第四节　正定二次型

主要内容

- 正定二次型的定义
- 实二次型正定性的判别方法
- 实二次型的其他类型及其判别法
- 正定矩阵的应用举例

一、正定二次型的定义

在实二次型中，正定二次型占有特殊的地位. 因为正定二次型与正定矩阵在工程技术和最优化等问题中有着广泛的应用，讨论多元函数极值的充分条件也要用到它. 在这一节中，我们给出它的定义及常用的判别条件.

1. 定义

定义 7 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为**正定的**，如果对于任意一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$都有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$.

注意： $f(0, 0, \cdots, 0) = 0$.

例如 ☜

定义 7′ 对实二次型$f(X)=X^TAX$，如果**对于任何$X\neq 0$，都有$f(X)>0$**（显然$f(0)=0$），则称f为正定二次型.

例如：$f=x^2+2y^2+16z^2$是一个正定二次型.

$f=-x_1^2+3x_2^2$不是正定二次型.

2. 两个基本结论

1） 实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

是正定的充分必要条件是$d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

证明

2） 非退化实线性替换保持正定性不变.

证明 1

证明 2

二、实二次型正定的判别方法

1. 惯性指数法

定理 6 n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于n.

证明： 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化的实线性替换变成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2 \qquad (1)$$

该标准形是正定的当且仅当(1)是正定的，由前面讨论的基本结论1

知，二次型(1)是正定的当且仅当$d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，即正惯性指数为$n$.

证毕

定理 6 说明，正定二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的规范形为

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

定义 8 实对称矩阵A称为**正定的**，如果二次型

$$X^T AX$$

正定.

因为二次型$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$的矩阵是单位矩阵$E$，所以一个实对称矩阵是正定的当且仅当它与单位矩阵合同，由此得

推论 1 实对称矩阵A正定的充分必要条件是存在可逆矩阵C，使得$A = C^T C$.

证明： 设A为实对称矩阵，则由 **定理 6** 有

实对称矩阵A正定

$\Updownarrow$ 等价

实二次型X^TAX正定

$\Updownarrow$ 等价

实二次型X^TAX的规范形为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

实二次型X^TAX的规范形为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

$\Updownarrow$ 等价

矩阵A与E合同

$\Updownarrow$ 等价

存在可逆矩阵C，使$A=C^TEC=C^TC$

推论 2 正定矩阵的行列式大于零.

证明： 设 A 是一正定矩阵，则由推论 1 知，存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

两边取行列式，就有

$$|A| = \left|C^T\right||C| = |C|^2 > 0.$$

证毕

例 1 证明：若A是正定矩阵，则A^{-1}也是正定矩阵.

证明： 由正定矩阵的定义知，正定矩阵是实对称矩阵， 由推论 2 知，正定矩阵A是可逆的，且

$$\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}=A^{-1}$$

所以A^{-1}也是实对称矩阵. 证明其正定性的方法很多.

方法 1 **方法 2** **方法 3** **方法4**

例 2 用惯性指数法判断三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_2x_3$$

是否是正定二次型.

解法 1 用配方法

解法 2 用初等变换法

2. 顺序主子式法

有时我们需要直接从二次型的矩阵来判别这个二次型是不是正定的，而不希望通过它的标准形或规范形. 下面来解决这个问题. 为此，引入

定义 9 子式

$$H_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的顺序主子式.

定理 7 实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^TAX$$

是正定的充分必要条件为矩阵A的n个顺序主子式全大于零.

证明: 先证必要性. 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

是正定的. 对于每个k，$1\le k\le n$，令

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j\,.$$

我们来证f_k是一个k元的正定二次型.　对于任意一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_k$有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_i c_j = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0$$

因此$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k)$是正定的. 由 **推论 2** 　f_k的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

这就证明了矩阵A的顺序主子式全大于零.

再证充分性. 设矩阵A的n个顺序主子式全大于零， 对n作数学归纳法.

当 $n=1$ 时,

$$f(x_1)=a_{11}x_1^2,$$

由条件$a_{11}>0$显然有$f(x_1)$是正定的.

假设充分性的论断对于$n-1$元二次型已成立，现在来证n元的情形. 由归纳法假设,

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_ix_j$$

是正定的，所以存在一个非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + \cdots + m_{1,n-1}y_{n-1}, \\ x_2 = m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + \cdots + m_{2,n-1}y_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = m_{n-1,1}y_1 + m_{n-1,2}y_2 + \cdots + m_{n-1,n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

把f_1变成

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2.$$

于是作变换

$$\begin{cases} x_1 = m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + \cdots + m_{1,n-1}y_{n-1}, \\ x_2 = m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + \cdots + m_{2,n-1}y_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = m_{n-1,1}y_1 + m_{n-1,2}y_2 + \cdots + m_{n-1,n-1}y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

它把f变成

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2c_{1n}y_1y_n$$

$$+2c_{n-1,n}y_{n-1}y_n + \cdots + c_{nn}y_n^2$$

其中$c_{1n}, \cdots, c_{nn}$是适当的数.

