

第六章 线性空间

第七节 子空间的直和

主要内容

- 定义
- 直和的充分必要条件
- 直和的性质
- 多个子空间的直和

假定 $W = V_1 + V_2$ ，则 W 中每个向量 γ 都能写成 V_1 中的元素 α 与 V_2 中的元素 β 之和： $\gamma = \alpha + \beta$ 。但一般来说，这种表达方法不是唯一的，因为可能有 $\alpha' \in V_1, \beta' \in V_2$ 也使得 $\gamma = \alpha' + \beta'$ 。例如，在 R^n 中，取

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$$

$$\beta_1 = (0, 0, -1, -1), \beta_2 = (0, -1, 0, 1)$$

令 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$

$$W = V_1 + V_2$$

取 $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 = (1, -1, -2, 0)$,

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = (0, 1, -1, -2),$$


则 $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$, 从而

$$\gamma = \alpha + \beta = (1, 0, -3, -2) \in W$$

可是若取

$$\alpha' = \alpha_1 - \alpha_2 = (1, 0, -1, 0)$$

$$\beta' = 2\beta_1 + 0\beta_2 = (0, 0, -2, -2)$$

则也有 $\gamma = \alpha' + \beta'$. 这说明, 这个 γ 表示成 V_1 中的一个向量与 V_2 中的一个向量之和时, 表达式不唯一. 但在某些特殊情况表达式是唯一的. **例 2** 

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$$

$$\beta_1 = (0, 0, -1, -1)$$

$$\beta_2 = (0, -1, 0, 1)$$

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$$

$$W = V_1 + V_2$$

一、定义

子空间的直和是子空间的和的一个重要特殊情形.

定义 17 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

是唯一的, 这个和就称为**直和**, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

在第六节的**例 2**  中的和就是直和.

二、直和的充分必要条件

定理 9 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是等式

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

只有在 α_1, α_2 全为零时才成立.

证明 定理的条件实际上就是：零向量的分解式是唯一的. 因而这个条件显然是必要的. 下面来证这个条件的充分性.

设 $\alpha \in V_1 + V_2$ ，它有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2.$$

于是

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0,$$

其中 $\alpha_1 - \beta_1 \in V_1, \alpha_2 - \beta_2 \in V_2$. 由定理的条件, 有

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \text{ 即 } \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2.$$

这就是说, 向量 α 的分解式是唯一的.

证毕

推论 和 $V_1 + V_2$ 为直和的充分必要条件是

$$V_1 \cap V_2 = \{ \mathbf{0} \}.$$

证明 先证充分性. 假设有等式

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

那么

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \in V_1 \cap V_2.$$

由假设 $V_1 \cap V_2 = \{ \mathbf{0} \}$, 得

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{0}.$$

即零向量的分解唯一, 这就证明了 $V_1 + V_2$ 是直和.

再证**必要性**. 任取向量 $\alpha \in V_1 \cap V_2$. 于是零向量可以表示成

$$0 = \alpha + (-\alpha), \quad \alpha \in V_1, -\alpha \in V_2.$$

因为是直和, 所以 $\alpha = -\alpha = 0$. 这就证明了

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

证毕

定理 10 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 令 $W = V_1 + V_2$, 则


$$W = V_1 \oplus V_2$$

的充分必要条件为

$$\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

证明 因为

$$\text{维}(W) + \text{维}(V_1 \cap V_2) = \text{维}(V_1) + \text{维}(V_2),$$

而由前面 **定理 9**  的推论知 $V_1 + V_2$ 为直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ，这是与 $\text{维}(V_1 \cap V_2) = 0$ 等价的，也就与 $\text{维}(W) = \text{维}(V_1) + \text{维}(V_2)$ 等价。
这就证明了定理。

证毕

总之，我们得到了

定理：设 V_1 和 V_2 是 n 维线性空间 V 的子空间，
则以下条件等价：

(1) $V_1 + V_2$ 是直和；

(2) $V_1 + V_2$ 中零向量表示成 V_1 中的向量与 V_2
中向量之和的方法是唯一的；

(3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ；

(4) $\dim(V_1 + V_1) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

三、直和的性质

定理 11 设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 W 使 $V = U \oplus W$. 这时 U 叫做 W 的**补空间**, W 叫做 U 的补空间, 或者 U 与 W 是互补子空间.

