第七章　线性变换

第一节　线性变换的定义

主要内容

- 引入
- 定义
- 举例
- 性质

一、引入

二、定义

定义 1 线性空间 V 的一个变换 $\mathcal{A}$ 称为**线性变换**，如果对于 V 中任意的元素 α, β 和数域 P 中任意数 k，都有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta),$$

$$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha).$$

以后我们一般用花体拉丁字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ 代表 V 的变换，$\mathcal{A}(\alpha)$ 或 $\mathcal{A}\alpha$ 代表元素 α 在变换 $\mathcal{A}$ 下的像.

定义中的等式所表示的性质，有时也说成线性变换保持向量的加法与数量乘法.

下面我们来看几个简单的例子，它们表明线性变换这个概念是有丰富的内容的.

三、举例

例 1 平面上的向量构成实数域上的二维线性空间. 把平面围绕坐标原点按反时针方向旋转 θ 角就是一个线性变换，我们用 $\mathcal{R}_\theta$ 表示. 如果平面上一个向量 α 在直角坐标系下的坐标是(x, y)，那么像 $\mathcal{R}_\theta(\alpha)$ 的坐标，即 α 旋转 θ 角之后的坐标(x', y')是按照公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

来计算的. 如图 7 - 1 所示.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

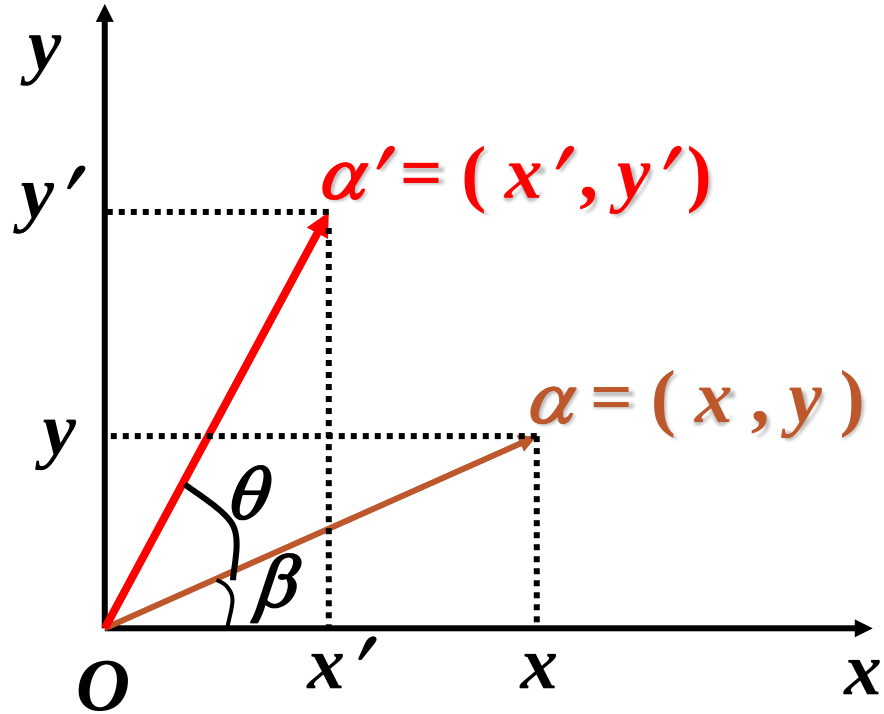


图 7 - 1

同样地，空间中绕轴的旋转也是一个线性变换.

例 2　设 α 是几何空间中一固定的非零向量，把每个向量 ζ 变到它在 α 上的内射影的变换也是一个线性变换，以 Π_α 表示它．用公式表示就是

$$\Pi_\alpha(\zeta)=\frac{(\alpha,\zeta)}{(\alpha,\alpha)}$$

这里 $(\alpha,\zeta),(\alpha,\alpha)$ 表示内积．几何意义如图 7 - 2 所示.

