高等代数习题课
期中复习

2023.04.19

01

多项式

知识点回顾

多项式的整除性

一、整除及其性质

定义 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若$\exists q(x) \in P[x]$，使得$f(x) = q(x)g(x)$，称$g(x)$能整除$f(x)$，记为$g(x)|f(x)$，否则称$g(x)$不能整除$f(x)$，记为$g(x) \nmid f(x)$。

有下列**性质**：

（i） 任一多项式可整除零多项式；

（ii）c、$cf(x)$均能整除$f(x)$，这里c为非零常数；

（iii）若$f(x)|g(x), g(x)|h(x)$，则$f(x)|h(x)$；

（iv）若$f(x)|g_i(x), i = 1,2,\cdots,s$，则$\forall u_i(x) \in P[x](i = 1,2,\cdots,s)$，有$f(x)|\sum_{i=1}^{s} u_i(x)\, g_i(x)$；

（v）$f(x)|g(x)$，且$g(x)|f(x) \Leftrightarrow f(x) = cg(x), c \neq 0, c \in P$。

二、带余除法

定理 设$f(x) \in P[x]$，则对$g(x) \in P[x], g(x) \neq 0, \exists q(x), r(x)$，使得$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$，其中$r(x) = 0$或$\partial^0(r(x)) < \partial^0(g(x))$，且这样的$q(x), r(x)$由$f(x), g(x)$唯一确定，分别称为商式与余式。

推论 设$f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$，则$g(x)|f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$。

知识点回顾

多项式的最大公因式

一、最大公因式

定义 设$f(x),g(x)\in P[x]$，若有

（i）$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的公因式；

（ii）$f(x)$与$g(x)$的任一个公因式都能整除$d(x)$，称$d(x)$为$f(x),g(x)$的最大公因式。

定理 $\forall f(x),g(x)\in P[x]$，必存在$f(x)$与$g(x)$的最大公因式$d(x)\in P[x]$，且有$u(x),v(x)\in P[x]$，使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$。

二、互素及其有关性质

定义 设$f(x),g(x)\in P[x]$，若$(f,g)=1$，则称$f(x)$与$g(x)$互素。

定理 $f(x),g(x)\in P[x]$，则$(f,g)=1\Leftrightarrow \exists u(x),v(x)\in P[x]$，使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

推论1 若$f(x)=f_1(x)(f,g),g(x)=g_1(x)(f,g)$，则$(f_1,g_1)=1$。

推论2 若$(g_1,f)=1,(g_2,f)=1$,则$(g_1g_2,f)=1$。

推论3 若$f(\mathrm{x})|g_1(x)g_2(x)$，且$(g_1,f)=1$，则$f(\mathrm{x})|g_2(x)$。

推论4 若$f_1(x)|g(x),f_2(x)|g(x)$，且$(f_1,f_2)=1$，则$f_1(x)f_2(x)|g(x)$。

知识点回顾

多项式的分解

一、不可约多项式及其性质

定义 设$p(x) \in P[x]$且$\partial^0(p(x)) \geq 1$，如果$p(x)$不能分解为$P[x]$中两个次数比$p(x)$低的多项式乘积，称$p(x)$在P上不可约，否则称$p(x)$在P上不可约。

命题1 设$p(x) \in P[x]$且$\partial^0(p(x)) \geq 1$，如果$p(x)$不可约$\Leftrightarrow p(x)$只有形如c与$cp(x)$的因式，这里$c \neq 0, c \in P$。

命题2 若$p(x)$为P上的不可约多项式，则$\forall f(x) \in P[x]$，或者$p|f$或者$(p.f) = 1$。

命题3 若$p(x)$为P上的不可约多项式，$p(x)|f_1(x)\cdots f_s(x), s \geq 2$，则$\exists i, p(x)|f_i(x)(1 \leq i \leq s)$。

二、分解定理

定理 设$f(x) \in P[x]$且$\partial^0(f(x)) \geq 1$，则

（i）$f(x)$必可分解为P上的有限个不可约多项式的乘积；

（ii）如果$f(\mathrm{x}) = p_1(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)\cdots q_t(x)$，其中$p_i(x), q_j(x)(i = 1,2.\cdots, s, j = 1,2,\cdots, t)$为$P$上的不可约多项式，则$s = t$且适当调整因式的次序后有$p_i(x) = cq_i(x)(i = 1,2.\cdots, s)$，其中$c_i(i = 1,2,\cdots, s)$为$P$的非零常数。

知识点回顾

多项式的分解

三、重因式定义

定义 $p(x)$为P上的不可约多项式满足$p^k(x)|f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，称$p(x)$为$f(x)$的k重因式。当$k=0$时，$p(x)$不为$f(x)$的因式；当$k=1$时，称$p(x)$为$f(x)$的单重因式；当$k>1$时，称$p(x)$为$f(x)$的重因式。

定理 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geq 1)$，则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.

