高等代数学（第四版）习题解答
第五章　多项式

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

5.1　一元多项式代数

无习题.

5.2　整除

1. 我们有如下带余除法:

$$\begin{aligned}2x^5+x^4-x+1&=2x^2(x^3-x+2)+x^4+2x^3-4x^2-x+1\\&=(2x^2+x)(x^3-x+2)+2x^3-3x^2-3x+1\\&=(2x^2+x+2)(x^3-x+2)-3x^2-x-3.\end{aligned}$$

因此 $q(x)=2x^2+x+2$, $r(x)=-3x^2-x-3$.

2. 基础训练填空题 1. 我们有如下带余除法:

$$\begin{aligned}2x^4-3x^3+4x^2+ax+b&=2x^2(x^2-3x+1)+3x^3+2x^2+ax+b\\&=(2x^2+3x)(x^2-3x+1)+11x^2+(a-3)x+b\\&=(2x^2+3x+11)(x^2-3x+1)+(a+30)x+b-11.\end{aligned}$$

因此 $a+30=25$, $b-11=-5$, 故 $a=-5$, $b=6$.

3. 例 5.1.

4. 若 $g(x)\mid f(x)$, 则存在 a,b, 使得

$$(x^2+mx+1)(x^2+ax+b)=x^4+px^2+q.$$

经计算, 上式可化为:

$$x^4+(m+a)x^3+(ma+b+1)x^2+(a+mb)x+b=x^4+px^2+q.$$

因此 $m+a=0$, $ma+b+1=p$, $a+mb=0$, $b=q$. 于是 $a=-m$, $b=q$, 代入可得 $-m^2+q+1=p$ 且 $-m+mq=0$. 最后根据 m 的不同取值分成如下两种情况: 当 $m=0$ 时, $p=q+1$; 当 $m\neq 0$ 时, $q=1$ 且 $p=2-m^2$.

5. 例 5.2.

6. 例 5.3.

7. 例 5.4.

5.3 最大公因式

1. (1) 对 $f(x)=x^4-x^3-4x^2-x+1$, $g(x)=x^2-x-2$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x^2-x-2)(x^2-2)-3x-3\\
&:=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=(-3x-3)(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})+0\\
&:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x).
\end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=-\dfrac{1}{3}r_1(x)=x+1$.

(2) 对 $f(x)=x^4+3x^3-2x-2$, $g(x)=x^2+2x-3$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x^2+2x-3)(x^2+x+1)-x+1\\
&:=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=(-x+1)(-x-3)+0\\
&:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x).
\end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=-r_1(x)=x-1$.

(3) 对 $f(x)=x^5-2x^4-4x^3+2x^2+4x+6$, $g(x)=x^2+x+1$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x+1)(x^3-3x^2-2x+7)-x-1 \\
&:= g(x)q_1(x)+r_1(x), \\
g(x) &= (-x-1)(-x)+1 \\
&:= r_1(x)q_2(x)+r_2(x), \\
r_1(x) &= 1\cdot(-x-1)+0 \\
&:= r_2(x)q_3(x)+r_3(x).
\end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=r_2(x)=1$.

2. (1) 对 $f(x),g(x)$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^4+x^3-x^2-2x-2)\cdot 1+x^3-2x \\
&:= g(x)q_1(x)+r_1(x). \\
g(x) &= (x^3-2x)(x+1)+x^2-2 \\
&:= r_1(x)q_2(x)+r_2(x). \\
r_1(x) &= (x^2-2)x+0 \\
&:= r_2(x)q_2(x)+r_3(x).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
(f(x),g(x)) &= x^2-2 \\
&= g(x)-r_1(x)q_2(x) \\
&= g(x)-(f(x)-g(x)q_1(x))q_2(x) \\
&= g(x)(x+2)-f(x)(x+1).
\end{aligned}$$

从而 $u(x)=-x-1$, $v(x)=x+2$.

(2) 对 $f(x), g(x)$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-x-1)(x^2-3)+x-2 \\
&:= g(x)q_1(x)+r_1(x). \\
g(x) &= (x-2)(x+1)+1 \\
&:= r_1(x)q_2(x)+r_2(x). \\
r_1(x) &= 1\cdot(x-2)+0 \\
&:= r_2(x)q_2(x)+r_3(x).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
(f(x), g(x)) = 1& \\
&= g(x)-r_1(x)q_2(x) \\
&= g(x)-(f(x)-g(x)q_1(x))q_2(x) \\
&= g(x)(x^3+x^2-3x-2)-f(x)(x+1).
\end{aligned}$$

从而 $u(x)=-x-1$, $v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

3. 例如 $f(x)=x$, $g(x)=1$, $u(x)=v(x)=1$, 则 $d(x)=x+1$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 剩余部分参考例 5.5.

