



# 高等代数习题课

---

2023.03.21

# 01

# 多项式



例1

设两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，求证：对于任意的正整数n，有

$$(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$$

证明：令  $(f(x), g(x)) = d(x)$ ,

则  $f(x) = d(x)f_1(x)$ ,  $g(x) = d(x)g_1(x)$

则  $(f_1(x), g_1(x)) = 1$ .

那么  $(f_1^n(x), g_1^n(x)) = 1$ .

又因为  $f^n(x) = d^n(x)f_1^n(x)$ ,  $g^n(x) = d^n(x)g_1^n(x)$ .

于是  $(f^n(x), g^n(x)) = d^n(x) = (f(x), g(x))^n$ .

证毕



例1

设两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，求证：对于任意的正整数n，有

$$(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$$

证明：首先 $(f(x), g(x))^n | f^n(x), g^n(x)$ ,

又 $(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}) = 1$

故 $(\frac{f^n(x)}{(f(x), g(x))^n}, \frac{g^n(x)}{(f(x), g(x))^n}) = 1.$

$\exists u(x), v(x)$ 使  $u(x) \frac{f^n(x)}{(f(x), g(x))^n} + v(x) \frac{g^n(x)}{(f(x), g(x))^n} = 1$

$$u(x)f^n(x) + v(x)g^n(x) = (f(x), g(x))^n.$$

得到 $(f^n(x), g^n(x)) = (f(x), g(x))^n.$

证毕



**例2** 设 $f(x)$ 是整系数多项式，若 $g(x) = f(x) + 1$ 至少有三个互不相等的整数根，证明： $f(x)$ 没有整数根。

**证明：**反证法

假设 $f(x)$ 有整数根 $m$ ，则 $f(x) = (x - m)h(x)$

由于 $x - m$ 是本原多项式，所以 $h(x)$ 是整系数多项式，令 $x_1, x_2, x_3$ 是 $g(x)$ 的3个互不相等的整数根，则 $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)p(x)$ ，其中 $p(x)$ 是整系数多项式。

$$g(m) = f(m) + 1 = (m - x_1)(m - x_2)(m - x_3)p(m)$$

于是 $m - x_1, m - x_2, m - x_3, p(m)$ 只能是1或-1，那么 $m - x_1, m - x_2, m - x_3$ 中至少有两个同为1或-1，与 $x_1, x_2, x_3$ 互不相等矛盾，所以 $f(x)$ 没有整数根。

**证毕**



**例3** 设 $p(x)$ 是数域 $P$ 上的次数大于零的多项式，证明： $p(x)$ 是不可约多项式的充分必要条件是对任意的 $f(x), g(x) \in P(x)$ , 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$ 。

**证明：充分性 反证法**

若 $p(x)$ 不是一个不可约多项式，则 $p(x)$ 可以分解成次数低于 $p(x)$ 的两个多项式的乘积

$$p(x) = h_1(x)h_2(x), \quad \partial(h_i(x)) < \partial(p(x)), \quad i = 1, 2.$$

令  $f(x) = h_1(x), g(x) = h_2(x)$

则有  $p(x)|f(x)g(x) \Rightarrow p(x)|f(x)$  或  $p(x)|g(x)$ .

这与假设矛盾，所以 $p(x)$ 是一个不可约多项式.



**例3** 设 $p(x)$ 是数域 $P$ 上的次数大于零的多项式，证明： $p(x)$ 是不可约多项式的充分必要条件是对任意的 $f(x), g(x) \in P(x)$ , 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$ 。

**证明：必要性**

如果  $p(x)|f(x)$ ，结论显然成立。

如果  $p(x) \nmid f(x)$ ，则  $(p(x), f(x)) = 1$ ，而  $p(x)|f(x)g(x)$ ，所以 $p(x)|g(x)$ .

