第六章　线性空间

第二节

线性空间的定义与简单性质

主要内容

- 引入
- 定义
- 线性空间的简单性质

一、引入

线性空间是线性代数最基本的概念之一．这一节我们来介绍它的定义，并讨论它的一些最简单的性质．线性空间也是我们碰到的第一个抽象的概念，为了说明它的来源，在引入定义之前，先看几个熟知的例子．

例 1 在解析几何中，我们讨论过三维空间中的向量．向量的基本属性是可以按平行四边形规律相加，也可以与实数作数量乘法． 我们知道，不少几何和力学对象的性质是可以通过向量的这两种运算来描述的.

例 2 为了解线性方程组，我们讨论过以 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 作为元素的 n 维向量空间. 对于它们，也有加法和数量乘法，那就是

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (k a_1, k a_2, \dots, k a_n).$$

例 3 对于函数，也可以定义加法和函数与实数的数量乘法. 譬如说，考虑全体定义在区间$[a,b]$上的连续函数. 我们知道，连续函数的和是连续函数，连续函数与实数的数量乘积还是连续函数.

从这些例子中我们看到，所考虑的对象虽然完全不同，但是它们有一个共同点，那就是它们都有加法和数量乘法这两种运算. 当然，随着对象不同这两种运算的定义也是不同的. 为了抓住它们的共同点，把它们统一起来加以研究，我们引入线性空间的概念. 当我们引入抽象的线性空间的概念时，必须选定一个确定的数域作为基础. 因为

二、定义

定义 6 设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算，叫做**加法**；这就是说，给出了一个法则，对于 V 中任意两个元素 α 与 β，在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应，称为 α 与 β 的**和**，记为 $\gamma=\alpha+\beta$. 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做**数量乘法**；这就是说，对于数域 P 中任一数 k 与 V 中任一元素 α，在 V 中都有唯一的一个

元素 δ 与它们对应，称为 k 与 α 的**数量乘积**，记 $\delta = k\alpha$． 如果加法与数量乘法满足下述规则，那么 V 称为数域 P 上的**线性空间**.

加法满足下面四条规则：

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3) 在 V 中有一个元素 0，对于 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha+0=\alpha$$

(具有这个性质的元素 0 称为 V 的**零元素**)；

4) 对于 V 中每一个元素 α，都有 V 中的元素 β，使得

$$\alpha+\beta=0$$

(β称为α的**负元素**).

数量乘法满足下面两条规则：

5) $1\alpha=\alpha$；

6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$.

数量乘法与加法满足下面两条规则：

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

在以上规则中，k, l 等表示数域 P 中的任意数; α, β, γ 等表示集合 V 中任意元素.

由定义，几何空间中全部向量组成的集合是一个实数域上的线性空间. 分量属于数域 P 的全体 n 元数组构成数域 P 上的一个线性空间，这个线性空间我们用 P^n 来表示.

下面再来举几个例子.

例 4 数域 P 上一元多项式环 $P[x]$，按通常的多项式加法和数与多项式的乘法，构成一个数域 P 上的线性空间. 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式，再添上零多项式也构成数域 P 上的一个线性空间，用 $P[x]_n$ 表示. 但是，数域 P 上的多项式集合

$$\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n , a_n \neq 0 \}$$

对同样的运算不构成线性空间，因为两个 n 次多项式的和可能不是 n 次多项式.

例 5 元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵，按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法，构成数域 P 上的一个线性空间，用 $P^{m\times n}$ 表示.

例 6 全体实函数，按函数的加法和数与函数的数量乘法，构成一个实数域上的线性空间.

例 7 数域 P 按照本身的加法与乘法，即构成一个自身上的线性空间.

线性空间的元素也称为**向量**．当然，这里所谓向量比几何中所谓向量的涵义要广泛得多．线性空间有时也称为**向量空间**． 一般用小写的希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 表示线性空间 V 中的元素，用小写的拉丁字母 $a, b, c, \ldots$ 表示数域 P 中的数.

下面我们直接从定义来证明线性空间的一些简单性质.

三、线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.

证明　假设 0_1，0_2 是线性空间 V 中的两个零元素. 只要证明 $0_1 = 0_2$ 即可. 考虑和

$$0_1 + 0_2$$

由于 0_1 是零元素，所以 $0_1 + 0_2 = 0_2$. 又由于 0_2 也是零元素，所以 $0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$，

于是

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

证毕

2. 负元素是唯一的.

这就是说，适合条件 $\alpha+\beta=0$ 的元素 β 是被元素 α 唯一决定的.

假设 α 有两个负元素 β 与 γ，

$$\alpha+\beta=0,\quad \alpha+\gamma=0.$$

那么

$$\beta=\beta+0=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=0+\gamma=\gamma.$$

证毕

向量 α 的负元素记为 $-\alpha$.

利用负元素，我们定义减法如下：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

3\. $0\alpha = 0$; $k0 = 0$; $(-1)\alpha = -\alpha$.

证明 $\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha$.

所以 $0\alpha = 0$.

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1 + (-1)]\alpha = 0\alpha = 0,$$

所以 $(-1)\alpha = -\alpha$.

$$k0 = k[\alpha + (-1)\alpha] = k\alpha + (-k)\alpha = [k + (-k)]\alpha$$

$$= 0\alpha = 0 .$$

所以 $k0 = 0$.

证毕

4. 如果 $k\alpha=0$，那么 $k=0$ 或者 $\alpha=0$.

证明　　假设 $k\neq 0$，于是一方面

$$k^{-1}(k\alpha)=k^{-1}0=0 .$$

而另一方面

$$k^{-1}(k\alpha)=(k^{-1}k)\alpha=1\alpha=\alpha .$$

于是

$$\alpha=0 .$$

证毕