第二节　矩阵的运算

主要内容

- 加　法
- 乘　法
- 数量乘法
- 转　置

现在我们来定义矩阵的运算，它们可以认为是矩阵之间一些最基本的关系．下面要定义的运算是矩阵的加法、乘法、矩阵与数的乘法以及矩阵的转置.

为了确定起见，我们取定一个数域P，以下所讨论的矩阵全由数域P中的数组成的.

一、加法

1. 定义

定义 1 设

$$A=(a_{ij})_{s\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

$$B=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个$s \times n$矩阵，则矩阵

$$C = (c_{ij})_{s\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{s\times n} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

称为A和B的和，记为

$$C = A + B.$$

注意：

1） 相加的矩阵必须有相同的行数和列数；

2） 行数相等、列数也相等的矩阵称为**同型矩阵**.

矩阵的加法是两个**同型矩阵**对应位置上的元素相加.

2. 零矩阵和负矩阵

定义2 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为$0_{s\times n}$，在不引起含混的时候，可简单地记为0.

矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**负矩阵**，记为$-A$.

3. 运算规律

1）结合律 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$;

2）交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

3）零矩阵的运算

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A};$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0};$$

4）减法 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

5）和矩阵的秩

$$\boxed{\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B})}$$

现在来证明： $\quad r(A+B) \le r(A)+r(B).$

设A和B的秩分别为s和t. 我们把A的n个列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$组成向量组，不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一个极大线性无关组. 同样地，把$B$的$n$个列向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$组成向量组，不妨设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是一个极大线性无关组. 于是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$就可以分别由两组极大线性无关组线性表出，即

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{s} k_{ij}\alpha_j, \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{t} l_{ij}\beta_j, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

因此

$$\alpha_i + \beta_i = \sum_{j=1}^{s} k_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{t} l_{ij}\beta_j, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$A + B$ 的 n 个列向量可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，所以 $A + B$ 的秩小于等于 $s + t$，即 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

证毕

二、乘法

1. 引例

引例 1　变量组之间的关系

引例 2　总收入与总利润

2. 定义

定义 3 设有两个矩阵

$$A = (a_{ik})_{s\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$$

那么矩阵

$$C = (c_{ij})_{s\times m},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \qquad (1)$$

称为A与B的乘积，记为$C = AB$.

注意:

1） 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘.

2） 三个矩阵的行列数之间关系为

乘积矩阵的行数 = 左矩阵的行数;

乘积矩阵的列数 = 右矩阵的列数;

3） 乘积矩阵的第i行第j列的元素等于左矩阵的第i行与右矩阵的第j列的对应元素乘积的和.

注意:

$$(m,n)\cdot(n,p)=(m,p)$$

$$\begin{array}{cccccc} & & j & & j & \\ i & \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{1j}\\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} & i \end{array}$$

例 1 计算下列矩阵的乘积 $A_{2\times3}B_{3\times3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 11 & 4 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 51 & 55 & 69 \\ 225 & -15 & 173 \end{pmatrix}$$

例 2 已知

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

求AB.

解： 因为A是2×4矩阵，B是4×3矩阵，A的列数等于B的行数，所以矩阵A与B可以相乘，其乘积$AB=C$是一个2×3矩阵，由矩阵乘积的定义有

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

例 3 线性方程组的矩阵形式， 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

若令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则线性方程组可写成如下矩阵形式：

$$AX = B.$$

线性方程组的三种形式

例 4　　再看引例 1

若令 $A = (a_{ij})_{4\times3}, B = (b_{ij})_{3\times2},$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

则关系式

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3. \end{cases} \tag{2}$$

可写为

$$x = Ay \tag{2'}$$

关系式

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \qquad (3)$$

可写为

$$y = Bz \qquad (3')$$

把(3′)代入(2′)，得

$$X = A(Bz) = (AB)z = Cz$$

其中

$$C = AB.$$

3. 运算规律

1） $\mathbf{0}_{k\times m}A_{m\times p}=\mathbf{0}_{k\times p}, A_{m\times p}\mathbf{0}_{p\times n}=\mathbf{0}_{m\times n}$;

2） 结合律 $(AB)C=A(BC)$;

3） 分配律 $A(B+C)=AB+AC$;

$$(B+C)A=BA+CA;$$

证明： 只证结合律.

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{jk})_{n\times m}, C=(c_{kl})_{m\times r}$，

下面我们证明

$$(AB)C=A(BC).$$

令 $V=AB=(v_{ik})_{s\times m},\ W=BC=(w_{jl})_{n\times r},$

其中

$$v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\qquad (i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,m),$$

$$w_{jl}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl}\qquad (j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,r).$$

因为

$$(AB)C = VC$$

中VC的第i行第l列元素为

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}, \qquad (4)$$

而

$$A(BC)=AW$$

中AW的第i行第l列元素为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}, \qquad (5)$$

由于双重连加号可以交换次序，所以(4)和(5)的结果是一样的，这就证明了结合律.　　证毕

例 5 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

的乘积AB及BA.

解: 由定义有

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

关于矩阵的乘法运算，需要注意以下几点：

(1) 矩阵的乘法运算不满足交换律.

AB有定义，BA不一定有定义. 如例 2 中的矩阵A和B， AB有定义，BA就没有定义.

即使AB与BA都有定义，它们也不一定相等. 如例 5 中AB和BA虽然都有定义，但$AB \neq BA$.

所以，在作乘法时，应指明它们相乘的次序. 如AB读作“A左乘B”或“B右乘A”.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

例如，本节例 5 中$A \neq 0, B \neq 0$，但$BA = 0$.

