课堂练习 1（17 年 03 月 10 日，30 分钟）答案：

A

1、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， α_1，α_2 是 V_1 的一组基， β_1，β_2，β_3 是 V_2 的一组基，且 $\sigma(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \sigma(\alpha_2) = 0$

计算：（1）线性映射 σ 的矩阵是（ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ）

（2） $\mathrm{Im}\,\sigma =$（ $span\{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}$ ）

（3） $\ker \sigma =$（ $span\{\alpha_2\}$ ）

2（思考题）、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， $\dim(V_1) = n$， $\dim(V_2) = m$， σ 的矩阵是 A，请给出 σ 可逆的充分必要条件.

B

1、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V_1 的一组基， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 V_2 的一组基且，

$$\sigma(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2, \sigma(\alpha_2) = \beta_2 + \beta_3, \sigma(\alpha_3) = \beta_3 + \beta_1$$

计算：（1）线性映射 σ 的矩阵（ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ）；（2） $\mathrm{Im}\,\sigma$ （ V_2 ）；（3） $\ker \sigma$ （ $\{0\}$ ）

2（思考题）、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， $\dim(V_1) = \dim(V_2) = n$， σ 的矩阵 A 可逆，请给出 σ^{-1} 的表达式.

课堂提问 1（17 年 03 月 24 日，30 分钟）答案：

1、设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$， α_1，α_2 是 V_1 的一组基， β_1，β_2，β_3 是 V_2 的一组基，且 $\sigma(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \sigma(\alpha_2) = 0$

（1） σ 的矩阵是（ B ） $(A)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

（2） $\mathrm{Im}\,\sigma =$（ B ） $(A)\ span\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $(B)\ span\{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}$

（3） $\ker \sigma =$（ A ） $(A)\ span\{\alpha_2\}$ $(B)\{0\}$；（4） $\dim(\ker \sigma) =$（ 1 ）

2、设 $\sigma \in L(V)$，设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基，且， $\sigma(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_3, \sigma(\alpha_3) = \alpha_3 + \alpha_1$

（1） σ 的矩阵是（ A ） $(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

（2）秩 (σ) =（ 3 ）；（3） $\ker \sigma =$（ $\{0\}$ ）；（4） σ 是否可逆？（ 是 ）

3、设 σ 是 3 维线性空间 V 上的线性变换， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基，且 $\sigma(\alpha_1) = 0,\ \sigma(\alpha_2) = \alpha_1,\ \sigma(\alpha_3) = \alpha_2$

（1）σ 的矩阵 $A=$ （ A ） $(A)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

（1） A 是否为幂零矩阵？（ 是 ）

（3） $\operatorname{Im}\sigma=$（ A ） $(A)\ span\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $(B)\ span\{\alpha_2,\alpha_3\}$

（4） $\ker\sigma=$（ A ） $(A)\ span\{\alpha_1\}$ $(B)\ span\{\alpha_2+\alpha_3\}$

4、设 σ 是3维线性空间 V 上的线性变换，在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为，$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

（1）使得 $A^k=0$ 的最小正整数 $k=$（ 3 ） ；（2） $\dim(\operatorname{Im}\sigma)=$（ 2 ）

（3） $\sigma(V)=$（ A ） $(A)\ span\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $(B)\ span\{\alpha_2,\alpha_3\}$ ；（4） $\dim(\ker\sigma)=$（ 1 ）

5、设 A 是 2 阶单位矩阵，$V=M_2(R)$，$\sigma\in L(V)$ 满足对任何 $X\in M_2(R)$，$\sigma(X)=XA-AX$

（1） σ 的矩阵 $C=$（ B ） (A) 4阶单位矩阵 (B) 4阶零方阵

（2） $\operatorname{Im}\sigma=$（ B ） $(A)\ M_2(R)$ $(B)\ \{0\}$ ；（3） $\ker\sigma=$（ A ） $(A)\ M_2(R)$ $(B)\ \{0\}$

（4） $\dim(\operatorname{Im}\sigma)=$（ 0 ）； （5） $\dim(\ker\sigma)=$（ 4 ）

注意到 A 是 2 阶单位矩阵！

6、设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$V=M_2(R)$，$\sigma\in L(V)$，满足对任何 $X\in M_2(R)$，$\sigma(X)=AX$

（1） σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵是（ A ） $(A)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

（2） $\operatorname{Im}\sigma=$（ A ） $(A)\ span\{E_{11},\ E_{12}\}$ $(B)\ span\{E_{12},\ E_{21}\}$

（3） $\dim(\operatorname{Im}\sigma)=$（ 2 ） ；（4） $\dim(\ker\sigma)=$（ 2 ）

7、设 σ 是3维线性空间 V 上的一个仿射变换，α_1，α_2，α_3 是 V 的一组基，

$\sigma(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1,\ \sigma(\alpha_2)=\lambda_2\alpha_2,\ \sigma(\alpha_3)=\lambda_3\alpha_3$

