总复习题

例 1 设两个多项式$f(x)$和$g(x)$不全为零，求证：对于任意的正整数n，有

$$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x)).$$

证明： 令$\big(f(x),g(x)\big)=d(x)$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则$\big(f_1(x),g_1(x)\big)=1.$

那么$\big(f_1^n(x),g_1^n(x)\big)=1.$

又因为$f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x)$，$g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x)$，

于是$(f^n(x),g^n(x))=d^n(x)=(f(x),g(x))^n.$ **证毕**

例 2 设$f(x)$是整系数多项式，若$g(x)=f(x)+1$至少有三个互不相等的整数根，证明：$f(x)$没有整数根.

证明：反证法. 假设$f(x)$有整数根m，则

$$f(x)=(x-m)h(x)$$

由于$x-m$是本原多项式，所以$h(x)$是整系数多项式，令x_1,x_2,x_3是$g(x)$的3个互不相等的整数根，则

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)p(x).$$

其中$p(x)$是整系数多项式，进而

$$g(m)=f(m)+1=(m-x_1)(m-x_2)(m-x_3)p(m).$$

于是$m-x_1, m-x_2, m-x_3, p(m)$只能是1或−1，那么$m-x_1, m-x_2,$ $m-x_3$中至少有两个同为1或−1，与x_1, x_2, x_3互不相等矛盾．所以$f(x)$没有整数根.

证毕

例 3 设$p(x)$是数域P上的次数大于零的多项式，证明：$p(x)$是不可约多项式的充分必要条件是对任意的$f(x),g(x)\in P(x)$，由$p(x)|f(x)g(x)$一定推出$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$.

证明： **充分性.** 反证法. 若$p(x)$不是一个不可约多项式，则$p(x)$可以分解成次数低于$p(x)$的两个多项式的乘积

$$p(x)=h_1(x)h_2(x),\qquad \partial\big(h_i(x)\big)<\partial\big(p(x)\big),\qquad i=1,2.\qquad (1)$$

令$f(x)=h_1(x)$，$g(x)=h_2(x)$，则有

$$p(x)|f(x)g(x)\Rightarrow p(x)|f(x)\text{或}p(x)|g(x).$$

这与假设(1)矛盾，所以$p(x)$是一个不可约多项式.

必要性. 如果$p(x)|f(x)$，结论显然成立.

如果$p(x)\nmid f(x)$，则$\left(p(x),f(x)\right)=1$，而$p(x)|f(x)g(x)$，所以

$$p(x)|g(x).$$

证毕

例 4 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是不同的整数，证明

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) + 1$$

在有理数域上不可约或是某一有理系数多项式的平方.

证明： 如果$f(x)$在有理数域上不可约，则结论成立.

如果$f(x)$在有理数域上可约，则$f(x)$可以写成两个次数比它低的整系数多项式的乘积，令为

$$f(x) = f_1(x)f_2(x), \qquad \partial\big(f_1(x)\big) < n, \qquad \partial\big(f_1(x)\big) < n$$

由$f(a_i) = 1, i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$f_1(a_i)f_2(a_i) = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

又$f_1(a_i), f_2(a_i) \in \mathbb{Z}$，于是

$$f_1(a_i) = f_2(a_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以$f_1(x) = f_2(x)$，因此$f(x) = f_1^2(x)$.

证毕

单选题 1分

设置

$A \in P^{m\times n}$，$AX = b$为一非齐次线性方程组，则必有

A 若$m < n$，则$AX = b$有非零解.

B 若$r(A) = m$，则$AX = 0$有非零解.

C 若A有n阶子式不为零，则$AX = b$有唯一解.

D 若A有n阶子式不为零，则$AX = 0$只有零解.

提交

单选题 1分

设置

已知β_1,β_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个不同的解，α_1,α_2是$AX=0$的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则方程组$AX=b$的通解（一般解）必是

A $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)$

B $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

C $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)$

D $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$

提交

例 5　设$A \in R^{m\times n}$，证明$rank(A) = rank(A^TA) = rank(AA^T)$.

证明：　1）$rank(A) = rank(A^TA)$.

只需证明方程$AX = 0$与$A^TAX = 0$同解即可.

