高等代数学（第四版）习题解答
第六章　特征值

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

6.1　特征值和特征向量

1. (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 4 & 4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1. 设特征向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-2x_3=0, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 1, 故有两个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故属于特征值 1 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2$, 其中 c_1, c_2 为 $\mathbb{K}$ 中任意不全为零的数.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 -1. 设特征向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda = -1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 2, 故只有一个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故属于特征值 -1 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c_1 为 $\mathbb{K}$ 中任意非零数.

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 \\ -7 & \lambda + 2 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0. 设特征向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 2, 故只有一个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故属于特征值 0 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c_1 为 $\mathbb{K}$ 中任意非零数.

2. 例 6.3.

3. 例 6.4.

4. (1) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值为 1 和 2, 对应的特征向量分别为 $(1, 0)'$ 和 $(0, 1)'$. 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

的特征值为 λ_1 和 λ_2, 即 λ_1 和 λ_2 是方程 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ 的两个根. 下面根据 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数分情况进行讨论.

(Case 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

(Subcase 1.1) $b \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}.$$

(Subcase 1.2) $c \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}.$$

(Subcase 1.3) $b = c = 0$. 不妨设 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$, 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Case 2) $\lambda_1 = \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$, 且 $\mathrm{r}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1$.

(Subcase 2.1) $b \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}.$$

(Subcase 2.2) $c \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}.$$

(Case 3) $\lambda_1 = \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$, 且 $\mathrm{r}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$, 即 $\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{I}$. 此时 $a = d = \lambda_1$, $b = c = 0$, $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量可取为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为 $(x_1, y_1)'$, $(x_2, y_2)'$ 或 $(x, y)'$ (取决于 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数). 由习题 3 的结论, 原矩阵的特征值为 1, 2, λ_1 和 λ_2, 对应的线性无关特征向量分别为 $(1,0,0,0)'$, $(0,1,0,0)'$, $(0,0,x_1,y_1)'$ 和 $(0,0,x_2,y_2)'$ 或 $(0,0,x,y)'$ (取决于 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数).

(2) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值为 1 和 -1, 对应的特征向量分别为 $(1,1)'$ 和 $(1,-1)'$. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值为 i 和 $-\mathrm{i}$, 对应的特征向量分别为 $(\mathrm{i},1)'$ 和 $(\mathrm{i},-1)'$. 由习题 3 的结论, 该矩阵的特征值为 1, -1, i 和 $-\mathrm{i}$, 对应的线性无关特征向量分别为 $(1,1,0,0)'$, $(1,-1,0,0)'$, $(0,0,\mathrm{i},1)'$ 和 $(0,0,\mathrm{i},-1)'$.

(3) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值为 5 和 -2, 对应的特征向量分别为 $(3,4)'$ 和 $(-1,1)'$. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

的特征值为 6 和 1, 对应的特征向量分别为 $(1,3)'$ 和 $(-1,2)'$. 由习题 3 的结论, 该矩阵的特征值为 5, -2, 6 和 1, 对应的线性无关特征向量分别为 $(3,4,0,0)'$, $(-1,1,0,0)'$, $(0,0,1,3)'$ 和 $(0,0,-1,2)'$.

5. 例 6.2.

6. 基础训练单选题 5.

7. 由条件可知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 从而 $\lambda_0\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的关于特征值 $\lambda_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量. 由此可得

$$\begin{cases} b+3=\lambda_1, \\ 2b+2=\lambda_1 b, \\ a+b+1=\lambda_1. \end{cases}$$

由上述方程可解出 $a=2$, $b=1$ 或 -2, $\lambda_1=4$ 或 1. 经计算可知 $|\boldsymbol{A}|=4$, 于是 $\lambda_0=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=1$ 或 4. 综上所述, $(a,b,\lambda_0)=(2,1,1)$ 或 $(2,-2,4)$.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)'$, 则由条件可知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 代入条件 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+c+1)=1, \\ \lambda_0(-b-2)=1, \\ \lambda_0(-a+c-1)=-1. \end{cases}$$

由上述方程可解出 $\lambda_0=1$, $a=c$, $b=-3$. 最后由 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 可解出 $a=c=2$. 综上所述, $(a,b,c,\lambda_0)=(2,-3,2,1)$.

9. (1) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^k, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^k, 即 $\lambda_0^k=0$, 因此 $\lambda_0=0$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

(2) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^2-1, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^2-1, 即 $\lambda_0^2-1=0$, 因此 $\lambda_0=1$ 或 -1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能为 1 或 -1.

(3) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^2-x, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^2-x, 即 $\lambda_0^2-\lambda_0=0$, 因此 $\lambda_0=0$ 或 1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能为 0 或 1.

