第七节　多项式函数

主要内容

- 定义
- 性质

一、定义

直到现在为止，我们始终是纯形式地讨论多项式，也就是把多项式看作形式的表达式．在这一节我们将从另一个观点，即函数的观点来考察多项式

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

是 $P[x]$ 中的多项式，α 是 P 中的数，在 (1) 中用 α 代 x 所得的数

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0$$

称为 $f(x)$ **当 $x = \alpha$ 时的值**，记为 $f(\alpha)$． 这样一来，多项式 $f(x)$ 就定义了一个数域 P 上的函数. 可以由一个多项式来定义的函数称为数域 P 上的**多项式函数.** 当 P 是实数域时，这就是数学分析中所讨论的多项式函数.

因为 x 在与数域 P 中的数进行运算时适合与数的运算相同的运算规律，所以不难看出，如果

$$h_1(x) = f(x) + g(x),$$

$$h_2(x) = f(x)\,g(x),$$

那么

$$h_1(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha),$$

$$h_2(\alpha) = f(\alpha)\,g(\alpha),$$

下面来讨论多项式函数的性质.

二、性质

利用带余除法，我们得到下面常用的定理：

定理 7 (余数定理) 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

证明 用 $x-\alpha$ 去除 $f(x)$，设商为 $q(x)$，余式为一常数 c，于是 $f(x)=(x-\alpha)q(x)+c$.

以 α 代 x，得

$$f(\alpha)=c.$$

证毕

如果 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 时函数值 $f(\alpha)=0$，那么 α 就称为 $f(x)$ 的一个**根**或**零点**.

由余数定理我们得到根与一次因式的关系：

推论 α 是 $f(x)$ 的根的充分必要条件是

$$(x-\alpha)\mid f(x).$$

由这个关系，我们可以定义重根的概念. α 称为 $f(x)$ 的 k 重根，如果 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式. 当 $k=1$ 时，α 称为**单根**；当 $k>1$ 时，α 称为**重根**.

定理 8 $P[x]$ 中 n 次多项式 $(n \geq 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

证明 对零次多项式定理显然成立.

设 $f(x)$ 是一个次数 > 0 的多项式. 把 $f(x)$ 分解成不可约多项式的乘积. 由上面的推论与根的重数的定义，显然 $f(x)$ 在数域 P 中根的个数等于分解式中一次因式的个数，这个数目当然不超过 n.

在上面我们看到，每个多项式函数都可以由一个多项式来定义. 不同的多项式会不会定义出相同的函数呢？这就是问，是否可能有

$$f(x) \neq g(x),$$

而对于 P 中所有的数 α 都有

$$f(\alpha) = g(\alpha)\ ?$$

由**定理 8** 不难对这个问题给出一个否定的回答.

定理 9 如果多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的次数都不超过 n ，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ 有相同的值，即

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

那么 $$f(x) = g(x).$$

证明 由定理的条件，有

$$f(\alpha_i) - g(\alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

这就是说，多项式 $f(x) - g(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根.

如果 $f(x)-g(x)\neq 0$，那么它就是一个次数不超过 n 的多项式，由 **定理 8** 它不可能有 $n+1$ 个根.

因此，$f(x)=g(x)$.

证毕

因为数域 P 中有无穷多个数，所以**定理 9** 说明了，**不同的多项式定义的函数也不相同.** 如果两个多项式定义相同的函数，就称为恒等，上面的结论表明，多项式的恒等与多项式相等实际上是一致的．换句话说，数域上的多项式既可以作为形式

表达式来处理，也可以作为函数来处理．但是应该指出，考虑到今后的应用与推广，多项式看成形式表达式要方便些．