

第九章 欧几里得空间

问题的引入:

1. 线性空间中，向量之间的基本运算为线性运算，其具体模型有几何空间 R^2 ， R^3 ，但几何空间中的度量性质（如长度、夹角）等在一般线性空间中并没有涉及.
2. 在解析几何中，向量的长度、夹角等度量性质都可以通过内积来表示.

长度: $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$

3. 几何空间中向量的内积具有比较明显的代数性质.

1. 二维平面

给定两个向量 \vec{a} , \vec{b} 在直角坐标系 $[O; \vec{x}, \vec{y}]$ 下的坐标为 (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , 定义内积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

2. 三维空间

给定两个向量 \vec{a} , \vec{b} 在直角坐标系 $[O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ 下的坐标为 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , 定义内积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

问题：上述定义能否推广到 n 维或者无限维？内积需要满足哪些性质？

第一节 定义与基本性质

主要内容

- 内积
- 长度
- 夹角
- 度量矩阵
- 举例

一、内积

1. 定义

定义 1 设 V 是实数域 \mathbf{R} 上一线性空间，在 V 上定义了一个二元实函数，称为**内积**，记作 (α, β) ，它具有以下性质：

1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;

3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ ，当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

这里 α, β, γ 是 V 中任意的向量, k 是任意实数, 这样的线性空间 V 称为**欧几里得空间**, 简称**欧氏空间**.

注: 欧氏空间 V 是特殊的线性空间

- (1) V 是实数域 R 上的线性空间;
- (2) V 除了向量的线性运算外, 还有内积运算;
- (3) $(\alpha, \beta) \in R$;
- (4) V 的维数可以是有限维的, 也可以是无限维的.

2. 欧几里得空间举例

下面再看两个例子.

例 1 在线性空间 \mathbf{R}^n 中, 对于向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

定义内积

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (1)$$

显然, 内积 (1) 适合定义中的条件, 这样, \mathbf{R}^n 就成为一个欧几里得空间. 以后仍用 \mathbf{R}^n 来表示这个欧几里得空间.

在 $n = 3$ 时, (1) 式就是几何空间中向量的内积在直角坐标系中的坐标表达式.

例 2 在线性空间 \mathbf{R}^n 中, 对于向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

定义内积

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + \dots + na_n b_n. \quad (1)$$

可以验证, 这样的 \mathbf{R}^n 也构成一个欧几里得空间.

例 3 在闭区间 $[a, b]$ 上的所有实连续函数所成的空间 $C[a, b]$ 中, 对于函数 $f(x), g(x)$ 定义内积

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2)$$

由定积分的性质不难证明, 对于内积 (2), $C[a, b]$ 构成一欧几里得空间.

同样地, 线性空间 $R[x], R[x]_n$ 对于内积 (2) 也构成欧几里得空间.

例 4 (Hilbert空间)

令 H 是一切平方和收敛的实数列

$$\xi = (x_1, x_2, \cdots), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$$

所成的集合. 在 H 中按向量的方式定义加法和数乘.
设

$$\xi = (x_1, x_2, \cdots), \quad \eta = (y_1, y_2, \cdots), \quad k \in R$$

$$\text{规定 } \xi + \eta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$$

$$k\xi = (kx_1, kx_2, \cdots)$$

ξ, η 的内积定义为

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

则 H 是一个欧几里得空间，称作 Hilbert 空间.

证明：首先需要验证以上定义的和法和数乘的合理性. 由熟知的不等式

$$x_n y_n \leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2)$$

推出级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n < +\infty$. 其次，由级数的有关性质可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n)^2 < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} (k x_n)^2 < +\infty$.

因此, 对任意的 $\xi = (x_1, x_2, \dots)$, $\eta = (y_1, y_2, \dots)$,
 $k \in R$ 有 $\xi + \eta \in H, k\xi \in H$. 因此 H 是线性空间.
 H 是欧几里得空间的证明也是利用级数的性质.

证毕

3. 欧几里得空间的性质

下面来看欧几里得空间的一些基本性质.

首先, 定义中条件 1) 表明内积是对称的.

因此, 与 2) 3) 相当当地就有

$$2') (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta);$$

$$3') (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$$

这是因为

$$2') (\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = k(\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta);$$

$$\begin{aligned} 3') (\alpha, \beta + \gamma) &= (\beta + \gamma, \alpha) = (\beta, \alpha) + (\gamma, \alpha) \\ &= (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma). \end{aligned}$$

定义1 设 V 是实数域 \mathbb{R} 上的一个线性空间. 如果对于 V 中任意两个向量 α, β , 有唯一确定的一个记作 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 的实数与它们对应, 并且满足以下4条公理:


1. $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$;
2. $\langle k\alpha, \beta \rangle = k\langle \alpha, \beta \rangle$, 对任意的 $k \in \mathbb{R}$;
3. $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$, 对任意 $\gamma \in V$;
4. $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$.

则实数 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 称为 α 与 β 的内积. 这时, 实数域 \mathbb{R} 上的线性空间 V 称为欧几里得空间, 简称欧氏空间.

