第六章　线性空间

第四节　基变换与坐标变换

主要内容

- 基变换
- 坐标变换公式
- 举例

一、基变换

在 n 维线性空间中，任意 n 个线性无关的向量都可以作为线性空间的基，即空间的基不唯一．对不同的基，同一个向量的坐标一般是不同的．第三节的例子已经说明了这一点．在这一节中，我们要研究的问题是，随着基的改变，向量的坐标是怎样变化的．

1. 定义

定义12 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间 V 中两组基，它们的关系是

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n , \\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n , \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n . \end{cases} \qquad (1)$$

称 (1) 为**基变换公式**.

2. 基变换公式的矩阵形式

为了写起来方便，我们引入一种形式的写法. 把基写成一个 $1\times n$ 矩阵，于是 (1) 可写成如下矩阵形式：

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$到$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\ldots,\varepsilon_n'$的**过渡矩阵**. 由于$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\ldots,\varepsilon_n'$是线性无关的，所以过渡矩阵 A 的列向量组线性无关，因此，过渡矩阵 A 是可逆的. **注意**

3. 运算规律

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是 V 中两个向量组， $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是两个 $n\times n$ 矩阵，则

1) $((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A)B=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(AB)$

2) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A+(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)B$

$=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(A+B)$；

3) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A+(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A$

$=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)A$.

二、坐标变换公式

定理2 设 V_n 中的元素 ξ, 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 在基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 下的坐标为 $(x_1', x_2', \ldots, x_n')^T$. 若两个基满足关系式 (1), 则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \text{或} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

证 因

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\xi=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

由于基向量线性无关, 故即有关系式 (2).

证毕

这个定理的逆命题也成立．即若任一元素的两种坐标满足坐标变换公式 (2), 则两个基满足变换公式 (1).

强调一下，(2)式就是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

三、举例

例 1 在P^4中，求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的过渡矩阵，并求向量$\xi$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标. 设

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,2,2,-1)^T\\ \varepsilon_2=(1,1,-3,3)^T\\ \varepsilon_3=(1,1,-1,2)^T\\ \varepsilon_4=(3,2,0,-1)^T\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(1,1,-2,0)^T\\ \eta_2=(2,1,3,-1)^T\\ \eta_3=(-2,2,1,-1)^T\\ \eta_4=(1,3,1,2)^T\end{cases}$$

$$\xi=(3,-1,2,4)^T$$

解 要求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵. 即要用$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$表示 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,$ $\boldsymbol{\eta}_4$. 设过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{C}$$

令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)$

(即以基中的向量为列构造矩阵)，于是有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

解之得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

用矩阵的初等变换求$A^{-1}B$：把矩阵$(A|B)$中的 A 变成 E, 则 B 即变成 $A^{-1}B$. 计算如下:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/14 & -3/7 & 39/14 & 10/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11/7 & -16/7 & 20/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/14 & 4/7 & -17/14 & 4/7 \end{array}\right)$$

$\xi = (3, -1, 2, 4)^T$

即得

$$C = A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 39 & 20 \\ 22 & -32 & 40 & 4 \\ -28 & 42 & -56 & 14 \\ 5 & 8 & -17 & -8 \end{pmatrix}$$

求向量 ξ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标, 即用基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 表示向量 ξ. 也就是求 x_1, x_2, x_3 x_4，使得

$$\xi = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 + x_4\eta_4 \qquad (*)$$

用矩阵的初等行变换来求解： 先构造矩阵

$$M=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi)$$

这实际上是(*)的增广矩阵，再对矩阵 M 实施初等行变换，使之成为行最简形矩阵即得.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -109/85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/85 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20/17 \end{pmatrix}$$

