

第二章 行列式

第一节 引言

主要内容

- 前言
- 引例



一、前言

在初等数学中,我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组,可以看出,线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项所确定.为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系,我们在本章先引入二级和三级行列式的概念,并在二级和三级行列式的基础

上，给出 n 级行列式的定义并讨论其性质，进而把 n 级行列式应用于解 n 元线性方程组. 事实上行列式是一种常用的数学工具，在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

在讨论 n 级行列式之前，先简单回顾一下二级和三级行列式.



二、引例

引例 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

解 用加减消元法，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \end{cases}$$


当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 求得方程组 (1) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \end{cases} \quad (2)$$

为了记忆该公式, 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

并称之为**二级行列式**. 其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**, a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置, 第一个下标称为**行标**, 表示该元素所在的行, 第二个下标称为**列标**, 表示该元素所在的列, 常称 a_{ij} 为行列式的 (i, j) 元素.

由二级行列式的定义, (2)  式中 x_1 、 x_2 分子也可写成二级行列式, 即

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注意: D 称为系数行列式, D_j 是用常数项 b_1 、 b_2 替换 D 中的第 j 列 ($j=1,2$)

详细解释如下：


对于二元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

若记

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意 分母都为原方程组的系数行列式.

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

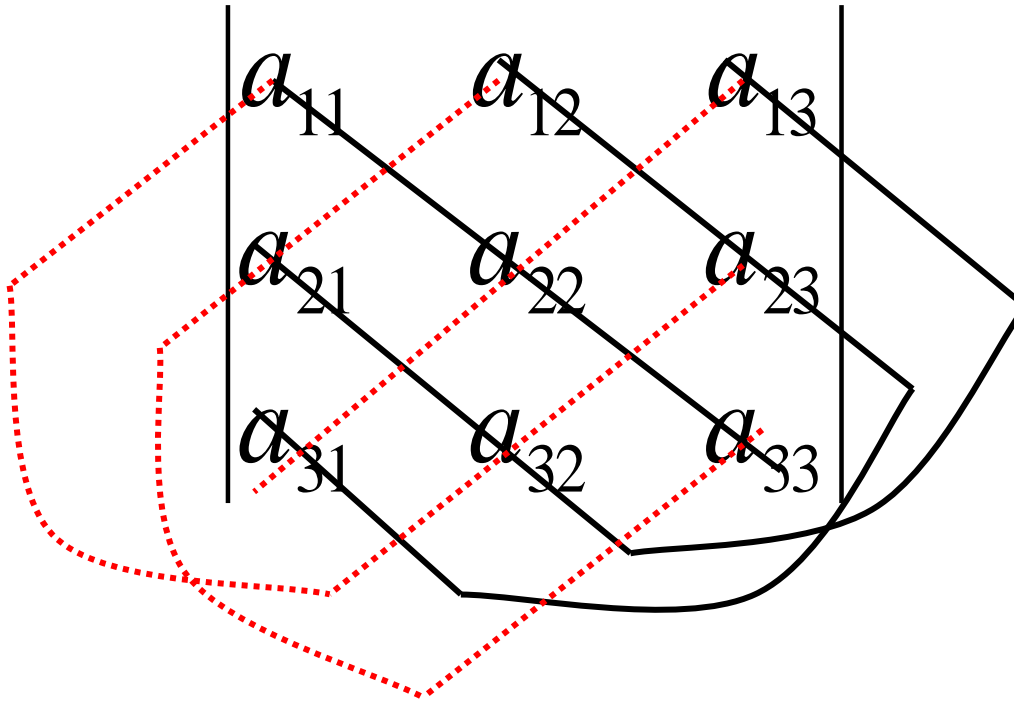
$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

类似地, 在求解三元线性方程组时, 为了记忆其求解公式, 可引入三级行列式. 三级行列式的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三级行列式的展开式也可用对角线法得到,
三级行列式的对角线法则如下图所示:



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号, 每一条虚线上的三个元素的乘积带负号, 所得六项的代数数和就是三级行列式的展开式.

利用三阶行列式求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

设系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$



记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

例 2 计算三级行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法, 得

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 1 \times (-1) + (-2) \times (-3) \times (-1) + 1 \times 2 \times 1 \\ &\quad - 1 \times (-3) \times 1 - (-2) \times 2 \times (-1) - 1 \times 1 \times (-1) \\ &= -1 - 6 + 2 + 3 - 4 + 1 \\ &= -5. \end{aligned}$$



例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) + (-2) \times (-3) \times (-1) \\ + 1 \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times (-1) - (-2) \times 2 \times (-1) - 1 \times (-3) \times 1 \\ = -5 \neq 0,$$

同理可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

故方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

现在的问题是, 对于 n 元线性方程组, 是否也有类似的求解公式. 但要讨论 n 元线性方程组, 首先就要把二级和三级行列式加以推广, 引入 n 级行列式的概念.



高等代数

