

第八章 λ -矩阵

第五节 初等因子

主要内容

- 定义
- 不变因子与初等因子的关系
- 初等因子的求法
- 举例

一、定义

在这一节与下一节中我们假定讨论中的数域 P 是复数域.

上面已经看到，不变因子是矩阵的相似不变量.
为了得到若尔当标准形，再引入

定义 7 把矩阵 A (或线性变换 \mathcal{A}) 的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现出现的次数计算) 称为矩阵 A (或线性变换 \mathcal{A})的**初等因子**.

例 设 12 级矩阵的不变因子是

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{9 \text{ 个}}, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2(\lambda + 1), \\ (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

按定义，它的初等因子有 7 个，即

$$(\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1), \\ (\lambda + i)^2, (\lambda - i)^2.$$

其中 $(\lambda - 1)^2$ 出现三次， $\lambda + 1$ 出现二次。

二、不变因子与初等因子的关系

首先，假设 n 级矩阵 A 的不变因子

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$$

为已知。将 $d_i(\lambda) (i = 1, 2 \dots, n)$ 分解成互不相同的一次因式方幂的乘积：

$$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{12}} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_{1r}},$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{22}} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_{2r}},$$

.....

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{n1}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{n2}} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_{nr}},$$

则其中对应于 $k_{ij} \geq 1$ 的那些方幂

$$(\lambda - \lambda_j)^{k_{ij}} \quad (k_{ij} \geq 1)$$

就是 A 的全部初等因子. 我们注意到不变因子有一个除尽一个的性质, 即

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

从而

$$(\lambda - \lambda_j)^{k_{ij}} \Big| (\lambda - \lambda_j)^{k_{i+1,j}} \\ (i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, r).$$

因此在 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 的分解式中，属于同一个一次因式的方幂的指数有递升的性质，即

$$k_{1j} \leq k_{2j} \leq \dots \leq k_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

这说明，同一个一次因式的方幂作成的初等因子中方次最高的必定出现在 $d_n(\lambda)$ 的分解式中，方次次高的必定出现在 $d_{n-1}(\lambda)$ 的分解式中。如此顺推下去，可知属于同一个一次因式的方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的位置是唯一确定的。

上面的分析给了我们一个如何从初等因子和矩阵的级数唯一地作出不变因子的方法. 设一个 n 阶矩阵的全部初等因子为已知, 在全部初等因子中将同一个一次因式 $(\lambda - \lambda_j)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 的方幂的那些初等因子按降幂排列, 而且当这些初等因子的个数不足 n 时, 就在后面补上适当个数的 1, 使得凑成 n 个. 设所得排列为

$$(\lambda - \lambda_j)^{k_{nj}}, (\lambda - \lambda_j)^{k_{n-1,j}}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{k_{1j}} \\ (j = 1, 2, \dots, r).$$

于是令

$$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_{ir}} \\ (j = 1, 2, \dots, r).$$

则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 就是 A 的不变因子.

这也说明了这样一个事实：如果两个同级的数字矩阵有相同的初等因子，则它们就有相同的不变因子，因而它们相似. 反之，如果两个矩阵相似，则它们有相同的不变因子，因而它们有相同的初等因子.

综上所述，即得：

定理 8 两个同级复数矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

三、初等因子的求法

初等因子和不变因子都是矩阵的相似不变量。
但是初等因子的求法与不变因子的求法比较，反而方便一些。

在介绍直接求初等因子的方法之前，先来说明关于多项式的最大公因式的一个性质：

如果多项式 $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ 互素，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda)) \cdot (g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

事实上，令

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = d(\lambda),$$

$$(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = d_1(\lambda),$$

$$(g_1(\lambda), g_2(\lambda)) = d_2(\lambda).$$

显然，

$$d_1(\lambda) \mid d(\lambda), d_2(\lambda) \mid d(\lambda).$$

由于 $(f_1(\lambda), g_1(\lambda)) = 1$ ，故 $(d_1(\lambda), d_2(\lambda)) = 1$ ，因
而 $d_1(\lambda) d_2(\lambda) \mid d(\lambda)$ 。

