高等代数
2022-2023第一学期
期末总复习

行 列 式

第二章 行列式

n阶行列式的定义

★行列式的计算

- 1)行列式的性质(拆列)
- 2)化成上三角行列式
- 3)各行加到第一行
- 4)展开定理降阶
- 5)递推法　7)归纳法
- 6)加边法　8)范德蒙行列式

行列式的应用

- 求A^{-1}：行变换，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　★$AA^*=|A|E$
- Cramer法则：$|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=b$有唯一解
  $|A|=0 \Leftrightarrow Ax=0$有非零解

结论：$|AB|=|A||B|$，$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -14 & -7 & -7 \\ 0 & 26 & 13 & 19 \\ 0 & -8 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 26 & 13 & 19 \\ 0 & -8 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -84.$$

计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$D_n=2D_{n-1}+\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

于是 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$.

因此 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=3-2=1$

所以 $D_n-D_1=n-1$

最后可得 $D_n=n+1$.

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

答案 $1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

向量空间

第三章 向量空间：

3.1 向量空间的概念： 向量空间V(对加法，数乘封闭)

3.3 向量组的秩

1) 向量空间V中向量的表示方法：基 维数 坐标 基 不唯一，等价

找V中的一个基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 则 $\forall\alpha\in V$ $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$

2) 同一向量在不同基下坐标的关系： $\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_r\beta_r$

基变换公式： $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P$

坐标变换公式：$(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T=P^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$

3) 找最好的基----标准正交基：向量空间V $\xrightarrow{\text{内积}}$ 欧氏空间

$$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_re_r \quad x_i=(\alpha,e_i)$$

施密特正交化： $\underset{\text{线性无关}}{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}\longrightarrow\underset{\text{两两正交}}{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r}\longrightarrow\underset{\text{标准正交基}}{e_1,e_2,\cdots,e_r}$

4) 当向量空间V $=span(A)=span(A_0)$，A_0是V的基。

- 求A的极大无关组A_0： $A\xrightarrow{\text{行变换}}B$ 行简化阶梯阵

3.2 向量的线性关系--3.3 极大无关组（准备）：

(1)向量与向量组的关系：$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,\ \beta \in V$

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \Leftrightarrow \beta \in span(A)$$

(2)两个向量组的关系：A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$；$B$：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价

$$\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = \mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$$

(3)向量组的线性相关：A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 若存在一组不全为零的数

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$

线性无关：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 \cdots = k_m = 0.$

向量组的极大无关组：$A: \underline{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r}, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$

A_0 线性无关　A 可由 A_0 线性表示

作用：$\mathrm{span}\{A\} = \mathrm{span}\{A_0\}$

向量组的秩：向量组极大无关组所含向量的个数

定理3.3 向量 b 可由A: $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示

$\Leftrightarrow$方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=b$有解.

定理3.5 $A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B\Rightarrow$ A与B的行向量组等价

定理3.7 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.13 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9 向量组线性无关, 添加分量所得向量组 线性无关

定理3.10 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关, $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关,

则向量β必可由 A线性表示, 且表示法惟一.

定理3.11 (1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ (1)可由(2)线性表示,

(2)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 若$r>s$, 则向量组(1)线性相关.

定理3.11 (1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ (1)可由(2)线性表示,

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 若$r>s$, 则向量组(1)线性相关.

推论1 若向量组(1) 线性无关, 则 $r\leq s$.

推论2 两个等价线性无关向量组所含向量的个数相同.

定理3.14 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则 $r(A)\leq r(B)$

推论 等价的向量组有相同的秩.

极大无关组的若干结论:

(1) 向量组 A 与它的极大无关组 A_0 等价.

(2) 若向量组的秩是 r,则 A 中任意 r+1 个向量 线性相关.

则任意 r 个线性无关的向量都是 极大无关组.

(3) A 组的极大无关组不惟一, 但 所有极大无关组等价.

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}.$$

试问 a,b,c 满足什么条件时，

（1） β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一？

（2） β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

（3） β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一．并求出一般表达式.

事实上，本题就是讨论线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta. \qquad (*)$$

即

$$\begin{cases}ax_1-2x_2-x_3=1\\2x_1+x_2+x_3=b\\10x_1+5x_2+4x_3=c\end{cases}$$

的解的情况。

解法 1:此方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=-(a+4)$$

(1) 当 $a\neq -4$ 时，$|A|\neq 0$．依克莱姆法则，方程组有唯一解，即 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，且表示法唯一.

