



高等代数习题课

2023.05.21

01

特征值与特征向量



1. 若方阵 A 满足 $|E + 2A| = 0$ 则矩阵 A 必有一个特征值为_____。
2. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解，且其系数矩阵 A 为 n 阶方阵，则 A 的一个特征值必为_____。
3. 设 3 阶矩阵 A 特征值为 $1, 2, 2$ ，则 $|4A^{-1} - E| = _____$ 。
4. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ，则 $|A^3 - 4A^2 + 2A| = _____$ 。
5. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ，则矩阵 $B = (2A^*)^{-1}$ 的特征值为_____。
6. 若三阶方阵 A 的秩是 2，则 A 的全部特征值的乘积为_____。
7. 若 4 阶方阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ，则行列式 $|B^{-1} - E| = _____$ 。
8. 若 4 阶方阵 A 与 B 相似， A 的特征值为 $2, 3, 4, 5$ ， E 为 4 阶单位阵，则 $|B - E| = _____$ 。
9. 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，且 $|A - 3E| = 0$ 则 $B^2 - 3E$ 的一个特征值为_____。
10. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ，且 A 有一特征值 $\lambda = 6$ ，则 $a = _____$ 。



- 若方阵 A 满足 $|E + 2A| = 0$ 则矩阵 A 必有一个特征值为 -1/2。
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解，且其系数矩阵 A 为 n 阶方阵，则 A 的一个特征值必为 0。
- 设 3 阶矩阵 A 特征值为 $1, 2, 2$ ，则 $|4A^{-1} - E| = \underline{3}$ 。
- 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ，则 $|A^3 - 4A^2 + 2A| = \underline{-28}$ 。
- 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ，则矩阵 $B = (2A^*)^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$ 。
- 若三阶方阵 A 的秩是 2，则 A 的全部特征值的乘积为 0。
- 若 4 阶方阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ，则行列式 $|B^{-1} - E| = \underline{24}$ 。
- 若 4 阶方阵 A 与 B 相似， A 的特征值为 $2, 3, 4, 5$ ， E 为 4 阶单位阵，则 $|B - E| = \underline{\quad}$ 。
- 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，且 $|A - 3E| = 0$ 则 $B^2 - 3E$ 的一个特征值为 6。
- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ，且 A 有一特征值 $\lambda = 6$ ，则 $a = \underline{5}$ 。



1. 设 A 为 n 阶矩阵 ($n \geq 3$)，下列命题正确的是_____.

- 【A】若存在数 λ 和向量 α ，使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ 成立，则向量 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量。
- 【B】矩阵 A 的两个不同的特征值可以有同一个特征向量。
- 【C】若存在数 λ 和非零向量 α ，使得 $(A - \lambda E)\alpha = 0$ 成立，则 λ 是矩阵 A 的特征值。
- 【D】若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个互不相同的特征值， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关。



1. 设 A 为 n 阶矩阵 ($n \geq 3$)，下列命题正确的是 C.

【A】若存在数 λ 和向量 α ，使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ 成立，则向量 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

【B】矩阵 A 的两个不同的特征值可以有同一个特征向量。

【C】若存在数 λ 和非零向量 α ，使得 $(A - \lambda E)\alpha = 0$ 成立，则 λ 是矩阵 A 的特征值。

【D】若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个互不相同的特征值， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关。



2. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 相似于对角矩阵的_____。
- 【A】充分必要条件 【B】充分而非必要条件
【C】必要而非充分条件 【D】既非充分也非必要
3. 方阵 A 与 B 相似的充分必要条件 _____。
- 【A】 A 与 B 有相同的行列式。 【B】存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$ 。
【C】 A 与 B 有相同的特征值。 【D】存在可逆矩阵 P , 使得 $A P = P B$ 。
4. 若矩阵 A 相似于 B , 则下列结论不正确的是 _____。
- 【A】 A 和 B 有相同的特征多项式 【B】 $|A| = |B|$
【C】 A 和 B 有相同的特征向量 【D】 $tr(A) = tr(B)$
5. 设 n 阶方阵 A 与 B 有相同的特征值, 则下列说法正确的是_____。
- 【A】 A 与 B 相似 【B】存在对角阵 Λ , 使 A , B 都相似于 Λ
【C】存在正交阵 Q , 使 $Q^T A Q = B$ 【D】 $|A| = |B|$



2. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 相似于对角矩阵的 。

- 【A】充分必要条件 【B】充分而非必要条件
【C】必要而非充分条件 【D】既非充分也非必要

3. 方阵 A 与 B 相似的充分必要条件 D 。

- 【A】 A 与 B 有相同的行列式。
 【B】 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$ 。
 【C】 A 与 B 有相同的特征值。
 【D】 存在可逆矩阵 P , 使得 $AP = PB$ 。

4. 若矩阵 A 相似于 B , 则下列结论不正确的是 C .

