



第五章 二次型



第一节 二次型及其矩阵表示

主要内容

- 问题的提出
- 二次型的定义及矩阵表示
- 线性替换
- 合同矩阵





一、问题的提出

在解析几何中,为了便于研究二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f \quad (1)$$

的几何性质,我们可以选择适当的角度作转轴 θ , 作转轴 (逆时针方向转轴)

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

把方程化为标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = 1.$$



(1) 式的左边是一个二次多项式，从代数学的观点看，化标准形的过程就是通过变量的线性替换(2)化简成一个二次齐次多项式，使它只含有平方项。这样一个问题，在许多理论问题或实际问题中常会遇到。现在我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题。



二、二次型的定义及矩阵表示

1. 定义

定义 1 设 P 是一个数域，一个系数在数域 P 中的 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型，简称二次型。



例如

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xz + yz$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4$$

都是二次型

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$$

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2x$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2xyz$$

不是二次型





2. 二次型的矩阵表示

设有二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (3)$$

取 $a_{ij} = a_{ji}$, 则 $2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_i x_j$,

所以二次型可以写成 (把上式的系数排成一个 $n \times n$ 矩阵)



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

它就称为**二次型的矩阵**. 因为 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$, 所以

$$A = A^T$$

我们把这样的矩阵称为**对称矩阵**, 因此, 二次型的矩阵都是对称矩阵.



令

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

因为

$$X^T A X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} X^T A X &= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$



所以二次型可表示成

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX.$$

这即为二次型的矩阵表示形式.

应该看到，二次型的矩阵 A 的元素，当 $i \neq j$ 时， $a_{ij} = a_{ji}$ 正是它的 $x_i x_j$ 项的系数的一半，而 a_{ii} 是 x^2 项的系数，因此二次型和它的矩阵是相互唯一决定的. 由此还能得到，若二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX = X^T BX.$$

且 $A^T = A, B^T = B$ ，则 $A = B$.





注意：

二次型 $f = X^T AX$, 把对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵；

也把二次型 f 称为对称矩阵 A 的二次型；

对称矩阵 A 的秩称为二次型 f 的秩。



例 1 已知二次型

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$$

写出二次型的矩阵 A .

解：设 $f = X^T A X$, 则

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$



例 2 把二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 - 2x_1x_2 \\& + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 4x_2x_4\end{aligned}$$

写成矩阵形式.

解:

$$f = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$$

写出二次型的矩阵A.

$$a_{11} = \text{[填空1]} \quad a_{12} = \text{[填空2]} \quad a_{13} = \text{[填空3]}$$

$$a_{21} = \text{[填空4]} \quad a_{22} = \text{[填空5]} \quad a_{23} = \text{[填空6]}$$

$$a_{31} = \text{[填空7]} \quad a_{32} = \text{[填空8]} \quad a_{33} = \text{[填空9]}$$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

 作答

数

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_3x_4$$

写出二次型的矩阵A.

$$a_{11} = \text{[填空1]} \quad a_{12} = \text{[填空2]} \quad a_{13} = \text{[填空3]} \quad a_{14} = \text{[填空4]}$$

$$a_{21} = \text{[填空5]} \quad a_{22} = \text{[填空6]} \quad a_{23} = \text{[填空7]} \quad a_{24} = \text{[填空8]}$$

$$a_{31} = \text{[填空9]} \quad a_{32} = \text{[填空10]} \quad a_{33} = \text{[填空11]} \quad a_{34} = \text{[填空12]}$$

$$a_{41} = \text{[填空13]} \quad a_{42} = \text{[填空14]} \quad a_{43} = \text{[填空15]} \quad a_{44} = \text{[填空16]}$$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

数





三、线性替换

1. 定义

定义 2 设 $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ 是两组文字，系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

称为由 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个**线性替换**，或简称**线性**



替换. 如果系数行列式

$$|c_{ij}| \neq 0$$

那么称线性替换为非退化的.

例如，前面我们讲过的坐标旋转公式

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

是一个线性替换，且 $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ，所以它是非退化的.



2. 线性替换的矩阵形式

令

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

于是线性替换(4)可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$



或者

$$X = CY.$$

3. 线性替换的性质

性质 线性变换把二次型还是变成二次型.

证明: 设有二次型 $f = X^T AX$ 和线性替换 $X = CY$, 则

$$f = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T C^T A C Y = Y^T (C^T A C) Y$$

又因为 $(C^T A C)^T = C^T A^T C = C^T A C$, 所以 $C^T A C$ 是对称矩阵, 因此 f 还是一个二次型.

证毕



四、合同矩阵

1. 概念的引入

我们知道，经过一个非退化的线性替换，二次型还是变成二次型。现在来讨论替换前后的二次型的矩阵之间的关系。

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$, $A = A^T$ 是一个二次型，作非退化线性替换 $X = CY$, 得到一个关于 y_1, y_2, \dots, y_n 的二次型 $Y^T BY$. 现在来看矩阵 B 与 A 的关系。



$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= X^T A X \\&= (CY)^T A (CY) \\&= Y^T C^T A C Y \\&= Y^T (C^T A C) Y \\&= Y^T B Y.\end{aligned}$$

又因为矩阵 $C^T A C$ 也是对称的 (前面已证), 由此即得

$$B = C^T A C$$

这就是前后两个二次型的矩阵的关系.



2. 定义

定义 3 数域 P 上的 $n \times n$ 矩阵 A, B 称为合同的, 如果有数域 P 上的可逆的 $n \times n$ 矩阵 C , 使

$$B = C^T AC.$$

3. 性质

合同是矩阵之间的一个关系, 合同关系有以下性质:

1) 反身性 $A = E^T AE;$

2) 对称性 若 $B = C^T AC$, 则 $A = (C^{-1})^T BC^{-1}.$



3) 传递性 若 $A_1 = C_1^T A C_1$, $A_2 = C_2^T A_1 C_2$,

则 $A_2 = (C_1 C_2)^T A C_1 C_2$.

因此，经过非退化的线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。这样，我们就把二次型的变换通过矩阵表示出来，为以下的讨论提供了有力的工具。

最后指出，在变换二次型时，我们总是要求所作的线性替换是非退化的。从几何上看，这一点是自然的，因为坐标变换一定是非





退化的. 一般地, 当线性替换

$$X = CY$$

是非退化时, 由上面的关系即得

$$Y = C^{-1}X$$

这也是一个线性替换, 它把所得的二次型还原. 这样就使我们从所得二次型的性质可以推知原二次型的一些性质.

