第四节　矩 阵 的 秩

主要内容

- 矩阵的秩的定义
- 矩阵的秩与行列式的关系
- 矩阵的秩的求法

向量组与矩阵的关系

给定向量：

$$\alpha_1 = (2, -1, 3, 1), \qquad \alpha_2 = (3, -1, 2, -6)$$

$$\alpha_3 = (-2, 7, -2, 9), \qquad \alpha_4 = (3, 1, 2, 3)$$

把它们上下排列，可以得到矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & 7 & -2 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

同样，给定向量：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

把它们左右排列，可以得到矩阵

$$B=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3\quad\beta_4)=\begin{pmatrix}-2&2&-1&1\\0&3&-2&3\\1&1&1&5\end{pmatrix}$$

反之，一个矩阵的每一行可以看作一个行向量，一个矩阵的每一列可以看作一个列向量.

一般地，矩阵$A=(a_{ij})_{s\times n}$有n个s维列向量

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_j \quad \cdots \quad \alpha_n)$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$称为矩阵$A$的列向量组.

类似地，矩阵$A=(a_{ij})_{s\times n}$有s个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{s1} \quad a_{s2} \quad \cdots \quad a_{sn}} \end{pmatrix}, \begin{matrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \\ \beta_i^T \\ \\ \beta_s^T \end{matrix} \qquad A=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_i^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

向量组$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_s^T$称为矩阵$A$的行向量组.

一、矩阵的秩

上一节我们介绍了向量组的秩．如果我们把矩阵的每一行看作一个向量，那么矩阵就可以认为是由这些行向量组成的．同样，如果把每一列看作一个向量，那么矩阵也可以认为是由这些列向量组成的.

1．矩阵的行秩和列秩定义

定义 16 所谓矩阵的行秩就是指矩阵的行向量组的秩；矩阵的列秩就是指矩阵的列向量组的秩.

例 1 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求矩阵A的行秩和列秩.

解： 矩阵A的行向量组为

$$\alpha_1=(1,1,3,1),\qquad \alpha_2=(0,2,-1,4)$$

$$\alpha_3=(0,0,0,5),\qquad \alpha_4=(0,0,0,0).$$

下面来求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大线性无关组. 显然， α_1,α_2线性无关，进一步再讨论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性. 设有三个数$k_1,k_2,k_3$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

它对应的线性方程组为

$$\begin{cases} k_1=0, \\ k_1+2k_2=0, \\ 3k_1-k_2=0, \\ k_1+4k_2+5k_3=0, \end{cases}$$

解得$k_1=k_2=k_3=0$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关. 因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中含有零向量，它必线性相关，故向量组的秩为3.

矩阵A的列向量组为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}.$$

用同样的方法可证，β_1,β_2,β_4线性无关，而

$$\beta_3=\frac{7}{2}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2,$$

所以向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性相关，其秩为3.

因此，矩阵A的行秩和列秩都是3.

2. 行秩和列秩的性质

例1中矩阵 A 的行秩和列秩相等，这一点不是偶然的，下面来一般地证明行秩等于列秩.

作为一个预备引理，我们先利用行秩的概念把第一节中的 **定理 1** 改进如下：

引理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的行秩 $r < n$，那么它有非零解.

证明: 以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$代表矩阵$A$的行向量组，因为它的秩为$r$，所以极大线性无关组由$r$个向量组成. 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一个极大线性无关组，因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots\alpha_s$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价，所以方程组(1)与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \quad (2)$$

同解. 对于方程组(2)应用 **定理 1** 即得.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad (1)$$

由此就可以证明

定理 4 矩阵的行秩与列秩相等.

证明: 设所讨论的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

而A的行秩$=r$，列秩$=r_1$. 为了证明$r=r_1$，我们先来证明$r \le r_1$.

设矩阵A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}.$$

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是它的一个极大线性无关组．因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是线性无关的，所以方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\mathbf{0}$$

只有零解，这就是说，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{r1}x_r = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{r2}x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

只有零解.　由引理，这个方程的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

的行秩$\geq r$. 因此在它的行向量中可以找到r个是线性无关的，不妨设为

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}),(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}),\cdots,(a_{1r},a_{2r},\cdots,a_{rr})$$

线性无关．根据上一节的说明，在这些向量上添上几个分量后所得的向量组

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}),(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}),$$

$$\cdots,(a_{1r},a_{2r},\cdots,a_{rr},\cdots,a_{sr})$$

也线性无关． 它们正好是矩阵A的r个列向量，由它们的线性无关性可知矩阵A的列秩r_1至少是r，也就是说$r_1 \geq r$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

用同样的方法可证$r \geq r_1$. 这样，我们就证明了行秩等于列秩.

证毕

3. 矩阵的秩

定义 17 把矩阵的行秩和列秩统称为**矩阵的秩**. 矩阵的秩记为$r(A)$或$rank(A)$.

二、矩阵的秩与行列式的关系

现在把矩阵秩的概念与行列式联系起来. 首先来看一个引理.

