北京科技大学 2016--2017 学年 第二学期

线性代数 试卷 （A 卷）

院(系)____________ 班级____________ 学号____________ 姓名__________

一、选择题（本题共 27 分，每小题 3 分）

1. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_2,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 $|2\alpha_3-\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_1,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=$

   (A) $2m+2n$　　(B) $-(2m+2n)$　　(C) $4m+4n$　　(D) $4n-4m$

2. 已知 4 阶行列式 D 的某一行元素及其余子式都为 a，则 D=

   （A）0　　（B）a^2　　（C） $-a^2$　　（D）$4a^2$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，若 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})^{-1}=$.

   (A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

   (C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}$

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

   (A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

   (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$

   (C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

   (D) $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

5. 设 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，α_1,α_2 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

   (A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

   (C) $k_1\beta_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

6. 设有 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，常数 $k\neq 0,\pm1$，则 $(k\boldsymbol{A})^*=$

(A) kA^{-1} (B) $k^{n-1}|A|A^{-1}$ (C) $k^{n-1}|A|^{-1}A^{-1}$ (D) $k^{-1}|A|^{n-1}A^{-1}$

7. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是同阶可逆方阵，则

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ (B) 存在可逆方阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(C) 存在可逆方阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$ (D) 存在可逆方阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

8. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$，则必有$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似
(C) 相似但不合同 (D) 不合同也不相似

9. n阶方阵$\boldsymbol{A}$具有n个不同特征值是$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵的

(A) 充分必要条件 (B) 充分而非必要条件
(C) 必要而非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（本题共24分，每小题3分）

1. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=4$，则$|4\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$__________.

2. 已知$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&4\\3&2&6\end{vmatrix}$，则$A_{13}+A_{23}+A_{33}=$__________.

3. 若$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^T$，则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=$__________.

4. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(A)=2$，则$a=$__________.

5. 设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为1，$\mathrm{r}(A)=2$，3维向量$\boldsymbol{\beta}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个非零解，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$的通解为_____.

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$相似，则$a=$______，$b=$______.

7. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$正定，则$t$的取值范围为__________.

8. 若方阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$ 则矩阵$\boldsymbol{A}$必有一个特征值为__________.

三、（8 分）计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

四.（14 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a\\1\\a^2\end{pmatrix}$，当$a$满足什么条件时，

（1）$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？

（2）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出且表示方法唯一？

（3）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，但表示方法不唯一？此时求出一般表达式。

五、（10 分）设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\11\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}6\\17\\-9\\-9\end{pmatrix}$，
求此向量组的秩与一个极大线性无关组，并将其它向量用所求的极大线性无关组线性表示。

六、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

（1）用正交变换将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形，并写出所作的变换；

（2）写出$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形，并说明其正负惯性指数和符号差。

七、（7 分）方阵$\boldsymbol{A}$的主对角元素之和称为$\boldsymbol{A}$的迹，记作$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$。

（1）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$，证明$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$；

（2）证明不存在n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$。