

第八章 λ -矩阵

第二节

λ -矩阵在初等变换下的标准形

主要内容

- 初等变换的定义
- 等价
- λ -矩阵的标准形
- 举例

一、初等变换的定义

定义 3 下面的三种变换叫做 λ -矩阵的初等变换：

- (1) 矩阵的两行 (列) 互换位置；
- (2) 矩阵的某一行 (列) 乘以非零常数 c ；
- (3) 矩阵的某一行 (列) 加另一行 (列) 的 $\varphi(\lambda)$ 倍， $\varphi(\lambda)$ 是一个多项式.

和数字矩阵的初等变换一样，可以引进初等矩阵.

三种初等变换对应三个初等矩阵

$$P(i, j(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdots & \varphi(\lambda) \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

↓ i 列 ↓ j 列

$\leftarrow i$ 行
 $\leftarrow j$ 行

$$P(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow i\text{列}$ $\downarrow j\text{列}$

$\leftarrow i\text{行}$
 $\leftarrow j\text{行}$

i 列
↓

$$P(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行}$$

同样地，对一个 $s \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 作一次初等行变换就相当于在 $A(\lambda)$ 的左边乘上相应的 $s \times s$ 初等矩阵；对 $A(\lambda)$ 作一次初等列变换就相当于在 $A(\lambda)$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 的初等矩阵。

初等矩阵都是可逆的，并且有

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$$

$$P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1}))$$

$$P(i,j(\varphi))^{-1} = P(i,j(-\varphi))$$

由此得出初等变换具有可逆性：设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 用初等变换变成 $B(\lambda)$ ，这相当于对 $A(\lambda)$ 左乘或右乘一个初等矩阵。再用此初等矩阵的逆矩阵来乘 $B(\lambda)$ 就变回 $A(\lambda)$ ，而这逆矩阵仍是初等矩阵，因而由 $B(\lambda)$ 可用初等变换变回 $A(\lambda)$ 。我们还可以看出在第二种初等变换中，规定只能乘以一个非零常数，这也是为了使 $P(i(c))$ 可逆的缘故。

二、等价

1. 定义

定义 4 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 称为与 $B(\lambda)$ 等价, 如果可以经过一系列初等变换将 $A(\lambda)$ 化为 $B(\lambda)$.

2. 等价的性质

等价是 λ -矩阵之间的一种关系, 这个关系, 具有下列三个性质:

- (1) **反身性**: 每一个 λ -矩阵与自己等价.
- (2) **对称性**: 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价, 则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 等价. 这是由于初等变换具有可逆性的缘故.
- (3) **传递性**: 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价, $B(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价, 则 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价.

3. λ -矩阵等价的条件

矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件是有一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l, Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ 使

$$A(\lambda) = P_1 P_2 \dots P_l B(\lambda) Q_1 Q_2 \dots Q_s.$$

三、 λ -矩阵的标准形

这一节主要是证明任意一个 λ -矩阵可以经过初等变换化为某种对角形. 为此, 首先给出下面的引理.

引理 设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$ 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽, 那么一定可以找到一个与 $A(\lambda)$ 等价的矩阵 $B(\lambda)$, 它的左上角元素也不为零, 但是次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低.

证明 根据 $A(\lambda)$ 中不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽的元素所在的位置，分三种情况来讨论：

1) 若 $A(\lambda)$ 的第一列中有一个元素 $a_{i1}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，则有

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda) q(\lambda) + r(\lambda),$$

其中余式 $r(\lambda) \neq 0$ ，且次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低.

对 $A(\lambda)$ 作初等行变换. 把 $A(\lambda)$ 的第 i 行减去第 1 行的 $q(\lambda)$ 倍，得：

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

再将此矩阵的第 1 行与第 i 行互换，得：

$$A(\lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B(\lambda).$$

$B(\lambda)$ 左上角元素 $r(\lambda)$ 符合引理的要求，故 $B(\lambda)$ 即为所求的矩阵。

2) 在 $A(\lambda)$ 的第一行中有一个元素 $a_{1i}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，这种情况的证明与 1) 类似，但是对 $A(\lambda)$ 进行的是初等列变换.

3) $A(\lambda)$ 的第一行与第一列中的元素都可以被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，但 $A(\lambda)$ 中有另一个元素 $a_{ij}(\lambda)$ ($i > 1$, $j > 1$) 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽. 设

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda).$$

对 $A(\lambda)$ 作下述初等行变换：

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

→

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda) - a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) + (1 - \varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda) - a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= A_1(\lambda).$$

矩阵 $A_1(\lambda)$ 的第一行中，有一个元素

$$a_{ij}(\lambda) + (1 - \varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$$

不能被左上角元素 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，这就化为已经证明了的情况 2). 证毕

定理 2 任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r \geq 1$, $d_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, r)$ 是首项系数为 1 的多项式, 且