引理 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

证明: 首先证明初等行变换不改变矩阵的秩. 只须证明经过一次初等行变换不改变矩阵的秩. 设矩阵A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}.$$

矩阵A的秩就是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩. 交换$A$的两行显然得到相同的行向量组(仅编号有变化)，因此不改变矩阵的秩. 把A的第i行乘以某个非零的常数k，得到行向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},k\alpha_i,\alpha_{i+1}\cdots,\alpha_s$$

显然它与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以互相线性表出，从而有相同的秩. 再把矩阵$A$的第$i$行的$k$倍加到第$j$行得矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j+k\alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_i\\ \vdots\\ \beta_j\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}.$$

由于它的第j行为$\beta_j=\alpha_j+k\alpha_i$，即可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出．同样，$A$的第$j$个行向量可以写为

$$\alpha_j=\beta_j-k\alpha_i=\beta_j-k\beta_i$$

即可由B的行向量线性表出，而A与B的其他行向量完全相同，因此A与B的行向量组等价，从而有相同的秩. 就是说，初等行变换不改变矩阵的秩.

同样可证初等列变换也不改变矩阵的秩.

证毕

1. 齐次线性方程组有非零解的充要条件

现在我们再把矩阵的秩与行列式的概念联系起来. 首先讨论 $n \times n$矩阵的情形.

定理 5 $n \times n$矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式为零的充要条件是A的秩小于n.

证明： **先证充分性.** 因为A的秩小于n，所以A的n个行向量组线性相关. **当$n=1$时，** A只有一个数，即只有一个一维向量，它又是线性相关的向量组，因此它是零向量，从而$|A|=|0|=0$. **当$n>1$时，** 矩阵A中有一行是其余各行的线性组合. 从这一行依次减去其余各行的相应倍数，这一行就全变成零， 由行列式的性质可知$|A|=0$.

接着再证必要性. 对n作**数学归纳法.**

当$n=1$时，由$|A|=0$可知A的仅有的一个元素就是零， 因而A的秩为零.

假设结论对$n-1$阶矩阵已证，现在来看n阶矩阵的情形． 我们以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$代表$A$的行向量． 检查$A$的第一列的元素$a_{11},a_{21},\cdots a_{n1}$，如果它们全为零，那么$A$的列向量组中含有零向量， 当然秩小于$n$．如果这$n$个元素中有一个不为零，譬如说$a_{11}\neq 0$，那么从第二行直到第$n$行减去第一行的适当的倍数，把$a_{21},\cdots,a_{n1}$消成零，即得

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

其中

$$(0, a'_{i2}, \cdots, a'_{in}) = \alpha_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\alpha_1, \qquad i = 2, \cdots, n.$$

由$|A| = 0$可知$n-1$阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式为零．根据归纳法假设，这个矩阵的行向量线性相关，因而向量组

$$\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1, \cdots, \alpha_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1$$

线性相关，这说明，有不全为零的数$k_2,\cdots,k_n$使

$$k_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+k_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0.$$

改写一下，得

$$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n\right)\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n\right), k_2,\cdots,k_n$这组数当然也不全为零，因此向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，它的秩小于$n$.

根据归纳法原理，必要性得证.

证毕

根据这个定理，可以得到有关齐次线性方程组的重要结论.

推论 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式等于零.

证明：

条件的充分性可以由定理5以及引理直接得出.

条件的必要性是克拉默法则的直接推论.

证毕

2. 矩阵的秩与行列式的关系

为了建立一般矩阵的秩与行列式的关系，引入

定义 18 在一个$s \times n$矩阵A中任意选定k行k列，位于这些选定的行与列的交点上的k^2个元素按原来的次序所组成的k阶行列式，称为A的一个k级子式.

在定义中，当然有$k \leq min(s, n)$.

$s \times n$矩阵的k级子式的个数为$C_s^k \ C_n^k$.

例如，在矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

中，选第1, 3行和第3, 4列，它们交点上的元素所成的2阶行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}=15$$

就是一个2级子式.　又如选第1, 2, 3行和第1, 2, 4列，相应的3级

子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

由于行和列的选法有很多，所以k级子式也是很多的. $s \times n$矩阵矩阵的k级子式共有$C_s^k \ C_n^k$.

矩阵的秩与行列式的关系表现为:

定理 6 一矩阵的秩是r的充分必要条件为矩阵中有一个r级子式不为零，同时所有的$r+1$级子式全为零.

证明： 先证必要性. 设矩阵A的秩为r. 这时，由定理2知矩阵A中任意$r+1$个行向量都线性相关，矩阵A的任意$r+1$级子式的行向量也线性相关. 由定理5，这种子式全为零. 现在来证矩阵A中至少有一个r级子式不为零. 因为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩为r，所以在A中有r个行向量线性无关，譬如说，就是前r个行向量．把这r行取出来． 作一新的矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

显然，矩阵A_1的行秩为r，因而它的列秩也为r. 这就是说，在A_1中有r列线性无关. 不妨假设前r列线性无关，因之，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

它就是矩阵A中一个r级子式. 这证明了必要性.

再证充分性. 设在矩阵A中有一r级子式不为零，而所有$r+1$级子式全为零. 我们证明A的秩为r.