(2) 当 $a=-4$ 时，对方程组系数矩阵的增广矩阵进行初等行变换:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & -1 & 0 & 1+b \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 4 & 5+5b+c \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b+c \end{array}\right]$$

当 $3b-c\neq 1$ 时，$rank(A)=2<3=rank(\overline{A})$，方程组无解，$\beta$ 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

(3) 当 $\begin{cases} a=-4 \\ 3b-c=1 \end{cases}$ 时，$rank(A)=rank(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解．$\beta$ 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，但表示法不唯一．此时，进一步有

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]，即\begin{cases} 2x_1+x_2=-1-b \\ x_3=1+2b \end{cases}\to\begin{cases} x_2=-1-b-2x_1 \\ x_3=1+2b \end{cases}(x_1为任意常数)$$

此时，$\beta=x_1\alpha_1-(1+b+2x_1)\alpha_2+(1+2b)\alpha_3$（$x_1$为任意常数）.

解法 2：方程组（*）的增广矩阵为

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]=\begin{bmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{bmatrix}$$

对增广矩阵作初等行变换

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]=\begin{bmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & -2-\frac{1}{2}a & -1-\frac{1}{2}a & 1-\frac{1}{2}ab \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b \\ 0 & -2-\frac{1}{2}a & -1-\frac{1}{2}a & 1-\frac{1}{2}ab \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}$$

于是

【1】当 $-2-\frac{1}{2}a\neq 0$ 即 $a\neq -4$ 时，系数矩阵与增广矩阵的秩均为 3，所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一.

【2】当 $a=-4$ 时

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b \end{bmatrix}$$

所以，（1）当 $a=-4$，$3b-c\neq 1$ 时，β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（2）当 $a=-4$，$3b-c=1$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一。由于此时方程组的通解为

$$x_1=-\frac{1}{2}x_2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\right),x_3=1+2b$$

所以有

$$\beta=\left[-\frac{1}{2}x_2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\right)\right]\alpha_1+x_2\alpha_2+(1+2b)\alpha_3.$$

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩，

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价.

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,L\ ,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,L\ \alpha_r,\alpha_{r+1},L\ ,\alpha_s$有相同秩，所以它们的极大线性无关组所含向量个数相等，又向量组$\alpha_1,\alpha_2,L\ ,\alpha_r$包含在向量组$\alpha_1,\alpha_2,L\ \alpha_r,\alpha_{r+1},L\ ,\alpha_s$中，所以$\alpha_1,\alpha_2,L\ ,\alpha_r$的极大线性无关组也是$\alpha_1,\alpha_2,L\ \alpha_r,\alpha_{r+1},L\ ,\alpha_s$的极大线性无关组，即它们有相同的极大线性无关组.

又因为向量组与它的极大线性无关组等价，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,L\ ,\alpha_r$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,L\ \alpha_r,\alpha_{r+1},L\ ,\alpha_s$等价.

四.（14 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=0, \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3, \\ (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda, \end{cases}$

问λ取何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

答案 (1) $\lambda=0$时无解

(2) $\lambda=-3$时有无穷个解，通解为$X=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$.

(3)其余情况均有唯一解.

线性方程组

第四章 线性方程组

齐次线性方程组：$Ax=0$

$$r(A)\begin{cases}=n, Ax=0\text{有唯一解}\text{---零解}\\<n, Ax=0\text{有无穷多解}\end{cases}$$

通解：$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$

★非齐次线性方程组：$Ax=b$

$$Ax=b\text{有解}\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases}=n,\text{有唯一解}\\<n,\text{有无穷多解}\end{cases}$$

$$Ax=b\text{无解}\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)$$

通解：$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}+\eta^*$

例 7　线性方程组$\begin{cases}\lambda x+9y+3z=2,\\ -x+(\lambda-1)y=\lambda,\\ 3x-y+z=-4,\end{cases}$ 当λ取何值时方程组有

1) 唯一解，并求其解;

2) 无穷多解，并求出该非齐次线性方程组的一般解;

3) 无解.

