高等代数学（第四版）习题解答
第一章　行列式

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

1.1　二阶行列式

1. (1) -2. (2) 1.

2. (1) $3, 12$. 可见用常数 c 乘以行列式的某一行, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

(2) $3, 9$. 可见用常数 c 乘以行列式的某一列, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

3. $1; -3, 4$. 可见若行列式中某行 (列) 元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.

4. $9, -9$.

5. $11, 11$. 可见行列式和其转置具有相同的值.

6.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

1.2　三阶行列式

1. (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times (-2) = -8.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

2. (1) 0, 因为行列式的前两行成比例.

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

3. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} &= x \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} y & z \\ x & y \end{vmatrix} \\ &= x(x^2 - yz) - z(yx - z^2) + y(y^2 - xz) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & x^2+1 & -1 \\ 0 & -x & e^x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= x \times \begin{vmatrix} -x & e^x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ -x & e^x \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)e^x - x. \end{aligned}$$

4. (1)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} x & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-2x - 15) - (-4 - 15) + (-3x + 6) \\
&= -5x + 10,
\end{aligned}
$$

因此解为 $x = 2$.

(2)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (x-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) - 2 \times 3 + (-1) \times 5 \\
&= x - 13,
\end{aligned}
$$

因此解为 $x = 13$.

5. (1)

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5},
$$

$$
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5},
$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}.$$

(2)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{68}{34} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{34} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-68}{34} = -2.$$

1.3　n 阶行列式

1. (1) 第 $(1,2)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&2&-1\\1&0&-2\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&2&-1\\1&0&-2\end{vmatrix}=-3.$$

第 $(3,1)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=1,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=1.$$

第 $(3,3)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-3.$$

(2) 第 $(1,2)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\0&5&1\end{vmatrix}=-17,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\0&5&1\end{vmatrix}=17.$$

第 $(3,1)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\6&5&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\6&5&1\end{vmatrix}=2.$$

第 $(3,3)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{33}=\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&0\\0&6&1\end{vmatrix}=-11,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&0\\0&6&1\end{vmatrix}=-11.$$

2. (1) 60, 用性质 1 即得结论. (2) -6, 用性质 1 即得结论.

3. (1) 0, 因为行列式的第一行和第三行成比例.

(2)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 3\\ 7 & -1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 2.$$

4. (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & e\\ 0 & b & f & 0\\ 0 & g & c & 0\\ h & 0 & 0 & d\end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix}b & f & 0\\ g & c & 0\\ 0 & 0 & d\end{vmatrix} - e\begin{vmatrix}0 & b & f\\ 0 & g & c\\ h & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &= ad(bc-gf) - eh(bc-gf)\\ &= (ad-eh)(bc-gf).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix} &= -a\begin{vmatrix}-a & d & e\\ -b & 0 & f\\ -c & -f & 0\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}-a & 0 & e\\ -b & 0 & f\\ -c & -e & 0\end{vmatrix} - c\begin{vmatrix}-a & 0 & d\\ -b & -d & 0\\ -c & -e & -f\end{vmatrix}\\ &= -a(bfe - af^2 - cdf) + b(-aef + be^2 - cde) - c(-adf\\ &\quad + bde - cd^2)\\ &= a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + 2acdf - 2abef - 2bcde\\ &= (af - be + cd)^2.\end{aligned}$$

1.4　行列式的展开和转置

1. (1) 将行列式按第一行展开可得:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 3\\ 5 & 2 & 2\end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 8.$$

将行列式按第一列展开可得:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&7&3\\5&2&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}7&3\\2&2\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}0&0\\2&2\end{vmatrix}+5\times\begin{vmatrix}0&0\\7&3\end{vmatrix}=8.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

(2) 将行列式按第一行展开可得:

$$\begin{vmatrix}1&0&-5\\6&2&-1\\5&-11&6\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}2&-1\\-11&6\end{vmatrix}+(-5)\times\begin{vmatrix}6&2\\5&-11\end{vmatrix}=381.$$

将行列式按第一列展开可得:

$$\begin{vmatrix}1&0&-5\\6&2&-1\\5&-11&6\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}2&-1\\-11&6\end{vmatrix}-6\times\begin{vmatrix}0&-5\\-11&6\end{vmatrix}+5\times\begin{vmatrix}0&-5\\2&-1\end{vmatrix}=381.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

