第九章 欧几里得空间

第三节　　同　构

主要内容

- 同构的定义
- 同构的性质

一、同构的定义

我们来建立欧氏空间同构的概念.

定义 8 实数域 R 上欧氏空间 V 与 V' 称为**同构**的，如果由 V 到 V' 有一个双射 σ，满足

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

3) $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$,

这里 $\alpha,\beta\in V, k\in \mathrm{R}$，这样的映射 σ 称为 V 到 V' 的**同构映射**.

设 V 是一个 n 维欧氏空间，在 V 中取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.　在这组基下，$V$ 中每个向量 α 都可表示为

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n .$$

令

$$\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n .$$

我们知道，这是V到R^n的一个双射，并且适合线性空间同构定义中条件1)、2)（第六章第八节）. 上一节的性质2说明，σ也适合这里定义中的条件3)，因而σ是V到R^n的一个同构映射，由此可知，每个n维的欧氏空间都与R^n同构.

性质 2：设α,β是V的任意两个向量， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是标准正交基，

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,\ \beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$$

则有 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 即$V$的内积的计算与中$R^n$的内积计算完全一样. 而欧氏空间$V$的内积是抽象的.

二、同构的性质

性质　同构作为欧氏空间之间的关系具有以下性质：

1) 反身性　V 与 V 自身同构，且其同构映射为恒等映射；

2) 对称性　设 V_1 与 V_2 同构，V_1 到 V_2 的同构映射为 σ，则 V_2 与 V_1 同构，且 V_2 到 V_1 的同构映射为 σ^{-1}；

3) 传递性　设 V_1 与 V_2 同构， V_2 与 V_3 同构，V_1 到 V_2 和 V_2 到 V_3 的同构映射分别为 σ_1, σ_2，则 V_1 与 V_3 同构，且 V_1 到 V_3 的同构映射为 $\sigma_2\sigma_1$.

注：

1\. 若σ是欧氏空间V到V'的一个同构映射，那么σ也是V到V'作为线性空间的同构映射.

2\. 同构的欧氏空间必有相同的维数.

3\. 任一n维欧氏空间V都与$\mathbf{R}^n$同构.

既然每个 n 维欧氏空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构，按对称性与传递性即得，任意两个 n 维欧氏空间都同构.

综上所述，就有

定理 3 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.

这个定理说明，从抽象的观点看，欧氏空间的结构完全被它的维数决定.

例 1： 给出两个欧氏空间

$$V_1 = R^3$$

$$V_2 = Span\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{sinx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cosx}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

其中 V_1 中的内积是标准欧氏内积， V_2 中内积定义为

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

试证明 V_1 与 V_2 同构.

解：构造同构φ如下：

$$\varphi: V_1 \to V_2$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_1 + \frac{sinx}{\sqrt{\pi}} a_2 + \frac{cosx}{\sqrt{\pi}} a_3$$

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3) \in V_1$$

显然φ是一个双射，同时满足

$$\big(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big) = (\alpha, \beta).$$

例 2： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为欧氏空间 V 的两组向量，证明：如果

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\quad i,j=1,\cdots,m$$

则子空间：

$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$

同构.

证明： 由$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$， $i,j=1,2,\cdots,m.$

可推出对任意实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$有

$$(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m k_ik_j(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m k_ik_j(\beta_i,\beta_j)$$

$$=(k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m,k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m)$$

于是，$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 当且仅当

$$k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0\ .$$

从而$\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$有完全相同的线性关系.

故此二向量组有相同的秩.

于是子空间V_1和V_2有相同的维数，故二者必同构.

证毕