证明 取 U 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. 把它扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. 令

$$W = L(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

则有 $\dim(V) = \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$

因此

$$V = U \oplus W$$

证毕

例 1 在 3 维空间 P^3 中，过原点的两条相交直线的直和就是由这两条直线所确定的平面。如图6-9所示。

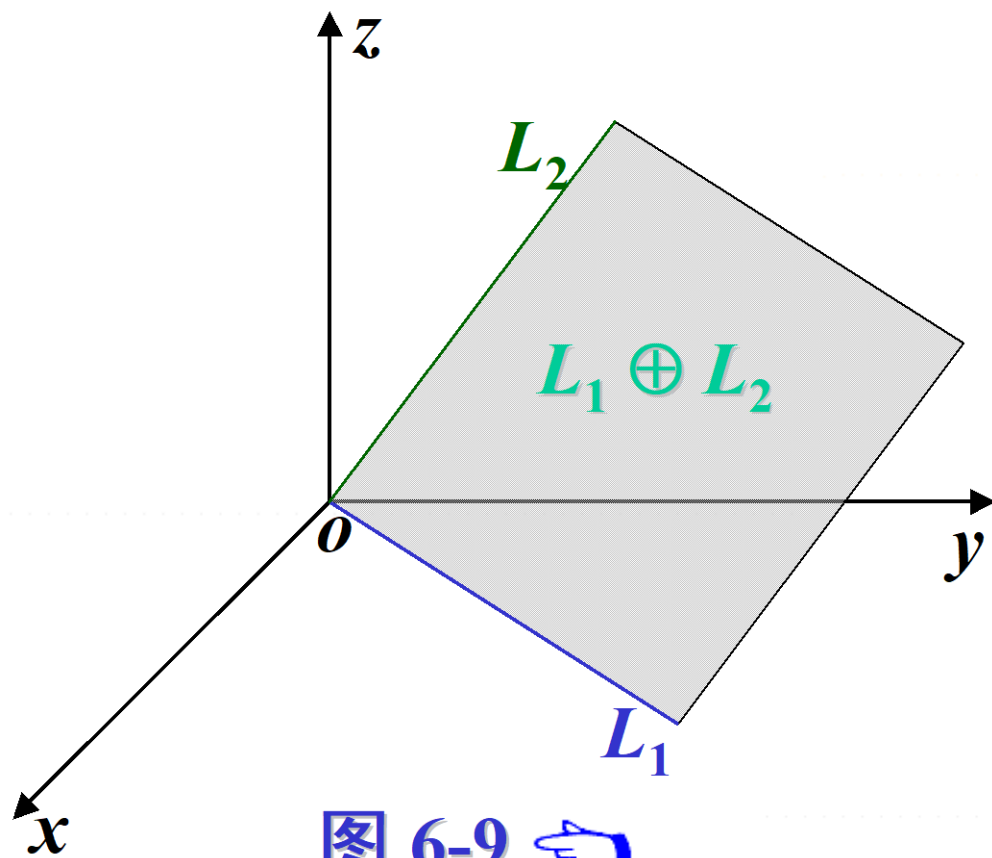


图 6-9 

例 2 设 $V = P^3$ ， L 是过原点的直线， π 是过原点的平面. 令 L 上的点构成的空间为 U ， π 上的点构成的空间为 W ，如果 $U \cap W = \{0\}$ ，即 L 不 π 上，则 $V = U \oplus W$. 如图 6-10 所示.

