第七章　线性变换

第六节　线性变换的值域与核

主要内容

- 定义
- 值域与核的性质
- A 的值域的结构
- A 的秩、零度与空间维数的关系
- 举例

一、定义

定义 11 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的一个线性变换，$\mathcal{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的**值域**，用 $\mathcal{A}V$ 表示. 所有被 $\mathcal{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的**核**，用 $\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$ 或 $Ker(\mathcal{A})$ 表示.

若用集合的记号则

$$\mathcal{A}V=\{\mathcal{A}\xi \mid \xi\in V\},$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})=\{\xi \mid \mathcal{A}\xi=0,\ \xi\in V\}.$$

二、值域与核的性质

性质　线性变换的值域与核都是 V 的子空间.

证明　由

$$\mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta = \mathscr{A}(\alpha + \beta),$$

$$k\mathscr{A}\alpha = \mathscr{A}(k\alpha),$$

可知，$\mathscr{A}V$ 对加法与数量乘法是封闭的，　同时，$\mathscr{A}V$是非空的，　因此 $\mathscr{A}V$ 是 V 的子空间.

由 $\mathscr{A}\alpha = 0$ 与 $\mathscr{A}\beta = 0$ 可知

$$\mathscr{A}(\alpha + \beta) = 0, \mathscr{A}(k\alpha) = 0.$$

这就是说，$\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$ 对加法与数量乘法是封闭的.

又因为 $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$，即$\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$

是非空的.　所以$\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$是 V 的子空间.

证毕

$\mathcal{A}V$ 的维数称为 $\mathcal{A}$ 的**秩**，$\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$ 的维数称为 $\mathcal{A}$ 的**零度**.

例 1 在线性空间 $P[x]_n$ 中，令

$$\mathcal{D}\big(f(x)\big) = f'(x)$$

则 $\mathcal{D}$ 的值域为 $P[x]_{n-1}$，$\mathcal{D}$ 的核为子空间 P.

三、$\mathcal{A}$ 的值域的结构

定理 11　设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基，在这组基下，$\mathcal{A}$ 的矩阵是 A，则

1) $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 是由基像组生成的子空间，

即 $$\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n).$$

2) $\mathcal{A}$的秩 = A 的秩.

证明 1) 设 ξ 是 V 的任一向量，可用基表示为

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

于是

$$\mathcal{A}\xi = x_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + x_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \cdots + x_n\mathcal{A}\varepsilon_n.$$

这个式子说明，$\mathcal{A}\xi \in L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n)$，因此 $\mathcal{A}V \subset L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n)$. 这个式子还表明基像组的线性组合还是一个像，也即

$$L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n) \subset \mathcal{A}V.$$

于是就有

$$\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n).$$

2) 根据 1)，$\mathcal{A}$ 的秩等于基像组的秩．另一方面，矩阵 A 是由基像组的坐标按列排列成的. 在前一章第八节中曾谈过，若在 n 维线性空间 V 中取定了一组基之后，把 V 的每一个向量与它的坐标对应起来，就得到了 V 到 P^n 的同构对应. 同构对应保持向量组的一切线性关系，因此基像组与它们的坐标组(即矩阵 A 的列向量组)有相同的秩.

证毕

四、$\mathscr{A}$ 的秩、零度与空间维数的关系

定理 12 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 则 $\mathscr{A}V$ 的一组基的原像及$\mathscr{A}^{-1}(\vec{0})$的一组基合起来就是 V 的一组基. 由此还有

$$\mathscr{A}\text{的秩} + \mathscr{A}\text{的零度} = n\,.$$

证明 设 $\mathscr{A}V$ 的一组基为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$，它们的原像为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$，$\mathscr{A}\varepsilon_i = \eta_i$，$i = 1, 2, \cdots, r$. 又取 $\mathscr{A}^{-1}(\vec{0})$的一组基为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_s$. 现在来

证明 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_s$为 V 的基．若有

$$l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + \cdots + l_r\varepsilon_r + l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + l_s\varepsilon_s = \vec{0}$$

