总复习题

1. 设 A，B 都是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$ $\underline{\frac{2^5}{3}=\frac{32}{3}}$。

2. 设矩阵 A 满足 $A^2-A-8E=O$，则 $(A-2E)^{-1}=$ ______。

3. 已知矩阵 $A_{4\times5}$ 和矩阵 $B_{5\times4}$，且 $r(A)=2$，矩阵 $B_{5\times4}$ 的列向量均是 $Ax=0$ 的解，则 $r(B)$ 的最大值为 $\underline{\quad 3 \quad}$。

4. 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$A^6=E$，其中 E 为单位矩阵，则 $A^5=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$。

5. 设 B 为三阶方阵，且 $|B|=-2$，则 $|(3B^*)|=$ $\underline{\quad 108 \quad}$。

6. 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，且其系数矩阵 A 为 n 阶方阵，则 A 的一个特征值必为 $\underline{\quad 0 \quad}$。

7. 设3阶矩阵 A 特征值为 $1,2,2$，则 $|4A^{-1}-E|=$ $\underline{\quad 3 \quad}$

8. 如果 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ x & 3 & 1\\ 4 & x & 5\end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$，则代数余子式 $A_{21}=$ $\underline{\quad 2 \quad}$。

9. 设 x 为三维单位向量，则矩阵 xx^T 的秩为 $\underline{\quad 1 \quad}$。

10. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可以对角化，则 $x=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

1．如果矩阵 A，B，$A+B$，$A^{-1}+B^{-1}$ 均可逆，则 $(A+B)^{-1}=$ $\underline{\quad D \quad}$。

（A）$A^{-1}+B^{-1}$　　（B）$B\left(B^{-1}+A^{-1}\right)^{-1}A$

（C）$A+B$　　（D）$A^{-1}\left(B^{-1}+A^{-1}\right)^{-1}B^{-1}$

2．设 A，B 为 2 阶可逆方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}O & A\\ 2B & O\end{pmatrix}$，则 $|M|=$ $\underline{\quad C \quad}$。

（A） $-2ab$　　（B）$2ab$

（C） $4ab$　　（D）$-4ab$

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$，且 $a_i\neq0, b_i\neq0, i=1,2,3$，则矩阵 A 的秩为 $\underline{\quad B \quad}$。

（A）0　　（B）1

（C）2　　（D）3

4. 设 4 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=3$，α_1,α_2 为 4 维非零列向量，且满足 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=\alpha_2$，$k$ 为任意常数，则非齐次方程组 $Ax=\frac{1}{2}\alpha_2$ 的通解为 $\underline{\quad A \quad}$。

（A）$k\alpha_1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$　　（B）$k\alpha_1+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

（C）$k\alpha_2+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$　　（D）$k\alpha_2+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

5.设 A 为 n 阶矩阵 $(n \geq 3)$，下列命题*正确* 的是 ____C____。

（A）若存在数 λ 和向量 α，使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ 成立，则向量 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量

（B）矩阵 A 的两个不同的特征值可以有同一个特征向量

（C）若存在数 λ 和非零向量 α，使得 $(A-\lambda E)\alpha = 0$ 成立，则 λ 是矩阵 A 的特征值

（D）若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个互不相同的特征值，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关

6. 下列矩阵中不能对角化的是____D____。

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A: 实对称矩阵 可以对角化。

B: 是下三角矩阵，主对角线上元素即为特征值，有三个不同的特征值，必可以对角化。

C: 秩为 1， 特征值为 4,0,0， 对于二重特征根 0 有 $r(0E-A)=1$ 齐次方程组 $(0E-A)x=0$ 基础解系有 2 个线性无关的解向量，即 0 有两个线性无关的特征向量，C 也可以对角化。

D: 上三角矩阵 特征值为主对角线上元素 1 为二重特征值，$r(E-A)=2$ 知齐次方程组 $(E-A)x=0$ 只有 1 个线性无关的解，即特征值 1 只有一个线性无关的特征向量，故不能对角化。

7. 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-3$，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的 3 个线性无关的解向量，则 $Ax=0$ 的基础解系为____A____。

（A）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$

（B）$\alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$

（C）$2\alpha_2-\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$

（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_3$

8. 设 A，B 为 n 阶可逆方阵，A^*，B^* 分别为 A，B 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ____B____。

（A）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

9. 设 A，B 为 n 阶方阵，P，Q 为 n 阶可逆矩阵，下列命题*不正确* 的是 ____C____。

（A）若 $B=AQ$，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价

（B）若 $B=PA$，则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价

（C）若 $B=PAQ$，则 A 的行（列）向量组与 B 的行（列）向量组等价

（D）若 $B=PAQ$，则矩阵 A 与 B 相抵（等价）

三. 已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

满足 $2AX = X + B^2$，且矩阵 $C=\frac{1}{3}(2A-E)$，

（Ⅰ）试验证 C 为正交矩阵，即 $C^T = C^{-1}$。

（Ⅱ）计算 X。

解答：

（Ⅰ）$C=\frac{1}{3}(2A-E)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

$$CC^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

C 为正交矩阵，即 $C^T=C^{-1}$

解答：

（Ⅱ）由 $2AX=X+B^2$ 得 $(2A-E)X=B^2$

即 $CX=\frac{1}{3}B^2$

$$X=\frac{1}{3}C^{-1}B^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

四．求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+4x_4=-4\\-2x_1+5x_2-7x_4=8\\x_1-3x_2+4x_4=-5\\-x_1+3x_2-4x_4=5\end{cases}$ 的通解。

