第三节　n 阶行列式

主要内容

- 定义
- 行列式定义的进一步研究

一、定义

从这一节开始，我们总是取一固定的数域 P 作为基础，所谈到的数都是指这个数域 P 中的数，所考虑的行列式也都是数域 P 上的行列式.

为了作出 n 级行列式的定义, 先来研究三阶行列式的结构.

三阶行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) 上式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，任一项除正负号外可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里第一个下标(行标)排成标准排列123，而第二个下标 (列标) 排成 $j_1j_2j_3$，它是1、2、3 这三个数的某个排列. 这样的排列共有 $3! = 6$ 种，故上式右端共有 6 项.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(2) 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123 , 231 , 312 ;

(为偶排列).

带负号的三项列标排列是：132 , 213 , 321.

(为奇排列).

故三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 t 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数，$j_1j_2j_3$ 表示1、2、3三个数组成的所有排列.

类似地，可以把三阶行列式的这一定义推广到一般的情形，得到 n 阶行列式的定义.

定义4　　n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是$n!$项的代数和，其中每一项都是位于不同行不同列的元素的乘积，把这n个元素按照行指标成自然顺序排好位置，当列指标所成的排列是偶排列时，该项带正号，奇排列时，该项带负号，即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}
$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 $12 \cdots n$ 的一个排列，$\sum$表示对所有 n 级排列求和.

例 1 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i ，未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证　第一式是显然的，下面只证第二式.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2.$$

证毕

例 2 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故D中可能不为 0 的元素为 a_{ip_i}，其下标应有$p_i\le i$，即$p_1\le 1, p_2\le 2,\cdots,p_n\le n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一

个自然排列 $12\cdots n$ ，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项

$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号

$$(-1)^t=(-1)^0=1,$$

所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证毕

例 3 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:

分析展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$.

$p_n = n,\ \ p_{n-1} = n-1,\ \ \ p_{n-2} = n-2, \cdots, p_2 = 2, p_1 = 1,$

所以不为零的项只有 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 4

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot4\cdot5\cdot8=160.$$

注意 例 2 和例 3 的结论很重要，它们可以当作公式用，以后我们在计算高阶行列式时，很多时候总是想方设法把它化为三角行列式.

例 5 设有 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3x \\ 4 & -5x & 2 & -5 \\ 2x & 1 & -2x & 3 \\ 1 & x & 4x & 2 \end{vmatrix}$$

问该行列式的展开式是几次多项式，并求最高次幂的系数.

解 由行列式的定义，知

$$D_4 = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$$

显然，只有当 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}$ 都含有 x 时，其乘积的次次数才最高，且为4.

第一行有 2 个元素含有 x，即为

$$a_{11} = x, a_{14} = 3x.$$

当$a_{11} = x, a_{22} = -5x, a_{33} = -2x, a_{44} = 2$时，此时它们的乘积等于$20x^3$.

当$a_{14}=3x, a_{22}=-5x, a_{31}=2x, a_{43}=4x$时，其乘积等于$-120x^4$. 列标排列为 4213， 逆序数为 4 .

故所求的最高幂的系数为-120， D_4是 4 次多项式.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3x \\ 4 & -5x & 2 & -5 \\ 2x & 1 & -2x & 3 \\ 1 & x & 4x & 2 \end{vmatrix}$$

由上述的 3 个例子容易得出如下结论：

当行列式的元素全是数域 P 中的数时，它的值也是数域 P 中的一个数.

二、行列式定义的进一步研究

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素按行指标排列起来. 由于数的乘法是交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的，一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列.

下面证明 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

事实上，为了根据定义来决定该项的符号，就要把这 n 个元素重新排一下使得它们的行指标成自然顺序，即排成

$$a_{1j_1'}\ a_{2j_2'}\cdots\ a_{nj_n'}.$$

于是它的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}.$$

现在来证明

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}.$$

我们知道，由 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变到 $a_{1j'_1}\ a_{2j'_2}\cdots\ a_{nj'_n}$ 可以经过一系列元素的对换来实现. 每作一次对换，元素的行指标与列指标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时作一次对换，即 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不变，这说明，对 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 作一次元素的对换不改变

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

的值. 因此，在一系列对换之后有

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \\ &= (-1)^{\tau(12 \cdots n) + \tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} \\ &= (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}. \end{aligned}$$

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 是 4 阶行列式中一项，$\tau(2314)=2$, $\tau(1243)=1$，于是它的符号应为 $(-1)^{2+1}=-1$. 如按行指标排列起来，就是 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$, $\tau(4123)=3$. 因而的符号也是$(-1)^{3}=-1$.

按 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 来决定行列式中每一项的符号的好处在于，行指标与列指标的地位是对称的，因而为了决定每一项的符号，我们同样可以把每一项按列指标排列起来，于是定义又可写成

定义4′ n 阶行列式可定义如下

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

定义4″ n 阶行列式还可定义如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}$$

$$= \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}.$$

性质 1　行列互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把行列式 D 的行列互换所得新行列式叫做 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}.

性质 1 即为 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$ 即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots n)$. 按定义,

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

由定义4′，有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n},$$

故

$$D^T=D.$$

证毕

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，对于行成立的性质对于列也同样成立, 所以下面只讨论有关行列式行的性质.