另外还有

$$(5) \quad (\alpha, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \beta) = 0$$

$$(6) \quad \left(\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n l_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_i l_j (\alpha_i, \beta_j)$$

由条件 4)  有 $(\alpha, \alpha) \geq 0$. 所以对于任意的向量 α , $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 是有意义的. 在几何空间中, 向量 α 的长度为 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$. 类似地, 我们在一般的欧几里得空间中引进向量长度的概念.

二、长度

1. 定义

定义 2 非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为向量 α 的**长度**(或范数, 模), 记为 $|\alpha|$.

显然, 向量的长度一般是正数, 只有零向量的长度才是零, 这样定义的长度有以下性质:

2. 性质

性质 1 设 $k \in \mathbf{R}, \alpha \in V$, 则有

$$|k\alpha| = |k| |\alpha|. \quad (3)$$

证明

$$\begin{aligned} |k\alpha| &= \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} \\ &= \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)} \\ &= |k| |\alpha|. \end{aligned}$$

3. 单位向量

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 如果 $\alpha \neq 0$, 则由 (3) 式 知, 向量

$$\frac{1}{|\alpha|} \alpha$$

是一个单位向量. 用向量 α 的长度去除向量 α , 得到一个与 α 成比例的单位向量, 通常称为把 α **单位化**.

性质 2 柯西 - 布涅柯夫斯基不等式

设 α, β 是任意两个向量, 则

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|, \quad (4)$$

当且仅当 α, β 线性相关时, 等号才成立.

证明 当 $\beta = 0$ 时, (4) 式显然成立. 以下
设 $\beta \neq 0$. 令 t 是一个实变数, 作向量

$$\gamma = \alpha + t \beta.$$

由 4)  可知, 不论 t 取何值, 一定有

$$(\gamma, \gamma) = (\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) \geq 0.$$

即

$$(\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta)t^2 \geq 0. \quad (5)$$

(5) 式左边可以看作关于 t 的二次函数.

由于 $\beta \neq 0$, 二次函数开口向上, 所以 (5) 式恒成立的条件为判别式小于等于0.

$$\text{即 } \Delta = [2(\alpha, \beta)]^2 - 4(\beta, \beta)(\alpha, \alpha) \leq 0.$$

于是

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\beta, \beta)(\alpha, \alpha).$$

两边取平方根

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|.$$

等号成立当且仅当 $\Delta=0$, 即 $t = -(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ 时
二次函数取到最小值0.

此时 $(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta)=0$. 即 $\alpha + t\beta=0$. 此时 α 与 β
线性相关.

证毕

证明二 当 $\beta = 0$ 时, (4) 式显然成立. 以下
设 $\beta \neq 0$. 令 t 是一个实变数, 作向量

$$\gamma = \alpha + t \beta.$$

由 4)  可知, 不论 t 取何值, 一定有

$$(\gamma, \gamma) = (\alpha + t \beta, \alpha + t \beta) \geq 0.$$

即

$$(\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) t + (\beta, \beta) t^2 \geq 0. \quad (5)$$

取

$$t = -\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$$

代入 (5) 式得

$$(\alpha, \alpha) - \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)} \geq 0,$$

即

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha) (\beta, \beta).$$

两边开方即得

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|.$$

下证：等号成立当且仅当 α 与 β 线性相关.

充分性： 当 α 与 β 线性相关时，或者 $\beta = 0$ 或 $\beta = t\alpha$ ，两种情况下总有

$$(\alpha, \beta)^2 = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta).$$

必要性： 当等号成立时，若 α 与 β 线性无关，则对任一实数 t ，恒有 $\alpha + t\beta \neq 0$ ，则 $(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) > 0$ ，由此可得

$$(\alpha, \beta)^2 < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta).$$

与题设矛盾，因此 α 与 β 线性相关.

证毕

4. 两个著名的不等式

对于例 1 中的欧几里得空间 R^n , (4) 式就是

$$\begin{aligned} & |a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}. \end{aligned}$$

对于例 2 中的欧几里得空间 $C[a, b]$, (4) 式就是

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. 三角不等式

根据柯西 - 布涅柯夫斯基不等式，我们有三角形不等式

$$| \alpha + \beta | \leq | \alpha | + | \beta | . \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad & | \alpha + \beta |^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &\leq | \alpha |^2 + 2 | \alpha | | \beta | + | \beta |^2 \\ &= (| \alpha | + | \beta |)^2 . \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad | \alpha + \beta | \leq | \alpha | + | \beta | .$$

三、夹角

1. 夹角的定义

定义 3 非零向量 α, β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 规定为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| |\beta|}, 0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi.$$

2. 正交

定义 4 如果向量 α, β 的内积为零, 即

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

那么 α, β 称为**正交**或**互相垂直**, 记为 $\alpha \perp \beta$.

注:

(1) 只有零向量才与自己正交.

