______线性代数____试卷（1）

院(系)_________ 班级___________ 学号___________ 姓名__________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩85%	平时成绩占15%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
阅卷												
审核												

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1．已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|=$________ .

2．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&7&3\\0&0&9&4\\5&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=$___________

3. 若向量组 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,3k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2k,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(k,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则 $k=$___.

4．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为−1, 1, 2，则 $|\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}|=$_______ .

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若

$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=4$ ，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中______

【A】必有一个向量为零向量.
【B】必有二个向量对应分量成比例.
【C】必有一个向量是其余向量的线性组合.
【D】任意一个向量是其余向量的线性组合.

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有_________.

【A】$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　【B】$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.　【C】$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　【D】$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 设二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 是正定的，则必有________

【A】$a>1$.　【B】$-3<a<1$.　【C】$a<-3$.　【D】$-3\le a\le 1$.

4．已知 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解，k 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______

【A】$k\boldsymbol{\alpha}_1$.　【B】$k\boldsymbol{\alpha}_2$.　【C】$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.　【D】$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.

5．若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{5k}$ 是五阶行列式中带正号的一项，则________

【A】$i=1, j=4, k=2$.　【B】$i=1, j=2, k=4$.

【C】$i=4, j=1, k=2$.　【D】$i=2, j=4, k=1$.

三、(本题每小题 6 分，共 12 分)

1．计算行列式 $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

2．计算 n（n≥2）阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1&2+x_1y_2&\cdots&n+x_1y_n\\1+x_2y_1&2+x_2y_2&\cdots&n+x_2y_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1+x_ny_1&2+x_ny_2&\cdots&n+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

四、(12 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=\lambda\\x_1+2x_2-\lambda x_3=\lambda^2\\2x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\end{cases},$$

当 λ 为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

五．求向量组

$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\1\end{pmatrix}$的秩与一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

六、（12 分）化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$ 为规范型，并写出所做的可逆线性变换.

七、（12 分）设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2&-2\\2&b&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

(1) 求 a,b　(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

八、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

（1）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 依次为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

（2） 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交方阵，n 为奇数，证明矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 至少有一个不可逆.

线性代数 试卷(1) 答案

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1) $\dfrac{7^n}{3}$, 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) -2 4) -28 5. 40。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.【C】 2.【C】 3【B】4.【D】 5.【A】

三、(本题每小题 6 分共 12 分)

1. $abcd+ab+cd+ad+1$

2.

当 $n \geqslant 3$ 时，$D_n=0$.

当 $n=2$ 时，$D_2=(x_2-x_1)(y_2-2y_1)$.

四、

1）当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 3$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，方程组有惟一解；

2）当 $\lambda=-2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，方程组无解；

3）当 $\lambda=3$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$, 方程组有无穷多解.

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$ k 为任意常数.

五. $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=3$，

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\beta}_4 = \frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3, \quad \boldsymbol{\beta}_5 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2$$

六、规范性 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

对应变换为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

七、（1） $a = 2, b = 5$.

（2）

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$