

复习题

例 1. 在 $P[x]_3$ 中，选定一组基

$$\alpha_1 = -x^2 + x + 1, \alpha_2 = 2x^2 + x + 1, \alpha_3 = 2x^2 - x$$

及另一组基

$$\beta_1 = 2x + 2, \beta_2 = x^2 + x + 2, \beta_3 = x^2 + 1$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

解：假设过渡矩阵 T

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1, x, x^2) A$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, x, x^2) B$$

由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, x, x^2) A$ 可知

$$(1, x, x^2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A^{-1}$$

则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A^{-1} B$

则 $T = A^{-1}B$.

求得 A 的逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2 设 P 是一个数域，在 P^4 内给出三个向量组，其中

$$(1) \alpha_1 = (1, -1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0, 0),$$

$$(2) \beta_1 = (0, 0, 1, -1), \beta_2 = (0, 0, 2, 0),$$

$$(3) \gamma_1 = (1, 1, 1, 1), \gamma_2 = (1, 2, 1, 2),$$

它们分别生成三个子空间 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$,

$W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, $W_3 = L(\gamma_1, \gamma_2)$.

(1) 判断 $W_1 + W_2$ 是否直和; (2) 判断 $W_1 + W_2 + W_3$ 是否直和.

解: (1) $W_1 + W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, 对
 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \beta_1^T, \beta_2^T)$ 作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

则秩($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$) = 4, 则 $W_1 + W_2$ 为直和.

$$(2) \quad W_1 + W_2 + W_3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

对 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \beta_1^T, \beta_2^T, \gamma_1^T, \gamma_2^T)$ 作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则秩($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$) = 4,

即维数($W_1 + W_2 + W_3$) \neq 维数(W_1) + 维数(W_2) +
维数(W_3), $W_1 + W_2 + W_3$ 不是直和.

例 3 设 A 为 n 阶复数矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, λ 是 A 的一个特征值, α 是 A 的对应于 λ 的一个特征向量. 证明: 存在数 μ , 使 μ 是 A^* 的一个特征值且使 α 是 A^* 对应于 μ 的一个特征向量(按 $\lambda \neq 0, \lambda = 0$. 当 $\lambda = 0$ 时, 按 0 为单根及重根等情况予以讨论.)

证明: (1) 当秩(A) = n , 则 $\lambda \neq 0$, $A\alpha = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$, 于是,

$$A^*A\alpha = A^*\lambda\alpha = |A|\alpha$$

那么

$$A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

于是

$$\mu = \frac{|A|}{\lambda}.$$

(2) 当秩(A) = $n - 1$, 那么秩(A^*) = 1, 0 是 A 的特征值且 0 是单根, 那么存在 $\alpha \neq 0$, 使

$$A\alpha = 0\alpha = \vec{0}$$

于是 A^* 的列向量都是 $AX = 0$ 的非零解, 令 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则 α 是 $AX = 0$ 的一个基础解系, 又

$$AA^* = |A| = 0$$

于是 A^* 的列向量都是 $AX = 0$ 的解, 不妨令

$$A^* = (c_1\alpha, c_2\alpha \cdots, c_n\alpha)$$

$$= (\alpha, \alpha \cdots, \alpha) \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

那么

$$A^*\alpha = (\alpha, \alpha \cdots, \alpha) \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha, \alpha \cdots, \alpha) \begin{pmatrix} c_1 a_1 \\ c_2 a_2 \\ \vdots \\ c_n a_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n c_i a_i \right) \alpha$$

于是 $\mu = \sum_{i=1}^n c_i a_i$.

(3) 当秩(A) < $n - 1$, 则 $A^* = 0$, $\mu = 0$.

例 4 设 A 为 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 A 的特征值和特征向量；
- (2) 求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：由(1) $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1}(\lambda - n) = 0$, 得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = n.$$

将 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$ 解得 $-AX = 0$.

即 $AX = 0$, 它与 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 同解, 于是
属于特征值 0 的全部特征向量为

$$c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + \cdots + c_n \xi_n \quad (c_2, c_3, \dots, c_n \text{ 不全为 } 0)$$

其中 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

再解 $(nE - A)X = 0$ 解得 $\xi_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是它的基础解系. 属于特征值 n 的全部特征向量为 $c_1 \xi_1$, $c_1 \neq 0$.