用 $\mathcal{A}$ 去变它的两端的向量，得

$$l_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + l_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \cdots + l_r\mathcal{A}\varepsilon_r$$

$$+l_{r+1}\mathcal{A}\varepsilon_{r+1} + \cdots + l_s\mathcal{A}\varepsilon_s = \mathcal{A}\vec{0} = \vec{0}$$

因 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_s$ 属于$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$，故

$$\mathcal{A}\varepsilon_{r+1} = \mathcal{A}\varepsilon_{r+2} = \cdots = \mathcal{A}\varepsilon_s = \vec{0}$$

又 $\mathcal{A}\varepsilon_i = \eta_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$．于是上式就变成

$$l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_r\eta_r = \vec{0}$$

但 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是线性无关的，有

$$l_1=l_2=\cdots=l_r=0$$

于是等式

$$l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2+\cdots+l_r\varepsilon_r+l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s=\vec{0}$$

就变成

$$l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s=\vec{0}$$

又因为$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$是$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$的基也线性无关,

就有 $l_{r+1}=\cdots=l_s=0$

这就证明了$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\ \varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_s$是线性无关的.

再证 V 的任一向量 α 是

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s$$

的线性组合. 由$\eta_1 = \mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \eta_r = \mathcal{A}\varepsilon_r$是$\mathcal{A}V$ 的基，就有一组数

$$k_1, k_2, \cdots, k_r$$

使

$$\mathcal{A}\alpha = k_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + k_2\mathcal{A}\varepsilon_2 \cdots + k_r\mathcal{A}\varepsilon_r$$
$$= \mathcal{A}(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 \cdots + k_r\varepsilon_r)$$

于是

$$\mathcal{A}(\alpha - k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2 \cdots - k_r\varepsilon_r) = \vec{0}$$

即

$$\alpha - k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2 \cdots - k_r\varepsilon_r \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$$

又因为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_s$ 是$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$的基，必有一组数

$$k_{r+1}, k_{r+2}, \cdots, k_s$$

使

$$\alpha - k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2 \cdots - k_r\varepsilon_r = k_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s\varepsilon_s$$

于是就有

$$\alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 \cdots + k_r\varepsilon_r + k_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s\varepsilon_s$$

这就说明 α 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s$ 的线性组合.

也就证明了 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s$ 是 V 的一组基.

由 V 的维数为 n，知 $s = n$. 又 r 是 $\mathcal{A}V$ 的维数也即 $\mathcal{A}$ 的秩， $s - r = n - r$是$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$的维数，即 $\mathcal{A}$ 的零度. 因而

$$\mathcal{A} \text{ 的秩} + \mathcal{A} \text{ 的零度} = n .$$

证毕

易见, 若 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，则

(1) $\mathcal{A}$是单射的充分必要条件为 $\mathcal{A}^{-1}\left(\overrightarrow{\mathbf{0}}\right)=\left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$.

(2) $\mathcal{A}$是满射的充分必要条件为 $\mathcal{A}V=V$.

推论 对于有限维线性空间的线性变换，它是单射的充分必要条件为它是满射.

证明 显然，当且仅当 $\mathscr{A}V = V$，即 $\mathscr{A}$ 的秩为 n 时，$\mathscr{A}$ 是满射；另外，当且仅当$\mathscr{A}^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$ 即 $\mathscr{A}$ 的零度为 0 时，$\mathscr{A}$是单射，于是由上述定理即可得出结论. **证毕**

应该指出，虽然子空间 $\mathscr{A}V$ 与$\mathscr{A}^{-1}(\vec{0})$的维数之和为 n，但是$\mathscr{A}V + \mathscr{A}^{-1}(\vec{0})$并不是整个空间.

