高等代数学（第四版）习题解答
第二章　矩阵

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

2.1　矩阵的概念

无习题.

2.2　矩阵的运算

1. (1) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

(3) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(4) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(4) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -1 & 9 & 0 \\ -9 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 直接计算可得, 答案为:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

从中可见 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 一般不相等, 即矩阵乘法一般不可交换.

4. (1) 归纳可证

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.
$$

(2) 归纳证明

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}.
$$

当 $k=1$ 时, 根据条件即得. 假设当 k 时结论成立, 则当 $k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这就证明了结论.

(3) 参考例 2.12 (1), 答案为:

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a^k & \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} & \mathrm{C}_k^2 a^{k-2} \\ 0 & a^k & \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}.
$$

(4) 参考例 2.12 (2), 答案为:

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 17^{k-1} & 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} \\ 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} & 8 \cdot 17^{k-1} \\ 3 \cdot 17^{k-1} & 6 \cdot 17^{k-1} & 12 \cdot 17^{k-1} \end{pmatrix}.
$$

5. 直接计算可得:

$$
\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j.
$$

6. 例 2.8.

7. 直接将左边式子展开, 可得

左边 $= (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1}) - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^n) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{I}_n.$

8. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 故 $a_{ij}=a_{ji}$ 且 $a_{ij}\in\mathbb{R}\,(1\le i,j\le n)$. 考虑 $\boldsymbol{A}^2$ 的第 (i,i) 元素, 它为

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^n a_{ik}^2=0,$$

故 $a_{ik}=0\,(1\le i,k\le n)$, 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 更一般的结论可以参考例 2.9.

9. 例 2.10.

10. 类比第 9 题, $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}'$ 是 Hermite 阵, $\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}'$ 是斜 Hermite 阵, 并且

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}').$$

11. 例 1.41.

12. (1) 当 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵时, $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.

当 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵时, $\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})'=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵时, $\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})'=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵.

当 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵时, $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.

13. (1) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}.$$

因此 $c=0$, $a=d$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

(2) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}.$$

因此 $a=d$, $b=c$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

(3) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}a & b+c & c\\ d & e+f & f\\ g+3i & h+i & i\end{pmatrix}.$$

因此 $c=0$, $f=0$, $3a+d=3i$, $3b+e=i$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 3i-3a & i-3b & 0\\ g & h & i\end{pmatrix}.$$

(4) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}d & e & f\\ g & h & i\\ a+d & b+e & c+f\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}c & a+c & b\\ f & d+f & e\\ i & g+i & h\end{pmatrix}.$$

因此 $c=d$, $a+c=e$, $b=f=g$, $d+f=h$, $e=i$, $a+d=i$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a+c & b\\ b & b+c & a+c\end{pmatrix}.$$

14. (1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与所有 n 阶对角阵乘法可交换. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 与基础矩阵 $\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\le i\le n)$ 乘法可交换, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ii}=\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{A}$. 注意到 $\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的除第 i 行外的其他行全部变为零, 而保持第 i 行不变的 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ii}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的除第 i 列外的其他列全部变为零, 而保持第 i 列不变的 n 阶矩阵, 它们相等导致 $a_{ij}=0\,(i\ne j)$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对角阵. 也可以参考例 2.11 的证法 2.

(2) 例 2.11.

2.3　方阵的逆阵

1. (1) 经过计算, $|\boldsymbol{A}|$ 中第 (i,j) 元素的代数余子式 A_{ij} 分别为:

$$\begin{aligned}
&A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}=-1,\\
&A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2,\\
&A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1,\\
&A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-3\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\1&-3\end{vmatrix}=2,\\
&A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,
\end{aligned}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=3$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-1&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(2) 注意到 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为

$$A_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ a_1\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n, & i=j,\end{cases}$$

而 $|\boldsymbol{A}| = a_1 a_2 \cdots a_n$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. 将该线性方程组写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵, $\boldsymbol{\beta} = (8, 11, -11)'$. 经计算得 $\boldsymbol{A}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

因此原线性方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有一行元素全为零, 则它与任意一个同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也会有一行元素全为零, 不可能是单位阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 必为奇异阵. 同理, 如果 $\boldsymbol{A}$ 有一列元素全为零, 则任意一个同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 与它的乘积 $\boldsymbol{BA}$ 也会有一列元素全为零, 不可能是单位阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 必为奇异阵.