解：　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 9 & 3\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+21=(\lambda-3)(\lambda-7)$$

(1) 当$\lambda\neq 3,\lambda\neq 7$，方程组有唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{\lambda-3},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\lambda-2}{\lambda-3},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3\lambda-4}{\lambda-3}$$

(2) 当$\lambda=7$时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}7&9&3&2\\-1&6&0&7\\3&-1&1&-4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1&6&0&7\\7&9&3&2\\3&-1&1&-4\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1&6&0&7\\0&51&3&51\\0&17&1&17\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1&6&0&7\\0&17&1&17\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

秩$(\bar{A})=$ 秩(A)，得

$$\begin{cases}-x_1+6x_2=7\\17x_2+x_3=17\end{cases}$$

方程组的一个特解为$\alpha_0=(-7,0,17)^T$，导出组的基础解系为

$\eta=(6,1,-17)^T$. 于是当$\lambda=7$时，方程组有无穷多解，一般解为

$$\alpha=\alpha_0+k\eta=\begin{pmatrix}-7\\0\\17\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}6\\1\\-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6k-7\\k\\-17k+17\end{pmatrix}.$$

(3) 当$\lambda=3$时，

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 9 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & 3 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

秩$(\overline{A}) \neq$ 秩(A)，方程组无解.

课后练习 讨论a, b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$

有唯一解；无解；无穷多解，当有无穷多解时，求出通解.

例 10 设$A\in P^{m\times n}$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是线性方程组$AX=0$的基础解系，$B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$. 证明：如果$AC=O$，那么存在唯一的矩阵$D$，使$C=BD$(其中$C\in P^{n\times t}$).

证明： 存在性. 令$C=(C_1,C_2,\cdots,C_t)$

$$AC=A(C_1,C_2,\cdots,C_t)=(AC_1,AC_2,\cdots,AC_t)=(0,0,\cdots,0).$$

于是$AC_i=0,i=1,2,\ \cdots,t$，而$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$AX=0$的基础解系，那么$C_i$可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t}$线性表示，令

$$C_i = d_{1i}\eta_1 + d_{2i}\eta_2 + \cdots + d_{n-r,i}\eta_{n-r} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{n-r,i} \end{pmatrix}$$

于是

$$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-r,1} & d_{n-r,2} & \cdots & d_{n-r,t} \end{pmatrix}$$
$$= BD$$

唯一性. 假定还有$F \in P^{(n-r)\times t}$，使$C = BF$，又$C = BD$，于是$B(D-F) = O$，$D-F$的列向量是以B为系数矩阵的齐次线性方程组$BX = O$的解，而B是列满秩的. 于是$BX = O$只有零解，所以$D - F = O$，即$D = F$.

五、（10 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$，求此向量组的秩与一个极大无关组, 并将其余向量用所求的极大无关组线性表示。

五、 求极大无关组并表示其余向量

答案 （1）$r=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ （2）$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$

解析 略

六（12 分）已知 $x_1=(0,1,0)^T$， $x_2=(-3,2,2)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解，求此方程组的一般解．其中 a,b,c,d 是适当的常数.

矩 阵

第一章 矩阵

矩阵运算

- $A\pm B$, λA, AB, A^T，A的分块
- ★A^{-1}
  - 概念：$AB=E\Rightarrow A^{-1}=B, B^{-1}=A$
  - 性质：$(A^{-1})^{-1}=A$, $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}, (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T, (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$
    $|A|\neq 0$, $r(A)=n$, 特征值$\lambda\neq 0$
  - 计算：行变换
  - 结论：A可逆$\Leftrightarrow A=P_1P_2\cdots P_s(Th1.10)$, $A\xrightarrow{\text{行变换}}E$
- ★行变换 $A\to B$ $r(A)=r(B)$
  - 求解$Ax=b$
  - 求A^{-1} $(A,E)\to(E,A^{-1})$
  - 求解$Ax=B$ $(A,B)\to(E,A^{-1}B)$
  - 求$r(A)$
  - 求列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组和秩$ch3)$

矩阵的秩

定义：

1) $r(A)=A$的行秩$=A$的列秩

结论：

2) 方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A)=n$

$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow A$的行列向量组 线性无关

3) $r(A)=r \Leftrightarrow A$中有一个r阶子式 $\neq 0$, 所有$r+1$阶子式都$=0$

4) $D_r \neq 0$ 所在的行列是A的行列向量组的 极大无关组

5) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$, $r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)$.

$r(A)=r(A^T)$

计算：行变换

应用：

$r(A)$是 $Ax=0$ 中有效方程的个数

$r(A,b)=r(A)$是 $Ax=b$ 中有效方程的个数

判断线性相关性：

$$\text{向量组 } \alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix},$$

(1) 当 $n < s$, 线性相关.