(3) 矩阵的乘法不满足消去律，即如果$AB = CB, B \neq 0$，不一定能推出$A = C$.

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = CB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$ $B \neq 0$，但$A \neq C$.

填空题 4.5分

设置

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

求$C=AB$.

$c_{11}=$ [填空1] $c_{12}=$ [填空2] $c_{13}=$ [填空3]
$c_{21}=$ [填空4] $c_{22}=$ [填空5] $c_{23}=$ [填空6]
$c_{31}=$ [填空7] $c_{32}=$ [填空8] $c_{33}=$ [填空9]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

4. 单位矩阵

定义 4 主对角线上的元素全是1，其余元素全是0的$n \times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为n阶单位矩阵，记为E_n，或者在不致含混的时候简单写为E.

n 级单位矩阵 E 在矩阵代数中占有很重要的地位，它的作用与 "1" 在初等代数中的作用相似. 如

$$EA = AE = A\ .$$

设 $A = (a_{ij})_{sn}$，验证 $E_s A_{sm} = A_{sm}$.

5. 方幂

1）定义　　如果$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$矩阵，那么，$\boldsymbol{AA}$有定义，$\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{m}$也有也有意义，因此有下述定义：

定义 5　　设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$阶方阵，$\boldsymbol{m}$是正整数，$\boldsymbol{m}$个$\boldsymbol{A}$相乘称为$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{m}$次幂，记为$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$$

另外还规定（$\boldsymbol{A}$可逆时），

$$\boldsymbol{A}^{0}=\boldsymbol{E}.$$

2）运算规律

设A为方阵，k,l为正整数，则

$$A^k A^l = A^{k+l}, \qquad (A^k)^l = A^{kl}.$$

又因矩阵乘法一般不满足交换律，所以对于两个n阶矩阵A与B，一般来说$(AB)^k \neq A^k B^k$.

例 6　设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求$A^k$.

解：　首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$$

由此推测

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \qquad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明： 当$k = 2$时，显然成立.

假设结论对k成立，则$k + 1$时

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k} & C_{k+1}^{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知：

$$A^{k}=\begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & C_{k}^{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}.$$

三、数量乘法

1. 定义

定义 6 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}$与数$k$的数量乘积，记为$kA$. 用数$k$乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘以$k$.

2. 运算规律

$$(k+l)A = kA + lA,$$

$$k(A+B) = kA + kB,$$

$$k(lA) = klA,$$

$$1A = A, \qquad (-1)A = -A,$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

证明 ☜

矩阵相加与数乘以矩阵合起来, 统称为矩阵的**线性运算**. 线性运算满足以下8条运算律:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

2) $A+B=B+A$;

3) $k(lA)=(kl)A$;

4) $(k+l)A=kA+lA$;

5) $k(A+B)=kA+kB$;

6) $1A=A$;

7) $A+0=A$;

8) $A+(-A)=0$;

今后, 我们将从这8条性质出发推广线性运算.

3. 数量矩阵

定义 7 矩阵

$$kE=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

称为数量矩阵.

设A是一 $n \times n$矩阵，则有

$$kA = (kE)A = A(kE).$$

这个式子说明，数量矩阵与所有的$n \times n$矩阵作乘法是可交换的. 可以证明：如果一个n阶矩阵与所有n阶矩阵作乘法是可交换的，那么这个矩阵一定是数量矩阵. 关于数量矩阵，还有以下运算性质：

$$kE + lE = (k + l)E,$$

$$(kE)(lE) = (kl)E,$$

这就是说，数量矩阵的加法与乘法完全归结为数的加法与乘法.

四、转置

1. 定义

定义 8 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

所谓A的转置就是指矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的转置也可记为A^T.

例如：$A = \begin{pmatrix} 22 & -13 & 43 & 1 \\ 5 & 78 & -21 & 33 \\ 0 & 9 & 47 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 22 & 5 & 0 \\ -13 & 78 & 9 \\ 43 & -21 & 47 \\ 1 & 33 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 3}$

2. 运算规律

$$(A^T)^T = A,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(kA)^T = kA^T,$$

证明 ☜

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

验证$(AB)^T=B^TA^T$.

解: 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix}$$

所以 $(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}$.

又

$$A^T=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

所以 $(AB)^T=B^TA^T$.

- **对称阵**

n阶方阵，如果$a_{ij}=a_{ji}$，则称A为对称矩阵

A为对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $A=A^T$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A为反对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $A=-A^T$

例 8 设$\alpha=(1\quad 2\quad 3)$，$\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$A=\alpha^T\beta$，求$A^n$.

解： 法 1

$$A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 1/2\quad 1/3)=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\2 & 1 & 2/3\\3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\2 & 1 & 2/3\\3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\2 & 1 & 2/3\\3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3/2 & 1\\6 & 3 & 2\\9 & 9/2 & 3\end{pmatrix}=3A$$

$$A^2 = 3A$$

$$A^n = A^{n-2}A^2 = A^{n-2}3A = 3A^{n-1} = \cdots = 3^{n-1}A$$

所以

$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

法 2

$$A^n=(\alpha^T\beta)^n=\left(\alpha^T\beta\right)\left(\alpha^T\beta\right)\cdots\left(\alpha^T\beta\right)=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)^{n-1}\beta$$

$$\beta\alpha^T=(1\quad 1/2\quad 1/3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\times1+\frac{1}{2}*2+\frac{1}{3}*3=3.$$

$$A^n=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}A.$$