4. 例 5.8.

5. 例 5.9.

6. 例 5.10.

7. 例 5.7 及其推论.

8. 设 $m_1(x)=[f_1(x), f_2(x)]$, $m(x)=[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)]$, 则 $m_1(x) \mid m(x)$, $f_i(x) \mid m(x)\,(i>2)$. 另一方面, 若 $m_1(x) \mid l(x)$, $f_i(x) \mid l(x)\,(i>2)$, 则 $f_1(x) \mid l(x)$, $f_2(x) \mid l(x)$, 从而 $l(x)$ 是所有 $f_i(x)$ 的公倍式, 于是 $m(x) \mid l(x)$, 故

$$m(x)=[m_1(x), f_3(x), \cdots, f_m(x)]=[[f_1(x), f_2(x)], f_3(x), \cdots, f_m(x)].$$

最小公倍式的定义显然与多项式的排列顺序无关, 因此上述习题告诉我们, 求 m 个多项式的最小公倍式时可以先求其中任意两个的最小公倍式 (利用高代教材的推论 5.3.6), 从而把问题化为 $m-1$ 个多项式的情形. 不断这样做下去, 最后便可计算出 m 个多项式的最小公倍式.

5.4　因式分解

1. (1) $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x), f'(x))\\
=&(x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4, 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15)\\
=&(x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4, x^4 - 6x^2 - 8x - 3)\\
=&(x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 - (x^4 - 6x^2 - 8x - 3)x, x^4 - 6x^2 - 8x - 3)\\
=&(-4x^3 - 12x^2 - 12x - 4, x^4 - 6x^2 - 8x - 3)\\
=&(x^3 + 3x^2 + 3x + 1, x^4 - 6x^2 - 8x - 3)\\
=&((x+1)^3, (x+1)^3(x-3))\\
=&(x+1)^3\\
\neq&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 有重因式.

(2) $f'(x) = 12x^2 - 8x - 7$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x), f'(x))\\
=&(4x^3 - 4x^2 - 7x - 2, 12x^2 - 8x - 7)\\
=&(36x^3 - 36x^2 - 63x - 18, 12x^2 - 8x - 7)\\
=&(36x^3 - 36x^2 - 63x - 18 - (12x^2 - 8x - 7)(3x - 1), 12x^2 - 8x - 7)\\
=&(2x + 1, 12x^2 - 8x - 7)\\
=&2x + 1\\
\neq&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 有重因式.

(3) $f'(x)=3x^2+1$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x),f'(x))\\
=&(x^3+x+1,3x^2+1)\\
=&(9x^3+9x+9-(3x^2+1)3x,3x^2+1)\\
=&(2x+3,12x^2+4)\\
=&(2x+3,12x^2+4-(2x+3)(6x-9))\\
=&(2x+3,31)\\
=&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 无重因式.

2. 用反证法, 假设 $p(x)$ 在 $\mathbb{K}_1$ 上可约, 则存在 $\mathbb{K}_1$ 上次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$, 使得 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$. 由于 $\mathbb{K}_1\subseteq\mathbb{K}_2$, 故 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 也是 $\mathbb{K}_2$ 上次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式, 这与 $p(x)$ 在 $\mathbb{K}_2$ 上不可约矛盾.

3. 例 5.16.

4. 例 5.18.

5. 例 5.20.

6. 例 5.13.

5.5 多项式函数

1. (1) 记 $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
f(0)&=1-0-0-1=0,\\
f(-1)&=0-1+2-1=0,\\
f(-\frac{1}{2})&=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+1-1=0.
\end{aligned}$$

由余数定理即得 $x(x+1)(2x+1)\mid f(x)$.

