高等代数学（第四版）习题解答
第三章　线性空间

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

3.1　数域

1. (1) 不是. 任何数域都包含 1, 但 1 是奇数, 不属于偶数全体构成的集合.

(2) 是. 先证该集合中的元素 $a + b\sqrt{3} = 0$ 当且仅当 $a = b = 0$. 充分性显然成立, 下证必要性. 若 a, b 不全为零, 则在 $a + b\sqrt{3} = 0$ 两边同时乘以 a, b 的公分母, 可将 a, b 化为整数; 又可将 a, b 的最大公因数从该式提出, 因此不妨设 a, b 是互素的整数; 将 $b\sqrt{3}$ 移到等式右边后两边平方得 $a^2 = 3b^2$, 于是 a 是 3 的倍数, 可设 $a = 3a_1$, 代入得 $3a_1^2 = b^2$, 因此 b 也是 3 的倍数, 这与 a, b 互素矛盾, 因此 $a = b = 0$. 以下假设 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

加减法封闭:

$$(a + b\sqrt{3}) \pm (c + d\sqrt{3}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{3}.$$

乘法封闭:

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

除法封闭 (此时假设 c, d 不同时为零):

$$\frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3}.$$

(3) 是. 先证该集合中的元素 $a+b\sqrt{-1}=0$ 当且仅当 $a=b=0$. 充分性显然成立, 下证必要性. 将 $b\sqrt{-1}$ 移到等式右边后两边平方得 $a^2+b^2=0$, 于是 $a=b=0$. 以下假设 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$.

加减法封闭:

$$(a+b\sqrt{-1})\pm(c+d\sqrt{-1})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{-1}.$$

乘法封闭:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

除法封闭 (此时假设 c, d 不同时为零):

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

(4) 不是. 因为 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数, 所以 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ 不在该集合中, 于是该集合对乘法不封闭.

2. 形如 (3.1.1) 式所示的数可以表示为 $\dfrac{f(\pi)}{g(\pi)}$, 这里 f,g 是有理系数多项式, 并且 $g\neq 0$. 以下假设 f_1,f_2,g_1,g_2 都是有理系数多项式, 其中 $g_1\neq 0$, $g_2\neq 0$.

加减法封闭:

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\pm\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)g_2(\pi)\pm f_2(\pi)g_1(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)}.$$

乘法封闭:

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\cdot\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)f_2(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)}.$$

除法封闭 (此时假设 $f_2\neq 0$):

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\Bigg/\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)g_2(\pi)}{f_2(\pi)g_1(\pi)}.$$

3. 例 3.31.

4. 基础训练解答题 4.

3.2 行向量和列向量

1. 直接计算可得:

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=(1,1,0,-1)+(-2,1,0,0)+(-1,-2,0,1)=(-2,0,0,0);$$

$$3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma}=3(1,1,0,-1)-(-2,1,0,0)+5(-1,-2,0,1)=(0,-8,0,2).$$

2. 该向量方程可化为

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{3}((1,1,-1)-(1,0,1))=(0,\frac{1}{3},-\frac{2}{3}).$$

3.3 线性空间

1. (1) 不是. 因为 $x^n+(-x^n)=0$ 不在 V 中, 故加法在 V 中不封闭.

(2) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则.

(3) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则.

(4) 不是. 因为对一般的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来说,

$$\boldsymbol{B}\oplus\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}\neq\ \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B},$$

故加法不满足交换律.

(5) 不是. 因为对一般的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 来说,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})\oplus\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})\oplus\boldsymbol{C}=\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{CAB}+\boldsymbol{BAC}+\boldsymbol{CBA}\\ \neq\ &\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{ACB}+\boldsymbol{BCA}+\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{A}\oplus(\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CB})=\boldsymbol{A}\oplus(\boldsymbol{B}\oplus\boldsymbol{C}),\end{aligned}$$

故加法不满足结合律.