另一方面，由于

$$d(\lambda) \mid f_1(\lambda) g_1(\lambda),$$

可令

$$d(\lambda) = f(\lambda) g(\lambda),$$

其中 $f(\lambda) \mid f_1(\lambda)$, $g(\lambda) \mid g_1(\lambda)$. 由于

$$(f_1(\lambda), g_2(\lambda)) = 1,$$

故 $(f(\lambda), g_2(\lambda)) = 1.$

由 $f(\lambda) \mid f_2(\lambda) g_2(\lambda)$ 又得 $f(\lambda) \mid f_2(\lambda)$, 因而

$$f(\lambda) \mid d_1(\lambda).$$

同理 $g(\lambda) \mid d_2(\lambda)$. 所以

$$d(\lambda) \mid d_1(\lambda) d_2(\lambda).$$

于是

$$d(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda).$$

证毕

引理 设

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

如果多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素，
则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价.

证明 显然, $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的二级行列式因子. 而 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的一级行列式因子分别为

$$d(\lambda) = (f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda))$$

$$d'(\lambda) = (f_2(\lambda)g_1(\lambda), f_1(\lambda)g_2(\lambda))$$

由上面的讨论知道, $d(\lambda)$ 和 $d'(\lambda)$ 是相等的, 因而 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 也有相同的一级行列式因子. 所以 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价.

证毕

下面的定理给了我们一个求初等因子的方法，
它不必事先知道不变因子.

定理 9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda E - A$ 为对角形式，然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是 A 的全部初等因子.

证明 设 $\lambda E - A$ 已用初等变换化为对角形

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} h_1(\lambda) & & & \\ & h_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中每个 $h_i(\lambda)$ 的最高项系数都为 1. 将 $h_i(\lambda)$ 分解成互不相同的一次因式方幂的乘积：

$$h_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_{ir}} \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

我们现在要证明的是，对于每个相同的一次因式的方幂

$$(\lambda - \lambda_j)^{k_{1j}}, (\lambda - \lambda_j)^{k_{2j}}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{k_{nj}} \\ (j = 1, 2, \dots, r)$$

在 $D(\lambda)$ 的主对角线上按递升幂次排列后，得到的新对角矩阵 $D'(\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 等价. 此时 $D'(\lambda)$ 就是 $\lambda E - A$ 的标准形而且所有不为 1 的 $(\lambda - \lambda_j)^{k_{ij}}$ 就是 A 的全部初等因子.

为方便起见，先对 $\lambda - \lambda_1$ 的方幂进行讨论. 令

$$g_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}} (\lambda - \lambda_3)^{k_{i3}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_{ir}} \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

于是

$$h_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} g_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, n),$$

而且每个 $(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}$ 都与 $g_j(\lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 互素.

如果有相邻的一对指数 $k_{i1} > k_{i+1,1}$, 则在 $D(\lambda)$ 中
将 $(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}$ 与 $(\lambda - \lambda_1)^{k_{i+1,1}}$ 对调位置, 而其余因
式保持不动.

根据引理 

$$\begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_1)^{k_{i+1,1}} g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1)^{k_{i+1,1}} g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价.

从而 $D(\lambda)$ 与对角矩阵

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}} g_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\lambda - \lambda_1)^{k_{i+1,1}} g_i(\lambda) & \\ & & & (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}} g_{i+1}(\lambda) \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (\lambda - \lambda_1)^{k_{n1}} g_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价. 然后对 $D_1(\lambda)$ 作如上的讨论. 如此继续进行直到对角矩阵主对角线上元素所含 $\lambda - \lambda_1$ 的方幂是按递升幂次排列为止. 依次对 $\lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_r$ 作同样处理, 最后便得到与 $D(\lambda)$ 等价的对角矩阵

$D'(\lambda)$ ，它的主对角线上所含每个相同的一次因式的方幂，都是按递升幂次排列的.