(2) 记 $f(x)=x^5+x^{11}+x^{17}+x^{23}+x^{29}$, $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. 设 $\omega_i\,(1\le i\le 4)$ 是 $g(x)$ 的四个根, 则对任意的 $1\le i\le 4$, 均有

$$\omega_i^5-1=(\omega_i-1)(\omega_i^4+\omega_i^3+\omega_i^2+\omega_i+1)=0,$$

于是经计算可得:

$$\begin{aligned}f(\omega_i) &= \omega_i^5 + \omega_i^{11} + \omega_i^{17} + \omega_i^{23} + \omega_i^{29} \\ &= 1 + \omega_i + \omega_i^2 + \omega_i^3 + \omega_i^4 \\ &= 0.\end{aligned}$$

由余数定理即得 $g(x) \mid f(x)$.

2. 例 5.22.
3. 例 5.23.
4. 例 5.24.
5. 例 5.25.
6. 例 4.11. 对任意的 $1 \leq i \leq n$, 令

$$f_i(x) = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}.$$

再令

$$f(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \cdots + b_n f_n(x),$$

则 $f(x)$ 即为所求.

7. 例 5.29. 当 n 是奇数时, $f(n+1) = 1$; 当 n 是偶数时, $f(n+1) = \dfrac{n}{n+2}$.
8. 例 5.30.

5.6 复系数多项式

1. 例 5.31.
2. 例 5.32.
3. 例 5.33. $(m, n) = (3, 1)$, $(2 - \sqrt{3}\mathrm{i}, -\sqrt{3}\mathrm{i})$, $(2 + \sqrt{3}\mathrm{i}, \sqrt{3}\mathrm{i})$.
4. 例 5.42 (2). $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ 称为三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的判别式.
5. 例 5.36.
6. 例 5.37. $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 即为所求.
7. 例 5.39.

5.7 实系数多项式和有理系数多项式

1. 例 5.40.

2. 例 5.41.

3. 基础训练解答题 16.

4. (1) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 7,\ \pm 14,$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x = 2$.

(2) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x = -\frac{1}{2}$.

(3) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm 7,\ \pm\frac{7}{2},\ \pm\frac{7}{3},\ \pm\frac{7}{6},\ \pm 14,\ \pm\frac{14}{3},$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{7}{2}$.

(4) 将该多项式化为整系数多项式 $2x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x - 6$, 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 6,$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

5. 例 5.46.

6. (1) 选取素数 p, 由 Eisenstein 判别法可知, 该多项式在有理数域上不可约.

(2) 记 $f(x) = x^6 + x^3 + 1$, 作变量代换 $x = y + 1$, 则

$$f(x) = (y+1)^6 + (y+1)^3 + 1 = y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 21y^3 + 18y^2 + 9y + 3.$$

选取素数 3, 由 Eisenstein 判别法可知, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(3) 选取素数 2, 由 Eisenstein 判别法可知, 该多项式在有理数域上不可约.

7. 例 5.52.

8. 例 5.53.

9. 基础训练解答题 20. $(x^2-2x-2)(x^2-6x+11) = x^4-8x^3+21x^2-10x-22$.

5.8 多元多项式

1. 例 5.58.

2. 设 f,g 的齐次分解分别为:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_d(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+f_r(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+g_s(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,(r\le i\le d)$ 或者为 i 次齐次多项式或者为零多项式, 并且 $f_d(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, $f_r(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$; $g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,(s\le j\le m)$ 或者为 j 次齐次多项式或者为零多项式, 并且 $g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, $g_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$; 特别地, $\deg f=d$, $\deg g=m$. 由此可得 fg 的齐次分解为:

$$fg=f_dg_m+(f_dg_{m-1}+f_{d-1}g_m)+\cdots+(f_{r+1}g_s+f_rg_{s+1})+f_rg_s,$$

其中 $f_dg_m\neq 0$, $f_rg_s\neq 0$ 且 $\deg fg=d+m$. 用反证法, 若 f,g 不都是齐次多项式, 比如假设 f 不是齐次多项式, 则必有 $d>r$, 于是 fg 的两个齐次分量满足

$$\deg f_dg_m=d+m>r+s=\deg f_rg_s,$$

这与 fg 是齐次多项式矛盾.

3. 注意到 $fg=1$ 为齐次多项式, 故由习题 2 的结论, f,g 都是齐次多项式. 又 $\deg fg=\deg f+\deg g=0$, 故 $\deg f=0$, 即 f 恒等于 $\mathbb{K}$ 中非零元 c.