(2) 令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = diag(n, 0, 0, \dots, 0)$.

例 5 设 V 为数域 P 上字母 x 的次数小于 n 的全体多项式与零多项式构成的向量空间，定义 V 上线性变换

$$\sigma(f(x)) = xf'(x) - f(x)$$

(1) 求 σ 的核 $\sigma^{-1}(\vec{0})$ 与值域 $\sigma(V)$ ；

(2) 证明： $V = \sigma^{-1}(\vec{0}) \oplus \sigma(V)$.

解：(1) $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，那么 σ 的值域

$$\begin{aligned}\sigma(V) &= L(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2), \dots, \sigma(x^{n-1})) \\&= L(-1, x^2, 2x^3, \dots, (n-2)x^{n-1}) \\&= L(1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1})\end{aligned}$$

容易证明，这 $n - 1$ 个生成元是线性无关，

$$\dim \sigma(V) = n - 1.$$

因为 $\dim \sigma^{-1}(\vec{0}) + \dim \sigma(V) = \dim V = n$.

于是 $\dim \sigma^{-1}(\vec{0}) = 1$, 而 $\sigma(x) = 0$, 于是

$$\sigma^{-1}(\vec{0}) = L(x).$$

(2) $\forall f(x) \in \sigma^{-1}(\vec{0}) \cap \sigma(V)$, 则

$$f(x) = a_1x = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

那么

$$a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} = 0,$$

于是 $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0, f(x) = 0$, 因此

$$\sigma^{-1}(\vec{0}) \cap \sigma(V) = \{\vec{0}\}.$$

所以

$$V = \sigma^{-1}(\vec{0}) \oplus \sigma(V).$$

例 6. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$, (1) 求 A 的不变因子; (2) 求 A 的初等因子; (3) 求 A 的若尔当标准形 J ; (4) 求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = J$.

解：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ 5 & \lambda - 21 & -17 \\ -6 & 26 & \lambda + 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 \\ 5 & \lambda - 4 & -17 \\ -6 & -\lambda + 5 & \lambda + 21 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 \\ 5 & \lambda - 4 & -17 \\ -1 & 1 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda + 4 \\ 5 & \lambda - 4 & -17 \\ \lambda + 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & \lambda + 1 & 5\lambda + 3 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 & \lambda^2 + 5\lambda + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 5\lambda + 3 \\ 0 & \lambda + 1 & \lambda^2 + 5\lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 5\lambda + 3 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \frac{1}{2}(\lambda + 1)\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^2(\lambda + 1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

所以 A 的不变因子为 $1, 1, \lambda^2(\lambda + 1)$. A 的初等因子

为 $\lambda^2, \lambda + 1$. A 的若尔当标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

因为 $T^{-1}AT = J$, 所以 $AT = TJ$, 假设 $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

则有 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (0, \alpha_1, -\alpha_3)$.

解下列方程 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = \alpha_1, (A + E)\alpha_3 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 12 \\ 0 & -20 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$(A, \alpha_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 & -3 \\ 6 & -26 & -21 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 22 & 17 \\ 6 & -26 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

求得 $T = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1 \\ -3 & -1/2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 使得 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

练习 设准对角形 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,
 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

- (1) 求 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式因子, 不变因子, 初等因子以及它的标准形;
- (2) 求 A 的若尔当标准形 J ;
- (3) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$.

例 7 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

的若尔当标准形 ($a_1 \neq 0$).

解法一：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$. 下面分情况讨论:

(i) 当 $a_2 \neq 0$ 时, 则 $\lambda E - A$ 中存在一个3阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} = (\lambda - a_1)^3$$

以及另一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = -a_2^3 - (\lambda - a_1)(a_2a_3 + a_3^2 - a_2a_4)$$

显然两个3阶子式的公因式为1，则3阶行列式因子
 $D_3 = 1$ ，从而 $D_1 = D_2 = D_3 = 1$ ， $D_4 = (\lambda - a_1)^4$ ，
初等因子为 $(\lambda - a_1)^4$ ，此时若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(ii) 当 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 时, 则 $\lambda E - A$ 中存在一个2阶