例如 在线性空间 $P[x]_n$中，令

$$\mathcal{D}\big(f(x)\big) = f'(x).$$

则 $\mathcal{D}$ 的值域为 $P[x]_{n-1}$，$\mathcal{D}$的核为子空间P. 若令 $V = P[x]_n$，则

$$\mathcal{D}V = P[x]_{n-1},$$

$$\mathcal{D}^{-1}\big(\vec{0}\big) = P$$

$\mathcal{D}$的秩为$n-1$，$\mathcal{D}$的零度为1，但

$$\mathcal{D}V + \mathcal{D}^{-1}\big(\vec{0}\big) = P[x]_{n-1} + P = P[x]_{n-1} \neq P[x]_n$$

五、举例

例 2 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在三维线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵，其中：

$$\eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3,$$

$$\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3,$$

$$\eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 和核 $\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$；

(3) 把 $\mathcal{A}V$ 的基扩充为 V 的基，并求$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵；

(4) 把$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$的基扩充为 V 的基，并求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵.

解：(1) 因为

$$\eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3,$$

$$\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3,$$

$$\eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

所以从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵 B 为

$$B = X^{-1}AX.$$

下面求矩阵 X 的逆.

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$B=X^{-1}AX$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(2) 由本节**定理 11** 及其证明知

$$\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \mathcal{A}\varepsilon_3)$$

$\mathcal{A}V$的维数等于矩阵 A 的维数，$\mathcal{A}V$的基的坐标即为矩阵 A 的列向量组的最大线性无关组. 求得 A 的列向量组的最大线性无关组为

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\xi_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$， $\xi_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$，

则 $\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \mathcal{A}\varepsilon_3) = L(\xi_1, \xi_2)$.

由核的定义：$\mathcal{A}^{-1}\left(\vec{0}\right)=\left\{\xi \middle| \mathcal{A}\xi=\vec{0}, \ \xi\in V\right\}$ 知，$\mathcal{A}^{-1}\left(\vec{0}\right)$的基由线性方程组 $AX=0$ 的基础解系构成. 下面求该方程组的基础解系

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

解得基础解系

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

令 $\xi=\varepsilon_1-2\varepsilon_2-3\varepsilon_3$，则 $\mathcal{A}^{-1}\left(\vec{0}\right)=L(\xi)$.

(3) 在(2)中已求得 $\mathcal{A}V$ 的基为

$$\xi_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\xi_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

若令

$$\zeta_1 = \varepsilon_1$$

$$\zeta_2 = \xi_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\zeta_3 = \xi_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

则可验证 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 线性无关，故它即为 V 的一组基. 下面再求 $\mathcal{A}$ 在基 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 下的矩阵.

因为

$$\zeta_1 = \varepsilon_1$$

$$\zeta_2 = \xi_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\zeta_3 = \xi_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

所以从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 的过渡矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 在基 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 下的矩阵 B 为

$$B = X^{-1}AX.$$

下面求矩阵 X 的逆.

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$B=X^{-1}AX$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & -2\end{pmatrix}.$$

(4) 在(2)中已求得 $\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$ 的基为

$$\xi = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$$

若令

$$\gamma_1 = \varepsilon_1$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_2$$

$$\gamma_3 = \xi = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$$

则可验证$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性无关，故它即为 V 的一组基. 下面再求 $\mathcal{A}$ 在基$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 下的矩阵.

因为

$$\gamma_1 = \varepsilon_1$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_2$$

$$\gamma_3 = \xi = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$$

所以从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$到基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 的过渡矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 在基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$下的矩阵 B 为

$$B = X^{-1}AX.$$

下面求矩阵 X 的逆.

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$$

所以

$$B=X^{-1}AX$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 3 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，$A^2=A$．证明 A 相似于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

证明　取一 n 维线性空间 V 以及 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$. 定义线性变换 $\mathcal{A}$ 如下：

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) A .$$

下面来证明，$\mathcal{A}$ 在一组适当的基下的矩阵是 (1) .

这样，由 定理 4 也就证明了所要的结论.

由 $A^2 = A$，可知 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 我们取 $\mathcal{A}V$ 的一组基为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$. 由

$$\mathcal{A}\eta_1 = \eta_1, \ldots, \mathcal{A}\eta_r = \eta_r ,$$

它们的原像也是 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$.

再取 $\mathcal{A}^{-1}(\vec{0})$ 的一组基为 $\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$. 由

定理 12 知: $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$是 V

的一组基. 在这组基下，$\mathcal{A}$ 的矩阵就是 (1) .

证毕