注意到

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(y_1+c_{1n}y_n)^2+\cdots+\left(y_{n-1}+c_{n-1,n}y_n\right)^2$$

$$+c_{nn}y_n^2-c_{1n}^2y_n^2-\cdots-c_{n-1,n}^2y_n^2$$

$$=(y_1+c_{1n}y_n)^2+\cdots+\left(y_{n-1}+c_{n-1,n}y_n\right)^2+ay_n^2$$

其中$a=c_{nn}-c_{1n}^2-\cdots-c_{n-1,n}^2$是常数. 故令

$$\begin{cases} y_1 + c_{1n}y_n = z_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} + c_{n-1,n}y_n = z_{n-1}, \\ y_n = z_n \end{cases}$$

也就是作变换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - c_{1n}z_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = z_{n-1} - c_{n-1,n}z_n, \\ y_n = z_n \end{cases} \quad (3)$$

则$g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + az_n^2. \quad (4)$$

于是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经过非退化线性替换(2)和(3)之后变成(4).要使最后这个二次型正定，只须$a>0$. 把以上结果用矩阵写出来，就是存在一个可逆矩阵C使

$$C^TAC=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a\end{pmatrix}.$$

两边取行列式，从$|C^T|=|C|$就得$|C|^2|A|=a$. 由充分性假设，$|A|>0$，又$|C|^2>0$，所以$a>0$. 即(4)正定，就是f正定.

因此充分性得证.

注：上述充分性证明用矩阵写出来如下：

对n作数学归纳法.

当$n = 1$时，

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2,$$

由条件$a_{11} > 0$显然有$f(x_1)$是正定的.

假设充分性的论断对于 $n-1$ 元二次型已成立，现在来证n元的情形.

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

于是矩阵A可以分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

既然A的顺序主子式全大于零，当然A_1的顺序主子式也全大于零，由归纳假设，A_1是正定矩阵，换句话说，有可逆的$n-1$阶矩阵G使得

$$G^T A_1 G = E_{n-1}$$

这里E_{n-1}代表$n-1$阶单位矩阵.　令

$$C_1 = \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$C_1^T A C_1 = \begin{pmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T\alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T\alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \\ \hdashline E_{n-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ \alpha^T G & a_{nn}-\alpha^T G G^T \alpha \\ \hdashline E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^T G G^T \alpha \\ \hdashline E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

再令

$$C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

有

$$C_2^TC_1^TAC_1C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^TG & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T\alpha \\ \alpha^TG & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^TGG^T\alpha \end{pmatrix}$$

令

$$C = C_1 C_2, a_{nn} - \alpha^T G G^T \alpha = a,$$

就有

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

两边取行列式,

$$|C|^2 |A| = a.$$

由$|A| > 0$得$a > 0$．这就说明，矩阵A与单位矩阵合同，所以，A是正定矩阵，或者说二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是正定的. 充分性得证.

证毕

判断二次型正定$f = X^T AX$的方法：

（1）定义：对于任意一组非零的数，二次型都大于零；

（2）惯性指数法：正惯性指数等于n；

（3）证明矩阵A正定：(a)与单位矩阵合同

(b) $A = C^T C$（C满秩）

(c) A的n个顺序主子式都大于零.

例 3 利用下列模型判别矩阵的正定性.

三阶矩阵的判定模型

四阶矩阵的判定模型

例 4 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3$$
$$+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$$

的正定性.

解: 二次型的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix},$$

它的顺序主子式分别为

$$P_1 = |1| = 1 > 0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0, \quad P_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{vmatrix} = 24 > 0,$$

由此可知二次型是正定的.

三、实二次型的其他类型及其判别法

1. 定义

定义 10 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一实二次型，对于任意一组不全为零的实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，如果都有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，那么$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就称为**负定的**；如果都有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$，那么$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就称为**半正定的**；如果都有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$，那么$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就称为**半负定的**；否则就称之为**不定的**.

2. 判别法

定理 8 对于实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$$

其中A是实对称的，下列条件等价：

（1） $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是半正定的，

（2） 它的正惯性指数与它的秩相等，

（3） 有可逆实矩阵C，使

$$C^T AC = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

其中$d_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

(4) 有实矩阵C_1，使

$$A = C_1^T C_1$$

(5) A的所有主子式皆大于或等于零. （所谓主子式是指行指标与列指标相同的子式）

k阶主子式的个数为C_n^k.

注意：在(5)中，仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证半正定性的. 比如：

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

就是一个反例.