推论1 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$\Leftrightarrow$ $p(x)$为$f(x)$与$f'(x)$的公因式。

推论2 $f(x)$无重因式$\Leftrightarrow$ $(f(x),f'(x))=1$。

有理系数多项式

定义 设$f(x)$为整系数的多项式，如果$f(x)$的各项系数的最大公因数是1，，称$f(x)$为本源多项式。

引理1 两个本原多项式的乘积仍为本原多项式。

引理2 设菲利昂的整系数多项式$f(x)$在有理数域Q上可约，则$f(x)$必能分解为两个次数较$f(x)$低的整系数多项式的乘积。

定理（Eisenstein） 设整系数多项式$f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+a_1x+a_0(a_n\neq 0,n\geq 1)$，如果存在素数$p$使得$p|a_l(l=0,1,2,\cdots,n),p\nmid a_n$，且$p^2\nmid a_0$，则$f(x)$在有理数域不可约。

例1 设两个多项式$f(x)$和$g(x)$不全为零，求证：对于任意的正整数n，有

$$(f(x),g(x))^{n}=(f^{n}(x),g^{n}(x))$$

证明： 令 $(f(x),g(x))=d(x)$,

则 $f(x)=d(x)f_1(x), g(x)=d(x)g_1(x)$

则 $(f_1(x),g_1(x))=1.$

那么 $(f_1^n(x),g_1^n(x))=1.$

又因为 $f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x), g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x).$

于是 $(f^n(x),g^n(x))=d^n(x)=(f(x),g(x))^n.$

证毕

例1　**设两个多项式$f(x)$和$g(x)$不全为零，求证：对于任意的正整数n，有**

$$(f(x),g(x))^{n}=(f^{n}(x),g^{n}(x))$$

证明： 首先$(f(x),g(x))^{n}\mid f^{n}(x),g^{n}(x),$

又$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

故$\left(\frac{f^{n}(x)}{(f(x),g(x))^{n}},\frac{g^{n}(x)}{(f(x),g(x))^{n}}\right)=1.$

$\exists u(x),v(x)$使　$u(x)\frac{f^{n}(x)}{(f(x),g(x))^{n}}+v(x)\frac{g^{n}(x)}{(f(x),g(x))^{n}})=1$

$$u(x)f^{n}(x)+v(x)g^{n}(x)=(f(x),g(x))^{n}.$$

得到$(f^{n}(x),g^{n}(x))=(f(x),g(x))^{n}.$

证毕

例2　设$f(x)$是整系数多项式，若$g(x)=f(x)+1$至少有三个互不相等的整数根，证明：$f(x)$没有整数根。

证明： 反证法

假设$f(x)$有整数根m，则$f(x)=(x-m)h(x)$

由于$x-m$是本原多项式，所以$h(x)$是整系数多项式，令x_1,x_2,x_3是$g(x)$的3个互不相等的整数根，则$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)p(x)$，其中$p(x)$是整系数多项式.

$$g(m)=f(m)+1=(m-x_1)(m-x_2)(m-x_3)p(m)$$

于是$m-x_1,m-x_2,m-x_3,p(m)$只能是1或-1，那么$m-x_1,m-x_2,m-x_3$中至少有两个同为1或-1，与x_1,x_2,x_3互不相等矛盾，所以$f(x)$没有整数根.

证毕

例3 设$p(x)$是数域P上的次数大于零的多项式，证明：$p(x)$是不可约多项式的充分必要条件是对任意的$f(x), g(x) \in P(x)$,由$p(x)|f(x)g(x)$一定推出$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$。

证明：充分性 反证法

若$p(x)$不是一个不可约多项式，则$p(x)$可以分解成次数低于$p(x)$的两个多项式的乘积

$$p(x) = h_1(x)h_2(x), \qquad \partial(h_i(x)) < \partial(p(x)),\ i = 1,2.$$

令 $f(x) = h_1(x), g(x) = h_2(x)$

则有 $p(x)|f(x)g(x) \Rightarrow p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$.

