TD 2 — Probabilités (1A)

Correction – Yann Issartel

16 sept. 2025

Exo 2.3 (poly) — Translation d'un borélien

Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que $A + t := \{x + t : x \in A\}$ est un borélien.

Exo 2.3 (poly) — Translation d'un borélien

Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que $A + t := \{x + t : x \in A\}$ est un borélien.

Indication : considérer

$$\mathcal{F} := \{B - t : \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{\, B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,\}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = \left(\bigcup_n B_n\right) - t \in \mathcal{F}$.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B-t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B-t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B-t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B-t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

$\Rightarrow$ tout borélien A s'écrit $B - t$, donc $A + t = B$ est un borélien (fin exo).

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

$\Rightarrow$ tout borélien A s'écrit $B - t$, donc $A + t = B$ est un borélien (fin exo).

2) Bonus : Inclusion réciproque $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{\, B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,\}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

$\Rightarrow$ tout borélien A s'écrit $B - t$, donc $A + t = B$ est un borélien (fin exo).

2) Bonus : Inclusion réciproque $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La translation $T_t(x) = x + t$ est continue donc mesurable.

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{\, B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,\}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

$\Rightarrow$ tout borélien A s'écrit $B - t$, donc $A + t = B$ est un borélien (fin exo).

2) Bonus : Inclusion réciproque $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La translation $T_t(x) = x + t$ est continue donc mesurable. Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$T_t^{-1}(B) = \{x : \; x + t \in B\} = B - t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Exo 2.3 — Translation d'un borélien (correction)

1) $\mathcal{F} := \{ B - t : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ **est une tribu contenant les intervalles fermés :**

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t \in \mathcal{F}$.
- Si $C = B - t \in \mathcal{F}$, alors $(B - t)^c = B^c - t \in \mathcal{F}$. (Si $y \in (B - t)^c$, alors $y \notin B - t$, donc $y + t \notin B$, d'où $y + t \in B^c$, et $y \in B^c - t$. Réciproquement, si $y \in B^c - t$, alors $y + t \in B^c$, donc $y + t \notin B$, d'où $y \notin B - t$, et $y \in (B - t)^c$.)
- Si $C_n = B_n - t \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_n C_n = (\bigcup_n B_n) - t \in \mathcal{F}$.
- Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, $[a, b] = [a + t, b + t] - t \in \mathcal{F} \Rightarrow$ intervalles fermés $\subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ (puisque la tribu borélienne est engendrée par les fermés).

$\Rightarrow$ tout borélien A s'écrit $B - t$, donc $A + t = B$ est un borélien (fin exo).

2) Bonus : Inclusion réciproque $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La translation $T_t(x) = x + t$ est continue donc mesurable. Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$T_t^{-1}(B) = \{x : \ x + t \in B\} = B - t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 16 — Fonctions de répartition

Tracer et donner l'expression des fonctions de répartition des mesures de probabilité

$$\mu_1 = \delta_2, \qquad \mu_2 = 0.2\,\delta_{-1} + 0.4\,\delta_0 + 0.4\,\delta_2.$$

Exercice 16 — Fonctions de répartition

Tracer et donner l'expression des fonctions de répartition des mesures de probabilité

$$\mu_1 = \delta_2, \qquad \mu_2 = 0.2\,\delta_{-1} + 0.4\,\delta_0 + 0.4\,\delta_2.$$

Rappel. Pour une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$,

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \quad \text{(fonction de répartition, càd droite-continue).}$$

Exercice 16 — Correction

Pour $\mu_1 = \delta_2$:

Exercice 16 — Correction

Pour $\mu_1 = \delta_2$:

$$F_{\mu_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 16 — Correction

Pour $\mu_1 = \delta_2$ **:**

$$F_{\mu_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Pour $\mu_2 = 0.2\,\delta_{-1} + 0.4\,\delta_0 + 0.4\,\delta_2$ **:**

Exercice 16 — Correction

Pour $\mu_1 = \delta_2$ **:**

$$F_{\mu_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

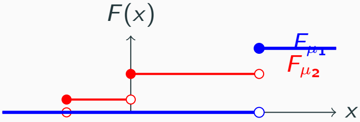
Pour $\mu_2 = 0.2\,\delta_{-1} + 0.4\,\delta_0 + 0.4\,\delta_2$ **:**

$$F_{\mu_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ 0.2, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0.6, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 16 — Correction

Pour $\mu_1 = \delta_2$ **:**

$$F_{\mu_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



Pour $\mu_2 = 0.2\,\delta_{-1} + 0.4\,\delta_0 + 0.4\,\delta_2$ **:**

$$F_{\mu_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ 0.2, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0.6, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 17 — Calcul de $\mu(A)$

(1) Sur $\mathbb{R}$: $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$, et $A = [-1, 0],\ [0, 1],\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ \mathbb{R},\ \{1\}$

(2) Sur $\mathbb{R}$: $\mu = \delta_0 + \lambda$, et mêmes ensembles A que ci-dessus

(3) Sur $\mathbb{R}^2$: $\mu = \delta_{(0,0)} + \lambda_D + \lambda$, et où D disque unité,
$A = D,\ [-1, 1]^2,\ [-1, 1] \times \{0\}$

Notation (3) : λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, et $\lambda_D(A) = \lambda(A \cap D)$

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$.

