# 高等代数学（第四版）习题解答
# 第七章　相似标准型

**注**　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

**高代白皮书 (第四版):**　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

## 7.1　多项式矩阵

1. 设 $\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{N}_n\lambda^n + \boldsymbol{N}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{N}_0$ 是可逆 $\lambda$–矩阵 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 的逆 $\lambda$–阵, 则由 $\boldsymbol{M}(\lambda)\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{I}$, 比较常数项系数可知 $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{M}_0$ 是非异阵.

2. 基础训练填空题 2.

3. 先证充分性. 不妨设 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P} = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$, 即有 $\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$, 于是 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$ 相抵. 再证必要性. 由 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$ 相抵可知, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$.

4. 例 7.1.

## 7.2　矩阵的法式

1. (1)

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda+1) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{\lambda-1}{2} \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda+1) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{\lambda-1}{2} \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & -1 \\ 3 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda+3 & -1 \\ -\lambda & 3 & -2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+3 & -1 \\ 0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^2+2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1\\ -\lambda+1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}.$$

2. (1)

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda^2-\lambda&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&\lambda^2-\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)^2&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)^2&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda(\lambda-1)&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)^2\end{pmatrix},$$

最后一步用到第 3 题的结论.

3. 例 7.9.

4. 先证充分性. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*(\lambda)$ 满足 $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}^*(\lambda)=\boldsymbol{A}^*(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\boldsymbol{I}_n$. 若 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 为非零常数, 则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|^{-1}\boldsymbol{A}^*(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 $\lambda$–矩阵. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 $\lambda$–矩阵, 则有 $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{I}_n$, 两边同取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)||\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{I}_n|=1.$$

由于 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$, $|\boldsymbol{B}(\lambda)|$ 都是关于 $\lambda$ 的多项式, 故 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 必为非零常数.

5. 由假设, 存在可逆 $\lambda$–矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$, $\boldsymbol{Q}(\lambda)$, 使得

$$\boldsymbol{P}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)\}.$$

等式两边同取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{P}(\lambda)||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}(\lambda)|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

由习题 4 可知, $|\boldsymbol{P}(\lambda)|=c_1$ 且 $|\boldsymbol{Q}(\lambda)|=c_2$, 其中 $c_1$, $c_2$ 都是非零常数, 于是

$$c_1c_2|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

注意到 $d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)$ 与 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 均为首一多项式, 故比较首项系数可得 $c_1c_2=1$, 于是

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

## 7.3 不变因子

1. 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$.

(1)

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-2&0\\2&2&\lambda-1\end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda)=1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的后两行, 后两列构成的子式值为 $-2(\lambda-2)$; 其第一行和第三行, 第一列和第三列构成的子式值为 $(\lambda-1)^2$, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 易求得 $D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 于是不变因子组也为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

(2)

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-4&-5&2\\2&\lambda+2&-1\\1&1&\lambda-1\end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda)=1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的后两行, 前两列构成的子式值为 $-\lambda$; 其第一行和第三行, 前两列构成的子式值为 $\lambda+1$, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 易求得

$D_3(\lambda) = (\lambda-1)^3$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1, 1, (\lambda-1)^3$, 于是不变因子组也为 $1, 1, (\lambda-1)^3$.

(3)

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda) = 1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的后两行, 前两列构成的子式值为 $2\lambda$; 其前两行, 后两列构成的子式值为 $-\lambda+1$, 因此 $D_2(\lambda) = 1$. 易求得 $D_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1, 1, (\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 于是不变因子组也为 $1, 1, (\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

2. 记题中第一个矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 第二个矩阵为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda+1)$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1, (\lambda-1), (\lambda-1)(\lambda+1)$, 两者不同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(2) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2$, 两者相同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

(3) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, 1, (\lambda+1)^3$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1, 1, (\lambda+1)^3$, 两者相同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

3. 例 7.4. 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则特征矩阵

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$, 显然 $D_n(\lambda) = (\lambda-a)^n$. 注意到 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行, 前 $n-1$ 列构成的子式值为 $(\lambda-a)^{n-1}$; 设 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行, 后 $n-1$ 列构成的子式值为 $g(\lambda)$, 注意到 $g(a)$ 是 $n-1$ 阶上三角行列式, 主对角元素全为 $-1$, 从而 $g(a) = (-1)^{n-1} \neq 0$, 因此 $(\lambda-a)^{n-1}$ 与 $g(\lambda)$ 没有公共根, 故 $((\lambda-a)^n, g(\lambda)) = 1$, 于是 $D_{n-1}(\lambda) = 1$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1, \cdots, 1, (\lambda-a)^n$, 它的不变因子组也为 $1, \cdots, 1, (\lambda-a)^n$.