10. 注意到 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{\alpha\beta}'=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$, 故由习题 9 (1) 的结论可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

11. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $(x+1)^m$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 $(x+1)^m$, 即 $(\lambda_0+1)^m=0$, 因此 $\lambda_0=-1$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 -1, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^n$.

12. 例 6.19.

13. 先求 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}'$ 的特征多项式. 由习题 12 的结论可知,

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}')|&=|(\lambda-1)\boldsymbol{I}_n-(-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}'|\\&=(\lambda-1)^{n-1}|(\lambda-1)\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{\beta}'(-\boldsymbol{\alpha})|\\&=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}'$ 的特征值为 $1-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$ 和 $(n-1)$ 个 1.

14. 注意到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$ 而 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$, 故由习题 12 的结论可知, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

15. 例 6.26.

16. (1) 例 6.35 的代数版本.

(2) 例 6.37 的代数版本.

(3) 例 6.40.

6.2 对角化

1. 记各小问中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\4&4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 (3 重). 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 1, 因此解空间的维数为 2, 即特征值 1 的几何重数为 2, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $\boldsymbol{I}_3$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_3$, 矛盾.

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 (3 重). 当 $\lambda=-1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-3x_1+x_2-2x_3=0,\\ -5x_1+2x_2-3x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 2, 因此解空间的维数为 1, 即特征值 -1 的几何重数为 1, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $-\boldsymbol{I}_3$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_3$, 矛盾.

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ -7 & \lambda+2 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (3 重). 当 $\lambda=0$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3=0,\\ -7x_1+2x_2+3x_3=0,\\ -3x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 2, 因此解空间的维数为 1, 即特征值 0 的几何重数为 1, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $\boldsymbol{O}$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 矛盾.

2. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2 和 3. 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-3x_2=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=2$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-2x_2=0,\\ 3x_1-x_2-x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=3$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}4x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-x_2=0,\\ 3x_1-x_2=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 & -4 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (2 重) 及 -1 (1 重). 当 $\lambda = 0$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = -1$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 (2 重) 及 -1 (1 重). 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\-x_1+x_2=0,\end{cases}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-x_1-x_2=0,\\-x_1-x_2=0,\\-2x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

3. 例 6.50. 答案为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&7&-3\\-3&6&-2\end{pmatrix}.$$

4. 由条件可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2 和 3, 相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,1)'$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)'$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{1,2,3\}$, 则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-7&2&4\\-14&5&6\\-13&3&8\end{pmatrix}.$$

5. 例 6.51. 答案为 $(x,y,z)=(4,5,6)$, $\boldsymbol{P}$ 可取为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

6. 例 6.52. 答案为 $k=0$, $\boldsymbol{P}$ 和对角阵可取为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

7. 例 6.53. 答案为

$$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot 2^n-6^n&2^n-6^n&6^n-2^n\\2\cdot 6^n-2^{n+1}&2\cdot 6^n+2^{n+1}&2^{n+1}-2\cdot 6^n\\3\cdot 2^n-3\cdot 6^n&3\cdot 2^n-3\cdot 6^n&2^n+3\cdot 6^n\end{pmatrix}.$$

8. 例 6.46.

9. 例 6.48.

10. 例 6.59.

11. 例 6.61.

12. 例 6.67.

13. 例 6.68.

14. 例 6.69.

15. 例 6.73.

16. 例 6.74.

6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

1. 例 6.75.
2. 例 6.76 (2).
3. 例如, 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的极小多项式和特征多项式都分别为 x^2 和 x^4, 但它们不相似. *证法 1*: 假设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表达式代入可得 $p_{21}=p_{31}=p_{41}=p_{23}=p_{33}=p_{43}=0$, 这意味着 $\boldsymbol{P}$ 的第一列和第三列线性相关, 即 $\boldsymbol{P}$ 为奇异阵, 矛盾. *证法 2*: 注意相似的矩阵有相同的秩, 但 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

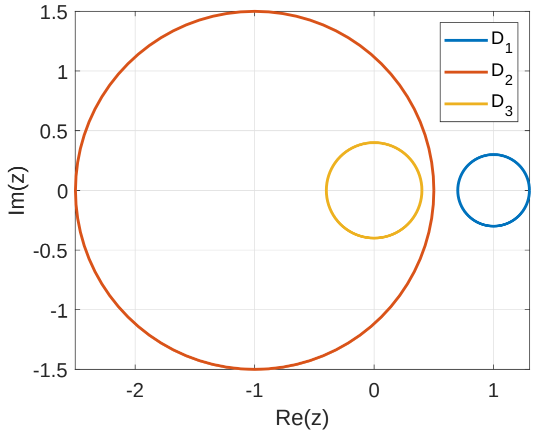
4. 例 6.81.
5. 例 6.82.
6. 例 6.83.
7. 例 6.84.
8. 例 6.85.
9. 例 6.86.
10. 例 6.88.
11. 例 6.91.
12. 例 6.94.

