高等代数学（第四版）习题解答

第九章　内积空间

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

9.1　内积空间的概念

1. 例 9.2 (1).

2. 例 9.2 (2).

3. 直接按照内积的定义验证即可. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ 以及任一常数 c, 有

(1) $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})_1+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})_2=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1}+\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2}=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2}=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_1+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})_1+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})_2+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1+c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2=(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1+(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2=(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_2\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_1=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_2=0$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=0$.

因此 $(-,-)$ 是 V 上的内积.

4. 显然, 标准单位行向量 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 任一行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 均可表示为基向量的线性组合 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$. 由 $\mathbb{R}^n$ 标准内积的定义可得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=a_i\,(1\leq i\leq n)$, 于是

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

5. 例 9.10.

6. 基础训练解答题 1.

7. 例 9.8.

8. (1) 例 9.1 (7).

(2) 例 9.1 (8).

9.2 内积的表示和正交基

1. (1) 令

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1),\\
&\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0) - \frac{(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0)}{3}(1,1,1) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),\\
&\boldsymbol{v}_3 = (1,0,0) - \frac{(1\cdot 1 + 0 + 0)}{3}(1,1,1) - \frac{(1\cdot \frac{1}{3} + 0 + 0)}{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),
\end{aligned}
$$

再令

$$
\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\quad \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),
$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ 是 V 的一组标准正交基.

(2) 令

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = (1,2,2,-1),\\
&\boldsymbol{v}_2 = (1,1,-5,3) - \frac{(1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot(-1))}{10}(1,2,2,-1) = (2,3,-3,2),\\
&\boldsymbol{v}_3 = (3,2,8,-7) - \frac{(3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 8\cdot 2 + (-7)\cdot(-1))}{10}(1,2,2,-1)\\
&\qquad - \frac{(3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 8\cdot(-3) + (-7)\cdot 2)}{26}(2,3,-3,2) = (2,-1,-1,-2),
\end{aligned}
$$

再令

$$
\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1),\quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2),\quad \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2),
$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ 是 V 的一组标准正交基.

(3) 令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1,1,-1,-2),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (5,8,-2,-3)-\frac{(5\cdot 1+8\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2))}{7}(1,1,-1,-2)\\
&= (2,5,1,3),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (3,9,3,8)-\frac{(3\cdot 1+9\cdot 1+3\cdot(-1)+8\cdot(-2))}{7}(1,1,-1,-2)\\
&\quad -\frac{(3\cdot 2+9\cdot 5+3\cdot 1+8\cdot 3)}{39}(2,5,1,3)=(0,0,0,0),
\end{aligned}$$

再令

$$\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,-2),\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(2,5,1,3),$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$ 是 V 的一组标准正交基.

2. 基础训练解答题 2.

3. 记 $W=\{\boldsymbol{v}\in V \mid (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,m\}$. 注意到 $\boldsymbol{u}_i\in U\,(1\le i\le m)$, 故由正交补空间的定义可知 $U^\perp\subseteq W$. 另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{w}\in W$ 以及任意的 $\boldsymbol{u}\in U$, 若设

$$\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{u}_m,$$

则有

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=k_1(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{w})+k_2(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{w})+\cdots+k_m(\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{w})=0,$$

于是 $\boldsymbol{w}\in U^\perp$, 从而 $W\subseteq U^\perp$. 因此 $U^\perp=W$, 结论得证.

4. 例 9.18.

5. 例 9.19.

6. 记题述线性方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 求解可得 U 的一组基为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-6\\9\\1\\0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$, 则由例 9.20 可知, $U^\perp$ 适合的线性方程组为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

7. 例 9.22.

8. 例 9.7.

9. 例 9.15.

10. 例 9.5 (2).

11. 例 9.16.

12. 例 9.17.

13. 例 9.11.

9.3 伴随

1. 由条件可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 在同一组标准正交基下的表示矩阵为其共轭转置, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\varphi}^*(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -\mathrm{i}x_1 - x_2)$.

2. 例 9.27.

3. 例 9.23 (5). 有限维内积空间中, 线性自同构等价于可逆线性变换.

4. 基础训练解答题 5. $\boldsymbol{\varphi}$ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{E}_{21}$, 即是第 $(1,2)$ 元素为 1, 其余元素为零的基础矩阵, $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{E}_{12}$.

5. 基础训练填空题 17 或例 9.29 (1). $\boldsymbol{\varphi}$ 的伴随 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{B}$.

6. 由伴随的定义可知 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{x}))$, 将 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_2\boldsymbol{x}$ 代入可得 $(\lambda_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda_2\boldsymbol{x})$, 从而 $(\lambda_1 - \overline{\lambda_2})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. 由于特征向量 $\boldsymbol{x}$ 是非零向量, 故 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$, 于是必有 $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

7. 例 9.25.