这与假设矛盾，所以$p(x)$是一个不可约多项式.

例3 设$p(x)$是数域P上的次数大于零的多项式，证明：$p(x)$是不可约多项式的充分必要条件是对任意的$f(x),g(x)\in P(x)$,由$p(x)|f(x)g(x)$一定推出$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$。

证明：必要性

如果 $p(x)|f(x)$，结论显然成立.

如果 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),f(x))=1$，而 $p(x)|f(x)g(x)$，所以$p(x)|g(x)$.

证毕

例4 设$a_1, a_2, \cdots a_n$是不同的整数，证明：

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\ \ +1$$

在有理数域上不可约或某一种有理系数多项式的平方。

证明： 如果$f(x)$在有理数域上不可约，则结论成立.

如果$f(x)$在有理数域上可约，则可以写成两个次数比它低的整系数多项式的乘积，令为

$$f(x)=f_1(x)f_2(x), \qquad \partial(f_i(x))<n\ , i=1,2.$$

由 $f(a_i)=1, i=1,2,\cdots,n$，则 $f_1(a_i)f_2(a_i)=1,\ \ i=1,2,\cdots,n.$

又 $f_1(a_i), f_2(a_i)\in\mathbb{Z}$，于是 $f_1(a_i)=f_2(a_i),\ \ i=1,2,\cdots,n.$

所以 $f_1(x)=f_2(x)$，因此 $f(x)=f_1^2(x).$

证毕

例5 **证明：$x^d-1|x^n-1$充要条件是$d|n$。**

证明：充分性

设$d|n$，且$n=qd$，则

$$x^n-1=(x^d)^q-1=(x^d-1)(x^{(q-1)d}+x^{(q-2)d}+\cdots+1)$$

故 $x^d-1|x^n-1$.

必要性

设 $x^d-1|x^n-1$，$n=qd+r, 0\le r<d$，r 为余数.

则 $x^n-1=x^{qd+r}-1=(x^{qd}-1)x^r+x^r-1$.

因为 $x^d-1|x^n-1$且 $x^d-1|x^{qd}-1$，故 $x^d-1|x^r-1$.

由于 $0\le r<d$，故 $r=0$，即 $d|n$.

证毕

例6 设m为自然数，则$g^m(x)|f^m(x)$的充要条件是$g(x)|f(x)$。

证明： 充分性显然，下证必要性.

设$g(x)$的典型分解式为$g(x)=bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$，其中$p_1(x),\cdots,p_r(x)$为首项为1的彼此不同的不可约多项式，由$g^m(x)|f^m(x)$，因而$f(x)$的典型分解式为

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)\cdot p_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$$

得到 $p_1^{ml_1}(x)\cdots p_r^{ml_r}(x)|p_1^{mk_1}(x)\cdots p_r^{mk_r}(x)\cdot p_{r+1}^{mk_{r+1}}(x)\cdots p_s^{mk_s}(x).$

故 $p_i^{ml_i}(x)|p_i^{mk_i}(x)$

得到 $l_i\le k_i, i=1,2,\cdots,r.$

故 $\mathrm{g(x)|f(x)}.$

证毕

例7 **证明：$(f(x),g(x))=1$充要条件是$(f(x^m),g(x^m))=1$，这里m为自然数。**

证明：必要性

由$(f(x),g(x))=1$可知存在$u(x),v(x)$使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$

则$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1.$

所以$(f(x^m),g(x^m))=1.$

充分性 **反证法**

设$(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$,有$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$

故$f(x^m)=d(x^m)f_1(x^m),g(x^m)=d(x^m)g_1(x^m).$

故$d(x^m)|f(x^m),d(x^m)|g(x^m)$

与$(f(x^m),g(x^m))=1$矛盾，因而结论成立.