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$**.** $\quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \; + \; 2 \cdot 1_{\{1\}\subset A}.$

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$**.** $\Rightarrow$ $\mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} + 2 \cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$**.** $\Rightarrow$ $\mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} + 2 \cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$**.**

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \;+\; 2\cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{0\}\subset A} + \text{longueur}(A)$.

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \;+\; 2\cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$

$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{0\}\subset A} + \text{longueur}(A)$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1+1 = 2, \quad \mu([0,1]) = 1+1 = 2, \quad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 1+1 = 2,$$

$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty, \qquad \mu(\{1\}) = 0.$$

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$**.** $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \;+\; 2\cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$**.** $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{0\}\subset A} + \text{longueur}(A)$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1+1 = 2, \quad \mu([0,1]) = 1+1 = 2, \quad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 1+1 = 2,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty, \qquad \mu(\{1\}) = 0.$$

(3) $\mu = \delta_{(0,0)} + \lambda_D + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}^2$**.**

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \;+\; 2\cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{0\}\subset A} + \text{longueur}(A)$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1+1 = 2, \quad \mu([0,1]) = 1+1 = 2, \quad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 1+1 = 2,$$
$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty, \qquad \mu(\{1\}) = 0.$$

(3) $\mu = \delta_{(0,0)} + \lambda_D + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}^2$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = \delta_{(0,0)}(A) + \lambda(A\cap D) + \lambda(A)$.

Exercice 17 — Correction

(1) $\mu = \delta_{-1} + 2\,\delta_1$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{-1\}\subset A} \;+\; 2\cdot 1_{\{1\}\subset A}$. D'où

$$\mu([-1,0]) = 1, \qquad \mu([0,1]) = 2, \qquad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 0,$$

$$\mu(\mathbb{R}) = 3, \qquad \mu(\{1\}) = 2.$$

(2) $\mu = \delta_0 + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 1_{\{0\}\subset A} +$ longueur(A). D'où

$$\mu([-1,0]) = 1+1 = 2, \quad \mu([0,1]) = 1+1 = 2, \quad \mu\big([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\big) = 1+1 = 2,$$

$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty, \qquad \mu(\{1\}) = 0.$$

(3) $\mu = \delta_{(0,0)} + \lambda_D + \lambda$ **sur** $\mathbb{R}^2$. $\quad\Rightarrow\quad \mu(A) = \delta_{(0,0)}(A) + \lambda(A\cap D) + \lambda(A)$.

$$\mu(D) = \underbrace{1}_{(0,0)\in D} + \underbrace{\lambda(D)}_{=\pi} + \underbrace{\lambda(D)}_{=\pi} = 1 + 2\pi,$$

$$\mu([-1,1]^2) = \underbrace{1}_{(0,0)\in[-1,1]^2} + \underbrace{\lambda\big([-1,1]^2\cap D\big)}_{=\pi} + \underbrace{\lambda([-1,1]^2)}_{=4} = 1 + \pi + 4,$$

$$\mu([-1,1]\times\{0\}) = \underbrace{1}_{(0,0)\in A} + \underbrace{\lambda\big(A\cap D\big)}_{=0} + \underbrace{\lambda(A)}_{=0} = 1.$$

Exercice 18 — Fonctions étagées

Exercice 18 — Fonctions étagées

Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 18 — Fonctions étagées

Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

(1) Montrer que toute fonction étagée s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \text{pour certains } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ A_1, \ldots, A_n \subset \Omega.$$

Exercice 18 — Fonctions étagées

Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

(1) Montrer que toute fonction étagée s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \text{pour certains } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ A_1, \ldots, A_n \subset \Omega.$$

(2) Soit $f : \Omega \to [0, \infty)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

Exercice 18 — Fonctions étagées

Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

(1) Montrer que toute fonction étagée s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \text{pour certains } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ A_1, \dots, A_n \subset \Omega.$$

(2) Soit $f : \Omega \to [0, \infty)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad (k = 0, \dots, n2^n - 1) \\ n & \text{si } f(x) \ge n. \end{cases}$$

Exercice 18 — Fonctions étagées

Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

(1) Montrer que toute fonction étagée s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \text{pour certains } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ A_1, \ldots, A_n \subset \Omega.$$

(2) Soit $f : \Omega \to [0, \infty)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad (k = 0, \ldots, n2^n - 1) \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Montrer que $(g_n)_n$ est croissante, chaque g_n est étagée, et $g_n \to f$ simplement.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x) \quad \text{(monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à } n\text{)}$$

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n - 1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus et

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \;\leq\; g_n(x) \;\leq\; f(x),$$

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus et

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \;\leq\; g_n(x) \;\leq\; f(x),$$

donc $g_n(x) \to f(x)$.