2. (1) 将行列式按第二行展开可得:

$$\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&0\\0&3&8\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}3&5\\3&8\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}2&5\\0&8\end{vmatrix}=23.$$

将行列式按第三列展开可得:

$$\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&0\\0&3&8\end{vmatrix}=5\times\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}+8\times\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=23.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

(2) 将行列式按第二行展开可得:

$$\begin{vmatrix}3&2&-2\\2&-1&3\\9&6&-7\end{vmatrix}=-2\times\begin{vmatrix}2&-2\\6&-7\end{vmatrix}+(-1)\times\begin{vmatrix}3&-2\\9&-7\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}3&2\\9&6\end{vmatrix}=7.$$

将行列式按第三列展开可得:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\2 & -1 & 3\\9 & 6 & -7\end{vmatrix} = -2\times\begin{vmatrix}2 & -1\\9 & 6\end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix}3 & 2\\9 & 6\end{vmatrix} + (-7)\times\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix} = 7.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

3. 证法 1　由反对称行列式的定义可知, $|\boldsymbol{A}|$ 的转置 $|\boldsymbol{A}'|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 的每个元素都相差一个符号, 将 $|\boldsymbol{A}'|$ 的每一行都提出公因子 -1 可得

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| = (-1)^n|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|,$$

其中最后一步用到了 n 为奇数, 因此 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

证法 2　还可以用行列式的组合定义来证明, 参考例 1.43.

4. 证法 1　将第 n 列与第 $n-1$ 列对换, 再与第 $n-2$ 列对换, $\cdots$, 最后与第 1 列对换, 此时 b_1 就移至第 $(1,1)$ 位置, 共对换了 $n-1$ 次. 类似地, 经过 $n-i$ 次列对换可将 b_i 移至第 (i,i) 位置 $(i=2,\cdots,n-1)$, 故共对换了 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 次. 由行列式的性质 4, 结论得证.

证法 2　由行列式的组合定义可知,

$$\text{左边} = (-1)^{N(n,n-1,\cdots,2,1)}b_1b_2\cdots b_n = \text{右边}.$$

5. -1. 参考基础训练单选题 2.

6. 这个方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\2 & 5 & -1 & 4\\3 & 6 & 1 & 10\\-1 & -2 & 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故该方程组有且仅有一组解, 经计算得,

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\2 & 5 & -1 & 4\\3 & 6 & 1 & 10\\4 & -2 & 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\0 & 1 & 1\\-10 & 0 & -14\end{vmatrix} = -24,$$

$$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1&1&0&3\\2&2&-1&4\\3&3&1&10\\-1&4&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\5&0&1\end{vmatrix}=5,$$

$$|\boldsymbol{A}_3|=\begin{vmatrix}1&2&1&3\\2&5&2&4\\3&6&3&10\\-1&-2&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&5&1\end{vmatrix}=-5,$$

$$|\boldsymbol{A}_4|=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\2&5&-1&2\\3&6&1&3\\-1&-2&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&5\end{vmatrix}=5,$$

其中 $|\boldsymbol{A}_i|$ 的定义参考高代教材定理 1.4.3 (Cramer 法则). 由 Cramer 法则可知, 方程组的解为 $x_1=-24$, $x_2=5$, $x_3=-5$, $x_4=5$.

1.5 行列式的计算

1. (1) 将第一行乘以 -3, -1, 2 后分别加到第二、三、四行, 不改变行列式的值, 得

$$\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\3&0&1&5\\1&-2&0&3\\-2&-4&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&-6&4&-1\\0&-4&1&1\\0&0&-1&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&4&-1\\-4&1&1\\0&-1&10\end{vmatrix}=90.$$

(2) 将第一行乘以 3, -2, 2 后分别加到第二、三、四行, 不改变行列式的值, 得

$$\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\-3&4&1&-1\\2&-5&-3&8\\-2&6&-4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&7&-4\\0&-3&-7&10\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&7&-4\\-3&-7&10\\4&0&-1\end{vmatrix}=154.$$

(3) 将第二、三、四、五行乘以 1 加到第一行上, 提出因子 4 后将第一行乘以 -1 加到第二、三、四、五行上得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

(4) 将第一行乘以 -2, -3, -2, -1 后分别加到第二、三、四、五行上, 不改变行列式的值, 然后重复类似的消去步骤, 得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -23 & -41 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} \\ &= 52. \end{aligned}$$

2. (1) 例 1.1. (2) 例 1.2. (3) 例 1.3. (4) 例 1.6.
3. 例 1.9.
4. 例 1.26.
5. 例 1.24.
6. 例 1.22.