证毕

例8 设$f(x)$为n次复系数多项式，且$f(0)=0$，令$g(x)=xf(x)$，若$f^{'}(x)|g^{'}(x)$，则$g(x)$有$n+1$重零根。

证明： $f(x)=0$，则结论成立，下设$f(x)\neq 0.$

因为$g(x)=xf(x)$，故$g^{'}(x)=f(x)+xf^{'}(x).$

由$f^{'}(x)|g^{'}(x)$，可得$f^{'}(x)|f(x)$

故$f(x)=a_0(x-a)^n, a_0\neq 0.$

又$f(0)=a_0(-a)^n=0.$

故$a=0, f(x)=a_0x^n, g(x)=a_0x^{n+1}, g(x)$有$n+1$重根。

证毕

例9 设$f(x)=x^p+p+1$，则$f(x)$在有理数域上不可约。

证明：（1）$p=2$时，$f(x)=x^2+3$，由Eisenstein判别法知在有理数域上不可约。

（2）$p>2$时，p为奇素数，令$x=y-1$

$$f(x)=(y-1)^p+p+1=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots-C_p^{p-1}y+(-1)^p+p+1$$

$$=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots-C_p^{p-1}y+p$$

由Eisenstein判别法知在有理数域上不可约。

证毕

例10　设$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，

求$(f(x),g(x))$，并求出$u(x),v(x)$使$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

解： 用辗转相除法可得$q_1(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9},r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$,

$q_2(x)=-\frac{27}{5}x+9,r_2(x)=9x+27,q_3(x)=-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81},r_3(x)=0.$

即$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x).$

所以$r_2(x)=9x+27$是$f(x),g(x)$的最大公因式.

于是$(f(x),g(x))=x+3$。

由$\begin{cases}f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)\\g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\end{cases}$可得

$$r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]$$

$$=-q_2(x)f(x)+(1+q_1(x)q_2(x))g(x)=(\frac{27}{5}x-9)f(x)+(-\frac{9}{5}x^2+\frac{18}{5})g(x)$$

令$u(x)=\frac{3}{5}x-1,v(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}x$就有$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$

02

线性变换

知识点回顾

线性变换与矩阵

- 设V为F上的线性空间，σ为V到自身的映射，且保持加法和数乘向量的运算，称σ为V的线性变化，即

$$\sigma:\ V \to V, \forall \alpha, \beta \in V, k_1, k_2 \in F，有\sigma(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1\sigma(\alpha) + k_2\sigma(\beta)。$$

- 设σ, τ均为V上的线性变换，令$\sigma\tau(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha))$，则$\sigma\tau$仍未$V$的线性变换。
- 设σ为V的线性变换，而τ为另一个线性变换，使$\sigma\tau = \varepsilon, \tau\sigma = \varepsilon$($\varepsilon$为恒等变换)，称$\sigma$为可逆线性变化，$\tau$为$\sigma$的逆变换，如果$\sigma$有逆变换，则唯一，因而记$\tau = \sigma^{-1}$。
- 设V为数域F上的n维线性空间，α_1，⋯，α_n为基，σ为V的线性变换，则$\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i1}\alpha_1 + \alpha_{i2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{in}\alpha_n$，

称$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$为$\sigma$在基$\alpha_1$，⋯，$\alpha_n$之下的矩阵。

- **定理** 线性空间中任一线性变换在不同的基下的矩阵使相似的。
- **定理** 设线性变换$\mathcal{A}$在基α_1，⋯，α_n下的矩阵是A，向量ξ在基ε_1，⋯，ε_n下的坐标是$(x_1$，⋯，$x_n)$，则$\mathcal{A}\xi$在基ε_1，⋯，ε_n下的坐标$(y_1$，⋯，$y_n)$可以按公式$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$计算。
- **定理** 设线性空间V中线性变换$\mathcal{A}$在两组基ε_1，⋯，ε_n，η_1，⋯，η_n下的矩阵分别为A和B，从基ε_1，⋯，ε_n到η_1，⋯，η_n的过度矩阵是X，于是$B = X^{-1}AX$。

知识点回顾

线性变换的值域与核、不变子空间及特征值、特征向量

定义 设$\mathcal{A}$是数域P上线性空间V的一个线性变换，如果对于数域P中一数λ_0，存在一个非零向量ξ，使得$\mathcal{A}\xi = \lambda_0\xi$，那么$\lambda_0$称为$\mathcal{A}$的一个特征值，而$\xi$称为$\mathcal{A}$的属于特征值$\lambda_0$的一个特征向量。

定理（哈密顿-凯莱） 设A是数域P上一$n \times n$矩阵，

$$f(\lambda) = A^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})A^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|E = O。$$

推论 设$\mathcal{A}$是有限维空间V的线性变换，$f(\lambda)$是$\mathcal{A}$的特征多项式，那么$f(\mathcal{A}) = 0$。

