第五节

线性方程组有解判别定理

主要内容

- 线性方程组的向量表示形式
- 线性方程组有解判别定理
- 一般线性方程组的解法
- 线性方程组的求解步骤

一、线性方程组的向量表示形式

在有了向量和矩阵的理论准备之后，我们现在可以分析一下线性方程组的问题，给出线性方程组有解的判别条件.

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (1)$$

记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}=(A\ \ \beta)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

称A为系数矩阵，$\overline{A}$为增广矩阵.

再引入向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{s1}\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{s2}\end{pmatrix},\quad \cdots\quad \alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{sn}\end{pmatrix},\qquad (2)$$

即令

$$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$$

则方程组可以改写成向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.\qquad (3)$$

以下说法是等价的:

（1） 线性方程组（1） 有解;

（2） 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出;

（3） 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价;

（4） 系数矩阵A与增广矩阵$\overline{A}=(A\ \ \beta)$ 有相同的秩.

我们把(4)作为线性方程组有解的判别定理.

二、线性方程组有解判别定理

定理 7 线性方程组（1）有解的充分必要条件为它的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

与增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

证明： 先证必要性. 设方程组（1）有解，就是说β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出. 由此立即推出，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$等价，因而有相同的秩. 这两个向量组分别是矩阵$A$与$\overline{A}$的列向量组. 因此，矩阵$A$与$\overline{A}$有相同的秩.

再证必要性. 设矩阵A与$\overline{A}$有相同的秩，即它们的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$有相同的秩，令它们的秩为$r$. 由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组由$r$个向量组成，不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

是它的一个极大线性无关组. 显然， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 的一个极大线性无关组，因此β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，它当然可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出. 于是，线性方程组（1）有解.

证毕

定理中的判别条件与消元法的关系

这个判别条件与消元法是一致的. 我们知道用消元法解线性方程组的第一步就是用初等行变换把增广矩阵$\overline{A}$化为阶梯形矩阵. 这个阶梯形矩阵在适当调动前 n 列的顺序之后可能会出现两种情形：

情形 一

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

情形 二

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r, d_{r+1} \neq 0$.

对于情形一，我们说原方程组无解，而对于情形二，我们说原方程组有解. 实际上，把这个阶梯形矩阵中最后一列去掉，那就是方程组（1）的系数矩阵A经过初等行变换所化成的阶梯形矩阵. 这就是说，当系数矩阵与增广矩阵的秩相等时，方程组有解；当增广矩阵的的秩等于系数矩阵的秩加1时，方程组无解.

以上的说明也可以认为是判别定理的另一个证明.

三、一般线性方程组的解法

根据克拉默法则，可以得到一般线性方程组的一个解法. 这个解法有时在理论上是有用的.

设线性方程组(1)有解，矩阵A与$\overline{A}$的秩都等于r，而D是矩阵A的一个不为零的r级子式(当然它也是$\overline{A}$的一个不为零的子式)，为了方便起见，不妨设D位于A的左上角.

显然，在这种情况下，$\overline{A}$的前r行就是一个极大线性无关组，第$r+1,\cdots,s$行都可以经它们线性表出. 因此，方程组(1)与

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases} \qquad (4)$$

同解.

当$r=n$时，由克拉默法则，方程组(4)有唯一解，也就是方程组(1)有唯一解.

当$r<n$时，将方程组(4)改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (5)$$

方程组(5)作为$x_1,x_2,\cdots,x_r$的一个方程组，它的系数行列式$D\neq 0$. 由克拉默法则，对于$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$的任意一组值，方程组(5)，也就是方程组(1)，都有唯一解. $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$是方程组(1)的一组自由未

知量． 对(5)用克拉默法则，可以解出$x_1, x_2, \cdots, x_r$：

$$\begin{cases} x_1 = d_1' + c_{1,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{1n}' x_n, \\ x_2 = d_2' + c_{2,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{2n}' x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r' + c_{r,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{rn}' x_n, . \end{cases} \quad (6)$$

(6)就是方程组(1)的一组解.

上述一般线性方程组的求解方法，可归纳成以下步骤.

四、线性方程组的求解步骤

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 \quad\quad - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad\quad = 1. \end{cases}$$

解：　首先我们来判别方程组是否有解．把方程组的增广矩阵化为阶梯形．

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\2&2&1&0&1&1\\3&3&0&-1&2&1\\1&1&2&1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\0&0&3&2&-1&1\\0&0&3&2&-1&1\\0&0&3&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\0&0&3&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为系数矩阵和增广矩阵的秩都为2，所以方程组有解. 它的一个同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ \qquad\qquad 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

把x_1, x_5取作自由未知量， x_2, x_3, x_4当作自由未知量，并把方程组变形为

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = -x_2 + x_3 + x_4, \\ \qquad x_5 = 1 - 3x_3 - 2x_4, \end{cases}$$

解之得方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4, \\ \qquad x_5 = 1 - 3x_3 - 2x_4. \end{cases}$$