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

证明 经过行列调动之后，可以使得 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$ ，如果 $a_{11}(\lambda)$ 不能除尽 $A(\lambda)$ 的全部元素，由 **引理**  可以找到与 $A(\lambda)$ 等价的 $B_1(\lambda)$ ，它的左上角元素 $b_1(\lambda) \neq 0$ ，并且次数比 $a_{11}(\lambda)$ 低。如果 $b_1(\lambda)$ 还不能除尽 $B_1(\lambda)$ 的全部元素，由引理，又可以找到与 $B_1(\lambda)$ 等价的 $B_2(\lambda)$ ，它的左上角元素 $b_2(\lambda) \neq 0$ ，并且次数比 $b_1(\lambda)$ 低。如此

下去，将得到一系列彼此等价的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ ，
 $B_1(\lambda)$ ， $B_2(\lambda)$ ，……它们的左上角元素皆不为零，而
且次数越来越低。但次数是非负整数，不可能无止
境地降低。因此在有限步以后，我们将终止于一个
 λ -矩阵 $B_s(\lambda)$ ，它的左上角元素 $b_s(\lambda) \neq 0$ ，而且
可以除尽 $B_s(\lambda)$ 的全部元素 $b_{ij}(\lambda)$ ，即

$$b_{ij}(\lambda) = b_s(\lambda) q_{ij}(\lambda),$$

对 $B_s(\lambda)$ 作初等变换：

$$B_s(\lambda) = \begin{pmatrix} b_s(\lambda) & \cdots & b_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1}(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

→

$$\begin{pmatrix} b_s(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

在右下角的 λ -矩阵 $A_1(\lambda)$ 中，全部元素都是可以被 $b_s(\lambda)$ 除尽的，因为它们都是 $B_s(\lambda)$ 中元素的组合.

如果 $A_1(\lambda) \neq O$, 则对于 $A_1(\lambda)$ 可以重复上述过程, 进而把矩阵化成

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & A_2(\lambda) \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

其中 $d_1(\lambda)$ 与 $d_2(\lambda)$ 都是首项系数为 1 的多项式

($d_1(\lambda)$ 与 $b_s(\lambda)$ 只差一个常数倍数), 而且

$$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) ,$$

$d_2(\lambda)$ 能除尽 $A_2(\lambda)$ 的全部元素.

如此下去, $A(\lambda)$ 最后就化成了所要求的形式.

证毕

最后化成的这个矩阵称为 $A(\lambda)$ 的**标准形**.

四、举例

例 1 用初等变换把下列 λ – 矩阵化为标准形.

$$(1) \begin{pmatrix} -2\lambda^3 + 2\lambda^2 & -2\lambda^4 & -2\lambda - 2 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^3 & 1 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^3 - \lambda & -\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - 1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2 - \lambda & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

(1) 解：

$$\begin{pmatrix} -2\lambda^3 + 2\lambda^2 & -2\lambda^4 & -2\lambda - 2 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^3 & 1 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^3 - \lambda & -\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{c_1 \leftrightarrow c_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^3 & \lambda^2 - \lambda \\ -2\lambda - 2 & -2\lambda^4 & -2\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ -\lambda + 1 & \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 + 2(\lambda + 1)r_1 \\ r_3 + (\lambda - 1)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 2\lambda^3 & 2\lambda^2 - 2\lambda \\ 0 & \lambda^4 - \lambda & \lambda^3 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{c_2 - \lambda^3 c_1}{c_3 - (\lambda^2 - \lambda)r_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^3 & 2\lambda^2 - 2\lambda \\ 0 & \lambda^4 - \lambda & \lambda^3 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_3 - \lambda/2r_2}{r_3 - \lambda/2r_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^3 & 2\lambda^2 - 2\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_2 \leftrightarrow r_3}{r_2 \leftrightarrow r_3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda^3 & 2\lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_3 + 2\lambda^2 r_2}{r_3 + 2\lambda^2 r_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

(2) 解:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - 1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2 - \lambda & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & -1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2 - \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 + \lambda & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda^2 & 3\lambda^2 \\ 2\lambda^2 + 2\lambda & -\lambda^2 - \lambda & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2\lambda(\lambda+1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda^2 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)(2\lambda^2-1) & \lambda(\lambda+1)(6\lambda^2+\lambda-3) \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)(2\lambda^2-1) & \lambda(\lambda+1)(6\lambda^2+\lambda-3) \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \\ 0 & \lambda(\lambda+1)(2\lambda^2-1) & \lambda(\lambda+1)(6\lambda^2+\lambda-3) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - (2\lambda^2 - 1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)(2\lambda^2 + \lambda - 1) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

例 2 判别下列 λ – 矩阵是否等价.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda - 3 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 2\lambda - 2 & 2\lambda - 5 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 2 & \lambda - 2 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 3 & 2\lambda - 3 & \lambda - 3 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 4\lambda - 7 & 2\lambda - 5 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 2\lambda - 4 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

解：若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 标准形相同，则它们等价.

下面来把它们化成标准形.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda - 3 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 2\lambda - 2 & 2\lambda - 5 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 2 & \lambda - 2 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{pmatrix} \lambda & -3 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 2\lambda - 2 & -3 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 2 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 1 & 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 0 & \lambda - 2 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 3 & 2\lambda - 3 & \lambda - 3 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 4\lambda - 7 & 2\lambda - 5 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 2\lambda - 4 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

初等变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}.$

所以 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.