1．乘法原理

乘法原理：若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再进行 A_2 过程，共有 n_1n_2 种方法。

以上原理可推广到 n 个过程的情形。

2．排列

定义：从 $\boldsymbol{n}$ 个不同元素中取出 $\boldsymbol{r}$ 个排列成一列，不允许其中任何元素重复出现，叫做 $\boldsymbol{n}$ 个元素的一个 $\boldsymbol{r}-$（无重）排列。

$\boldsymbol{n}$ 个元素的 $\boldsymbol{r}-$ 排列的总数用 $\boldsymbol{A_n^r}$ 表示．$\boldsymbol{n}$ 个元素的 $\boldsymbol{n}-$排列称为全排列，全排列的个数记为 $\boldsymbol{P_n}$ (即 $\boldsymbol{P_n = A_n^n}$)

定理　（1）$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

（2）$P_n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$

证明：只须证明（1）

在一个排列$a_1a_2\cdots a_r$中，a_1可以取n个元中的任何一个，故有n种取法。a_1取定后，a_2可以取其余$n-1$个元中的任何一个，有$n-1$种取法；依次下去，在$a_1,a_2,\cdots,a_{r-1}$取定后，a_r可以取剩下的$n-r+1$个元中的任何一个，故有$n-r+1$种取法。由乘法原理，总的取法数为：

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

证毕。

第 二 节　排 列

主要内容

- 定义
- 性质

一、定义

作为定义 n 级行列式的准备，我们先来讨论一下排列的定义及性质.

定义1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列.**

例如，2431是一个 4 级排列，45231是一个 5 级排列. 我们知道，n 级排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

我们记

$$1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!.$$

读为 ***n* 阶乘.** 例如：$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, 5! = 120$.

$n!$ 随着 n 的增大迅速地增大. 例如, 10! = 3628800 .

显然 12…n 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的；其他的排都或多或少地破坏自然顺序.

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1 求排列 32541 的逆序数.

解 在排列 32541 中构成逆序的数对为

$$(3,2),\ (3,1),$$
$$(2,1),$$
$$(5,4),\ (5,1),$$
$$(4,1),$$

所以这个排列的逆序数为 $6,$ 排列的奇偶性:

奇排列 $\boxed{No}$ 偶排列 $\boxed{Yes}$

计算排列的逆序数的方法：

方法1：

n个数的任一n元排列，先看数1，看有多少个比1大的数排在1前面，记为 m_1；

再看有多少个比2大的数排在2前面，记为 m_2；

继续下去，最后至数n，前面比n大的数显然没有，记为 $m_n = 0$；

则此排列的逆序数为

$$\tau = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

方法2： n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) =$ 数 i_1 后面比 i_1 小的数的个数

$+$ 数 i_2 后面比 i_2 小的数的个数

$+ \cdots$

$+$ 数 i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数

方法3：

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) =$ 数 i_n 前面比 i_n 大的数的个数

$+$ 数 i_{n-1} 前面比 i_{n-1} 大的数的个数

$+ \cdots$

$+$ 数 i_2 前面比 i_2 大的数的个数

例1　求排列　32514 的逆序数.

解（法1）$m_1 = 3, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = 1, \quad m_5 = 0$

$$\tau(32514) = 3 + 1 + 1 = 5$$

（法2）前 $\rightarrow$ 后

$$\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$$

（法3）后 $\rightarrow$ 前

$$\tau(32514) = 1 + 3 + 0 + 1 + 0 = 5$$

例2　求排列　453162 的逆序数.

解　$\tau = 9$

应该指出，我们同样可以考虑由任意 n 个不同的自然数所组成的排列，一般地也称为 n 级排列. 对这样一般的 n 级排列，同样可以定义上面这些概念.

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**. 例如，经过1, 2对换，排列2431就变成了1432，排列2134就变成了1234.

又例如

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$a_1 \cdots a_l \, a \; b_1 \cdots b_m \; b \; c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l \, b \; b_1 \cdots b_m \; a \; c_1 \cdots c_n$$

显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了．由此得知, 一个对换把全部 n 级排列两两配对, 使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变.

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b_1 \cdots b_m \, b \, c_1 \cdots c_n$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \, b \, b_1 \cdots b_m \, a \, c_1 \cdots c_n$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b_1 \cdots b_m \, b \, c_1 \cdots c_n$$

二、性质

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \ldots a_l a b b_1 \ldots b_m$, 对换 a 与 b, 则排列变为$a_1 \ldots a_l b a b_1 \ldots b_m$. 显然, 排列 $a_1 \ldots a_l$ 和 $b_1 \ldots b_m$ 经对换后的逆序数并不改变, 而 a, b 这两个元素的逆序数改变为: 当$a<b$时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变; 当$a>b$时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆数减少 1. 所以

排列$a_1 \dots a_l abb_1 \dots b_m$ 与排列 $a_1 \dots a_l bab_1 \dots b_m$的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \dots a_l ab_1 \dots b_m bc_1 \dots c_n$，把它作 m 次相邻对换, 调成 $a_1 \dots a_l abb_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$，再作 m+1 次相邻对换, 调成$a_1 \dots a_l bb_1 \dots b_m ac_1 \dots c_n$.

因此, 经 2m+1 次相邻对换, 排列

$$a_1 \dots a_l ab_1 \dots b_m bc_1 \dots c_n$$

调成排列

$$a_1 \dots a_l b b_1 \dots b_m a c_1 \dots c_n,$$

所以这两个排列的奇偶性相反. **证毕**

推论 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$n!/2$个.

证明 假设在全部n级排列中共有s个奇排列，t个偶排列.

将s个奇排列中的前两个数字对换，得到s个不同的偶排列，因此$s \le t$. 同样可证$t \le s$,

于是

$$s = t$$

即奇、偶排列的总数相等，各有$n!/2$个. 证毕

定理 2 任意一个 n 级排列与排列$12\ldots n$ 都可经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 我们对排列的级数 n 作数学归纳法，现在来证任意一个 n 级排列都可经过一系列对换变成$12\ldots n$.

1 级排列只有一个，结论显然成立.

假设结论对 n - 1 级排列已经成立，现在来证对 n 级排列的情形结论也成立.

设 $j_1j_2 \dots j_n$ 是一个 n 级排列，如果 $j_n = n$，那么根据归纳法假设， n - 1 级排列 $j_1j_2 \dots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成 12 …n-1，于是这一系列对换也就把 $j_1j_2 \dots j_n$ 变成了12 …n . 如果 $j_n \neq n$，那么对 $j_1j_2 \dots j_n$ 作 j_n, n 对换，它就变成 $j_1'j_2' \dots j'_{n-1}n$，这

就归结成上面的情形，因此结论普遍成立.

相仿地，$12\ldots n$ 也可用一系列对换变成 $j_1 j_2 \ldots j_n$，因为 $12\ldots n$ 是偶排列，所以根据定理 1 所作对换的个数与排列 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 有相同的奇偶性.

证毕