第九章 欧几里得空间

第五节　　子　空　间

主要内容

- 正交子空间
- 正交补

一、正交子空间

1. 定义

定义 10 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间，如果对于任意的 $\alpha \in V_1$，$\beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0 .$$

则称 V_1, V_2 为**正交的**，记为 $V_1 \perp V_2$. 一个向量 α，如果对于任意的 $\beta \in V_1$，恒有 $(\alpha, \beta) = 0$. 则称 **α 与子空间 V_1 正交**，记为 $\alpha \perp V_1$.

注：

（1）$V_1 \perp V_2$ 当且仅当 V_1 中每个向量都与 V_2 正交.

（2）$V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$.

（3）当 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \in V_1$，必有$\alpha = \vec{0}$.

2. 正交子空间的性质

关于正交的子空间，我们有：

定理 5 如果 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 两两正交，那么 $V_1 + V_2 + \ldots + V_s$ 是直和.

证明 设 $\alpha_i \in V_i$， $i = 1, 2, \ldots, s$，且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = 0.$$

下面来证明 $\alpha_i = 0$． 用 α_i 与等式两边作内积，利用正交性，得

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 0 .$$

从而 $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$． 这就是说，和

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_s$$

是直和.

证毕

在解析几何中，设W_1是三维空间V_3过原点的平面 π， W_1是过原点且垂直于平面 π 的直线 l. 我们知道， W_1和W_2都是 V_3 的子空间，并且 $W_1 \oplus W_2 = V_3$，其中W_2的每个向量与W_1的每个向量与W_1的每个向量都正交. 反之，与W_1的向量正交的向量也一定属于W_2. 我们称W_2是W_1的正交补. 同样， W_1也是W_2的正交补，记作$W_1 = W_2^{\perp}$，$W_2 = W_1^{\perp}$.

在一般欧氏空间里，也可以引入正交补的概念，并由此**得到将欧氏空间分解成它的两个子空间的直和**的一种方法.

二、正交补

1. 定义

定义 11　子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个**正交补**，如果 $V_1 \perp V_2$，并且 $V_1 + V_2 = V$.

显然，如果 V_2 是 V_1 的正交补，那么 V_1 也是 V_2 的正交补.

$$W^{\perp} = \{\xi \in V \mid (\xi, \beta) = 0 \text{ 对任意的} \beta \in W\}$$

2. 正交补的性质

定理 6　n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补.

证明　如果 $V_1 = \{ 0 \}$，那么它的正交补就是 V，唯一性是显然的.　设 $V_1 \neq \{ 0 \}$.　欧氏空间的子空间在所定义的内积下也是一个欧氏空间. 在 V_1中取一组正交基 $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots, \varepsilon_m$, 由 定理 1 它可以扩充成V 的一组正交基

$$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots , \varepsilon_m , \varepsilon_{m+1} , \dots , \varepsilon_n .$$

显然，子空间 $L(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n)$ 就是 V_1 的正交补.

再来证唯一性. 设 V_2，V_3 都是 V_1 的正交补，于是

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

$$V = V_1 \oplus V_3.$$

令 $\alpha \in V_2$，作为V的元素，由第二式即有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3,$$

其中 $\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_3 \in V_3$. 因为 $\alpha \perp \alpha_1$ 所以

$$0 = (\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_1).$$

即 $\alpha_1 = 0$．由此即得 $\alpha = \alpha_3 \in V_3$，即 $V_2 \subset V_3$.

同理可证 $V_3 \subset V_2$．因此 $V_2 = V_3$，唯一性得证.

证毕

V_1 的正交补记为 $V_1^{\perp}$.

（1）子空间V_1的正交补记为$V_1^{\perp}$. 即

$$V_1^{\perp}=\{\alpha\in V|\alpha\perp V_1\}$$

（2）n 维欧氏空间 V 的子空间 V_1 满足

（i）$(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$.

（i i）$V_1\oplus V_1^{\perp}=V$.

