第七节 克拉默 (Cramer) 法则

主要内容

- 非齐次线性方程组克拉默法则
- 齐次线性方程组克拉默法则

现在我们来应用行列式解决线性方程组的问题．这里我们只考虑方程个数与未知量的个数相等的情形．这是一个重要的情形．至于更一般的情形留到下一章讨论．下面来看n元线性方程组的主要结果.

一、非齐次线性方程组的克拉默法则

定理 4 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以通过系数表为

$$x_1=\frac{d_1}{d},x_2=\frac{d_2}{d},\cdots,x_n=\frac{d_n}{d}, \qquad (3)$$

其中d_j是把行列式d中第j列换成方程组的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$所组成的列，即

$$d_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},j=1,2,\cdots,n. \qquad (4)$$

证明： 1. 把方程组(1)简写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

首先来证明(3)的确是(1)的解. 把(3)代入第i个方程，左端为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j\,. \tag{6}$$

因为

$$d_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{s=1}^{n} b_sA_{sj},$$

所以

> 定理3 $a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}d, & i=s,\\ 0, & i\neq s.\end{cases}$

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ij}A_{sj}b_s$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}b_s=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}\right)b_s.$$

根据定理3公式(6)，有

$$\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}\right)b_s=\frac{1}{d}\cdot db_i=b_i.$$

这与第i个方程的右端一致. 即，把(3)代入方程使它们同时变成恒等式，因而(3)确为方程组(1)的解.

2. 设$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是方程组(1)的解，于是有n个恒等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

为了证明$c_k = \frac{d_k}{d}$，我们取行列式中第k列元素的代数余子式$A_{1k}, A_{2k}, \cdots, A_{nk}$，用它们分别乘(7)中$n$个恒等式，有

$$A_{ik}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=b_iA_{ik},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

这还是n个恒等式. 把它们加起来，即得

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ik}. \qquad (8)$$

等式右端等于在行列式d按第k列的展开式中把a_{ik}分别换成$b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，因此，它等于把行列式d中第k列换成$b_1,b_2,\cdots,b_n$所得的行列式，也就是 d_k . 再来看(8)的左端，

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} c_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} c_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} \right) c_j .$$

由上节定理3中的公式(7)，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} d, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}\right)c_j = dc_k$$

于是，(8) 即为

$$dc_k = d_k, \qquad k = 1,2,\cdots,n.$$

即

$$c_k = \frac{d_k}{d}, \qquad k = 1,2,\cdots,n.$$

因此，如果$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是方程组 (1) 的解，它必为

$$\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \cdots, \frac{d_n}{d}\right).$$

证毕

我们称定理 4 为克拉默法则.

克拉默法则有着重要的理论价值，而它的实用价值并不大.

抛开解的形式不说，克拉默法则可以叙述为：

定理 4′ 如果线性方程组(1)的系数行列式$d \neq 0$，则方程组有唯一解.

定理 4′ 的衍生：如果线性方程组无解或者有两个不同的解，则它的系数行列式一定为零.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

因此可以应用克拉默法则. 由于

$$d_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,$$

$$d_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

所以方程组的唯一解为：$x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1.$

注意：定理 4 所讨论的只是系数矩阵的行列式不为零且方程的个数与未知量个数相等的方程组，它只能应用于这类方程组；至于方程组的系数行列式为零或者方程的个数与未知量个数不相等的情形，将在下一章进行讨论.

上面讨论的线性方程组的常数项不全为零. 常数项不全为零的线性方程组叫作**非齐次线性方程组**.

常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组. 显然，齐次线性方程组总是有解的，因为$(0, 0, \cdots, 0)$就是一个解，它称为零解. 对于齐次线性方程组，我们比较关心它除了零解以外还有没有其他解，也就是它有没有非零解.

对于方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组，应用克拉默法则，它有

定理 5 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

的系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么它只有零解. 换句话说，如果方程组(10)有非零解，那么必有

$$d = 0.$$

证明：应用克拉默法则，因为行列式d_j中有一列为零，所以

$$d_j = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

即，它的唯一解为

$$\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \cdots, \frac{d_n}{d}\right) = (0, 0, \cdots, 0).$$

证毕

例 2 求λ取何值时，方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+\ \ x_3\ \ =0\\x_1+\ \ x_2+\ \ (1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解： 方程组的系数行列式

$$d=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3+\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 5\lambda - 7 + (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 7)$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

齐次线性方程组有非零解，则$d = 0$.

所以当λ=0, 2或3时，线性方程组有非零解.

例 3 求λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，并求出其解.

解： 方程组的系数行列式

$$d=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

由此可知，当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时$d\neq 0$，这时方程组有唯一解.

$$d_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$d_2=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda^2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

$$d_3=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

所以 $x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},x_2=\frac{1}{\lambda+2},x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

克拉默法则的意义主要在于它给出了解与系数的明确关系，这一点在以后的许多问题的讨论中是重要的，但是用克拉默法则进行计算是不方便的，因为解一个n元线性方程组需要计算$n+1$个n阶行列式，计算量很大．克拉默法则适用于理论推导.

小结：

克拉默法则的适用条件：

1. 方程的个数与未知量的个数相等；

2. 系数行列式不等于零.