

清华大学

# 综合论文训练

题目：宇宙微波背景辐射偏振的  
理论与实验综述

系别：物理系

专业：物理学

姓名：颜子昂

指导教师：陶嘉琳教授

201\* 年 \*\* 月 \*\* 日

## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名：\_\_\_\_\_导师签名：\_\_\_\_\_日 期：\_\_\_\_\_

## 中文摘要

宇宙微波背景辐射(CMB)是人类可以探测到的最早的电磁波信号, 包含了丰富的早期宇宙信息。1980 年以来, CMB 的偏振理论开始提出, 并于 1996 及 1997 年左右由 Zaldarriaga, Seljak, Kamionkowski 等人加以完善。同 CMB 温度场各向异性一样, CMB 偏振包含了丰富的宇宙学信息。CMB 偏振的 B 模提供了很好的检验宇宙学暴涨模型的方法, 这使 CMB 偏振的探测成为当代 CMB 实验的一个重点。

本文回顾了 CMB 偏振的理论计算, 特别强调了原初标量场及张量场扰动对 CMB 偏振的 E 模式与 B 模式的影响。然后本文回顾了近年来 CMB 偏振实验的主要结果, 并结合 BICEP2 实验与 Planck 卫星 2014 年发布的前景尘埃的结果论述了计算前景污染的必要性。最后对将来的 CMB 偏振实验做出了展望。

**关键词:** 宇宙学; 宇宙微波背景辐射; 偏振; 暴涨模型; 探测

## ABSTRACT

The Cosmic Microwave Background is the earliest electromagnetic wave that people can ever detected which tells us much about the early universe. First theories on CMB polarization was put forward since 1980 and was advanced around 1996 and 1997 by Zaldarriaga, Seljak, Kamionkowski, etc. Just like CMB anisotropies, CMB polarization is rich in cosmological information. The B-mode of CMB polarization is a good tool to test inflation models, which makes detection of CMB polarization a hot spot of modern CMB experiment.

This article reviews theoretical calculation on CMB polarization and emphasizes the influence that primordial scalar and tensor perturbation have on E and B-mode polarization. Then I review some important result of some recent experiments. Combining the results of BICEP2 and Planck Intermediate Result XXX, I discuss the importance to calculate and model the foreground contamination. Finally I look into the future on CMB polarization experiments.

**Keywords:** Cosmology; Cosmic Microwave Background, polarization; inflation; detection

# 目录

第一章 引言.....	1
1.1 宇宙学标准模型回顾.....	1
1.2 大尺度结构简介.....	4
1.3 宇宙微波背景辐射简介.....	6
1.4 暴涨模型简介.....	8
第二章 宇宙微波背景辐射偏振的理论.....	9
2.1 偏振的产生与描述.....	9
2.1.1 斯托克斯参量.....	9
2.1.2 汤姆逊散射下的斯托克斯参量.....	10
2.1.3 E 模和 B 模.....	12
2.2 标量与张量扰动对 CMB 偏振的影响.....	14
2.2.1 单模式扰动.....	16
2.2.2 多模式扰动.....	20
第三章 宇宙微波背景辐射偏振的实验.....	26
3.1 CMB 偏振实验概述.....	26
3.2 CMB 偏振实验回顾.....	29
第四章 讨论.....	36
第五章 结论.....	40
插图索引.....	42
表格索引.....	44
参考文献.....	45
致谢.....	50

附录 A 外文资料的调研阅读报告 .....	52
附录 B 带自旋权重的球谐函数 .....	57

## 主要符号表

$a$	尺度因子
$t$	坐标时间
$\tau$	共动时间
$K$	曲率参量
$H$	哈勃常数
$z$	红移
$\rho, P$	密度, 压强
$w$	密度-压强比
$\Omega$	密度参数
$T$	温度
$\delta$	密度扰动
CMB	宇宙微波背景辐射
$\Theta$	温度涨落
$h_+, h_\times$	张量模式扰动
$k$	共动波数
$l, m$	球谐展开参量
$Q, U$	斯托克斯参量

# 第一章 引言

## 1.1 宇宙学标准模型回顾

宇宙学成为科学最早是从爱因斯坦建立广义相对论<sup>[1]</sup>开始的。最早的宇宙学模型是爱因斯坦于 1917 年建立的“圆柱状”宇宙学模型<sup>[2]</sup>；同年，de Sitter 发展了另一种“球形”宇宙学模型<sup>[2]</sup>。

爱因斯坦和 de Sitter 都只从度规本身来研究时空的几何结构。最初研究时空几何的动力学的是弗里德曼<sup>[4]</sup>。他推广了爱因斯坦和 de Sitter 的宇宙学度规，并把它带入引力场方程，得到了最初形式的弗里德曼方程。该方程描述了宇宙时空结构的演化。

H.P.罗伯逊和沃尔克分别于 1935 年和 1936 年利用均匀性和各向同性假设得到了 RW 度规。这是目前为止最成熟的宇宙学度规。将 RW 带入引力场方程后，便能得出完全形式的弗里德曼方程。

我们先回顾一下标准宇宙学及其延伸的内容<sup>1</sup>。

广义相对论研究时空的结构。而宇宙作为无所不在的最大时空，自然需要利用广义相对论去描述。标准宇宙学基于如下两个基本假设：1.我们的宇宙是均匀的；2.我们的宇宙是各项同性的(关于宇宙的均匀性和平直性的严格数学定义，请参见梁灿彬，周彬《微分几何入门与广义相对论(上册)》第十章)。在这两个假设的要求下，宇宙学 RW 度规为：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1-1)$$

---

<sup>1</sup>注：以下推导如非特殊说明，一律取 c=1，G=1 的自然单位制。



其中  $a(t)$  代表尺度因子，标志宇宙尺度随时间的变化，一般取今日的  $a$  为 1； $K$  代表曲率，取值为  $\{-1,0,1\}$ 。将 RW 度规带入含宇宙学常数  $\lambda$  引力场方程可得弗里德曼方程：

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)a(t) \quad (1-2)$$

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi}{3}\rho a^2(t) \quad (1-3)$$

上式中密度  $\rho$  和压强  $p$  包含了诸如物质，辐射及真空能这些组分。它们靠状态方程：

$$p_i = w_i \rho_i \quad (1-4)$$

加以区别。对于物质(包括暗物质) $w=0$ ；对于辐射  $w=\frac{1}{3}$ ；对于暗能量  $w=-1$ 。

将(1-4)式与(1-3)式联立，可得

$$\rho_i \sim a^{-3(1+w_i)} \quad (1-5)$$

分别就不同的组分带入  $w$  的值，可得到各组分密度随尺度因子的变化。将(5)与(1-2)联立可得尺度因子以及各组分密度随时间的演化，结合热力学的方程还可以得到诸如温度，熵等热力学函数随时间的演化。

用下标 0 表示各物理量在今天的值，注意到  $a_0=1$ ，(4)式可写成

$$\frac{3H_0^2}{8\pi} - \sum_i \rho_{0i} = -\frac{3K}{8\pi} \quad (1-6)$$

其中  $H$  定义为  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ 。可以证明  $H$  就是哈勃定律中的哈勃常数。(1-6)式中，

如果宇宙是平坦的，即  $K=0$ ，则定义此时的密度  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi}$  为临界密度。可将各

组分密度归一化为  $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ 。

(1-2), (1-3)式是宇宙的动力学方程。如果知道了  $w$  和  $\Omega_i$ ，就可以结合基本的物理规律推导出早期宇宙的核合成，宇宙的膨胀过程等结果。现代宇宙学的重要目的之一就是通过观测限制这些参数。现在人们对宇宙成分的限制如下图：

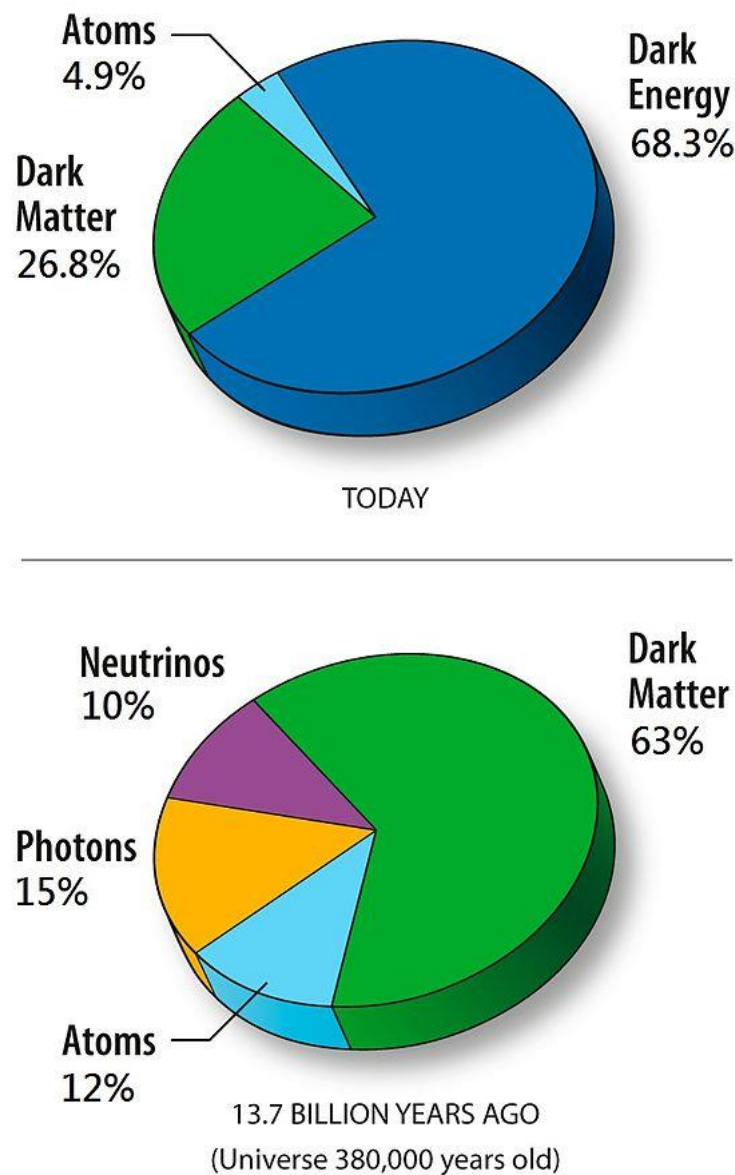


图 1 宇宙的物质组成<sup>[5]</sup>

宇宙的哈勃膨胀，原初核合成的观测，CMB 的温度及各项同性等都是支持宇宙学标准模型的重要观测资料。在标准模型之外，暗物质探测，暗能量模型，暴涨宇宙，大尺度结构的物理等都是现代宇宙学的重要内容。

## 1.2 大尺度结构简介

实际的宇宙中宇宙学基本假设显然是不成立的。根据大尺度巡天的结果，宇宙中存在大尺度结构：

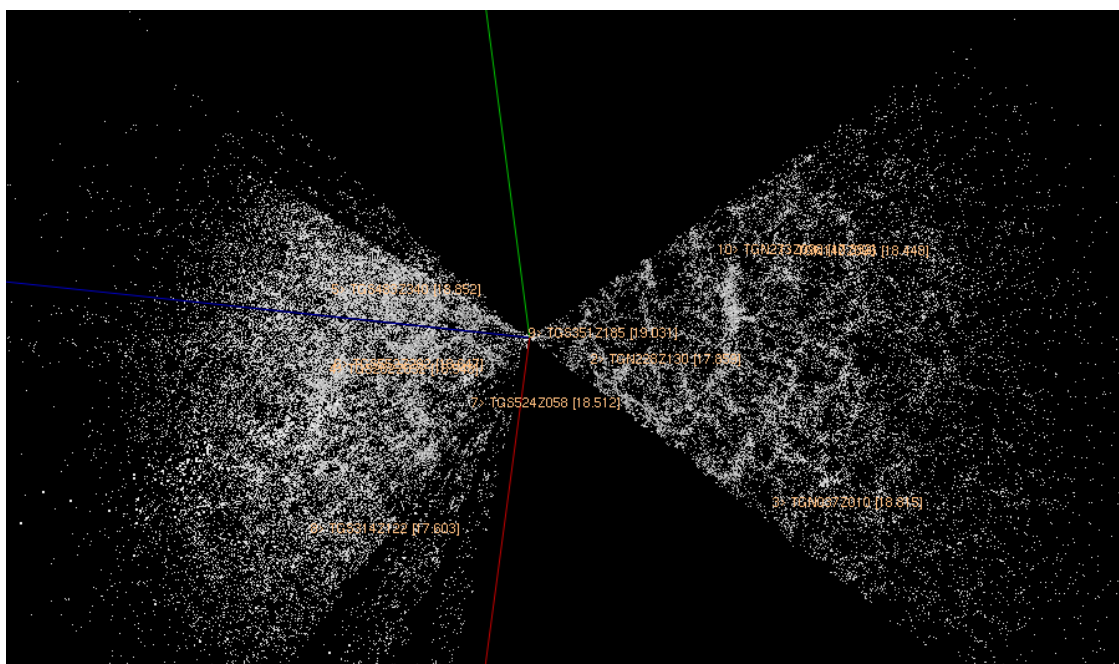


图 2 2dF 星系巡天得到的大尺度图像<sup>[6]</sup>

COBE 卫星也探测到了 CMB 中存在的各向异性<sup>[8]</sup>。说明宇宙的不均匀性来自很早的时期。

宇宙学微扰理论认为，大尺度结构是宇宙极早期的微扰经过生长产生的<sup>[8]</sup>，该微扰既包括密度的微扰也包括度规的微扰。宇宙早期温度极高，在光子能量高于 13.6eV 时，光子和重子粒子耦合。宇宙年龄约 30 万年时光子和重子物质解耦，电子被质子俘获，光子之后收到极少量散射最后以 CMB 呈现在我们面前。CMB 的各向异性体现了光子解耦之前的各项异性微扰(见下一节)，而重子物质及暗物质粒子的扰动继续生长。

将宇宙中的物质连续化为流体，根据经典流体力学有如下方程组：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \\
\Delta \Phi &= 4\pi\rho
\end{aligned} \tag{1-7}$$

上述方程有静态均匀解，即  $\mathbf{v}_0 = 0$  及  $\{\rho, \Phi, p\}$  为恒量  $\{\rho_0, \Phi_0, p_0\}$ 。在绝热条件下，定义绝热声速  $c_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ ，并定义相对密度扰动为  $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ 。上述三个方程限制了四个未知量，故其他三个未知量都能用  $\delta$  表示出来。在  $\delta$  比较小时，所有方程只需要保留到  $\delta$  的一阶项，此为线性近似。

在经典宇宙学的框架下，利用(1-4)(1-5)式及哈勃定律  $\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{r}$ ，我们便能得到关于  $\delta$  的演化方程。例如，在傅里叶空间中，尘埃的扰动方程为：

$$\ddot{\delta}_k + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_k + (v_s^2 k^2 - 4\pi\rho) \delta_k = 0 \tag{1-8}$$

在实际的宇宙中，除了要考虑各种组分的比例外，还需要考虑它们之间的相互作用。当小尺度下  $\delta$  过大时将会出现引力不稳定性，此时需要做非线性的分析。

我们可以直接观测的是大尺度结构的功率谱。功率谱定义为：

$$P(k) \equiv \delta_k^2 \tag{1-9}$$

方程(1-8)还缺少初始条件。该初始条件由暴涨产生。根据暴涨的理论，密度场涨落在空间中满足高斯分布，且相位随机，故原初功率谱可写为幂律谱：

$$P(k, t_i) = A_* \left( \frac{k}{k_*} \right)^n \tag{1-10}$$

其中  $k_*$  是在归一化时取的一个特征尺度，由观测给出。谱指数  $n$  受到暴涨物理学约束。于是，我们可以从观测大尺度结构的结果(BOSS，直接成像，弱引力透镜等)利用蒙特卡洛-马尔可夫链的方法限制宇宙学参数  $\{n, w_i, \Omega_i\}$ ，从而研究宇宙的早期情况和演化。

### 1.3 宇宙微波背景辐射简介

1965 年, 射电天线工程师彭齐亚斯和威尔逊无意中发现了宇宙微波背景辐射<sup>[9]</sup>。他们在调试用于卫星通信的接受天线时发现了残留的 3K 背景噪音。他们排除了鸟粪等污染的影响后, 仍无法去除该噪音。后来证明该辐射就是热大爆炸模型预言的早期残留的背景辐射。