(2) 当 $n = s$,

当 $|A| \neq 0$, 线性无关.

当 $|A| = 0$, 线性相关.

(3) 当 $n > s$,

$A \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行阶梯阵

非零行数 $= s$, 线性无关.

非零行数 $< s$, 线性相关.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix}$$

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&0\\3&2&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&7&3\end{pmatrix}$，则

$rank(BAC)=$____________.

2．设 α 为 3 维列向量，α^T 为 α 的转置，并且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则

$\alpha^T\alpha=$______________.

3．设 A 是三阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得到 B，再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（　　　　）.

A. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

4. 设$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$，$A$、$C$分别是$m$阶与$n$阶可逆方阵，则$D$的伴随矩阵

$D^* =$____________ .

5. 若$A^2=E,E$为单位矩阵，则有(　　　　　　　　).

(A)　$A+E$可逆　　　　(B)　$A-E$可逆

(C)　$A\neq E$时，$A+E$不可逆　　　　(D)　$A\neq E$时，$A+E$可逆

6. 设三阶方阵 A,X 满足等式 $A^2X-A-X=E$，且 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $|X|=$ ________.

五(14 分)、给定向量组

$$\alpha_1=(1,1,0,-1),\quad \alpha_2=(2,-2,0,2),\quad \alpha_3=(1,0,0,1),\quad \alpha_4=(7,-3,0,11),\quad \alpha_5=(2,0,5,4)$$

(1) 求该向量组的秩；(2) 求该向量组的一个极大线性无关组；(3) 用所求的极大线性无关组来表示其余向量.

三(12 分)、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$，求所有使得 $AB=BA$ 的矩阵 B.

设$A \in R^{m \times n}$，证明$rank(A) = rank(A^T A) = rank(AA^T)$。

证明：（1）$rank(A) = rank(A^T A)$

只需证明方程$AX = 0$与$A^T AX = 0$同解即可。

显然，若x_0是$AX = 0$的解，则必是$A^T AX = 0$的解。

反之，若x_0是$A^T AX = 0$的解，则由$A^T Ax_0 = 0 \Rightarrow x_0^T A^T Ax_0 = 0$

即$(Ax_0)^T Ax_0 = 0 \Rightarrow Ax_0 = 0$,即$x_0$为$AX = 0$的解。

基于此，方程$AX = 0$与$A^T AX = 0$同解。它们的基础解系的个数完全相同。

即$n - rank(A) = n - rank(A^T A)$，从而$rank(A) = rank(A^T A)$

（2）$rank(A) = rank(AA^T)$

由于$rank(A) = rank(A^T)$

则由（1）可知$rank(A) = rank(A^T) = rank(AA^T)$.证毕

设$A\in P^{s\times n}$，证明：对任意矩阵$B\in P^{s\times m}$，矩阵方程$AX=B$有解的充要条件是$rank(A)=s.$($rank(A)$表示矩阵A的秩)

证明：必要性。取矩阵B，使$rank(B)=s$，则$\exists X_0\in P^{n\times m}$，使$AX_0=B$,则

$$rank(A)\geq rank(B)=s$$

而$A\in P^{s\times n}$，则$rank(A)\leq s$，从而$rank(A)=s$

充分性。令$B=(B_1,B_2,\cdots B_m)$，对n元线性方程组$AX=B_j$,有

$$rank(A)\geq rank(A,B_j)=s$$

方程组$AX=B_j$有解$x_j,j=1,2,\cdots m$

令$X_0=(x_1,x_2,\cdots x_m)$，则 X_0是矩阵方程$AX=B$的解

证毕

令A为n阶方阵，$A+E$可逆，且$f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$

试证明：(1)$(E+f(A))(E+A)=2E$（2）$f(f(A))=A$

证明：（1）由条件已知$f(A)(E+A)=E-A$，所以

$$(E+f(A))(E+A)=E+A+f(A)(E+A)$$

$$=E+A+E-A=2E$$

（2）由（1）可知$(E+f(A))^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$且$f(A)(E+A)=E-A$

$$f(f(A))=[E-f(A)][E+f(A)]^{-1}=[E-f(A)]\cdot\frac{1}{2}(E+A)$$

$$=\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}f(A)(E+A)=\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}(E-A)=A$$

例 9 设A是一个n阶方阵，A^*是它的伴随矩阵，如果存在n维非零列向量α，满足$A\alpha = 0$. 证明：非齐次线性方程组$A^*X = \alpha$有解当且仅当$rank(A) = n - 1$.