**证毕**



**例4** 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是不同的整数，证明：

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$$

在有理数域上不可约或某一种有理系数多项式的平方。

**证明：**如果 $f(x)$ 在有理数域上不可约，则结论成立。

如果 $f(x)$ 在有理数域上可约，则可以写成两个次数比它低的整系数多项式的乘积，令为

$$f(x) = f_1(x)f_2(x), \quad \partial(f_i(x)) < n, i=1,2.$$

由  $f(a_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $f_1(a_i)f_2(a_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

又  $f_1(a_i), f_2(a_i) \in \mathbb{Z}$ , 于是  $f_1(a_i) = f_2(a_i), i = 1, 2, \dots, n$ .

所以  $f_1(x) = f_2(x)$ , 因此  $f(x) = f_1^2(x)$ .

**证毕**



例5

证明： $x^d - 1|x^n - 1$  充要条件是  $d|n$ 。

证明：充分性

设  $d|n$ , 且  $n = qd$ , 则

$$x^n - 1 = (x^d)^q - 1 = (x^d - 1)(x^{(q-1)d} + x^{(q-2)d} + \cdots + 1)$$

故  $x^d - 1|x^n - 1$ .

必要性

设  $x^d - 1|x^n - 1$ ,  $n = qd + r, 0 \leq r < d$ ,  $r$  为余数.

则  $x^n - 1 = x^{qd+r} - 1 = (x^{qd} - 1)x^r + x^r - 1$ .

因为  $x^d - 1|x^n - 1$  且  $x^d - 1|x^{qd} - 1$ , 故  $x^d - 1|x^r - 1$ .

由于  $0 \leq r < d$ , 故  $r = 0$ , 即  $d|n$ .

证毕



例6

设 $m$ 为自然数，则 $g^m(x)|f^m(x)$ 的充要条件是 $g(x)|f(x)$ 。

证明：充分性显然，下证必要性。

设 $g(x)$ 的典型分解式为 $g(x) = bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$ ，其中 $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 为首项为1的彼此不同的不可约多项式，由 $g^m(x)|f^m(x)$ ，因而 $f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x) = ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x) \cdot p_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$$

得到  $p_1^{ml_1}(x)\cdots p_r^{ml_r}(x)|p_1^{mk_1}(x)\cdots p_r^{mk_r}(x) \cdot p_{r+1}^{mk_{r+1}}(x)\cdots p_s^{mk_s}(x)$ .

故  $p_i^{ml_i}(x)|p_i^{mk_i}(x)$

得到  $l_i \leq k_i, i = 1, 2, \dots, r$ .

故  $g(x)|f(x)$ .

证毕



**例7 证明:**  $(f(x), g(x)) = 1$  充要条件是  $(f(x^m), g(x^m)) = 1$ ,

这里  $m$  为自然数。

**证明: 必要性**

由  $(f(x), g(x)) = 1$  可知存在  $u(x), v(x)$  使得  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ .

则  $u(x^m)f(x^m) + v(x^m)g(x^m) = 1$ .

所以  $(f(x^m), g(x^m)) = 1$ .

**充分性 反证法**

设  $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$ , 有  $f(x) = d(x)f_1(x), g(x) = d(x)g_1(x)$

故  $f(x^m) = d(x^m)f_1(x^m), g(x^m) = d(x^m)g_1(x^m)$ .

故  $d(x^m)|f(x^m), d(x^m)|g(x^m)$

与  $(f(x^m), g(x^m)) = 1$  矛盾, 因而结论成立.

**证毕**



**例8** 设 $f(x)$ 为 $n$ 次复系数多项式，且 $f(0) = 0$ ，令 $g(x) = xf(x)$ ，若 $f'(x)|g'(x)$ ，则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。

**证明：** $f(x) = 0$ ，则结论成立，下设 $f(x) \neq 0$ 。

因为 $g(x) = xf(x)$ ，故 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。

由 $f'(x)|g'(x)$ ，可得 $f'(x)|f(x)$

故 $f(x) = a_0(x - a)^n$ ,  $a_0 \neq 0$ .

又 $f(0) = a_0(-a)^n = 0$ .