显然，若x_0是$AX = 0$的解，则x_0必是$A^TAX = 0$的解．反之，若x_0是$A^TAX = 0$的解，则由$A^TAx_0 = 0 \Rightarrow x_0^T A^TAx_0 = 0$，即$(Ax_0)^TAx_0 = 0 \Rightarrow Ax_0 = 0$，即$x_0$为是$AX = 0$的解.

基于此，方程$AX = 0$与$A^TAX = 0$同解．它们的基础解系的个数完全相同．即$n - rank(A) = n - rank(A^TA)$，从而$rank(A) = rank(A^TA)$.

2） $rank(A)=rank(AA^T)$.

证明此式只需注意$rank(A)=rank(A^T)$.

对A^T用1) 的结论可得$rank(A)=rank(A^T)=rank(AA^T)$.

课后练习

设$A \in C^{m\times n}$，证明$rank(A) = rank\left(\overline{A}^{T}A\right) = rank\left(A\overline{A}^{T}\right)$.

例 6 设有线性方程组(I) $Ax=b$，其中$A\in R^{m\times n}$，$x\in R^n$为未知量，$b\in R^m$，

1） 写出方程组(I)有解的充要条件并给出证明.

2） 考察与方程组(I)相关的方程组(II) $A^TAx=A^Tb$. 证明方程组(II)必有解.

3） 证明：若方程组(I)有解，则方程组(II)与方程组(I)同解.

相关知识点：线性方程组有解判别定理、两个方程组同解

证明： 1) A的秩与增广矩阵$\overline{A}$的秩相等. 见第三章定理7.

2) 注意到线性方程组有解的充要条件为增广矩阵与系数矩阵同秩，故只需让(II)的增广矩阵与系数矩阵同秩，亦即证

$$rank[A^TA \mid A^Tb] = rank(A^TA) \qquad (*)$$

注意到

$$rank[A^TA \mid A^Tb] = rank\left(A^T[A \mid b]\right) \leq rank\left(A^T\right) = rank(A^TA) \qquad (**)$$

又$rank[A^TA \mid A^Tb] \geq rank(A^TA) \qquad (***)$

联合 (**) 与 (***) 即知 (*) 式成立.

3) 据题意，方程(I)有解． 设x_0为其解，则由$Ax_0=b$知$A^TAx_0=A^Tb$. 即x_0亦为(II)的解. 又因为方程(I)的导出方程$Ax=0$与方程(II)的导出方程$A^TAx=0$同解，因而两者具有相同的基础解系，设其基础解系为$\{\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}\}$，其中$r$为$A$的秩． 于是

(I)的全部解为$\eta=x_0+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ (△)

(II)的全部解为$\tilde{\eta}=x_0+h_1\xi_1+\cdots+h_{n-r}\xi_{n-r}$ (△△)

$k_1,\cdots,k_{n-r},h_1,\cdots,h_{n-r}$为任意实数．由(△)与(△△)即知(I)与(II)同解.

证毕

例 7　线性方程组$\begin{cases} \lambda x + 9y + 3z = 2, \\ -x + (\lambda - 1)y = \lambda, \\ 3x - y + z = -4, \end{cases}$　当λ取何值时方程组有

1) 唯一解，并求其解;

2) 无穷多解，并求出该非齐次线性方程组的一般解;

3) 无解.

相关知识点：线性方程组的解的三种可能情形，线性方程组解的判别定理

解： 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 9 & 3\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+21=(\lambda-3)(\lambda-7)$$

(1) 当$\lambda\neq 3,\lambda\neq 7$，方程组有唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{\lambda-3},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\lambda-2}{\lambda-3},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3\lambda-4}{\lambda-3}$$

(2) 当$\lambda=7$时,

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{rrr:r} 7 & 9 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} -1 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} -1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 51 & 3 & 51 \\ 0 & 17 & 1 & 17 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} -1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 17 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

秩$(\bar{A})$ = 秩(A)，得

$$\begin{cases} -x_1+6x_2=7 \\ 17x_2+x_3=17 \end{cases}$$

方程组的一个特解为$\alpha_0=(-7,0,17)^T$，导出组的基础解系为$\eta=(6,1,-17)^T$. 于是当$\lambda=7$时，方程组有无穷多解，一般解为

$$\alpha=\alpha_0+k\eta=\begin{pmatrix}-7\\0\\17\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}6\\1\\-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6k-7\\k\\-17k+17\end{pmatrix}.$$

(3) 当$\lambda=3$时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 9 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 1 & -4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 9 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1 & -4\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 15 & 3 & 11\\ 0 & 5 & 1 & 5\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right]$$

秩$(\bar{A})\neq$ 秩(A)，方程组无解.