- 【A】 A 和 B 有相同的特征多项式 【B】 $|A| = |B|$
【C】 A 和 B 有相同的特征向量 【D】 $tr(A) = tr(B)$

注：

若 A 与 B 相似，则有：

5. 设 n 阶方阵 A 与 B 有相同的特征值，则下列说法正确的是 D 。

- 【A】 A 与 B 相似 【B】 存在对角阵 Λ , 使 A , B 都相似于 Λ
【C】 存在正交阵 Q , 使 $Q^T A Q = B$ 【D】 $|A| = |B|$



6. 设 2 为 n 阶可逆矩阵 A 的特征值，则矩阵 $(-3A^{-1})$ 必有一个特征值为_____。
- 【A】 $\frac{2}{3}$ 【B】 $-\frac{2}{3}$ 【C】 $\frac{3}{2}$ 【D】 $-\frac{3}{2}$
7. 设 A, B 均为三阶矩阵，且 A 与 B 相似，若 A 的特征值为 $1, 2, 3$ ，则矩阵 $(2B)^{-1}$ 的特征值为_____。
- 【A】 $2, 4, 6$ 【B】 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ 【C】 $1, 2, 3$ 【D】 $2, 1, \frac{2}{3}$
8. 设 $\lambda = 2$ 是可逆方阵 A 的一个特征值，则 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值为_____。
- 【A】 $\frac{4}{3}$ 【B】 $\frac{3}{4}$ 【C】 $\frac{1}{2}$ 【D】 $\frac{1}{4}$
9. 设3阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$ ， $B = A^2 - 2A + 3E$ ，则 $r(B)$ 为_____。
- 【A】 0 【B】 1 【C】 2 【D】 3



6. 设 2 为 n 阶可逆矩阵 A 的特征值，则矩阵 $(-3A^{-1})$ 必有一个特征值为D。

- 【A】 $\frac{2}{3}$ 【B】 $-\frac{2}{3}$ 【C】 $\frac{3}{2}$ 【D】 $-\frac{3}{2}$

7. 设 A, B 均为三阶矩阵，且 A 与 B 相似，若 A 的特征值为 $1, 2, 3$ ，则矩阵 $(2B)^{-1}$ 的特征值为B。

- 【A】 $2, 4, 6$ 【B】 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ 【C】 $1, 2, 3$ 【D】 $2, 1, \frac{2}{3}$

8. 设 $\lambda = 2$ 是可逆方阵 A 的一个特征值，则 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值为B。

- 【A】 $\frac{4}{3}$ 【B】 $\frac{3}{4}$ 【C】 $\frac{1}{2}$ 【D】 $\frac{1}{4}$

9. 设3阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$ ， $B = A^2 - 2A + 3E$ ，则 $r(B)$ 为D。

- 【A】 0 【B】 1 【C】 2 【D】 3



1. 设方阵A满足条件 $A^T A = E$ 其中 A^T 是A的转置矩阵，E为单位阵。设 λ 是A的特征值， $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是属于 λ 的实特征向量，试证明：

(I) $\lambda^2 x^T x = x^T x。$

(II) A的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于1。

证明：

(I) λ 是A的特征值， $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是属于 λ 的实特征向量，则 $Ax = \lambda x, x \neq 0$ (1)

两边取转置有 $x^T A^T = \lambda x^T$ (2)

(1)、(2)两式相乘得 $x^T A^T A x = \lambda^2 x^T x$

因为 $A^T A = E$, 故 $\lambda^2 x^T x = x^T x$

(II) 因此有 $(\lambda^2 - 1)x^T x = 0$

因为 $x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$, 从而 $\lambda^2 - 1 = 0$, 即 $|\lambda| = 1$ 。

证毕



2. 设 A 为 3 阶方阵, 向量 α_1, α_2 是 A 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$; 试证明:

(I) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$.

证明:

(I) 方法一:

向量 α_1, α_2 是 A 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 则 α_1, α_2 线性无关,
且 $A\alpha_1 = -\alpha_1$, $A\alpha_2 = \alpha_2$. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 两边同时乘 A 得:

$$\begin{aligned} A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) &= k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 \\ &= -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) \\ &= -k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \end{aligned}$$



2. 设 A 为 3 阶方阵, 向量 α_1, α_2 是 A 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$; 试证明:

- (I) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;
(II) 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$ 。

证明:

(I) 方法二(反证法):

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关则存在 t_1, t_2 使得 $\alpha_3 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$

则由已知条件得 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$ (1)

又有 $A\alpha_3 = A(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2) = -t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$ (2)

(1)-(2) 得 $2t_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, 与 α_1, α_2 线性无关矛盾。

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。



2. 设 A 为 3 阶方阵, 向量 α_1, α_2 是 A 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$; 试证明:

(I) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$.

