第六节　行列式按一行（列）展开

主要内容

- 问题的提出
- 余子式和代数余子式
- 行列式按行(列)展开定理
- 三阶行列式的几何意义
- 行列式计算举例

在§4 中，对于n阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i1}A_{i2} + \cdots + a_{i1}A_{in}, \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

一、问题的提出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

把右边的6项，按含有第一行的3个元素的规则分组，且提出公因子，得

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

由此可见一个三阶行列式可以转化成三个二阶行列式的计算.

问题：一个n阶行列式可以转化成若干个$n-1$阶行列式的计算?

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A_{11},A_{12},A_{13}的符号由它们所对应的元素a_{11},a_{12},a_{13}在三级行列式中的位置确定，A_{ij}的符号为$(-1)^{i+j}$.

推广到n阶行列式中，n阶行列式中A_{ij}是一些带有正负号的$n-1$阶行列式. 为了从理论上证明这一结论，我们先引进余子式和代数余子式的概念.

二、余子式和代数余子式

定义 7 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第i行与第j列，剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

按照这个定义，(2)式可以改写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

于是 $A_{11} = M_{11}, A_{12} = -M_{12}, A_{13} = M_{13}$.

下面证明

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad (4)$$

证明： 我们首先证明，由行列式的定义n阶行列式与$n-1$阶行列式具有如下关系：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

事实上，(5) 式左端行列式的展开式

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nj_n}$$

中只有$j_n = n$的项才可能不为零，而$a_{nn} = 1$，因此左端为

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}}.$$

显然$j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$是1, 2, ⋯ , $n-1$的排列，且

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n) = \tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1}).$$

(5) 式得证.

为了证明(4)，在(1)中令

$$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=a_{i,j+1}=\cdots=a_{i,n}=0,\quad a_{i,j}=1$$

即得

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{2n-(i+j)} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.
$$

这里，第一步依次把第i行与它下边的一行对换，直到把它换到第n行为止，这样一共换了$n-i$次，因此行列式差一个符号$(-1)^{n-i}$；第二步是同样地把第j列换到第n列；再利用(5)与关系

$$(-1)^{2n-(i+j)}=(-1)^{i+j}$$

即得(4).

证毕

定义 8 上面提到的 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

公式(1)表明，行列式等于某一行的元素分别与它们代数余子式的乘积之和. 在(1)中，如果令第 i 行的元素等于另外一行，比如，第k行的元素，即 $a_{ij}=a_{kj}, j=1,2,\cdots,n, k\neq i.$ 于是

$$a_{k1}A_{i1}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =0$$

因此，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零.

三、行列式按行(列)展开定理

定理 3 设

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d, & k=i, \\ 0, & k\neq i; \end{cases} \quad (6)$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} d, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases} \quad (7)$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} d, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj} = \begin{cases} d, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases}$$

四、三阶行列式的几何意义

在$n=3$时，公式(6)有明显的几何意义．如果把行列式的行看作向量在直角坐标系下的坐标，即设

$\alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$，$\alpha_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$，

那么

$$\alpha_2\times\alpha_3=(A_{11},A_{12},A_{13})$$

于是

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\boldsymbol{\alpha}_1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3),$$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=\boldsymbol{\alpha}_2\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3)=0,$$

$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=\boldsymbol{\alpha}_3\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3)=0.$$

定理3 $a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases} d, & i=s, \\ 0, & i\neq s. \end{cases}$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} d, & j=l, \\ 0, & j\neq l. \end{cases}$$

三个向量α_1、α_2、α_3共面的充要条件是：它们的坐标构成的3级行列式$D=0$；若$D\neq 0$，则$|D|$表示以这三条向量为邻边的平行六面体的体积.

注意：公式(6)和(7)仅适用于行列式中某一行或某一列中含有较多的零的情形.