(6) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则. 这里会用到, 如果数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 极限存在, k 是有限数, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(ka_n)=k\lim_{n\to\infty}a_n.$$

(7) 是. 下面只验证加法结合律以及加法和数乘的分配律, 其他几条留给读者验证. 设 $a,b,c,k,l\in V$, 则

$$\begin{aligned}&(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c),\\ &k\circ(a\oplus b)=k\circ(ab)=(ab)^k=a^kb^k=(a^k)\oplus(b^k)=k\circ a\oplus k\circ b,\\ &(k+l)\circ a=a^{k+l}=a^ka^l=(a^k)\oplus(a^l)=k\circ a\oplus l\circ a.\end{aligned}$$

注意 V 上的加法和数乘与数的普通加法和数乘的区别.

(8) 是. 下面只验证加法和数乘的分配律, 其他几条留给读者验证. 设 (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in V$, $k, l \in \mathbb{R}$, 则

$$
\begin{aligned}
&k \circ ((a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)) = k \circ (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \\
=& (k(a_1 + b_1), k(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{k(k-1)}{2}(a_1 + a_2)^2) \\
=& k \circ (a_1, b_1) \oplus k \circ (a_2, b_2), \\
&(k + l) \circ (a_1, b_1) = ((k + l)a_1, (k + l)b_1 + \frac{(k + l)(k + l - 1)}{2} a_1^2) \\
=& (ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2) \oplus (la_1, lb_1 + \frac{l(l-1)}{2} a_1^2) \\
=& k \circ (a_1, b_1) \oplus l \circ (a_1, b_1).
\end{aligned}
$$

(9) 不是. 因为对一般的 (a_1, b_1), (a_2, b_2) 来说,

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 - b_2) \neq (a_2 + a_1, b_2 - b_1) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1),$$

故加法不满足交换律. 也可以说明加法不满足结合律, 或者数的加法与数乘不满足分配律.

(10) 不是. 因为 V 中没有零元, 也没有数乘单位元.

2. (1)

$$-(-\boldsymbol{\alpha}) = (-1) \cdot ((-1) \cdot \boldsymbol{\alpha}) = ((-1) \cdot (-1))\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.$$

(2)

$$
\begin{aligned}
-(k\boldsymbol{\alpha}) &= (-1) \cdot (k\boldsymbol{\alpha}) = ((-1) \cdot k)\boldsymbol{\alpha} = (-k)\boldsymbol{\alpha} \\
&= (k \cdot (-1))\boldsymbol{\alpha} = k \cdot ((-1)\boldsymbol{\alpha}) = k(-\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}
$$

(3)

$$k(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})) = k\boldsymbol{\alpha} + k(-\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}.$$

3.4 向量的线性关系

1. (1) 容易验证

$$(-1, 3, 1) + (2, 1, 0) - (1, 4, 1) = (0, 0, 0),$$

故这三个向量线性相关.

(2) 设实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1(2,3,0)+k_2(-1,4,0)+k_3(0,0,2)=(0,0,0),$$

这等价于 (k_1, k_2, k_3) 是下列齐次线性方程组的解:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证上述线性方程组的系数行列式非零, 故由 Cramer 法则知该方程组只有零解, 即有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 因此这三个向量线性无关. § 3.6 之后, 也可以通过计算秩的方法进行判定, 参考例 3.4.

2. 设存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$k_1(a,1,1)+k_2(1,a,1)+k_3(1,1,a)=(0,0,0),$$

这等价于 (k_1, k_2, k_3) 是下列齐次线性方程组的非零解:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是上述线性方程组的系数行列式等于零, 否则由 Cramer 法则知该方程组只有零解, 矛盾. 经计算, 系数行列式等于 $(a-1)^2(a+2)$, 解得 $a=1$ 或 $a=-2$. 经检验, 此时这三个实向量线性相关.

3. 是. 若 $\mathbb{K}$ 中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 c\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 c\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m c\boldsymbol{\alpha}_m = 0,$$

由 c 为非零常数可得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = 0,$$

再由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性无关性可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 因此 $c\boldsymbol{\alpha}_1, c\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

4. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = -\boldsymbol{\beta}_1$, 容易验证 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 参考例 3.7.

5. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$, 容易验证 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 参考例 3.7.

6. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, $\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})$, 容易验证 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 但 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 参考例 3.7.

7. 例 3.8.

8. 例 3.9.

9. 例 3.10.