8. 因为 U 既是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间, 又是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的不变子空间, 所以限制变换 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^*|_U$ 都是有意义的. 由限制变换的定义可知, 对任意的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, 有

$$(\boldsymbol{\varphi}|_U(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^*|_U(\boldsymbol{v})),$$

因此由伴随的唯一性可得 $(\boldsymbol{\varphi}|_U)^* = \boldsymbol{\varphi}^*|_U$.

9.4 内积空间的同构, 正交变换和酉变换

1. 设 φ_1, φ_2 是两个正交 (酉) 变换, 则它们非异且 $\varphi_1^* = \varphi_1^{-1}$, $\varphi_2^* = \varphi_2^{-1}$, 于是 $\varphi_1\varphi_2$ 也非异且

$$(\varphi_1\varphi_2)^* = \varphi_2^*\varphi_1^* = \varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1} = (\varphi_1\varphi_2)^{-1}.$$

因此, 正交 (酉) 变换的积是正交 (酉) 变换. 注意到

$$(\varphi_1^{-1})^* = (\varphi_1^*)^{-1} = (\varphi_1^{-1})^{-1},$$

故正交 (酉) 变换的逆是正交 (酉) 变换. 因为正交 (酉) 变换在一组标准正交基下的表示矩阵为正交 (酉) 矩阵, 故由线性变换与表示矩阵之间的一一对应关系可得, 正交 (酉) 矩阵的积是正交 (酉) 矩阵, 正交 (酉) 矩阵的逆是正交 (酉) 矩阵.

2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶正交矩阵, 由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_2$ 可得如下关系式:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ ab + cd = 0, \\ b^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

由第一个关系式可设 $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, 由第二个关系式可设 $b = -k\sin\theta$, $d = k\cos\theta$, 将上述表达式代入第三个表达式可得 $1 = k^2\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta = k^2$, 于是 $k = \pm 1$. 当 $|\boldsymbol{A}| = k = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

当 $|\boldsymbol{A}| = k = -1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是上三角正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I}_n$, 即 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$. 注意到 $\boldsymbol{A}'$ 是下三角阵, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是上三角阵, 故 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$ 是对角阵, 从而 $\boldsymbol{A}$ 也是对角阵. 再由

$\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^2$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素为 1 或 -1. 同理可证下三角正交矩阵的情形.

若非异阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个满足条件的 QR 分解: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{R}_2$, 其中 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 是正交 (酉) 矩阵, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ 是主对角线上元素均大于零的上三角阵. 注意到 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1}$, 等式左边为正交阵之积, 也为正交阵, 等式右边为主对角线上元素均大于零的上三角阵, 故由已证结论, $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1}$ 必为主对角元素全为 1 的对角阵, 即单位阵. 于是 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_2$, 这就证明了非异阵 QR 分解的唯一性.

4. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块. 通过 Gram-Schmidt 方法得到的向量为 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$, 这里 $\boldsymbol{w}_k$ 或者是零向量或者是单位向量.

(1) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (3,0,4)', \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{5}(3,0,4)'; \\
&\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{w}_1 = (-4,0,3)', \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{5}(-4,0,3)'; \\
&\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - 10\boldsymbol{w}_1 - 5\boldsymbol{w}_2 = (0,9,0)', \quad \boldsymbol{w}_3 = (0,1,0)',
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1,0,1,0)', \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)'; \\
&\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 = (0,1,0,1)', \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)'; \\
&\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_2 = (-1,0,1,0)', \quad \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)'; \\
&\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_4 - 3\sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 - 2\sqrt{2}\boldsymbol{w}_2 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_3 = (0,-1,0,1)', \quad \boldsymbol{w}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)',
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

(3) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1=(1,1,1,1)',\quad \boldsymbol{w}_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)';\\
&\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{w}_1=(1,-1,-1,1)',\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)';\\
&\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{u}_3-2\boldsymbol{w}_1-2\boldsymbol{w}_2=(2,-2,2,-2)',\quad \boldsymbol{w}_3=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)';\\
&\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{u}_4-6\boldsymbol{w}_1-4\boldsymbol{w}_2-4\boldsymbol{w}_3=(0,0,0,0)',\quad \boldsymbol{w}_4=(0,0,0,0)',
\end{aligned}$$

用 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_4=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)'$ 代替 $\boldsymbol{w}_4$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. 因为正交阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行列式值为 1 或 -1, 且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 故 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|$ 中一个为 1, 一个为 -1, 于是

$$\begin{aligned}
-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}'||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}'|=|\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}'|=|\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}'|\\
&=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,
\end{aligned}$$

因此 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$. 本题也可以参考例 9.119. 由条件可知 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 为奇数, 因此不为 0, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})<n$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

6. 基础训练解答题 9.
7. 例 9.35.
8. 例 9.38.
9. 例 9.40.
10. 例 9.41.
11. 例 9.42.
12. 例 9.43.

