第五章习题课

例 1 用配方法化二次型为标准形，并求相应的线性变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+11x_3^2+2x_1x_2+8x_2x_3+2x_1x_3.$$

解： 第一步 将f中含有x_1的项集中进行配方

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)]+2x_2^2+11x_3^2+8x_2x_3$$

$$=[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2]-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+11x_3^2+8x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+10x_3^2+6x_2x_3.$$

第二步 继续将含有x_2的项进行配方

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 10x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+3x_3)^2 - 9x_3^2 + 10x_3^2$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+3x_3)^2 + x_3^2$$

作线性替换$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = x_2+3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 就是$\begin{cases} x_1 = y_1-y_2+2y_3 \\ x_2 = y_2-3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

二次型化为标准形$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

例 2　设A为n阶正定矩阵，证明：

1） A^{-1} 是正定矩阵；

2） kA是正定矩阵$(k > 0)$；

3） A^*是正定矩阵；

4） A^m(m是正整数)是正定矩阵；

5) 若B亦为n阶正定矩阵，则$A + B$也是正定矩阵.

设 A 为 n 阶正定矩阵，证明：

1）A^{-1}是正定矩阵；

2）kA是正定矩阵；

证明：

1）由于A为正定矩阵，所以存在可逆矩阵C使得$C^TAC=E$，此式两边取逆得$C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^T=E$，即A^{-1}与E合同，因此A^{-1}是正定矩阵.

2）考虑二次型$f(X)=X^T(kA)X$． 由于A为正定矩阵，所以对R^n中任一$X\neq 0$有$X^TAX>0$． 因而对R^n中任一$X\neq 0$，$f(X)=X^T(kA)X=k\left(X^TAX\right)>0$，即$f(X)=X^T(kA)X$是正定二次型，也就是说，$kA(k>0)$是正定矩阵.

设A为n阶正定矩阵，证明：

3） A^*是正定矩阵；

4） A^m（m是正整数）是正定矩阵；

3） 因为$A^* = |A|A^{-1}$，$|A| > 0$，A^{-1}正定，

由2）知A^*是正定矩阵.

4） 首先，A^m（m是正整数）是对称，可逆的.

若$m = 2k$，则$A^m = A^{2k} = A^kA^k = \left(A^k\right)^T EA^k$，即$A^m$与$E$合同，

因此正定.

若$m = 2k+1$，则$A^m = A^{2k+1} = A^kAA^k = \left(A^k\right)^T AA^k$，即$A^m$与

A合同，因此正定.

设A为n阶正定矩阵，证明：

5) 若B亦为n阶正定矩阵，则 $A+B$也是正定矩阵

5）考虑二次型$f(X)=X^T(A+B)X.$

由于A,B为正定矩阵，所以对R^n中任一$X\neq 0$有$X^TAX>0, X^TBX>0.$

因而对R^n中任一$X\neq 0$， $f(X)=X^TAX+X^TBX>0$是正定二次型，

即$f(X)=X^T(A+B)X$是正定二次型，也就是说， $A+B$是正定矩阵.

例 3 设$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$是一个对称矩阵，且$|A_{11}| \neq 0$，证明：存在$T=\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}$使$T'AT=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{bmatrix}$，其中$*$表示一个阶数与$A_{22}$相同的矩阵.

证明： 只要求出X使$T'AT=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{bmatrix}$即可证得.

$$T'AT=\begin{bmatrix} E & O \\ X' & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ X'A_{11}+A_{21} & X'A_{12}+A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}X+A_{12} \\ X'A_{11}+A_{21} & (X'A_{11}+A_{21})X+X'A_{12}+A_{22} \end{bmatrix}$$

令$A_{11}X+A_{12}=O$，$X'A_{11}+A_{21}=O$可以推出$X=-A_{11}^{-1}A_{12}, X'=-A_{21}A_{11}^{-1}$.

证毕

补充：对称阵A的准对角化

设$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中$A_{11}$: $n_1\times n_1$，A_{22}: $n_2\times n_2$

(A对称 $\Leftrightarrow$ A_{11}对称，A_{22}对称，$A_{12}=A_{21}'$)

则有以下结论成立：

1）若A_{11}可逆，则有$T=\begin{bmatrix} E_{n_1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E_{n_2} \end{bmatrix}$使得

$$T'AT=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

2）若A_{22}可逆，则有$T=\begin{bmatrix} E_{n_1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & E_{n_2} \end{bmatrix}$使得

$$T'AT=\begin{bmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

例 4　设$f(X)=X^TAX$为n阶二次型，有两个非零向量X_1和X_2，使$f(X_1)>0$，$f(X_2)<0$. 证明：存在两个线性无关的向量Y_1，Y_2，使

$$f(Y_1)=f(Y_2)=0.$$

证明：　令$Y=X_1+kX_2$，使$f(Y)=0$，其中k待定，于是

$$\begin{aligned}f(Y)&=(X_1+kX_2)^TA(X_1+kX_2)\\&=X_1^TAX_1+kX_1^TAX_2+kX_2^TAX_1+k^2X_2^TAX_2\\&=X_1^TAX_1+2kX_1^TAX_2+k^2X_2^TAX_2=0\end{aligned}\qquad(1)$$

