第六章　线性空间习题课

二. 典型例题

例1. 试证：在线性空间R^4中，由向量组

$$\alpha_1=(1,2,-1,-3),\alpha_2=(2,4,1,-2),$$

$$\alpha_3=(3,6,3,-7)$$

及

$$\beta_1=(1,2,-4,11),\beta_2=(2,4,-5,14)$$

生成的子空间相同，即

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\beta_1,\beta_2).$$

证明： 只须证这两个向量组等价

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & -3/8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_1\end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & -3/8\end{bmatrix}$$

例2. 设V是在数域P上的线性空间，且$V \neq \{0\}$.
证明：V不可能表示成它的两个真子空间的并集，
即若V_1, V_2是V的真子空间，则$V \neq V_1 \cup V_2$.

证明： 用反证法. 设$V = V_1 \cup V_2$，则由于
V_1, V_2是V的真子空间，所以

$$V_1 \subset V_2 \text{ 与 } V_2 \subset V_1$$

均不成立. 于是存在$\alpha \in V_1, \alpha \notin V_2$与$\beta \in V_2$,
$\beta \notin V_1$. 于是$\alpha + \beta \notin V_1, \alpha + \beta \notin V_2$.
故$\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2$，这与假设矛盾！

例3. 设V是实数域R在自身上的线性空间，W是全体正实数的集合，且W为关于运算

$$a \oplus b = ab, \qquad k \cdot a = a^k$$

所成的线性空间. 证明：V与W同构.

证明提示： 证明映射

$$f: V \to W: f(x) = 2^x \ (x \in V)$$

是V到W的同构映射.

或证明映射

$$f: W \to V: f(x) = log_2 x \ (x \in V)$$

是W到V的同构映射.

例4. 设V是数域P上的n维线性空间，证明：V有无穷多个$r(1 \le r \le n)$维线性子空间.

证明提示： 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的一组基，令

$$\beta_k = \alpha_r + k\alpha_n$$

证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_k$线性无关，再证明$l \ne k$时，$\beta_l$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_k$线性表示.

令$k = 1, 2, \cdots$, 就得到V的无穷多个r线性子空间$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_k)$.

例5. 设V与W分别是数域P上的n维和m维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$分别是$V$与$W$的基，$L(V,W)$是$V$到$W$的线性映射的集合，对线性映射的加法和数量乘法构成的线性空间. 证明$L(V,W)$与$M_{mn}(P)$同构.

证明： 欲证$L(V,W)$与$M_{mn}(P)$同构，只须在其两者之间建立一个同构映射，为此，由

$\sigma\in L(V,W)$有

$$\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i\,,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

由此确定唯一一个$m \times n$矩阵$A=(a_{ij}) \in M_{mn}(P)$，于是

$$f: \sigma \to A \ \ (f(\sigma)=A)$$

是$L(V,W)$与$M_{mn}(P)$的一个一映射. 我们证明它是线性映射，再证明它是同构映射.

首先，设$\sigma \in L(V,W)$，$\tau \in L(V,W)$

$$\sigma \to A=(a_{ij}), \qquad \tau \to B=(b_{ij})$$

其中

$$\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i, \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

$$\tau(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\beta_i, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

由此可得 $$(\sigma + \tau)(\alpha_j) = \sigma(\alpha_j) + \tau(\alpha_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\beta_i$$

因而

$$\sigma + \tau \to A + B$$

同样

$$(k\sigma)(\alpha_j) = k\sigma(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} (ka_{ij})\beta_i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

因此，

$$k\sigma \to kA$$

即

$$f(\sigma+\tau) = A + B = f(\sigma) + f(\tau)$$

$$f(k\sigma) = kA = kf(\sigma)$$

即f是$L(V,W)$与$M_{mn}(P)$的一个线性映射.　我们再证明f是同构映射，为此，只需证明f是一个双射即可.

任给$A \in M_{mn}(P)$，定义

$$\sigma: V \to W$$

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j \to \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \beta_i$$

则σ是V到W的线性映射，即$\sigma \in L(V, W)$，因此有

$$\sigma(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \beta_i, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

进而使$f(\sigma) = A$成立，故f为$L(V, W)$到$M_{mn}(P)$的满射；同时f还是$L(V, W)$到$M_{mn}(P)$的单射．这是

因为，若 $f(\sigma)=A=(a_{ij})$， $f(\tau)=B=(b_{ij})$，

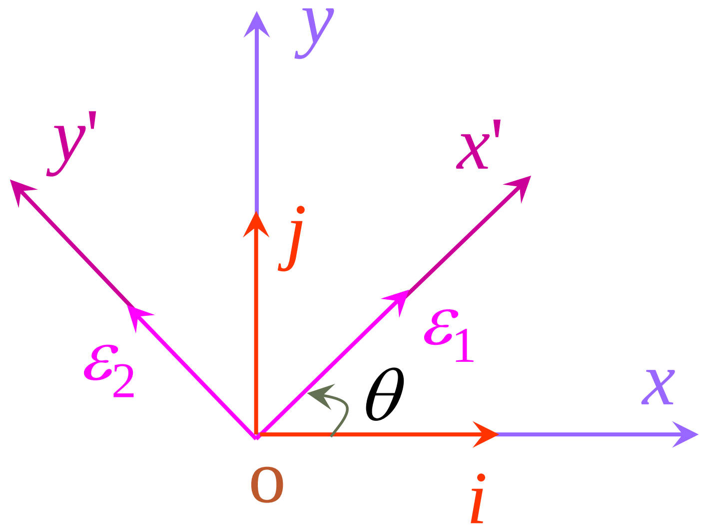
且$A=B$，则任意$\xi\in V$有$\xi=\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_j$，使

$$\sigma(\xi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\beta_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_j\beta_i=\tau(\xi)$$

从而$\sigma=\tau$，故f是$L(V,W)$到$M_{mn}(P)$的同构映射，

因而$L(V,W)$到$M_{mn}(P)$同构.

例6. 在平面直角坐标系xoy里，i和j为互相垂直的单位向量，它们构成R^2的一个基；现将x轴和y轴绕原点O逆时针旋转角θ. 令相应的单位向量为$\varepsilon_1, \varepsilon_2$，则$\varepsilon_1, \varepsilon_2$也是$R^2$的一个基，换基公式：



$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j \\ \varepsilon_2 = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j \end{cases}$$

$\forall \alpha \in R^2$，若α在基i, j下的坐标为(x, y)，求α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的坐标$(x', y')$.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j \\ \varepsilon_2 = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j \end{cases}$$

解： $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (i, j)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

过渡矩阵 $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

求出 $C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x' = xcos\theta + ysin\theta \\ y' = -xsin\theta + ycos\theta \end{cases}$$

旋转坐标轴的坐标变换公式