4. 例 7.3.

5. 例 7.6.

## 7.4 有理标准型

1. (1) 有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 有理标准型为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & -1 & -2 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. 记题目中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-2, (\lambda-2)^2$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3 & -3\\ -3 & \lambda-1 & -3\\ 3 & 3 & \lambda+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda+5\\ 0 & \lambda+2 & 3(\lambda+2)\\ \lambda-1 & -3 & -9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda+5\\ 0 & \lambda+2 & 3(\lambda+2)\\ 0 & -\lambda-2 & -\lambda^2-4\lambda-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda+2,(\lambda+2)(\lambda-1)$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ -7 & \lambda+2 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-3\\ \lambda+2 & 3 & -7\\ 1 & \lambda+1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-3\\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+\lambda-1\\ 0 & \lambda & -\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,\lambda^3$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. 基础训练填空题 3 或例 6.46.

4. 不可能, 即特征多项式和极小多项式分别相等的阶数不超过 3 的两个矩阵一定相似. 设这两个矩阵的特征多项式, 极小多项式分别为 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, 下面根据矩阵的阶数进行分类讨论:

(1) 1 阶矩阵: 特征多项式相同表明两个矩阵相同, 当然它们相似.

(2) 2 阶矩阵: 两个矩阵的不变因子组均为 $\dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, g(\lambda)$, 从而它们相似.

(3) 3 阶矩阵: 若 $\deg g(\lambda)=1$, 可设 $g(\lambda)=\lambda-a$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $\lambda-a,\lambda-a,\lambda-a$; 若 $\deg g(\lambda)=2$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $1, \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, g(\lambda)$; 若 $\deg g(\lambda)=3$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $1,1,g(\lambda)$.

综上所述, 无论何种情况, 两个矩阵都有相同的不变因子组, 从而它们相似.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式和极小多项式分别为 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, 显然 $f(\lambda)=D_n(\lambda)$. 先证充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,D_n(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组也为 $1,\cdots,1,D_n(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $g(\lambda)=D_n(\lambda)=f(\lambda)$. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $D_1(\lambda),D_2(\lambda),\cdots,D_n(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $D_1(\lambda),D_2(\lambda)/D_1(\lambda),\cdots,D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $g(\lambda)=D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$. 由条件 $f(\lambda)=g(\lambda)$ 可得 $D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)=D_n(\lambda)$, 于是 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 再由行列式因子的性质可得 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,D_n(\lambda)$. 也可以这样来讨论. 设 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $f(\lambda)=g(\lambda)=d_n(\lambda)$. 又由 § 7.2 习题 5 可知 $f(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$, 于是 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,f(\lambda)=D_n(\lambda)$, 这也是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组.

6. 基础训练填空题 15. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 一定相似.

7. 基础训练填空题 12. $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子为 $\lambda^k$. 所有 $n$ 阶 $n$ 次幂零阵的最后一个不变因子都是 $\lambda^n$, 因此它们的不变因子组都是 $1,\cdots,1,\lambda^n$, 从而它们都相似.

8. 例 7.15.

9. 例 7.16.

10. 例 7.23.

11. 例 7.44.

12. 例 7.26 的充分性.

## 7.5 初等因子

1. (1) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^3,\lambda+1.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1.$$

(2) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda-\mathrm{i}, (\lambda-\mathrm{i})^2, (\lambda-\mathrm{i})^2, \lambda+\mathrm{i}, (\lambda+\mathrm{i})^2, (\lambda+\mathrm{i})^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

(3) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^2+1, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda^2-2.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^2+1, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda-\sqrt{2}, \lambda+\sqrt{2}.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda-\mathrm{i}, \lambda-\mathrm{i}, (\lambda-\mathrm{i})^2, \lambda+\mathrm{i}, \lambda+\mathrm{i}, (\lambda+\mathrm{i})^2, \lambda-\sqrt{2}, \lambda+\sqrt{2}.$$

2. (1) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} \lambda^2, & \lambda, & \lambda; \\ (\lambda+1)^2, & \lambda+1, & 1; \\ (\lambda-1)^2, & \lambda-1, & \lambda-1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,\quad d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1),\quad d_1(\lambda)=\lambda(\lambda-1).$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda(\lambda-1),\lambda(\lambda^2-1),\lambda^2(\lambda^2-1)^2,$$

其中有 8 个 1.