因为$\left(X_1^TAX_2\right)^2-\left(X_1^TAX_1\right)\left(X_2^TAX_2\right)>0$，所以方程(1)有两个不同实根$k_1$和$k_2$，令

$$Y_1=X_1+k_1X_2, Y_2=X_1+k_2X_2$$

则有

$$f(Y_1)=f(Y_2)=0.$$

今证明Y_1,Y_2线性无关． 首先，向量X_1,X_2线性无关．如若不然，就有$X_1=lX_2$，于是

$$f(X_1)=X_1^TAX_1=(lX_2)^TA(lX_2)=l^2\left(X_2^TAX_2\right)=l^2f(X_2)$$

即$f(X_1)$与$f(X_2)$同号，与假设矛盾！

先证明Y_1,Y_2线性无关. 如果Y_1,Y_2线性相关，不妨设$Y_1=aY_2$，则

$$X_1+k_1X_2=a(X_1+k_2X_2)$$

就是

$$(1-a)X_1+(k_1-ak_2)X_2=0$$

由于X_1,X_2线性无关，所以

$$1=a,k_1=k_2$$

这与$k_1\neq k_2$矛盾！所以Y_1,Y_2线性无关.

法二： 令$Y=X_1+kX_2$，于是

$$\varphi(k)=f(Y)=(X_1+kX_2)^T A(X_1+kX_2)$$

$$=X_1^T AX_1+2kX_1^T AX_2+k^2X_2^T AX_2 \qquad (1)$$

令$\varphi(k)=0$，即

$$X_1^T AX_1+2kX_1^T AX_2+k^2X_2^T AX_2=0$$

因为$\left(X_1^T AX_2\right)^2-\left(X_1^T AX_1\right)\left(X_2^T AX_2\right)>0$，所以以上方程有两个不同实根$k_1$和$k_2$：

$$k_{1,2}=-X_1^T AX_2\pm\sqrt{\left(X_1^T AX_2\right)^2-\left(X_1^T AX_1\right)\left(X_2^T AX_2\right)}$$

令

$$Y_1 = X_1 + k_1X_2, Y_2 = X_1 + k_2X_2$$

则有

$$f(Y_1) = \varphi(k_1) = 0, f(Y_2) = \varphi(k_2) = 0.$$

今证明Y_1, Y_2线性无关. 注意到

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

而$\begin{vmatrix} 1 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = k_2 - k_1 = -2\sqrt{\left(X_1^TAX_2\right)^2 - \left(X_1^TAX_1\right)\left(X_2^TAX_2\right)} \neq 0$

所以Y_1, Y_2与X_1, X_2等价. 由于向量X_1, X_2线性无关，所以Y_1, Y_2也线性无关.

例 5 设A为$m\times n$实矩阵，E为n阶单位矩阵，$B=\lambda E+A^TA$，证明：当$\lambda>0$时，B为正定矩阵.

证明： 考虑n元二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T\left(\lambda E+A^TA\right)X$，对实数域上的任意非零$n$维列向量$X$.

$$f(X_0)=X_0^T\left(\lambda E+A^TA\right)X_0=\lambda X_0^TX_0+X_0^TA^TAX_0$$

由$\lambda>0$，则

$$\lambda X_0^TX_0>0,\qquad (AX_0)^TAX_0\geq 0$$

那么$f(X_0)>0$，所以B正定.

例 6 设$A,B,C\in R^{n\times n}$，若矩阵$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$是正定的，证明：$C-BA^{-1}B^T$也是正定的.

证明： 因为$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$正定，则$A^T=A$，令

$$P=\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B^T \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

则

$$P^T=\begin{pmatrix} E_n & O \\ -BA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$$

$$P^T\begin{pmatrix}A & B^T\\ B & C\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}E_n & O\\ -BA^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B^T\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -A^{-1}B^T\\ O & E_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A & O\\ O & C-BA^{-1}B^T\end{pmatrix}$$

由$\begin{pmatrix}A & B^T\\ B & C\end{pmatrix}$正定，那么$\begin{pmatrix}A & O\\ O & C-BA^{-1}B^T\end{pmatrix}$也正定.

令$X_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $X_2=(x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n})^T$，则下面的$2n$元二次型是正定的

$$f(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_{2n}) = (X_1^T, X_2^T)\begin{pmatrix} A & O \\ O & C - BA^{-1}B^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$= X_1^T A X_1 + X_2^T (C - BA^{-1}B^T) X_2$$

令$X_1 = 0, X_2 \neq 0$，则$X_2^T\left(C - BA^{-1}B^T\right)X_2 > 0$，所以$C - BA^{-1}B^T$正定.

例 7 设A是m阶实对称矩阵且正定，B为$m \times n$实矩阵，B^T为B的转置矩阵，证明：$B^T AB$是正定矩阵的充要条件是$r(B) = n$.

证明： **必要性.** 因为$B^T AB$为正定矩阵，所以对任意的列向量$X \neq 0$，有

$$X^T (B^T AB) X > 0.$$

即$(BX)^T ABX > 0$，于是$BX \neq 0$，因此方程$BX = 0$只有零解，从而$r(B) = n$.

充分性. 由于$(B^T AB)^T = B^T A^T B = B^T AB$，故$B^T AB$是对称矩阵.

如果$r(B)=n$，则线性方程组$BX=0$只有零解，从而对任意的n维列向量$X\neq 0$有

$$BX\neq 0.$$

又A是正定矩阵，所以对于$BX\neq 0$，有

$$(BX)^TABX>0$$

于是当$X\neq 0$时，$X^T(B^TAB)X>0.$ 故B^TAB是正定矩阵.