最早的观测并不能看到 CMB 的各向异性。1989 年 COBE 升空, 并于 1992 年第一次探测到了 CMB 中的各向异性<sup>[7]</sup>。CMB 各向异性中包含了早期宇宙的信息, 同时也是大尺度结构形成的种子。第二代 CMB 卫星探测器 WMAP(威尔金森各向异性探测器)于 2001 年发射, 并于 2003 年首次公布对 CMB 的探测以及对宇宙学参数的限制<sup>[10]</sup>。2009 年第三代 CMB 卫星探测器 Planck 发射, 其对于宇宙学参数, 暴涨模型, 星际介质前景等限制精度都提高了不少<sup>[11]</sup>。

宇宙微波背景辐射是宇宙早期的光子-重子耦合流体在宇宙温度足够低时解耦, 光子经过最后散射面散射后到达我们的辐射。因此宇宙微波背景辐射的温度涨落包含了解耦时刻及其以前的涨落信息。

宇宙微波背景辐射的一大优势是它是连续的, 而不像星系团那样是离散的, 因此在二维上样本数比星系团更多。但同时没有第三个维度(视线方向)的信息也是它的一个劣势。

现在的 CMB 研究主要集中在其各向异性。根据 COBE 卫星 1992 年的测量, CMB 的温度相对涨落大约在  $10^{-5}$  左右<sup>[7]</sup>。记相对温度涨落  $\frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) \equiv \Theta(\vec{n})$ , 用球谐函数展开为:

$$a_{lm}^{\Theta} = \int \Theta(\vec{n}) Y_{lm}^*(\vec{n}) d\Omega \quad (1-11)$$

对全天空平均, 得到角功率谱:

$$C_l^{\Theta\Theta} \equiv \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m a_{lm}^* a_{lm} \quad (1-12)$$

在实际测量中我们直接测量到的是角功率谱。因为我们的宇宙只有一个，所以样本数量有限(例如，如果取  $l=0$ ，即单极矩，那么样本量只有 1)。因此各级角功率谱都有宇宙学方差(cosmic variance)  $\Delta C_l = \sqrt{\frac{1}{2l+1}}$  <sup>[12]</sup>，任何测量 CMB 各向异性的实验都不可能得到更高的精确度。Planck 卫星探测到的至今为止最精确的 CMB 角功率谱为如下：

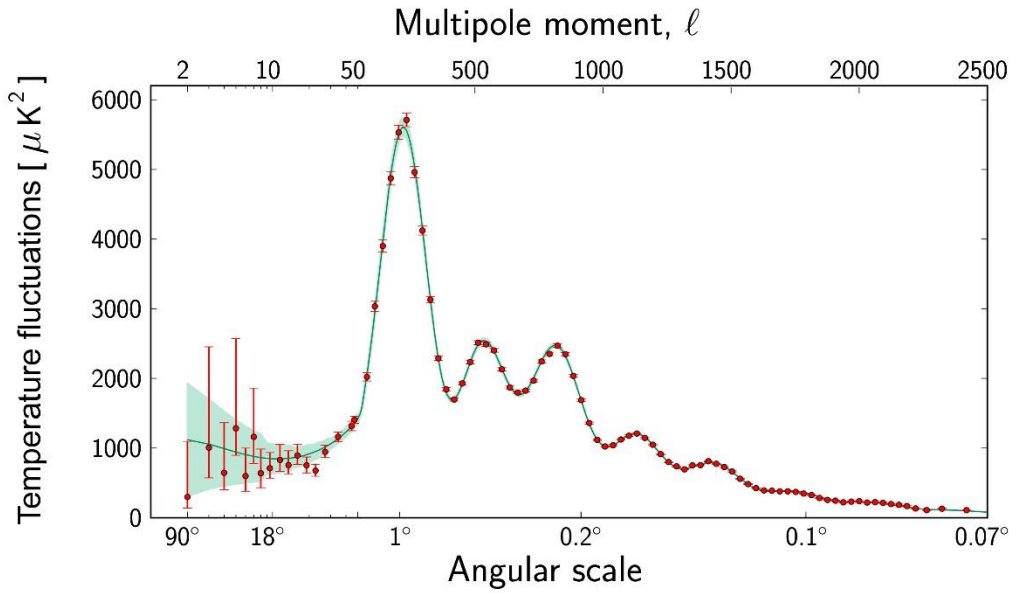


图 3 Planck 卫星 2013 年公布的 CMB 温度各向异性角功率谱。实线显示的是  $\Lambda$ CDM 宇宙模型预测的结果，绿色区域显示宇宙方差。<sup>[11]</sup>

图 3 功率谱中呈现波动的特征，这可以从光子的方程(8)中解出。考虑到重子，就能解释第三个峰相对增高；考虑到光子流体的非理想性就能解释小尺度下的压低；考虑积分 Sachs-Wolf 效应可以解释在大尺度的抬高等(具体内容可以详见 Hu 和 Dodelson 的综述<sup>[13]</sup>或者夏俊卿的综述<sup>[15]</sup>)。从功率谱中，利用 MCMC 等方法

可以同样限制宇宙学参数。CMB 能十分精确地限制宇宙学参数。关于 CMB 对宇宙学参数的限制可以参见 Planck 或 WMAP 的官方数据网站。

CMB 的温度涨落反应了原初的密度扰动，同时也是限制之后结构生长的重要观测资料<sup>[15]</sup>。另一方面，CMB 的偏振涨落同样含有重要的宇宙学信息。这是本文的主要内容。

## 1.4 暴涨模型简介

暴涨模型最初由 Guth 提出来的目的是为了了解决标准宇宙学的“平直性疑难”和“视界疑难”等问题的<sup>[16]</sup>。他提出利用早期宇宙存在的标量场随着温度的降低发生二阶相变，在二阶相变的过冷态时宇宙的能量由该标量场的真空能主导。这个真空能是常数，代入 1-2 式可得在这段时间内宇宙将发生指数膨胀。

暴涨的成功在于它能够有效解决上述疑难。为了满足解决疑难的条件，暴涨模型要求宇宙在 $10^{-43}$ 秒的时间内膨胀 $10^{29}$ 倍<sup>[17]</sup>，暴涨模型因而得名。

但是人们仍然不知道 Guth 假定的标量场的具体物理意义是什么。暴涨模型为大尺度结构形成提供初始条件，因此用大尺度结构和 CMB 可以作为限制暴涨模型的资料。受到观测的限制，目前人们尚未有效验证暴涨模型。因此理论家们在不违背已有观测资料的前提下提出了大量的暴涨模型，观测的重要目的就是解除这些模型的简并，并且排除一些模型。

研究暴涨模型不但具有宇宙学上的作用，还对粒子物理也有意义。Higgs 粒子发现后，粒子物理开始研究超出标准模型的现象，暴涨正好是一个十分合适的课题。本文综述的 CMB 偏振就是一种十分有效的验证和限制暴涨模型的手段。

本文的组织方式如下：第二章推导 CMB 偏振的理论基础，并说明为何 CMB 偏振能够验证暴涨模型；第三章回顾 CMB 偏振的实验结果，重点展示 BICEP2 实

验和 Planck 卫星对前景的测量;第四章讨论在进行 CMB 偏振实验时的注意事项,并估计了尘埃污染对 CMB 偏振实验的影响。

## 第二章 宇宙微波背景辐射偏振的理论

### 2.1 偏振的产生与描述

#### 2.1.1 斯托克斯参量

物理学中有很多种等价的描述光波偏振的方法,例如直接利用偏振分量或者琼斯矩阵。在对于 CMB 的偏振,我们通常使用斯托克斯分量进行描述。

对于任意的单色光,记传播方向为  $z$  轴,可以记为:  $\vec{E} = (E_x \hat{i} + E_y \hat{j}) e^{i\omega t + i\phi(\vec{r})}$ 。

定义斯托克斯参量为:

$$I \equiv \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \quad (2-1)$$

$$Q \equiv \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle \quad (2-2)$$

$$U \equiv 2 \text{Re} \langle E_x^* E_y \rangle \quad (2-3)$$

$$V \equiv 2 \text{Im} \langle E_x^* E_y \rangle \quad (2-4)$$

其中,  $I$  参量描述了光波的强度,并不包含偏振信息,而  $V$  参量只有在出现圆偏振时有意义。假设 CMB 的偏振为线偏振,则可以把  $Q$  和  $U$  参量简化为:

$$Q \equiv E_x^2 - E_y^2 \quad (2-5)$$

$$U \equiv 2E_x E_y \quad (2-6)$$

对于线偏振光,其强度和偏振角可以用  $Q$  和  $U$  表示为

$$I = \sqrt{Q^2 + U^2} \quad (2-7)$$



$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{U}{Q}\right) \quad (2-8)$$

故  $Q$  和  $U$  包含了线偏振光的所有信息。如果将光波绕  $z$  轴旋转  $\phi$  角，则  $U$  和  $Q$  的变化关系为：

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

故  $Q$  和  $U$  参量的变化类似于一个自旋 2 的粒子。如果取  $\phi = \frac{\pi}{4}$  则  $Q$  和  $U$  将会互换。

### 2.1.2 汤姆逊散射下的斯托克斯参量

我们接受的大部分 CMB 光子都是直接来自于早期光子-重子耦合流体中的光子经历重子的最后散射到达我们的探测器的(另一部分是在星系形成后经过二次散射到达探测器的，二次散射将会改变 CMB 光子的偏振性质，但现在我们暂时不考虑它们)。故 CMB 光子可以反映解耦前的物理图像。

最后散射就是汤姆逊散射。在研究汤姆逊散射对 CMB 偏振的影响之前，我们先建立坐标系如下：

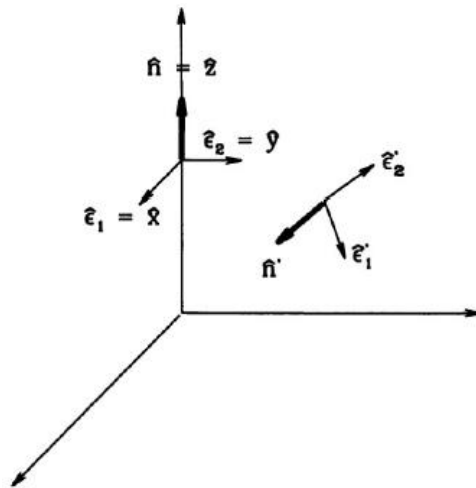


图 4 上图的坐标系中， $\hat{n}$  代表光的传播方向； $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$  代表两个偏振基矢量；带“'”的表示出射光<sup>[12]</sup>

根据汤姆逊散射理论，出射光  $i$  分量的散射截面正比于  $\sum_{j=1}^2 |\hat{\epsilon}_i(\hat{n}) \cdot \hat{\epsilon}_j(\hat{n})|^2$ 。假设入射光沿着  $z$  轴方向，带入(2-5)，(2-6)式，可以得到出射光的  $Q$  和  $U$  参量分别为：

$$Q = A \int d\Omega' f(\hat{n}') \sum_{j=1}^2 \left( |\hat{x} \cdot \hat{\epsilon}'_j(\hat{n}')|^2 - |\hat{y} \cdot \hat{\epsilon}'_j(\hat{n}')|^2 \right) \quad (2-10)$$

$$U = 2A \int d\Omega' f(\hat{n}') \sum_{j=1}^2 |\hat{x} \cdot \hat{\epsilon}'_j(\hat{n}')|^2 \cdot \sum_{j=1}^2 |\hat{y} \cdot \hat{\epsilon}'_j(\hat{n}')|^2 \quad (2-11)$$

我们暂时不考虑归一化常数  $A$ ， $\Omega'$  是入射光立体角； $f(\hat{n}')$  是从  $\hat{n}'$  方向入射的入射光强度。在  $xyz$  坐标系中，假设  $\hat{n}' = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta')$ 。选择  $\hat{x}'$  和  $\hat{y}'$  的方向，使得  $\hat{y}'$  的  $z$  分量为 0。此时：

$$\hat{x}' = (\cos \theta' \cos \phi', \cos \theta' \sin \phi', -\sin \theta') \quad (2-12)$$

$$\hat{y}' = (-\sin \phi', \cos \phi', 0) \quad (2-13)$$

代入(2-10)(2-11)式，可得：

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = A \int d\Omega' f(\hat{n}') \sin^2 \theta' \begin{pmatrix} \cos 2\phi' \\ \sin 2\phi' \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

利用球谐函数展开为

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = A \int d\Omega' f(\hat{n}') \begin{pmatrix} Y_2^2(\Omega') + Y_2^{-2}(\Omega') \\ \frac{1}{i} [Y_2^2(\Omega') - Y_2^{-2}(\Omega')] \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

光子分布的微扰  $\delta f$  靠温度场微扰  $\Theta$  表征。下述讨论均围绕  $Q$  和  $U$  分量的微扰展开，因此我们省略了  $\delta$  记号。 $Q$  和  $U$  的微扰用  $\Theta$  表示为：

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \propto \int d\Omega' \Theta(\hat{n}') \begin{pmatrix} Y_2^2(\Omega') + Y_2^{-2}(\Omega') \\ \frac{1}{i} [Y_2^2(\Omega') - Y_2^{-2}(\Omega')] \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

由此可见，对偏振  $Q$  和  $U$  分量的微扰只由温度场扰动的四极矩决定。因此我们需要解温度扰动场的玻尔兹曼方程，再积分(2-16)以获得  $Q$  和  $U$  的微扰的表达式。

### 2.1.3 E 模和 B 模

我们先定义偏振场的功率谱。定义  $Q_{\pm}(\hat{n}) = (Q \pm iU)(\hat{n})$ ，由(2-9)式可知，在旋转变换下  $Q_{\pm} \rightarrow e^{\pm 2i\varphi} Q_{\pm}$ 。因此  $Q_{\pm}$  可以由自旋权重为 2 的球谐函数展开：

$$Q_{\pm}(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q_{lm\pm 2}^{\pm} Y_l^m(\hat{n}) \quad (2-17)$$

关于自旋权重为 2 的球谐函数  $Y_l^m(\hat{n})$  的讨论详见附录 B。

定义 E 和 B 模式：

$$E_{lm} = -\frac{Q_{lm}^+ + Q_{l,-m}^-}{2}, B_{lm} = i\frac{Q_{lm}^+ - Q_{l,-m}^-}{2} \quad (2-18)$$

在宇称变换下， $Q$  不变， $U$  变成  $-U$ ，因此  $Q_+$  与  $Q_-$  互换。又因为宇称变换下  $Y_l^m(\hat{n}) \rightarrow (-1)^l Y_l^m(\hat{n})$ ，于是 E 和 B 的变换分别为  $E_{lm} \rightarrow (-1)^l E_{lm}$ ； $B_{lm} \rightarrow (-1)^{l+1} B_{lm}$ 。故 E 是标量场而 B 是赝标量场。E 和  $\Theta$  场的宇称相同，而与 B 场的宇称不同。因此  $\Theta B$  和 EB 的互功率谱为 0。

定义角功率谱：

$$\begin{aligned} \langle E_{lm}^* E_{l'm'} \rangle &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{EE} \\ \langle B_{lm}^* B_{l'm'} \rangle &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{BB} \\ \langle \Theta_{lm}^* E_{l'm'} \rangle &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{\Theta E} \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中 EE 模式信号比较强，易于探测(它在 2002 年即被 DASI 实验探测到<sup>[18]</sup>，见后文)。它可以给出 CMB 偏振的一些基本信息，也能结合  $\Theta E$  及  $\Theta\Theta$  信息限制

宇宙学参数； $\Theta E$  信号在大尺度上能反应再电离的情况。而  $BB$  信号提供了一种研究暴涨模型的好手段。

关于  $E$  和  $B$  模式的另外一种定义方式是在小尺度下，自旋权重为 2 的球谐函数可近似为  $_{\pm 2}Y_l^m(\hat{n}) \rightarrow e^{\pm 2i\phi_l} e^{i\vec{l} \cdot \hat{n}}$  (见附录 B)。于是球谐函数展开近似为二维空间中的傅里叶展开：

$$\begin{aligned} (Q \pm iU)(\vec{n}) &= -\sum_l \sum_m (E_{lm} + iB_{lm})_{\pm 2} Y_l^m(\hat{n}) \\ &\rightarrow -\int [E(\vec{l}) + iB(\vec{l})] e^{\pm 2i\phi_l} e^{i\vec{l} \cdot \hat{n}} d^2\vec{l} \end{aligned} \quad (2-20)$$

