高等代数学（第四版）习题解答
第十章　双线性型

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

10.1　对偶空间

1. 基础训练填空题 4. 这两组基的对偶基之间的过渡矩阵为 $(\boldsymbol{P}')^{-1}$.

2. 例 10.5.

3. 例 10.6.

4. 例 10.7.

5. 首先证明 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{\psi}^*$. 必要性显然成立, 下证充分性. 令 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}$, 则 $\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0}$, 只要证明 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ 即可. 用反证法, 假设 $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$, 则存在 $\boldsymbol{v} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$. 将 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})$ 扩张成 U 的一组基 $\{\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, 并设这组基的对偶基为 $\{\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*, \cdots, \boldsymbol{u}_m^*\}$. 由于 $\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0}$, 故 $\langle \boldsymbol{\tau}^*(\boldsymbol{u}_1^*), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$. 但由对偶映射的定义, 上式也等于 $\langle \boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\rangle = \langle \boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_1\rangle = 1$, 这就导出了矛盾. 若利用习题 6 的结论, 则证明更加简单. 由 $\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{\psi}^*$ 可推出 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^* = (\boldsymbol{\psi}^*)^*$, 于是 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$.

其次证明推论 10.1.1 (4) 中的: $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为满映射. 对于必要性, 由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\psi} : U \to V$, 使得 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{I}_V$, 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_{V^*}$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是满映射. 对于充分性, 有以下三种证法:

证法 1　记 $\boldsymbol{i}:\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}\to V$ 为恒等映射诱导的嵌入, 则

$$\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{i}:\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}\to V\to U$$

为零线性映射, 于是两边同时取对偶映射, 可得

$$\boldsymbol{i}^*\circ\boldsymbol{\varphi}^*:U^*\to V^*\to(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi})^*$$

为零线性映射. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为满射, 故 $\boldsymbol{i}^*=\boldsymbol{0}^*:V^*\to(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi})^*$, 于是由第一个结论可得 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$, 从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=0$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射.

证法 2　用反证法, 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是单映射, 则存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in V$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$. 将 $\boldsymbol{v}$ 扩张成 V 的一组基 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$, 并设其对偶基为 $\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\cdots,\boldsymbol{v}_n^*$. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是满映射, 故存在 $\boldsymbol{g}\in U^*$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{v}_1^*$, 从而 $\langle\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{g}),\boldsymbol{v}_1\rangle=\langle\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_1\rangle=1$. 另一方面, 上式也等于 $\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_1)\rangle=\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{0}\rangle=0$, 矛盾.

证法 3　由复习题四的第 3 题可知, 存在线性映射 $\boldsymbol{\eta}:V^*\to U^*$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{I}_{V^*}$, 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\eta}^*(\boldsymbol{\varphi}^*)^*=\boldsymbol{I}_{V^{**}}$. 由习题 6 的结论可知 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^*=\boldsymbol{\varphi}$, 因此 $\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{I}_V$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射.

最后证明推论 10.1.1 (4) 中的: $\boldsymbol{\varphi}$ 是满映射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为单映射. 对于必要性, 由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\eta}:U\to V$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{I}_U$. 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{I}_{U^*}$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是单映射. 对于充分性, 有以下三种证法:

证法 1　记 $\boldsymbol{\pi}:U\to U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}+\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$ 为商空间诱导的自然线性映射, 则

$$\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{\varphi}:V\to U\to U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$$

为零线性映射. 两边同时取对偶映射, 可得

$$\boldsymbol{\varphi}^*\circ\boldsymbol{\pi}^*:(U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi})^*\to U^*\to V^*$$

为零线性映射. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为单映射, 故 $\boldsymbol{\pi}^*=\boldsymbol{0}^*:(U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi})^*\to U^*$, 于是由第一个结论可得 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{0}$, 从而 $U=\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 为满映射.

