Ρομποτική Ι: Ανάλυση, Έλεγχος, Εργαστήριο

Εξαμηνιαία Εργασία.

Ρομποτικός Χειριστής τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας
(Robotic Manipulator with 3 rotational DOF)

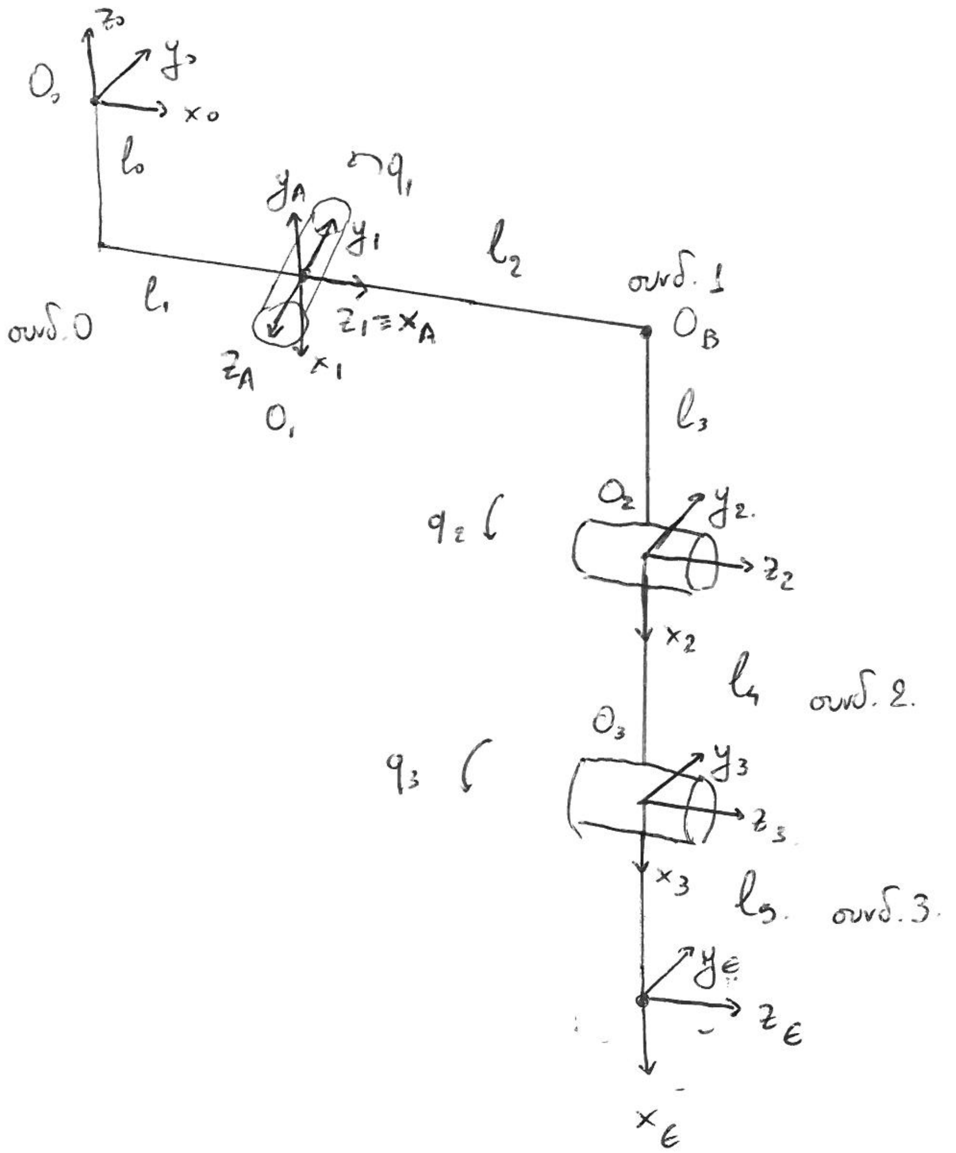
Βλάχος Ιωάννης, 03115013
ΣΗΜΜΥ, ροή Σ.