10. 例 3.11.

11. 例 3.12.

12. 例 3.13.

3.5 向量组的秩

1. 由高代教材的定理 3.4.3 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 又 V 中任一向量均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合, 因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基.

2. 因为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基, 故 $\dim V = n$. 由条件以及线性组合的传递性可知, V 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示, 故由高代教材的定理 3.5.3 即得结论.

3. 例 3.26.

4. 例 3.27.

5. 例 3.28.

6. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\,(1 \leq i \leq j \leq n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 参考例 3.29.

7. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ii}\,(1 \leq i \leq n);\ \boldsymbol{E}_{ij} + \boldsymbol{E}_{ji}\,(1 \leq i < j \leq n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 参考例 3.29.

8. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ji}\,(1 \leq i < j \leq n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V = \dfrac{n(n-1)}{2}$. 参考例 3.29.

9. 例 3.30.

10. 例 3.31.

11. 基础训练解答题 4.

3.6 矩阵的秩

1. (1) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 3.

(2) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 2.

(3) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 4.

(4) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 2.

2. (1) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 因此向量组的秩也等于 2.

(2) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 因此向量组的秩也等于 3.

3. (1) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -24 & -43 \\ 0 & -8 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 等于向量组中向量的个数, 因此向量组线性无关.

(2) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 小于向量组中向量的个数, 因此向量组线性相关.

(3) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 等于向量组中向量的个数, 因此向量组线性无关.

4. 将这些向量按列分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 因此向量组的秩也等于 2. 根据阶梯点所在的位置可知向量组的一个极大无关组为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$.

5. (1) 例 3.58.

(2) 例 3.62.

(3) 例 3.63.

(4) 例 3.64.

(5) 例 3.65.

6. 设原矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 添加的一列为 $\boldsymbol{\alpha}$, 则由习题 5 (3) 可知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{\alpha}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + 1,$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + 1$. 同理可证添加一行的情况.

7. 例 3.66.

8. 例 3.71.

9. 例 3.72.

10. 例 3.91.

11. 例 3.92.

3.7 坐标向量

1. 解法 1 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的坐标为 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)'$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = a_1, \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1 = a_n. \end{cases}$$

从最后一个方程出发解得 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)' = (a_n, a_{n-1} - a_n, \cdots, a_1 - a_2)'$.

解法 2 也可用基变换与过渡矩阵来做. 参考例 3.44, 令 $a = 1$, 则答案为:

$$(a_n, a_{n-1} - a_n, \cdots, a_1 - a_2)'$$

2. 是. 参考例 3.38.

3. 当 s 为偶数时线性相关, 当 s 为奇数时线性无关. 参考例 3.39.

4. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组. 参考例 3.40.

5. 例 3.41.

3.8 基变换与过渡矩阵

1. (1) 解法 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(k_1, k_2, k_3, k_4)'$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_4 = 1, \\ k_3 = 2, \\ k_2 + k_4 = 1, \\ -k_3 + k_4 = 3. \end{cases}$$

用 Gauss 消去法可解得 $(k_1, k_2, k_3, k_4)' = (0, -4, 2, 5)'$.

解法 2　从 $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 的过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2) 解法 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(k_1, k_2, k_3, k_4)'$, 则

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 1, \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ 3k_2 - 2k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 - k_4 = 0. \end{cases}$$

用 Gauss 消去法可解得 $(k_1, k_2, k_3, k_4)' = (-1, -2, 6, -3)'$.

解法 2　从 $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 的

过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-2\\1&1&0&-1\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-2\\1&1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\\-3\end{pmatrix}.$$

2. (1) 注意到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 就是该向量空间的标准基, 故 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 可用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 的下列线性组合表示:

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_3=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_4=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4.\end{cases}$$

于是从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&3&2\end{pmatrix}.$$

注意上述过渡矩阵就是 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的转置按列分块方式拼成的矩阵.