将  $(Q \pm iU)(\hat{n})$  在二维傅里叶空间中展开为：

$$(Q \pm iU)(\hat{n}) = \int [Q(\vec{l}) \pm iU(\vec{l})] e^{i\vec{l} \cdot \hat{n}} d^2\vec{l} \quad (2-21)$$

联立(2-20)，可得：

$$\begin{aligned} E(\vec{l}) &= Q(\vec{l}) \cos(2\phi_l) + U(\vec{l}) \sin(2\phi_l) \\ B(\vec{l}) &= -Q(\vec{l}) \sin(2\phi_l) + U(\vec{l}) \cos(2\phi_l) \end{aligned} \quad (2-22)$$

$\vec{l}$  即为二维平面的波矢， $\phi_l$  为二维波矢与极轴的夹角。对于单一波模  $l$ ， $E$  和  $B$  的行为和二维平面波一致。将  $x$  轴定为极轴，且令  $l$  与其平行(即  $\phi_l=0$ )，可得  $E=Q$  且  $B=U$ 。故纯  $E$  模式的偏振方向均垂直或平行于波矢  $l$  方向(注意这里的方向指的是二维温度扰动场的热波矢，并不是电磁波的波矢)；而纯  $B$  模式的偏振方向与  $l$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$  或  $\frac{3\pi}{4}$  [19]。

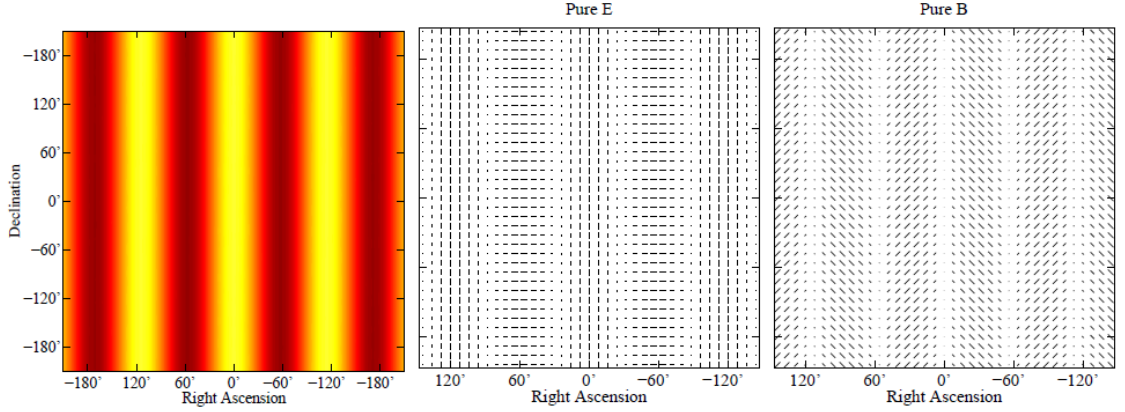


图 5 单一波模的纯 E 和 B 模式示意图。中图和右图偏振矢量的长度表示左图中显示的强度<sup>[18]</sup>

于是可定义 E 和 B 模式的功率谱：

$$\begin{aligned}\langle E^*(\vec{l})E(\vec{l}') \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\vec{l} - \vec{l}') C_l^{EE} \\ \langle B^*(\vec{l})B(\vec{l}') \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\vec{l} - \vec{l}') C_l^{BB}\end{aligned}\quad (2-23)$$

ET 交叉功率谱也可以类似的定义。早期的文献例如<sup>[20][21][22]</sup>利用(2-19)作为 E, B 模式功率谱定义, 而<sup>[23][12]</sup>用(2-23)作为定义。(2-19)的定义更容易体现 E 和 B 模式的宇称性质; 而(2-23)式在图像上更为直观, 也更容易计算。除此之外, <sup>[24]</sup>将 2 秩无迹偏振张量分解为 curve part(C)和 gradient part(G)。它们和 B 与 E 模的定义是等价的, 此处从略。

## 2.2 标量与张量扰动对 CMB 偏振的影响

在时空度规微扰的牛顿规范下, 时空度规微扰可以写为

$$\begin{aligned}g_{00} &= -1 - 2\Psi \\ g_{0i} &= V_i \\ g_{ij} &= a^2 \delta_{ij} (1 + 2\Phi) + a^2 h_{ij}\end{aligned}\quad (2-24)$$

其中  $\Psi$  和  $\Phi$  代表标量扰动(一般地有  $\Phi \approx -\Psi$ <sup>[13]</sup>)； $V_i$  代表矢量扰动；对称无迹张量  $h_{ij}$  代表张量扰动。分别求解三种扰动形式所代表的广义相对论运动方程可以发现，标量扰动是一种有心的振动；矢量扰动是速度场散度为零的涡流运动；张量扰动则是引力波。

三种扰动的来源不同。标量模式扰动来源于光子-重子流体中自引力和辐射压的对抗；矢量模式扰动可能来源于原初磁场；张量模式扰动来源于暴涨时期的量子涨落。因此研究原初扰动的张量模式可以帮助我们限制暴涨模型从而了解暴涨时期的物理过程。

三种扰动模式分别可以产生不同特征的物质分布，Wayne Hu 的主页上给出了三种扰动模式的形象化表示：

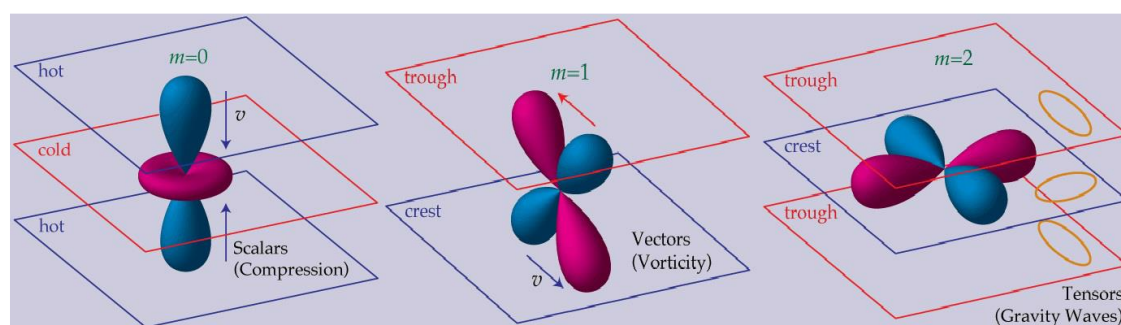


图 6 局部四极矩扰动场。蓝色代表蓝移红色代表红移

(图像来自 Wayne Hu 的主页<sup>[25]</sup>)

扰动的演化遵从宇宙学微扰的方程。微扰方程给出，矢量模式的扰动随着标度因子的负幂指数演化(详见 Patrick Peter 等人的 *Primordial Cosmology* 第 5.3.1 节的推导)，所以很快就会衰减。我们只考虑标量和张量扰动。

光子-重子流体的扰动分布会影响 CMB 的各向异性以及偏振的分布。因此研究 CMB 是研究原初扰动的很好手段。CMB 的偏振能让我们更好了解早期宇宙。

### 2.2.1 单模式扰动

为了对原初扰动对 CMB 偏振的影响有个初步印象，我们先计算最简单的单一模式(k)扰动，然后再于下一节推广到多模式扰动。

利用斯托克斯参量来讨论 CMB 偏振，根据(2-16 式)我们需要先了解温度扰动场  $\Theta(k)$ 。它的具体形式由扰动演化方程结合光子的玻尔兹曼方程给出，这里我们不需要涉及。为了描述温度场的角分布，我们将它按照勒让德函数展开：

$$\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{n}') = \sum_l (-i)^l (2l+1) \Theta_l(k) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}') \quad (2-25)$$

单位波矢  $\hat{k}$  在 xyz 坐标系中写为  $\hat{k} = (\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k)$ 。积分(28)式可得：

$$\begin{pmatrix} Q(\hat{n}, \hat{k}) \\ U(\hat{n}, \hat{k}) \end{pmatrix} = 4\pi A \sin^2 \theta_k \Theta_2(k) \begin{pmatrix} \cos(2\phi_k) \\ \sin(2\phi_k) \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

注意到我们假设  $\hat{n} = \hat{z}$ ，且在靠近 z 轴可以令  $\phi_k$  近似为不变，于是有：

$$\begin{pmatrix} Q(\hat{n}, \hat{k}) \\ U(\hat{n}, \hat{k}) \end{pmatrix} = 4\pi A \left[ 1 - (\hat{n} \cdot \hat{k})^2 \right] \Theta_2(k) \begin{pmatrix} \cos(2\phi_k) \\ \sin(2\phi_k) \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

根据(2-26)和(2-27)式的结果我们可以绘制出单模标量扰动场的偏振在 z 轴附近的行为：

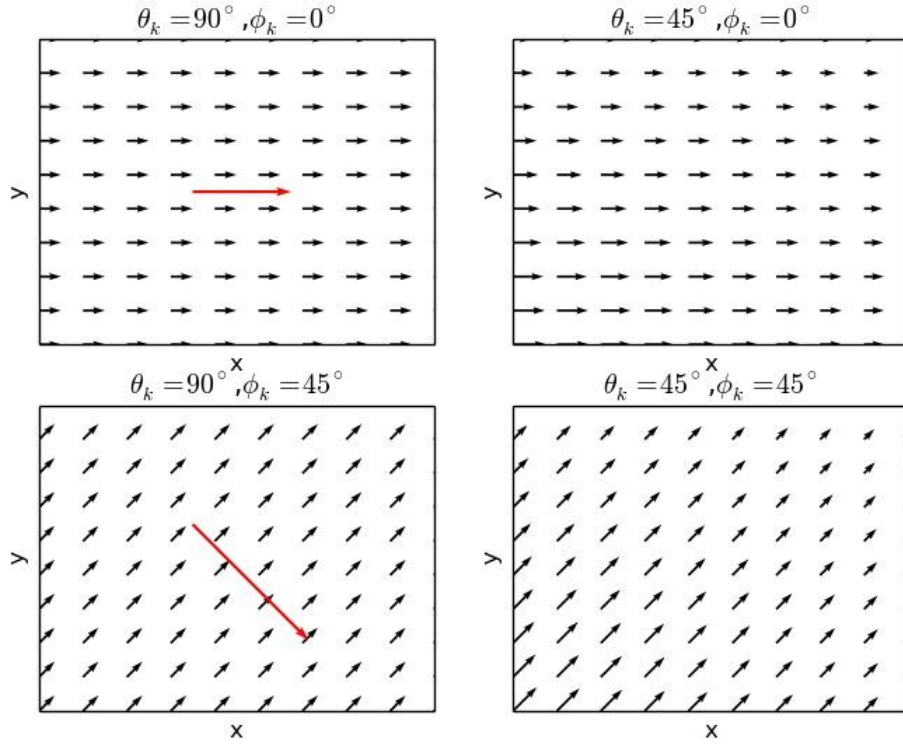


图 7 四组  $\theta_k, \phi_k$  下靠近  $z$  轴的偏振场,红色箭头表示  $k$

在  $xy$  平面的投影

从图 7 中看,可以发现偏振的方向和热波矢的方向垂直或者平行,这是 E 模的特征。于是可以推测单模标量扰动只能产生 E 模。而多模式扰动总可以分解为若干单模式的叠加,所以我们猜测标量扰动总是只能产生 E 模偏振信号。关于这个结论下面一节我会由计算加以说明。

下面讨论单模张量扰动。在(2-24)式中,将无迹对称张量  $h_{ij}$  写为:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-28)$$



注意，此处的张量扰动只存在于 xy 方向，即我们假定  $\mathbf{k}$  沿着 z 轴方向。在张量扰动下，一个标量物理量(例如温度场，这里的“标量”指的是不随坐标系变化而变化的量，和上文定义的“标量扰动”不同)的扰动总可以写为：

$$\Delta f(|\hat{n}|^2) = \Delta f(n_i h_{ij} n_j) = \Delta f(h_+ \sin^2 \theta \cos 2\phi + h_x \sin^2 \theta \sin 2\phi) \quad (2-29)$$

考虑最简单的形式，把温度扰动场写为：

$$\Theta^T(k, \mu, \phi) = \Theta_+^T(k, \mu) \sin^2 \theta^{(k)} \cos 2\phi^{(k)} + \Theta_x^T(k, \mu) \sin^2 \theta^{(k)} \sin 2\phi^{(k)} \quad (2-30)$$

上式中的上标“(k)”表示此处我们用的坐标系是  $\hat{k}$  沿着 z 轴的坐标系(简称 k 系)。

因此，在张量扰动中，和  $h_+$  相关的单一波模温度场扰动(记作  $\Theta_+^T$ )与  $\sin^2 \theta^{(k)} \cos 2\phi^{(k)}$  (即  $\hat{n}_x^{(k)2} - \hat{n}_y^{(k)2}$ )成正比；和  $h_x$  相关的单一波模温度场扰动(记作  $\Theta_x^T$ )与  $\sin^2 \theta^{(k)} \sin 2\phi^{(k)}$  (即  $2\hat{n}_x^{(k)}\hat{n}_y^{(k)}$ )成正比。若要积分(2-16)式，我们需要将 k 系中的坐标分量用图 4 中定义的 xyz 系中的分量表示出来。xyz 坐标系到 k 系的变换，相当于将 xyz 坐标系的 z 轴旋转使之与  $\hat{k}$  重合。两个坐标系中同一个矢量的分量由一个旋转矩阵  $\mathbf{R}$  联系起来： $a_i^{(k)} = R_{ij}^{(k)} a_j$ 。其中  $\mathbf{R}$  写为：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k \cos \phi_k & \cos \theta_k \sin \phi_k & -\sin \theta_k \\ -\sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ \sin \theta_k \cos \phi_k & \sin \theta_k \sin \phi_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \quad (2-31)$$

对于一个单位矢量  $\hat{n}'$ ，易知

$$\Theta_+^T \propto \hat{n}_x'^{(k)2} - \hat{n}_y'^{(k)2} = \left(R_{xj} \hat{n}_j'\right)^2 - \left(R_{yj} \hat{n}_j'\right)^2 \quad (2-32)$$

带入(2-31)式

$$\begin{aligned} \Theta_+^T &\propto [\cos \theta_k \sin \theta' \cos(\phi_k - \phi') - \sin \theta_k \cos \theta']^2 - \sin^2 \theta' \sin^2(\phi_k - \phi') \\ &= (1 + \cos^2 \theta_k) \sin^2 \theta' \cos^2(\phi_k - \phi') + \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta' - \sin^2 \theta' - \frac{1}{2} \sin 2\theta_k \cos 2\theta' \cos(\phi_k - \phi') \end{aligned} \quad (2-33)$$

积分(2-16)式。根据正交性原理，可以只考虑上式第一项，结果为

$$\begin{pmatrix} Q^+ \\ U^+ \end{pmatrix}(\hat{n}, \hat{k}) \propto (\cos^2 \theta_k + 1) \begin{pmatrix} \cos 2\phi_k \\ \sin 2\phi_k \end{pmatrix} \quad (2-34)$$

对x分量做同样的计算

$$\begin{pmatrix} Q^x \\ U^x \end{pmatrix}(\hat{n}, \hat{k}) \propto \cos \theta_k \begin{pmatrix} \sin 2\phi_k \\ \cos 2\phi_k \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

