

# 一、行列式的几何意义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2 阶?

3 阶?

n 阶?

# 二、几何意义下行列式的性质

1.  $|A^T| = |A|$

2. 行列式中某行（列）元素全为零，则行列式为零

3.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

4.  $\begin{vmatrix} a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5. 行列式中两行（列）互换，行列式的值反号。

6. 行列式中的两行（列）元素相等或对应成比例，则行列式为零

7. 行列式中某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式的值不变

### 三、行列式展开公式

$M_{ij}$ :  $a_{ij}$  的余子式

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  :  $a_{ij}$  的代数余子式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} = |A| \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} = |A| \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

【例】已知  $n$  阶行列式  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & & & & \\ \vdots & & 3 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & & n \end{vmatrix}$ , 求  $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$

【例】计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ , 其中  $a_i \neq 0 (i=1,2,\dots,n)$

【例】计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$ , 且  $b \neq 0$

【例】若  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{31} + A_{32} + A_{33}$

## 四、Laplace 定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$k$  级子式  $M$

$M$  的余子式  $M'$

$M'$  的代数余子式  $A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'$

设在  $n$  阶行列式  $D$  中任意取定了  $k (1 \leq k \leq n-1)$  个行。由这  $k$  行元素组成的一切  $k$  级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式  $D$ 。

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t$$

## 五、行列式的计算

计算行列式常用的方法有：定义法、化三角形法、递推法、数学归纳法及公式法等。

### 【类型一】“两条线”行列式（非零元分布在两条线上）

两条线行列式常见类型有以下几种：

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & * & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

【例】 $D = \begin{vmatrix} a_1 & & b_1 \\ & a_2 & b_2 \\ & b_3 & a_3 \\ b_4 & & a_4 \end{vmatrix} = ?$

解法一：展开公式

解法二：Laplace 定理

$$\text{【例】 } D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & a_1 & b_1 \\ & & & c_1 & d_1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix} = ?$$

解法一：展开公式+递推法

解法二：Laplace 定理+递推法

$$\text{【例】 } D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = ?$$

解法一：展开公式

解法二：定义法

$$\text{【例】 } D_n = \begin{vmatrix} a & & b \\ & a & \\ b & & a \end{vmatrix} = ?$$

解法一：展开公式

解法二：Laplace 定理

解法三：？

### 【类型二】“三条线”行列式（非零元分布在三条线上）

1. “三对角”行列式: 
$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

一般采用递推法、数学归纳法

2. “爪型”行列式: 
$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & | \\ \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & , & \vdots & \ddots & \ddots & | \\ \vdots & & & | & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

一般采用“以邻消斜”法

### 【类型二】各行（列）元素之和相等（或多数相等仅个别不相等）的行列式

行加法（或列加法）再化为三角形行列式

【例】 $D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = ?$

这题很多方法都能做。

### 【类型三】范德蒙行列式

【例】 $D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2^n - 2 & 2^{n-1} - 2 & \cdots & 2^3 - 2 & 2 \\ 3^n - 3 & 3^{n-1} - 3 & \cdots & 3^3 - 3 & 6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^n - n & n^{n-1} - n & \cdots & n^3 - n & n^2 - n \end{vmatrix} = ?$