对于负定和半负定二次型的判别有以下定理：

定理 9 对于实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$$

其中A是实对称的，则

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是负定的充要条件是它的负惯性指数等于n.

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是半负定的充要条件是它的负惯性指数等于秩.

A负定与$(-A)$正定是等价的. 所以实对称矩阵A负定的充要条件是A的奇数阶顺序主子式都小于零，A的偶数阶顺序主子式都大于零.

例 5 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$$

的正定性.

解 ☜

矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix}$是

A 正定的

B 负定的

C 半正定的

D 半负定的

单选题 1分

设置

矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}$是

A 正定的

B 负定的

C 半正定的

D 半负定的

提交

四、正定矩阵的应用举例

在本节的最后，我们来看一个正定矩阵的简单应用.

例 5 设A为n阶正定矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, X\in R^n$，$b$是一固定的实$n$维列向量. 证明:

$$p(X)=\frac{X^TAX}{2}-X^Tb$$

在$X_0=A^{-1}b$处取得最小值，且$p_{min}=-\frac{1}{2}b^TA^{-1}b$.

证明： 当A为一阶正定矩阵时，$A=(a), a>0$，$X=(x)^T=x\in R^1$，

$p(x)=\frac{1}{2}ax^2-bx$是一条抛物线，它在$x=\frac{b}{a}$处，取得最小值$p_{min}=-\frac{b^2}{2a}$.

本例是把一元二次函数的最小值问题推广到n元二次函数(其二次项部分是正定二次型).

这里欲证$p(X_0)$是$p(X)$的最小值，只要证恒有$p(X)-p(X_0)\geq 0$.

由于$b=AX_0\ (X_0=A^{-1}b)$，所以

$$p(X)=\frac{X^TAX}{2}-X^Tb$$

$$\begin{aligned}p(X)-p(X_0)&=\frac{1}{2}X^TAX-X^Tb-\frac{1}{2}X_0^TAX_0+X_0^Tb\\&=\frac{1}{2}X^TAX-X^T(AX_0)-\frac{1}{2}X_0^TAX_0+X_0^T(AX_0)\\&=\frac{1}{2}X^TAX-X^TAX_0+\frac{1}{2}X_0^TAX_0\end{aligned}$$

又因为X^TAX_0是一阶矩阵，所以

$$X^TAX_0=\left(X^TAX_0\right)^T=X_0^TAX=\frac{1}{2}X^TAX_0+\frac{1}{2}X_0^TAX.$$

$$p(X)-p(X_0)=\frac{1}{2}X^TAX-X^TAX_0+\frac{1}{2}X_0^TAX_0$$

$$=\frac{1}{2}X^TAX-\left(\frac{1}{2}X^TAX_0+\frac{1}{2}X_0^TAX\right)+\frac{1}{2}X_0^TAX_0$$

$$=\frac{1}{2}(X^TAX-X_0^TAX)-\frac{1}{2}(X^TAX_0-X_0^TAX_0)$$

$$=\frac{1}{2}(X^T-X_0^T)AX-\frac{1}{2}(X^T-X_0^T)AX_0$$

$$=\frac{1}{2}(X^T-X_0^T)A(X-X_0).$$

因此，由A的正定性，即得$\forall(X-X_0)\neq 0$，即$\forall X\neq X_0$，恒有

$p(X)-p(X_0)>0$，故$p(X_0)$是最小值，且

$$p_{min}=p(X_0)=\frac{1}{2}X_0^TAX_0-X_0^Tb$$

$$=\frac{1}{2}X_0^Tb-X_0^Tb \quad =-\frac{1}{2}X_0^Tb$$

$$=-\frac{1}{2}\left(A^{-1}b\right)^Tb=\frac{1}{2}b^TA^{-1}b.$$

正定矩阵在多元函数极值中的应用

1. 二元函数的极值

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$为D的内点． 若存在P_0的某邻域$U(P_0)\subset D$，使得对于该邻域内异于P_0的任何点(x,y)，都有$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)有**极大值**$f(x_0,y_0)$，点(x_0,y_0)称为函数$f(x,y)$的极大值点；

若对于该邻域内异于P_0的任何点(x,y)，都有$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)有**极小值**$f(x_0,y_0)$，点(x_0,y_0)称为函数$f(x,y)$的极小值点.

定理 2（充分条件） 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0,$$

令$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$

则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

(1) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$正定时具有极小值；

(2) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$负定时具有极大值；

(3) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$不定时，是否取极值须进一步研究.

证明： 由二元泰勒公式有

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$$= \frac{1}{2}(h,k)\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o\left(h^2+k^2\right)$$

当h,k的绝对值很小时，上式右边的符号由$\frac{1}{2}(h,k)\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$决定.

