高等代数
习题课

2022.12.13

行列式

例1 计算四阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$的值。

解：将行列式按照第一列展开可得：$D=a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$

再将第一个行列式按照第一列展开、将第二个行列式按照第一行展开得：

$$D=a_1\left(a_2\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_2\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2+1)\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2+1)(a_3a_4+1)+a_1a_4$$

$$=a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_3a_4+a_1a_4+1$$

例2 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ -y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$的值。

解：将第2列乘以 y_1 后加到第1列上，将第3列乘以 y_2 后加到第2列上，…，以此类推，将第n-1列乘以 y_{n-1} 后加到第1列上，可得：

$$D=\begin{vmatrix} 1+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$$

例3 已知 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 6 & 7\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ ______

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 6 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -6 & -2 & -1\\ 0 & 5 & 7 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -6 & -2 & -1\\ 5 & 7 & 8\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6 & -2\\ 5 & 7\end{vmatrix}=32$$

例4 设A为3阶方阵，$|A| = 2$，则有$|3A^*| =$ $\boxed{(A)108}$ (B)54 (C)3 (D)12

解：当A为n阶矩阵、k为常数时，则 $|kA| = k^n|A|$

$$\because AA^* = |A|E$$

$$\therefore A^* = |A|A^{-1}$$

$$\therefore |A^*| = |A|^3|A^{-1}|$$

$$\because |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\therefore |A^*| = |A|^2 = 4$$

$$\therefore |3A^*| = 3^3 \times 4 = 108$$

向量空间

例1 设η_1与η_2为非齐次线性方程组$Ax=b$两个不同的解，

ξ_1与ξ_2为对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

k_1与k_2为任意常数，$Ax=b$的通解为：

$(A)\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)$

$(B)\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)$

$\boxed{(C)}\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)$

$(D)\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)$

【解析】

$A\eta_1=b, A\eta_2=b\to A(\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2})=b$

$A\xi_1=0, A\xi_2=0\to A(\xi_1-\xi_2)=0$

所以特解是$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

基础解系是$k_1\xi_1+k_2(\xi_2-\xi_1)=(k_1-k_2)\xi_1+k_2\xi_2$

由于ξ_1，ξ_2线性无关，则$(k_1-k_2)=k_2=0$

所以$Ax=b$的通解是ξ_1与$\xi_2-\xi_1$

所以$Ax=b$的通解为$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)$

例2　若n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$A$为$m\times n$矩阵且$r(A)=n$。

证明：向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关。

证明:$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

$\therefore r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\le \min\{r(A),r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\}$

$\therefore r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\le n$

又由$B=A_{m\times r}K_{r\times s}$时，有$r(B)\ge r(A)+r(K)$

$\therefore r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\ge n$

即$r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=n$

因此$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)$线性无关

证毕

线性方程组

例1 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = b + 8 \end{cases}$

当b为何值时，方程组无解？当b为何值时，方程组有无穷多解？并在无穷多解时求出方程组的通解。

解：将增广矩阵进行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 5 & b+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

所以当$b \neq -1$时，方程组无解

所以当$b = -1$时，方程组有无穷多解

此时增广矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

令自由变量$x_3=0, x_4=0$，得$x_2=2, x_1=-1$，所以特解为$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

与导出组同解的方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2-x_3+x_4=0\\ x_4=0\end{cases}$

令自由变量$x_3=1$，得$x_2=1, x_1=-2, x_4=0$所以导出组得基础解系为$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

所以方程组的通解为$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$(其中$C$为任意常数）

矩　阵

例1 设$A \in P^{s\times n}$，证明：对任意矩阵$B \in P^{s\times m}$，矩阵方程$AX = B$有解的充要条件是$rank(A) = s$.($rank(A)$表示矩阵A的秩)