证法 2　用反证法, 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是满映射, 即 $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}\neq U$, 则可取 $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$ 的一组基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$, 并扩张为 U 的一组基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_m$, 其中 $r<m$. 设这组基的对偶基为 $\boldsymbol{u}_1^*,\boldsymbol{u}_2^*,\cdots,\boldsymbol{u}_m^*$, 则对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, 注意到 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})$ 是 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$ 的线性组合, 故有 $\langle\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}_m^*),\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u}_m^*,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})\rangle=0$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}_m^*)=\boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是单

映射矛盾.

证法 3　由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\psi}: V^* \to U^*$, 使得 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{I}_{U^*}$, 两边同时取对偶映射可得 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^*\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_{U^{**}}$. 由习题 6 的结论可知 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^* = \boldsymbol{\varphi}$, 因此 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_U$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 是满映射.

6. 例 10.11.

10.2　双线性型

1. 先证 g_1+g_2 是 U 和 V 上的双线性型. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, $\boldsymbol{z}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= g_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ &= (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(g_1+g_2)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\\ (g_1+g_2)(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) &= g_1(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= kg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+kg_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= k(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$, $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})\\ &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\\ &= (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}),\\ (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z}) &= g_1(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z})\\ &= kg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+kg_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= k(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

因此 g_1+g_2 是 U 和 V 上的双线性型.

再证 kg_1 是 U 和 V 上的双线性型. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, $\boldsymbol{z}\in V$,

$t \in \mathbb{K}$, 有

$$(kg_1)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = k(g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = (kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(kg_1)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$
$$(kg_1)(t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = ktg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = t(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w} \in V$, $t \in \mathbb{K}$, 有

$$(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = k(g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})) = (kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$$
$$(kg_1)(\boldsymbol{x},t\boldsymbol{z}) = ktg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = t(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).$$

因此 kg_1 是 U 和 V 上的双线性型.

容易验证上述加法和数乘运算满足线性空间的 8 条公理, 于是 U 和 V 上的双线性型全体构成了 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 记之为 G. 设 U 的一组基为 $\{\boldsymbol{u}_i, 1 \le i \le m\}$, V 的一组基为 $\{\boldsymbol{v}_j, 1 \le j \le n\}$, 下证

$$\{g_{ij} \in G \,|\, g_{ij}(\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_q) = \delta_{ip}\delta_{jq},\ 1 \le i,p \le m, 1 \le j,q \le n\}$$

构成 G 的一组基. 先证 $\{g_{ij}\}$ 线性无关. 若存在 $a_{ij} \in \mathbb{K}$, 使得

$$\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} a_{ij}g_{ij} = 0,$$

则对任意的 $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$ 有

$$\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} a_{ij}g_{ij}(\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_q) = a_{pq} = 0.$$

再证任一 $g \in G$ 可表示为 $\{g_{ij}\}$ 的线性组合. 任取 $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m \in U$, $\boldsymbol{v} = t_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_m\boldsymbol{v}_m \in V$, 有

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= g(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^n t_j\boldsymbol{v}_j) = \sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)k_it_j \\ &= \sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)g_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

因此

$$g=\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)g_{ij}$$

可表示为 $\{g_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)\}$ 的线性组合. 特别地, G 的维数为 mn.

2. 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})&=g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},-)=g(\boldsymbol{x},-)+g(\boldsymbol{y},-)=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{x})&=g(k\boldsymbol{x},-)=kg(\boldsymbol{x},-)=k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性映射. 由定义可得

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=\{\boldsymbol{x}\in U\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x},-)=\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{x}\in U\mid g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in V\}=L.$$

3. 例 10.13.

4. 例 10.14.

5. 首先证明 $S^\perp$ 是 V 的子空间. 任取 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in S^\perp$, $k\in\mathbb{K}$, 有 $g(S,\boldsymbol{v}_1)=g(S,\boldsymbol{v}_2)=0$. 设 $\boldsymbol{s}$ 是 S 中任一元素, 则

$$g(\boldsymbol{s},\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=g(\boldsymbol{s},\boldsymbol{v}_1)+g(\boldsymbol{s},\boldsymbol{v}_2)=0,\quad g(\boldsymbol{s},k\boldsymbol{v}_1)=kg(\boldsymbol{s},\boldsymbol{v}_1)=0,$$

于是 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\in S^\perp$, $k\boldsymbol{v}_1\in S^\perp$, 这就证明了 $S^\perp$ 是 V 的子空间.

