 &= (\gamma_{\alpha\beta}(x^\lambda) + \varepsilon h_{\alpha\beta}(x^\lambda)) \left( \delta_\mu^\alpha + \varepsilon \partial_\mu \xi^\alpha + O(\varepsilon^2) \right) \left( \delta_\nu^\beta + \varepsilon \partial_\nu \xi^\beta + O(\varepsilon^2) \right) \\
 &= \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda) + \varepsilon \left( h_{\mu\nu}(x^\lambda) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \right) + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Schreiben wir nun die linke Seite der Gleichung in der Form  $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) = \gamma_{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) + \varepsilon \tilde{h}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda)$  und nehmen an, dass für die Eichfunktion

$$(i) \xi_\mu = O(\varepsilon), \quad (ii) \partial_\nu \xi_\mu = O(1), \quad (iii) \partial_\nu \xi_\mu = O(\varepsilon^{-1}) \tag{C.9}$$

gilt. Dann folgt, da  $\gamma_{\mu\nu}(x^\lambda)$  vergleichsweise langsam oszilliert, dass

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda) - \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda - \varepsilon \xi^\lambda) &\approx -\varepsilon \xi^\alpha \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda) \\
 &= -\varepsilon \xi^\alpha \left( \Gamma_{\nu\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha\nu} \right).
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Damit lässt sich Gleichung (C.8) in

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\lambda) &= \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda) - \gamma_{\mu\nu}(x^\lambda - \varepsilon \xi^\lambda) + \varepsilon \left( h_{\mu\nu}(x^\lambda) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \right) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \left( h_{\mu\nu}(x^\lambda) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \xi^\alpha \left( \Gamma_{\nu\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha\nu} \right) \right) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \left( h_{\mu\nu}(x^\lambda) + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \right) + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

umformen. Wir finden somit, abgesehen von den kovarianten Ableitungen, das selbe Ergebnis wie in Kapitel 2 wieder. Auch in der Wirkung der Transformation auf die Komponente des Riemann-Tensors, die  $h_{\mu\nu}$  bestimmt, zeigt sich Ähnlichkeit:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}^{(1)\mu}_{\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \left( -\tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}^\mu \tilde{h}_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu \tilde{h}^\mu{}_\sigma + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{h}^\mu{}_\nu + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\mu \tilde{h}_{\nu\rho} \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \tilde{h}^\mu{}_\rho - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\rho \tilde{h}^\mu{}_\nu \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( -\nabla_\rho \nabla^\mu h_{\nu\sigma} - \nabla_\rho \nabla^\mu \nabla_\nu \xi_\sigma - \nabla_\rho \nabla^\mu \nabla_\sigma \xi_\nu + \nabla_\rho \nabla_\nu h^\mu{}_\sigma + \nabla_\rho \nabla_\nu \nabla^\mu \xi_\sigma + \nabla_\rho \nabla_\nu \nabla_\sigma \xi^\mu \right. \\
 &\quad + \nabla_\rho \nabla_\sigma h^\mu{}_\nu + \nabla_\rho \nabla_\sigma \nabla^\mu \xi_\nu + \nabla_\rho \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi^\mu + \nabla_\sigma \nabla^\mu h_{\nu\rho} + \nabla_\sigma \nabla^\mu \nabla_\nu \xi_\rho + \nabla_\sigma \nabla^\mu \nabla_\rho \xi_\nu \\
 &\quad - \nabla_\sigma \nabla_\nu h^\mu{}_\rho - \nabla_\sigma \nabla_\nu \nabla^\mu \xi_\rho - \nabla_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho \xi^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\rho h^\mu{}_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho \nabla^\mu \xi_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \xi^\mu \left. \right) \\
 &\quad + O(\varepsilon^2) \\
 &= R^{(1)\mu}_{\nu\rho\sigma} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma^{\mu\lambda} (\nabla_\rho R^{(0)\kappa}_{\sigma\lambda\nu} \xi_\kappa + \nabla_\rho R^{(0)\kappa}_{\nu\lambda\sigma} \xi_\kappa + \nabla_\sigma R^{(0)\kappa}_{\rho\nu\lambda} \xi_\kappa + \nabla_\sigma R^{(0)\kappa}_{\nu\rho\lambda} \xi_\kappa) \right. \\
 &\quad \left. + \nabla_\rho R^{(0)\mu}_{\kappa\nu\sigma} \xi^\kappa - \nabla_\sigma R^{(0)\mu}_{\kappa\nu\rho} \xi^\kappa + 2R^{(0)\kappa}_{\nu\sigma\rho} \nabla_\kappa \xi^\mu + 2R^{(0)\mu}_{\kappa\rho\sigma} \nabla_\nu \xi^\kappa \right).
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

