第八章 λ-矩阵

第一节　λ - 矩阵

主要内容

- 定义
- 举例

一、定义

设 P 是一个数域，λ 是一个文字，作多项式环 $P[\lambda]$. 一个矩阵，如果它的元素是 λ 的多项式，即 $P[\lambda]$ 的元素, 就称为 λ - 矩阵. 在这一章，我们来讨论 λ - 矩阵的一些性质，并用这些性质来证明上一章第八节中关于若尔当标准形的主要定理.

因为数域 P 中的数也是 $P[\lambda]$ 的元素，所以在 λ - 矩阵中也包括以数为元素的矩阵. 为了与 λ - 矩阵相区别，有时我们把以数域 P 中的数为元素的

矩阵称为**数字矩阵**. 以下用 $A(\lambda)$， $B(\lambda)$，… 等表示 λ - 矩阵 .

我们知道， $P[\lambda]$ 中的元素可以作加、减、乘三种运算, 并且它们与数的运算有相同的运算规律. 而矩阵加法与乘法的定义只是用到其中元素的加法与乘法，因此，我们可以同样定义 λ - 矩阵的加法与乘法, 它们与数字矩阵的运算有相同的运算规律. 这些就不重复叙述与证明了.

行列式的定义也只用到其中元素的加法与乘法,因此, 同样可以定义一个 $n \times n$ 的 λ-矩阵的行列式. 一般地, λ-矩阵的行列式是 λ 的一个多项式, 它与数字矩阵的行列式有相同的性质. 例如, 对于λ-矩阵的行列式, 矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积这一结论, 显然是对的.

既然有行列式, 也就有 λ-矩阵的子式的概念. 利用这个概念, 我们有

定义 1 如果 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 r ($r \geq 1$) 级子式不为零，而所有 $r+1$ 级子式 (如果有的话) 全为零，则称 $A(\lambda)$ 的**秩**为 r. 零矩阵的**秩**规定为零.

对于数字矩阵，这与以前的定义是一致的.

与以前一样，我们还有：

定义 2　一个 $n \times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 称为**可逆的**，如果有一个 $n \times n$ 的 λ-矩阵 使

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E, \tag{1}$$

这里 E 是 n 级单位矩阵．适合 (1) 的矩阵 $B(\lambda)$ (它是唯一的) 称为 $A(\lambda)$ 的逆矩阵，记为 $A^{-1}(\lambda)$.

由定义可知，λ-矩阵可逆的行列式是λ的非零多项式，所以是满秩的．但反之不对.

关于λ-矩阵可逆的条件有：

定理 1 一个 $n\times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充分必要条件是行列式 $|A(\lambda)|$ 是一个非零数.

证明 先证充分性. 设

$$d=|A(\lambda)|$$

是一个非零的数. $A^*(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵，它也是一个 λ-矩阵，而

$$A(\lambda)\left[\frac{1}{d}A^*(\lambda)\right]=\left[\frac{1}{d}A^*(\lambda)\right]A(\lambda)=E\ ,$$

因此，$A(\lambda)$ 可逆.

再证**必要性**. 设 $A(\lambda)$ 可逆，则有

$$A(\lambda)\,B(\lambda) = B(\lambda)\,A(\lambda) = E\,,$$

上式两边取行列式，得

$$|\,A(\lambda)\,|\,|\,B(\lambda)\,| = |E\,| = 1\,.$$

因为 $|\,A(\lambda)\,|$ 与 $|\,B(\lambda)\,|$ 都是 λ 的多项式，所以由它们的乘积是 1 可以推知，它们都是零次多项式，也就是非零的数 .

证毕

二、举例

例 1 求下列 $\lambda-$ 矩阵的秩

(1) $$\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & -1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda^2 \\ 2\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(1) 解： 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & -1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-2\right) \neq 0$$

所以，该矩阵的秩为3.

(2) 解： 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda^2 \\ 2\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

而$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 2\lambda & \lambda^2-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left(\lambda^2-1\right)+2\lambda \neq 0$,

所以，该矩阵的秩为2.

例 2 下列 $\lambda-$矩阵中，哪些是可逆的？若可逆求其逆矩阵.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} -\lambda+1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

(1) 解： 因为

$$\begin{vmatrix} -\lambda+1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = 1 = \text{常数}$$

所以，该矩阵可逆. 其逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+1 & \lambda & \lambda^2 \\ -\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 解： 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & \lambda^2-1 \end{vmatrix} = 4\lambda^3+2\lambda^2-\lambda \neq \text{常数},$$

所以，该矩阵不可逆.