7ο εξάμηνο, Ακαδ. Έτος 2018-2019

Α. Θεωρητική Ανάλυση

1. Προσθέτουμε ένα βοηθητικό πλαίσιο στην άρθρωση O_1, ώστε το πλαίσιο του συνδέσμου 0 και z-άξονάς του να έχει τη διεύθυνση του άξονα κίνησης της άρθρωσης q_1.

Στην αρπαγή O_E επιλέγουμε ο z_E να έχει την κατεύθυνση του τελικού συνδέσμου. Παρακάτω φαίνεται ο ρομποτικός χειριστής με τα τοποθετημένα πλαίσια και ο πίνακας παραμέτρων D-H



Συνδ.	a_i	α_i	d_i	θ_i
0	l_1	90°	$-l_0$	0
A	0	-90°	0	$q_1 - 90$
1	l_3	0	l_2	0
2	l_4	0	0	q_2
3	l_5	0	0	q_3

2. Βρίσκουμε τους ομογενείς πίνακες μετασχηματισμού A^{i}_{i+1}.

$$A^{0}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σε κάθε βήμα χρησιμοποιούμε τον πίνακα D-H

$$A^{i-1}_{i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos a_i & \sin\theta_i \cdot \sin a_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos a_i & -\cos\theta_i \cdot \sin a_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin a_i & \cos a_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{A}_{1} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$

$\sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$

$$A^{1}_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_3=0}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2}_{3} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{3}_{E} = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_5 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τους πίνακες A_i^0

$$A_1^0 = A_A^0 \cdot A_1^A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_2 c_1 + l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & l_2 s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^0 = A_2^0 \cdot A_3^2 = \begin{pmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\epsilon^0 = A_3^0 \cdot A_\epsilon^3 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 & \begin{array}{l} l_5 c_3 s_1 c_2 - l_5 s_1 s_2 s_3 \\ + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1 \end{array} \\ \hline s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & l_5 s_2 c_3 + l_5 s_3 c_2 + l_4 s_2 \\ \hline -c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 & s_1 & \begin{array}{l} -l_5 c_1 c_2 c_3 + l_5 c_1 s_2 s_3 \\ -l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου

$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$

$s_{12} = c_1 s_2 + c_2 s_1$

3. Βρίσκουμε αρχικά τα διανύσματα $b_i, r_{i,E}$

$b_0 = [0 \quad -1 \quad 0]^T$, άξονας περιστροφής της 1ης άρθρωσης

$b_1 = [c_1 \quad 0 \quad s_1]^T = R_1^0(1:3,3)$ $\qquad b_0 = R_A^0(1:3,3)$

$b_2 = [c_1 \quad 0 \quad s_1]^T = R_2^0(1:3,3)$

<u>i=1:</u>

$$r_{0,E} = \begin{bmatrix} l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L1} = b_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 \mp l_2 s_1 \\ 0 \\ l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 \end{bmatrix}$$

<u>i=2:</u> $r_{1,E} = A_E^0(:,4) - A_2^0(:,4) = \begin{bmatrix} l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2 \end{bmatrix}$

$$J_{L2} = b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -l_5 s_1 s_{23} - l_4 s_1 s_2 \\ +l_5 c_1^2 c_{23} + l_4 c_1^2 c_2 + l_5 s_1^2 c_{23} + l_4 s_1^2 c_2 \\ l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_5 s_1 s_{23} - l_4 s_1 s_2 \\ l_5 c_{23} + l_4 c_2 \\ l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$\underline{i=3}$: $$r_{2,E} = A^0_E(:,4) - A^0_3(:,4) = \begin{bmatrix} l_5 s_1 c_{23} \\ l_5 s_{23} \\ -l_5 c_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L3} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} -l_5 s_1 s_{23} \\ l_5 c_1^2 c_{23} + l_5 s_1^2 c_{23} \\ l_5 c_1 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_5 s_1 s_{23} \\ l_5 c_{23} \\ l_5 c_1 s_{23} \end{bmatrix}$$

$r_{i-1,E} = A^0_E(:,4) - A^0_i(:,4)$ επειδή έχουμε προσθέσει ένα ενδιάμεσο πλαίσιο.

