

第二节 一元多项式

主要内容

- 定义
- 多项式的运算
- 多项式的运算规律

一、定义

在对多项式的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域 P 作为基础. 设 x 是一个符号(或称文字)我们有

定义 2 设 n 是一非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 , \quad (1)$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 全属于数域 P ，称为系数
在数域 P 中的一元多项式，或者简称为数域 P

上的一元多项式.

在多项式 (1) 中, $a_i x^i$ 称为 **i 次项**, a_i 称为 **i 次项的系数**. 以后我们用 $f(x), g(x), \dots$ 或 f, g, \dots 等来代表多项式.

注意 我们这儿定义的多项式是符号或文字的形式表达式. 当这符号是未知数时, 它是中学所学代数中的多项式. 看应用需要, 这个符号还可以代表其他待定事物. 为了能统一研究未知数和其他

待定事物的多项式，我们才抽象地定义上述形式表达式。并且还要对它们引入运算来反映各个待定事物所满足的运算规律，统一研究以得到它们普遍的公共的性质。

定义 3 如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，同次项的系数全相等，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**，记为

$$f(x) = g(x).$$

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为 0 。

在(1)中，如果 $a_n \neq 0$ ，那么 $a_n x^n$ 称为多项式(1)的**首项**， a_n 称为**首项系数**， n 称为多项式(1)的**次数**. 零多项式是唯一不定义次数的多项式.

多项式 $f(x)$ 的次数记为

$$\partial(f(x)).$$

二、多项式的运算

1. 引例

为便于计算和讨论，我们常常用和号来表达多项式. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

是数域 P 上两个多项式. 那么它们可以写成

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i , \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j .$$

2. 加法

在表示多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和时，如 $n \geq m$ ，

为了方便起见，在 $g(x)$ 中令 $b_n = b_{n-1} = \dots = b_{m+1} = 0$ 。

那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和为

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots \\ &\quad + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i .$$

3. 乘法

$$\begin{aligned}f(x) \cdot g(x) &= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} \\&\quad + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0,\end{aligned}$$

其中 s 次项的系数是

$$a_s b_0 + a_{s-1} b_1 + \dots + a_1 b_{s-1} + a_0 b_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j.$$

所以 $f(x) g(x)$ 可表成

$$f(x) g(x) = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) x^s.$$

显然，数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘等运算后，所得结果仍然是数域 P 上的多项式.

对于多项式的加减法，不难看出

$$\partial(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\partial(f(x)), \partial(g(x)))$$

对于多项式的乘法，可以证明，如果 $f(x) \neq 0$,
 $g(x) \neq 0$ ，那么 $f(x)g(x) \neq 0$ ，并且

$$\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$$

证明 

由以上证明还看出，多项式乘积的首项系数就等于因子首项系数的乘积。

显然，上面得出的结果都可以推广到多个多项式的情形。

下面来讨论多项式的运算所满足的规律。

三、多项式的运算规律

1. 加法交换律

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x).$$

2. 加法结合律

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)).$$

3. 乘法交换律

$$f(x)g(x) = g(x)f(x).$$

4. 乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)).$$

证明 

5. 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x).$$

6. 乘法消去律

如果 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$ 且 $f(x) \neq 0$ ，那么

$$g(x) = h(x).$$

证明 

定义 4 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$ ， P 称为 $P[x]$ 的系数域。