

第六章 线性空间

第八节 线性空间的同构

主要内容

- 引入
- 定义
- 同构映射的性质
- 同构的充分必要条件
- 举例

一、引入

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, 在这组基下, V 中每个向量都有确定的坐标, 而向量的坐标可以看成 P^n 的元素. 因此, 向量与它的坐标之间的对应实质上就是 V 到 P^n 的一个映射. 显然, **这个映射是单射与满射**, 换句话说, 坐标给出了线性空间 V 与 P^n 的一个双射. 这个对应的重要性表现在它与运算的关系上.

设

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n ,$$

$$\beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n .$$

即向量 α, β 的坐标分别是 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 那么

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) \varepsilon_1 + (a_2 + b_2) \varepsilon_2 + \dots + (a_n + b_n) \varepsilon_n ,$$

$$k\alpha = ka_1 \varepsilon_1 + ka_2 \varepsilon_2 + \dots + ka_n \varepsilon_n .$$

于是向量 $\alpha + \beta, k\alpha$ 的坐标分别是

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ & (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) = k(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

以上的式子说明在向量用坐标表示之后，它们的运算就可以归结为它们坐标的运算. 因而线性空间 V 的讨论也就可以归结为 P^n 的讨论. 为了确切地说明这一点，先引入下列定义.

二、定义

定义 19 数域 P 上两个线性空间 V 与 V' 称为**同构**的, 如果由 V 到 V' 有一个双射 σ , 具有以下性质:

$$1) \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta);$$

$$2) \sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha),$$

其中 α, β 是 V 中任意向量, k 是 P 中任意数. 这样的映射 σ 称为**同构映射**.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, 在这组基下, V 中每个向量都有确定的坐标, 而向量的坐标可以看成 P^n 的元素.

设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n,$$

令

$$\sigma(\alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

前面的讨论说明 σ 是 V 到 P^n 的一个同构映射.

因而, 数域 P 上任一个 n 维线性空间都与 P^n 同构.

前面的讨论说明在 n 维线性空间 V 中取定一组基后，向量与它的坐标之间的对应就是 V 到 P^n 的一个同构映射。因而，数域 P 上任一个 n 维线性空间都与 P^n 同构。

V 和 V' 同构记作 $V \cong V'$ 。

三、同构映射的性质

由定义可以看出, 同构映射具有下列基本性质:

1. $\sigma(0) = 0, \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha).$

在定义 19 的 2) 中分别取 $k = 0, -1$ 即得.

2.
$$\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r)$$
$$= k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \dots + k_r\sigma(\alpha_r).$$

这是定义 19 中的 1) 与 2) 结合的结果.

3. V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是, 它们的像 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_r)$ 线性相关.

证明 

因为维数就是空间中线性无关向量的最大个数, 所以由同构映射的性质可以推知, 同构的线性空间有相同的维数.

4. 如果 V_1 是 V 的一个线性子空间, 那么, V_1 在 σ 下的像集合

$$\sigma(V_1) = \{ \sigma(\alpha) \mid \alpha \in V_1 \}$$

是 $\sigma(V)$ 的子空间, 并且 V_1 与 $\sigma(V_1)$ 维数相同.

5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ 是 $\sigma(V)$ 的一个基.

6. 同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.

证明 

同构作为线性空间之间的一种关系，具有反身性(因为恒等映射显然是 V 到 V 同构映射)、对称性(因为 σ 是同构映射时， σ^{-1} 也是同构映射)与传递性(因为 σ 和 τ 分别是线性空间 V 到 V' 和 V' 到 V'' 的同构映射时， $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射).

既然数域 P 上任意一个 n 维线性空间都与 P^n 同构，由同构的对称性与传递性即得，数域 P 上任意两个 n 维线性空间都同构.

综上所述，我们有：

四、同构的充分必要条件

定理 13 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

证明： 必要性：

如果 V 与 V' 同构, σ 是同构映射. 从 V 的基的像也是 V' 的基知 $\dim(V) = \dim(V')$.

充分性：

设 $\dim(V) = \dim(V')$, 则从 $V \cong P^n, V' \cong P^n$ 即知 $V \cong V'$.

在线性空间的抽象讨论中，我们并没有考虑线性空间的**元素是什么**，也没有考虑其中**运算是怎样定义的**，而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质。从这个观点看来，同构的线性空间是可以不加区别的。因之，定理 12 说明了，维数是有限维线性空间的唯一本质特征。

特别地，每一数域 P 上 n 维线性空间都与 n 元数组所成的空间 P^n 同构，而同构的空间有相同的性质。由此可知，我们以前所得到的关于 n 元数组的一些结论，在一般的线性空间中也是成立的，而不必要一一重新证明。

五、举例

例 1 $P[x]_3$ 与 P^3 同构，其同构映射为

$$\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2).$$

σ 把 $P[x]_3$ 的基 $1, x, x^2$ 映射成 P^3 的基 e_1, e_2, e_3 ,
即

$$\sigma(1) = e_1 = (1, 0, 0),$$

$$\sigma(x) = e_2 = (0, 1, 0),$$

$$\sigma(x^2) = e_3 = (0, 0, 1).$$

例 2 设 V 是全体复数在实数域 \mathbb{R} 上构成的线性空间, 则 V 与 \mathbb{R}^2 同构. 其同构映射为

$$\sigma(a + \mathrm{i}b) = (a, b).$$

σ 把 V 的基 $1, \mathrm{i}$ 映射成 \mathbb{R}^2 的基 e_1, e_2 , 即

$$\sigma(1) = e_1 = (1, 0),$$

$$\sigma(\mathrm{i}) = e_2 = (0, 1).$$

例 3 数域 P 上的空间 $P^{2 \times 2}$ 与 P^4 同构. 其同构映射为

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d).$$

设 P^4 的一组基为 $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$, 则可得 $P^{2 \times 2}$ 的一组基为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$