证明： **必要性.** 由齐次线性方程组$AX = 0$有非零解α，那么秩$(A) \le n - 1$. 又由$A^*X = \alpha$有解，知$A^* \neq O$，那么A中至少有一个$n - 1$阶子式不为零，所以秩$(A) \ge n - 1$，因而$rank(A) = n - 1$.

充分性. 秩$(A) = n - 1$，而$\alpha \neq 0$，$A\alpha \neq 0$，那么α是齐次线性方程组$AX = 0$的一个基础解系，而$AA^* = O$，A^*的列向量是齐次线性方程组$AX = 0$的解，于是A^*的列向量可由α线性表示，那么秩$(A^*) =$秩$(A^*, \alpha) = 1$，所以$A^*X = \alpha$有解.

例 13 A, B是n阶矩阵，证明：

（1）$r(A-ABA)=r(A)+r(E_n-BA)-n$;

（2）若$A+B=E_n$，且$r(A)+r(B)=n$，则$A^2=A$，$B^2=B$，且$AB=O=BA$.

相关知识点：矩阵分块、初等分块矩阵

证明： （1）**法一：** 构造分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ O & E_n - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ BA & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ BA & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - ABA & O \\ BA & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A - ABA & O \\ BA & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -BA & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - ABA & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

于是$rank(A) + rank(E_n - BA) = rank\left[\begin{pmatrix} A & A \\ O & E_n - BA \end{pmatrix}\right]$

$$= rank\left[\begin{pmatrix} A - ABA & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\right] = rank(A - ABA) + rank(E_n)$$

因此$rank(A) + rank(E_n - BA) = rank(A - ABA) + n.$

法二： 找到中间一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E_n & BA \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & BA \\ O & A - ABA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & A - ABA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_n & BA \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - BA & O \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - BA & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

于是$rank(A - ABA) + n = rank(A) + rank(E_n - BA).$

（2）**法一：** 构造分块矩阵，由$A + B = E_n$，可知

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A + B & B \\ B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ O & B - B^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & B - B^2 \end{pmatrix}$$

于是$rank(A) + rank(B) = n + rank(B - B^2) = n$

因此$B^2 = B.$ 由A与B的对称性知，$A^2 = A.$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ A + B & B + AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ E_n & B + AB \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} E_n & B \\ O & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}$$

从而$AB = O.$ 由AB的对称性知，$BA = O.$

法二：利用1）的结论.

$$n = rank(A) + rank(B) = rank(A) + rank(E_n - A)$$

$$rank(A - A^2) = rank(A) + rank(E_n - A) - n = 0$$

所以$A^2 = A.$ 同理可证其他等式.

例 15 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

解：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 17 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

给定向量组

$$\alpha_1=(1,2,3,2),\alpha_2=(-2,1,-2,-5),\alpha_3=(1,-1,-1,1)$$

$$\alpha_4=(-1,2,1,-2),\alpha_5=(1,-3,-2,2),$$

(1) 求该向量组的秩；　　(2) 求该向量组的一个极大线性无关组；

(3) 用所求的极大线性无关组来表示其余向量.

解：将向量组排成列向量，因此可得矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

对矩阵A作初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5\\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5\\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(1)　向量组的秩为 3.

(2)　向量组的一个极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(3)　$\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3$,

$\alpha_4=-\frac{7}{8}\alpha_1-\frac{5}{8}\alpha_2+\frac{5}{8}\alpha_3$.

四、（10分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&5&4\\3&1&2\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$。

1、求伴随矩阵 A^*；　　2、求矩阵 X，使得 $XA=B$。

四、　解矩阵方程

答案　(1) $\begin{pmatrix}-5&-1&6\\-3&0&4\\9&-1&-11\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}4&0&-5\\0&1&0\end{pmatrix}$

解析　略

线 性 空 间

1、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， α_1，α_2 是 V_1 的一组基， β_1，β_2，β_3 是 V_2 的一组基， 且 $\sigma(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \sigma(\alpha_2) = 0$

（1） σ 的矩阵是（ B ） $(A)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

（2） $\operatorname{Im}\sigma =$ （ B ） $(A)\ span\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $(B)\ span\{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}$