子式为 $\begin{vmatrix} -a_3 & -a_4 \\ 0 & -a_3 \end{vmatrix} = a_3^2$, 则 $D_2 = 1$,

而3阶行列式因子为 $D_3 = (\lambda - a_1)^2$, $D_4 = (\lambda - a_1)^4$

从而不变因子为 $1, 1, (\lambda - a_1)^2, (\lambda - a_1)^2$, 初等因子

为 $(\lambda - a_1)^2, (\lambda - a_1)^2$, 若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iii) 当 $a_2 = a_3 = 0, a_4 \neq 0$ 时, 则 $\lambda E - A$ 中 1 阶行列式因子 $D_1 = 1$, 2 阶行列式因子 $D_2 = \lambda - a_1$,
 3 阶行列式因子 $D_3 = (\lambda - a_1)^2$, 4 阶行列式因子等于 $|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$.

故不变因子为 $1, \lambda - a_1, \lambda - a_1, (\lambda - a_1)^2$. 初等因子为 $\lambda - a_1, \lambda - a_1, (\lambda - a_1)^2$. 若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iv) 当 $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ 时, 则 $A = a_1 E$.

此时若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

解法二：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$. 下面分情况讨论:

- (i) 当 $a_2 \neq 0$ 时, 秩($a_1 E - A$) = 3, A 的若尔当标准形由1个Jordan块组成.

$$A \sim J = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(ii) 当 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 时, 则秩 $(a_1E - A) = 2$, 则 A 的若尔当标准形由2个Jordan块组成, 且 $(a_1E - A)^2 = 0$, 那么这两个Jordan块都是2阶的, 因此

$$A \sim J = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iii) 当 $a_2 = a_3 = 0, a_4 \neq 0$ 时, 则秩 $(a_1E - A) = 1$, 则 A 的若尔当标准形由3个Jordan块组成, 2个1阶的, 1个2阶的. 因此

$$A \sim J = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iv) 当 $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ 时, 则 $A = a_1 E$. $a_1 E$ 就是 A 的若尔当标准形.

例 8 设 F^3 的线性变换:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F^3$$

(1) 求 $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的像在基 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标;

(2) 求一组新基, 使在该基下 f 的矩阵是 Jordan 标准形.

解: (1) 由题意, 易知 $f(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解得 $f(\alpha)$ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的坐标为 $(1, 1, 2)$.

(2) 令 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) A \end{aligned}$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3$, 于是 $\lambda = 1$ 是 A 的三重特征值,
而秩 $(E - A) = 1$, 则属于特征值1有两个线性无关的
特征向量, 因此 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么存在可逆矩阵 P , 使得 $AP = PJ$, 令 $P = (P_1, P_2, P_3)$, 则

$$\begin{cases} AP_1 = P_1 \\ AP_2 = P_2 \\ AP_3 = P_2 + P_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (E - A)P_1 = O \\ (E - A)P_2 = O \\ (E - A)P_3 = -P_2 \end{cases}$$

属于特征值1的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

令 $P_1 = \xi_1, P_2 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

$$(E - A, -P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1 - k_2 \\ -2 & 2 & 2 & -k_1 \\ 1 & -1 & -1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1 - k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 + 2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 - 2k_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1 - k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 + 2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $k_2 = 1$, 则 $k_1 = -2$, 于是

$$P_2 = \xi_1 - 2\xi_2 = (-1, -2, 1)^T$$

把 P_2 代入 $(E - A)P_3 = -P_2$, 解得 $P_3 = (1, 1, 1)^T$.

因此, P_1, P_2, P_3 就是所求的一组基, 使 f 在这组基下的矩阵是 J .

注: 如果直接将 ξ_1, ξ_2 代入 $(E - A)X = -\xi$, 则此方程组无解, 因此需要选择适当的 k_1, k_2 使得 $P_2 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 从而 $(E - A)X = -P_2$ 有解.

矩阵可对角化的判断方法：

(1) 秩方法：首先求出特征多项式的特征根，对于 k 重特征值 $\lambda_i (k \geq 1)$ ，检验条件

$$r(A - \lambda_i I) = n - k$$

是否满足。只有当所有重特征值都满足上述条件，才能判断 A 可对角化。

(2) 不变因子法（初等因子法）：检验 A 的不变因子 $d_n(\lambda)$ 是否有重根。

例 9 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可对角化?

