第三节　矩阵乘积的行列式与秩

主要内容

- 矩阵乘积的行列式
- 矩阵乘积的秩

$n\times n$矩阵也称为n阶方阵. 由一个n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义的一个n阶行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的行列式，记作$|A|$或$det(A)$.

一、矩阵乘积的行列式

定理 1 设 A, B 是数域 P 上的两个$n \times n$矩阵，那么

$$|AB| = |A||B|,$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

证明: 这个定理就是第二章第八节的 定理 8

证明： 作为一个 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

一方面，我们知道：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=|A||B|.$$

另一方面，对D作初等行变换，将D的第$n+1$行的a_{11}倍加到第一行，第$n+2$行的第a_{12}倍，$\cdots$，第$2n$行的第a_{1n}倍加到第一行，这些变换都不改变行列式大小，所以得到行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

将D的第$n+1$行的a_{11}倍加到第一行，第$n+2$行的第a_{12}倍，$\cdots$，第$2n$行的第a_{1n}倍加到第一行，

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$c_{1j}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n)$.

再依次将第$n+1$行的a_{i1} $(i=2,3,\cdots,n)$倍，第$n+2$行的a_{i2}倍，$\cdots$，第$2n$行的a_{in}倍加到第i行，就得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

最后依次把第$n+1$行与第1行交换，把第$n+2$行与第2行交换，$\cdots$，把第$2n$行与第n行交换，注意交换行改变行列式的符号，所以得

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

由此又得

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\cdot(-1)^n\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}=|AB|$$

这里用到$AB=[c_{ij}]_{n\times n}$，所以

$$|AB|=|A||B|.$$

证毕

用数学归纳法，定理 1 不难推广到多个因子的情形，即有

推论 1 设$A_1, A_2, \cdots, A_m$都是数域P上的$n \times n$矩阵，于是

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1||A_2| \cdots |A_m|.$$

性质： 设A, B是n阶方阵，λ为数，

（1）$|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

（2）$|AB| = |A||B|$;

（3）$\left|A^T\right| = |A|$.

例 1　设$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}$，则$AB=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 11 & 15\end{pmatrix}$.

从而$|AB|=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 11 & 15\end{vmatrix}=100.$

而$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5, |B|=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}=20.$

于是$|A||B|=100.$　即验证了$|AB|=|A||B|$.

定义 9 数域 P 上的$n\times n$矩阵A称为**非退化的**，如果$|A|\neq 0$；否则称为**退化的.**

显然，一个$n\times n$矩阵是非退化的充分必要条件是**它的秩等于n.**

推论 2 设A,B是数域P上$n\times n$矩阵，矩阵AB为退化的充分必要条件是A,B中至少有一个是退化的.

二、矩阵乘积的秩

关于矩阵乘积的秩，先看引例

例：设$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，于是 $rank(AB)=0$，而 $rank(A)=1$，$rank(B)=1$.

再如，取$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，于是 $rank(AB)=1$，而 $rank(A)=1$，$rank(B)=2$.

所以$rank(AB)\le rank(A), rank(AB)\le rank(B)$.

即$rank(AB)\le min\{rank(A), rank(B)\}$.

关于矩阵乘积的秩，我们有：

定理 2 设A是数域P上的$n \times m$矩阵，B是数域P上的$m \times s$矩阵，于是

$$\boxed{\text{秩}(AB) \le min[\text{秩}(A),\ \text{秩}(B)]\ ,} \qquad (1)$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明： 为了证明(1)，只需证明

$$\text{秩}(AB) \le \text{秩}(A) \ \text{与}\ \text{秩}(AB) \le \text{秩}(B)$$

同时成立即可. 现在来分别证明这两个不等式.

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

令$B_1, B_2, \cdots, B_m$表示B的行向量，即令

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

再用$C_1, C_2, \cdots, C_n$表示AB的行向量，即令

$$AB = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

由计算可知，C_i的第j个分量和$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{im}B_m$的第$j$个分量都等于$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$，因而

$$C_i=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{im}B_m\ (i=1,2,\cdots,n),$$

即矩阵AB的行向量组$C_1,C_2,\cdots,C_n$可经B的行向量组线性表出. 所以AB的秩不能超过B的秩，即

$$秩(AB)\le秩(B).$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}$$

同样，令$A_1,A_2,\cdots,A_m$表示A的列向量，$D_1,D_2,\cdots,D_s$表示AB的

列向量. 由计算可知,

$$D_i = b_{1i}A_1 + b_{2i}A_2 + \cdots + b_{mi}A_m \ (i = 1, 2, \cdots, s),$$

这个式子表明，矩阵AB的列向量组可以经矩阵A的列向量组线性表出，因而前者的秩不可能超过后者的秩，即

$$秩(AB) \leq 秩(A).$$

因此，秩$(AB) \leq min$[秩(A)，秩(B)].

证毕

用数学归纳法，定理 2 不难推广到多个因子的情形，即有

推论 3 如果$A = A_1A_2\cdots A_t$，那么

$$秩(A) \le min_{1\le j\le t} 秩(A_j).$$