第 三 节　唯 一 性

主要内容

- 引例
- 复数域的情形
- 实数域的情形

一、引例

引例 二次型$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$的标准形.

这个二次型是上一节中的例 1，由此可知，二次型$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$经过非退化线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

变成的标准形为$f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2$.

可以验证，该二次型经过线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

就得到另一个标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2.$$

这就说明，在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，它与所作的非退化线性替换有关. 但有一点是肯定的，在一个二次型的标准形

中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的线性替换无关． 这是因为，经过非退化线性替换二次型的矩阵变成了一个与之合同的矩阵． 由第四章第四节 定理 4 可知，合同的矩阵具有相同的秩．这说明，经过非退化线性替换之后，二次型矩阵的秩是不变的．标准形的矩阵是对角矩阵，而对角矩阵的秩就等于它对角线上不为零的元素的个数． 这就证明了标准形中，系数不为零的

平方项的个数是唯一确定的. 于是，我们引入二次型秩的概念：

定义 5　　称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

在本节中，我们要讨论的问题是：在复数域和实数域中进一步研究二次型的唯一性问题.

二、复数域的情形

设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个复系数的二次型. 由本章 **定理 1** 经过一适当的非退化线性替换后，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$变成标准形. 不妨假设它的标准形为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,\qquad d_i\neq 0,i=1,2,\cdots,r,$$

其中r是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵的秩. 因为复数总可以开平方，所以我们再作一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

二次型$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$, $\quad d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r$就变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2.$$

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

上式称为复二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的**规范形**. 显然规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定，因此

定理 3 任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的.

定理 3 换个说法就是

定理 $3'$ 任一复数的对称矩阵合同于一个形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

的对角矩阵． 从而有，两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等．

二、实数域的情形

设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个实系数的二次型. 由本章 **定理 1**

经过一适当的非退化线性替换， 再适当排列文字的次序，可使

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$变成标准形

$$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

其中$d_i>0, i=1,2,\cdots,r$； r是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩. 因为在实数域中，正实数总可以开平方，所以再作一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

二次型$d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2$就变成

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

称之为实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**规范形**. 显然，规范形完全被r,p这两个数所决定. 对于实系数二次型的规范形，我们有如下定理:

定理 4（惯性定理） 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的.

证明: 定理的前一半在上面已经证明，下面就来证明唯一性.

设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经过非退化线性替换$X=BY$化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

而经过非退化线性替换$X=CZ$也化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

现在来证明$p=q$.

用反证法.　设$p>q$,

由以上假设，我们有

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

其中

$$Z=C^{-1}BY$$

令

$$C^{-1}B=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_2 = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases}$$

为了从等式

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

中找出矛盾，令$y_{p+1} = \cdots = y_n = 0$， $z_1 = \cdots = z_q = 0$，于是

可得关于$y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_n$的齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \cdots + g_{qn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0. \end{cases}$$

该方程组含有n个未知量，而含有

$$q + (n - p) = n - (p - q) < n$$

个方程，由第三章 定理 1 知它有非零解.

令$(y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_n)=(k_1,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots,k_n)$

是一个非零解. 显然

$$k_{p+1}=\cdots=k_n=0.$$

这时，等式

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

左边为$k_1^2+\cdots+k_p^2>0$. 而它的右边为

$$-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2<0,$$

这是一个矛盾，它说明假设$p>q$是不对的. 因此就有$p\leq q$.

同理可证$q\leq p$，从而$p=q$. 这就证明了规范形的唯一性.

定义 6 在实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范形中，正平方项的个数p称为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**正惯性指数**； 负平方项的个数$r-p$称为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**负惯性指数**； 它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**符号差**.

应该指出，虽然实二次型的标准形不是唯一的，但是由上面化成规范形的过程可以看出，标准形中系数为正的平方项的个数与规范形中正平方项的个数是一致的. 因此，惯性定理也可以叙述为：实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一确定的，它等于正惯性指数，而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数.

把上述关于二次型的规范形的结论，移置到矩阵上来，就是

定理 5 （1）任一复对称矩阵A都合同于一个下述形式的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 的个数 r 等于 A 的秩.

(2) 任一实对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中对角线上1的个数p及-1的个数$r-p$(r是矩阵的秩)都是唯一确定的，分别称为A的**正、负惯性指数**；它们的差$2p-r$称为A的**符号差**.