5.9 对称多项式

1. 先将未定元 x_1,x_2,x_3 的幂和 s_1,s_2,s_3 表示为初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的表达式. 由 Newton 公式可得

$$s_1=\sigma_1,\quad s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0,\quad s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0,$$

从而可得

$$s_1=\sigma_1,\quad s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,\quad s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

(1) 利用上述结果计算可得:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \sigma_1^3 - (\sigma_1 - 2x_1)^3 - (\sigma_1 - 2x_2)^3 - (\sigma_1 - 2x_3)^3 \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1^3 + 6\sigma_1^2 s_1 - 12\sigma_1 s_2 + 8s_3 \\ &= -2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^3 - 12\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 8(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \\ &= 24\sigma_3.\end{aligned}$$

(2) 利用上述结果计算可得:

$$\text{原式} = s_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

2. 例 5.35. $x^3 + (p^3 - 3pq + 3r)x^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)x + r^3 = 0$.

3. 例 5.61.

4. 设未定元个数为 n, 下面根据 n 的不同取值分情况讨论.

(1) 当 $n = 1$ 时, 显然有 $s_4 = \sigma_1^4$.

(2) 当 $n = 2$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 = 0, \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0, \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

因此直接计算可得:

$$\begin{aligned} s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 \\ &= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2. \end{aligned}$$

(3) 当 $n = 3$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 = 0, \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0, \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 = 0. \end{cases}$$

因此直接计算可得:

$$
\begin{aligned}
s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 \\
&= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 \\
&= (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2.
\end{aligned}
$$

(4) 当 $n \geq 4$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$
\begin{cases}
s_1 - \sigma_1 = 0, \\
s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\
s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0, \\
s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 = 0.
\end{cases}
$$

因此直接计算可得:

$$
\begin{aligned}
s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.
\end{aligned}
$$

5. 例 5.63. 方程组的解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$.

6. 例 5.64.

5.10 结式和判别式

1. (1) 根据结式的定义可得

$$
R(f,g) = \begin{vmatrix}
1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\
1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & -5 & 0 & -4 & 0 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -9 & 20 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 8 \\ 0 & -10 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 161.
$$

(2) 根据结式的定义可得

$$
R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.
$$

2. 例 5.65 中令 $n = 3$ (本题是例 5.65 的特例), 答案为:

$$
\Delta = -4p^3 - 27q^2.
$$

3. 例 5.68.
4. 例 5.69.
5. 例 5.70.
6. 例 5.71. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, 则

$$
\Delta(f(x^2)) = (-4)^n a_0 a_n (\Delta(f(x)))^2.
$$

7. 原参数方程可以化为:

$$\begin{cases} t^3+2t-3-x=0, \\ t^2-t+1-y=0. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} f(t)=t^3+2t-3-x, \\ g(t)=t^2-t+1-y, \end{cases}$$

由 t 决定的参数曲线上的一点相当于方程组有公共根, 因此

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3-x \\ 1 & -1 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-y \end{vmatrix}=0.$$

求出行列式可得该曲线的直角坐标方程为

$$y^3-x^2+3xy+y^2-6x+10y-12=0.$$

复习题五

1. 例 5.6.
2. 例 5.11.
3. 例 5.14.
4. 例 5.15.
5. 例 5.17.
6. 例 5.19.
7. 例 5.26.
8. 例 5.27.
9. 例 5.28.
10. 例 5.34. 答案为: $\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$
11. 例 5.38.
12. 例 5.43.
13. 例 5.44.

14. 例 5.45.
15. 例 5.47.
16. 例 5.48.
17. 例 5.49.
18. 例 5.50. 答案为:

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

19. 例 5.51.
20. 例 5.54.
21. 例 5.55.
22. 例 5.56.
23. 例 5.57.
24. 例 5.65. 答案为:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}((1-n)^{n-1}p^n + n^n q^{n-1}).$$

25. 例 5.66. 答案为:
(1) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(2^n(1-n)^{n-1} + n^n)$.
(2) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}2^{n-1}n^n$.
(3) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n^{n-2}$.
26. 例 5.67.
27. 例 5.72.
28. 例 5.73.
29. 例 5.74.
30. 例 5.75. 答案为:

$$5x^2y^2 - 2x^2y - 12xy^2 + x^2 - 4x + 12y + 4 = 0.$$

31. 例 5.76.
32. 例 5.77.
33. 例 5.78.
34. 例 5.79. 答案为: 一组基为 $1, \sqrt[n]{2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$.
35. 例 5.80.