课后练习 讨论a, b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有唯一解；无解；无穷多解，当有无穷多解时，求出通解.

例 8　1）设两n维向量组$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$和$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$同秩，且其中一个能为另一个线性表出，证明：这两个向量组等价.

2）设矩阵$A=[a_1a_2\cdots a_rb_1b_2\cdots b_s]$其中$a_i,b_j$为$n$维列向量，$i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,s$，　A经有限次初等行变换后成为阶梯形矩阵$\begin{bmatrix} E_r & B \\ 0 & O \end{bmatrix}$，其中$E_r$为$r$阶单位阵，$B$为$r\times s$阵，证明：向量组$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$与$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$等价的充要条件为$rank(B)=r$.

相关知识点：向量组等价、极大线性无关组、左（右）乘可逆矩阵秩不变

证明： 1）设两向量组为列向量组，根据题意该两向量组同秩，故其极大线性无关组向量个数相同. 设向量组$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$的极大线性无关组为$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$，向量组$\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$的极大线性无关组为$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}\}$. 不妨设$\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$可由$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$线性表出，则$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}\}$可由$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$线性表出，亦即

$$[b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}] = [a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}]\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & & P_{rr} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

注意到$\{b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_r}\}$为线性无关组，则矩阵$P$满秩.

下证P满秩.

a）$rank([b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_r}])=rank([a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}]P)=r$

则$rank([a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}]P)\le rank(P)$，由此得$rank(P)\ge r$.

其次$rank(P)\le r$.　两个不等式联合得$rank(P)=r$.

b）用反证法．若P降秩，则方程组$Px=0$有非零解．即有

$$\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{bmatrix}\neq 0\text{使得}P\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{bmatrix}=0 \qquad (\triangle)$$

$$[b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}] = [a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}] \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & & P_{rr} \end{bmatrix}$$

将(△)代入(*)式即有$[b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}] \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} = 0$, 与$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}\}$线性无关相矛盾. 故$P$满秩.

由P满秩，即据(*)式$[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}] = [b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}]P^{-1}$.

即向量组$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$可由$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}\}$线性表出，从而两个向量组$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$与$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}\}$等价. 又由于极大线性无关组与向量组等价. 故向量组$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$与$\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$等价.

2）由题设知，$P_m\cdots P_2P_1A=\begin{bmatrix}E_r & B\\ 0 & O\end{bmatrix}$，即$PA=\begin{bmatrix}E_r & B\\ 0 & O\end{bmatrix}$.

$A=[a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_s]$，　由$PA=\begin{bmatrix}E_r & B\\ 0 & O\end{bmatrix}$知有 (*)

$$P[a_1,\cdots,a_r]=\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (**)$$

$$P[b_1,\cdots,b_s]=\begin{bmatrix}B\\ O\end{bmatrix}. \qquad (***)$$

于是有$rank([a_1,\cdots,a_r])=rank\left(\begin{bmatrix}E_r\\ 0\end{bmatrix}\right)=rank(E_r)=r$ （△）

$$rank([b_1,\cdots,b_s])=rank\left(\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\right)=rank(B) \qquad （△△）$$

i）**必要性.** 若向量组$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$与$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$等价，则有

$$rank([a_1,\cdots,a_r])=rank([b_1,\cdots,b_s])$$

从而$rank(B)=r$.

i i）**充分性.** 若$rank(B)=r$，则向量组$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$与向量组$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$同秩. 下证$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$可由$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$线性表出.

注意到$P[b_1,\cdots,b_s]=\begin{bmatrix}B\\O\end{bmatrix}$，故有$[b_1,\cdots,b_s]=P^{-1}\begin{bmatrix}B\\O\end{bmatrix}$，

于是有$[b_1,\cdots,b_s]=P^{-1}\begin{bmatrix}E_r\\0\end{bmatrix}B=[a_1,\cdots,a_r]B$.