Im letzten Umformungsschritt wurde dabei der Riemann-Tensor genutzt, um die kovarianten Ableitungen zu vertauschen. Siehe dazu in [6, 123] Gleichung (3.114).

Gleichung (C.12) lässt zwar nun auf den ersten Blick nicht vermuten, dass der Riemann-Tensor unter der angeführten Koordinatentransformation invariant ist, doch eine genauere Untersuchung zeigt genau diesen Sachverhalt: Wir nehmen an, dass  $\partial_\nu \xi_\mu = O(1)$ , womit die Differenz aus ursprünglicher und transformierter erster Ordnung des Riemann-Tensors aus (C.12) eine Funktion  $O(1)$  ist, da auch  $R^{(0)\mu}_{\nu\rho\sigma} = O(1)$ . Vergleichen wir nun diese Größenordnung mit den anderen Ordnungen des Riemann-Tensors:

$$R^{(0)\mu}_{\nu\rho\sigma} = O(1), \quad \varepsilon R^{(1)\mu}_{\nu\rho\sigma} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon^2 R^{(2)\mu}_{\nu\rho\sigma} = O(1), \quad \varepsilon^3 R^{(3+)\mu}_{\nu\rho\sigma} = O(\varepsilon) \quad (\text{C.13})$$

$$\varepsilon (\tilde{R}^{(1)\mu}_{\nu\rho\sigma} - R^{(1)\mu}_{\nu\rho\sigma}) = O(\varepsilon) \quad (\text{C.14})$$

Man sieht folglich, dass die Differenz (C.14) zu der Ordnung in  $\varepsilon$  gehört, welche wir in unserer Näherung vernachlässigen. Damit ist auch im Fall des gekrümmten Hintergrunds der Riemann-Tensor unter der Transformation (C.7) invariant.

Bemerke, dass aus (C.8) folgt, dass wir nach der Transformation noch immer die gleiche Hintergrundmetrik  $\gamma_{\mu\nu}$  verwenden, da wir per Definition alle Änderungen der Gesamtmetrik in  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  stecken. Eine Folge daraus ist, dass  $R^{(0)\mu}_{\nu\rho\sigma}$  ebenfalls invariant bleiben muss, was wiederum über Gleichung (C.5) von  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu}$  fordert, invariant unter der angegebenen Koordinatentransformation zu sein.

Dieser letzte Punkt stellt eine starke Forderung an den Energieimpulstensor von Gravitationswellen dar. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass (C.1) diese Forderung leider nicht erfüllt und präsentieren in Abschnitt C.3 mit unserem gesammeltem Wissen dann einen Ansatz, der in der Tat eichinvariant ist.

## C.2 Woran der erste Ansatz für den Energieimpulstensor scheitert

Nach [15] verhält sich der effektive Energieimpulstensor (C.1) unter infinitesimalen Koordinatentransformationen (C.7) wie

$$T^{\text{eff}}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{T}^{\text{eff}}_{\mu\nu} = T^{\text{eff}}_{\mu\nu} + \nabla_\rho U_{\mu\nu}{}^\rho + O(\varepsilon), \quad (\text{C.15})$$

wobei  $\nabla_\rho U_{\mu\nu}{}^\rho = O(1)$  für Koordinatentransformationen, die (C.9) erfüllen. Da dies jedoch von den im letzten Kapitel betrachteten Transformationen immer gefordert werden muss, ist  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu}$  unter diesen Transformationen nicht invariant, da  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu} = O(1)$  die selbe Ordnung in  $\varepsilon$  aufweist, wie  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu} - \tilde{T}^{\text{eff}}_{\mu\nu}$ .

