第八章 λ-矩阵

第七节　　矩阵的有理标准形

主要内容

- 定义
- 有理标准形的不变因子
- 矩阵的有理标准形
- 举例

一、定义

前一节中证明了复数域上任一矩阵 A 可相似于一个若尔当形矩阵. 这一节将对任意数域 P 来讨论类似的问题. 我们证明了 P 上任一矩阵必相似于一个有理标准形矩阵.

定义 8 对数域 P 上的一个多项式

$$d(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n ,$$

称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

为多项式 $d(\lambda)$ 的**伴侣阵**.

容易验证，A 的不变因子(即$\lambda E - A$的不变因子)

是

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1\text{个}}, d(\lambda).$$

定义 9 下列准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

其中 A_i 分别是数域 P 上某些多项式 $d_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) 的伴侣阵，且满足

$$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \ldots \mid d_s(\lambda) ,$$

就称 A 为 P 上的一个**有理标准形矩阵**.

二、有理标准形的不变因子

引理 (2) 中矩阵 A 的不变因子为 $1, 1, \ldots,$ $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$，其中 1 的个数等于 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$ 的次数之和 n 减去 s .

证明

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda E_1 - A_1 & & & \\ & \lambda E_2 - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_s - A_s \end{pmatrix}$$

由于每个$\lambda E_i - A_i$的不变因子为 $1, \dots, 1, d_i(\lambda)$，故可用初等变换把它变成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_i(\lambda) \end{pmatrix},$$

进而用初等变换将 $\lambda E - A$ 变成

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&&&&& \\ &&& d_1(\lambda) &&&&&&&&& \\ &&&& 1 &&&&&&&& \\ &&&&& 1 &&&&&&& \\ &&&&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&&&& d_2(\lambda) &&&&& \\ &&&&&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&&&& d_s(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3)$$

在 λ - 矩阵 (3) 上再进行一些行或列互换，则可变成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & & \\ & & & & d_2(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

由于 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \dots \mid d_s(\lambda)$，它是 $\lambda E - A$ 的标准形，

$1, 1, \dots, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_s(\lambda)$ 是它的不变因子.

证毕

三、矩阵的有理标准形

定理 14 数域 P 上 $n \times n$ 方阵 A 在 P 上相似于唯一的一个有理标准形，称为 A 的有理标准形.

证明 设 A 的 ($\lambda E - A$ 的) 不变因子为

$$1, 1, \ldots, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda),$$

其中 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$ 的次数≥ 1，且 1 的个数等于$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$ 的次数之和减去 s .

设 $d_i(\lambda)$ 的伴侣矩阵是 B_i，则作

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}.$$

则由引理，B 的不变因子与 A 的不变因子完全相同，故 B 相似于 A，即 B 是 A 的有理标准形.

又 B 是由 A 的不变因子唯一决定的，故 B 由 A 唯一决定.

证毕

把定理 14 的结论变成线性变换形式的结论就成为

定理 15 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间的线性变换，则在 V 中存在一组基，使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是有理标准形，并且这个有理标准形由 $\mathcal{A}$ 唯一决定，称为 $\mathcal{A}$ 的有理标准形.

四、举例

例 1 写出下列多项式的伴侣矩阵.

(1) $d_1(\lambda) = \lambda + 3$;

(2) $d_2(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 9$;

(3) $d_3(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 7$;

(4) $d_4(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 6$.

解:

(1) $A_1 = (-3)$;　　(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

例 2 求下列矩阵的有理标准形

(1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

解： （1）先求 A 的初等因子.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 8 & -30 & 14 \\ 6 & \lambda + 19 & -9 \\ 6 & 23 & \lambda - 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + 30\lambda - 8 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的不变因子是 $1, 1, \lambda^3 + 30\lambda - 8$.

有理标准形是$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -30 \end{pmatrix}$.

解： （2）先求 B 的初等因子.

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & \lambda-6 & 0 & -13\\ 0 & 3 & \lambda-1 & -3\\ 1 & -2 & 0 & \lambda-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda-1 & \\ & & & \lambda^3-15\lambda^2+33\lambda-19\end{pmatrix}.$$

所以不变因子为

$$1, 1, \lambda - 1, \lambda^3 - 15\lambda^2 + 33\lambda - 19.$$

若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$