定理 设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换，ε_1，$\cdots$，ε_n是V的一组基，在这组基下$\mathcal{A}$的矩阵是A，则

（i）$\mathcal{A}$的值域$\mathcal{A}$V是由基像组成的子空间，即$\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$；

（ii）$\mathcal{A}$的秩=A的秩。

定理 设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换，则$\mathcal{A}$V的一组基的原像及$\mathcal{A}^{-1}(0)$的一组基合起来就是V的一组基，由此还有$\mathcal{A}$的秩+$\mathcal{A}$的零度=n。

定义 设$\mathcal{A}$是数域P上线性空间V的一个线性变换，W是V的子空间，如果W中的向量在$\mathcal{A}$下的像仍在W中，则称W是$\mathcal{A}$的不变子空间。

定理 设线性变换$\mathcal{A}$的特征多项式$f(\lambda)$，它可以分解成一次因式的乘积$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$，则V可以分解成不变子空间的直和$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$，其中$V_i = \{\xi \in V | (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i}\xi = 0\}$。

例1　设A,B为n阶方阵，且$A+B+AB=0$，则

（1）A与B的特征向量是公共的；

（2）A相似于对角矩阵，当且仅当B相似于对角矩阵;

（3）$r(A)=r(B)$。

例1 设A,B为n阶方阵，且$A+B+AB=0$，则

（1）A与B的特征向量是公共的；

证明：（1）设α为B的特征向量，对应的特征值为λ_0，而$B\alpha=\lambda_0\alpha, \alpha\neq 0$.

故$A\alpha+B\alpha+AB\alpha=0\Rightarrow A\alpha+\lambda_0\alpha+\lambda_0 A\alpha=0\Rightarrow(\lambda_0+1)A\alpha=-\lambda_0\alpha$.

若$\lambda_0\neq -1$，则$A\alpha=-\frac{\lambda_0}{(\lambda_0+1)}\alpha$，$\alpha$为A的特征向量.

若$\lambda_0=1$，而$B\alpha=-\alpha$得$-\alpha=0$，$\alpha=0$矛盾.

因为$A+B+AB=0$，

所以$(A+E)+(A+E)B=E\Rightarrow(A+E)(E+B)=E$.

故$(E+B)(A+E)=E$，A+BA+A=0.

由上证明A得特征向量也是B的特征向量，

因而A与B的特征向量是公共的.

例1 设A,B为n阶方阵，且$A+B+AB=0$，则

（1）A与B的特征向量是公共的；

（2）A相似于对角矩阵，当且仅当B相似于对角矩阵；

（2）**必要性**

由A相似于对角矩阵，因而存在可逆矩阵T使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow AT=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令$T=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$则$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i, i=1,2,\cdots,n.$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{-1}B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\end{pmatrix}$$

所以B相似于对角矩阵

充分性 同上证明.

例1　设A,B为n阶方阵，且$A+B+AB=0$，则

（1）A与B的特征向量是公共的；

（2）A相似于对角矩阵，当且仅当B相似于对角矩阵；

（3）$r(A)=r(B)$。

（3）由$A+B+AB=0$可得$A(E+B)=-B$.

则$r(A)\geq r(B)$

同样$(E+A)B=-A$可得$r(B)\geq r(A)$.

所以$r(A)=r(B)$

证毕

例2 已知$\mathcal{A}$是线性空间V的线性变换，且$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$。证明:

（1）$\mathcal{A}$的特征值只能是0和1

（2）若用V_1和V_2分别表示对应于特征值1和0的特征空间，

则$V_1=\mathcal{A}V, V_2=\mathcal{A}^{-1}(0)$

（3）$\mathrm{V}=V_1\oplus V_2=\mathcal{A}V+\mathcal{A}^{-1}(0)$

例2 已知$\mathfrak{R}$是线性空间V的线性变换，且$\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$。证明

（1）$\mathfrak{R}$的特征值只能是0和1

（2）若用V_1和V_2分别表示对应于特征值1和0的特征空间，

则 $V_1=\mathfrak{R}V, V_2=\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$

（3）$V=V_1\oplus V_2=\mathfrak{R}V\oplus\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$

解： （1）设λ_0 是 $\mathfrak{R}$ 的特征值，$\alpha\neq 0$是其特征向量。

即 $\mathfrak{R}\alpha=\lambda_0\alpha$，$\alpha\neq 0$。

由于$\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$,则有 $\lambda_0\alpha=\mathfrak{R}\alpha=\mathfrak{R}^2\alpha=\mathfrak{R}(\mathfrak{R}\alpha)=\mathfrak{R}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0{}^2\alpha$

