______线性代数____试卷（2）

院(系)________ 班级__________ 学号__________ 姓名_________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩85%	平时成绩占15%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
阅卷												
审核												

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1．设α,β,γ 均为三维列向量，$\boldsymbol{A}=(\alpha,\beta,\gamma)$，$\boldsymbol{B}=(\gamma+2\alpha,\beta,3\alpha)$，已知$|\boldsymbol{A}|=4$，则$|\boldsymbol{B}|=$________。

2．设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆矩阵，则$(k\boldsymbol{A})^*=$________$\boldsymbol{A}^*$。

3．设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\4&0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$。

4．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&-3\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}$有一特征值$\lambda=6$，则$a=$________。

5. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定，则t应满足的条件是________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，则$|-2\boldsymbol{A}|=$

【A】$-2|\boldsymbol{A}|$ 【B】$2|\boldsymbol{A}|$ 【C】$-8|\boldsymbol{A}|$ 【D】$8|\boldsymbol{A}|$

2. 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1}$线性

表示，记向量组(II) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1},\beta$，则 α_m （　　　）

【A】既不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示
【B】不能由（I）线性表示，但可由（II）线性表示
【C】可由（I）线性表示，也可由（II）线性表示
【D】可由（I）线性表示，但不可由（II）线性表示

3．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则
【A】存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA=B}$
【B】存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{AP=B}$
【C】存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP=B}$
【D】存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ=B}$

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为（　　）

【A】$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　　　【B】$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$

【C】$2\alpha_2-\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$　　　　【D】$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2,-\alpha_1-2\alpha_3$

5．设 $\boldsymbol{A,B}$ 均为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，则矩阵 $(2\boldsymbol{B})^{-1}$ 的特征值为（　　　）

【A】2，4，6　　【B】1/2, 1/4, 1/6　　【C】1, 2, 3　　【D】2, 1, 2/3

三、(本题每小题 6 分共 12 分)

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

2．用数学归纳法证明 $D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

（注：n 阶行列式，其他未给出的全是 0）

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊　装订线内不得答题

四（12 分）求向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}5\\2\\3\\0\end{pmatrix}，\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\\4\end{pmatrix}，\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\4\end{pmatrix}，\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

的秩与一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

五、（12 分）设线性方程组 $\begin{cases}(3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=0\\ -3x_1+3x_2-(1+\lambda)x_3=\lambda+1\end{cases}$

1） λ 为何值时，方程组有唯一解？并求此时的解；

2） λ 为何值时，方程组无解？

2） λ 为何值时，方程组有无穷多解？并求其通解。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

六（14 分）已知$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\alpha\alpha^{T}$，求一个正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵。

七、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+cx_3^2+2dx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

1）写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2）若 $\alpha=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，求出 c 和 d 以及 α 对应的特征值 λ；

3）用配方法化二次型为标准型，并写出所做的线性变换。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

八、（10 分）

1）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$均为三维列向量，且向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

2）设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$。

线性代数 试卷(2) 答案

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1) $\underline{-12}$　　2) $\underline{k^{n-1}}$　　3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$　　4) $\underline{5}$　　5. $\underline{-1<t<1}$。

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1.【C】　　2.【B】　　3【D】　　4.【A】　　5.【B】

三、（本题每小题 6 分共 12 分）

1．解：　-226

2．　提示：$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$

四（12 分）

向量组的的秩为 3,　极大线性无关组可取 β_1,β_2,β_3，且 $\beta_4 = \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_3$

五、（12 分）解：

（1）$\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时方程组有唯一解；

$$x_1 = \frac{1}{\lambda-2}, x_2 = \frac{-1}{\lambda-2}, x_3 = -1$$

（2）$\lambda = 2$ 时，$r(A)=1$，而 $r(A|b)=2$，此时方程无解

（3）$\lambda = -1$ 时.

$r(A) = r(A|b) = 2$，方程有无穷多解，通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$　　k 为任意常数。

六（14 分）

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

七、1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ d & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$

2） $c=0,\ d=1,\ \boldsymbol{\lambda}=-1$

3） $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2.$ $\qquad \begin{cases} x_1=y_1-y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$