对比(2-26)式与(2-34)式易见  $h_+$  产生的偏振分量的偏振角的分布和标量扰动的相同，即它也只能产生 E 模扰动：

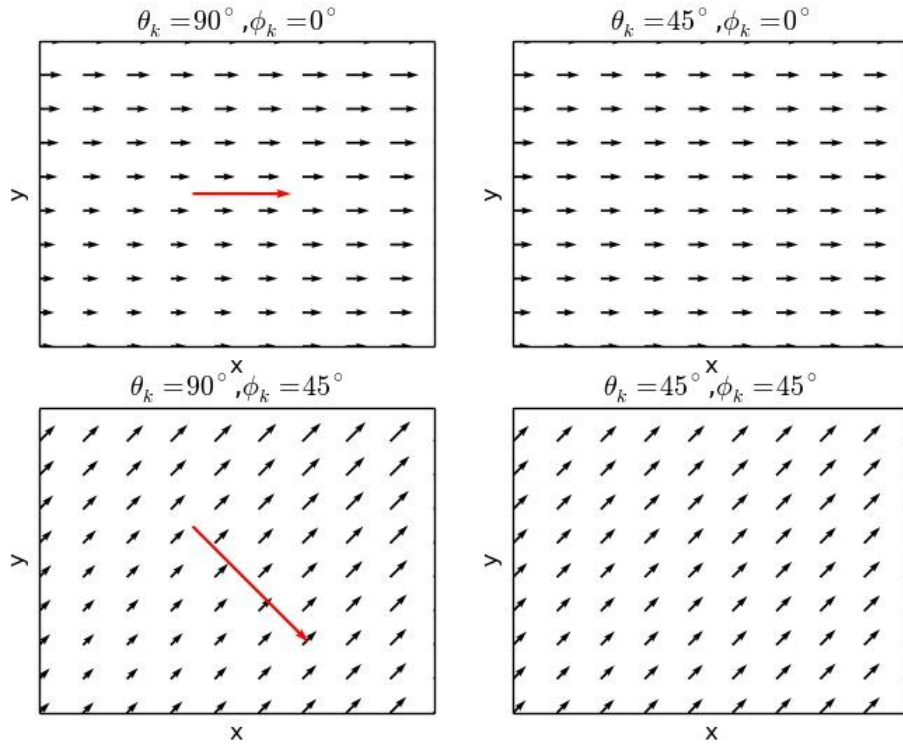


图 8  $h_+$  产生的偏振扰动

比较有意思的是  $h_x$  产生的偏振角分布。

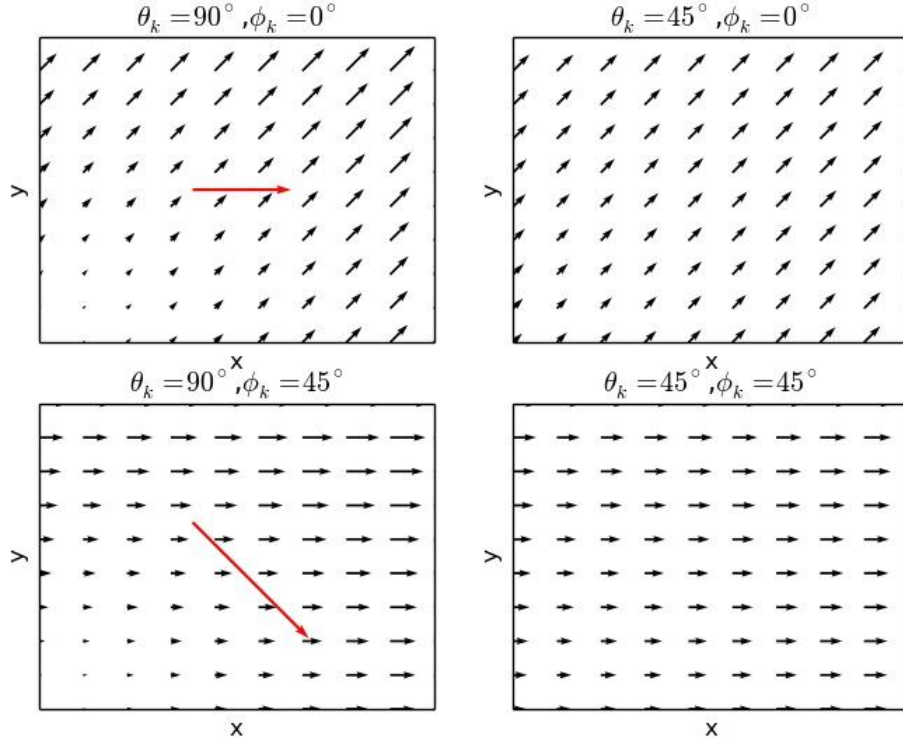


图 9  $h_x$  产生的偏振扰动

从图 9 中可见， $h_x$  产生的偏振场符合 B 模的性质。结合上述的讨论，我们可以得出结论：单模张量扰动既可以产生 E 模偏振场也能产生 B 模偏振场；而单模标量扰动只能产生 E 模偏振场。

### 2.2.2 多模式扰动

通过计算单模扰动的偏振，我们对原初标量及张量场产生的 CMB 偏振的形式有了个初步的印象。这一节我们将采取更加复杂而精确的计算。

我们还是先讨论标量模式。利用式(2-26)，对所有的波模  $k$  进行叠加：

$$\left(\frac{Q}{U}\right)(\hat{n}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{k}, \hat{n}) \begin{pmatrix} \cos 2\phi_k \\ \sin 2\phi_k \end{pmatrix} \quad (2-36)$$

利用 Seljak 与 Zaldarriaga 在 1996 年的工作中发展的源函数沿视线方向积分的方法<sup>[26]</sup>,  $\Theta(\vec{k}, \hat{n})$  形式上可以写为:

$$\Theta(\vec{k}, \hat{n}) = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{i\vec{k} \cdot \hat{n}(\tau - \tau_0)} S(k, \tau) \quad (2-37)$$

其中  $\tau$  是共动时间。源函数(source function)  $S(k, \tau)$  的具体形式需要靠求解玻尔兹曼方程才能得知, 只需要注意它只和  $k$  及  $\tau$  有关。如果我们只考虑靠近  $z$  轴的区域, 则可以使用平面(flat sky)近似。在平面近似下取坐标系如下图:

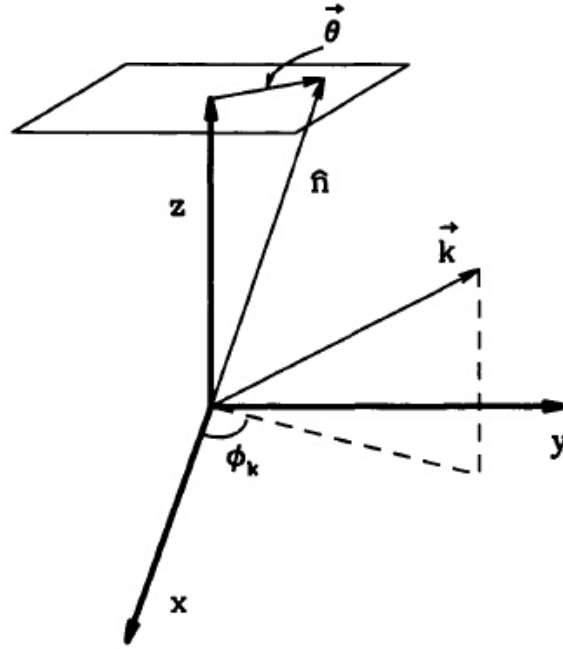


图 10 平面近似下的坐标系<sup>[12]</sup>

在靠近  $z$  轴的区域,  $k_z n_z$  几乎不变。只有  $k_x n_x + k_y n_y$  起作用。因此天空中某点的位矢  $\hat{n}$  可以用  $\hat{\theta}$  代替。于是(2-36)式可改为:

$$\left( \frac{Q}{U} \right) (\hat{\theta}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{k}, \hat{\theta}) \begin{pmatrix} \cos 2\phi_k \\ \sin 2\phi_k \end{pmatrix} \quad (2-38)$$

将  $\cos 2\phi_k$  与  $\sin 2\phi_k$  在  $xOy$  坐标系下利用  $k_x$  与  $k_y$  表示为:

$$\begin{aligned}\cos 2\phi_k &= \frac{k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \\ \sin 2\phi_k &= \frac{2k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}\end{aligned}\tag{2-39}$$

由于  $\Theta(\vec{k}, \hat{\theta})$  中含有  $e^{i\vec{k} \cdot \hat{\theta} \tau_0}$  的因子, 乘上  $k_x$  相当于用算符  $(-i\tau_0)^{-1} \partial / \partial \theta_x$  作用上去, 于是可以把  $\cos 2\phi_k$  与  $\sin 2\phi_k$  表示为算符:

$$\begin{aligned}\cos 2\phi_k &= D_Q(\theta) \equiv \frac{\partial_{\theta_x}^2 - \partial_{\theta_y}^2}{\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2} \\ \sin 2\phi_k &= D_U(\theta) \equiv \frac{2\partial_{\theta_x} \partial_{\theta_y}}{\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2}\end{aligned}\tag{2-40}$$

于是(2-38)式变成:

$$\begin{aligned}Q(\vec{\theta}) &= D_Q(\theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{k}, \hat{\theta}) = D_Q(\theta) \Theta(\hat{\theta}) \\ U(\vec{\theta}) &= D_U(\theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{k}, \hat{\theta}) = D_U(\theta) \Theta(\hat{\theta})\end{aligned}\tag{2-41}$$

将(2-41)式两边分别在  $\vec{l}$  平面上傅里叶展开:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} Q(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \hat{\theta}} &= D_Q(\theta) \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \Theta_l e^{i\vec{l} \cdot \hat{\theta}} \\ \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} U(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \hat{\theta}} &= D_U(\theta) \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \Theta_l e^{i\vec{l} \cdot \hat{\theta}}\end{aligned}\tag{2-42}$$

利用(2-40)式可得:

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}(\vec{l}) = \Theta_l \begin{pmatrix} \cos 2\phi_l \\ \sin 2\phi_l \end{pmatrix}\tag{2-43}$$

结合(2-22)式立即得到

$$\begin{aligned}E_l &= \Theta_l \\ B_l &= 0\end{aligned}\tag{2-44}$$

我们还能够得到  $C_l^{EE} = C_l^{\Theta\Theta}$  及  $C_l^{BB} = 0$ 。因此我们得到结论：在平面近似下标量场扰动只能产生 E 模偏振而不能产生 B 模偏振。我们关心的尺度一般是度的量级，及 1~100 左右，这个尺度下平面近似是成立的。

下面讨论张量扰动。张量扰动比标量扰动复杂一些。为了说明这一点我们将张量扰动的斯托克斯分量写成如下形式：

$$\begin{aligned} Q(\hat{n}) &= \int d^3k \left[ (1 + \cos^2 \theta_k) \Theta_+^T(\vec{k}, \hat{n}) \cos 2\phi_k - 2 \cos \theta_k \Theta_\times^T(\vec{k}, \hat{n}) \sin 2\phi_k \right] \\ U(\hat{n}) &= \int d^3k \left[ (1 + \cos^2 \theta_k) \Theta_+^T(\vec{k}, \hat{n}) \sin 2\phi_k + 2 \cos \theta_k \Theta_\times^T(\vec{k}, \hat{n}) \cos 2\phi_k \right] \end{aligned} \quad (2-45)$$

由于  $\cos \theta_k$  的存在，我们不能直接得到形如(2-41)式的式子，也就无法直接把  $\phi_k$  转化为  $\phi_l$ 。为了解决这一办法，我们需要把  $(1 + \cos^2 \theta_k) \Theta_+^T(\vec{k}, \hat{n})$  与  $\cos \theta_k \Theta_\times^T(\vec{k}, \hat{n})$  在  $\vec{l}$  平面上展开，即写为形如  $\int a_l(\vec{k}) e^{i\vec{l} \cdot \hat{\theta}} d^2l$  的形式，然后按照和标量扰动相同的程序计算。具体的计算过程见<sup>[27]</sup>，我们在这里列出结果：

$$\begin{aligned} C_l^{EE} &= (2\pi)^2 \int \left\{ \left[ B_l^{1,+}(\vec{k}) \right]^2 + \left[ B_l^{1,\times}(\vec{k}) \right]^2 \right\} d^3k \\ C_l^{BB} &= (2\pi)^2 \int \left\{ \left[ B_l^{2,+}(\vec{k}) \right]^2 + \left[ B_l^{2,\times}(\vec{k}) \right]^2 \right\} d^3k \end{aligned} \quad (2-46)$$

其中 B 的定义为：

$$\begin{aligned} B_l^{1,\varepsilon} &= \frac{2}{2l+1} [(l+1) \Theta_{l+1}^\varepsilon(\vec{k}) + l \Theta_{l-1}^\varepsilon(\vec{k})] \\ B_l^{2,\varepsilon} &= \frac{2}{2l+1} \left[ \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} \Theta_{l+2}^\varepsilon(\vec{k}) + 2 \frac{6l^3 + 9l^2 - l - 2}{(2l-1)(2l+3)} \Theta_l^\varepsilon(\vec{k}) + \frac{(l-1)l}{2l-1} \Theta_{l-2}^\varepsilon(\vec{k}) \right] \end{aligned} \quad (2-47)$$

上标  $\varepsilon$  代表+或 $\times$ 。上式中所有的  $\Theta_l^\varepsilon(\vec{k})$  的具体形式需要利用张量场扰动的玻尔兹曼方程求解，可以参考 Dodelson 的 *Modern Cosmology*。从(58)式可以看出张量扰动可以同时产生 E 和 B 模扰动。如果  $\Theta_+^T$  与  $\Theta_\times^T$  等量的话，则张量扰动产生的 E 与 B 模信号强度也是等量的。需要指出的是，暴涨时期的能量尺度决定  $\Theta_+^T$  与  $\Theta_\times^T$

的大小，从而探测 B 模能够研究暴涨时期的能量尺度，从而对许多暴涨的模型提出限制。

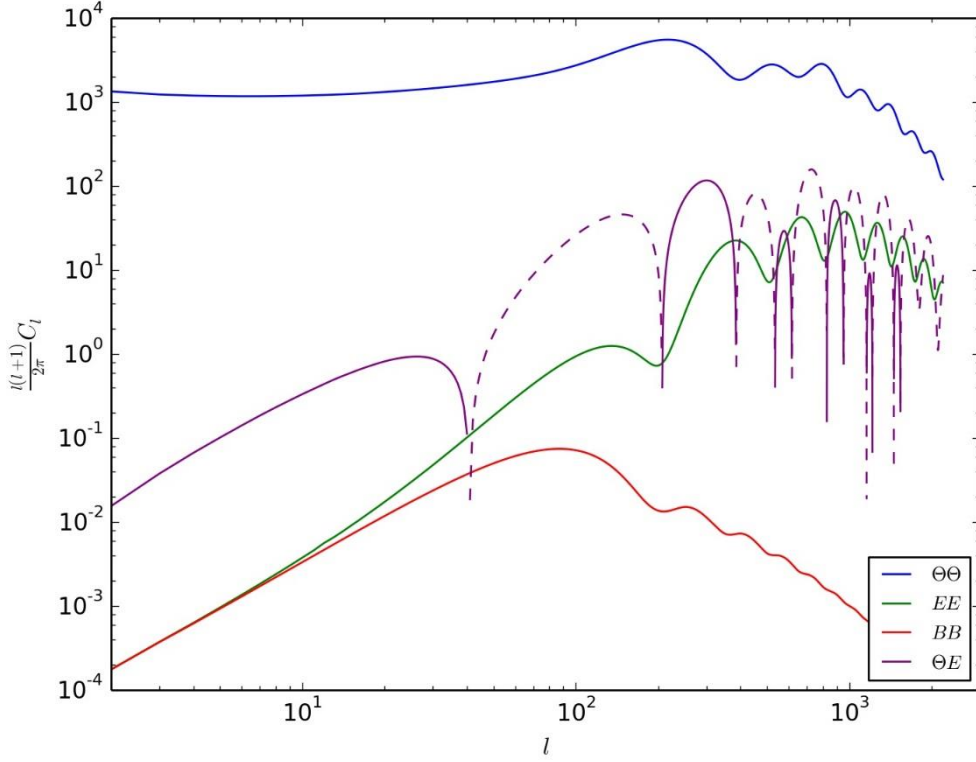


图 11 利用 CAMB<sup>[28]</sup>生成的 CMB 各向异性及偏振功率

谱。采用的宇宙学模型为:  $\Omega_{tot}=1, \Omega_{\Lambda}=2/3, \Omega_b h^2=0.02,$

$\Omega_m h^2=0.16, n=1, T_{CMB}=2.7255K$ ，张量和标量扰动等

量。虚线代表负相关。

注意上述所有的计算都只考虑原初扰动造成的光子-重子流体的扰动，并没有考虑 CMB 传播到探测器过程中的“前景(foreground)”的影响。例如，宇宙的再电离(reionization)过程会对 CMB 再次散射，从而在大尺度( $l < 10$ )上造成功率谱的抬高；弱引力透镜效应会将小尺度( $l \sim 1000$ )E 模的偏振方向扭曲从而产生 B 模信号；尘埃热辐射与星系内的同步辐射会产生额外的污染(尤其是当有磁场存在时会产