4. 证法 1　直接验证. 注意到对任一正整数 k, 有

$$\boldsymbol{A}^k(\boldsymbol{A}^{-1})^k = \boldsymbol{A}^{k-1} \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{A}^{-1})^{k-1} = \cdots = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^k\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{A}^{-1})^{k-1} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}^{k-1} = \cdots = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

根据逆阵的定义即得结论.

证法 2　在等式 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$ 中令 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 = \cdots = \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}$ 即得结论.

5. 在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ 两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$; 在 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA}$ 两边同时右乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

6. 注意到 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 又 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 故由非异阵的乘法消去律可得 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$.

7. 例 2.17.

8. 注意到

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1},$$

故由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 非异知 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也非异.

9. 根据高代教材 § 2.2 的习题 7 可得,

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}_n,$$

因此 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 非异.

10. 由已知可得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n=-2\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 是非异阵.

11. 由已知可得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 是非异阵.

12. 例 2.21.

2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. (1) 先将第一行乘以 -1, 再将第一行乘以 -3 加到第二行上, 以及用第 $(1,1)$ 元素消去同行其他元素:

$$\text{原矩阵}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\3&1&0&-1\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}.$$

然后, 将第二行乘以 -2 加到第三行上, 再用第 $(2,2)$ 元素消去同行其他元素:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}.$$

最后, 将第三行乘以 $-\dfrac{1}{5}$, 再用第 $(3,3)$ 元素消去同行其他元素即得相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{6}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 先将第一行乘以 -1、-2 分别加到第三、四行上, 然后用第 $(1,1)$ 元素消去同行其他元素:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -1, 以及第二行乘以 1、2 分别加到第三、四行上, 然后用第 $(2,2)$ 元素消去同行其他元素, 这就得到了相抵标准型:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 先将第一行乘以 1、-2 分别加到第二、四行上, 然后将第二行与第三行对调:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -2、2 分别加到第三、四行上, 最后将第三行与第四行对调即得阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 先将第一行乘以 -2、-3、-1 分别加到第二、三、四行上:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -2、-1 分别加到第三、四行上:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 7 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

最后将第三行乘以 -2 加到第四行上, 即得阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. (1) 通过以下步骤将两个矩阵化为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

因此它们有相同的相抵标准型.

(2) 通过以下步骤将两个矩阵化为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 11\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 11\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

因此它们没有相同的相抵标准型.

4. 设 n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 的前 r 行及前 r 列交点处有 r 个 1, 其余元素皆为零. 若 $r<n$, 则由高代教材 § 2.3 的习题 3 可知 $\boldsymbol{B}$ 是奇异阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 相抵于一个奇异阵, 这与高代教材的推论 2.4.2 矛盾. 因此必须有 $r=n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{I}_n$. 反过来, 若 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{I}_n$, 则由高代教材的推论 2.4.2 可知 $\boldsymbol{A}$ 非异.

5. 由高代教材的定理 2.4.1 可知, $\boldsymbol{A}$ 可以通过有限次初等行变换和初等列变换变成其相抵标准型 $\boldsymbol{B}$. 再由高代教材的定理 2.4.3 可知, 存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots\boldsymbol{P}_r$, n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots\boldsymbol{Q}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s=\boldsymbol{B}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s$, 则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆阵, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$ 是相抵标准型.

2.5 矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵

1. (1)

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&-1&-1&0&0&1&0\\1&0&-6&-6&0&0&0&1\end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_4)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&-1&-1&0&0&1&0\\1&0&-6&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\0&-1&-4&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-9&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -7 & -8 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 & 1 \\ -5 & 5 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$(\boldsymbol{A} \mathrel{\dot{:}} \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A} \mathrel{\dot{:}} \boldsymbol{I}_3)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$(\boldsymbol{A} \mathrel{\dot{:}} \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 13 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & 8 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 5 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -11 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. 基础训练填空题 8, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们用初等变换与求逆阵类似的方式求 $\boldsymbol{X}$:

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 \end{array}\right).$$

因此,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -6 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. 在上一题中已经求得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

我们用初等变换与求逆阵类似的方式求 $\boldsymbol{X}$ (本题中采用初等列变换):

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ \hdashline 1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \\ -4 & 23 & 15 \end{array}\right).$$

因此,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & 23 & 15 \end{pmatrix}.$$

5. 例 2.54.

