线性代数 试卷3

院(系)__________ 班级___________ 学号___________ 姓名__________

试卷卷面成绩											占课程考核成绩85%	平时成绩占15%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	小计			
得分													
评阅													
审核													

注意事项:

（1）本试卷共九道大题，共八页，请认真核对。

（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填、错填或涂改的试卷为无效试卷。

（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔或红笔答卷的试卷为无效试卷。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

得 分

一、单项选择题（本题共15分，每小题3分）

1．设n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足关系式$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位阵，则必有__________。

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

2．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是_____________。

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(B) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

3．设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则当_____________时，$A-tE$为正定矩阵。

(A) $t<\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ (B) $t>\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

(C) $t<\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ (D) $t>\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

4．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$n-1$，α_1,α_2均为非零向量且满足$\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_2$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\frac{1}{2}\alpha_2$的通解为（$k$为任意常数）

(A) $k\alpha_1+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (B) $k\alpha_1+\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

(C) $k\alpha_2+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (D) $k\alpha_2+\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

5．设n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆，其伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$，则$\left\|\boldsymbol{A}^*\right|\boldsymbol{A}\right|=$________________。

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n^2}$　　(B) $|\boldsymbol{A}|^{n}$　　(C) $|\boldsymbol{A}|^{n^2-n}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|^{n^2-n+1}$

得 分

二、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1．设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为________________。

2．设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $(n+1)\times n$ 矩阵，则 $|(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})|=$______________。

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geq 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$____________________。

4．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是______________。

5．若 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________________。

得 分

三、（本题 9 分）

计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$。

得 分

四、（本题 10 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

得 分

五、（本题 14 分）

已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$ 及 $\beta=(1,1,b+3,5)^{\mathrm{T}}$,

(1) a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示？并写出该表示式。

得 分

六、（本题 12 分）

求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 \quad + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \\ 7x_1 \quad + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

得 分

七、（本题 15 分）

求一个正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形。

得 分

八、（本题 5 分）

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是实数，问二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

在什么条件下是正定的？

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

得 分

九、（本题 5 分）

证明：n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n \end{vmatrix}\neq 0$$，其中α_i^{T}表示列向量α_i的转置，$i=1,2,\cdots,n$。

线性代数试题 3 答案

一、单项选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. D;　2. C;　3. A ;　4. A ;　5. D

二、填空题（本题共 15 分，每小空 3 分）

1. 0 ;　2. 0 ;　3. 0 ;　4. $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$;　5. 24

三.（9 分）

x^4

四.（10 分）

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

五.（14 分）

解：(1)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3\\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0\end{pmatrix}$$

所以当 $a=-1,b\neq 0$ 时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合。

(2)

当 $a\neq -1$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\,\alpha_4$$

六.（12 分）

解:

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$，其中 k 为任意常数。

七.（15 分）

取正交矩阵：$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$

标准形：$f(x_1, x_2, x_3) = 9y_3^2$

八.（5 分）

解: 只需寻求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零时，$x_1 + a_1x_2, x_2 + a_2x_3, \cdots, x_{n-1} + a_{n-1}x_n, x_n + a_nx_1$ 也不全为零的条件

转化为：下面齐次线性方程组只有零解的条件

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 = 0 \\ x_2 + a_2x_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = 0 \\ x_n + a_nx_1 = 0 \end{cases}$$

因为系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$

所以当$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n \neq (-1)^n$时，齐次线性方程组只有零解。所以当$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全为零时，二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，即为二次型正定。

证明:

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$\because \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} \left(\alpha_1,\alpha_2,,\cdots\alpha_n\right) = A^T A$$

$$\therefore D = \left|A^T A\right| = \left|A^T\right|\left|A\right| = \left|A\right|^2 \quad \therefore D \neq 0 \Leftrightarrow \left|A\right| \neq 0$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是$\left|A\right| \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$。