$J_{A_i} = b_{i-1}$. Επειδή όλες οι αρθρώσεις είναι περιστροφικές.

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{bmatrix} J_L \\ -- \\ J_A \end{bmatrix} = J = \left[\begin{array}{ccc} l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1 & -l_5 s_1 s_{23} - l_4 s_1 s_2 & -l_5 s_1 s_{23} \\ 0 & l_5 c_{23} + l_4 c_2 & l_5 c_{23} \\ l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 & l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2 & l_5 c_1 s_{23} \\ \hline 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{array}\right]$$

4. Βρίσκουμε αρχικά την ορίζουσα για τον J_L, δηλαδή της γραμμικής ταχύτητας, ως προς τη στήλη.

$$|J_L| = (l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)\left[l_5^2 \cancel{c_1} c_{23} s_{23} + l_4 l_5 c_1 c_2 s_{23} - l_5^2 \cancel{c_1} c_{23} s_{23} - l_4 l_5 c_1 s_2 c_{23} \right] + (l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)\left[- l_5^2 \cancel{s_1} c_{23} s_{23} - l_4 l_5 s_1 s_2 c_{23} + l_5^2 \cancel{s_1} c_{23} s_{23} + l_4 l_5 s_1 c_2 s_{23} \right]$$

$$= (l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1) l_4 l_5 c_1 s_3 + (l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1) l_4 l_5 s_1 s_3$$

όπου έγινε χρήση της $s_3 = s_{23} c_2 - c_{23} s_2$.

$$= l_4 l_5^2 c_1^2 c_{23} s_3 + l_4^2 l_5 c_1^2 c_2 s_3 - \cancel{l_2 l_4 l_5 c_1 s_3 s_1} + l_4 l_5^2 s_1^2 s_3 c_{23} + l_4^2 l_5 s_1^2 c_2 s_3 + \cancel{l_2 l_4 l_5 c_1 s_1 s_3}$$

$$= l_4 l_5^2 c_{23} s_3 + l_4^2 l_5 c_2 s_3 + l_2 l_4 l_5 c_1 s_3 (s_1 - s_1)$$

$$= l_4 l_5 s_3 \left(l_5 c_{23} + l_4 c_2 + l_2 \cancelto{0}{c_1 (s_1 - s_1)} \right)$$

$$= l_4 l_5 s_3 (l_5 c_{23} + l_4 c_2)$$

Τα singularities θα είναι

$$s_3 = 0 \Rightarrow q_3 = 0^\circ \text{ ή } q_3 = 180^\circ$$

Όπως η άρθρωση q_3 δεν μπορεί να αναδιπλώσει στις 180°

κ' $l_4 c_2 + l_5 c_{23} = 0$.

Η ποσότητα αυτή αναπαριστά το ύψος του σημείου 6 ως προς το σύστημα συντεταγμένων στο σημείο O_2.
Μας λέει ουσιαστικά ότι η αρπάγη δεν μπορεί να φτάσει να είναι στην ίδια συντεταγμένη z με το $O_B \equiv O_2$ για $l_3 = 0$. ως προς το z_0-y_0-x_0.

Για το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο
έχουμε

$$\dot{q} = J_L^{-1} \cdot v_E$$

$$J_L^{-1} = \frac{1}{|J_L|} \begin{bmatrix} J_{L2y} \cdot J_{L3z} - J_{L3y} J_{L2z} & J_{L3x} J_{L2z} - J_{L2x} J_{L3z} & J_{L2x} J_{L3y} - J_{L3x} J_{L2y} \\ J_{L3y} J_{L1z} - \cancelto{0}{J_{L1y}} J_{L3z} & J_{L1x} J_{L3z} - J_{L3x} J_{L1z} & J_{L3x} \cancelto{0}{J_{L1y}} - J_{L1x} J_{L3y} \\ \cancelto{0}{J_{L1y}} J_{L2z} - J_{L2y} J_{L1z} & J_{L2x} J_{L1z} - J_{L1x} J_{L2z} & J_{L1x} J_{L2y} - \cancelto{0}{J_{L2x} J_{L1y}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|J_L|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = (l_5 c_{23} + l_4 c_2)\, l_5 c_1 s_{23} - l_5 c_{23} (l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2)$$

