

# 第六章 线性空间

# 第五节 线性子空间

## 主要内容

- 定义
- 非空子集构成子空间的条件
- 向量组生成的子空间

# 一、定义

**定义 13** 数域  $P$  上线性空间  $V$  的一个非空子集合  $W$  称为  $V$  的一个**线性子空间**(或简称子空间), 如果  $W$  对于  $V$  中所定义的加法和数量乘法两种运算也构成数域  $P$  上的线性空间.

## 二、非空子集构成子空间的条件

下面我们来分析一下，一个非空子集合要满足什么条件才能成为子空间.

设  $W$  是  $V$  的子集合. 因为  $V$  是线性空间. 所以对于原有的运算， $W$  中的向量满足线性空间定义中的八条规则  中的规则 1), 2), 5), 6), 7), 8) 是显然的. 为了使  $W$  自身构成一线性空间，主要的条件是要求  $W$  对于  $V$  中原来运算的封闭性，以及规则 3) 与 4) 成立. 即

**1.**  $W$  对数量乘法运算封闭, 即若  $\alpha \in W, k \in P$ ,

则

$$k\alpha \in W.$$

**2.**  $W$  对加法运算封闭, 即若  $\alpha \in W, \beta \in W$ , 则

$$\alpha + \beta \in W.$$

- (1)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- (2)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (3)  $0 + \alpha = \alpha$ ;
- (4)  $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ ;
- (5)  $1\alpha = \alpha$
- (6)  $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ ;
- (7)  $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;
- (8)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ .

**3.**  $0 \in W$ .

**4.** 若  $\alpha \in W$ , 则  $-\alpha \in W$ .

不难看出 3, 4 两个条件是多余的, 它们已经包含在条件 1 中, 作为  $k = 0$  与  $-1$  这两个特殊情形. 因此, 我们得到

**定理 3** 如果线性空间  $V$  的非空子集合  $W$  对于  $V$  的数量乘法和加法两种运算是封闭的，那么  $W$  就是一个子空间。

既然线性子空间本身也是一个线性空间，上面我们引入的概念，如维数、基、坐标等，当然也可以应用到线性子空间上。因为在线性子空间中不可能比在整个空间中有更多数目的线性无关的向量。所以，任何一个线性子空间的维数不能超过整个空间的维数。

下面来看几个例子.

**例 1** 在线性空间中，由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间，它叫做**零子空间**.

**例 2** 线性空间  $V$  本身也是  $V$  的一个子空间.  
在线性空间中，零子空间和线性空间本身这两个子空间有时候叫做**平凡子空间**，而其它的线性子空间叫做**非平凡子空间**.

**例 3** 在全体实函数组成的空间中，所有的实系数多项式组成一个子空间.

**例 4**  $P[x]_n$  是线性空间  $P[x]$  的子空间.  
 $P[x]_n$  是线性空间  $P[x]_{n+m}$  的子空间.

**例 5** 在线性空间  $P^n$  中，齐次线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

的全部解向量组成一个子空间，这个子空间叫做齐次线性方程组的**解空间**. 解空间的基就是方程组的基础解系，它的维数等于  $n - r$ ，其中  $r$  为系数矩阵的秩.

**例 6** 判断下列子集是否为给定线性空间的子空间，并说明其几何意义.

$$W_1 = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 1}{-3} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid x - y = 0 \text{ 且 } x + y + z = 0 \right\}$$

解 

## 例 7 证明集合

$$W = \{(0, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_2, x_3, \dots, x_n \in R\}$$

是  $R^n$  的子空间，并求它的一组基，确定它的维。

解：任取  $\alpha_1 = (0, a_2, a_3, \dots, a_n) \in W$ ,

$\beta_1 = (0, b_2, b_3, \dots, b_n) \in W$ ,

$k \in R$  是任意实数。因为

$$\alpha_1 + \beta_1 = (0, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n) \in W$$

$$k\alpha_1 = (0, ka_2, ka_3, \dots, ka_n) \in W$$

即  $W$  对加法和数量乘法是封闭的，所以  $W$  是  $R^n$  的

线性子空间.

