# 高等代数学（第四版）习题解答
# 第八章　二次型

**注**　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

**高代白皮书 (第四版):**　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

## 8.1　二次型的化简与矩阵的合同

1. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块行与第 $j$ 分块行相当于左乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块列与第 $j$ 分块列相当于右乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}'$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}'$ 是合同变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于左乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块列右乘非异阵 $\boldsymbol{M}'$ 相当于右乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$. 注意到 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})'=\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$ 是合同变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块行左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 $j$ 分块行上相当于左乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 分块列右乘矩阵 $\boldsymbol{M}'$ 加到第 $j$ 分块列上相当于右乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$. 注意到 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})'=\boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$, 故题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$ 是合同变换.

2. 例 8.1.

3. 基础训练填空题 1.

4. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 故存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 等式两边同时取伴随, 可得 $\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^*=\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}')^*=\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}^*)'$. 注意到 $\boldsymbol{C}^*$ 也是非异阵, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 合同.

5. 例 8.5.

6. 例 8.19.
7. 例 8.20.
8. 例 8.16.
9. 例 8.17.
10. 基础训练解答题 1.

## 8.2 二次型的化简

1. (1) 先将含有 $x_1$ 的项放在一起凑成完全平方再减去必要的项:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \\ &= \big((x_1+2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\big)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2. \end{aligned}$$

再对后面那些项配方:

$$\begin{aligned} -3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2 &= -\left(3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2-\frac{1}{3}x_3^2\right)+2x_3^2 \\ &= -3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3, \\ y_2=x_2+\dfrac{1}{3}x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此 $f=y_1^2-3y_2^2+\dfrac{7}{3}y_3^2$.

(2) 先作如下变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

代入原二次型得

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

这时 $y_1^2$ 项不为零, 于是

$$\begin{aligned} f &= (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 \\ &= \big((y_1 + y_3)^2 - y_3^2\big) - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

(3) 先将含有 $x_1$ 的项放在一起凑成完全平方再减去必要的项:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ =&(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ =&\ \big((x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3\big) + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ =&(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 6x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 4x_3^2. \end{aligned}$$

再对后面那些项配方:

$$\begin{aligned}
&\quad 6x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 4x_3^2 \\
&= -\left((2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - \frac{3}{2}x_2x_4\right) - 2x_2x_4 \\
&= -(2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{9}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_2x_4 \\
&= -(2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + (\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{2}{9}x_4^2.
\end{aligned}$$

于是

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + (\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{2}{9}x_4^2.$$

令

$$\begin{cases}
y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \\
y_2 = -\dfrac{3}{2}x_2 + 2x_3 - \dfrac{1}{2}x_4, \\
y_3 = \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{1}{6}x_4, \\
y_4 = x_4,
\end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

因此 $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + \dfrac{2}{9}y_4^2$.

(4) 先作如下变换:

$$\begin{cases}
x_1 = y_1 + y_2, \\
x_2 = y_1 - y_2, \\
x_3 = y_3 + y_4, \\
x_4 = y_3 - y_4,
\end{cases}$$

代入原二次型得

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_1y_3 + y_1y_4 - y_2y_3 - y_2y_4.$$

这时 $y_1^2$ 项不为零, 于是

$$\begin{aligned}
f &= (y_1^2 + y_1y_3 + y_1y_4) - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 \\
&= \left((y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 - y_1y_3 - y_1y_4 - \frac{1}{2}y_3y_4\right) \\
&\quad - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - y_2^2 + \frac{3}{4}y_3^2 - \frac{5}{4}y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 - \frac{1}{2}y_3y_4 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - (y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 + y_3^2 - y_4^2.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}
z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\
z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\
z_3 = y_3, \\
z_4 = y_4,
\end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

因此 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$.

2. (1) 记与 $f$ 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $f$ 可化简为

$$y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 记与 $f$ 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_3)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $f$ 可化简为

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - 2y_3^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 记与 $f$ 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_4)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 2 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & -3 & -2 & 1\end{array}\right).$$

于是 $f$ 可化简为

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 8y_4^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 记与 $f$ 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_4)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc:cccc}0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}2 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $f$ 可化简为

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_4^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 基础训练解答题 2. 答案为 $a = 2$, $\boldsymbol{C}$ 可取为 (选取不唯一):

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

## 8.3 惯性定理

1. 基础训练填空题 10. 答案为 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

2. 基础训练填空题 2. 例如令 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{1,1,-1\}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}\{-1,-1,1\}$, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 的正惯性指数不相同, 因此不合同.