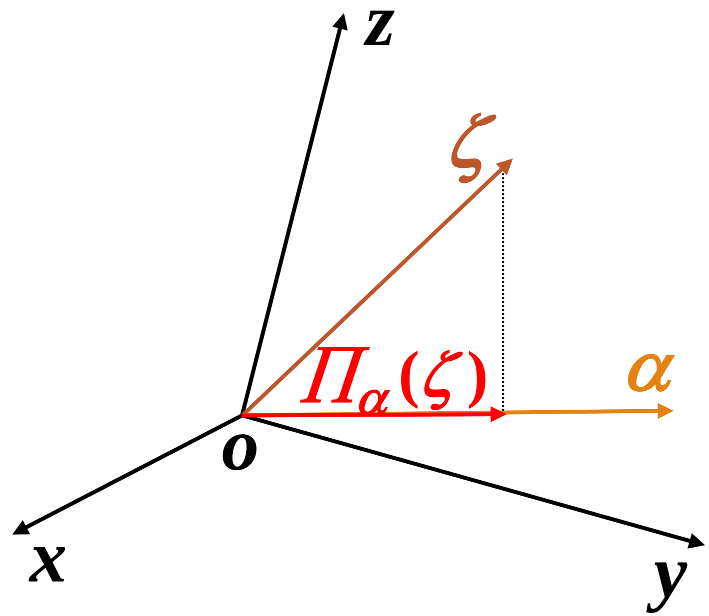


图 7 - 2

例 3　线性空间 V 中的**恒等变换**或称**单位变换** $\mathcal{E}$，即

$$\mathcal{E}(\alpha)=\alpha,\qquad \alpha\in V$$

以及**零变换** $\mathcal{O}$，即

$$\mathcal{O}(\alpha)=\vec{0},\quad \alpha\in V$$

都是线性变换.

例 4 设 V 是数域 P 上的线性空间，k 是 P 中某个数，定义 V 的变换如下：

$$\sigma:\ \alpha \to k\alpha$$

不难证明，这是一个线性变换，称为由数 k 决定的**数乘变换**，可用 $\mathcal{K}$ 表示. 即令

$$\mathcal{K}(\alpha) = k\alpha$$

显然，当 $k = 1$ 时，我们便得恒等变换，

当 $k = 0$ 时，便得零变换.

例 5 在线性空间 $P[x]$ 或者 $P[x]_n$ 中，求微商是一个线性变换．这个变换通常用 $\mathcal{D}$ 代表，即

$$\mathcal{D}\big(f(x)\big) = f'(x).$$

例 6 定义在闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成实数域上一线性空间，以 $C[a,b]$ 代表． 在这个空间中，变换

$$\mathcal{J}\big(f(x)\big) = \int_a^x f(t)dt$$

是一线性变换．

这是因为，对每个$f(x) \in C[a,b]$，

$$\mathcal{J}\big(f(x)\big) = \int_a^x f(t)dt$$

仍是闭区间$[a,b]$上的连续函数，从而还是属于$C[a,b]$．又$C[a,b]$中每个积分$\int_a^x f(t)dt\ (a \le x \le b)$都有意义.

而且

$$\mathcal{J}(f(x)+g(x))=\int_a^x[f(t)+g(t)]dt$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_a^x g(t)dt=\mathcal{J}(f(x))+\mathcal{J}(g(x))$$

对数k, $\mathcal{J}\big(kf(x)\big)=\int_a^x kf(t)dt=k\mathcal{J}\big(f(x)\big)$.

所以变换 $\mathcal{J}\big(f(x)\big)=\int_a^x f(t)dt$是$C[a,b]$上的线性变换.

例 7　镜象变换：R^2中每个向量关于过原点的直线 L 相对称的变换，记为 $\mathcal{T}$，即

$$\forall\ \alpha=\overrightarrow{OA}\in R^2,\quad \mathcal{T}(\alpha)=\alpha'=\overrightarrow{OB}$$

(如图 7 - 3 所示，其中 A、B对称于直线 L) 也是 R^2上的线性变换.