证明：必要性。取矩阵B，使$rank(B) = s$，则$\exists X_0 \in P^{n\times m}$，使$AX_0 = B$,则

$$rank(A) \ge rank(B) = s$$

而$A \in P^{s\times n}$，则$rank(A) \le s$，从而$rank(A) = s$

充分性。令$B = (B_1, B_2, \cdots B_m)$，对$n$元线性方程组$AX = B_j$,有

$$rank(A) \ge rank(A, B_j) = s$$

方程组$AX = B_j$有解$x_j, j = 1,2,\cdots m$

令$X_0 = (x_1, x_2, \cdots x_m)$，则 X_0是矩阵方程$AX = B$的解

证毕

例2 设$A \in R^{m\times n}$，证明$rank(A)=rank(A^T A)=rank(AA^T)$。

证明：（1）$rank(A)=rank(A^T A)$

只需证明方程$AX=0$与$A^T AX=0$同解即可。

显然，若x_0是$AX=0$的解，则必是$A^T AX=0$的解。

反之，若x_0是$A^T AX=0$的解，则由$A^T Ax_0=0 \Rightarrow x_0^T A^T Ax_0=0$

即$(Ax_0)^T Ax_0=0 \Rightarrow Ax_0=0$,即$x_0$为$AX=0$的解。

基于此，方程$AX=0$与$A^T AX=0$同解。它们的基础解系的个数完全相同。

即$n-rank(A)=n-rank(A^T A)$，从而$rank(A)=rank(A^T A)$

（2）$rank(A)=rank(AA^T)$

由于$rank(A)=rank(A^T)$

则由（1）可知$rank(A)=rank(A^T)=rank(AA^T)$.证毕

例3　令A为n阶方阵，$A+E$可逆，且$f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$

试证明：　(1)$(E+f(A))(E+A)=2E$（2）$f(f(A))=A$

证明：（1）由条件已知$f(A)(E+A)=E-A$，所以

$$(E+f(A))(E+A)=E+A+f(A)(E+A)$$

$$=E+A+E-A=2E$$

（2）由（1）可知$(E+f(A))^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$且$f(A)(E+A)=E-A$

$$f(f(A))=[E-f(A)][E+f(A)]^{-1}=[E-f(A)]\cdot\frac{1}{2}(E+A)$$

$$=\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}f(A)(E+A)=\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}(E-A)=A$$

例3 已知A的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&-3&0&8\end{pmatrix}$，且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，试求矩阵 B。

解：对于n阶方阵，由$AA^*=|A|E$可得$|AA^*|=|A|^n$，即$|A||A^*|=|A|^n$

故$|A^*|=|A|^{n-1}$，则$|A|=|A^*|^{1-n}=8^{-3}=2$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&-3&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0&4\end{pmatrix}$$

由$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$可得 $B=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\1&3&0&-1\end{pmatrix}$

线性空间

例1 在线性空间P^4中，求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵，并求$\alpha=(1,4,2,3)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标，其中

$$\alpha_1=(1,0,0,0),\alpha_2=(4,1,0,0),\alpha_3=(-3,2,1,0),\alpha_4=(2,-3,2,1)$$

$$\beta_1=(1,1,8,3),\beta_2=(0,3,7,2),\beta_3=(1,1,6,2),\beta_4=(-1,4,-1,-1)$$

解：令过渡矩阵为T，则有$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\1&3&1&4\\8&7&6&-1\\3&2&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}T$

因此$T=\begin{pmatrix}1&4&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\1&3&1&4\\8&7&6&-1\\3&2&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23&-7&-9&8\\6&3&3&-1\\2&3&2&1\\3&2&2&-1\end{pmatrix}$

$$令\begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&11&-36\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-101\\21\\-4\\3\end{pmatrix}$$

求$\alpha=(1,4,2,3)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为（$-101,21,-4,3$）

例2 设W是P^n的一个非零子空间，若对于W的每一个向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$来说，或者$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或者每一个α_i都不等于零，证明：维$(W)=1$

证明：由W是P^n的一个非零子空间，可得W中含有非零向量设若对于W的每一个向量

设W设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$

是W中的任两个非零向量，由题意可得每一个a_i,b_i都不等于零

$$b_1\alpha-a_1\beta=b_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)-a_1(b_1,b_2,\cdots b_n)=(0,b_1a_2-a_1b_2,\cdots,b_1a_n-a_1b_n)\in W$$

由题设条件由$b_1a_2-a_1b_2=\cdots=b_1a_n-a_1b_n=0$，即有$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

即W中任两个非零向量均成比例，因此维$(W)=1$

证毕

例3 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$是5维线性空间$V$的一组基，$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$V_2=span\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$.