9.5 自伴随算子

1. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-1)^2,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=10$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. 当 $\lambda=10$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,-2,2)'.$$

当 $\lambda=1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有两个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(-2,1,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_3=(2,0,1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面两个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_3=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 化为单位向量得到

$$\boldsymbol{v}_1=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})',\quad \boldsymbol{v}_2=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)',\quad \boldsymbol{v}_3=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3})'.$$

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},$$
于是
$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为
$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)\lambda,$$
因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=9$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=0$. 当 $\lambda=9$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):
$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1)'.$$
当 $\lambda=4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):
$$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0)'.$$
当 $\lambda=0$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):
$$\boldsymbol{\eta}_3=(-1,1,2)'.$$
由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面三个向量化为单位向量即可:
$$\boldsymbol{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})',\quad \boldsymbol{v}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\quad \boldsymbol{v}_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 3 & -3 & 3\\ 3 & \lambda+1 & 3 & -3\\ -3 & 3 & \lambda+1 & 3\\ 3 & -3 & 3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+4)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-4$. 当 $\lambda=8$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1,-1)'.$$

当 $\lambda=-4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有三个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,1,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_4=(1,0,0,1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面三个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, $\boldsymbol{\eta}_4$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_4=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 化为单位向量得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)', \\ \boldsymbol{v}_3 &= (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)', \quad \boldsymbol{v}_4 = (\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})'.\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(4) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 4$. 当 $\lambda = 1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1, 0, 1)'.$$

当 $\lambda = 4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有三个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (1, 1, 0, 0)', \quad \boldsymbol{\eta}_3 = (0, 0, 1, 0)', \quad \boldsymbol{\eta}_4 = (-1, 0, 0, 1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面三个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, $\boldsymbol{\eta}_4$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_3=(0,0,1,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_4=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 化为单位向量得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}})',\quad \boldsymbol{v}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)',\\&\boldsymbol{v}_3=(0,0,1,0)',\quad \boldsymbol{v}_4=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{2}{\sqrt{6}})'.\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

2. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2-2\mathrm{i}\\-2+2\mathrm{i}&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$. 当 $\lambda=-1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1+\mathrm{i})'.$$

当 $\lambda=5$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向

量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (1+\mathrm{i}, 1)'.$$

由于 Hermite 矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

于是

$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda-2),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$. 当 $\lambda = 8$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 2+\mathrm{i})'.$$

当 $\lambda = 2$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (-2+\mathrm{i}, 1)'.$$

由于 Hermite 矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{-2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})'.$$

令
$$
\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},
$$
于是
$$
\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.
$$

3. 基础训练解答题 10. 答案为 $a=0$ 且
$$
\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.
$$

4. (1) 基础训练解答题 11 (1). 答案为: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征值 0 的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)'$ 是特征值 3 的特征向量.

(2) 基础训练解答题 11 (2). 答案为
$$
\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.
$$

5. 例 9.50. 答案为
$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.
$$

6. 例 9.49. 答案分为以下两种情况:

(1) $a=2, b=-2, c=10$. 此时正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) $a=-2, b=2, c=10$. 此时正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

7. 例 9.48. 答案为 $a=3, b=1$, 正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

8. (1) 由条件 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^*$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}^*$ 可得如下等式:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\varphi}^*+\boldsymbol{\psi}^*=\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}.\\
&(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*+(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*+\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\psi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}.\\
&(\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}))^*=-\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=-\mathrm{i}(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})=\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}).
\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}$, $\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})$ 都是自伴随算子.

(2) 先证充分性. 此时, $(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$ 是自伴随算子. 再证必要性, 此时 $(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 乘法可交换.

9. 基础训练选择题 20. $\boldsymbol{\varphi}$ 是自伴随算子的充要条件是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$.

10. 例 9.123.

9.6 复正规算子

1. 比如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 例 9.101.

3. 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1 - \mathrm{i})(\lambda - 1 + \mathrm{i}),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$. 当 $\lambda = 1 + \mathrm{i}$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1)'.$$

当 $\lambda = 1 - \mathrm{i}$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 1)'.$$

由于复正规矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

于是

$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

4. 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵, 则由高代教材的推论 9.5.1 可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数. 再证充分性. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为实对角阵. 因此

$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}}' = \overline{\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}' = \overline{\boldsymbol{P}}'\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{P},$$

从而 $\overline{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵.

