

第八章 λ -矩阵

第四节 矩阵相似的条件

主要内容

- 引理

- 矩阵相似的条件

一、引理

在求一个数字矩阵 A 的特征值和特征向量时曾出现过 λ -矩阵 $\lambda E - A$, 我们称它为 A 的特征矩阵. 这一节的主要结果是证明两个 $n \times n$ 数字矩阵 A 和 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 等价. 为了证明这一结论, 先来证明下面两个引理.

引理 1 如果有 $n \times n$ 数字矩阵 P_0, Q_0 使

$$\lambda E - A = P_0(\lambda E - B)Q_0, \quad (1)$$

则 A 与 B 相似.

证明 因 $P_0(\lambda E - B)Q_0 = \lambda P_0 Q_0 - P_0 B Q_0,$

它又与 $\lambda E - A$ 相等, 进行比较后应有

$$P_0 Q_0 = E, \quad P_0 B Q_0 = A.$$

由此 $Q_0 = P_0^{-1}$, 而 $A = P_0 B P_0^{-1}$. 故 A 与 B 相似.

引理 2 对于任何不为零的 $n \times n$ 数字矩阵 A 和 λ -矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$ ，一定存在 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$ 以及数字矩阵 U_0 和 V_0 使

$$U(\lambda) = (\lambda E - A) Q(\lambda) + U_0, \quad (2)$$

$$V(\lambda) = R(\lambda) (\lambda E - A) + V_0, \quad (3)$$

证明 把 $U(\lambda)$ 改写成

$$U(\lambda) = D_0 \lambda^m + D_1 \lambda^{m-1} + \dots + D_{m-1} \lambda + D_m.$$

这里 D_0, D_1, \dots, D_m 都是 $n \times n$ 数字矩阵，而且

$D_0 \neq 0$. 如 $m = 0$, 则令 $Q(\lambda) = 0$ 及 $U_0 = D_0$, 它们显然满足引理 2 要求.

设 $m > 0$, 令

$$Q(\lambda) = Q_0 \lambda^{m-1} + Q_1 \lambda^{m-2} + \dots + Q_{m-2} \lambda + Q_{m-1}.$$

这里 Q_j 都是待定的数字矩阵. 于是

$$\begin{aligned} (\lambda E - A) Q(\lambda) &= Q_0 \lambda^m + (Q_1 - A Q_0) \lambda^{m-1} + \dots \\ &\quad + (Q_k - A Q_{k-1}) \lambda^{m-k} + \dots \\ &\quad + (Q_{m-1} - A Q_{m-2}) \lambda - A Q_{m-1}. \end{aligned}$$

要想使等式

$$U(\lambda) = (\lambda E - A) Q(\lambda) + U_0$$

成立，只需取

$$Q_0 = D_0 , \quad Q_k = D_k + A Q_{k-1} ,$$

$$Q_1 = D_1 + A Q_0 , \quad \dots \dots \dots$$

$$Q_2 = D_2 + A Q_1 , \quad Q_{m-1} = D_{m-1} + A Q_{m-2} ,$$

$$\dots \dots \dots \quad U_0 = D_m + A Q_{m-1} .$$

就行了。用完全相同的办法可以求得 $R(\lambda)$ 和 V_0 。

证毕

二、矩阵相似的条件

定理 7 设 A, B 是数域 P 上两个 $n \times n$ 矩阵.
 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵
 $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 等价.

证明 由 **定理 6 的推论** 可知 $\lambda E - A$ 与
 $\lambda E - B$ 等价就是有可逆的 λ -矩阵 $U(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$ 使

$$\lambda E - A = U(\lambda) (\lambda E - B) V(\lambda). \quad (4)$$

先证必要性 设 A 与 B 相似，即有可逆矩阵 T 使

$$A = T^{-1}BT.$$

于是

$$\lambda E - A = \lambda E - T^{-1}BT = T^{-1}(\lambda E - B)T,$$

从而 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价。

再证充分性 设 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价，即有可逆的 λ -矩阵 $U(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$ 使

$$\lambda E - A = U(\lambda)(\lambda E - B)V(\lambda) \tag{4}$$

成立。由 引理 2 存在 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 和 $R(\lambda)$

以及数字矩阵 U_0 和 V_0 使

$$U(\lambda) = (\lambda E - A) Q(\lambda) + U_0 , \quad (5)$$

$$V(\lambda) = R(\lambda) (\lambda E - A) + V_0 , \quad (6)$$

成立. 把

$$\lambda E - A = U(\lambda) (\lambda E - B) V(\lambda)$$

改写成

$$U^{-1}(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B) V(\lambda) ,$$

式中的 $V(\lambda)$ 用 (6) 代入, 再移项, 得

$$[U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B) R(\lambda)] (\lambda E - A) = (\lambda E - B) V_0 .$$

右端次数等于 1 或 $V_0 = O$, 因此

$$U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B) R(\lambda)$$

是一个数字矩阵(后一种情况下应是零矩阵), 记作
 T , 即

$$\begin{aligned} T &= U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B) R(\lambda), \\ T (\lambda E - A) &= (\lambda E - B) V_0 . \end{aligned} \tag{7}$$

现在我们来证明 T 是可逆的.

由

$$T = U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B) R(\lambda),$$

得

$$\begin{aligned}E &= U(\lambda)T + U(\lambda)(\lambda E - B)R(\lambda) \\&= U(\lambda)T + (\lambda E - A)V^{-1}(\lambda)R(\lambda) \quad (\text{由 (4) } \rightarrow) \\&= [(\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0]T \\&\quad + (\lambda E - A)V^{-1}(\lambda)R(\lambda) \quad (\text{由 (5) } \rightarrow) \\&= U_0T + (\lambda E - A)[Q(\lambda)T + V^{-1}(\lambda)R(\lambda)].\end{aligned}$$

等式右端的第二项必须为零，否则它的次数至少

是 1, 由于 E 和 U_0T 都是数字矩阵, 等式不可能成立. 因此

$$E = U_0T.$$

这就是说, T 是可逆的. 由(7)的第二式得

$$\lambda E - A = T^{-1}(\lambda E - B)V_0.$$

再由引理 1知, A 与 B 相似.

证毕

矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的不变因子以后就简称为 A 的不变因子. 因为两个 λ -矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的不变因子，所以由定理 7 即得

推论 矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们有相同的不变因子.

应该指出 $n \times n$ 矩阵的特征矩阵的秩一定是 n . 因此， $n \times n$ 矩阵的不变因子总是有 n 个，并且它们的乘积就等于这个矩阵的特征多项式.

以上结果说明，不变因子是矩阵的相似不变量，因此我们可以把一个线性变换的任一矩阵的不变因子(它们与该矩阵的选取无关)定义为此线性变换的不变因子.