这就意味着向量组$\{b_1, \cdots, b_s\}$可由向量组$\{a_1, \cdots, a_r\}$线性表出． 又由两向量组同秩，联系第1)问可知两向量组等价.

证毕

例 9 设A是一个n阶方阵，A^*是它的伴随矩阵，如果存在n维非零列向量α，满足$A\alpha = 0$. 证明：非齐次线性方程组$A^*X = \alpha$有解当且仅当$rank(A) = n - 1$.

证明： **必要性.** 由齐次线性方程组$AX = 0$有非零解α，那么秩$(A) \le n - 1$. 又由$A^*X = \alpha$有解，知$A^* \ne O$，那么A中至少有一个$n-1$阶子式不为零，所以秩$(A) \ge n - 1$，因而$rank(A) = n - 1$.

充分性. 秩$(A) = n - 1$，而$\alpha \ne 0$，$A\alpha \ne 0$，那么α是齐次线性方程组$AX = 0$的一个基础解系，而$AA^* = O$，A^*的列向量是齐次

线性方程组$AX=0$的解，于是A^*的列向量可由α线性表示，那么

秩$(A^*)=$秩$(A^*,\alpha)=1$，所以$A^*X=\alpha$有解.

证毕

例 10 设$A \in P^{m\times n}$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是线性方程组$AX=0$的基础解系，$B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$. 证明：如果$AC=O$，那么存在唯一的矩阵$D$，使$C=BD$(其中$C \in P^{n\times t}$).

证明： **存在性.** 令$C=(C_1,C_2,\cdots,C_t)$

$$AC=A(C_1,C_2,\cdots,C_t)=(AC_1,AC_2,\cdots,AC_t)=(0,0,\cdots,0).$$

于是$AC_i=0, i=1,2,\cdots,t$，而$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$AX=0$的基础解系，那么$C_i$可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t}$线性表示，令

$$C_i = d_{1i}\eta_1 + d_{2i}\eta_2 + \cdots + d_{n-r,i}\eta_{n-r} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{n-r,i} \end{pmatrix}$$

于是

$$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-r,1} & d_{n-r,2} & \cdots & d_{n-r,t} \end{pmatrix}$$

$$= BD$$

唯一性. 假定还有$F \in P^{(n-r)\times t}$，使$C = BF$，又$C = BD$，于是$B(D - F) = O$，$D - F$的列向量是以B为系数矩阵的齐次线性方程组$BX = O$的解，而B是列满秩的. 于是$BX = O$只有零解，所以$D - F = O$，即$D = F$.

证毕

例 11 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&0&0&1\\-3&0&0&0\end{pmatrix}$$

求3阶可逆矩阵P，4阶可逆矩阵Q，使

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}Q.$$

相关知识点：化矩阵为标准形

解： 用初等变换将A化为标准形

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&0&0&1\\-3&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&0&0&1\\0&0&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由初等变换与初等矩阵之间的关系

$$P(3,2(-6))P(1,2(-2))P(3,1(3))AP(2,4)=B$$

于是

$$A=P(3,1(-3))P(1,2(2))P(3,2(6))BP(2,4)$$

其中

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}.$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 12 设$A \in P^{s\times n}$，证明：对任意矩阵$B \in P^{s\times m}$，矩阵方程$AX = B$有解的充要条件是$rank(A) = s$.（$rank(A)$表示矩阵A的秩）

证明： **必要性.** 取矩阵B，使$rank(B) = s$，则存在$X_0 \in P^{n\times m}$使$AX_0 = B$，则

$$rankA \geq rank(B) = s$$

而$A \in P^{s\times n}$，则$rankA \leq s$，从而$rankA = s$.

充分性. 令$B = (B_1, B_2, \cdots, B_m)$，对$n$元线性方程组$AX = B_j$，

$$rank(A) = rank\left(A, B_j\right) = s$$

方程组$AX=B_j$有解$x_j, j=1,2,\cdots,m$. 令$X_0=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，则X_0是矩阵方程$AX=B$的解.

证毕

例 13 A, B是n阶矩阵，证明：

（1）$r(A-ABA)=r(A)+r(E_n-BA)-n$;

（2）若$A+B=E_n$，且$r(A)+r(B)=n$，则$A^2=A$，$B^2=B$，且$AB=O=BA$.