取

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

显然  $e_2, e_3, \dots, e_n \in W$ , 且线性无关. 又因为  
 $W$  中任一向量  $\alpha = (0, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , 有

$$\alpha = a_2 e_2 + a_3 e_3 + \dots + a_n e_n$$

所以  $e_2, e_3, \dots, e_n$  即为  $W$  的一组基,  $W$  的维数  
为  $n - 1$ .

### 三、向量组生成的子空间

#### 1. 定义

**定义14** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是线性空间  $V$  中一组向量，这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

所成的集合是非空的，而且对两种运算封闭，因而是  $V$  的一个子空间，这个子空间叫做由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  生成的子空间，记为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r).$$

# 关于向量组生成的子空间,

## 2. 性质

**定理 4** 1) 两个向量组生成相同子空间的充分必要条件是这两个向量组等价.

2)  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  的维数等于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的秩.

**证明** 1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是两个向量组. 如果

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

那么每个向量  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) 作为  $L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  中的向量都可以被  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出；同样每个向量  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) 作为  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  中的向量也都可以被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出，因而这两个向量组等价。

如果这两个向量组等价，那么凡是可以在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出的向量都可以被  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出，反过来也一样，因而

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

2) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的秩是  $s$ , 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $s \leq r$ ) 是它的一个极大线性无关组. 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  等价, 所以  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ . 由定理 1   $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  就是  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  的一组基. 因而  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  的维数为  $s$ .

证毕

**命题：**若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表示，则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \subset L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$$

**定理 5** 设  $W$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间  $V$  的一个  $m$  维子空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是  $W$  的一组基，那么这组向量必定可扩充为整个空间的基。也就是说在  $V$  中必定可以找到  $n - m$  个向量  $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ ，使得  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的基。

**证明** 对维数差  $n - m$  作归纳法，当  $n - m = 0$  时，定理显然成立，因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  已经是  $V$  的基。现在假设  $n - m = k$  时定理成立，我们考虑  $n - m = k + 1$  的情形。

既然  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  还不是  $V$  的基，它又是线性无关的，那么在  $V$  中必定有一个向量  $\alpha_{m+1}$  不能被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出，把  $\alpha_{m+1}$  添加进去  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  必定是线性无关的（参看第 3 节中的 **第三个结论**）。由 **定理 3**，子空间

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$$

是  $m + 1$  维的。因为  $n - (m + 1) = (n - m) - 1 = k$ ，  
由归纳法假设， $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$  的基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$$

可以扩充为整个空间的基. 也就是说,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可以扩充为整个空间的基.

根据归纳法原理, 定理得证.

证毕

**例 8** 在 $P^4$ 中，求向量 $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 生成的子空间的基与维数.

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 1), \quad \alpha_2 = (0, 1, 2, 4),$$

$$\alpha_3 = (2, 1, -2, -2), \quad \alpha_4 = (0, 1, 1, 1).$$

解：由定理 3 知，向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的任一极大线性无关组都是由它生成的子空间

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

的基，而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩即为子空间的维数。下面用矩阵的初等行变换，求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩和一个极大线性无关组。

下面的求解过程用到以前学过的如下定理：

定理：(1) 若矩阵  $A$  经有限次初等行变换变为矩阵  $B$ ， $A$  的行向量组与  $B$  的行向量组等价，而  $A$  的任意  $k$  个列向量与  $B$  中对应的  $k$  个列向量有相同的线性关系.

(2) 若矩阵  $A$  经有限次初等列变换变为矩阵  $B$ ， $A$  的列向量组与  $B$  的列向量组等价，而  $A$  的任意  $k$  个行向量与  $B$  中对应的  $k$  个行向量有相同的线性关系.

**证明： 只证(1)的后半部分.**

由于 $A$ 与 $B$ 等价， 所以方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解， 故 $A$ 的任意 $k$ 个列向量与 $B$ 的对应的 $k$ 个列向量有相同的线性关系.

$$\text{令 } A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

行变换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以子空间  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  的基为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ , 维数为 3.