证毕

四、举例

例 1 求下列 λ – 矩阵的初等因子.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda - 3 & \lambda - 1 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

解：

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda - 3 & \lambda - 1 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ \lambda^2 - 1 & 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - (\lambda + 1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 3\lambda + 1) \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 3\lambda + 1) \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 3\lambda + 1) & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + (\lambda^2 + 3\lambda - 1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & 0 & (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 3\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3) \end{pmatrix}$$

所以初等因子为 $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda + 1, \lambda + 3$.

例 2 已知 λ – 矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子, 秩 r 与阶数 n , 求 $A(\lambda)$ 的标准形.

(1) $\lambda - 2, (\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^3$

$r = 4, n = 4;$

(2) $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^2$

$r = 3, n = 5.$

解： (1) 把 $A(\lambda)$ 的初等因子

$$\lambda - 2, (\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^3$$

按降幂排成如下两行，每行4个因子；

$$(\lambda - 2)^3, (\lambda - 2)^2, \lambda - 2, \quad 1$$

$$(\lambda + 2)^3, \lambda + 2, \quad 1, \quad 1$$

令

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 2,$$

$$d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2),$$

$$d_4(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^3.$$

则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda), d_4(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子.

所以 $A(\lambda)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda - 2 & & \\ & & (\lambda - 2)^2(\lambda + 2) & \\ & & & (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^3 \end{pmatrix}.$$

解： (2) 把 $A(\lambda)$ 的初等因子

$$\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^2$$

按降幂排成如下两行，每行3个因子(因 $A(\lambda)$ 的秩为3)；

$$(\lambda - 1)^3, (\lambda - 1)^2, \lambda - 1,$$

$$(\lambda + 2)^2, \lambda + 2, \quad 1,$$

令

$$d_1(\lambda) = \lambda - 1,$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

$$d_4(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)^2.$$

则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子. 所以
 $A(\lambda)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & & & \\ & (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) & & \\ & & (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)^2 & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

例 3 求下列矩阵的不变因子，行列式因子与初等因子

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

解: (1) 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

把 $\lambda E - A$ 化为标准形

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -2 & 5 \\ -6 & \lambda - 4 & 9 \\ -5 & -3 & \lambda + 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 5 \\ \lambda - 1 & \lambda - 4 & 9 \\ \lambda - 1 & -3 & \lambda + 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 5 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \text{ 调到 } r_1]{c_1 \leftrightarrow -c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda + 2 \\ 2 & \lambda - 1 & 5 \\ 2 - \lambda & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - (2 - \lambda)r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - (\lambda + 2)c_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{c_3 + 2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

所以不变因子为

$$1, 1, \lambda^2(\lambda - 1),$$

行列式因子为

$$1, 1, \lambda^2(\lambda - 1),$$

初等因子为

$$\lambda^2, (\lambda - 1).$$

解: (2) 令 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

把 $\lambda E - A$ 化为标准形

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & -3 \\ -6 & \lambda + 3 & 9 \\ -4 & 2 & \lambda + 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 & -3 \\ \lambda + 3 & -6 & 9 \\ 2 & -4 & \lambda + 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2 + (\lambda + 3)r_1}{r_2 + 2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 & -3 \\ 0 & \lambda^2 + 5\lambda & -3\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 5\lambda & -3\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 11\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 2c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 11\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 11\lambda \end{pmatrix}$$

所以不变因子为

$$1, \lambda, \lambda(\lambda + 11),$$

行列式因子为

$$1, \lambda, \lambda^2(\lambda + 11),$$

初等因子为

$$\lambda, \lambda, (\lambda + 11).$$

综上所述，我们已得到：

定理：下列命题等价

- (1) 方阵 A 与 B 相似；
- (2) $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价；
- (3) A 与 B 的不变因子组相同；
- (4) A 与 B 的初等因子组相同；
- (5) $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 的行列式因子组相同.