$$= l_4 l_5 c_1 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) = l_4 l_5 c_1 s_3$$

$$a_{12} = -l_5 s_1 s_{23} (l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2) + (l_5 s_1 s_{23} + l_4 s_1 s_2)\, l_5 c_1 s_{23} = 0$$

$$a_{13} = -(l_5 s_1 s_{23} + l_4 s_1 s_2)\, l_5 c_{23} + l_5 s_1 s_{23} (l_5 c_{23} + l_4 c_2)$$

$$= l_4 l_5 s_1 (s_{23} c_2 - s_2 c_{23}) = l_4 l_5 s_1 s_3.$$

$$a_{21} = l_5 c_{23} (l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)$$

$$a_{22} = (l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)\, l_5 c_1 s_{23} + l_5 s_1 s_{23} (l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)$$

$$= l_5 s_{23} (l_5 c_{23} + l_4 c_2)$$

$$a_{23} = -(l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)\, l_5 c_{23}$$

$$a_{31} = -(l_5 c_{23} + l_4 c_2)(l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)$$

$$a_{32} = -(l_5 s_1 s_{23} + l_4 s_1 s_2)(l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1) - (l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)(l_5 c_1 s_{23} + l_4 c_1 s_2)$$

$$= -l_5^2 s_{23} c_{23} - l_4 l_5 c_2 s_{23} - l_4 l_5 s_2 c_{23} - l_4^2 s_2 c_2$$

$$= -l_5^2 s_{23} c_{23} - l_4 l_5 s(q_3 + 2q_2) c_2 - l_4^2 s_2 c_2$$

$$= -l_5 s_{23} (l_5 c_{23} + l_4 c_2) - l_4 s_2 (l_5 c_{23} + l_4 c_2) = -(l_5 c_{23} + l_4 c_2)(l_5 s_{23} + l_4 s_2)$$

$$a_{33} = (l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)(l_5 c_{23} + l_4 c_2)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{|J_L|}\left(a_{11} v_{Ex} + a_{12} v_{Ey} + a_{13} v_{Ez}\right)$$

$$= \frac{v_{Ex} c_1}{l_5 c_{23} + l_4 c_2} + \frac{v_{Ez} s_1}{l_5 c_{23} + l_4 c_2}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{|J_L|}\left(a_{21} v_{Ex} + a_{22} v_{Ey} + a_{23} v_{Ez}\right)$$

$$= \frac{c_{23}(l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)}{l_4 s_3 (l_5 c_{23} + l_4 c_2)} v_{Ex} + \frac{s_{23}}{l_4 s_3} v_{Ey} + \frac{c_{23}(l_2 s_1 - l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2)}{l_4 s_3 (l_5 c_{23} + l_4 c_2)} v_{Ez}$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{|J_L|}\left(a_{31} v_{Ex} + a_{32} v_{Ey} + a_{33} v_{Ez}\right)$$

$$= -\frac{(l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1)}{l_4 l_5 s_3} v_{Ex} - \frac{(l_5 s_{23} + l_4 s_2)}{l_4 l_5 s_3} v_{Ey} + \frac{(l_5 c_1 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)}{l_4 l_5 s_3} v_{Ez}$$

5. Εργαζόμαστε αλγεβρικά με βάση το διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 s_1 c_{23} + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -l_5 c_1 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \end{bmatrix}$$

$$(p_x - l_1)^2 = l_5^2 s_1^2 c_{23}^2 + l_4^2 s_1^2 c_2^2 + l_2^2 c_1^2 + 2 l_5 s_1^2 c_{23} l_4 c_2 + 2 l_2 l_4 c_1 s_1 c_2$$
$$+ 2 l_2 l_5 c_1 s_1 c_{23}$$

$$p_y^2 = l_5^2 s_{23}^2 + l_4^2 s_2^2 + 2 l_4 l_5 s_2 s_{23}$$

$$(p_z + l_0)^2 = l_5^2 c_1^2 c_{23}^2 + l_4^2 c_1^2 c_2^2 + l_2^2 s_1^2 - 2 l_2 l_4 c_1 s_1 c_2 - 2 l_2 l_5 c_1 s_1 c_{23}$$
$$+ 2 l_4 l_5 c_1^2 c_2 c_{23}$$