设 $\boldsymbol{\beta_1}=(1,1,1),\boldsymbol{\beta_2}=(2,3,-1),\boldsymbol{\beta_3}=(1,3,5)$，则

以$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$为邻边的平行六面体如图1所示. 其体积为$V$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=10,$$

$$V=|D|=10.$$

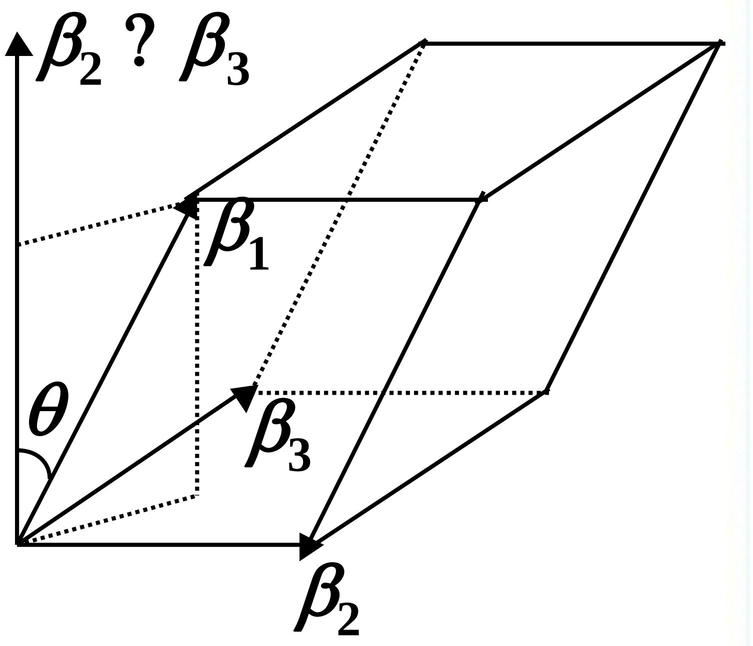

图1

五、行列式的计算

三种计算方法：

(1) 按照定义或公式计算；

(2) 初等行(列)变换变成上(下)三角行列式；

(3) 按照公式(6)或(7)展开成低阶的行列式；

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-10) \times (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 20(-42 - 12) = -1080.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

练习:

用降阶法计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

例 3 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j). \qquad (8)$$

证明: 我们对 n 作归纳法.

当$n=2$时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结论成立. 设对于$n-1$阶的范德蒙行列式结论成立，现在来看n阶的情形.

在(8)式左端的行列式中，第n行减去第$n-1$行的a_1倍，第$n-1$行减去第$n-2$行的a_1倍，即由下而上一次地从每一行减去它上一行的a_1倍，于是有

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

后面这行列式是一个$n-1$阶的范德蒙行列式，根据归纳法假设，它等于所有可能差$a_i - a_j (2 \le j < i \le n)$的乘积；而包含$a_1$的差全在前面出现了．因此，结论对$n$阶矩阵也成立.

证毕

例 4 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

(9)

我们对k作数学归纳法.

当$k=1$时，(9)的左端为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

按第一行展开，就得到所要的结论.

假设 (9) 对$k=m-1$，即左端行列式的左上角是$m-1$阶时时已经成立，现在来看$k=m$的情形，按第一行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r2} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,i-1} & c_{r,i+1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,m-1} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,m-1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= \left[a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots \right.$$

$$+(-1)^{1+i} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\left. \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.
$$

这里第二个等号是用了归纳法假定，最后一步是根据按一行展开的公式.

根据归纳法原理，结论普遍成立.

证毕

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

解： 将第2, 3, 4行都加到第1行，并从第一行中提出公因子$a+b+c+d$，于是得

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}$$

再将第2, 3, 4列都减去第1列，得

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ b & a-b & d-b & c-b\\ c & d-c & a-c & b-c\\ d & c-d & b-d & a-d\end{vmatrix}$$

按第1行展开，得

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

把右端行列式第2行加到第1行，再从第1行中提取$a-b-c+d$，得

$$D=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

再将第2列减去第1列，得

$$D=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ d-c & a-d & b-c\\ c-d & b-c & a-d\end{vmatrix}$$

按第1行展开，得

$$D=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}a-d & b-c\\ b-c & a-d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

例 6 计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & 0 & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & 0 & & c & d & & 0 & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & 0 & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

特点: "0"多 **方法:** 降阶找递推公式.

解　按第一行展开

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & d \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2n+1} b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ \vdots & & \iddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= adD_{2(n-1)} - bcD_{2(n-1)}$$

$$= (ad - bc)D_{2(n-1)}$$

根据递推公式,

$$D_{2n} = (ad - bc)D_{2(n-1)}$$

$$= (ad - bc)^2 D_{2(n-2)}$$

$$= \cdots$$

$$= (ad - bc)^{n-1} D_2$$

$$= (ad - bc)^n.$$