但 $\alpha\neq 0$，故 $\lambda_0=\lambda_0{}^2$，从而 $\lambda_0=0$或$\lambda_0=1$。

例2 已知$\Re$是线性空间V的线性变换，且$\Re^2=\Re$。证明

（1）$\Re$的特征值只能是0和1

（2）若用V_1和V_2分别表示对应于特征值1和0的特征空间，

则 $V_1=\Re V, V_2=\Re^{-1}(\vec{o})$

（3）$V=V_1\oplus V_2=\Re V\oplus\Re^{-1}(\vec{o})$

$$\Re V=\{\Re\xi \mid \xi\in V\}$$

$$\Re^{-1}(\vec{0})=\{\xi \mid \Re\xi=\vec{0}, \xi\in V\}$$

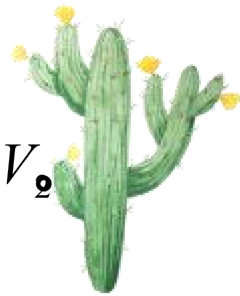
（2）任取$\alpha\in V_1$，即有$\Re\alpha=\alpha$。由于$\Re\alpha\in\Re V$，故$\alpha\in\Re V$，即$V_1\subseteq\Re V$。

另一方面取$\alpha\in\Re V$。令$\alpha=\Re\beta$，则$\Re\alpha=\Re^2\beta=\Re\beta=\alpha$。

又 $\alpha\in V_1$，故$\Re V\subseteq V_1$。因此$\Re V=V_1$。

任取$\alpha\in V_2$，即有$\Re\alpha=0$，$\alpha\in\Re^{-1}(\vec{o}), V_2\subseteq\Re^{-1}(\vec{o})$。

另一方面取$\alpha\in\Re^{-1}(\vec{o})$，$\Re\alpha=0$，$\alpha\in V_2$，$\Re^{-1}(\vec{o})\subseteq V_2$，于是$\Re^{-1}(\vec{o})=V_2$。



例2 已知$\mathfrak{R}$是线性空间V的线性变换，且$\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$。证明

（1）$\mathfrak{R}$的特征值只能是0和1

（2）若用V_1和V_2分别表示对应于特征值1和0的特征空间，

则 $V_1=\mathfrak{R}V, V_2=\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$

（3）$V=V_1\oplus V_2=\mathfrak{R}V\oplus\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$

$$\mathfrak{R}V=\{\mathfrak{R}\xi \mid \xi\in V\}$$
$$\mathfrak{R}^{-1}(\vec{0})=\{\xi \mid \mathfrak{R}\xi=\vec{0}, \xi\in V\}$$

（3）任取$\alpha\in V$ 则有 $\alpha=\mathfrak{R}\alpha+(\varepsilon-\mathfrak{R})\alpha$。

显然$\mathfrak{R}\alpha\in\mathfrak{R}V$且$\mathfrak{R}(\varepsilon-\mathfrak{R})\alpha=\mathfrak{R}\varepsilon-\mathfrak{R}^2\alpha=0$。

从而$(\varepsilon-\mathfrak{R})\alpha\in\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$ 。从而 $V=V_1+V_2$ 。

任取$\gamma\in\mathfrak{R}V\cap\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})=V_1\cap V_2$,则 $\gamma\in V_1$，$\mathfrak{R}\gamma=\gamma$。

又由于$\gamma\in\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$，$\mathfrak{R}\gamma=0$,从而$\gamma=0$ 。

因此$V=V_1\oplus V_2=\mathfrak{R}V\oplus\mathfrak{R}^{-1}(\vec{o})$。

例3 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

（1）证明：$A^n=-A^{n-2}+A^2+E(n\geq 3)$；(2)计算$A^{103}$和$A^{102}$。

解： A的特征多项式$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$

$=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$，由哈密顿-凯莱定理$A^3-A^2+A-E=0$。

（1）由上式可知$A^m+A^{m-2}=A^{m-1}+A^{m-3}$（$m\geq 3$）

因而$A^n+A^{n-2}=A^{n-1}+A^{n-3}=A^{n-2}+A^{n-4}=\cdots=A^2+E$

所以$A^n=-A^{n-2}+A^2+E(n\geq 3)$

（2）$A^{103}=-A^{103-2}+A^2+E=-(-A^{103-4}+A^2+E)+A^2+E=A^{103-4}$

$$=-A^{103-2}+A^2+E=\cdots=-A+A^2+E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