Der Grund woran die Eichinvarianz scheitert, sind solche Terme in  $\nabla_\rho U_{\mu\nu}{}^\rho$ , die  $\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} \nabla_\delta \nabla_\epsilon \xi_\kappa = O(\varepsilon^{-2})$  und  $\nabla_\alpha \nabla_\beta \xi_\gamma \nabla_\delta \nabla_\epsilon \xi_\kappa = O(\varepsilon^{-2})$  enthalten. Zusammen mit dem Faktor  $\varepsilon^2$  in (C.1) tragen sie zur leitenden Ordnung in  $\nabla_\rho U_{\mu\nu}{}^\rho$  bei [15].

Wir finden somit vor, dass die Eichinvarianz des Energieimpulstensors durch schnell oszillierende Terme verhindert wird. Die Idee ist nun  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu}$  über einige Wellenlängen  $\lambda$  der Störung zu mitteln. Die Hoffnung ist, dass auf diese Weise die schnell oszillierenden Komponenten aus  $T^{\text{eff}}_{\mu\nu}$  verschwinden und allein die langsam variierenden Terme der effektiven Wellenlänge  $L \gg \lambda$  übrig bleiben [15].

### C.3 Ein neuer Ansatz: Der Brill-Hartle Energieimpulstensor

Sei daher nun  $\langle \cdot \rangle$  eine Mittlung über ein Raumzeitgebiet, dass sich über einige Wellenlängen  $\lambda$  der Störung  $h_{\mu\nu}$  erstreckt.<sup>1</sup> Damit definieren wir den Brill-Hartle Energieimpulstensor über

$$T_{\mu\nu}^{\text{BH}} := \langle T_{\mu\nu}^{\text{eff}} \rangle = -\frac{\epsilon^2}{16\pi G} \langle Q_{\mu\nu} - \nabla_\sigma S_{\mu\nu}^\sigma \rangle. \quad (\text{C.16})$$

Bevor wir die Vereinfachung dieses Ausdrucks beginnen, seien hier zuerst einmal alle wichtigen Eigenschaften von  $\langle \cdot \rangle$  aufgezählt [15]:

- (i) Unter dem Integral  $\langle \cdot \rangle$  werden Divergenzen um einen Faktor  $\epsilon$  verkleinert, denn während  $\nabla_\sigma S_{\mu\nu}^\sigma = O(\epsilon^{-2})$  ist  $S_{\mu\nu}^\sigma = O(\epsilon^{-1})$  nach Anwendung des Integralsatz von Gauß. Damit können Divergenzen in C.16 vernachlässigt werden.

- (ii) Kovariante Ableitungen kommutieren, da

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta h_{\mu\nu} - \nabla_\beta \nabla_\alpha h_{\mu\nu} = R_{\mu\kappa\alpha\beta} h_{\nu}^{\kappa} + R_{\nu\kappa\alpha\beta} h_{\mu}^{\kappa} = O(1), \quad (\text{C.17})$$

während  $\nabla_\alpha \nabla_\beta h_{\mu\nu} = O(\epsilon^{-2})$ .

- (iii) Unter dem Integral  $\langle \cdot \rangle$  kann partiell integriert werden, sodass

$$\langle \nabla^\rho h_{\nu}^{\kappa} \nabla_{\kappa} h_{\rho\mu} \rangle = \langle \nabla_{\kappa} (\nabla^\rho h_{\nu}^{\kappa} h_{\rho\mu}) \rangle - \langle \nabla_{\kappa} \nabla^\rho h_{\nu}^{\kappa} h_{\rho\mu} \rangle = -\langle \nabla_{\kappa} \nabla^\rho h_{\nu}^{\kappa} h_{\rho\mu} \rangle + O(\epsilon^{-1}). \quad (\text{C.18})$$

Bemerke, dass aus Punkt (i) sofort folgt, dass  $T_{\mu\nu}^{\text{BH}}$  unter infinitesimalen Koordinatentransformationen eichinvariant ist, da der Term  $\nabla_\rho U_{\mu\nu}^\rho$  in (C.15) nach Anwendung des Satzes von Gauß verschwindet. Damit ist die erste Hürde schon einmal genommen.