$$(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 = l_5^2 c_{23}^2 + l_4^2 c_2^2 + l_2^2 + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23}$$

$$(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 + p_y^2 = l_5^2 + l_4^2 + 2 l_4 l_5 (c_2 c_{23} + s_2 s_{23}) + l_2^2$$
$$= l_5^2 + l_4^2 + 2 l_4 l_5 c_3 + l_2^2$$

$$\Rightarrow q_3 = \arccos\left(\frac{(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 + p_y^2 - (l_2^2 + l_4^2 + l_5^2)}{2 l_4 l_5} \right)$$

Για το q_2 παίρνουμε την εξίσωση του p_y.

$$p_y = l_4 s_2 + l_5 s_{23} = l_4 s_2 + l_5 s_2 c_3 + l_5 c_2 s_3 = (l_4 + l_5 c_3) s_2 + (l_5 s_3) c_2$$
$$= a s_2 + b c_2$$

εφαρμόζουμε αντικατάσταση $t = \tan\left(\frac{q_2}{2}\right)$, οπότε

$$s_2 = \frac{2t}{1+t^2}, \quad c_2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$a = l_4 + l_5 c_3$$
$$b = l_5 s_3$$

$$a\frac{2\tau}{1+\tau^2} + b\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} = p_y$$

$$2a\tau + b - b\tau^2 = p_y + p_y\tau^2$$

$$(b+p_y)\tau^2 - 2a\tau + (p_y - b) = 0.$$

$$\Delta = 4a^2 - 4(p_y^2 - b^2) = 4(l_5^2 + l_4^2 + 2l_4 l_5 c_3 - p_y^2)$$

$$\tan\left(\frac{q_2}{2}\right) = \frac{2a \pm \sqrt{\Delta}}{2(b+p_y)} = \frac{l_4 + l_5 c_3 \pm \sqrt{l_4^2 + l_5^2 + 2l_4 l_5 c_3 - p_y^2}}{l_5 s_3 + p_y}.$$

$$\Rightarrow q_2 = 2\arctan\left(\frac{l_4 + l_5 c_3 \pm \sqrt{l_4^2 + l_5^2 + 2l_4 l_5 c_3 - p_y^2}}{l_5 s_3 + p_y}\right)$$

Ομοίως για το q_1 παίρνουμε είτε το p_x είτε το p_z και εκτελούμε την αντικατάσταση $\tau = \tan\left(\frac{q_1}{2}\right)$

$$p_x = l_5 s_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + l_4 s_1 c_2 + l_2 c_1 + l_1$$

$$\Rightarrow p_x - l_1 = (l_5 c_2 c_3 + l_4 c_2 - l_5 s_2 s_3) s_1 + l_2 c_1$$

$$\gamma = a s_1 + b c_1$$

$$s_1 = \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \quad c_1 = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$y = \frac{2a\tau}{1+\tau^2} + \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} b \quad , \; a = l_5(c_2 c_3 - s_2 s_3) + l_4 c_2$$

$$= l_5 c_{23} + l_4 c_2$$

$$b = l_2 \quad , \; y = p_x - l_1$$

$$y + y\tau^2 = 2a\tau + b - b\tau^2 \Rightarrow (b+y)\tau^2 - 2a\tau + (y-b)$$

$$\Delta = 4a^2 - 4(y^2 - b^2)$$

$$\tan\left(\frac{q_1}{2}\right) = \frac{2a \pm \sqrt{\Delta}}{2(b+y)} = \frac{l_5 c_{23} + l_4 c_2 \pm \sqrt{l_5^2 c_{23}^2 + l_4^2 c_2^2 + l_2^2 - (p_x - l_1)^2}}{p_x + l_2 - l_1}$$

$$q_1 = 2\arctan\left(\frac{l_5 c_{23} + l_4 c_2 \pm \sqrt{(l_5 c_{23} + l_4 c_2)^2 + l_2^2 - (p_x - l_1)^2}}{p_x + l_2 - l_1}\right)$$