3. 例 8.22.

4. 例 8.23.

5. 由例 3.76 可知, $\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

6. 例 8.35. 当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 1$ 时, $f$ 的正惯性指数等于 $n$.

7. 例 8.31.

8. 例 8.37.

9. 例 8.6.

10. 例 8.10. $\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数都为 $n$.

## 8.4 正定型与正定矩阵

1. (1) 二次型 $f$ 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&2&2\\-4&2&1\end{pmatrix},$$

对其进行如下合同变换:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&10\\0&10&-15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&35\end{pmatrix}.$$

由此可得 $f$ 是不定型.

(2) 二次型 $f$ 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},$$

对其进行如下合同变换:

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $f$ 是半正定型.

2. (1) 二次型 $f$ 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 5 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$
$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

要使 $\boldsymbol{A}$ 正定, 必须 $\lambda - 2 > 0$, 即得 $\lambda > 2$.

(2) 二次型 $f$ 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 2 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2,$$
$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2.$$

要使 $\boldsymbol{A}$ 正定, 必须 $2-\lambda^2>0$ 且 $5-3\lambda^2>0$, 即得 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<\lambda<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

3. 例 8.59.

4. 例 8.2.

5. 基础训练解答题 6.

6. 例 8.24.

7. 例 8.46 (1).

8. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆半正定阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于阶数 $n$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于阶数 $n$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵.

9. 例 8.3.

10. 基础训练解答题 12.

11. 例 8.63.

12. 例 8.64. 例如, $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{1,0,-1\}$ 的顺序主子式都非负, 但 $\boldsymbol{A}$ 不是半正定阵.

13. (1) 例 8.46 (1).

(2) 例 8.62 (1).

(3) 例 8.60.

14. 例 8.11.

## 8.5 Hermite 型

1. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行相当于左乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列相当于右乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 注意到 $\overline{\boldsymbol{P}_{ij}}'=\boldsymbol{P}_{ij}$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}$ 是复相合变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行乘以非零复数 $k$ 相当于左乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(k)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列乘以共轭复数 $\overline{k}$ 相当于右乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$. 注意到 $\overline{\boldsymbol{P}_i(k)}'=\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_i(k)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$ 是复相合变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行乘以复数 $k$ 加到第 $j$ 行上相当于左乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(k)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列乘以共轭复数 $\overline{k}$ 加到第 $j$ 列上相当于右乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$. 注意到 $\overline{\boldsymbol{T}_{ij}(k)}'=\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$, 故题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(k)\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$ 是复相合变换.

2. 首先我们证明: 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则存在非异复方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 $(1,1)$ 元素不等于零. 不妨设 $a_{11}=0$, 若存在某个 $a_{ii}\neq 0$, 则将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第 $i$ 行对换, 再将第一列与第 $i$ 列对换, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与原矩阵复相合,

且它的第 $(1,1)$ 元素不为零. 若所有的 $a_{ii}=0$, 则可取某个 $a_{ij}\neq 0\,(i\neq j)$. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 行乘以 $a_{ij}$ 加到第 $i$ 行上, 再将第 $j$ 列乘以 $\overline{a_{ij}}$ 加到第 $i$ 列上, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与原矩阵复相合. 由 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵可知 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}\neq 0$, 于是得到矩阵的第 $(i,i)$ 元素为 $2|a_{ij}|^2\neq 0$, 再用前面的办法使第 $(1,1)$ 元素不等于零即可.

接下去证明定理 8.5.1, 对阶数 $n$ 进行归纳. $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶 Hermite 矩阵成立, 现考虑 $n$ 阶的情形. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 结论显然成立, 下设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$. 由前面的讨论, 不妨设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中 $a_{11}\neq 0$ (注意 $a_{11}$ 是实数). 若 $a_{i1}\neq 0$, 则可将第一行乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 $i$ 行上, 再将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}\overline{a_{i1}}$ 加到第 $i$ 列上, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 是复相合的. 由于 $\overline{a_{i1}}=a_{1i}$, 故得到矩阵的第 $(1,i)$ 元素及第 $(i,1)$ 元素均等于零. 依次这样做下去, 可把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第一列除 $a_{11}$ 外的元素全部消去, 于是 $\boldsymbol{A}$ 复相合于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右下角是一个 $n-1$ 阶 Hermite 阵, 记为 $\boldsymbol{A}_1$. 因此由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶非异复方阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{D}}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D}$ 为对角阵, 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

是一个对角阵. 显然

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}' \end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}}',$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 复相合于对角阵, 即存在非异复方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{AC}$ 是对角阵. 注意到 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{AC}$ 仍是 Hermite 阵, 因此主对角线上的元素等于其共轭, 必为实数.