Ziel soll es nun sein, einen möglichst einfachen Ausdruck in  $h_{\mu\nu}$  für Energieimpulstensor (C.16) zu finden. Wir nutzen in dieser Rechnung aus, dass man wie im Fall eines flachen Hintergrunds, wie in Kapitel 2 diskutiert, eine Eichung wählen kann, sodass die Störung

$$\nabla^\nu h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad h := \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0 \quad (\text{C.19})$$

erfüllt [15]. Wie die Notation schon andeutet, ist diese Eichung die Verallgemeinerung der TT-Eichung. In dieser erfüllt die Störung im Vakuum die inhomogene Wellengleichung [15]

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = -2R_{\sigma\mu\nu\beta}^{(0)} h_{\text{TT}}^{\sigma\beta} - R_{\mu\sigma}^{(0)} h_{\text{TT}}^{\sigma\nu} - R_{\nu\sigma}^{(0)} h_{\text{TT}}^{\sigma\mu} = O(1). \quad (\text{C.20})$$

<sup>1</sup> Wie genau man eine Mittlung  $\langle \cdot \rangle$  definieren kann, welche die später aufgezählten Eigenschaften erfüllt, findet man in [7, S. 970 f.]. Wir müssen jedoch an keiner Stelle dieser Ausarbeitung auf diese Definition zurückgreifen und es genügt uns zu wissen, dass solch eine Mittlung existiert.

Diese Relationen helfen nun dabei (C.16) auf eine recht einfache Form zu bringen:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{\text{BH}} &\stackrel{\text{(i)}}{=} -\frac{\epsilon^2}{16\pi G} \langle Q_{\mu\nu} \rangle + O(\epsilon^2) \\
 &\stackrel{h=0}{=} -\frac{\epsilon^2}{16\pi G} \langle -\nabla_\alpha h_{\beta\mu}^{\text{TT}} \nabla^\alpha h^{\text{TT}}_{\nu}{}^\beta + \nabla^\alpha h^{\text{TT}}_{\nu}{}^\beta \nabla_\beta h_{\alpha\mu}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h_{\text{TT}}^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{\beta\gamma}^{\text{TT}} \nabla^\alpha h_{\text{TT}}^{\beta\gamma} - \nabla^\alpha h_{\text{TT}}^{\gamma\beta} \nabla_\beta h_{\gamma\alpha}^{\text{TT}} \right) \rangle + O(\epsilon^2) \\
 &\stackrel{\text{(ii),(iii)}}{=} -\frac{\epsilon^2}{16\pi G} \langle \underbrace{\nabla^\alpha \nabla_\alpha h_{\beta\mu}^{\text{TT}}}_{=0} h^{\text{TT}}_{\nu}{}^\beta - \nabla^\alpha \underbrace{\nabla_\beta h^{\text{TT}}_{\nu}{}^\beta}_{=0} h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h_{\text{TT}}^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \underbrace{\nabla^\alpha \nabla_\alpha h_{\beta\gamma}^{\text{TT}}}_{=0} h_{\text{TT}}^{\beta\gamma} - \nabla^\alpha \underbrace{\nabla_\beta h_{\text{TT}}^{\gamma\beta}}_{=0} h_{\gamma\alpha}^{\text{TT}} \right) \rangle + O(\epsilon^2) \\
 &= -\frac{\epsilon^2}{32\pi G} \langle \nabla_\mu h_{\text{TT}}^{\alpha\beta} \nabla_\nu h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \rangle + O(\epsilon^2). \tag{C.21}
 \end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck stellt einen recht einfachen Zusammenhang zwischen der Welle und der deponierten Energie dar. Dass die Welle in der TT-Eichung sein muss um in diesen Ausdruck eingesetzt zu werden, ist kein großes Problem, da wir in Anhang A.2 ein Verfahren entwickelt haben, Lösungen aus der Lorentz- in die TT-Eichung zu überführen.





# Abbildungsverzeichnis

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | + und $\times$ -Polarisation von Gravitationswellen . . . . .         | 14 |
| 4.1 | Illustration zur Fernfeldnäherung . . . . .                           | 18 |
| 6.1 | Gravitationswellen eines binären Systems vor der Koaleszenz . . . . . | 31 |
| 7.1 | Aufbau eines Michelson-Interferometers . . . . .                      | 34 |
| 7.2 | LIGO – Schematischer Aufbau . . . . .                                 | 36 |
| 7.3 | Sensitivität von LIGO . . . . .                                       | 37 |
| 8.1 | Messung GW150914 . . . . .  | 40 |
| 8.2 | Messung GW150914 mit Illustration . . . . .                           | 41 |