# 第二节 $n$ 维向量空间

## 主要内容

- 问题的提出
- $n$ 维向量的定义
- $n$ 维向量的运算
- $n$ 维向量空间
- 线性方程组与向量组的关系

## 一、问题的提出

上一节我们介绍了消元法，对于具体地解线性方程组，用消元法是一个最有效和最基本的方法. 但是，有时候需要直接从原方程组来看出它是否有解，这样，消元法就不能用了. 同时，用消元法化成阶梯形，剩下来的方程的个数是否唯一决定呢，这个问题也是没有解决的. 这些问题就要求我们对线性方程组还要作进一步的研究.

显然，一个线性方程组的解的情况是被方程组中方程之间的关系所规定的．譬如，在方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

中，第一个方程的3倍减去第二个方程就等于第三个方程， 因此，去掉第三个方程也不影响方程组的解. 在那里用初等变换得到的阶梯形方程组中只含有两个方程正是反映了这个情况. 可以认为，初等变换是揭露方程之间的关系的一种方法．因此，为了直接从原来的线性方

程组来讨论解的情况，我们有必要研究方程之间的关系.

一个$n$元方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

可以用$n+1$元有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$$

来代表， 所谓方程之间的关系实际上就是代表它们的$n+1$元有序数组之间的关系. 因此，我们先来讨论多元有序数组.

## $n$元有序数组的应用举例

应该指出，多元有序数组不只是可以代表线性方程， 而且还与其他方面有极其广泛的联系.

**例 1　点的坐标**

在解析几何中，有些事物的性质不能用一个数来刻画.  例如，为了刻画一点在平面上的位置需要两个数， 一点在空间中的位置需要三个数，即需要知道它们的坐标.

点的坐标是多元有序数组.

## 例 2　力、速度、加速度

又如力学中的力、速度、加速度等，由于它们既有大小，又有方向，用一个数也不能刻画它们，取定坐标系之后，它们可以用三个数来刻画. 几何中向量的概念正是它们的抽象.

力、速度、加速度要用3元有序数组来表示.

## 例 3　$n$元方程组的解

一个$n$元方程组的解是由$n$个数组成，而这$n$个数作为方程组的解是一个整体，分开来谈是没有意义的.

即$n$元方程组的解是一个$n$元有序数组.

## 例 4　　球的大小和位置

为了刻画一个球的大小和位置，需要知道它中心的坐标（三个数）以及它的半径，即球的大小和位置需要4个数来刻画.

球的大小和位置要用4元有序数组来表示.

## 例 5　　刚体位置的确定

一个刚体的位置确定需要6个数. 事实上，如果我们在刚体中取定一个点以及过这一点的一根轴， 那么刚体的位置就决定于这一点的坐标（三个数），轴的方向（两个数 – 它的方向余弦中的两个）， 以及刚体绕这根轴转动的角度（一个数）.

刚体位置要用6元有序数组来表示.

## 例 6　　在国民经济中的应用

在国民经济的问题中，我们也会碰到这种情况.　譬如一个工厂生产好几种产品，那么为了说明这个工厂的产量，就需要同时指出每种产品的产量.

又如一个工厂的原料来自好多地方, 于是一个原料的采购计划就需要同时指出从每个原料产地的采购量.

在这里产品的产量、原料的采购量都需用多元有序数组来表示.

## 二、$n$维向量的定义

总之，$n$维有序数组在实际中的应用例子有很多，作为它们的一个共同抽象，就有下面的定义

**定义 3** 所谓数域$P$上一个$n$**维向量**就是由数域$P$中$n$个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad (1)$$

$a_i$称为向量(1)的分量.

几何上的向量可以认为是它的特殊情形，即 $n=2,3$ 且$P$为实数域的情形. 在$n>3$时，$n$维向量就没有直观的几何意义了. 我们之所以仍称它为向量，一方面固然是由于它包括通常的向量作为特殊的情形，另一方面也由于它与通常的向量一样可以定义运算，并且有许多运算性质是共同的.　因而采取这样一个几何的名词有好处.

以后我们用小写希腊字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$来代表向量.

## 三、$n$维向量的运算

### 1. 向量相等

**定义 4** 如果$n$维向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

的对应分量都相等，即

$$a_i=b_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

就称这两个向量是**相等的**，记作 $\alpha=\beta$.

## 2. 向量的加法

### 1）定义

**定义 5** 向量

$$\gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

称为向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

的**和**，记为

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

## 2）运算规律

交换律： $\alpha+\beta=\beta+\alpha.$ (2)

结合律： $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$ (3)

## 3）零向量和负向量

**定义 6** 分量全为零的向量$(0,0,\cdots,0)$称为**零向量**，记为$0$；向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的**负向量**，记为 $-\alpha$.

显然，对于所有的$\alpha$，都有

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{4}$$

$$\alpha + (-\alpha) = 0. \tag{5}$$

(2)-(5)是向量加法的四条基本运算规律.

4） 向量的减法运算

定义 7 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$

## 3. 数量乘积

### 1）定义

**定义 8** 设 $k$ 为数域 $P$ 中的数，向量

$$(ka_1, ka_2 \cdots, ka_n)$$

称为向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$与数 $k$ 的**数量乘积**，记为 $k\alpha$.

## 2）运算规律

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \tag{6}$$

$$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha, \tag{7}$$

$$k(l)\alpha=(kl)\alpha, \tag{8}$$

$$1\alpha=\alpha. \tag{9}$$

(6)-(9)是关于数量乘法的四条基本运算规律． 由(6)-(9)或者定义不难推出

$$0\alpha=0, \qquad (-1)\alpha=-\alpha, \qquad k0=0.$$

向量的加法和数量乘法满足如下运算规律（其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 表示向量，$k,l$ 表示数）

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; 加法交换律

(2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$; 加法结合律

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$; 数乘分配律

(6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(7) $k(l)\alpha=(kl)\alpha$; 数乘结合律

(8) $1\alpha=\alpha$.

(3) $\alpha + 0 = \alpha$;
(4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;
(7) $k(l)\alpha = (kl)\alpha$;
(8) $1\alpha = \alpha$.

(3)和(4)保证加法有逆运算，即若$\alpha + \beta = \gamma$，则$\alpha = \gamma + (-\beta)$；

(7)和(8)保证乘法有逆运算，即当$k \neq 0$时，若$k\alpha = \gamma$，则$\alpha = \frac{1}{k}\gamma$.

如果$k \neq 0, \alpha \neq 0$，那么

$$k\alpha \neq 0.$$

## 四、$n$维向量空间

**定义 9** 以数域 $P$ 中的数作为分量的$n$维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法，称为数域 $P$ 上的$n$维向量空间.

在$n=3$时， 3维实向量空间认为就是几何空间中全体向量所成的空间.

以上已把数域 $P$ 上全体$n$维向量的集合组成一个有加法和数量乘法的代数结构， 即数域 $P$ 上$n$维向量空间.

## 4. 行向量与列向量

向量通常写成一行

行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

有时也可以写成一列

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

列向量

## 五、线性方程组与向量组的关系

在定义了 $n$ 维向量之后，线性方程组中的方程就可以用向量来表示，因而线性方程组就可以用向量组来表示.

设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \qquad (1)$$

若令

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1),$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, b_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}, b_s),$$

则用向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$来表示方程组(1). 或者称向量组$A$是由方程组(1)确定的向量组. 反之，若给定向量组$A$，则可唯一地确定线性方程组，也即线性方程组与向量组一一对应.