5. 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵, 则由高代教材的定理 9.4.7 可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为模长等于 1 的复数. 再证充分性. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为模长等于 1 的复数, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵且主对角元全为模长等于 1 的复数. 容易验证 $\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}' = \boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是酉矩阵, 因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{P}}'$ 是三个酉矩阵的乘积, 仍为酉矩阵.

6. 充分性显然成立, 下证必要性. 由 § 6.1 习题 9 可知, 幂零阵的特征值全为零. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵且主对角元全为零, 即 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

7. 例 9.93.

8. 例 9.97.

9.7 实正规矩阵

1. 例 9.108.
2. 例 9.109.
3. 基础训练解答题 18.
4. 例 9.121.
5. 例 9.87.
6. 例 9.89.
7. 例 9.90.
8. 例 9.125.

9.8 谱分解与极分解

1. 例 9.94.
2. 例 9.96.
3. 基础训练解答题 20.
4. 基础训练解答题 22.
5. 基础训练解答题 23.
6. 基础训练解答题 24.
7. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 125 & -75 \\ -75 & 125 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} \frac{15}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{15}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{15}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{15}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

(3) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 416 & 160 & 0 \\ 160 & 416 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 576 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

9.9 奇异值分解

1. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1 = \sqrt{6}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

添加单位向量

$$\boldsymbol{\beta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})',$$

使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 成为 $\mathbb{R}_3$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,

于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1 = \sqrt{5}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})',$$
$$\sigma_2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)'.$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'$ 与 $\boldsymbol{\beta}_4 = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(3) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 3 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 令

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sqrt{6}, &\quad \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})', \\ \sigma_2 = \sqrt{6}, &\quad \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})', \\ \sigma_3 = \sqrt{2}, &\quad \boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, -1, 0, 0)'. \end{aligned}$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_4 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 先求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解, 再求极分解.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1=\sqrt{10},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_2=(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 成为 $\mathbb{R}_2$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的极分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{10}} & \dfrac{4}{\sqrt{10}}\\ \dfrac{4}{\sqrt{10}} & \dfrac{8}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}.$$

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12 & -4 & -4 & -4\\ -4 & 12 & -4 & -4\\ -4 & -4 & 12 & -4\\ -4 & -4 & -4 & 12\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}16&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&16&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\\0&0&\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$, 令

$$\begin{aligned}&\sigma_1=4,\quad \boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\\&\sigma_2=4,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0)',\\&\sigma_3=4,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}}{2})'.\end{aligned}$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_4=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{1}{2}\\0&0&-\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&0&\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}&-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的极分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.10 最小二乘解

1. 基础训练解答题 25.

复习题九

1. 例 9.3.

2. 例 9.4.

3. 例 9.6.

4. 例 9.9.

5. 例 9.14.

6. 例 9.20. 取 U 的一组基为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 这里 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$ 为 $n\times(n-r)$ 实矩阵, 则 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

7. 例 9.21.

8. 例 9.29. $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}'$.

9. 例 9.30. 记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 n 阶基础矩阵, 则下列矩阵构成了 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基:

$$\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\le i\le n);\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})\,(1\le i<j\le n).$$

10. 例 9.32.

11. 例 9.33.

12. 例 9.37. $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的极大无关组. 经 Gram-Schmidt 正交化方法从 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 得到的正交标准向量组 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4\}$ 之间的

线性关系为

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 8\\ 0 & \sqrt{30} & \sqrt{30}\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

13. 例 9.39.
14. 例 9.44.
15. 例 9.45.
16. 例 9.46.
17. 例 9.47.
18. 例 9.51. 答案为: 取 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型

$$-12y_1^2+4y_2^2-6y_3^2-6y_4^2.$$

19. 例 9.52.
20. 例 9.53.
21. 例 9.54.
22. 例 9.55.
23. 例 9.59.
24. 例 9.60.
25. 例 9.61.
26. 例 9.62.

27. 例 9.63.
28. 例 9.64.
29. 例 9.65.
30. 例 9.66.
31. 例 9.67.
32. 例 9.68.
33. 例 9.69.
34. 例 9.70.
35. 例 9.71.
36. 例 9.72.
37. 例 9.73.
38. 例 9.75.
39. 例 9.76.
40. 例 9.77.
41. 例 9.78.
42. 例 9.79.
43. 例 9.80.
44. 例 9.81.
45. 例 9.82.
46. 例 9.84.
47. 例 9.86.
48. 例 9.100.
49. 例 9.105.
50. 例 9.106.
51. 例 9.107.
52. 例 9.110.
53. 例 9.112.
54. 例 9.114.
55. 例 9.115.
56. 例 9.117.
57. 例 9.118.
58. 例 9.119.
59. 例 9.122.

60. 例 9.128.