求镜象变换

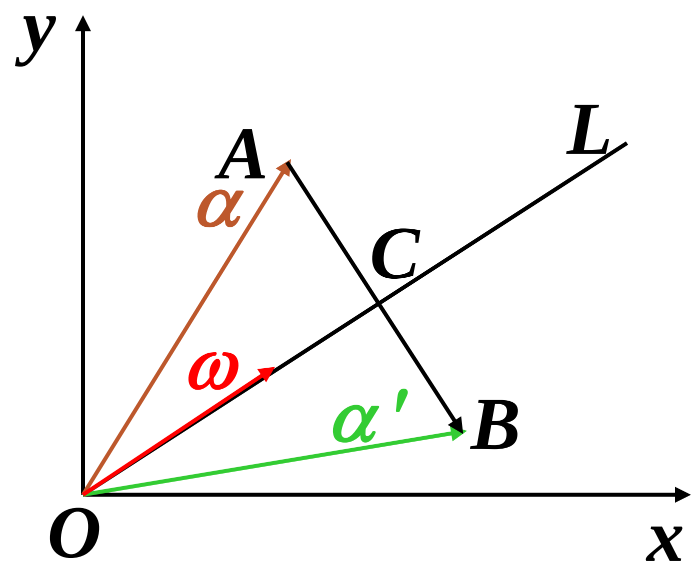
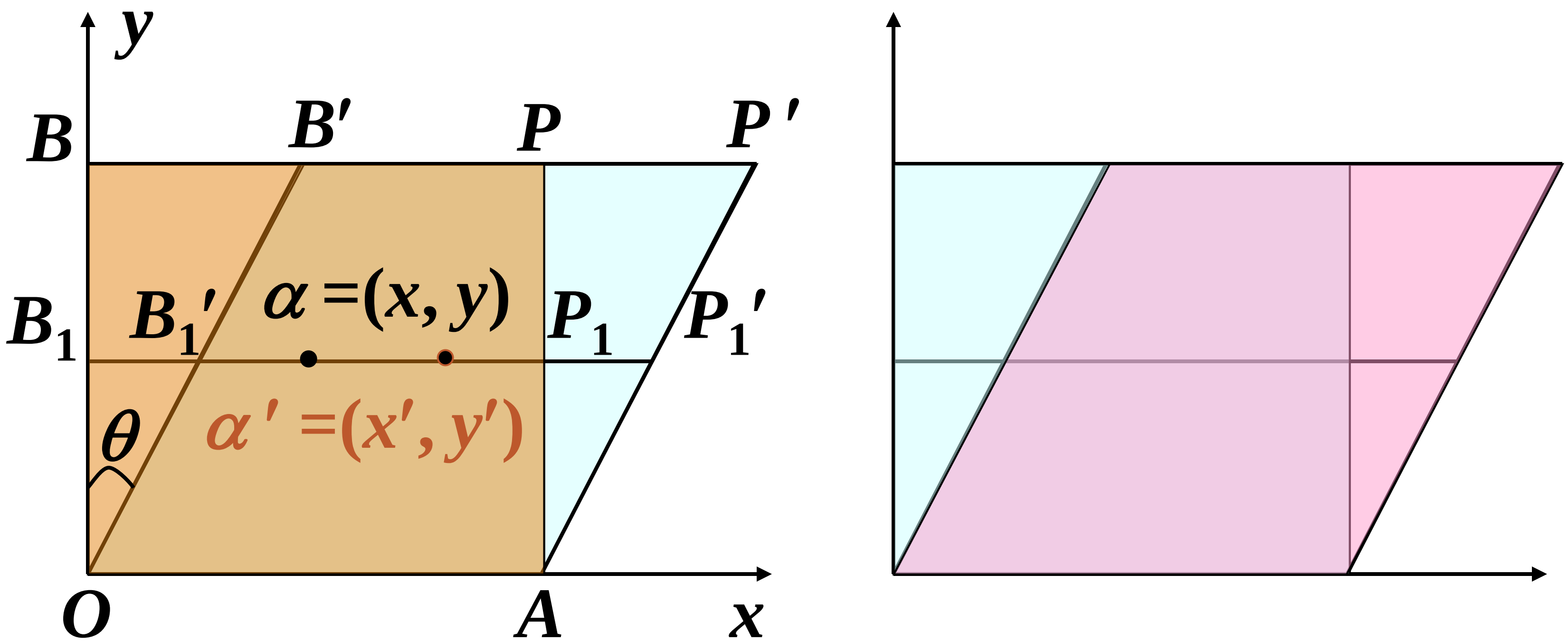


图 7 - 3

例 8　错切变换：把矩形 $OAPB$ 所围的平面区域变换为平行四边形 $OAP'B'$ 所围的平面区域的的变换，记为 Q，如图 7 - 4 所示.



求错切变换

图 7 - 4

四、性质

线性变换有以下三个简单性质：

性质 1 设 $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换，则

$$\mathcal{A}(\vec{0})=\vec{0}, \quad \mathcal{A}(-\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha).$$

证明 由线性变换的定义，可得

$$\mathcal{A}(\vec{0})=\mathcal{A}(0\cdot\alpha)=0\mathcal{A}(\alpha)=\vec{0},$$

$$\mathcal{A}(-\alpha)=\mathcal{A}((-1)\alpha)=(-1)\mathcal{A}(\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha).$$

性质 2　线性变换保持线性组合与线性关系式不变. 换句话说，如果 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性组合：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r ,$$

那么经过线性变换 $\mathcal{A}$ 之后，$\mathcal{A}(\beta)$ 是 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_r)$ 同样的线性组合：

$$\mathcal{A}(\beta) = k_1\mathcal{A}(\alpha_1) + k_2\mathcal{A}(\alpha_2) + \dots + k_r\mathcal{A}(\alpha_r) .$$

又如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 之间有关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0 ,$$

那么它们的像之间也有同样的关系

$$k_1\mathcal{A}(\alpha_1) + k_2\mathcal{A}(\alpha_2) + \ldots + k_r\mathcal{A}(\alpha_r) = 0 .$$

以上两点，根据定义不难验证，由此即得

性质 3　线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

但应该注意，性质 3 的逆是不对的，线性变换可能把线性无关的向量组也变成线性相关的向量组. 例如零变换就是这样.