(2) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} \lambda^3, & \lambda^2, & \lambda; \\ (\lambda-\sqrt{2})^2, & \lambda-\sqrt{2}, & 1; \\ (\lambda+\sqrt{2})^2, & \lambda+\sqrt{2}, & 1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=\lambda^3(\lambda-\sqrt{2})^2(\lambda+\sqrt{2})^2,\quad d_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}),\quad d_1(\lambda)=\lambda.$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda,\lambda^2(\lambda^2-2),\lambda^3(\lambda^2-2)^2,$$

其中有 9 个 1.

(3) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda-1)^3, & \lambda-1, & 1; \\ (\lambda+1)^3, & \lambda+1, & \lambda+1; \\ (\lambda-2)^2, & \lambda-2, & 1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2,\quad d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),\quad d_1(\lambda)=\lambda+1.$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda+1,(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2,$$

其中有 9 个 1.

## 7.6 Jordan 标准型

1. (1)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & & & & & & & \\ 0 & \sqrt{2} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-2, (\lambda-2)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1 &= \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2 &= \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_2. \end{aligned}$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = (k_1, 2k_1, k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1 = k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$

可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2.$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(5,0,1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=(-2k_1+5k_2,k_1,k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1=k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(3,1,1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(3) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等

因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},\\&(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},\\&(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2.\end{aligned}$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1=(5,1,0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(-4,0,1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=(5k_1-4k_2,k_1,k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\,¦\,\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1=k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(5,1,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(4) 例 7.61. $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}.$$

3. 例 7.11.

4. 由条件可知, $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式整除 $\lambda^2$, 又极小多项式是最大的不变因子, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一不变因子都整除 $\lambda^2$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组中有 $a$ 个 $\lambda$, $b$ 个 $\lambda^2$, 则有

$a+2b=n$ 且 $b=r$, 解得 $a=n-2r$, $b=r$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0),\cdots,\boldsymbol{J}_2(0)\},$$

其中有 $n-2r$ 个 0, $r$ 个 $\boldsymbol{J}_2(0)$.

5. 例 7.34 (1). $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$, 其中有 $r$ 个 1.

6. 例 7.47. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$.

(2) 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

7. 例 7.48.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 互不相同, $n_i\geq 1\,(1\leq i\leq k)$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式次数为 $n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于其特征多项式. 又特征多项式是所有不变因子的乘积, 并且极小多项式是最大的不变因子, 故 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,g(\lambda)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\},$$

其中各个 Jordan 块的主对角元素彼此不同.

9. 例 7.34 (2).

10. 例 7.35.

11. 先证充分性. 设 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $g(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)$. 又 $g(\lambda)$ 无重根, 故 $m(\lambda)$ 也无重根, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则由高代教材的例 6.3.2 可知 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式即为 $g(\lambda)$, 于是 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

12. 例 7.65.

## 7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

1. 注意到 $\boldsymbol{J}=\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}_n(0)$ 且 $\lambda_0\boldsymbol{I}_n$ 与 $\boldsymbol{J}_n(0)$ 乘法可交换, 故

$$\boldsymbol{J}^k=(\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}_n(0))^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(\lambda_0\boldsymbol{I}_n)^{k-i}\boldsymbol{J}_n(0)^i.$$

因此, 根据 $k$ 和 $n$ 的大小关系分为以下两种情况:

(1) 当 $k<n$ 时,

$$
\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix}
\lambda_0^k & C_k^1\lambda_0^{k-1} & \cdots & C_k^k & 0 & \cdots & 0\\
 & \lambda_0^k & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0\\
 & & & \ddots & \ddots & & C_k^k\\
 & & & & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & & & \ddots & C_k^1\lambda_0^{k-1}\\
 & & & & & & \lambda_0^k
\end{pmatrix}.
$$

(2) 当 $k\geq n$ 时,

$$
\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix}
\lambda_0^k & C_k^1\lambda_0^{k-1} & \cdots & C_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}\\
 & \lambda_0^k & \ddots & \vdots\\
 & & \ddots & C_k^1\lambda_0^{k-1}\\
 & & & \lambda_0^k
\end{pmatrix}.
$$

