11 月 5 日　7-4

2024-11-05

目次

２項分布

$X \sim Bin(n, p)$とする。

p の推定量 $\hat{p} = \frac{X}{n}$ は $E_p[\hat{p}] = \frac{E_p[X]}{n} = \frac{np}{n} = p$ より不偏推定量である。

推定量の分散は$Var[\hat{p}] = \frac{Var[X]}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$ である。

２項分布の確率変数 $f(x, p) = p^x (1-p)^{n-x} \binom{n}{x}$の対数を$p$ で微分すると

$$\begin{aligned} \ell'(p, x) &= \frac{\partial}{\partial p}\left(x \log p + (n-x) \log(1-p) + \log \binom{n}{x}\right) \\ &= \frac{x}{p} + \frac{-(n-x)}{1-p} = \frac{x-np}{p(1-p)} \end{aligned}$$

となる。従ってフィッシャー情報量は

$$I(p) = E\left[\ell'(p, X)^2\right] = \frac{E\left[(X-np)^2\right]}{(p(1-p))^2} = \frac{np(1-p)}{(p(1-p))^2} = \frac{n}{p(1-p)}$$

となり、これは$\frac{1}{Var_p[\hat{p}]}$ に一致する。したがって$\hat{p}$は$UMVU$であることが確かめられた。

正規分布

次に正規分布の母平均μの推定において標本平均X^{-} が UMVU であることを示す。

まず、μ に関するフィッシャー情報量を求める。

$$\ell(\mu, x) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$$

をμ で偏微分すると$\ell'(\mu, x) = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$ を得る。したがって、

$$I(\mu) = \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

となり、X^{-} が UMVU であることが示された。