解答：对方程组的增广矩阵进行初等变换如下：

$$(\overline{A})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&1&4&-4\\-2&5&0&-7&8\\1&-3&0&4&-5\\-1&3&0&-4&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+2r_1\\r_3-r_1}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&1&4&-4\\0&1&2&1&0\\0&-1&-1&0&-1\\0&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&1&4&-4\\0&1&2&1&0\\0&-1&-1&0&-1\\0&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_4+r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&1&4&-4\\0&1&2&1&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&1&4&-4\\0&1&2&1&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+2r_2-5r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&2\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

其系数矩阵与增广矩阵的秩均为3，则方程组有解，其通解形式如下：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad c_1\in R$$

五．设方阵 A 满足条件 $A^TA=E$，其中 A^T 是 A 的转置矩阵，E 为单位阵。设 λ 是 A 的特征值，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是属于 λ 的实特征向量

试证明：

（Ⅰ） $\lambda^2x^Tx=x^Tx$

（Ⅱ） A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1。

解答：

（Ⅰ）λ 是 A 的特征值，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是属于 λ 的实特征向量，则 $Ax=\lambda x$，$x\neq 0$　　(1)

两边取转置有 $x^TA^T=\lambda x^T$　　(2)

(1)、(2)两式相乘得 $x^TA^TAx=\lambda^2x^Tx$，

因为 $A^TA=E$，　故 $\lambda^2x^Tx=x^Tx$，

（Ⅱ）　因此有　$(\lambda^2-1)x^Tx=0$

因为 $x^Tx=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>0$，从而 $\lambda^2-1=0$，即 $|\lambda|=1$。

六. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；试证明：

（Ⅰ）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$。

解答：

（Ⅰ）方法一：向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1，1 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$。

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$ ①

两边同时乘 $\boldsymbol{A}$ 得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)&=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A\alpha}_3\\&=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0\end{aligned} \quad ②$$

解答：

（Ⅰ）方法一：① － ②得 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=0$。

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关知 $k_1=k_3=0$，再代入①式，可得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$，

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，则有 $k_2=0$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

解答： 方法二：（反证法）

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关则存在 t_1,t_2 使得 $\boldsymbol{\alpha}_3=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，

则由已知条件得 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$ ③

又有 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2)=-t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$ ④

③ － ④得 $2t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=0$，与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关矛盾。

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

解答： （Ⅱ）$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，由（Ⅰ）得 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

七. 已知向量组

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\\16\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\\-9\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）试求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

（Ⅱ）求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用所求极大线性无关组线性表示。

解答： 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构造矩阵，

并对其施以行的初等变换化为行最简阶梯形矩阵，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 16 & 1 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+4r_1}]{r_2+r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -9 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 28 & -3 & 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+9r_2]{r_4-r_1+3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -41 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -41 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（Ⅰ）向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组.

则 $\alpha_4 = -27\alpha_1 - 4\alpha_2 - 41\alpha_3$ $\alpha_5 = -22\alpha_1 - 4\alpha_2 - 33\alpha_3$。

八. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零实矩阵（$n > 2$），$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，

$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，若 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵。

（Ⅱ）计算 $|\boldsymbol{A}|$。

解答： （Ⅰ）因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$，即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

所以 $a_{ij} = A_{ij}\left(i, j = 1, 2, \cdots, n\right)$，

又因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，不妨设 $a_{11} \neq 0$，则有

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 > 0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵。

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，取行列式得 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|^n$，

即 $|\boldsymbol{A}|^2\left(|\boldsymbol{A}|^{n-2} - 1\right) = 0$，

同时由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}|^{n-2} = 1$，又

$|\boldsymbol{A}| > 0$，于是 $|\boldsymbol{A}| = 1$。

九. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$，

其中矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

解答： 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$，

两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$。

$$\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$
$$\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{X} = \left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}\right)^{-1}$$

$$\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$
$$\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} \qquad \text{由 } |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$
$$\boldsymbol{X} = \left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}\right)^{-1}$$

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

十. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x+1 \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值

解： 把各行元素加到第一行得

$$D = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

然后各列均减去第一列

$$D = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x-1 & -x & -x & -x \end{vmatrix}$$

按第一行展开

$$D = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x-1 & -x & -x & -x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ -x & -x & -x \end{vmatrix} = x^4$$

十一. 计算n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$的值。

解答： 将各列加到第一列

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开

$$D = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!$$

十二. 计算$n+1$阶行列式 $\boldsymbol{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$。

解答：

$$D_{n+1} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n]{c_i - a_i c_{n+1}} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$