故 $a = 0$ ,  $f(x) = a_0x^n$ ,  $g(x) = a_0x^{n+1}$ ,  $g(x)$ 有 $n+1$ 重根。

**证毕**



**例9** 设 $f(x) = x^p + p + 1$ , 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

**证明:** (1)  $p = 2$ 时,  $f(x) = x^2 + 3$ , 由Eisenstein判别法知在有理数域上不可约。

(2)  $p > 2$ 时,  $p$ 为奇素数, 令 $x = y - 1$

$$\begin{aligned}f(x) &= (y - 1)^p + p + 1 = y^p + C_p^1 y^{p-1} + \cdots - C_p^{p-1} y + (-1)^p + p + 1 \\&= y^p + C_p^1 y^{p-1} + \cdots - C_p^{p-1} y + p\end{aligned}$$

由Eisenstein判别法知在有理数域上不可约。

**证毕**



**例10** 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ ,  $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ ,

求 $(f(x), g(x))$ , 并求出 $u(x), v(x)$ 使 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 。

**解:** 用辗转相除法可得 $q_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$ ,  $r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}$ ,

$$q_2(x) = -\frac{27}{5}x + 9, r_2(x) = 9x + 27, q_3(x) = -\frac{5}{81}x - \frac{10}{81}, r_3(x) = 0.$$

即 $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ ,  $g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$ ,  $r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x)$ .

所以 $r_2(x) = 9x + 27$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式.

于是 $(f(x), g(x)) = x + 3$ 。

由 $\begin{cases} f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \end{cases}$  可得

$$r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x) = g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)]$$

$$= -q_2(x)f(x) + (1 + q_1(x)q_2(x))g(x) = \left(\frac{27}{5}x - 9\right)f(x) + \left(-\frac{9}{5}x^2 + \frac{18}{5}\right)g(x)$$

令 $u(x) = \frac{3}{5}x - 1$ ,  $v(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$ 就有 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .



# 02

# 线性变换



**例** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

- (1)  $A$ 与 $B$ 的特征向量是公共的；
- (2)  $A$ 相似于对角矩阵，当且仅当 $B$ 相似于对角矩阵；
- (3)  $r(A) = r(B)$ 。



**例** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

(1)  $A$ 与 $B$ 的特征向量是公共的；

**证明：**(1) 设 $\alpha$ 为 $B$ 的特征向量，对应的特征值为 $\lambda_0$ ，而 $B\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \neq 0$ .

故 $A\alpha + B\alpha + AB\alpha = 0 \Rightarrow A\alpha + \lambda_0\alpha + \lambda_0A\alpha = 0 \Rightarrow (\lambda_0 + 1)A\alpha = -\lambda_0\alpha$ .

若 $\lambda_0 \neq -1$ ，则 $A\alpha = -\frac{\lambda_0}{(\lambda_0+1)}\alpha$ ， $\alpha$ 为 $A$ 的特征向量.

若 $\lambda_0 = 1$ ，而 $B\alpha = -\alpha$ 得 $-\alpha = 0$ ， $\alpha = 0$ 矛盾.

因为 $A + B + AB = 0$ ，

所以 $(A + E) + (A + E)B = E \Rightarrow (A + E)(E + B) = E$ .

故 $(E + B)(A + E) = E, A + BA + A = 0$ .

由上证明 $A$ 得特征向量也是 $B$ 的特征向量，

因而 $A$ 与 $B$ 的特征向量是公共的.



**例** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

- (1)  $A$ 与 $B$ 的特征向量是公共的；
- (2)  $A$ 相似于对角矩阵，当且仅当 $B$ 相似于对角矩阵；

**(2) 必要性**

由 $A$ 相似于对角矩阵，因而存在可逆矩阵 $T$ 使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow AT = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 则 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n.$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1}B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

所以 $B$ 相似于对角矩阵  
**充分性** 同上证明。



**例** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A + B + AB = 0$ ，则

- (1)  $A$ 与 $B$ 的特征向量是公共的；
  - (2)  $A$ 相似于对角矩阵，当且仅当 $B$ 相似于对角矩阵；
  - (3)  $r(A) = r(B)$ 。
- (3) 由 $A + B + AB = 0$ 可得 $A(E + B) = -B$ .

则 $r(A) \geq r(B)$

同样 $(E+A)B=-A$ 可得 $r(B) \geq r(A)$ .

所以 $r(A) = r(B)$

**证毕**





感谢观看