故$A^{102}=A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

例4 设σ是数域P上的n维线性空间V的线性变换，证明：σ是可逆的充要条件是σ无零特征值。

证明:

证法1

由$dim(V)=n$知σ单射$\Leftrightarrow$ σ满射，故有σ可逆$\Leftrightarrow$ σ单射$\Leftrightarrow$ σ无零特征值。

证法2

设α_1，$\cdots$，α_n是V的一组基，且σ在这组基下的矩阵是A，则有σ可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$。

设λ为σ的特征值，则$|\lambda E - A| = 0$，由$|A| \neq 0$，必有$\lambda \neq 0$。

（否则如$\lambda = 0$，则$|-A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$矛盾）

反之，由σ无零特征值，则$|\lambda E - A| \neq 0$，从而$|A| \neq 0$，从而σ可逆。

例5 设σ是数域P上的线性空间V的线性变换，若有$\xi \in \boldsymbol{V}$，使$\sigma^{k-1}(\xi) \neq \mathbf{0}$，但$\sigma^{k}(\xi) = \mathbf{0}$。证明：

（1）$\xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \cdots, \sigma^{k-1}(\xi)$线性无关。

（2）若$dim(V) = n$，且ξ满足$\sigma^{k-1}(\xi) \neq \mathbf{0}$，$\sigma^{k}(\xi) = \mathbf{0}$，求$V$的一组基，使$\boldsymbol{\sigma}$在这组基下的矩阵是$\begin{pmatrix} & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$

证明：（1）设$x_1\xi + x_2\boldsymbol{\sigma}(\xi) + \cdots + x_k\sigma^{k-1}(\xi) = 0$，用$\sigma^{k-1}$作用等式两边，得$x_1\sigma^{k-1} = 0$，由$\sigma^{k-1}(\xi) \neq \mathbf{0}$,可得$x_1 = 0$，于是$x_2\boldsymbol{\sigma}(\xi) + \cdots + x_k\sigma^{k-1}(\xi) = 0$，用$\sigma^{k-2}$作用等式两边，得$x_2\sigma^{k-2} = 0$，因而$x_2 = 0$。

类似地$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$，则$\xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \cdots, \sigma^{k-1}(\xi)$线性无关。

（2）若$dim(V) = n$，由（1）知，$\xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \cdots, \sigma^{k-1}(\xi)$是$V$的一组基，由于

$$\sigma(\xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi)) = (\sigma\xi, \sigma^2(\xi), \cdots, \sigma^{n}(\xi)) = (\sigma\xi, \sigma^2(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi), 0)$$

$$= (\xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi))\begin{pmatrix} & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

例6 设A为n阶方阵，且满足$A^2-3\mathbf{A}+2E=\mathbf{0}$，求一可逆矩阵$T$，使得$T^{-1}AT$为对角形。

解：

由$A^2-3\mathbf{A}+2E=\mathbf{0}$，则$(A-E)(A-2E)=(A-2E)(A-E)=0$，

由于$A-2E$的每一列向量$(A-E)X=0$的解。因而$r(A-E)+r(A-2E)\le n$，

又由于$(A-E)-(A-2E)=E$，也有$r(A-E)+r(A-2E)\ge r(E)=n$，

因此$r(A-E)+r(A-2E)=n$。

设$r(A-E)=k$，$r(A-2E)=s$，则$k+s=n$。

设α_1，$\cdots$，α_k是$A-E$的极大线性无关组，β_1，$\cdots$，β_s是$A-2E$的极大线性无关组。

由$(A-E)(A-2E)=0$知，β_1，$\cdots$，β_s是属于特征值1的线性无关的特征向量；

由$(A-2E)(A-E)=0$知，α_1，$\cdots$，α_k是属于特征值2的线性无关的特征向量。

因而α_1，$\cdots$，α_k,β_1，$\cdots$，β_s线性无关。

令$\mathrm{T}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_s)$，则有$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$