（1）求$V_1\cap V_2$；（2）证明：$V_1+V_2=V$，并问V_1+V_2是否是直和.

解：（1）设$\alpha\in V_1\cap V_2$，则有$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=l_1\alpha_3+l_2\alpha_4+l_3\alpha_5$，即，

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+(k_3-l_1)\alpha_3-l_2\alpha_4-l_3\alpha_5=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关，所以$k_1=k_2=(k_3-l_1)=l_2=l_3=0$，因此$\alpha=k_3\alpha_3\in span\{\alpha_3\}$，

所以$V_1\cap V_2\subset span\{\alpha_3\}$，显然有$span\{\alpha_3\}\subset V_1\cap V_2$，所以$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}$

（2）V_1+V_2不是直和，这是因为$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}\neq\{0\}$

例4 设线性空间 V 的两个线性变换 σ 和 τ 是可交换的（即，对任何 $\alpha\in V$，有 $(\tau\sigma)(\alpha)=\tau[\sigma(\alpha)]=\sigma[\tau(\alpha)]=(\sigma\tau)(\alpha)$）. 证明：$\sigma$ 的值域 $\sigma(V)$ 是 τ 的不变子空间.

证明：任取 $\alpha\in\sigma(V)$，则存在 $\beta\in V$，使得 $\alpha=\sigma(\beta)$，于是，

$$\tau(\alpha)=\tau[\sigma(\beta)]=(\tau\sigma)(\beta)=(\sigma\tau)(\beta)=\sigma[\tau(\alpha)]\in\sigma(V)$$

所以，$\sigma(V)$ 是 τ 的不变子空间.

复习卷

一、**填空题**（共 15 分，每小题 3 分）

1．已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{A}^{*}\right|=$ $\underline{\quad \frac{7^n}{3} \quad}$.

2．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3．若向量组 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,3k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2k,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(k,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则 $k=$ $\underline{\ -2\ }$.

4．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为−1, 1, 2，则 $\left|\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\right|=$ $\underline{\quad -28 \quad}$.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若

$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=4$ ，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ $\underline{\quad 40 \quad}$.

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中______

【A】必有一个向量为零向量.

【B】必有二个向量对应分量成比例.

$\boxed{\text{【C】}}$必有一个向量是其余向量的线性组合.

【D】任意一个向量是其余向量的线性组合.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有________.

【A】$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$. 【B】$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$. $\boxed{\text{【C】}}$ $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 【D】$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

4．已知$m \times n$矩阵A的秩为$n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的两个不同的解，$k$为任意常数，则方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的通解为______

【A】$k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　【B】$k\boldsymbol{\alpha}_2$.　　【C】$k(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$.　　$\boxed{\text{【D】}}$ $k(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$.

5．若$a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{5k}$是五阶行列式中带正号的一项，则______

$\boxed{\text{【A】}}$ $i=1, j=4, k=2$.　　【B】 $i=1, j=2, k=4$.

【C】 $i=4, j=1, k=2$.　　【D】 $i=2, j=4, k=1$.

1．计算行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

$$=abcd+ab+cd+ad+1$$

2．计算 n（$n\geq 2$）阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

当 $n\geq 3$ 时，$D_n=0$.

当 $n=2$ 时，$D_2=(x_2-x_1)(y_2-2y_1)$.

四、（12 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = \lambda^2 \\ 2x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \end{cases},$$

当λ为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

1）当$\lambda \neq -2$且$\lambda \neq 3$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$，方程组有惟一解；

2）当$\lambda = -2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) = 3,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$，方程组无解；

3）当$\lambda = 3$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解.

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k \text{ 为任意常数.}$$

五．求向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

的秩与一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

五．　$R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=3$，

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$，　$\boldsymbol{\beta}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2$

八、（10 分）

1）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$均为三维列向量，且向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

2）设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$。

得 分

八、（本题 10 分）证明题。

1. 设非零向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的内积为零，证明：$|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2$。

2. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，构造向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$。证明：当$n$是偶数时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性相关；当$n$为奇数时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关。