（1） σ 的矩阵是（ B ） $(A)\ diag\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ $(B)\ diag\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}$

（2）当（ A ）时，$\dim(\operatorname{Im}\sigma)=2$ $(A)\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 中恰有2个不为0 $(B)\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 中至少有2个不为0

（3）当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$\operatorname{Im}\sigma=$（ V ）；（4）当 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=0$ 时，$\operatorname{Im}\sigma=$（ $span\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ ）

8、设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，对任何 $\alpha\in V,\ \sigma(\alpha)=0$

（1）、上述 σ 称为（ 零 ）变换；（2）$\operatorname{Im}\sigma=$（ $\{0\}$ ）；（3）$\ker\sigma=$（ V ）

（4）$\dim(\operatorname{Im}\sigma)+\dim(\ker\sigma)=$（ n ）

课堂提问 2（17 年 04 月 28 日，30 分钟）答案：

1、设 $\eta_1,\ \eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，$\xi_1,\ \xi_2$ 是相应的导出组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=b$ 的通解是（ A ）

(A) $c_1\xi_1+c_2\xi_2+(2\eta_1-\eta_2)$ (B) $c_1\xi_1+c_2\xi_2+(\eta_1-\eta_2)$

其中 c_1,c_2 是任意常数

2、设 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则当（ B ）时，$(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)C$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系 (A) $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (B) $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

注：因该能迅速判定矩阵是奇异的（即退化）

3、是什么原因导致齐次线性方程组有非零解？（ B ）

(A) 未知数的个数少于方程的个数 (B) 存在自由未知数

4、设齐次线性方程组 $A_{4\times6}x=0$ 的系数矩阵的秩为 4，则方程的自由未知数有（ B ）(A) 4 (B) 2

5、设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\ \xi_2$ 是相应的导出组 $Ax=0$ 的基础解系，则向量组

$\xi_1+\eta,\ \xi_2+\eta,\ \eta$ 是（ B ） (A) 线性相关的 (B) 线性无关的

解：设 $k_1(\xi_1+\eta)+k_2(\xi_2+\eta)+k_3\eta=0$，即 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+(k_1+k_2+k_3)\eta=0$，若，$k_1+k_2+k_3\neq0$，则 η 能由 $\xi_1,\ \xi_2$ 线性表示，从而 η 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解，矛盾，故 $k_1+k_2+k_3=0$，进而 $k_1=k_2=k_3=0$，所以，线性无关。

6、设 α_1,α_2 是 V 的一组基，$V_1=span\{\alpha_1\},\ V_2=span\{\alpha_2\},\ V_3=span\{\alpha_1+\alpha_2\}$

（1）V_1+V_3 是否是直和？（ 是 ）

（2）α_1 在基 $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2$ 下的坐标为（ A ） (A) $(1,-1)^T$ (B) $(-1,1)^T$

（3）$V_1+V_2+V_3$ 是否是直和？（ 不是 ）

（4）V_1+V_3 是否等于 V？（ 是 ）

7、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$及$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$V$的一组基，且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$

（1）基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为（ A ）

$(A)\ E_{11}+E_{21}+E_{31}+E_{22}+E_{32}+E_{33}$ $(B)\ E_{11}+E_{12}+E_{13}+E_{22}+E_{23}+E_{33}$

（2）α_3在基β_1,β_2,β_3下的坐标为（ $(0,0,1)^T$ ）

（3）$span\{\beta_1\}+span\{\beta_2\}+span\{\beta_3\}$是否是直和？（ 是 ）

（4）$span\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}+span\{\alpha_2+\alpha_3\}$是否等于$V$？（ 否 ）

解：（4）$span\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}+span\{\alpha_2+\alpha_3\}$是 2 维的

8、设$M_n(R)$为全体实n阶方阵，它是实数域上的线性空间.在$M_2(R)$中，取一组基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$.