（i i i）维$\left(V_1^{\perp}\right)+$维$(V_1)=n$.

（iv）V_1 的正交补$V_1^{\perp}$也是 V 的子空间.

推论 $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成.

证明略

(见王萼芳编著《高等代数教程》下册P290-291)

由分解式

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

可知，V 中任一向量 α 都可以唯一地分解成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

其中 $\alpha_1 \in V_1$， $\alpha_2 \in V_1^{\perp}$. 称 α_1 为向量 α 在子空间 V_1 上的**内射影(正交投影)**.

例 1 在欧氏空间 R^4 中，设

$$\alpha_1 = (-1,2,-1,1)^T, \alpha_2 = (2,-1,1,0)^T,$$

$$\alpha_3 = (1,2,-1,0)^T$$

试求向量 $\beta = (1,2,-1,0)^T$ 在由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间 W 上的正交投影.

解法一 按正交投影的定义. 设 $\beta = \beta_1 + \beta_2$，其中 $\beta_1 \in W$, $\beta_2 \in W^{\perp}$. 因此

$$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

$$\beta_2 = \beta - \beta_1 = \beta - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 - x_3\alpha_3$$

由于 $\boldsymbol{\beta_2} \in W^{\perp}$. 当且仅当 $\boldsymbol{\beta_2} \perp \boldsymbol{\alpha_i}, i = 1,2,3$. 求得

$$\boldsymbol{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 - 2x_2 \\ 2 - 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

由此可得线性方程组

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

解这个线性方程组，得：$x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = -\frac{3}{4}$.

向量 β 在由子空间 W 上的正交投影为

$$\begin{aligned}\beta_1 &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \\ &= 2\alpha_1 + \frac{5}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3 \\ &= \left(\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}\right)^T.\end{aligned}$$

例 1　在欧氏空间 R^4 里，设
$\alpha_1=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,1,0)^T$，
$\alpha_3=(0,1,-1,2)^T$，试求向量
$\beta=(1,2,-1,0)^T$ 在由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$
生成的子空间 W 上的正交投影.

解法二　　取与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交的向量

$$\alpha_4=(-1,0,2,1)^T$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 R^4 的一组基.

今把β用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示. 为此解方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$$

其增广矩阵为

$$\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

对增广矩阵作初等行变换

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 5 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

于是$x_1=2,\ x_2=\frac{5}{4},\ x_3=-\frac{3}{4},\ x_4=-\frac{1}{2}$.

因此

$$\beta=2\alpha_1+\frac{5}{4}\alpha_2-\frac{3}{4}\alpha_3-\frac{1}{2}\alpha_4.$$

所以，向量β在由向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间$W$上的正交投影为

$$2\alpha_1+\frac{5}{4}\alpha_2-\frac{3}{4}\alpha_3=\left(\frac{1}{2},2,0,\frac{1}{2}\right)^T.$$

或者，令

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\alpha}_4, \qquad (*)$$

其中$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$就是要求的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的子空间$\boldsymbol{W}$上的正交投影. 注意$\boldsymbol{\alpha}_4 \perp \boldsymbol{W}$, $(*)$ 式两边同时与$\boldsymbol{\alpha}_4$作内积得到

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_4) = k(\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4)$$

所以

$$k = \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_4)}{(\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

这样，就得到向量$\boldsymbol{\beta}$在由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$生成的子空间$\boldsymbol{W}$上的正交投影

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} - k\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_4 = \left(\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}\right)^T.$$

解法三：注意到$(W^{\perp})^{\perp}=W$. 所以我们先求 β 在 $W^{\perp}$上的正交投影η. 最后得到β 在W上的正交投影

$$f_W(\beta)=\beta-\eta$$

注意到$W^{\perp}$是一维的，$\alpha_4=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交且为单位向量，所以是$W^{\perp}$的规范正交基.