首先我们指出，由行列式按一行展开的公式可知，如果A的$r+1$级子式全为零，那么A的$r+2$级子式也一定为零，从而A的所有级数大于r的子式全为零.

设A的秩为t. 由必要性，t不能小于r，否则A的r级子式就全为零了. 同样，t也不能大于r，否则就要有一个$t(\geq r+1)$级子式不为零，而按照假定这是不可能的. 因此，$t=r$. 结论得证.

证毕

矩阵的秩就是最高阶非零子式的阶数.

显然:

若矩阵A中有某个s阶子式不等于零，则$r(A) \geq s$;

若矩阵A中所有t阶子式都等于零，则$r(A) < t$.

定理 6 的证明过程分析

定理证明包含两个部分：(1) 矩阵的秩$\geq r$的充要条件为A有一个r级子式不为零； (2) 矩阵的秩$\leq r$的充要条件为A的所有$r+1$级子式全为零.

有时候，这两个结论可以分开来用.

从定理的证明还可以看出，在秩为r的矩阵中，不为零的r级子式所在的行正是它行向量组的一个极大线性无关组，所在的列正是它列向量组的一个极大线性无关组.

例 2 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-6\\4&7&2\end{pmatrix}$的秩.

解: 在A中，$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0.$

又因为A的3级子式只有一个$|A|$，

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&-6\\4&7&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&2&4\\4&7&2\\4&7&2\end{vmatrix}=0$$

所以A的秩为2.

例 3 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$的秩.

解: 在A中，$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0.$

现在计算A的3级子式.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+2r_1}\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 6 & -3\end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 * (-8) - 2 * (-12) = 0.$$

由于A的所有3级子式全为零，所以A的秩为2.

三、矩阵秩的求法

1. 矩阵秩的计算方法

计算矩阵秩的一个有效的方法：用初等行变换把它变成阶梯形矩阵，这个阶梯形矩阵中非零行的个数就是原来矩阵的秩.

证明： 首先，矩阵的初等行变换是把行向量组变成一个与之等价的向量组. 我们知道，等价的向量组有相同的秩. 因此，初等行变换不改变矩阵的秩. 同样地，初等列变换也不改变矩阵的秩.

其次，阶梯形矩阵的秩就等于其中非零行的数目. 为了证明这个，

只要证明在阶梯形矩阵中那些非零的行线性无关就可以了．设A是一个阶梯形矩阵，不为零的行数是r．因为初等列变换不改变矩阵的秩，所以适当变换列的顺序，不妨设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中$a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,r.$

显然，A的左上角的r级子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{rr} \neq 0.$$

因此，A的秩为r.

证毕

例 4 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

解: 因为A是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行.

所以A的所有4阶子式全为零.

而$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24\neq 0$， 所以$r(A)=3$.

说明： 行阶梯形矩阵的秩=非零行的行数.

例 5　设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵的秩，并求$A$的一个最高阶非零子式.

解:　对A作初等行变换，变成行阶梯形矩阵：

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & -4\\0 & -4 & 3 & 1 & -1\\0 & -12 & 9 & 7 & -11\\0 & -16 & 12 & 8 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & -4\\0 & -4 & 3 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 4 & -8\\0 & 0 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & -4\\0 & -4 & 3 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 4 & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以A的秩为3.

A的一个最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. 向量组秩的计算方法

向量组秩的计算方法：把向量组中的每一个向量作为矩阵的一行（列）构成矩阵，则这个矩阵的秩即为向量组的秩.

求向量组的极大线性无关组的方法是：把向量组中的每一个向量作为矩阵的一列构成一个矩阵，然后用矩阵的初等行变换把矩阵化成阶梯形矩阵，在阶梯形矩阵中，每个阶梯中的第一个非零元所在的列所对应的向量即为极大线性无关组中的向量.

若要用极大线性无关组来表示其余向量，则需进一步把阶梯形矩阵化成行最简形，这时，不在极大线性无关组中的列中的元素即为用极大线性无关组表示该列所对应的向量的表示系数.

例 6　求下列向量组的秩、一个极大线性无关组并用极大线性无关组表示其余向量.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\\4\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\7\\-1\\1\end{pmatrix};$

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\6\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\\4\end{pmatrix}.$

解：（1） 令$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&2&-3&7\\2&3&5&-1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$

作初等行变换

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&2&-3&7\\0&1&1&5\\0&0&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&1&1&5\\0&2&-3&7\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&1&1&5\\0&0&-5&-3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&1&1&5\\0&0&1&2\\0&0&-5&-3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-3\\0&1&1&5\\0&0&1&2\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

所以向量组的秩为4.

(2) 令$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

至此，可以看出该向量组的秩为3，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大线性无关组. 接着作初等行变换:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 16/9 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以$\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2, \alpha_5 = \frac{16}{9}\alpha_1 - \frac{1}{9}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_4.$

练习　求下列向量组的秩、一个极大线性无关组并用极大线性无关组表示其余向量.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}-9\\-8\\-13\end{pmatrix}$.