第二章　行列式习题课

排列

- 全排列及其逆序数
- 对换

行列式

- 定义
- 性质 → 克拉默法则
- 展开

典型例题

例 1 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：$D_1 = D_2$.

证明： 由行列式的定义有

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

$$D_2=\sum(-1)^t(a_{1p_1}b^{1-p_1})(a_{2p_2}b^{2-p_2})\cdots(a_{np_n}b^{n-p_n})$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

而

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n,$$

所以$D_2 = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = D_1$.

用化三角行列式计算

例 2 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解题思路： 将第2，3，…，n列加到第1列，提出公因子. 然后通过列变换将其变成下三角行列式.

解：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+a_1+a_2+\cdots+a_n & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \left(x+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第2列，第1列的$(-a_2)$倍加到第3列，将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

用范德蒙行列式计算

例 3 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

解题思路： **利用范德蒙行列式计算该行列式，首先需要提取每一行的公因子将其化成范德蒙行列式.**

$$D_n = n!\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{array}\right| \begin{array}{l} \longleftarrow x_1 \\ \longleftarrow x_2 \\ \longleftarrow x_3 \\ \\ \longleftarrow x_n \end{array}$$

$$= n!\prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) = n!\prod_{1\le j<i\le n}(i-j)$$

$$= n!\,(n-1)!\cdots 2!\,1!$$

用递推法计算

例 4 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

解： 依第n列把D_n拆成两个行列式之和，

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

对于右端的第一个行列式，将第n列的(-1)倍分别加到第1, 2, ⋯ , $n-1$列，右端第二个行列式按第n列展开，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + x_n D_{n-1},$$

从而$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_n D_{n-1}$.

由此递推，得

$$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a + x_{n-1} D_{n-2},$$

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + x_n x_{n-1} D_{n-2},$$

如此继续下去，得

$$D_n = x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + \cdots$$

$$+x_1x_2ax_4\cdots x_n + x_nx_{n-1}\cdots x_3D_2,$$

$$= x_1x_2\cdots x_n + a(x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_1x_3\cdots x_n + x_1x_2\cdots x_{n-1}).$$

当$x_1x_2\cdots x_n \neq 0$时，还可改写成

$$D_n = x_1x_2\cdots x_n\left[1 + a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right].$$

用数学归纳法

例 5 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos(n\alpha).$$

解： 对阶数n作数学归纳.

因为$D_1 = cos\alpha$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} cos\alpha & 1 \\ 1 & 2cos\alpha \end{vmatrix} = 2cos^2\alpha - 1 = cos2\alpha$$

所以当$n = 1, 2$时，结论成立.

假设对阶数小于n的行列式结论成立，下面证明对于n阶行列式结论依然成立. 现将D_n按最后一行展开，得

$$D_n = 2cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$$

由归纳假设，

$$D_{n-1} = cos(n-1)\alpha,$$

$$D_{n-2} = cos(n-2)\alpha,$$

于是

$$D_n = 2cos\alpha cos(n-1)\alpha - cos(n-2)\alpha$$

$$= [cosn\alpha + cos(n-2)\alpha] - cos(n-2)\alpha$$

$$= cosn\alpha.$$

用加边法

例 6 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+2 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+\frac{1}{i-1}c_i}\begin{vmatrix} 1+x+x/2+\cdots+x/n & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1+x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n}\right).$$

例 7　　计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & a+x_3 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & a^2+x_3^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ a^3+x_1^3 & a^3+x_2^3 & a^3+x_3^3 & \cdots & a^3+x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & a^n+x_3^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix}$$

解： 先将原 n 阶行列式 D_n 加边成一个 $n+1$ 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ 0 & a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix}$$

然后将此$n+1$阶行列式第一行乘$-a^i(i=1,2,\cdots,n)$加到第$i+1$行，再将所得行列式（按第一列）拆成两个n阶行列式相减，并根据范德蒙行列式可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1x_2\cdots x_n \cdot \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i) - \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) \cdot \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\left[2x_1x_2\cdots x_n - \prod_{i=1}^{n}(x_i - a)\right].$$

例 8 求一个二次多项式$f(x)$，使得

$$f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28.$$

解： 设所求的二次多项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

则由题意得

$$f(1)=a+b+c=0$$

$$f(2)=4a+2b+c=3$$

$$f(-3)=9a-3b+c=28$$

求解线性方程组的各个行列式得

$$D=-20\neq 0,\qquad D_1=-40,$$

$$D_2\ =60,\qquad D_4=-20,$$

则根据克拉默法则得

$$a=\frac{D_1}{D}=2,b=\frac{D_2}{D}=-3,a=\frac{D_3}{D}=1.$$

于是所求的二次多项式为

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$