

# 第五节 行列式的计算

## 主要内容

- 矩阵的定义
- 初等变换的定义
- 行阶梯形矩阵
- 行列式的计算方法

## 回顾

在 § 3 中，我们学习了一个上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

等于它的主对角线上元素的乘积。

在 § 4 中，我们学习了行列式的性质，利用行列式的性质可简化行列式的计算，特别是利用  $r_i + kr_j$  (或者  $c_i + kc_j$ ) 可以把行列式中很多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利用  $r_i + kr_j$  把行列式化成上三角行列式，从而得到行列式的值. 为了便于叙述并考虑到以后的应用，我们引进矩阵及矩阵的初等行变换的概念.

## 一、矩阵的定义

定义 5 由  $sn$  个元素排成的  $s$  行(横的)  $n$  列(纵的)的表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个矩阵  $s \times n$  矩阵. 这  $s \times n$  个元素称为矩阵的元素,  $a_{ij}$  称为矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列元素. 简记为  $A = A_{s \times n} = (a_{ij})_{s \times n} = (a_{ij})$ .

例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -7 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3 × 4 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2 & 3 \\ i & 6 \\ 4 & 7i \end{pmatrix}$$

4 × 2 矩阵

当一个矩阵的元素全是某一数域  $P$  中的数时，它就称为这一数域  $P$  上的矩阵。上述两个矩阵一个是有理数域上的矩阵，一个  
是复数域上的矩阵。

$n \times n$  矩阵也称为方阵. 一个  $n$  阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义一个  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$ .

## 二、初等行变换

定义 6 所谓数域  $P$  上矩阵的初等行变换是指下列三种变换：

1) 以  $P$  中一个非零的常数乘矩阵的某一行；

2) 把矩阵的某一行的  $c$  倍加到另一行，这里  $c$  是  $P$  中任意一

个数(如第  $j$  行的  $c$  倍加到第  $i$  行，记为  $r_i+cr_j$ )；

3) 互换两行的位置 ( $r_i \leftrightarrow r_j$ )

**初等列变换：**把定义6中的行换成列. 矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称为矩阵的初等变换.

一般来说, 一个矩阵经过初等行变换后, 就变成了另一个矩阵.

譬如, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

当矩阵 $A$ 经过初等行变换变成矩阵 $B$ 时, 我们写成

$$A \rightarrow B.$$

我们称形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的矩阵为阶梯形矩阵.

### 三、行阶梯形矩阵

**定义 7 满足下面三个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵**

- 1) 每个阶梯只有一行；
- 2) 设矩阵有 $r$ 个非零行（元素不全为零的行），第 $i$ 个非零行的第一个非零元素所在的列标记为 $n_i, i = 1, 2, \dots, r$ ，则

$$n_1 < n_2 < \cdots < \cdots n_r;$$

- 3) 元素全为零的行（如果有的话）一定在矩阵的最下面几行.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特点：阶梯线下方的元素全为零； 每一个台阶都只有一行；  
台阶数等于非零行的个数； 阶梯线的竖线后面的第一个  
元素为非零元.

**定理 3** 任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成行阶梯形矩阵。

**证明：** 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

我们看第1列的元素 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}$ , 只要其中有一个不为零, 用初等行变换3), 总能使第1列的第一个元素不为零, 然后从第2行

开始，每一行都加上第1行的一个适当的倍数，于是第1列除去第1个元素外就全是零了. 即，经过一系列初等行变换后

$$A \rightarrow J_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \end{pmatrix}$$

对于 $J_1$ 中右下角的一块

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \end{pmatrix}$$

再重复以上的做法. 如此做下去直到变成阶梯形为止. 如果原来矩阵  $A$  中第1列的元素全为零, 那么就依次考虑它的第2列的元素, 等等.

证毕

例：设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 四、行列式的计算方法

一个  $n$  阶行列式可看成是由一个  $n$  阶方阵  $A$  决定的，对于矩阵可以作初等行变换，而行列式的性质2, 6, 7正是说明了方阵的初等行变换对于行列式的值的影响. 每个方阵  $A$  总可以经过一系列的初等行变换变成行阶梯形方阵  $J$ . 由行列式的性质2, 6, 7，对方阵每作一次初等行变换，相应地，行列式或者不变，或者差一个非零的常数倍，即

$$|A| = k|J|, \quad k \neq 0.$$

显然，行阶梯方阵  $J$  的行列式都是上三角形的，因此容易计算.

## 例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解：

$$D \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_4 + 5r_1 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 + 4r_2 \\ r_4 - 8r_2 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{r_4 + 5/4r_5} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right| = 40.$$

不难算出，用这个方法计算一个  $n$  阶的数字行列式只需要做  
 $\frac{n^3 + 2n - 3}{3}$  次乘法和除法。特别地，当  $n$  比较大的时候，这个方法的优势就更明显。同时这个方法完全是机械的，可以用计算机语言来进行行列式的计算。

## 例 2 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & 2b & 3c & 4d \\ a & 3b & 4c & 5d \\ a & 4b & 5c & 6d \end{vmatrix}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & 2c & 3d \\ 0 & 2b & 3c & 4d \\ 0 & 3b & 4c & 5d \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2 \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & 2c & 3d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

### 例 3 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ .

解：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \left(1 + a_1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\right) a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$