6.4 特征值的估计

1. (1) 由戈氏圆盘第一定理, 写出 3 个戈氏圆盘为

$$\begin{aligned}D_1&:|z-1|\le 0.1+0.2=0.3,\\ D_2&:|z+1|\le 1.1+0.4=1.5,\\ D_3&:|z|\le 0.3+0.1=0.4.\end{aligned}$$

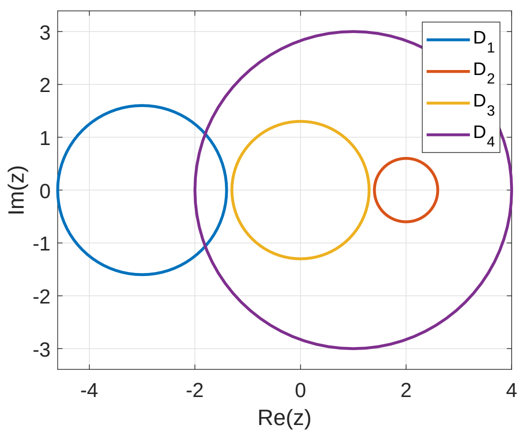
在复平面上图像如下:



(2) 由戈氏圆盘第一定理, 写出 4 个戈氏圆盘为

$$
\begin{aligned}
&D_1 : |z+3| \leq 1+0.1+0.5=1.6,\\
&D_2 : |z-2| \leq 0.1+0.4+0.1=0.6,\\
&D_3 : |z| \leq 1+0.3+0=1.3,\\
&D_4 : |z-1| \leq 0+2+1=3.
\end{aligned}
$$

在复平面上图像如下:



2. 例 3.83 证法 2 的第一个结论.

3. 例 3.83 证法 2 的第二个结论.

4. 例 6.33.

复习题六

1. 例 6.1.

2. 例 6.5.

3. 例 6.6. 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零. 以下假设 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$. 若 $a \neq b$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\dfrac{a\omega_i - b}{1 - \omega_i}\,(1 \le i \le n)$, 其中 $\omega_i\,(1 \le i \le n)$ 是 $\dfrac{b}{a}$ 的 n 次方根. 若 $a = b$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $(n-1)a$ (1 重), $-a$ ($n-1$ 重).

4. 例 6.8. 所求矩阵的全体特征值为

$$\lambda_1 + \lambda_1^2,\ \lambda_1 - \lambda_1^2,\ \lambda_2 + \lambda_2^2,\ \lambda_2 - \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n + \lambda_n^2,\ \lambda_n - \lambda_n^2.$$

5. 例 6.10.

6. 例 6.11. 第 (2) 问所求多项式为 $h(x) = |x\boldsymbol{I}_n - g(\boldsymbol{C})|$.

7. 例 6.13.

8. 例 6.14. 记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ 为 n 阶基础矩阵. $\boldsymbol{\eta}$ 的特征值为 1 ($\dfrac{n(n+1)}{2}$ 重), -1 ($\dfrac{n(n-1)}{2}$ 重). 特征值 1 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{ii}\,(1 \le i \le n)$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij} + \boldsymbol{E}_{ji})\,(1 \le i < j \le n)$; 特征值 -1 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ji})\,(1 \le i < j \le n)$.

9. 例 6.15.

10. 例 6.16.

11. 例 6.18.

12. 例 6.20. $\boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 的特征值为 1 ($n-1$ 重), -1 (1 重).

13. 例 6.21. 若 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的特征值为 0 ($n-1$ 重), $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ (1 重); 若 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的特征值为 0 (n 重).

14. 例 6.22. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 ($n-2$ 重), $n-1$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 1$.

15. 例 6.23.

16. 例 6.24.

17. 例 6.27.

18. 例 6.28.

19. 例 6.29.

20. 例 6.30. $|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{24}$.

21. 例 6.31.

22. 例 6.32.

23. 例 6.45.

24. 例 6.54. 通项 a_n 的显式表达式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

25. 例 6.55. 设 $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, $\omega_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(0 \leq k \leq n-1)$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{f(1), f(\omega_1), \cdots, f(\omega_{n-1})\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为过渡矩阵.

26. 例 6.56.

27. 例 6.60.

28. 例 6.62.

29. 例 6.63.

30. 例 6.65.

31. 例 6.70.

32. 例 6.71.

33. 例 6.72.

34. 例 6.87.

35. 例 6.89.

36. 例 6.90.

37. 例 6.92.

38. 例 6.93.