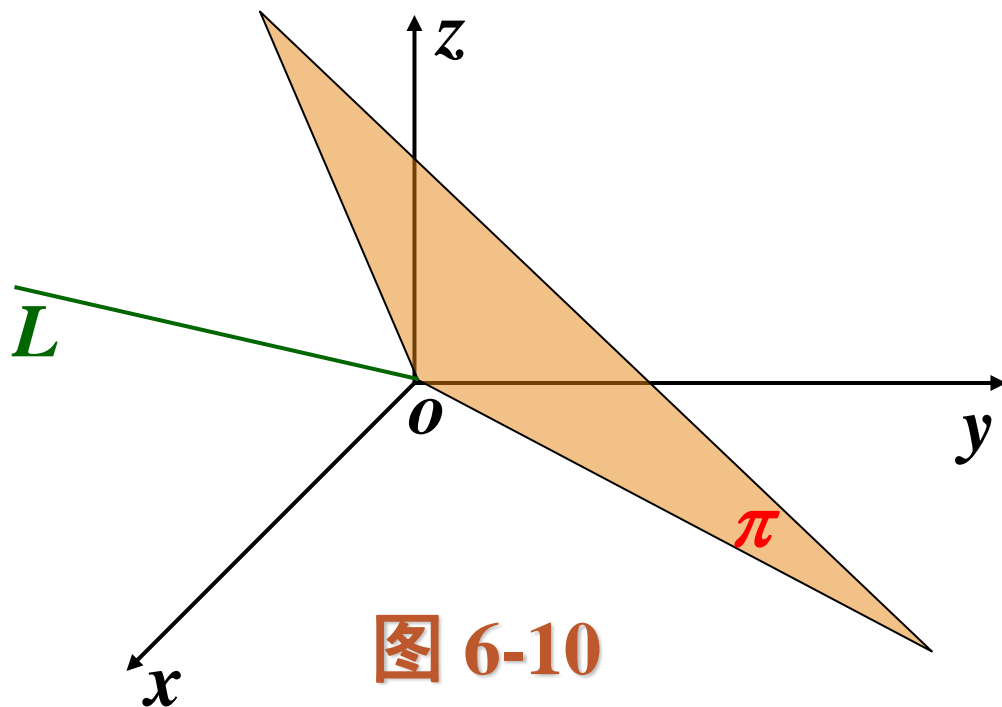


图 6-10

例 3 设 $V = P^3$, $U = L(\alpha_1)$, $\alpha_1 = (1, 1, 1)$,
求 U 的补空间 W .

解 

四、多个子空间的直和

定义 18 设 V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间. 如果和 $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i (i = 1, 2, \dots, s)$$

是唯一的, 这个和就称为直和. 记为

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s .$$

和两个子空间的直和一样，我们有

定理 12 设 V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间，则下面这些条件是等价的：

- 1) $W = \sum V_i$ 是直和；
- 2) 零向量的表法唯一；
- 3) $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ ；
- 4) $\dim(W) = \sum \dim(V_i)$.

例 4 在 R^3 中, 令

$$\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (1, 0, -1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$$

则

$$R^3 = L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus L(\alpha_3) = L(\alpha_1, \alpha_2) \oplus L(\alpha_3)$$

例 5 在 $R[x]_n$ 中, 记

$$L_i = L(x^i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

则

$$R[x]_n = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$$

例 6 用 $M_n(R)$ 表示实数域 R 上的所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合. 对于矩阵的加法和数量乘法, $M_n(R)$ 构成实数域 R 上的线性空间. 若用 E_{ij} 表示 (i, j) 元素为 1 而其余元素为 0 的矩阵, 则

$$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nn}$$

是 $M_n(R)$ 的一组基. 因此 $M_n(R)$ 是 n^2 维线性空间.

设 S 是 $M_n(R)$ 中所有对称矩阵的集合. T 为 $M_n(R)$ 中所有反对称矩阵的集合. 则 S 和 T 都是 $M_n(R)$ 的线性子空间, 且

$$\dim(S) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

$$\dim(T) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

因为每一个方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

所以

$$M_n(R) = S \oplus T.$$