（1）基$E_{12},E_{11},E_{21},E_{22}$到基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$的过渡矩阵为（ A ）

$(A)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

（2）矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$在基$E_{12},E_{11},E_{21},E_{22}$下的坐标向量为（ $(1,\ 2,\ 3,4)^T$ ）

（3）$E_{11}-E_{12},E_{12},E_{21},E_{22}$是否为$M_2(R)$的一组基？（ 是 ）

（4）$M_n(R)$是几维的线性空间？（ n^2 ）

9、设α_1,α_2和β_1,β_2是二维向量空间V的两组基，由β_1,β_2到α_1,α_2的过渡矩阵是$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

（1）由α_1,α_2到β_1,β_2的过渡矩阵是（ B ）$(A)\ C^T$ $(B)\ C^{-1}$

（2）$\alpha_2=k_1\beta_1+k_2\beta_2$向量，则$k_1=$（ 1 ），$k_2=$（ 1 ）

（3）$\alpha_1+\beta_1+\beta_2$在β_1,β_2下的坐标为（ $(2,\ 1)^T$ ）

（4）β_1在α_1,α_2下的坐标为（ $(1,\ 0)^T$ ）

10、设α_1,α_2和β_1,β_2是二维向量空间V的两组基，由α_1,α_2到β_1,β_2的过渡矩阵是$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

向量α在α_1,α_2下的坐标是x，在β_1,β_2下的坐标是y，则

（1）x是（ B ）中向量 $(A)\ V$ $(B)\ R^2$

（2） x 与 y 的关系是（ B ） (A) $y=Cx$ (B) $x=Cy$

（3） α_1 在 β_1, β_2 下的坐标为（ $(1,\ 0)^T$ ）

（4） $span\{\alpha_1-\beta_1\}$ 是几维的？（ 0 ）

期中考试卷及答案

一、闭卷部分（30 分）（17 年 04 月 28 日，30 分钟，实际 40 分钟）

1、已知 2 阶方阵 A 的特征值为 3 和 2，它们对应的特征向量分别为 $X_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$， $X_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$，求 A.

解：由题意，$A(X_1,X_2)=(AX_1,AX_2)=(3X_1,2X_2)=\begin{pmatrix}3&2\\0&2\end{pmatrix}$，而 $(X_1,X_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，所以，

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}$$

2、证明线性变换的属于不同特征值的特征向量线性无关.
证明：略（见教材）

3、已知 R^3 的线性变换 $\sigma(x,y,z)^T=(2y+z,x-4y,3x)^T$，计算 σ 在基 $\alpha_1=(1,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,1,0)^T$，

$\alpha_3=(1,0,0)^T$ 下的矩阵.

解： $\sigma(\alpha_1)=(3,-3,3)^T$， 令 $\sigma(\alpha_1)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$， 得， $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_1+x_2=-3\\x_1=3\end{cases}$， 解得，

$x_1=3,\ x_2=-6,\ x_3=6$，即，$\sigma(\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}$

同理可得， $\sigma(\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$， $\sigma(\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$， 所以， 所求矩阵为，

$$\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}$$

4、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是 5 维线性空间 V 的一组基，$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$， $V_2=span\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$.

（1）求 $V_1\cap V_2$；

（2）证明：$V_1+V_2=V$，并问V_1+V_2是否是直和.

解：（1）设$\alpha\in V_1\cap V_2$，则有$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=l_1\alpha_3+l_2\alpha_4+l_3\alpha_5$，即，

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\left(k_3-l_1\right)\alpha_3-l_2\alpha_4-l_3\alpha_5=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关，所以$k_1=k_2=\left(k_3-l_1\right)=l_2=l_3=0$，因此$\alpha=k_3\alpha_3\in span\{\alpha_3\}$，

所以$V_1\cap V_2\subset span\{\alpha_3\}$，显然有$span\{\alpha_3\}\subset V_1\cap V_2$，所以$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}$

（2）V_1+V_2不是直和，这是因为$V_1\cap V_2=span\{\alpha_3\}\neq\left\{0\right\}$

5、设线性空间V的两个线性变换σ和τ是可交换的（即，对任何$\alpha\in V$，有$\left(\tau\sigma\right)\left(\alpha\right)=\tau\left[\sigma\left(\alpha\right)\right]=\sigma\left[\tau\left(\alpha\right)\right]=\left(\sigma\tau\right)\left(\alpha\right)$）. 证明：$\sigma$的值域$\sigma\left(V\right)$是$\tau$的不变子空间.

证明：任取$\alpha\in\sigma\left(V\right)$，则存在$\beta\in V$，使得$\alpha=\sigma\left(\beta\right)$，于是，

$$\tau\left(\alpha\right)=\tau\left[\sigma\left(\beta\right)\right]=\left(\tau\sigma\right)\left(\beta\right)=\left(\sigma\tau\right)\left(\beta\right)=\sigma\left[\tau\left(\alpha\right)\right]\in\sigma\left(V\right)$$

所以，$\sigma\left(V\right)$是τ的不变子空间.

二、开卷部分（5 月 5 日交，总分 70）

就线性方程组的解的结构，线性子空间及直和，线性变换的矩阵，线性变换的值域与核，线性变换及矩阵的特征值和特征向量，线性变换的不变子空间，幂零变换，幂等变换等内容，写一个 1500 字以上的读书心得. 电子版于 5 月 5 日之前发到邮箱。纸质版于 5 月 5 日上课时交.