2. 记题目中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$
\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

设过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A\alpha}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
\boldsymbol{A\alpha}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\\
\boldsymbol{A\alpha}_3&=-\boldsymbol{\alpha}_3,\\
\boldsymbol{A\alpha}_4&=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4.
\end{aligned}
$$

通过计算特征向量与广义特征向量可得 (也可以参考例 7.63 中的计算):

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&2&4&1\\2&1&4&0\\2&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$

由习题 1 可求出 $\boldsymbol{J}^k$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2&2&4&1\\2&1&4&0\\2&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(-1)^k&(-1)^{k-1}k\\0&0&0&(-1)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-\dfrac{1}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&\dfrac{1}{4}&0&-\dfrac{1}{4}\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1-4k)(-1)^k&4k(-1)^k&2k+1+(4k-1)(-1)^k&-2k-4k(-1)^k\\-4k(-1)^k&(4k+1)(-1)^k&2k+4k(-1)^k&1-2k-(4k+1)(-1)^k\\0&0&2k+1&-2k\\0&0&2k&-2k+1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

设过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为其列分块, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4&=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.\end{aligned}$$

通过计算特征向量与广义特征向量可得 (也可以参考例 7.59 中的计算):

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5 & \frac{7}{6} & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 6 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由习题 1 可求出 $\boldsymbol{J}^k$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k &= (\boldsymbol{PJP}^{-1})^k = \boldsymbol{PJ}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}5 & \frac{7}{6} & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 6 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 3 & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3k+1 & -k & k & -7k\\ 9k & 1-3k & -7k & -k\\ 0 & 0 & 4k+1 & -8k\\ 0 & 0 & 2k & 1-4k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. 例 7.71. 答案为

$$\boldsymbol{B}=\pm\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4}\end{pmatrix}.$$

4. 例 7.73.

5. 由题意可知, $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1 的几何重数为 1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中属于特征值 1 的 Jordan 块只有一个. 又 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

6. $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $r$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 0 的几何重数等于 $n-r$, 这当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中属于特征值 0 的 Jordan 块有 $n-r$ 个, 这也

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的形如 $\lambda^k$ 的初等因子有 $n-r$ 个. 本题的推广可参考例 7.44.

7. 设 $\boldsymbol{P}$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_0,\boldsymbol{J}_1\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\boldsymbol{J}_0$ 是属于特征值 $\lambda_0$ 的 Jordan 块拼成的分块对角阵, $\boldsymbol{J}_1$ 是其余 Jordan 块拼成的分块对角阵. 显然, $\boldsymbol{J}_0$ 的阶数等于特征值 $\lambda_0$ 的代数重数 $k$, 于是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{J}_0)^k=\boldsymbol{O}$. 又 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-k}-\boldsymbol{J}_1)^k$ 是主对角元全不为零的上三角阵, 从而为非异阵. 因此 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k=\mathrm{diag}\{(\lambda_0\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{J}_0)^k,(\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-k}-\boldsymbol{J}_1)^k\}$ 的秩为 $n-k$. 由于 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{P}(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k\boldsymbol{P}^{-1}$ 与 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k$ 相似, 故两者具有相同的秩 $n-k$. 本题的推广可参考例 7.66.

8. 用反证法, 假设存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子 $\lambda^m$ 且 $m>k$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中有一个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_m(0)$ 且 $m>k$. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_m(0)$, 则由特征值 0 的 Jordan 块的性质以及 $m>k$ 可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^{k+1})+1$. 再由秩的不等式可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^k)\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^{k+1})$, 综合起来就有

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)&=\mathrm{r}((\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^k)+\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^k)\\&>\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^{k+1})+\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^{k+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^{k+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^{k+1}\boldsymbol{P}^{-1})=\mathrm{r}((\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^{k+1})\\&=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}),\end{aligned}$$

这与假设矛盾. 本题的推广可参考例 7.66.

9. 本题有以下三种解法, 分别是计算行列式因子, 极小多项式和几何重数.