所以向量 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为

$$\left(-\frac{109}{85},-\frac{4}{85},-\frac{8}{5},\frac{20}{17}\right)^T.$$

又解 取基

$$\varepsilon_1' = (1,0,0,0)^T, \varepsilon_2' = (0,1,0,0)^T,$$

$$\varepsilon_3' = (0,0,1,0)^T, \varepsilon_4' = (0,0,0,1)^T$$

则有

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4')A$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4')B$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,2,2,-1)^T \\ \varepsilon_2 = (1,1,-3,3)^T \\ \varepsilon_3 = (1,1,-1,2)^T \\ \varepsilon_4 = (3,2,0,-1)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = (1,1,-2,0)^T \\ \eta_2 = (2,1,3,-1)^T \\ \eta_3 = (-2,2,1,-1)^T \\ \eta_4 = (1,3,1,2)^T \end{cases}$$

于是

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A^{-1}B$$

从而由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的过渡矩阵为

$$C=A^{-1}B$$

其余与上一解相同.

例 2 在 P^3 中求向量 $\alpha=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ 在基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

下的坐标.

解 求向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标，即用基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示向量 α．用矩阵的初等行变换来求解：先构造矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha)$, 再对矩阵 A 实施初等行变换 , 使之成为行最简形矩阵即得. 注意到

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&6&3&3\\3&3&1&7\\5&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&33\\0&1&0&-82\\0&0&1&154\end{pmatrix}$$

所以

$$\alpha=33\alpha_1-82\alpha_2+154\alpha_3$$

则所求坐标为

$$\alpha=(33,-82,154)^{\mathrm{T}}$$

例 3 在 $P[x]_4$ 中取两个基

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x, \qquad \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$$

$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1;$$

及

$$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1, \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2,$$

$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2, \quad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵和坐标变换公式.

解 将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 表示.

由 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(x^3,x^2,x,1)A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(x^3,x^2,x,1)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1=x^3+2x^2-x$

$\alpha_2=x^3-x^2+x+1$

$\alpha_3=-x^3+2x^2+x+1$

$\alpha_4=-x^3-x^2+1$

$\beta_1=2x^3+x^2+1$

$\beta_2=x^2+2x+2$

$\beta_3=-2x^3+x^2+x+2$

$\beta_4=x^3+3x^2+x+2$

得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

故过渡矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等变换求 $B^{-1}A$：把矩阵 $(B\,|\,A)$ 中的 B 变成 E，则 A 即变成 $B^{-1}A$．计算如下:

$$(B\,|\,A)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

即得

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

又 $$A^{-1}B=(B^{-1}A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

这就是过渡矩阵,所以

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

例 4 在 $P[x]_n$ 中，选定一组基

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \cdots, \alpha_n = x^{n-1}$$

再选定一组基

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = (x-1), \beta_3 = (x-1)^2, \cdots, \beta_n = (x-1)^{n-1}$$

则有

$$\beta_k = (x-1)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^i (-1)^{k-1-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} x^{i-1} (-1)^{k-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i-1} \alpha_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

因此，由基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵为

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

$$a_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

注意：我们约定，$j < i$时，$\binom{j}{i} = 0$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}\alpha_i$$

$$A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_2 = (-1)^{n-1}\alpha_1 + (-1)^{n-2}(n-1)\alpha_2 + \cdots + (-1)^0\binom{n-1}{n-1}\alpha_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}\alpha_i$$

同样，由于

$$\alpha_k = x^{k-1} = [x-1+1]^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (x-1)^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \beta_k$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

因此，由基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$到基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的过渡矩阵$B = (b_{ij})$元素为

$$b_{ij} = \binom{j-1}{i-1} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

注意：由于$AB = BA = E$，所以$A^{-1} = B$.

对多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

它在基$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \cdots, \alpha_n = x^{n-1}$下的

坐标为 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T$

在基$\beta_1 = 1, \beta_2 = x - 1, \cdots, \beta_n = (x-1)^{n-1}$下的

坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

即

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k-1} a_{j-1}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} a_{j-1}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n$$

这就是坐标变换公式.