生额外的 B 模)<sup>[13]</sup>。在实际的观测中我们需要考虑这些前景带来的影响已有效地将它们去除。

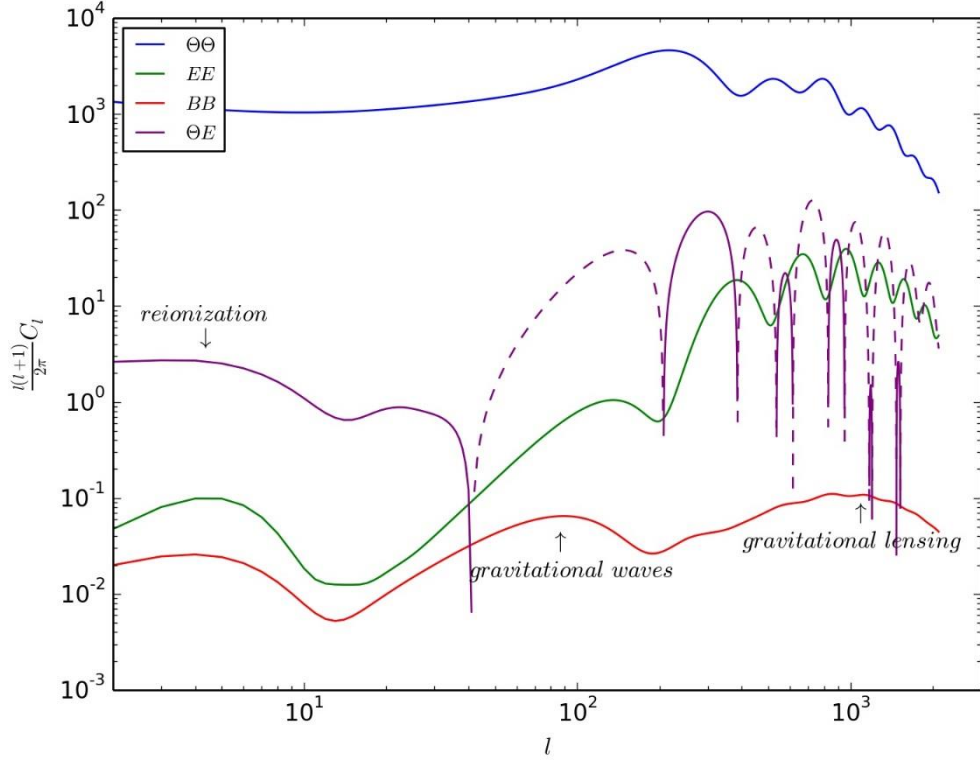


图 12 一个考虑了再电离和引力透镜的功率谱。采用的宇宙学模型与图 11 相同再电离红移取为 7。可以明显看到大尺度上各个功率谱都有明显提高,1~1000 的小尺度上 BB 谱有抬高。

从图 11 与 12 中可见，CMB 偏振信号的强度大约只有温度各向异性的 10%，这给探测 CMB 偏振信号带来了困难。尤其是 B 模偏振更加微弱。下一章我将回顾 CMB 偏振实验的相关内容。



## 第三章 宇宙微波背景辐射偏振的实验

### 3.1 CMB 偏振实验概述

自从 1965 年 CMB 发现开始，它一直作为现代宇宙学的重要研究工具。CMB 各向异性在空间的连续性方面有着其他方法无法比拟的优势，而且它包含的早期宇宙学信息也是其他方法不能比肩的。CMB 偏振实验在此基础上增加了其不少独特特征。

CMB 偏振被关注的主要原因是 B 模能用于研究暴涨。实际上，CMB 偏振实验的目标并不仅限于探测 B 模信号，它们有：

- 1) 检验 CMB 各向异性的理论模型。
- 2) 与其他实验结合以限制宇宙学参数。
- 3) 研究宇宙的再电离历史。
- 4) 研究小尺度下的弱引力透镜效应。
- 5) 利用原初引力波检验暴涨模型。

上述的前 4 个目标都是 CMB 偏振结合其他实验结果可以得到结论。对 CMB 偏振的探测可以更加精确地限制宇宙学参数以及打破一些模型的简并。然而目前并没有更加有效的方法实现目标 5。尽管现在有一些地面及空间的引力波直接探测的实验（例如 LIGO<sup>[29]</sup>，Virgo<sup>[30]</sup>及 eLISA<sup>[31]</sup>等），但原初引力波信号的相对强度小于  $10^{-15}$  <sup>[32]</sup>，小于现有的任何引力波探测器的灵敏度(关于各种引力波探测器灵敏度可见<sup>[33]</sup>)。故探测原初引力波在 CMB 上留下的印记——B 模式就成为了探测原初引力波的有效间接手段。

探测原初引力波主要为了限制两个重要的宇宙学参数：原初张标比  $r$  以及原初功率谱指数。 $r$  定义如下：

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2(k)}{\Delta_s^2(k)} \quad (3-1)$$

其中：

$$\begin{aligned} \langle h^\varepsilon(\vec{k}) h^{\varepsilon'}(\vec{k}') \rangle &= \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^{\varepsilon\varepsilon'} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \Delta_t^2(k) \\ \langle \Psi(\vec{k}) \Psi(\vec{k}') \rangle &= \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \Delta_s^2(k) \end{aligned} \quad (3-2)$$

$\varepsilon$  代表+或 $\times$ 。原初功率谱的形式假定为幂律谱：

$$\begin{aligned} \Delta_t^2(k) &= \Delta_t^2(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_t} \\ \Delta_s^2(k) &= \Delta_s^2(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \end{aligned} \quad (3-3)$$

根据暴涨模型的推导(可以参考 Baumann 的 Lecture<sup>[34]</sup>)，张标比和幂指数直接与暴涨的慢滚参数相关：

$$\begin{aligned} r &= 16\varepsilon \\ n_s - 1 &= 2\eta - 4\varepsilon \\ n_t &= -2\varepsilon \end{aligned} \quad (3-4)$$

因此，对张标比和幂指数和幂指数的限制可以很好地排除一些暴涨模型。另外，由于原初引力波强度与暴涨时期能量尺度直接相关，这也可以对暴涨模型进行限制。

一个 CMB 偏振的实验仪器一般包括前端的望远镜；半波片(用来过滤大气中的随机偏振信号)；偏振光栅；成像系统(一般用辐射测热仪)，其中还包括各种冷却系统等。成像系统得到的不同偏振分量的图像利用后续的软件进行成像(mapping)后做后续的功率谱分析。

从实验地点分，CMB 实验主要分为地面实验(如 BICEP<sup>[35]</sup>, Keck Array<sup>[36]</sup>等)，热气球实验(如 SPIDER<sup>[37]</sup>)，空间实验(如 Planck 卫星<sup>[11]</sup>)。一般要尽量选择在大气影响比较小的位置，比如南极。

设计一个 CMB 探测实验需要考虑前景的影响。前景的污染在不同频率下是不一样的。

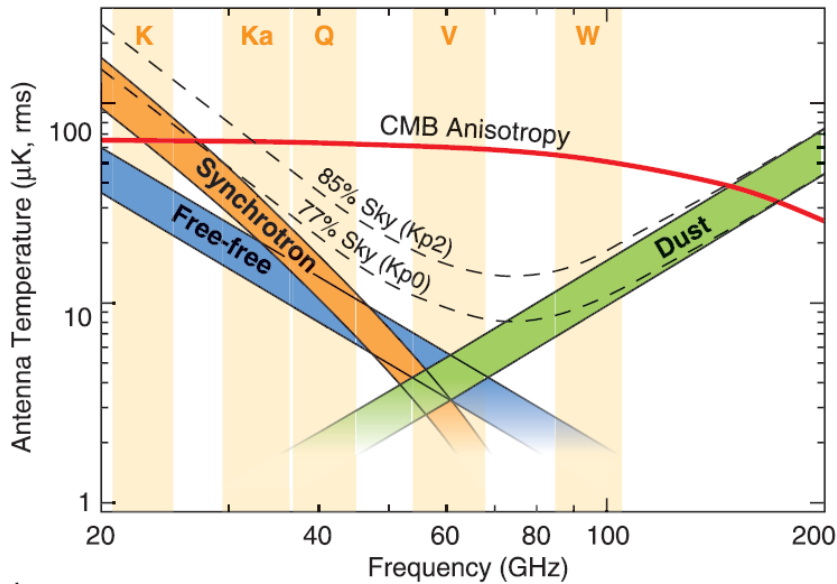


图 13 前景及 CMB 温度信号的频率依赖关系<sup>[39]</sup>

对于 B 模偏振，也有类似的关系：

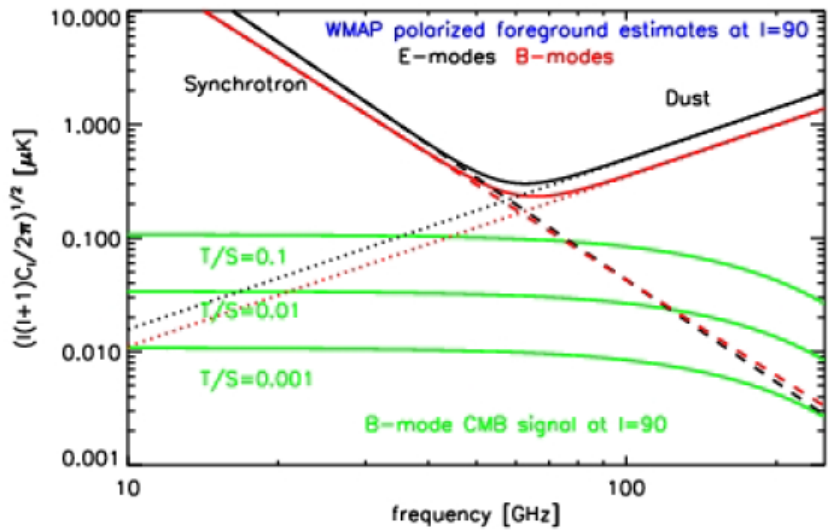


图 14 WMAP 对前景及 CMB 的 B 模信号频率依赖关系的估计<sup>[39]</sup>

因此，为了排除前景的影响，需要选择好探测波段以确保前景的影响最低，并且有效把污染扣掉(见后文讨论)。

下面，我将回顾最近的一些 CMB 偏振实验的基本情况和结果。

### 3.2 CMB 偏振实验回顾

在 2002 年 DASI 第一次探测到 CMB 的 E 模偏振信号以前，就已经有其他实验试图测量 CMB 偏振。但受限于灵敏度，它们只能给出信号的上限：

Saskatoon 实验： $25\mu\text{K}$ (95%置信度)在  $1\sim 75$  附近<sup>[40]</sup>。这是第一个灵敏度高于 CMB 各向异性信号的实验；

POLAR 实验： $10\mu\text{K}$ (95%置信度)，在  $2 < l < 20$  区间<sup>[41]</sup>；

PIQUE 实验： $8.4\mu\text{K}$ (95%置信度)，在  $1\sim 75$  附近，没有发现 B 模信号<sup>[42]</sup>；

随着实验技术和仪器变得更加先进，对 CMB 偏振信号的上限估计的越来越低。终于在 2002 年 DASI 实验在  $4.9\sigma$  的显著性下第一次探测到了 CMB 的 E 模信号并获得了 EE 及 TE 功率谱；随后 2003 年 WMAP 也探测到了 TE 的功率谱信号<sup>[18]</sup>；

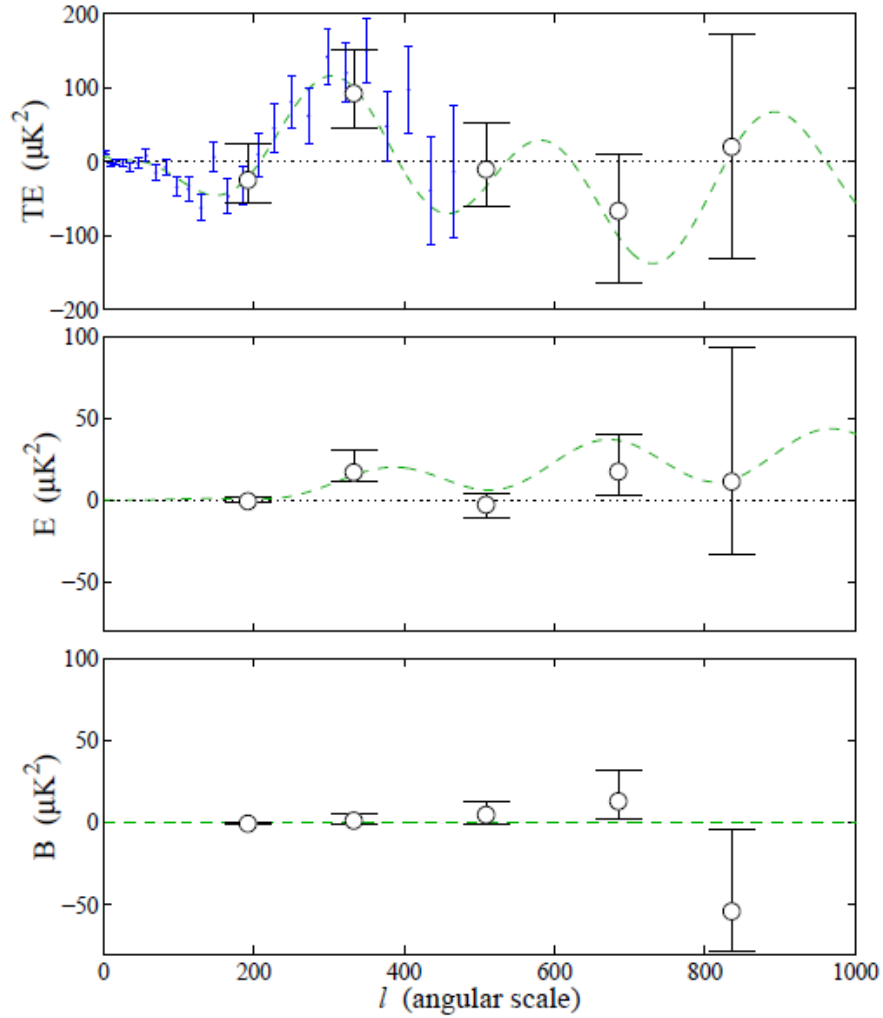


图 15 DASI 和 WMAP 测量到的 CMB 偏振功率谱。圆

圈代表 DASI 的结果；蓝色短横线代表 WMAP 的结果<sup>[18]</sup>

随后的不少实验在 E 模探测的精度上有很大提高(如 CBI<sup>[43]</sup>, CAPMAP<sup>[44]</sup>, BICEP<sup>[35]</sup>, QUaD<sup>[45]</sup>以及 WMAP 等), 然而没有一个实验探测到了角尺度范围内的 B 模偏振信号。它们都给出了 B 模信号上限的限制(见图 16)。

在经过了三年的观测之后, 于 2014 年 3 月 BICEP2 实验组发布了他们探测到的  $30 < l < 150$  尺度显著性大于  $5\sigma$  的 B 模信号<sup>[46]</sup>(Ade, et.al, 2014), 这是人类首次探测到非零的角尺度 B 模信号。根据探测到的 B 模信号的推导, 可以得到原初张标

比的大小为  $r = 0.2^{+0.07}_{-0.05}$ ， $r=0$  被排除在  $7\sigma$  以外。人们最早把它解读为原初引力波在 CMB 上面的印记，从而成为暴涨模型的重要验证。

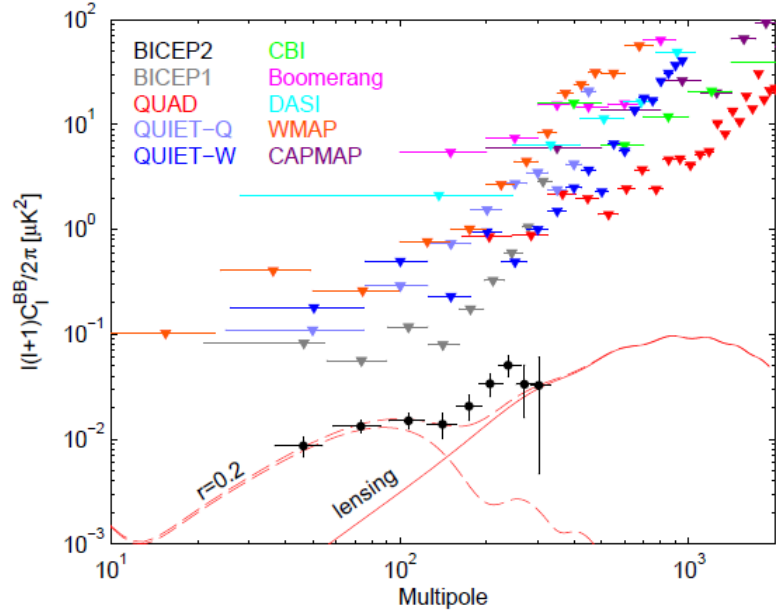


图 16 BICEP2 探测到的 BB 功率谱与之前的实验的 95% 上限；虚线代表  $r=0.2$  与带引力透镜的  $\Lambda$ CDM 模型预言的功率谱<sup>[46]</sup>。