3. 由习题 2 的结论, 任意一个 Hermite 阵必复相合于一个实对角阵, 因此不妨设与 $f$ 相伴的 Hermite 阵已是实对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_p,d_{p+1},\cdots,d_r,0,\cdots,0\},$$

其中 $d_1>0,\cdots,d_p>0$ 而 $d_{p+1}<0,\cdots,d_r<0$, 即

$$f=d_1\overline{x}_1x_1+d_2\overline{x}_2x_2+\cdots+d_r\overline{x}_rx_r.$$

令

$$\begin{cases} y_1=\sqrt{d_1}x_1,\cdots,y_p=\sqrt{d_p}x_p; \\ y_{p+1}=\sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1},\cdots,y_r=\sqrt{-d_r}x_r; \\ y_j=x_j\,(j=r+1,\cdots,n), \end{cases}$$

于是

$$f=\overline{y}_1y_1+\cdots+\overline{y}_py_p-\overline{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\overline{y}_ry_r,$$

这就是 Hermite 型的标准型.

再证 $p=k$. 用反证法, 设 $p>k$. 由条件可知

$$\overline{y}_1y_1+\cdots+\overline{y}_py_p-\overline{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\overline{y}_ry_r=\overline{z}_1z_1+\cdots+\overline{z}_kz_k-\overline{z}_{k+1}z_{k+1}-\cdots-\overline{z}_rz_r.$$

又设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z},$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$. 令

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ z_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

因为 $p > k$, 故齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \cdots + c_{kn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0 \end{cases}$$

必有非零解 ($n$ 个未知数, $n-(p-k)$ 个方程式). 令其中一个非零解为 $y_1 = a_1, \cdots, y_p = a_p, y_{p+1} = 0, \cdots, y_n = 0$, 把这组解代入一开始的等式左边得到

$$|a_1|^2 + \cdots + |a_p|^2 > 0.$$

但这时 $z_1 = \cdots = z_k = 0$, 故等式右边将小于等于零, 引出了矛盾. 同理可证 $p < k$ 也不可能.

4. 设与 $\boldsymbol{A}$ 相伴的 Hermite 型为 $f(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(1) $\Rightarrow$ (2): 用反证法, 若 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $p < n$, 则 $f$ 可化为如下标准型:

$$f = \overline{y}_1 y_1 + \cdots + \overline{y}_p y_p - c_{p+1}\overline{y}_{p+1}y_{p+1} - \cdots - c_n \overline{y}_n y_n,$$

其中 $c_j \geq 0\,(p+1 \leq j \leq n)$. 这时令 $b_1 = \cdots = b_p = 0, b_{p+1} = \cdots = b_n = 1$, 则 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零. 假设这时 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{C}$ 是非异阵, 则从 $y_i = b_i\,(1 \le i \le n)$ 可得 $x_i = a_i\,(1 \le i \le n)$ 是一组不全为零的复数. 于是

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \le 0,$$

这与 $f$ 是正定 Hermite 型矛盾. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 $n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 复相合于 $\boldsymbol{I}_n$.

(2) $\Rightarrow$ (3): 因为 $\boldsymbol{A}$ 复相合于单位阵, 故由定义存在非异复方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 任取非零复列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}'\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \overline{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})}'(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) > 0,$$

这里用到 $\boldsymbol{B}$ 是非异复方阵, 从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵.

5. 先证必要性. 设 $n$ 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为正定阵, 则对应的 Hermite 型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i x_j$$

为正定型. 令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\overline{x}_i x_j,$$

则对任意一组不全为零的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

因此 $f_k$ 是一个正定 Hermite 型, 从而它的相伴矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ (由 $\boldsymbol{A}$ 的前 $k$ 行及前 $k$ 列组成) 是一个正定 Hermite 矩阵. 由习题 4 可知, $\boldsymbol{A}_k$ 复相合于 $\boldsymbol{I}_k$, 故存在 $k$ 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_k,$$

于是

$$\det(\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}) = |\det(\boldsymbol{B})|^2\det(\boldsymbol{A}_k) = 1,$$

即有 $\det(\boldsymbol{A}_k) > 0\,(k = 1, 2, \cdots, n)$.