因此β 在$W^{\perp}$上的正交投影η为

$$\eta=(\beta,\alpha_4)\alpha_4=-\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)=-\frac{1}{2}(-1,0,2,1)$$

所以β 在W上的正交投影为

$$f_W(\beta)=\beta-\eta=\left(\frac{1}{2},2,0,\frac{1}{2}\right).$$

解法四：按照第二节标准正交基求法中定理2的方法，把向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 标准正交化为 η_1,η_2,η_3，然后计算 β 在 η_1,η_2,η_3 上的投影即可

$$f_W(\beta)=(\beta,\eta_1)\eta_1+(\beta,\eta_2)\eta_2+(\beta,\eta_3)\eta_3.$$

例 2 在欧氏空间 R^4 中，设

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_2=(1,1,1,0)^T,$$

$$\alpha_3=(1,0,0,-1)^T$$

试求向量 $\beta=(2,1,3,1)^T$ 在由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间 W 上的正交投影.

解法一 按正交投影的定义. 设 $\beta=\beta_1+\beta_2$，其中 $\beta_1\in W$, $\beta_2\in W^{\perp}$. 因此

$$\beta_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

$$\beta_2=\beta-\beta_1=\beta-x_1\alpha_1-x_2\alpha_2-x_3\alpha_3$$

由于 $\beta_2 \in W^{\perp}$. 当且仅当 $\beta_2 \perp \alpha_i, i = 1, 2, 3$. 求得

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 - x_1 - x_2 - x_3 \\ 1 - x_1 - x_2 \\ 3 + x_1 - x_2 \\ 1 + x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

由此可得线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3,$

$\beta_2 = \beta - \beta_1 = \beta - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 - x_3\alpha_3$

$\alpha_1 = (-1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, 2)^T, \beta = (1, 2, -1, 0)^T$

解这个线性方程组，得：$x_1 = -1, x_2 = -\frac{11}{5}$，

$x_3 = \frac{2}{5}$. 故向量 β 在由子空间 W 上的正交投影为

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \\
&= -\alpha_1 + \frac{11}{5}\alpha_2 + \frac{1}{5}\alpha_3 \\
&= \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)^T.
\end{aligned}
$$

解法二 取与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交的向量

$$\alpha_4=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$$

令

$$\beta=\alpha+k\alpha_4, \qquad (**)$$

其中$\alpha\in W$就是要求的向量 β 在由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间W上的正交投影. 由于$\alpha_4\perp W$, $(**)$ 式两边同时与α_4作内积得到

$$(\beta,\alpha_4)=k(\alpha_4,\alpha_4)$$

所以

$$k=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_4)}{(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4)}=\frac{2}{5}$$

于是，向量$\boldsymbol{\beta}$在由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的子空间$W$上的正交投影

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}-\frac{2}{5}\boldsymbol{\alpha}_4=\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5},\frac{16}{5},\frac{3}{5}\right)^T.$$

例 3 给定欧氏空间R^4，设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \\ -6 & -8 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

求齐次线性方程组$AX = 0$的解空间 W（作为R^4的子空间）和 W 的正交补空间$W^{\perp}$.

解： 对系数矩阵A施行行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \\ -6 & -7 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \\ 0 & -25 & 35 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$

基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-4\\7\\5\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\5\end{pmatrix}.$$

正交补空间中的向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$满足与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交，

$$\begin{cases}-4x_1+7x_2+5x_3=0\\ x_1-3x_2+5x_4=0\end{cases}$$

解此齐次线性方程组得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-5\\0\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

正交补空间为$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$.

在本节的最后，我们再给出在理论上判别一个向量α_1是否是欧氏空间 V 的某个向量 α 在 V 的子空间 W 上的正交投影的充分必要条件：

定理9.3.3 设W是欧氏空间 V 的一个子空间，对于 V 中的向量α，W中有向量 α_1 是α在W上的正交投影的充分必要条件是

$|\alpha-\alpha_1|\le|\alpha-\beta|$对所有的 $\beta\in W$ 成立.