6. 例 2.56.

7. 在本题中, $a_i = i\,(1 \le i \le n)$, 因此 $f(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$. 设 1 的 n 次单位根全体为 $\varepsilon_k = \omega^{k-1}\,(1 \le k \le n)$, 这里 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. 当 $k \ne 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_k) &= \frac{n\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^{n-1} - \cdots - 1}{\varepsilon_k - 1} \\ &= \frac{n - (\varepsilon_k^n - 1)/(\varepsilon_k - 1)}{\varepsilon_k - 1} \\ &= \frac{n}{\varepsilon_k - 1}, \end{aligned}$$

而 $f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 又注意到如下等式:

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\varepsilon_i - 1} &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_n)} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(x^{n-1} + \cdots + x + 1)\,|_{x=1}} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因此该行列式值为

$$\prod_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{i=2}^{n} f(\varepsilon_i) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{i=2}^{n} \frac{n}{\varepsilon_i - 1} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

2.6 分块矩阵

1. (1) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \\ \hdashline -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(2) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

2. (1) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

(2) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{13}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{23}+\boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{B}_{33} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{23}+\boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{B}_{33} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{33}\boldsymbol{B}_{33} \end{pmatrix}.$$

3. 例 2.1.

4. 例 2.2.

5. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$ 是两个分块矩阵且它们符合相乘的条件: $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,j) 块 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的行数为 m_i, 列数为 n_j, $\boldsymbol{B}$ 的第 (i,j) 块 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数为 n_i, 列数为 l_j, 记 $N = n_1+n_2+\cdots+n_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数. 记 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_{ij})_{r\times t}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 是一个 $m_i\times l_j$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{is}\boldsymbol{B}_{sj}.$$

为了叙述方便, 仅证明 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的第 (p,q) 元素 a 在分块矩阵乘法下的结果与在普通

矩阵乘法下的结果一致, 其余情况类似可证. 在分块矩阵乘法下,

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^{s} (\boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k1})(p,q) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \boldsymbol{A}_{11}(p,k_1)\boldsymbol{B}_{11}(k_1,q) + \cdots + \sum_{k_s=1}^{n_s} \boldsymbol{A}_{1s}(p,k_s)\boldsymbol{B}_{s1}(k_s,q). \end{aligned}$$

在普通矩阵乘法下,

$$\begin{aligned} a &= (\boldsymbol{AB})(p,q) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q) \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q) + \cdots + \sum_{k=N-n_s+1}^{N} \boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \boldsymbol{A}_{11}(p,k_1)\boldsymbol{B}_{11}(k_1,q) + \cdots + \sum_{k_s=1}^{n_s} \boldsymbol{A}_{1s}(p,k_s)\boldsymbol{B}_{s1}(k_s,q). \end{aligned}$$

这里采用 MATLAB 中的记号, 用 $\boldsymbol{M}(x,y)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第 (x,y) 元素. 这就证明了分块矩阵的乘法所得的结果与作为普通矩阵的乘法所得的结果一致.

6. 只要证明第三类分块初等矩阵可以表示为若干个第三类初等矩阵的乘积即可. 为了方便叙述, 仅考虑如下分块的情况:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right).$$

注意到它可以表示为以下第三类初等矩阵的乘积:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其余情况类似可证.

7. 基础训练填空题 9, 答案为:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

8. 例 2.69.

9. 例 2.71.

10. 例 2.72. 注意本题条件中要求 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 乘法可交换.

11. 例 1.5.10 的分块矩阵方法参考高代白皮书 (第四版) 第 99 页例 1.36 的解法 2. 例 2.5.2 的分块矩阵方法参考高代白皮书 (第四版) 第 100 页例 2.55 的解法 2.

12. (1) 例 2.68. (2) 基础训练解答题 8.

2.7 Cauchy-Binet 公式

1. 例 2.52.

2. 例 2.60.

3. 例 2.61.

4. 例 2.64.

5. 类比高代教材的推论 2.7.1. 若 $r \leq n$, 则由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n}\left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right|^2 \geq 0;$$

若 $r > n$, 则 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'$ 的任一 r 阶主子式都等于零, 结论也成立.