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus et

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \;\leq\; g_n(x) \;\leq\; f(x),$$

donc $g_n(x) \to f(x)$. (Si l'on autorise $f(x) = +\infty$, on a $g_n(x) \uparrow +\infty = f(x)$).

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{n2^n-1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x)$ (monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à n)

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus et

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \;\leq\; g_n(x) \;\leq\; f(x),$$

donc $g_n(x) \to f(x)$. (Si l'on autorise $f(x) = +\infty$, on a $g_n(x) \uparrow +\infty = f(x)$). Ainsi (g_n) est croissante,

Exercice 18 — Correction

(1) Décomposition d'une étagée. Soit $S = \mathrm{Im}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble (fini) des valeurs distinctes de g. Posons $A_k := g^{-1}(\{\alpha_k\})$. Alors $(A_k)_{k=1}^n$ sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour tout $x \in \Omega$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x).$$

(2) Approximation dyadique croissante d'une $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$, g_n prend un nombre fini de valeurs dans $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{n2^n - 1}{2^n}, n\}$, donc g_n est *étagée*. De plus, pour tout x :

$$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f(x) \quad \text{(monotonie : affinement de la grille dyadique et troncature à } n\text{)}$$

Convergence simple. Si $f(x) < \infty$, alors pour $n > f(x)$, la troncature n'agit plus et

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \;\leq\; g_n(x) \;\leq\; f(x),$$

donc $g_n(x) \to f(x)$. (Si l'on autorise $f(x) = +\infty$, on a $g_n(x) \uparrow +\infty = f(x)$). Ainsi (g_n) est croissante, chaque g_n est étagée, et $g_n \to f$ simplement.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \; A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons pour $k = 0, \dots, n2^n - 1$:

$$A_{n,k} := \left\{x : \ \tfrac{k}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k+1}{2^n}\right\}, \qquad B_n := \{x : \ f(x) \ge n\}.$$

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons pour $k = 0, \dots, n2^n - 1$:

$$A_{n,k} := \left\{x : \ \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \qquad B_n := \{x : \ f(x) \ge n\}.$$

Alors les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont **mesurables** comme images réciproques d'intervalles boréliens par f mesurable.

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons pour $k = 0, \ldots, n2^n - 1$:

$$A_{n,k} := \left\{ x : \ \tfrac{k}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k+1}{2^n} \right\}, \qquad B_n := \{ x : \ f(x) \ge n \}.$$

Alors les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont **mesurables** comme images réciproques d'intervalles boréliens par f mesurable. Dans $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \, 1_{A_{n,k}}(x) \, + \, n \, 1_{B_n}(x)$,

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons pour $k = 0, \dots, n2^n - 1$:

$$A_{n,k} := \left\{x : \ \tfrac{k}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k+1}{2^n}\right\}, \qquad B_n := \{x : \ f(x) \ge n\}.$$

Alors les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont **mesurables** comme images réciproques d'intervalles boréliens par f mesurable. Dans $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{A_{n,k}}(x) \ + \ n 1_{B_n}(x)$, chaque indicatrice $1_{A_{n,k}}$ et 1_{B_n} est mesurable,

Exercice 18 — Mesurabilité des fonctions étagées

Point de rigueur. Dans le cours, une fct° étagée $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{A_k}(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{F}.$$

Vérification de la mesurabilité.

- Chaque indicatrice 1_{A_k} est mesurable (car $A_k \in \mathcal{F}$).
- Les combinaisons linéaires finies de fonctions mesurables sont mesurables.

Donc g est mesurable.

Remarque. La condition « g prend un nombre fini de valeurs » ne suffit pas en soi : il faut aussi que les ensembles $A_k = g^{-1}(\{\alpha_k\})$ soient mesurables. C'est pourquoi la définition inclut la mesurabilité.

Retour à l'exo. Supposons $f : \Omega \to [0, \infty)$ **mesurable**. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons pour $k = 0, \ldots, n2^n - 1$:

$$A_{n,k} := \left\{x : \ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \qquad B_n := \{x : \ f(x) \geq n\}.$$

Alors les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont **mesurables** comme images réciproques d'intervalles boréliens par f mesurable. Dans $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \, 1_{A_{n,k}}(x) \; + \; n \, 1_{B_n}(x)$, chaque indicatrice $1_{A_{n,k}}$ et 1_{B_n} est mesurable, donc g_n est **mesurable**.