然而，BICEP2 的结论很快就受到了质疑。一方面是 BICEP2 实验对  $r$  给出的限制与之前的理论和实验给出的限制有冲突。在 BICEP2 之前的 Planck 卫星和 WMAP 卫星虽然没有直接探测到 B 模信号，却给出了  $r$  的上限估计(见图 17)。另外，大部分暴涨模型对  $r$  的预言都在 0.1 左右甚至更小(可参考 Burgess C P, et.al, 2013 中 14 页的表格<sup>[47]</sup>)

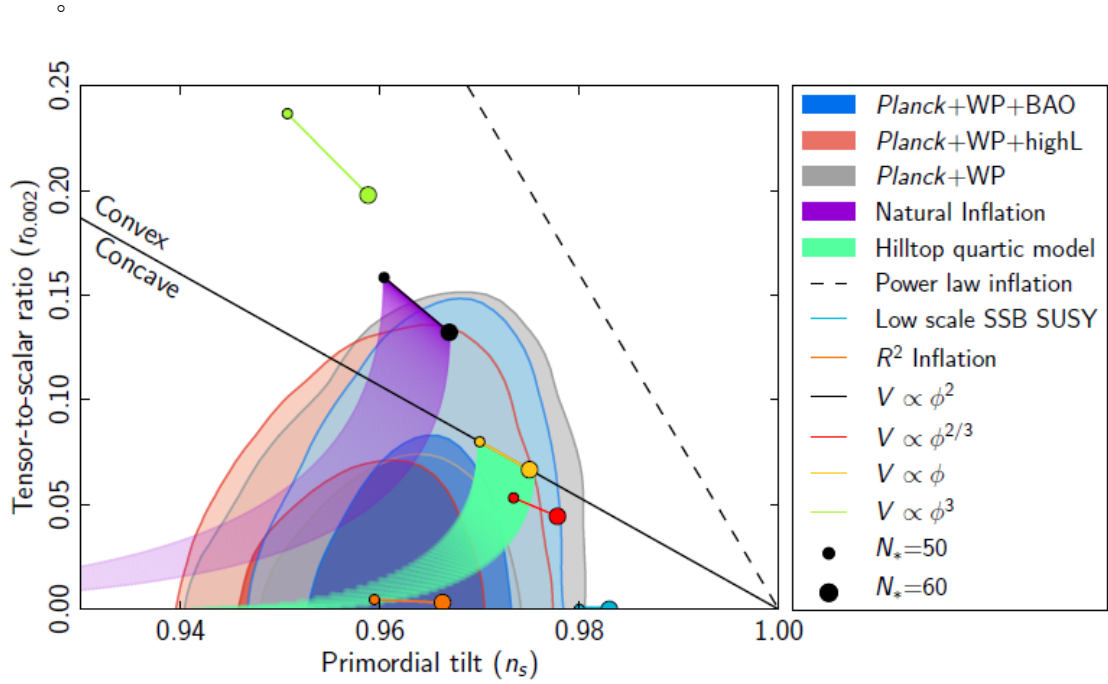


图 17  $r$  和  $n_s$  的限制。上图同时给出了幂函数形式的暴胀模型给出来的预言<sup>[48]</sup>。

Seljak 与 Mortonson 在 2014 年五月份发表文章称，结合 Planck 之前对前景尘埃的部分测量，给出了对  $r$  更小的限制  $r < 0.11$  (95%置信度)<sup>[49]</sup>。Spergel 等人大约在同时也发表文章论述了仅有前景辐射也可以拟合 BICEP2 探测到的 BB 角功率谱<sup>[50]</sup>。

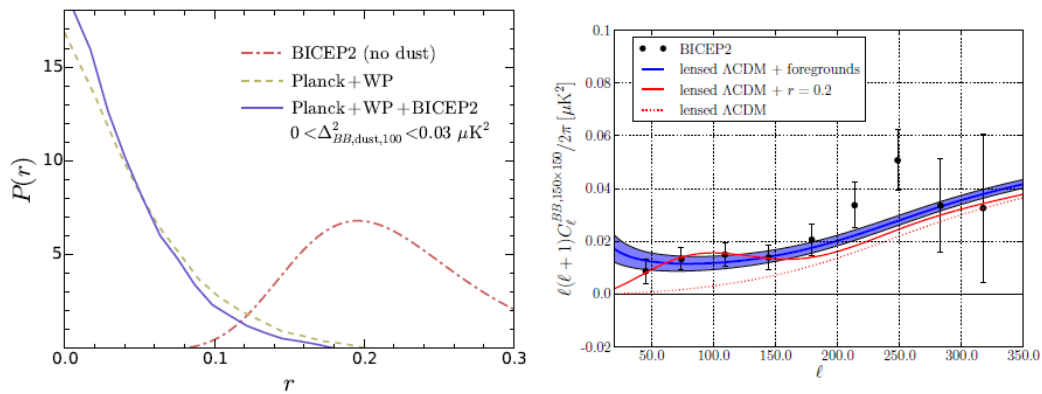


图 18 左图是 Seljak 等人将 BICEP2 的结果结合 Planck 及 WMAP 对尘埃的探测结果给出的对  $r$  的限制<sup>[49]</sup>；右图

是 Spergel 等人分别利用带前景的模型和带  $r=0.2$  原初引力波的模型拟合 BICEP2 探测到的 BB 功率谱<sup>[50]</sup>

从图 18 可见，BICEP2 的测量结果很可能受到了前景尘埃的污染。2014 年 9 月，Planck 组发布了他们对前景尘埃的偏振的测量结果<sup>[51]</sup>。他们发现，前景尘埃能很好地由  $\beta = 1.59$  及  $T=19.6\text{K}$  的黑体辐射谱拟合。他们分析了 BICEP2 天区的 353GHz 波段的尘埃 E 和 B 模信号，并利用黑体谱外推到 150GHz 从而发现尘埃的信号大小与 BICEP2 探测的结果非常相近。

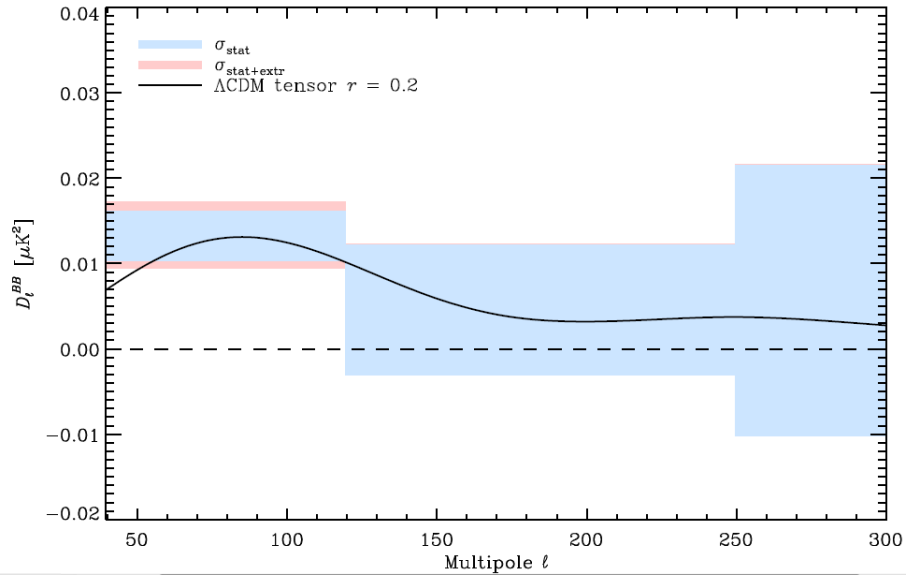


图 19 Planck 利用 353GHz 外推到 150GHz 得到的尘埃 B 模功率谱  $D_l^{BB}$ 。蓝色代表  $1\sigma$  系统误差；红色代表  $1\sigma$  外推系统误差<sup>[51]</sup>。

2015 年 1 月底，Keck Array 于 BICEP2 天区探测到了同样的 B 模信号，交叉功率谱确认了 BICEP2 的探测结果<sup>[52]</sup>。

接着，2015 年 1 月 Planck 和 BICEP2/Keck Array 两个小组联合发布了对两个实验结果的联合分析<sup>[53]</sup>，下图是 BICEP2/Keck150GHz 和 Planck353GHz 的交叉相关功率谱：



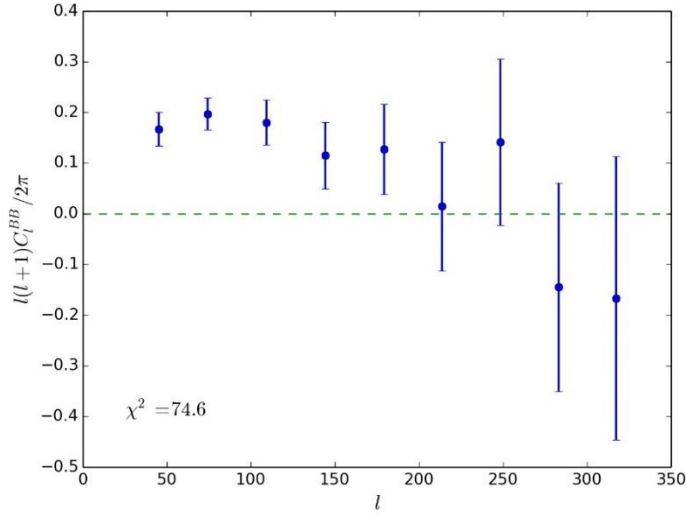


图 20 BICEP2/Keck 和 Planck 的结果的交叉相关

从交叉相关功率谱中看出，在 1~100 附近有个明显的出超，这说明在 1~100 附近 BICEP2 测得的信号和 Planck 测到的纯的尘埃偏振信号有明显的相关性。考虑到 CMB 与前景尘埃几乎不相关，结论是 BICEP2 确实第一次探测到了角尺度的 B 模偏振信号，然而这个信号并不来自 CMB 而是前景的尘埃。

利用 BICEP2，Keck 望远镜和 Planck 联合对  $r$  进行限制得到的  $r$  的似然函数 (likelihood) 分布为：

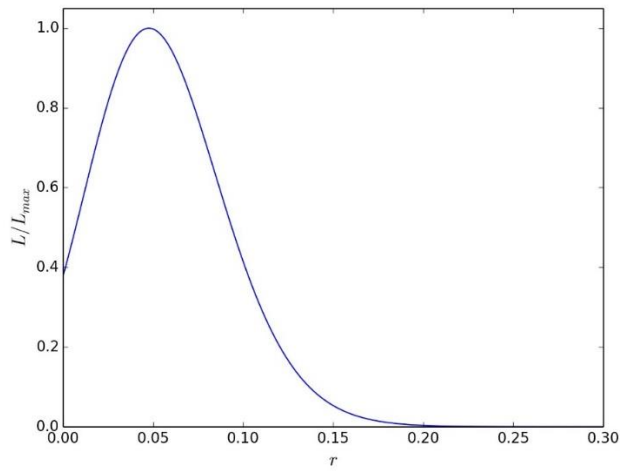


图 21 张标比的似然函数分布

从图 20 中看出张标比  $r$  已经被限制到 0.05 附近, 与之前的实验和理论是相容的, 而且排除  $r=0$  只有 8% 的置信度, 这说明 BICEP2 和 Keck Array 的实验结果中不能得到非零的  $r$ 。

以下是部分正在进行或正在计划中的 CMB 偏振实验的基本情况表:

表 1 部分 CMB 偏振实验的总结<sup>[54]</sup>

项目名称	时间	状态	l-min	l-max	探测频率 (GHz)	探测器	实验类型
BICEP3	-	计划中	-	-	95	Bolometer	地面实验
CLASS	-	计划中	5	100	40, 90, 150	Bolometer	地面实验
MBI-B	-	计划中	360	16000	90	Bolometer	地面实验
QUBIC	-	计划中	-	-	97, 150, 230	Bolometer, Interferometer	地面实验
EBEX	-	计划中	25	1000	150-450	Bolometer	热气球实验
PIPER	-	计划中	2	300	200, 270, 350, 800	Bolometer	热气球实验
ABS	2011 至今	进行中	25	200	145	Bolometer	地面实验
ACTPol	2013 至今	进行中	225	8725	90, 146	Bolometer	地面实验
AMiBA	2007 至今	进行中	n/a	4300	90	Interferometer, MMIC	地面实验
COMPASS	2003 至今	进行中	200	600	26-36	HEMT	地面实验
KECKArray	2010 至今	进行中	21	335	150	Bolometer	地面实验
KUPID	2003 至今	进行中	100	600	12-18	HEMT	地面实验
POLARB EAR	2012 至今	进行中	50	2000	150	Bolometer	地面实验
QUIJOTE	2012 至今	进行中	10	300	11, 13, 17, 19, 30, 40	Polarizer, OMT	地面实验
SPTpol	2012 至今	进行中	501	5000	95, 150	Bolometer	地面实验
Planck	2009 至今	进行中	2	2500	30-857	Radio, Bolometer	空间实验

SPIDER	2011 至今	进行中	10	300	90, 150, 280	Bolometer	热气球实验
BEAST	2000 至今	进行中	10	1000	100,150	HEMT	热气球实验, 地面实验

---

## 第四章 讨论

2014 年 6 月, Scott Dodelson 在他的文章中论述了当时 CMB 偏振实验对暴涨模型验证的三个科学目标<sup>[55]</sup>:

- 1) 确认 BICEP2 的信号并且确定原初引力波的强度;
- 2) 限制好张标比  $r$  和谱指数  $n_s$ ;
- 3) 测量张量扰动谱指数  $n_T$  的跑动(running,即  $n_T$  对  $k$  的依赖, 参考<sup>[56]</sup>)

从 Planck 和 BICEP2 联合分析的结论来看, 只依靠 BICEP2 的结果来确定原初引力波强度是不可能的了。如果有其他实验可以确认他们探测到了原初引力波造成的 B 模式信号, 便可以进行后续的分析。其中,  $r$  和  $n_s$  可以直接由角尺度的 B 模功率谱限制出, 而  $n_T$  的跑动需要对更小尺度进行测量, 为了同时排除引力透镜效应, 实验的角分辨率, 灵敏度和覆盖面积要求很高。所以最近的实验目的还是以限制  $r$  和  $n_s$  为主。

然而 BICEP2 的故事警示我们不要低估前景尘埃的污染。为了更好地从信号中扣除, 我们需要有更好地对尘埃信号的测量, 下面的讨论将分析这个问题。

我们假定, 将来的 CMB 实验直接测量到的信号都是受到尘埃辐射污染的 CMB 信号, 由于 CMB 的信号和尘埃的信号是不相关的, 一个 CMB 实验测量到的 B 模功率谱为 CMB 的功率谱和尘埃辐射的 B 模功率谱的和<sup>[49]</sup>:

$$C_{l,obs}^{BB} = D_l^{BB} + C_l^{BB} \quad (3-5)$$

根据误差合成公式， $C_l^{BB}$  的测量误差为：

$$(\delta C_l^{BB})^2 = (\delta C_{l,obs}^{BB})^2 + (\delta D_l^{BB})^2 \quad (3-6)$$

$r$  与  $B$  模的功率谱近似为成正比<sup>[51]</sup>，故利用  $l=80$  的功率谱来估计  $r$  的误差：

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta C_{80}^{BB}}{C_{80}^{BB}} \quad (3-7)$$

代入(3-6)：

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta C_{80}^{BB}}{C_{80}^{BB}} = \sqrt{\left(\frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80}^{BB}}\right)^2 + \left(\frac{\delta D_{80}^{BB}}{C_{80}^{BB}}\right)^2} \quad (3-8)$$

令  $\alpha \equiv \frac{C_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$ ，整理上式得：

$$\frac{\delta r}{r} = \sqrt{\left(\frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80,obs}^{BB}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2}} \quad (3-9)$$

加入我们采纳之前的实验和理论的  $r$  的预言，并且估计其为 0.01，且 BICEP2 测量到的  $r=0.2$  对应的信号完全来自尘埃，则  $\alpha=0.05$ 。于是可以得到在