然后证明 $T^\perp$ 是 U 的子空间. 任取 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in T^\perp$, $k\in\mathbb{K}$, 有 $g(\boldsymbol{u}_1,T)=g(\boldsymbol{u}_2,T)=0$. 设 $\boldsymbol{t}$ 是 T 中任一元素, 则

$$g(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{t})=g(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{t})+g(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{t})=0,\quad g(k\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{t})=kg(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{t})=0,$$

于是 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\in T^\perp$, $k\boldsymbol{u}_1\in T^\perp$, 这就证明了 $T^\perp$ 是 U 的子空间.

6. § 10.1 习题 2 可以推广为: 设 g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S_1,S_2 是 U 的两个子空间, T_1,T_2 是 V 的两个子空间, 定义

$$S_i^\perp=\{\boldsymbol{v}\in V\,|\,g(S_i,\boldsymbol{v})=0\},\quad T_i^\perp=\{\boldsymbol{u}\in U\,|\,g(\boldsymbol{u},T_i)=0\},\ i=1,2,$$

则 $S_1^\perp\cap S_2^\perp=(S_1+S_2)^\perp$, $T_1^\perp\cap T_2^\perp=(T_1+T_2)^\perp$.

§ 10.1 习题 3 可以推广为: 设 U,V 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S 是 U 的子空间, T 是 V 的子空间, $S^\perp$ 和 $T^\perp$ 定义同上,

则
$$\dim U=\dim S+\dim S^{\perp}=\dim V=\dim T+\dim T^{\perp}.$$

§ 10.1 习题 4 可以推广为: 设 U,V 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S_1,S_2 是 U 的两个子空间, T_1,T_2 是 V 的两个子空间, $S_1^{\perp},S_2^{\perp}$ 和 $T_1^{\perp},T_2^{\perp}$ 的定义同上, 则
$$\begin{aligned}(S_1^{\perp})^{\perp}=S_1,\quad (S_1\cap S_2)^{\perp}=S_1^{\perp}+S_2^{\perp};\\ (T_1^{\perp})^{\perp}=T_1,\quad (T_1\cap T_2)^{\perp}=T_1^{\perp}+T_2^{\perp}.\end{aligned}$$

10.3 纯量积

1. 基础训练填空题 7. 先证明 $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})$ 是 V 上的纯量积. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有
$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})&=g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})=g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z})+g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z}),\\ g(\boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z})&=g(k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z})=kg(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$
另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有
$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})&=g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z})+g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{w}),\\ g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),k\boldsymbol{z})&=kg(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$
再证明 $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$. 设
$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^n b_i\boldsymbol{e}_i,$$
则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量为
$$\boldsymbol{B}(a_1,a_2,\cdots,a_n)',$$
于是
$$g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}(b_1,b_2,\cdots,b_n)'.$$
由上式可知, $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$.

2. 例 10.16.

3. 基础训练填空题 9.

4. 例 10.17.

10.4 交错型与辛几何

1. 例 10.21. 答案为: 要求的一组辛基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ 为

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{3} & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{12} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 例 10.22.

3. 例 10.22.

10.5 对称型与正交几何

1. 例 10.23.

2. 由定理 10.5.2 可知, φ 可表示为 k 个镜像变换之积, 其中 $k \leq n$. 注意到镜像变换的行列式值为 -1, 故 $(-1)^k = 1$, 即 k 必为偶数.

3. 例 10.24.

4. 例 10.25.

5. 例 10.27.

6. 例 10.28.

复习题十

1. 例 10.1.

2. 例 10.3.

3. 例 10.4.

4. 例 10.9.

5. 例 10.12.
6. 例 10.15.
7. 例 10.20.
8. 例 10.26.
9. 例 10.30.