例7 设σ,τ是n维线性空间V的线性变换，证明：

（1）若W是V的子空间，则

$$dim(\sigma(W)) + dim(\sigma^{-1}(0)\cap W) = dim(W);$$

（2）$r(\sigma\tau) \geq r(\sigma) + r(\tau) - n;$

（3）$(\sigma\tau)^{-1}(0) \leq \sigma^{-1}(0) + \tau^{-1}(0)$。

例7 设σ,τ是n维线性空间V的线性变换，证明：

（1）若W是V的子空间，则$dim(\sigma(W))+dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=dim(W)$;

（2）$r(\sigma\tau)\geq r(\sigma)+r(\tau)-n$;

（3）$(\sigma\tau)^{-1}(0)\leq\sigma^{-1}(0)+\tau^{-1}(0)$。

证明： （1）①若$W=\{0\}$显然成立；

②若$W\neq\{0\}$，而$\sigma^{-1}(0)\cap W=\{0\}$。设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是W的一组基，设$\sum_{i=1}^{s}k_i\sigma(\alpha_i)=0$，

则有$\sigma\left(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\right)=0$，而$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\in\sigma^{-1}(0)\cap W$，故$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$，从而$k_i=0,i=1,2,\cdots,s.$

于是$\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_s)$也是V的一组基，从而$\dim(\sigma(W))=\dim(W)$。

③若$\sigma^{-1}(0)\cap W\neq\{0\}$，设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为其基，将它扩充成W的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_k$，

则$\sigma(W)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r),\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_k))=L(\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_k))$。

设$\sum_{i=r+1}^{k}x_i\sigma(\alpha_i)=0$，则$\sigma\left(\sum_{i=r+1}^{k}x_i\alpha_i\right)=0$，因而$\sum_{i=r+1}^{k}x_i\alpha_i\in\sigma^{-1}(0)\cap W=0$

故$\exists x_1,\cdots,x_r\in P$使得$\sum_{i=r+1}^{k}x_i\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}x_j\alpha_j$，即$\sum_{i=r+1}^{k}x_i\alpha_i-\sum_{j=1}^{r}x_j\alpha_j=0.$

由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_k$线性无关，故有$x_i=0,i=1,\cdots,k$。

因而$\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_k)$线性无关，故$\dim(\sigma(W))=\dim(W)-\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)$，

即$\dim(\sigma(W))+\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=\dim(W)$。

例7 设σ,τ是n维线性空间V的线性变换，证明：

（1）若W是V的子空间，则$dim(\sigma(W))+dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=dim(W)$;

（2）$r(\sigma\tau)\ge r(\sigma)+r(\tau)-n$;

（3）$(\sigma\tau)^{-1}(0)\le\sigma^{-1}(0)+\tau^{-1}(0)$。

证明： （2）

证法1

令$W=\tau(V)$，由（1）得$\dim(\sigma(W))+\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=\dim(W)$。

由于$\dim(\sigma^{-1}(0))\ge\dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)$，因而有$dim(\sigma\tau(V))+dim(\sigma^{-1}(0))\ge\dim(\tau(V))$，

又由于$dim(\sigma^{-1}(0))=n-\dim(\sigma(V))$，故有$dim(\sigma\tau(V))+n-\dim(\sigma(V))\ge\dim(\tau(V))$。

因而$r(\sigma\tau)\ge r(\sigma)+r(\tau)-n$。

证法2

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为V得一组基，且$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$,

$\tau(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B$，从而$\sigma\tau(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AB$。

由于$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$与$r(AB)=r(\sigma\tau),r(A)=r(\sigma),r(B)=r(\tau)$。

故有$r(\sigma\tau)\ge r(\sigma)+r(\tau)-n$。

例7 设σ,τ是n维线性空间V的线性变换，证明：

（1）若W是V的子空间，则$dim(\sigma(W))+dim(\sigma^{-1}(0)\cap W)=dim(W)$；

（2）$r(\sigma\tau)\geq r(\sigma)+r(\tau)-n$；

（3）$(\sigma\tau)^{-1}(0)\leq\sigma^{-1}(0)+\tau^{-1}(0)$。

证明： (3)

$$r(\sigma\tau)=n-(\sigma\tau)^{-1}(0)$$
$$r(\sigma)=n-\sigma^{-1}(0)$$
$$r(\tau)=n-\tau^{-1}(0)$$

因而$n-(\sigma\tau)^{-1}(0)\geq n-\sigma^{-1}(0)+n-\tau^{-1}(0)-n$

于是$(\sigma\tau)^{-1}(0)\leq\sigma^{-1}(0)+\tau^{-1}(0)$

证毕

祝大家期中
考试取得满
意的成绩！