相关知识点：矩阵分块、初等分块矩阵

证明：（1）法一：构造分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ O & E_n - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ BA & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ BA & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - ABA & O \\ BA & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A - ABA & O \\ BA & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -BA & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - ABA & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

于是$rank(A)+rank(E_n-BA)=rank\left[\begin{pmatrix} A & A \\ O & E_n-BA \end{pmatrix}\right]$

$$=rank\left[\begin{pmatrix} A-ABA & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\right]=rank(A-ABA)+rank(E_n)$$

因此$rank(A)+rank(E_n-BA)=rank(A-ABA)+n.$

法二：找到中间一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E_n & BA \\ A & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_n & BA \\ O & A-ABA \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & A-ABA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_n & BA \\ A & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_n-BA & O \\ A & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_n-BA & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

于是$rank(A-ABA)+n=rank(A)+rank(E_n-BA)$.

（2）**法一：**构造分块矩阵，由$A+B=E_n$，可知

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ O & B-B^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & B-B^2 \end{pmatrix}$$

于是$rank(A)+rank(B)=n+rank\left(B-B^2\right)=n$

因此$B^2=B$.　　由A与B的对称性知，$A^2=A$.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ A+B & B+AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ E_n & B+AB \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} E_n & B \\ O & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}$$

从而$AB = O$.　　由AB的对称性知，$BA = O$.

法二：利用1）的结论.

$$n = rank(A) + rank(B) = rank(A) + rank(E_n - A)$$

$$rank(A - A^2) = rank(A) + rank(E_n - A) - n = 0$$

所以$A^2 = A$. 同理可证其他等式.

课后练习　　设A是$s \times n$的实矩阵，证明：

$$r\left(E_n - A^T A\right) - r\left(E_n - AA^T\right) = n - s.$$

例 14 令A为n阶方阵，$A+E$可逆，且

$$f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$$

试证明：

1) $\big(E+f(A)\big)(E+A)=2E$;

2) $f\big(f(A)\big)=A$.

证明： 1）由已知条件可知

$$f(A)(E+A)=(E-A)$$

所以

$$[E+f(A)](E+A)=E+A+f(A)(E+A)$$
$$=E+A+E-A=2E$$

2）由1）可知

$$[E+f(A)]^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)\text{且}f(A)(E+A)=(E-A)$$

所以

$$
\begin{aligned}
f\big(f(A)\big) &= [E - f(A)][E + f(A)]^{-1} \\
&= [E - f(A)] \cdot \frac{1}{2}(E + A) \\
&= \frac{1}{2}(E + A) - \frac{1}{2} f(A)(E + A) \\
&= \frac{1}{2}(E + A) - \frac{1}{2}(E - A) = A.
\end{aligned}
$$

例 15 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}7 & 9\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

解:

$$X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}7 & 9\\ 4 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-5 & 9\\ 4 & -7\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-9 & 17\\ -7 & 12\end{pmatrix}.$$

例 16 设A为n阶正定矩阵，B为$n \times m$实矩阵，证明：如果秩$(B) = m$，则$B^T AB$为正定矩阵.

证明： 由于A正定，因此$B^T AB$是m阶实对称矩阵，设$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T \neq 0$. 且令$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$，其中$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$是矩阵$B$的列向量， 由于秩$(B) = m$，故$B$的列向量组线性无关，从而

$$BX = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m \neq 0.$$

但由于A为正定矩阵，故$(BX)^T A(BX) > 0$，即

$$X^T B^T ABX > 0$$

所以$B^T AB$为正定矩阵.

证毕

例 17 设对称矩阵$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$是正定的，证明：

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定的二次型.

证明： 记矩阵

$$C=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}$$

其中$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$.

因为B正定，从而可逆，因此作变换得到

$$C\begin{pmatrix} E_n & -B^{-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -B^{-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ y^T & -y^TB^{-1}y \end{pmatrix}$$

两边取行列式，得

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = |C| = -|B| \cdot y^T B^{-1} y = y^T(-|B|B^{-1})y$$

从B正定知$|B| > 0$，因此$|B|B$正定，因而$-|B|B$负定.

所以二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$负定.

练习 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是可逆的实对称矩阵，证明：二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的矩阵是A的伴随矩阵A^*.