（3） $\ker\sigma =$ （ A ） $(A)\ span\{\alpha_2\}$ $(B)\ \{0\}$； （4） $\dim(\ker\sigma) =$ （ 1 ）

2、设 $\sigma \in L(V)$，设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基，且， $\sigma(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_3, \sigma(\alpha_3) = \alpha_3 + \alpha_1$

（1） σ 的矩阵是（ A ） $(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

（2）秩$(\sigma) =$ （ 3 ）；（3） $\ker\sigma =$ （ $\{0\}$ ）；（4） σ 是否可逆？（ 是 ）

1、设$\sigma \in L(V_1, V_2)$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$V_1$的一组基，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$V_2$的一组基且，

$$\sigma(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2, \sigma(\alpha_2) = \beta_2 + \beta_3, \sigma(\alpha_3) = \beta_3 + \beta_1$$

计算：（1）线性映射σ的矩阵（$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$）；（2）$\operatorname{Im}\sigma$（$V_2$）；（3）$\ker\sigma$（$\{0\}$）

4、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$是5维线性空间$V$的一组基，$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$V_2=span\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$.

（1）求$V_1\cap V_2$；（2）证明：$V_1+V_2=V$，并问V_1+V_2是否是直和.

解：（1）设$\alpha\in V_1\cap V_2$，则有$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=l_1\alpha_3+l_2\alpha_4+l_3\alpha_5$，即，

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\left(k_3-l_1\right)\alpha_3-l_2\alpha_4-l_3\alpha_5=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关，所以$k_1=k_2=\left(k_3-l_1\right)=l_2=l_3=0$，因此$\alpha=k_3\alpha_3\in span\{\alpha_3\}$，

所以$V_1\cap V_2\subset span\{\alpha_3\}$，显然有$span\{\alpha_3\}\subset V_1\cap V_2$，所以$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}$

（2）V_1+V_2不是直和，这是因为$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}\neq\{0\}$

5、设线性空间 V 的两个线性变换 σ 和 τ 是可交换的（即，对任何 $\alpha \in V$，有 $(\tau\sigma)(\alpha)=\tau[\sigma(\alpha)]=\sigma[\tau(\alpha)]=(\sigma\tau)(\alpha)$）. 证明：$\sigma$ 的值域 $\sigma(V)$ 是 τ 的不变子空间.

证明：任取 $\alpha \in \sigma(V)$，则存在 $\beta \in V$，使得 $\alpha=\sigma(\beta)$，于是，

$$\tau(\alpha)=\tau[\sigma(\beta)]=(\tau\sigma)(\beta)=(\sigma\tau)(\beta)=\sigma[\tau(\alpha)]\in\sigma(V)$$

所以，$\sigma(V)$ 是 τ 的不变子空间.

设W是P^n的一个非零子空间，若对于W的每一个向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$来说，或者$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或者每一个α_i都不等于零，证明：维$(W)=1$

证明：由W是P^n的一个非零子空间，可得W中含有非零向量设若对于W的每一个向量

设W设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$

是W中的任两个非零向量，由题意可得每一个a_i,b_i都不等于零

$b_1\alpha-a_1\beta=b_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)-a_1(b_1,b_2,\cdots b_n)=(0,b_1a_2-a_1b_2,\cdots,b_1a_n-a_1b_n)\in W$

由题设条件由$b_1a_2-a_1b_2=\cdots=b_1a_n-a_1b_n=0$，即有$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

即W中任两个非零向量均成比例，因此维$(W)=1$

证毕

四、证明题

1.V 为定义在实数域上的函数构成的线性空间，令

$$W_1=\{f(x)\mid f(x)\in V, f(x)=f(-x)\},$$

$$W_2=\{f(x)\mid f(x)\in V, f(x)=-f(-x)\}$$

证明：W_1、W_2 皆为 V 的子空间，且 $V=W_1\oplus W_2$.

证明：W_1、W_2 分别为偶函数全体及奇函数全体构成的集合，显然 W_1、W_2 均为非空的.由奇偶函数的性质可得 W_1、W_2 皆为 V 的子空间.

$$\forall f(x)\in V, f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

而 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}\in W_1, \frac{f(x)-f(-x)}{2}\in W_2$，因此 $V=W_1+W_2$. 又 $W_1\cap W_2=\{0\}$. 所以 $V=W_1\oplus W_2$.