解法 1　采用与 § 7.3 习题 3 类似的方法可得 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^n$, 这也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

解法 2　显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式是 $\lambda-1$ 的某个幂次. 设 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 即特征值为 0 的 $n$ 阶 Jordan 块, 它满足 $\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{N}^n=\boldsymbol{O}$, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n+2\boldsymbol{N}+3\boldsymbol{N}^2+\cdots+n\boldsymbol{N}^{n-1}.$$

注意到

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)^{n-1}=(2\boldsymbol{N}+3\boldsymbol{N}^2+\cdots+n\boldsymbol{N}^{n-1})^{n-1}=2^{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不适合多项式 $(\lambda-1)^{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式只能是 $(\lambda-1)^n$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组是 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^n$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

解法 3　显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1, 我们来计算它的几何重数. 注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=n-1$, 故特征值 1 的几何重数为 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=1$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标

准型中属于特征值 1 的 Jordan 块只有一个, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

10. 基础训练解答题 10. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $a \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_4(1)$.

(2) 当 $a = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, \boldsymbol{J}_3(1)\}$.

11. 例 7.7.

12. 例 7.8.

## 7.8 矩阵函数

1. 例 7.78.

2. 例 7.80.

3. 例 7.81.

4. 例 7.82.

5. 例 7.83. $\sin(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{I}}) = (\sin \mathrm{e}^c)\boldsymbol{I}$, $\cos(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{I}}) = (\cos \mathrm{e}^c)\boldsymbol{I}$.

6. 例 7.84. $|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}| = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}$.

7. 例 7.85.

8. 例 7.86. 设非异阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{A}^k$ 存在的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模长小于 1, 或者特征值等于 1 并且 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1 的 Jordan 块都是一阶的. 此时, 极限矩阵

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 1 的个数等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 的代数重数.

## 复习题七

1. 例 7.2.

2. 例 7.21.

3. 例 7.22.

4. 例 7.24.

5. 例 7.25.

6. 例 7.27.

7. 例 7.28. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于特征多项式时, $C(\boldsymbol{A})=\mathbb{K}[\boldsymbol{A}]$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式不等于特征多项式时, $C(\boldsymbol{A})=M_2(\mathbb{K})$.

8. 例 7.29.

9. 例 7.30.

10. 例 7.31.

11. 例 7.32.

12. 例 7.36.

13. 例 7.37.

14. 例 7.38.

15. 例 7.39.

16. 第 379 页例 6.57 的延拓.

17. 第 380 页例 6.58 的延拓.

18. 例 7.40.

19. 例 7.41.

20. 例 7.43.

21. 例 7.45.

22. 例 7.49. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $a+2\neq 0$ 且 $b+4\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\boldsymbol{J}_4(1)$.

(2) 当 $a+2=0$ 或 $b+4=0$, 且两者中只有一个成立时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{1,\boldsymbol{J}_3(1)\}$.

(3) 当 $a+2=0$ 且 $b+4=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_2(1),\boldsymbol{J}_2(1)\}$.

23. 例 7.50. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n=2m$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(0),\boldsymbol{J}_m(0)\}$.

(2) 当 $n=2m+1$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(0),\boldsymbol{J}_{m+1}(0)\}$.

24. 例 7.51. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n=2m$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(c),\boldsymbol{J}_m(c)\}$.

(2) 当 $n=2m+1$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(c),\boldsymbol{J}_{m+1}(c)\}$.

25. 例 7.52.

26. 例 7.53.

27. 例 7.54. $\boldsymbol{J}^m$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(a^m)$.

28. 例 7.55. 作带余除法 $n=mq+r$, 其中 $0\leq r<m$, 则 $\boldsymbol{J}^m$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_q(0),\cdots,\boldsymbol{J}_q(0),\boldsymbol{J}_{q+1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{q+1}(0)\}$, 其中有 $m-r$ 个 $\boldsymbol{J}_q(0)$, $r$ 个 $\boldsymbol{J}_{q+1}(0)$.

29. 例 7.56.

30. 例 7.57. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, a+1, \boldsymbol{J}_2(2)\}$.

(2) 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_2(1), 2, 2\}$.

(3) 当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, 1, 2, 2\}$.

(4) 当 $a = 1$ 且 $b \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, \boldsymbol{J}_3(2)\}$.

(5) 当 $a = 1$ 且 $b = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, 2, \boldsymbol{J}_2(2)\}$.

31. 例 7.64.

32. 例 7.66.

33. 例 7.67.

34. 例 7.68.

35. 例 7.69.

36. 例 7.70.

37. 例 7.72.

38. 例 7.74.

39. 例 7.75.

40. 例 7.76.

41. 例 7.77.

42. 例 7.87.

43. 例 7.90.

44. 例 7.91.