由此即得上面的结论.

例： 求函数$f(x,y)=-x^4-y^4+4xy-1$的极值.

解： 求驻点，令

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-4x^3+4y=0, \\ f_y(x,y)=-4y^3+4x=0 \end{cases}$$

得三个驻点$(0,0),(1,1),(-1,-1)$，又

$$f_{xx}(x,y)=-12x^2, f_{xy}(x,y)=4, f_{yy}(x,y)=-12y^2.$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}$$

在点$(0,0)$处，$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$不定，所以$f(0,0)$不是极值.

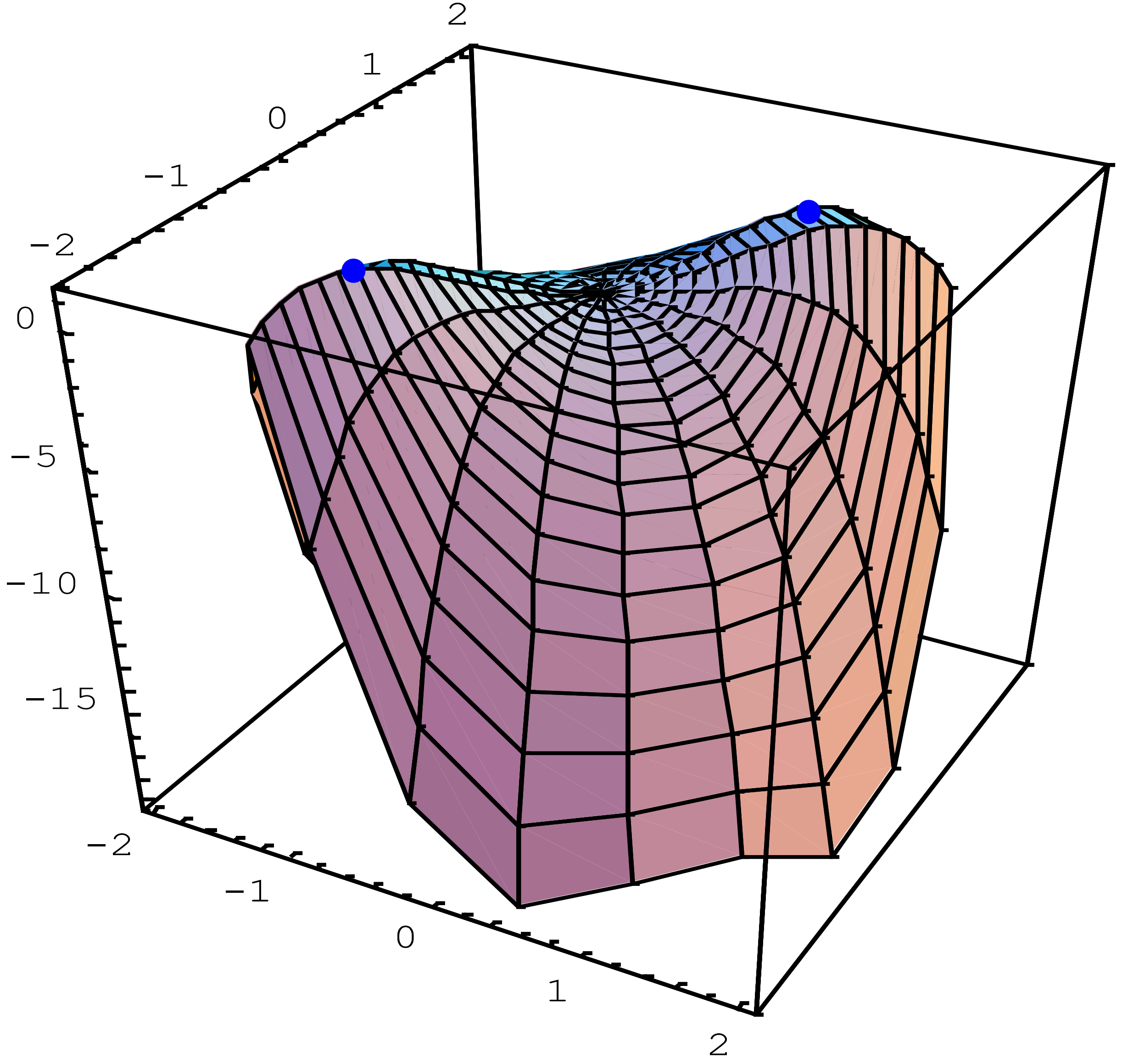
在点$(1,1),(-1,-1)$处都有

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

它负定，所以$f(1,1), f(-1,-1)$都是极大值.

$$f(1,1) = 1,$$

$$f(-1,-1) = 1.$$


2
1
0
-1
-2
0
-5
-10
-15
-2
-1
0
1
2