(2) $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$, 即 $\cos \langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

$$\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| |\beta|}$$

在欧几里得空间中同样有勾股定理，即当 α, β 正交时，

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

事实上，

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

不难把勾股定理推广到多个向量的情形，即如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 两两正交，那么

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_m|^2.$$

在以上的讨论中，我们对空间的维数没有作任何限制。从现在开始，我们假定空间是有限维的。

四、度量矩阵

设 V 是一个 n 维欧几里得空间，在 V 中取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ，对于 V 中任意两个向量

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

$$\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n$$

由内积的性质得

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n, y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon_i, \varepsilon_j) x_i y_j. \end{aligned}$$

令

$$a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

显然

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

于是

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \quad (8)$$

利用矩阵, (α, β) 还可以写成

$$(\alpha, \beta) = X^T A Y.$$

$$(\alpha, \beta) = X^T A Y.$$

其中

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

分别是 α, β 的坐标，而矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

称为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

就是说，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

称为内积 (α, β) 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的**度量矩阵**.

$$(\alpha, \beta) = X^T A Y \quad (9)$$

上面的讨论表明，在知道了一组基的度量矩阵之后，任意两个向量的内积就可以通过坐标按 (8) 或 (9) 来计算，因而度量矩阵完全确定内积。

设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是空间 V 的另外一组基，而由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 C ，即

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) C.$$

于是不难算出，基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的度量矩阵

$$B = (b_{ij}) = ((\eta_i, \eta_j)) = C^T A C. \quad (10)$$

证明过程采用不同基之间的坐标变换. 设

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

是 α 与 β 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的坐标, 于是

$$X = CU, Y = CV.$$

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) C.$$

$$(\alpha, \beta) = X^T A Y = (CU)^T A (CV) = U^T C^T A C V$$

又由于 $(\alpha, \beta) = U^T B V$

因此 $B = C^T A C$.

这就是说，不同基的度量矩阵是合同的.

根据条件 4)  对非零向量 α ，即

$$X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

有 $(\alpha, \alpha) = X^T A X > 0$. 因此，度量矩阵是正定的.

反之，给定一个 n 阶正定矩阵 A 及 n 维实线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. 可以规定内积，使它成为欧几里得空间，并且基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵为 A .

欧几里得空间的子空间在所定义的内积之下显然也是一个欧几里得空间.

欧几里得空间以下简称为**欧氏空间**.

注:

(1) 度量矩阵 A 是**实对称正定**矩阵;

(2) 在一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下, 向量的**内积**完全由度量矩阵确定;

(3) 不同基的度量矩阵是**合同**的.

五、举例

例 1 在欧氏空间 \mathbf{R}^n 中计算下列向量的内积，并求它们之间的夹角.

(1) $\alpha = (1, 1, 1, 1), \beta = (-1, 2, 4, 3);$

(2) $\alpha = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \beta = (3, -1, 2, 2);$

(3) $\alpha = (3, -1, 1, -1), \beta = (-2, 2, -2, 2);$

(4) $\alpha = (-1, 1, -1, 2, 1), \beta = (3, 1, -1, 0, 1).$

$$(1) \quad (\alpha, \beta) = 8, \quad (\alpha, \alpha) = 4, \quad (\beta, \beta) = 30,$$

夹角为 $\arccos \frac{4}{\sqrt{30}}$.

$$(2) \quad (\alpha, \beta) = \frac{7}{2}, \quad (\alpha, \alpha) = \frac{25}{18}, \quad (\beta, \beta) = 18,$$

夹角为 $\arccos \frac{7}{10}$.

$$(3) \quad (\alpha, \beta) = -12, \quad (\alpha, \alpha) = 12, \quad (\beta, \beta) = 16,$$

夹角为 $\frac{5\pi}{6}$.

$$(4) \quad (\alpha, \beta) = 0, \quad \text{夹角为 } \frac{\pi}{2}.$$

例 2 在 4 维欧氏空间中, 设基

$$\alpha_1 = (1, 1, -1, -1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0),$$

$$\alpha_3 = (-1, 1, 1, 1), \alpha_4 = (1, 0, 0, -1)$$

的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求基

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \\ \varepsilon_3 &= (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

的度量矩阵;

(2) 求向量

$$\beta_1 = (1, -1, 1, -1), \beta_2 = (0, 1, 1, 0)$$

的内积.

(1) 解 由已知, 两组基的关系为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) C_1$$

其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

于是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的过渡矩阵
矩阵为 $C = C_1^{-1}$. 下面来求 C

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{单击求逆}$$

$$C = C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

所以基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的度量矩阵为

$$B = C^T A C$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -1/2 & -9/2 & 9 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & -1 \\ -9/2 & 1/2 & 4 & -7 \\ 9 & -1 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

(2) 解 $\beta_1 = (1, -1, 1, -1), \beta_2 = (0, 1, 1, 0)$

(β_1, β_2)

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 & -1/2 & -9/2 & 9 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & -1 \\ -9/2 & 1/2 & 4 & -7 \\ 9 & -1 & -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= 6.$