$\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} - \frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80,obs}^{BB}}$  平面上  $\frac{\delta r}{r}$  的等高线图：

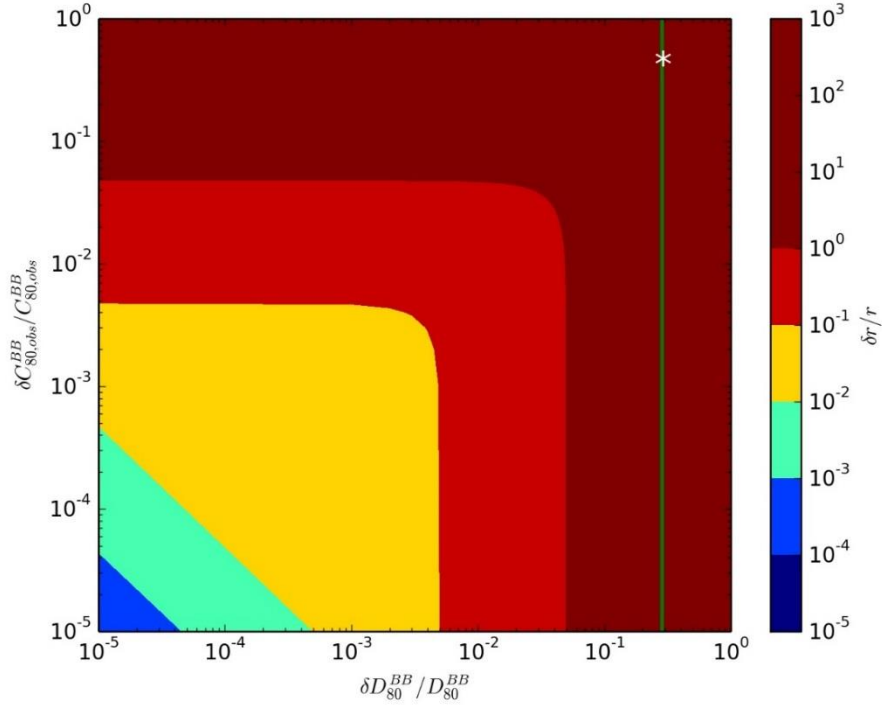


图 22  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} - \frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80,obs}^{BB}}$  平面上  $\frac{\delta r}{r}$  的等高线图，竖线是

Planck Interm XXX 结果里给出的插值到 150GHz 的尘埃功率谱的误差；“\*”表示 BICEP2 和 Planck 对应的误差

从上图中可以看出,如果假设  $r=0.01$ ,则在 Planck 对尘埃的限制精度及 BICEP2 的测量精度下,在 BICEP2 的天区不可能有实验能将  $r$  的精度限制在 10% 以内。

在将来的实验中,考虑到对尘埃偏振功率谱的测量和对 CMB 偏振功率谱测量到方法原理类似,我们可以做近似  $\frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80,obs}^{BB}} \approx \frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$ , 于是(3-9)式化为

$$\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} = \frac{\frac{\delta r}{r}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}} \quad (3-10)$$

根据 Planck 卫星对尘埃的测量，CMB 实验在接收到的信号中大部分都是来自尘埃，即  $\alpha \approx 1$ 。此时  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} \approx 2\alpha \frac{\delta r}{r}$ ，如果我们要求  $\frac{\delta r}{r} \approx 10\%$ ，则  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} \approx 1$ 。因此，

如果信号由尘埃主导，则对尘埃探测的精度要求将会相当高。

在不同的  $\alpha$  条件下  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$  与  $\frac{\delta r}{r}$  成正比关系：

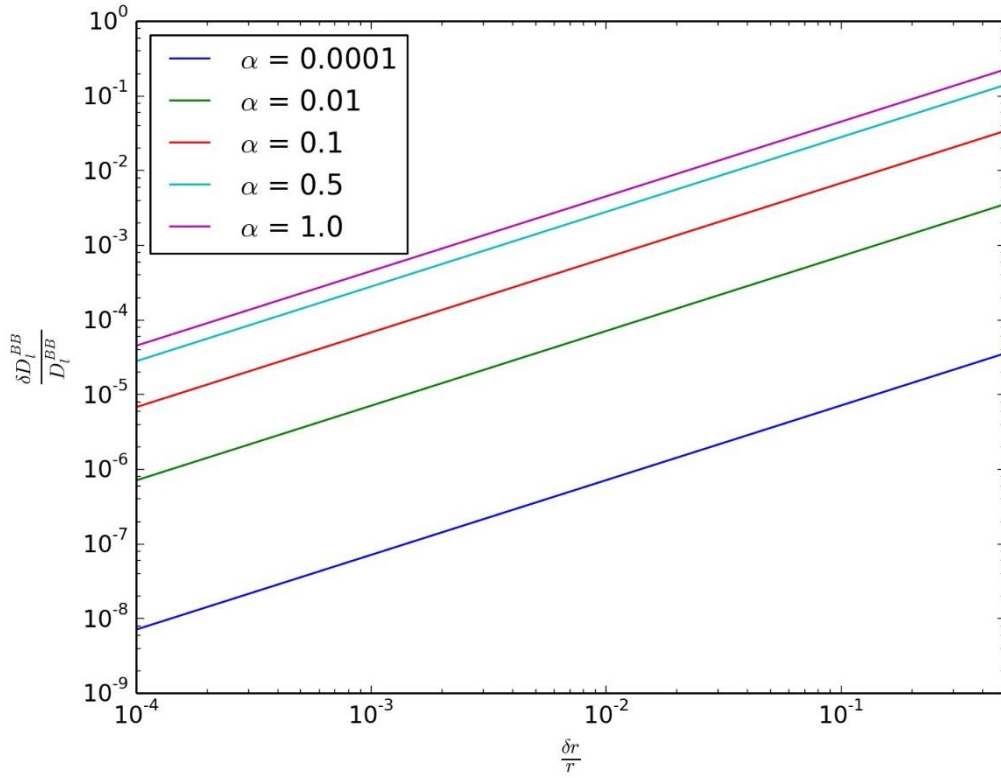


图 23 不同  $\alpha$  条件下  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$  与  $\frac{\delta r}{r}$  的关系

图 23 显示， $\alpha$  比较小时，相同的  $\frac{\delta r}{r}$  的需求对尘埃探测的精确度要求更低。

假如全天的尘埃强度大小大约和 BICEP2 天区相近，且我们有  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} \approx 10\%$  且要求

$\frac{\delta r}{r} \approx 33\%$  ( $3\sigma$  显著性), 则可以探测到的  $\alpha > 0.42$  ( $r > 0.084$ ) 的信号。另外, 尘埃影响较低的天区  $\alpha$  也比较小, 此时探测的  $r$  的精确度也会较高。

综上所述, 为了利用 CMB 研究暴涨模型, 做好纯的前景尘埃的探测和做好 CMB 偏振实验同样重要。在前景尘埃的影响下为了获得比较高的  $r$  精度, 需要设计实验提高尘埃和 CMB 偏振的探测精度。BICEP2 尽管没有对测到的数据做出比较准确的分析, 但它的确第一个探测到了来自宇宙的 B 模偏振信号, 它在精确度上的提高是无可置疑的。现在新的 CMB 实验也在进一步提高对 B 模信号的探测精度, 但在测量纯的尘埃方面还做的不够。目前使用的尘埃探测的结果大部分来自 Planck 卫星; 需要更加准确地得到前景污染的能谱。这个工作为选择 CMB 实验的频率窗口提供依据, 并且进一步降低  $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$ 。这一部分可以结合观测与对各种前景污染的建模来研究; 寻找比较干净的天区。这一工作需要较大天区及精确度较高的前景探测实验。

CMB 的偏振理论到现在已经十分成熟, 没有人能够怀疑它在验证暴涨上的巨大潜力。这是的 CMB 偏振实验仍旧是 CMB 实验中最热门的部分。但对于前景的污染我们知道的非常少。BICEP2 和 Planck 为我们提供了初步的对尘埃污染程度的结果告诉我们需要做的工作还有很多。

## 第五章 结论

本文通过回顾 CMB 偏振的描述和它的来源, 论证了 CMB 偏振实验在研究暴涨模型的重要意义。CMB 的在角尺度 B 模偏振是原初张量扰动存在的证明, 它的强度由暴涨时期的能量尺度决定。

CMB 偏振的实验在 2004 年由 DASI 实验组取得第一个突破，他们测到了 EE 也 ET 信号。之后的实验致力于寻找 B 模偏振信号。2014 年 3 月 BICEP2 实验组第一次探测到了角尺度下的 B 模式信号，但不久就被 Planck 证明测量到的信号大部分来自前景尘埃的热辐射。

CMB 偏振实验需要有效扣除前景污染。在对前景污染的具体物理过程没有良好的描述是，CMB 实验需要选择恰当的波段作为实验窗口。为了有效扣除尘埃的影响，提高尘埃实验的精确度是必要的。而且将来的实验还可以考虑寻找尘埃辐射比较小的干净的天区。

CMB 的 B 模偏振的探测比我们预期的更有难度，但它仍旧是一个十分有潜力的研究暴涨的工具，值得人们进一步进行研究和探测。



## 插图索引

图 1	宇宙的物质组成 .....	3
图 2	宇宙大尺度图像 .....	4
图 3	CMB 温度各向异性角功率谱 .....	7
图 4	研究 CMB 偏振的坐标系 .....	10
图 5	单一波模的纯 E 和 B 模式示意图 .....	14
图 6	局部四极矩扰动场 .....	15
图 7	靠近 z 轴的偏振场.....	17
图 8	$h_+$ 产生的偏振扰动.....	19
图 9	$h_x$ 产生的偏振扰动.....	20
图 10	平面近似下的坐标系.....	21
图 11	CMB 各向异性及偏振功率谱 .....	24
图 12	一个考虑了再电离和引力透镜的功率谱.....	25
图 13	前景及 CMB 温度信号的频率依赖关系.....	28
图 14	WMAP 对前景及 CMB 的 B 模信号频率依赖关系的估计 .....	28
图 15	DASI 和 WMAP 测量到的 CMB 偏振功率谱.....	30
图 16	BICEP2 探测到的 BB 功率谱与之前的实验的 95% 上限 .....	31
图 17	r 和 $n_s$ 的限制.....	32
图 18	论证 BICEP2 受到尘埃污染 .....	32
图 19	尘埃 B 模功率谱 $D_l^{BB}$ .....	33
图 20	BICEP2/Keck 和 Planck 的结果的交叉相关.....	34
图 21	张标比的似然函数分布.....	34

图 22	$\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}} - \frac{\delta C_{80,obs}^{BB}}{C_{80,obs}^{BB}}$ 平面上 $\frac{\delta r}{r}$ 的等高线图.....	38
图 23	不同 $\alpha$ 条件下 $\frac{\delta D_{80}^{BB}}{D_{80}^{BB}}$ 与 $\frac{\delta r}{r}$ 的关系.....	39

## 表格索引

表 1	部分 CMB 偏振实验的总结 .....	35
-----	----------------------	----

## 参考文献

- [1] Einstein A. The Foundation of the Generalised Theory of Relativity[J]. On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light 1 On the Electrodynamics of Moving Bodies 10 The Development of Our Views on the Composition and Essence of Radiation 11 The Field Equations of Gravitation 19 The Foundation of the Generalised Theory of Relativity 22, 1916: 22.
- [2] Einstein A. Cosmological considerations on the general relativity theory[J]. Preussisch Akademie der Wissenschaften, Sitzungberichte, 1917: 142.
- [3] De Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis[J]. Proc. Kkl. Akad. Amsterdam, 1917, 19: 1217-1225.
- [4] Friedmann A. 125. On the Curvature of Space[J]. Zeitschrift für Physik, 1922, 10: 377-386.
- [5] <http://map.gsfc.nasa.gov/media/080998/index.html>
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/2dF\\_Galaxy\\_Redshift\\_Survey#/media/File:2dfgrs.png](http://en.wikipedia.org/wiki/2dF_Galaxy_Redshift_Survey#/media/File:2dfgrs.png)
- [7] Smoot G F, Bennett C L, Kogut A, et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps[J]. The Astrophysical Journal, 1992, 396: L1-L5.
- [8] 向守平, 冯珑珑.宇宙大尺度结构的形成[M].中国科学技术出版社.2012
- [9] Penzias A A, Wilson R W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s[J]. The Astrophysical Journal, 1965, 142: 419-421.
- [10] Bennett C L, Hill R S, Hinshaw G, et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Foreground Emission[J]. The Astrophysical Journal Supplement Series, 2003, 148(1): 97.
- [11] Authors U. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results[J]. Astronomy & Astrophysics, 2014, 571.
- [12] Dodelson S. Modern cosmology[M]. Academic Press, 2003.
- [13] Hu W, Dodelson S. Cosmic Microwave Background Anisotropies[J]. 2002.
- [14] Xia, J., Cosmic Microwave Background, in Modern Astrophysics, T. Lu., 2014, Peking

University Press: Beijing. p. 91-120.

- [15] Zaldarriaga M, Spergel D N, Seljak U. Microwave Background Constraints on Cosmological Parameters[J]. 1997.
- [16] Guth A H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems[J]. Physical Review D, 1981, 23(2): 347.
- [17] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论: 上册[M]. 科学出版社, 2009.
- [18] Carlstrom J E, Kovac J, Leitch E M, et al. Status of CMB polarization measurements from DASI and other experiments[J]. 2003.
- [19] Hu W, White M. A CMB polarization primer[J]. 1997.
- [20] Seljak U, Zaldarriaga M. Signature of Gravity Waves in the Polarization of the Microwave Background[J]. 1997.
- [21] Hu W. CMB temperature and polarization anisotropy fundamentals[J]. 2003.
- [22] Zaldarriaga M. The Polarization of the Cosmic Microwave Background[J]. 2004.
- [23] Seljak U. Measuring Polarization in the Cosmic Microwave Background[J]. 1997.
- [24] Kamionkowski M, Kosowsky A, Stebbins A. Statistics of cosmic microwave background polarization[J]. 1997.
- [25] <http://background.uchicago.edu/~whu/index.html>
- [26] Seljak, Zaldarriaga. A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies[J]. Astrophysical Journal, 1996, 469(2):437.
- [27] Kosowsky A. Cosmic Microwave Background Polarization[J]. Annals of Physics, 1996, volume 246(1):49-85(37).
- [28] Lewis A, Challinor A. Code for Anisotropies in the Microwave Background[J]. online](19/06/2006) Disponible en: <http://camb.info>.
- [29] Abbott B P, Abbott R, Adhikari R, et al. LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory[J]. Science, 2009, 72(7):1 - 2.
- [30] Bradaschia C, Delfabbro R, Divergilio A, et al. The VIRGO Project: A wide band antenna for gravitational wave detection[J]. Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, 1990,

289(3):518-525.

- [31] Amaro-Seoane P, Aoudia S, Babak S, et al. eLISA: Astrophysics and cosmology in the millihertz regime[J]. Gw Notes, 2012, 6:4-110.
- [32] Liddle A R. Can the gravitational wave background from inflation be detected locally?[J]. Physical Review D, 1994, 49(8): 3805.
- [33] Moore C J, Cole R H, Berry C P L. Gravitational-wave sensitivity curves[J]. Classical and Quantum Gravity, 2015, 32(1): 015014.
- [34] Baumann D. TASI lectures on inflation[J]. arXiv preprint arXiv:0907.5424, 2009.
- [35] Keating B G, Ade P A R, Bock J J, et al. BICEP: a large angular scale CMB polarimeter[C]. Astronomical Telescopes and Instrumentation. International Society for Optics and Photonics, 2003:284-295.
- [36] Sheehy C D, Ade P A R, Aikin R W, et al. The Keck Array: a pulse tube cooled CMB polarimeter[C]. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, 2010:-.
- [37] Montroy T E, Ade P A R, Bihary R, et al. SPIDER: a new balloon-borne experiment to measure CMB polarization on large angular scales.[J]. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2006.
- [38] Bennett C L, Hill R S, Hinshaw G, et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Foreground Emission[J]. Astrophysical Journal Supplement, 2003, 148(1):97-117.
- [39] Samtleben D, Staggs S, Winstein B. The cosmic microwave background for pedestrians: a review for particle and nuclear physicists[J]. arXiv preprint arXiv:0803.0834, 2008.
- [40] Wollack E J, Jarosik N C, Netterfield C B, et al. A measurement of the anisotropy in the cosmic microwave background radiation at degree angular scales[J]. The Astrophysical Journal, 1993, 419: L49.
- [41] O'Dell C W, Keating B G, Oliveira-Costa A D, et al. CMB Polarization at Large Angular Scales: Data Analysis of the POLAR Experiment[J]. Phys.rev.d, 2003, 68(4):140-156.