6. 类比高代教材的例 2.7.1. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}\right|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}|a_ib_j - a_jb_i|^2.$$

证明　左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n |a_i|^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i\overline{b_i} \\ \sum\limits_{i=1}^n \overline{a_i}b_i & \sum\limits_{i=1}^n |b_i|^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{b_n} \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_i}b_i & \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a_i} & \overline{b_i} \\ \overline{a_j} & \overline{b_j} \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} |a_ib_j - a_jb_i|^2.$$

上述恒等式右边总非负, 这就得到了复数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式.

7. 习题 4 的复数形式为: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 复矩阵, 则

$$|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'||\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| \ge |\det(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}')|^2.$$

证明　若 $m>n$, 则 $|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'| = |\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| = |\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}'| = 0$, 结论显然成立.

若 $m\le n$, 则由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'| &= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right|^2; \\
|\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| &= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left|\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right|^2; \\
|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}'| &= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \overline{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

再由习题 6 复数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式即得结论.

复习题二

1. (1) 根据定义直接计算可得.

(2) 经计算,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})'$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量;

$$\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量.

(3) 根据 (1), (2), $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量的第 j 个列向量, 即为 a_{ij}.

(4) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时, 显然有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i\,(1\le i\le n)$, 也有 $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{B}\,(1\le i\le m)$. 反过来, 当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i\,(1\le i\le n)$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都和 $\boldsymbol{B}$ 对应的列向量相同, 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 同理可证 $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{B}\,(1\le i\le m)$ 的情形.

2. (1) 根据定义直接计算可得.

(2) 根据定义直接计算可得.

(3) 根据定义直接可得.

(4) 经计算可得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i,$$

即 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行变为第 i 行, 将其他元素全变为 0.

(5) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列变为第 j 列, 将其他元素全变为 0.

(6) 由 (1), (2) 和 (3) 可得

$$\text{左边} = \sum_{1\le p,q\le n} a_{pq}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{E}_{kl} = a_{jk}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{jk}\boldsymbol{E}_{kl} = a_{jk}\boldsymbol{E}_{il} = \text{右边}.$$

3. 例 2.5.

4. 例 2.6.

5. 例 2.7.

6. 例 2.13.

7. 例 2.14.

8. 例 2.15.

9. 例 2.18.

10. 例 2.19.

11. 例 2.22.

12. 例 2.23.

13. 例 2.26.

14. 例 2.27.

15. 例 2.29.

16. 例 2.30.

17. 例 2.31.

18. 例 2.32.

19. 例 2.33.

20. 例 2.36.

21. 例 2.38.

22. 例 2.39.

23. 例 2.40.

24. 例 2.41.

25. 例 2.42.

26. 例 2.43.

27. 例 2.44.

28. 例 2.46.

29. 例 2.47.

30. 例 2.48.

31. 例 2.49.

32. 例 2.50.

33. 例 2.51.

34. 例 2.57.

35. 基础训练解答题 13 的特例, 取 $b=-1$ 即可.

36. 基础训练解答题 9.

37. 例 2.58.

38. 高代白皮书 (第四版) 第 97 页例 1.33 的解法 3.

39. 例 2.70.

40. 例 1.46. 也可以这样考虑: 左右两边都可以用行列式的组合定义展开成关于 $c_{k_1 1}c_{k_2 2}\cdots c_{k_n n}$ 的代数式, 这里 c 为 a 或 b, $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n$, 因此只需证明左右两边这些单项式前的系数相同. 以 $a_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 为例, 其余证明完全类似. 对于左边, 该项仅存在于

$$(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(a_{k_1 1}+b_{k_1 1})\cdots(a_{k_n n}+b_{k_n n})$$

中, 且系数为 $(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$. 对于右边, 该项仅存在于

$$\sum_{1\le j_1\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\ j_1\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}k_1\\ j_1\end{pmatrix}$$

中, 更精确地, 存在于

$$a_{k_1 1}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}k_1\\ 1\end{pmatrix}$$

中, 于是 $a_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 前系数为 $(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}\cdot(-1)^{k_1+1}$, 这里 $(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}$ 这一项是 $b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 在 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}k_1\\ 1\end{pmatrix}$ 中的系数, $(-1)^{k_1+1}$ 是由于 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}k_1\\ 1\end{pmatrix}$ 与其对应的代数余子式之间相差了系数 $(-1)^{k_1+1}$. 利用逆序数的定义不难证明

$$(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}\cdot(-1)^{k_1+1}=(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},$$

这就证完了结论.

41. 例 1.50.

42. 例 2.75.

43. 例 2.76.