1.6 行列式的等价定义

1. 由行列式的性质 8 及高代教材定理 1.6.1 可得

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

2. 参考高等代数博客中的博文《行列式的组合定义及其应用—反对称阵的 Pfaffian》, 网址: https://www.cnblogs.com/torsor/p/3554028.html.

3. $(-1)^{N(n,n-1,n-2,\cdots,1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

4. 例 1.39.

5. 例 1.21.

6. 例 1.40.

1.7 Laplace 定理

1. (1) 包含于第一、第三行的所有 2 阶子式为:

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-5,\quad \begin{vmatrix}1&0\\3&-1\end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}=-4,$$

$$\begin{vmatrix}2&0\\1&-1\end{vmatrix}=-2,\quad \begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad \begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}=1,$$

对应的代数余子式为:

$$(-1)^{1+3+1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=3,\quad (-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}=1,$$

$$(-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}=-2,\quad (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0,$$

$$(-1)^{1+3+2+4}\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}=-3,\quad (-1)^{1+3+3+4}\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}=-1,$$

由 Laplace 定理可得行列式的值为 0.

(2) 包含于第一、第三行的所有 2 阶子式为:

$$\begin{vmatrix}3&-1\\5&0\end{vmatrix}=5,\quad \begin{vmatrix}3&0\\5&2\end{vmatrix}=6,\quad \begin{vmatrix}3&-3\\5&1\end{vmatrix}=18,$$

$$\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2,\quad \begin{vmatrix}-1&-3\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix}0&-3\\2&1\end{vmatrix}=6,$$

对应的代数余子式为:

$$(-1)^{1+3+1+2}\begin{vmatrix}7&-2\\2&3\end{vmatrix}=-25,\quad (-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix}2&-2\\-1&3\end{vmatrix}=4,$$

$$(-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-11,\quad (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-2,$$

$$(-1)^{1+3+2+4}\begin{vmatrix}0 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\quad (-1)^{1+3+3+4}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2,$$

由 Laplace 定理可得行列式的值为 -276.

2. 对第 $1,2,6$ 行进行 Laplace 展开, 可得行列式的值为

$$(-1)^{1+2+6+1+2+5}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{vmatrix}.$$

注意到 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, 由 Vandermonde 行列式可得

$$\begin{aligned}&-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{vmatrix}\\ &=(\omega-1)^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-\omega)^2\\ &=(\omega^2-2\omega+1)(\omega^4-2\omega^2+1)(\omega^4-2\omega^3+\omega^2)\\ &=(-3\omega)\cdot(-3\omega^2)\cdot(-1-2)\\ &=-27.\end{aligned}$$

也可以利用矩阵乘法直接计算如下:

$$-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-27.$$

3. 子式的行和列的指标和与对应余子式的行和列的指标和之和为所有行和列的指标和 $2(1+2+\cdots+n)$, 这是一个偶数, 因此子式的指标和与对应余子式的指标和具有相同的奇偶性.

4. 例 1.44.

5. 例 1.45.

复习题一

1. 例 1.4.

2. 例 1.5.

3. 例 1.7.

4. 例 1.11.

5. 例 1.12.

6. 例 1.14.

7. 例 1.15.

8. 例 1.16.

9. 例 1.17.

10. 例 1.18.

11. 例 1.19.

12. 例 1.20.

13. 例 1.23.

14. 左边为 Vandermonde 行列式, 其值为 $12(x-1)(x-2)(x+2)$, 因此方程的解为 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

15. 例 1.27.

16. 例 1.28.

17. 例 1.29.

18. 例 1.31.

19. 例 1.32.

20. 例 1.35.

21. 本题是例 1.36 的特例. 设 $|\boldsymbol{A}| = f(x)$, 将所有行加到第一行可以提出因子 $x+y+z$. 第二行乘以 1, 第三、四行乘以 -1 加到第一行上可以提出因子 $x-y-z$. 同理可知 $|\boldsymbol{A}|$ 有因子 $x-y+z, x+y-z$. 又 $|\boldsymbol{A}|$ 视作 x 的多项式是四次的, 首项系数为 1, 故 $|\boldsymbol{A}| = (x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$.

22. 例 1.37.

23. 例 1.38.

24. 例 1.48.

25. 例 1.49.