第六节　重　因　式

主要内容

- 定义
- 重因式的判别法

一、定义

定义 9 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k **重因式**，如果 $p^k(x) \mid f(x)$, $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$.

如果 $k = 0$, 那么 $p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式；如果 $k = 1$, 那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**单因式**； 如果 $k > 1$, 那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**重因式.**

显然，如果 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

那么 $p_1(x)$, $p_2(x)$, … , $p_s(x)$ 分别是 $f(x)$ 的 r_1 重，r_2 重 , … , r_s 重因式. 指数 $r_i = 1$ 的那些不可约因式是单因式；指数 $r_i > 1$ 的那些不可约因式是重因式.

因为没有一般的方法来求一个多项式的标准分解式，判别有没有重因式的问题就需要用另外的方法解决.

二、重因式的判别法

1. 多项式的导数

设有多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

我们定义它的导数是

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 .$$

这种规定自然是来源于数学分析，但是在目前的情况下，我们只把它当作是一个形式的定义．通过

直接的验证，可以得出关于多项式导数的基本公式

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),$$

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x),$$

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x),$$

$$(f^{m}(x))' = m\,(f^{m-1}(x)\,f'(x)).$$

同样可定义**高阶导数**的概念．导数 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的**一阶导数**；$f'(x)$ 的导数 $f''(x)$ 称为 $f(x)$ 的**二阶导数**；等等．$f(x)$ 的 k 阶导数记为 $f^{(k)}(x)$．

一个 n ($n \geq 1$) 次多项式的导数是一个 $n - 1$ 次多项式；它的 n 阶导数是一个常数；它的 $n + 1$ 阶导数等于零.

2. 重因式的判定定理

定理 6 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式($k \geq 1$)，那么它是导数 $f'(x)$ 的 $k - 1$ 重因式.

证明 由假设，$f(x)$ 可以分解为

$$f(x) = p^k(x)\, g(x),$$

其中 $p(x)$ 不能整除 $g(x)$. 因此

$$f'(x) = p^{k-1}(x)\,(\,kg(x)\,p'(x) + p(x)\,g'(x)\,)\,,$$

这说明 $p^{k-1}(x) \mid f'(x)$. 如果令

$$h(x) = kg(x)\,p'(x) + p(x)\,g'(x)\,,$$

那么 $p(x)$ 整除等式右端的第二项，但不能整除第一项，因此 $p(x)$ 不能整除 $h(x)$，从而 $p^k(x)$ 不能整除 $f'(x)$. 这说明 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

证毕

推论 1 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式($k \geq 1$)，那么 $p(x)$ 是

$$f(x)\ , f'(x) , \dots , f^{(k-1)}(x)$$

的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

证明 根据 **定理 6** 对 k 作数学归纳法即得.

定理 6 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$)，那么它是导数 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

推论 2 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

证明 必要性：设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，其中 $k>1$。则由定理 6 知，$p(x)$ 必是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，从而 $p(x)$ 是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公因式。

充分性：设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公因式。根据定理 6 知， $p(x)$ 不会是 $f(x)$ 的单因式，从而 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式。

证毕

推论 3 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

这个推论表明，判别一个多项式有没有重因式，可以通过代数运算——辗转相除法来解决，这个方法甚至是机械的.

例　判别下列多项式是否有重因式

$$f(x)=x^4-3x^3+4x^2-3x+1$$

解

$$f'(x)=4x^3-9x^2+8x-3$$

用辗转相除法可知 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 有公因式 $x-1$，

从而 $x-1$ 是 $f(x)$ 的重因式。

在一些问题中，如果多项式 $f(x)$ 有重因式，我们希望求出一个多项式 $g(x)$，它没有重因式，且在不计重数时，它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式。从下面的讨论中可以得到 $g(x)$ 的求法。

设 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x).$$

由定理 6 知

$$f'(x)=p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x)h(x)$$

定理 6 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geq 1)$，那么它是导数 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

其中 $p_i(x)$ 不能整除 $h(x)$，从而

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{r_1-1}(x)\,p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x)$$

于是

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = c\,p_1(x)\,p_2(x)\cdots p_s(x)$$

把它记为 $g(x)$，则这个 $g(x)$ 就与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式且没有重因式。

这给出了一个去掉 $f(x)$ 的不可约重因式的方法：先用辗转相除法求 $(f(x), f'(x))$，然后对 $f(x)$ 与 $(f(x), f'(x))$，所得商 $g(x)$ 就是没有重因式的多项式。

例 证明多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

没有重因式。

证明： $$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

因此 $f(x)=f'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$，从而

$$(f(x),f'(x))=\left(f'(x)+\frac{x^n}{n!},f'(x)\right)$$

由此知若$d(x)=(f(x),f'(x))$，则$d(x)$必是$f'(x)$与

$\dfrac{x^n}{n!}$的公因式。由于$\dfrac{x^n}{n!}$只有不可约因式x，而x不能整

除$f'(x)$，所以$f'(x)$与$\dfrac{x^n}{n!}$没有次数不小于1的公因式，

因此$(f(x),f'(x))=1$

这就证明了$f(x)$没有重因式。

$$(f(x),f'(x))=\left(f'(x)+\frac{x^n}{n!},f'(x)\right)$$

结束