(2) 参考例 3.43. 答案为:

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\-1&1&-1&2\\4&-2&3&-10\\-2&1&-2&3\end{pmatrix}.$$

3. (1) $\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (1) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(1,0,0,1)'$, 在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$

下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (2) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix},$$

在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 5\\-1 & 1 & -1 & 2\\4 & -2 & 3 & -10\\-2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (1) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(3,-1,0,2)'$, 在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (2) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\\17\\-8\end{pmatrix},$$

在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 5\\-1 & 1 & -1 & 2\\4 & -2 & 3 & -10\\-2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-6\\-4\\17\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

4. 例 3.44. 答案为:

$$(a_n, a_{n-1} - aa_n, \cdots, a_2 - aa_3, a_1 - aa_2).$$

5. 例 3.45.

3.9 子空间

1. (1) 是. 显然 $(0,0,\cdots,0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

(2) 否. 因为 $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, \cdots, 0) \in S$, 但是

$$(1, 0, \cdots, 0) + (0, 1, \cdots, 0) = (1, 1, \cdots, 0) \notin S.$$

(3) 是. 显然 $(0, 0, \cdots, 0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $a_1 = b_1 = 0$, 于是 $a_1 + b_1 = 0$ 且 $ka_1 = 0$, 因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (0, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

(4) 否. 因为 $(1, 0, \cdots, 0) \in S$, 但是

$$(-1) \cdot (1, 0, \cdots, 0) = (-1, 0, \cdots, 0) \notin S.$$

(5) 是. 显然 $(0, 0, \cdots, 0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, 于是

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \cdots = a_n + b_n,$$
$$ka_1 = ka_2 = \cdots = ka_n.$$

因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

2. (1) 维数为 2, 容易验证该子空间的一组基为 $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

(2) 维数为 2, 容易验证该子空间的一组基为 $\{(1,2,0),(0,0,1)\}$.

(3) 维数为 2, 因为 $(1,0,1)$ 与 $(1,2,3)$ 线性无关.

(4) 维数为 1, 因为 $(1,2,-1)$ 与 $(3,6,-3)$ 线性相关.

3. 必要性显然成立, 下证充分性. 设 $\dim V_1 = \dim V_2 = n$, 并取 V_1 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 则由 $V_1 \subseteq V_2$ 可知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V_2 中 n 个线性无关的向量, 因此由高代教材的定理 3.5.3 可知 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 也是 V_2 的一组基, 于是 $V_1 = V_2$.

4. 例 3.46.

5. 参考 § 2.2 习题 13 的解答.

(1) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A}) = 2$ 且一组基为:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A}) = 2$ 且一组基为:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 3i-3a & i-3b & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A}) = 5$ 且一组基为:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a+c & b \\ b & b+c & a+c \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A})=3$ 且一组基为:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1)$, $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $V_3=L(\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则容易验证 $V_1\cap V_2=0$, $V_1\cap V_3=0$, 但 $V_1\cap(V_2+V_3)=V_1$, 因此 $V_1\cap(V_2+V_3)\neq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$.

(2) 先证对任意的子空间 V_1,V_2,V_3, 有

$$V_1\cap V_2+V_1\cap V_3\subseteq V_1\cap(V_2+V_3).$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$, $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_3$. 由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_1$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_1$, 又 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_2+V_3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap(V_2+V_3)$, 于是 $V_1\cap V_2+V_1\cap V_3\subseteq V_1\cap(V_2+V_3)$. 再证若 V_1 包含 V_2, 则有

$$V_1\cap(V_2+V_3)\subseteq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3.$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap(V_2+V_3)$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$, $\boldsymbol{\gamma}\in V_3$. 由 $V_2\subseteq V_1$ 可知 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in V_1$, 故 $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_3$. 又 $\boldsymbol{\beta}\in V_2=V_1\cap V_2$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$, 从而 $V_1\cap(V_2+V_3)\subseteq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$. 同理可证 V_1 包含 V_3 的情形. 综上所述, 第一个结论得证. 进一步, 若 V_2+V_3 是直和, 即 $V_2\cap V_3=0$, 则显然 $(V_1\cap V_2)\cap(V_1\cap V_3)=0$, 于是第二个结论也得证.

7. 例 3.47. V_1+V_2 的基可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$, $V_1\cap V_2$ 的基可取为 $\boldsymbol{\beta}_2$.

8. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两线性无关但全体线性相关, 故存在全不为零的数 c_1,c_2,c_3, 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+c_3\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_2=-\dfrac{1}{c_2}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_3\boldsymbol{\alpha}_3)$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_2\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 类似可得 $\boldsymbol{\alpha}_3\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, 从而 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 同理可证 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 于是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

9. 不一定. 例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1)$, $V_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $V_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $V_3 = L(\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_3 = 0$, 但是 $0 \neq V_3 = V_3 \cap (V_1 + V_2)$, 因此 $V_1 + V_2 + V_3$ 不是直和.

10. 例 3.48.

11. 例 3.50.

12. 例 3.51.

13. 例 3.52.

14. 例 3.53.

15. 例 3.54.

3.10 线性方程组的解

1. (1) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & -10 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

由于系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不同, 故原方程组无解.

(2) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ -2 & -5 & 8 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-8\\-3\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1 为参数.

(3) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -17 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -11 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & 7 & -8 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -16 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}3\\-3\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1,k_2 为参数.

(4) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1, k_2 为参数.

(5) 对增广矩阵进行如下初等行变换和列对换 (对换了第二列与第四列):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1, k_2, k_3 为参数.

2. 例 3.96. 当 $\lambda = 5$ 时有无穷多组解; 否则无解.

3. 例 3.97. 当 $\lambda = -3$ 时, 方程组无解; 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多组解; 当 $\lambda \neq -3, 1$ 时, 方程组有唯一一组解.

4. 对增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 进行如下初等行变换:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\3&2&1&1&a-5&b+2\\0&1&2&2&3a&b\\5&4&3&3&1-a&-b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\0&-4&-8&-8&a-26&-2b+2\\0&1&2&2&3a&b\\0&-6&-12&-12&-34-a&-6b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\0&1&2&2&3a&b\\0&-4&-8&-8&a-26&-2b+2\\0&-6&-12&-12&-34-a&-6b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-1&-1&7-6a&-b\\0&1&2&2&3a&b\\0&0&0&0&a-2&0\\0&0&0&0&0&b+1\end{array}\right).$$

下面对 a,b 的不同取值分情况讨论:

(1) 若 $b\neq-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})$, 因此原方程组无解.

(2) 若 $a=2$ 且 $b=-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2$, 因此原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1,k_2,k_3 为参数.

(3) 若 $a\neq2$ 且 $b=-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$, 因此原方程组的特解

和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1,k_2 为参数.

5. 例 3.5.

(1) 能, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) 不能.

6. 是. 注意到

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是解空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 的一组基, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是这个齐次线性方程组的基础解系.

7. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解等价于 $\boldsymbol{A}$ 非异, 这等价于 $\boldsymbol{A}^k$ 非异, 于是等价于线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

8. 例 3.98.

9. 例 3.99.

10. 例 3.100.

11. 例 3.104.

12. 例 3.83.

13. 例 3.80.

14. 例 3.81.

复习题三

1. 例 3.15.

2. 例 3.18.
3. 例 3.14.
4. 例 3.19.
5. 例 3.20.
6. 例 3.21. 秩相同但不等价的向量组的例子: $A=\{(1,0)\}$, $B=\{(0,1)\}$.
7. 例 3.32.
8. 例 3.37.
9. 例 3.49.
10. 例 3.55.
11. 例 3.56.
12. 例 3.57.
13. 例 3.59.
14. 例 3.68.
15. 例 3.69.
16. 例 3.73.
17. 例 3.74.
18. 例 3.75.
19. 例 3.76.
20. 例 3.77.
21. 例 3.78.
22. 例 3.79.
23. 例 3.82.
24. 例 3.84.
25. 例 3.85.
26. 例 3.86.
27. 例 3.87.
28. 例 3.88.
29. 例 3.89.
30. 例 3.93.
31. 例 3.94.
32. 例 3.95.
33. 例 3.101.
34. 例 3.102.

35. 例 3.103.
36. 例 3.105.
37. 例 3.106.
38. 例 3.107.
39. 例 3.108.
40. 例 3.109.
41. 例 3.110.
42. 例 3.111.
43. 例 3.112.
44. 例 3.113.
45. 例 3.114.