再证充分性. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $\boldsymbol{A} = (a)$, $a > 0$, 于是 $f = a|x_1|^2$ 是正定型, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵. 设结论对 $n-1$ 阶 Hermite 矩阵成立, 现证明 $n$ 阶的情形. 记 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可写

为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零, 故 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的顺序主子式也全大于零, 由归纳假设, $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是正定 Hermite 矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 复相合于 $n-1$ 阶单位阵, 即存在 $n-1$ 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_{n-1}.$$

令 $\boldsymbol{C}$ 是下列分块矩阵:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{B}}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{B} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这是一个 Hermite 矩阵, 其形式为

$$\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ \overline{c_1} & \cdots & \overline{c_{n-1}} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

用习题 1 中的第三类共轭对称初等变换可将上述矩阵化为对角阵, 这相当于对 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 右乘一个非异阵 $\boldsymbol{Q}$ 后, 再左乘 $\overline{\boldsymbol{Q}}'$ 得到一个对角阵, 即

$$\overline{\boldsymbol{Q}}'\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, c\}.$$

由于 $|\boldsymbol{A}| > 0$, 故 $c > 0$, 这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定 Hermite 矩阵.

# 复习题八

1. 例 8.12.

2. 先证必要性. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 为 $LU$ 分解, 其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{L}_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2$ 分别为主对角元全为 1 的 $k,n-k$ 阶下三角阵, $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 分别为 $k,n-k$ 阶非异上三角阵, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2\end{pmatrix}.$$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1|=|\boldsymbol{U}_1|\neq 0\,(1\leq k\leq n)$.

再证充分性 ($LU$ 分解的存在性) 以及 $LU$ 分解的唯一性. 对阶数 $n$ 进行归纳. 当 $n=1$ 时, 设 $\boldsymbol{A}=(a)$, 其中 $a\neq 0$, 则 $\boldsymbol{L}=(1)$, $\boldsymbol{U}=(a)$, 即 $LU$ 分解存在且唯一. 假设结论对 $n-1$ 阶非异阵成立, 现证明 $n$ 阶的情形. 设 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵, 则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & a_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $n-1$ 维列向量. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个顺序主子式不等于零, 故 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的 $n-1$ 个顺序主子式也不等于零, 由归纳假设可知, $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 存在唯一的 $LU$ 分解 $\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1}$, 其中 $\boldsymbol{L}_{n-1}$ 是主对角元全为 1 的 $n-1$ 阶下三角阵, $\boldsymbol{U}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶非异上三角阵. 令

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{y}' & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{O} & z\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是待定的 $n-1$ 维列向量, $z$ 是待定元, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$. 经计算可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & a_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}'\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}+z\end{pmatrix},$$

由此可唯一地解出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{U}_{n-1}^{-1}$, $z=a_{nn}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{U}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=a_{nn}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{A}_{n-1}|$. 因此, $n$ 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $LU$ 分解也是存在且唯一的.

3. 例 8.13.

4. 例 8.14.

5. 例 8.15.

6. 例 8.7.

7. 例 8.8. $\boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 的正惯性指数等于 $n-1$, 负惯性指数等于 1.

8. 例 8.9. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $(-1)^n|\boldsymbol{A}| > 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 2$, $q(\boldsymbol{A}) = n-2$.

(2) 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 1$, $q(\boldsymbol{A}) = n-2$.

(3) 当 $(-1)^n|\boldsymbol{A}| < 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 1$, $q(\boldsymbol{A}) = n-1$.

9. 例 8.21.

10. 例 8.27.

11. 例 8.28.

12. 例 8.29.

13. 例 8.30.

14. 例 8.32. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n = 2k$ 时, $f$ 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$.

(2) 当 $n = 2k+1$ 时, $f$ 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$.

15. 例 8.33. $f$ 的规范标准型为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

16. 例 8.34. $f$ 的标准型为 $2z_1^2 + \dfrac{3}{2}z_2^2 + \cdots + \dfrac{n}{n-1}z_{n-1}^2$.

17. 例 8.36. $f$ 的正惯性指数为 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 负惯性指数为 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

18. 例 8.38.

19. 例 8.39.

20. 例 8.40.

21. (1) 例 8.42 (1). $f$ 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$.

(2) 例 8.42 (2). $f$ 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$.

22. 例 8.43.

23. 例 8.44.

24. 例 8.45.

25. 例 8.46 (3).

26. 例 8.47.

27. 例 8.48 (1).

28. 例 8.49.

29. 例 8.50.

30. 例 8.51.
31. 例 8.52.
32. 例 8.53.
33. 例 8.54.
34. 例 8.55.