- [42] Hedman M M, Barkats D, Gundersen J O, et al. A Limit on the polarized anisotropy of the cosmic microwave background at subdegree angular scales[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2001, 548(2): L111.
- [43] Mason B S, Pearson T J, Readhead A C S, et al. First results from the CBI[J]. 2001.
- [44] Barkats D. The CAPMAP instrument and its first season[J]. New Astronomy Reviews, 2003, 47(11): 1077-1081.
- [45] Bowden M, Taylor A N, Ganga K M, et al. Measuring the cosmic microwave background polarization with the QUaD experiment[C]. SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation. International Society for Optics and Photonics, 2004: 84-94.
- [46] Ade P A R, Aikin R W, Barkats D, et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales[J]. Phys.rev.lett, 2014, 112.
- [47] Burgess C P, Cicoli M, Quevedo F. String inflation after Planck 2013[J]. Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics, 2013, 11(11):1055-1058.
- [48] Ade P A R, Aghanim N, Armitage-Caplan C, et al. Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation[J]. Astronomy & Astrophysics, 2014, 571(3):1197-1204.
- [49] Mortonson M J, Seljak U. A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization uncertainty[J]. 2014:12.
- [50] Flauger R, Hill J C, Spergel D N. Toward an understanding of foreground emission in the BICEP2 region[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014, 2014(08): 039.
- [51] Collaboration P, Adam R, Ade P A R, et al. Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes[J]. Eprint Arxiv, 2014.
- [52] Ade,02P.02A.02R, Ahmed,02Z, Aikin,02R.02W, et al. BICEP2 / Keck Array V: Measurements of B-mode Polarization at Degree Angular Scales and 150 GHz by the Keck Array[J]. Eprint Arxiv, 2015.
- [53] Ade,02P.02A.02R, Aghanim,02N, Ahmed,02Z, et al. Joint Analysis of BICEP2 /KeckArray and Planck Data[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(10).

- [54] [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/suborbit/su\\_experiments.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/suborbit/su_experiments.cfm)
- [55] Dodelson S. How much can we learn about the physics of inflation?[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(19):2384-2387.
- [56] Kosowsky A, Turner M S. CBR anisotropy and the running of the scalar spectral index.[J]. Physical Review D, 1995, 52(4):R1739-R1743.
- [57] Weinberg S. Cosmology[M]. Oxford University Press, 2008.



## 致谢

本文是在我的导师陶嘉琳老师的悉心指导下完成的。在论文的内容，计算细节和行文上陶老师都给出了很多建议。陶老师是一个有丰富科研经验和知识的老师，在两年本科科研中，她积极鼓励我寻找到自己的兴趣点，并为我提供了大量基础的资料，解答了很多问题，培养了我对科研初步的感觉和能力。在此我向陶嘉琳老师表示衷心的感谢。

在本科科研期间，巴黎七大的 Hamilton 研究员和北京大学天文系的范祖辉老师及其组内其他同学给我提供过大量帮助与指导。在众位老师的指导下我逐渐对宇宙学研究的脉络有了了解；陶老师组里的孙磊学姐也给我的选题有过不少建设性的建议。在此对他们致以最诚挚的谢意。

在构思及写作此文时，同我的同学陶奕，孙嘉懿和林秋帆的讨论让我受益匪浅；另外，在处理统计学的一些问题上得到了中国人民大学肖舒予同学的帮助，在此一并向他们表示感谢。

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_

## 附录 A 外文资料的调研阅读报告

Literature research contains two part. As the main object of the thesis is reviewing, I need to search for important early papers on CMB polarization and papers on experimental results. The literatures are sort into two parts: one is theoretical foundation and the other is experiment. I use ArXiv as main literature database and NoteExpress, Baidu Scholar and Google Scholar as tool to search.

In the article I will first review standard model for cosmology. I read Yu Yunqiang's Lecture<sup>[1]</sup> on Physical Cosmology and early papers by Einstein<sup>[2][3]</sup>, de Sitter<sup>[4]</sup> and Friedmann<sup>[5]</sup> for a brief knowledge on how cosmology begins as a discipline in physics. Then I read Xiang Shouping's *Formation of Large Scale Structure in the Universe*<sup>[6]</sup> for a basic knowledge on large scale structure and CMB anisotropy. I read Scott Dodelson's *Modern Cosmology*<sup>[7]</sup> and Patrick Peter's *Primordial Cosmology*<sup>[8]</sup> for detailed mathematical derivation on LSS and CMB.

From these textbooks, I realize that cosmology has become a science with robust physical basic and precise mathematical description. Cosmology also provide new physics and test results in other discipline in physics. It also rises new questions which are also interest people besides cosmologist. For example, dark matter and inflation are also questions in high energy physics; dark energy pushes some people search for modified gravity theories.

With the basic theoretical foundation for cosmology, I began to search for papers on my topic. I first read reviews on CMB as a whole topic which look back the history of CMB study and some early results<sup>[9]</sup>.

CMB was first predicted by Alpher and Herman in 1948<sup>[10]</sup> with the prediction with Standard Model for Cosmology and nuclearsynthesis theories. CMB is the afterflow from the big bang. It contains the first photons from the last scattering plane at recombination era. CMB was first detected by Penzias and Wilson occasionally in 1965<sup>[11]</sup> which is perfectly isotropic thus confirmed the Thermal Big Bang model.

In 1989, NASA launched COBE which first detected the anisotropies of CMB temperature signal (Smoot, 1992). COBE is the first generation of CMB experiment. Then WMAP improved precision and gave better constrain to cosmological parameters (Xia, 2014) from 2000 to 2010. Now Planck satellite is the third generation of space CMB telescope and has been providing better data (Planck Collaboration, 2009) and better constrain on foreground contamination.

The cosmological significance on CMB study lies in its capability to constrain cosmological parameters and study the physics of early universe and the evolution of large scale structure. The great improvement of angular resolution provides more and more precise measurement on CMB angular power spectrum and the constrain on parameters becomes more and more strict due to both the improvement of instruction and method on data development.

Research on polarization of CMB began in 1980s<sup>[12]</sup> and matured in 1997. Papers by Zaldarriaga & Seljak<sup>[13]</sup>, Kamionkowski, Kosowsky & Stebbins<sup>[14]</sup> gives a clear description of CMB polarization on how we describe it and relate it with observation and cosmology. Reviews on CMB polarization show us and overall theoretical foundation of this topic<sup>[15][16][17]</sup>.

The physics of CMB anisotropies and polarization is not difficult and contains now new one. The value of CMB polarization on cosmological research lies in its potential on testing inflation model. The angular spectrum of CMB polarization can be divided to E and B modes with different parities. B mode has been proved to be the imprint on CMB of primordial gravitational wave which was generated on the quantum oscillation during the inflation era. So the detection of B mode can help us constrain inflation parameters and break degeneration rule out models.

CMB polarization experiment began at early 2000's. As the polarized signal of CMB is very weak compared to anisotropy signal (around 10%), the detection is difficult. Carlstrom et.al published a review on early CMB polarization experiments<sup>[18]</sup> which shows us status of early experiments before DASI. DASI first detected E-mode and ET cross spectrum<sup>[19]</sup>. From then on, the main object on CMB polarization experiment is the detection of B-mode. Then several experiments like QUaD<sup>[20]</sup>, POLARBEAR<sup>[21]</sup>, QUBIC<sup>[22]</sup>, BICEP<sup>[23]</sup> greatly put forward the precision in detection

Last year BICEP2<sup>[24]</sup> reported its detection of CMB B-mode signal on degree scales. It gets tensor-to-scalar ratio to 0.2. This news greatly enlightened people at first, but doubt came about. This result is greatly above the constrain on  $r$  with early experiments and a large amount of inflation models. Then it was pointed out that the signal may be caused by polarized galactic dust emission instead of CMB<sup>[25][26]</sup>. They may also be caused by interstellar magnetic fields. On the other hand, Scott Dodelson published a paper in June, 2014 which points out the scientific object on CMB polarization experiment which is still valid for future studies.

Planck collaboration reported its intermediate results XXX<sup>[27]</sup> on polarized dust which shows that the signal received by BICEP2 is contaminated by signal from dust

(Planck XXX, 2014). Joint analysis between Planck and BICEP2 results<sup>[28]</sup> pointed out that the signal detected by BICEP2 is correlated with Planck pure dust signal. Thus proves that signal detected by BICEP2 is mainly from dust. So the interpretation on BICEP2 result as primordial GW imprint has been ruled out.

Besides reading papers, I also learn to use Code for Anisotropies in the Microwave Background<sup>[29]</sup> to draw angular power spectra for CMB temperature and polarization anisotropies at a given set of cosmological parameters.

## 参考文献

- [1] 俞允强.物理宇宙学讲义[M].北京大学出版社.2002
- [2] Einstein A. The Foundation of the Generalised Theory of Relativity[J]. On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light 1 On the Electrodynamics of Moving Bodies 10 The Development of Our Views on the Composition and Essence of Radiation 11 The Field Equations of Gravitation 19 The Foundation of the Generalised Theory of Relativity 22, 1916: 22.
- [3] Einstein A. Cosmological considerations on the general relativity theory[J]. Preussisch Akademie der Wissenschaften, Sitzungberichte, 1917: 142.
- [4] De Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis[J]. Proc. Kkl. Akad. Amsterdam, 1917, 19: 1217-1225.
- [5] Friedmann A. 125. On the Curvature of Space[J]. Zeitschrift für Physik, 1922, 10: 377-386.
- [6] 向守平, 冯珑珑.宇宙大尺度结构的形成[M].中国科学技术出版社.2012
- [7] Dodelson S. Modern cosmology[M]. Academic Press, 2003.
- [8] Peter P, Uzan J. Primordial Cosmology[M]. Great Britian: Oxford University Press, 2009.
- [9] Xia, J., Cosmic Microwave Background, in Modern Astrophysics, T. Lu, T. Lu^Editors. 2014, Peking University Press: Beijing. p. 91-120.
- [10] Alpher R A, Herman R. Evolution of the Universe[J]. Nature, 1948, 162(4124):774-775.
- [11] Penzias A A, Wilson R W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s[J]. The Astrophysical Journal, 1965, 142: 419-421.
- [12] Basko M M, Polnarev A G, Polnarev A G. Polarization and Anisotropy of the Primordial Radiation in an Anisotropic Universe[J]. Soviet Astronomy, 1980, (24).
- [13] Seljak U, Zaldarriaga M. Signature of Gravity Waves in the Polarization of the Microwave Background[J]. 1997.
- [14] Kamionkowski M, Kosowsky A, Stebbins A. Statistics of cosmic microwave background polarization[J]. 1997.
- [15] Zaldarriaga M. The Polarization of the Cosmic Microwave Background[J]. 2004.

- [16] Hu W, White M. A CMB polarization primer[J]. 1997.
- [17] Kaplan J, Delabrouille J, Fosalba P, et al. CMB polarization as complementary information to anisotropies[J]. *Comptes Rendus Physique*, 2003, volume 4(8):917-924(8).
- [18] Carlstrom J E, Kovac J, Leitch E M, et al. Status of CMB polarization measurements from DASI and other experiments[J]. 2003.
- [19] Kovac J M, Leitch E M, Pryke C, et al. Detection of polarization in the cosmic microwave background using DASI[J]. *Nature*, 2002, 420(6917):págs. 772-787.
- [20] Bowden M, Taylor A N, Ganga K M, et al. Measuring the cosmic microwave background polarization with the QUaD experiment[C]. *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation. International Society for Optics and Photonics*, 2004: 84-94.
- [21] Lee A T, Tran H, Ade P, et al. POLARBEAR: Ultra - high Energy Physics with Measurements of CMB Polarization[J]. *KEK COSMOPHYSICS GROUP INAUGURAL CONFERENCE ``ACCELERATORS IN THE UNIVERSE``: Interplay between High Energy Physics and Cosmophysics. AIP Conference Proceedings*, 2008, 1040(1):66-77.
- [22] Battistelli E, Baú A, Bennett D, et al. QUBIC: The QU Bolometric Interferometer for Cosmology[J]. *Journal of Low Temperature Physics*, 2010, 34(9):705–716.
- [23] Keating B G, Ade P A R, Bock J J, et al. BICEP: a large angular scale CMB polarimeter[C]//*Astronomical Telescopes and Instrumentation. International Society for Optics and Photonics*, 2003: 284-295.
- [24] Ade P A R, Aikin R W, Barkats D, et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales[J]. *Phys.rev.lett*, 2014, 112.
- [25] Mortonson M J, Seljak U. A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization uncertainty[J]. 2014:12.
- [26] Flauger R, Hill J C, Spergel D N. Toward an understanding of foreground emission in the BICEP2 region[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014, 2014(08): 039.
- [27] Collaboration P, Adam R, Ade P A R, et al. Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes[J]. *Eprint Arxiv*, 2014.
- [28] Ade,02P.02A.02R, Aghanim,02N, Ahmed,02Z, et al. Joint Analysis of BICEP2 /KeckArray and Planck Data[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(10).
- [29] Lewis A, Challinor A. Code for Anisotropies in the Microwave Background[J]. online](19/06/2006) Disponible en: <http://camb.info>.

## 附录 B 带自旋权重的球谐函数

带自旋权重  $s$  的函数被定义为：在绕  $z$  轴旋转  $\psi$  角下满足的旋转变换为  ${}_s f'(\theta, \phi) = e^{-2is\psi} {}_s f(\theta, \phi)$  的函数。它们能够用带自旋权重  $s$  的球谐函数展开。自旋权重  $s$  的球谐函数满足的归一化条件为：

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi {}_s Y_{lm}^*(\theta, \phi) {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{lm} {}_s Y_{lm}^*(\theta, \phi) {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) &= \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

就像我们在量子力学中处理自旋那样，我们可以对球谐函数定义升降算符  $\partial^\pm$ ，它能够将自旋权重  $s$  的函数升(或降)为自旋权重  $s+1$ (或  $s-1$ )的函数。因此在旋转变换下满足  $(\partial^\pm {}_s f)' = e^{-2i(s\pm 1)\psi} \partial^\pm {}_s f(\theta, \phi)$ 。升降算符的表达式为：

$$\partial^\pm \equiv -\sin^\pm \theta \left( \partial_\theta \pm \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \sin^\pm \theta \quad (\text{A-2})$$

对自旋权重  $s$  的球谐函数使用升降算符，重复在量子力学及  $\text{SO}(3)$  群的表示中类似的计算方法，可以得到一个熟悉的表达式：

$$\partial^\pm {}_s Y_{lm} = \pm \sqrt{(l \mp s)(l \pm 1 \pm s)} {}_{s\pm 1} Y_{lm} \quad (\text{A-3})$$

反复地将升算符作用到自旋权重 0 的球谐函数(即一般的球谐函数)上可得：

$${}_s Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}} (\partial^+)^s {}_0 Y_{lm} \quad (\text{A-4})$$

对于自旋权重为 2 的球谐函数：

$${}_2 Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} (\partial^\pm)^2 {}_0 Y_{lm} \quad (\text{A-5})$$

普通的球谐函数在平面近似(即  $l \rightarrow +\infty$ )时有： $Y_{lm} \rightarrow e^{i\vec{l} \cdot \vec{n}}$ 。故在平面近似下自旋权重为 2 的球谐函数近似为：



$${}_2Y_{lm} \rightarrow \frac{1}{l^2} (\partial^\pm)^2 e^{i\vec{l} \cdot \vec{n}} = -e^{\pm 2i(\phi - \phi_l)} e^{i\vec{l} \cdot \vec{n}} \quad (\text{A-6})$$

旋转坐标，使得  $\phi = 0$ ，此时  ${}_2Y_{lm} \rightarrow -e^{\pm 2i\phi} e^{i\vec{l} \cdot \vec{n}}$ 。这证明了(2-20 式)。

#### 参考文献

- [1] Penrose E T N 和. Note on the Bondi-Metzner-Sachs Group[J]. Journal of Mathematical Physics, 1966,7(5):863.
- [2] Petet P, Uzan J. Primordial Cosmology[M]. Great Britian: Oxford University Press, 2009.