解:

(II) $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 由(I)得 P 可逆, 且

$$AP = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 。

(1) 求出 A 的特征多项式；

(2) 求出 A 的特征值和特征向量；

(3) 求出一个可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 是对角形矩阵；

(4) 设多项式 $\varphi(x) = x^2 + 7x - 8$ ，计算 $\varphi(A)$ 。

解：

(1) A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda + 8)(\lambda - 1)^2$ 。

(2) 特征值为 $1, 1, -8$ 。

(3) 构造矩阵 $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -8 \end{pmatrix}$ 。

(4) 由于 $\varphi(\Lambda) = O$ ，因此 $\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1} = O$ 。



4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

- (1) 写出二次型矩阵 A ;
- (2) 若 $\alpha = (0, 1, -1)^T$ 是 A 的特征向量, 求出 c 和 d 以及 α 对应的特征值 λ ;
- (3) 用配比法化二次型为标准型, 并写出所做的线性变换。

解:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ d & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$(2) c = 0, d = 1, \lambda = -1$$

$$(3) f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$



5. 设向量 α 是矩阵 A 的一个特征向量, 其中 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & b & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解:

(1) $a = 2, b = 5$ 。

(2) $P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$



6. 设n阶矩阵A为奇数阶实对称阵，且 $|A| > 0$ 。证明：

- (1) A必有一个正的特征值；
- (2) 存在非零n为向量 x_0 ，使 $x_0^T Ax_0 > 0$ 。

证明：

(1) 反证法。

假设A没有正的特征值，则必有 $|A| \leq 0$ ，与题设不符，矛盾。

则可知假设不成立，即A必有一个正的特征值。

(2) 设该正的特征值为 λ_0 ，对应的特征向量为 x_0 ，

则有 $x_0^T Ax_0 = x_0^T \lambda_0 x_0 = \lambda_0 x_0^T x_0 > 0$

即证得 $x_0^T Ax_0 > 0$ 。

证毕



7. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

- (1) A 与 B 的特征向量是公共的；
- (2) A 相似于对角矩阵，当且仅当 B 相似于对角矩阵；
- (3) $r(A) = r(B)$ 。



7. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

(1) A与B的特征向量是公共的；

证明：(1) 设 α 为B的特征向量，对应的特征值为 λ_0 ，而 $B\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \neq 0$.

故 $A\alpha + B\alpha + AB\alpha = 0 \Rightarrow A\alpha + \lambda_0\alpha + \lambda_0A\alpha = 0 \Rightarrow (\lambda_0 + 1)A\alpha = -\lambda_0\alpha$.

若 $\lambda_0 \neq -1$ ，则 $A\alpha = -\frac{\lambda_0}{(\lambda_0+1)}\alpha$ ， α 为A的特征向量.

若 $\lambda_0 = 1$ ，而 $B\alpha = -\alpha$ 得 $-\alpha = 0$ ， $\alpha = 0$ 矛盾.

因为 $A + B + AB = 0$ ，

所以 $(A + E) + (A + E)B = E \Rightarrow (A + E)(E + B) = E$.

故 $(E + B)(A + E) = E$ ， $A + BA + A = 0$.

由上证明A得特征向量也是B的特征向量，

因而A与B的特征向量是公共的.



7. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A + B + AB = 0$, 则

- (1) A 与 B 的特征向量是公共的;
- (2) A 相似于对角矩阵, 当且仅当 B 相似于对角矩阵;

(2) 必要性

由 A 相似于对角矩阵, 因而存在可逆矩阵 T 使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow AT = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 则 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n.$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1}B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

所以 B 相似于对角矩阵
充分性 同上证明.



7. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

- (1) A 与 B 的特征向量是公共的；
- (2) A 相似于对角矩阵，当且仅当 B 相似于对角矩阵；
- (3) $r(A) = r(B)$.

则 $r(A) \geq r(B)$

同样 $(E+A)B=-A$ 可得 $r(B) \geq r(A)$.

所以 $r(A) = r(B)$

证毕



8. 证明题：设 α_1, α_2 依次为矩阵 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量，
且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，证明 α_1, α_2 线性无关。