提示: A 的全部特征值为 $\{1,2,2\}$, $r(A - 2E) = 1$,
 A 可对角化.

例 10 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的可对角化的条件?

解: 可以直接看出 A 的全部特征值为 $\{1, 1, 2, 2\}$.

因为

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix}$$

可知 $r(A - E) = 2 \Leftrightarrow a = 0$;

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix}$$

同理可知 $r(A - 2E) = 2 \Leftrightarrow f = 0$.

因此， A 可对角化 $\Leftrightarrow a = 0, f = 0$.

例 11 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 可对角化, 2是 A 的2重特征值, 求矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形.

解: 设 A 的特征值为 $\{2, 2, \lambda_3\}$, 则由

$$4 + \lambda_3 = \text{tr}A = 10$$

可得 $\lambda_3 = 6$. 可对角化意味着 $r(A - 2E) = 3 - 2 = 1$,

于是由 $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a & 2 & b \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a-2 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $a = 2, b = -2$. 由以上结果可以看出

$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1, 0)^T$ 是 $(A - 2E)x = 0$

的基础解系. 其次求出 $(A - E)x = 0$ 的一个解是

$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$, 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

则必 $P^{-1}AP = diag(2, 2, 6)$.

例 12 设 A 为数域 P 上的一个 n 阶方阵，且满足

$A^2 = A$ ，证明： A 与对角矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

相似。

证明一： 设 A 的若尔当标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

即有可逆矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = J$.

由于 $A^2 = A$, 故

$$J^2 = (Q^{-1}AQ)^2 = Q^{-1}A^2Q = Q^{-1}AQ = J$$

从而 $J_i^2 = J_i, i = 1, 2, \dots, s$.

或即

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & & & \\ 2\lambda_i & \lambda_i^2 & & \\ 1 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \lambda_i^2 \\ & & 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 J_i 是一阶矩阵时上式成立，且 $\lambda_i^2 = \lambda_i$.

故得 $\lambda_i = 1$ 或 $\lambda_i = 0$.

从而 J 为一个对角矩阵，且主对角线上元素只能是1或0. 适当调换 J 中主对角线上元素次序，可得方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

仍与 A 相似.

证明二： 取 V 为数域 P 上的一个 n 维线性空间.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为其一组基. 令线性变换 \mathcal{A} 在此基下的矩阵为 A , 则由于 $A^2 = A$, 故 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 由小测题可知,

$$V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}\{\mathbf{0}\}$$

分别取 $\mathcal{A}V$ 与 $\mathcal{A}^{-1}\{\mathbf{0}\}$ 的基为 η_1, \dots, η_r 与 $\eta_{r+1}, \dots, \eta_n$, 则两者合起来便是 V 的一组基. 于是

$$\mathcal{A}\eta_i = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

$$\mathcal{A}\eta_i = \mathbf{0}, \quad i = r + 1, r + 2, \dots, n.$$

即 \mathcal{A} 在基 η_1, \dots, η_n 下的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由于 A 与 C 为线性变换 \mathcal{A} 在不同基下的矩阵，故 A 与 C 相似。

证明三： 设 A 的秩为 r . 因为 $A^2 = A$, 即

$$A(E - A) = O, \text{ 则}$$

$$\text{秩}(A) + \text{秩}(E - A) = n.$$

由此即得 $A - E$ 的秩为 $n - r$. 现在来求 A 的特征值和特征向量. 设 λ_0 是 A 的任一特征值, $\alpha \neq 0$ 是属于它的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 则

$$A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda_0\alpha) = \lambda_0^2\alpha.$$

故有 $\lambda_0\alpha = \lambda_0^2\alpha$, 得 $\lambda_0 = 1$ 或 0 .

当 $\lambda_0 = 1$ 时, 特征矩阵 $\lambda_0 E - A = E - A$ 的秩为

$n - r$, 因此属于1的线性无关的特征向量有 r 个, 记为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$.

当 $\lambda_0 = 0$ 时, 特征矩阵 $\lambda_0 E - A = -A$ 的秩为 r , 因此属于0的线性无关的特征向量有 $n - r$ 个, 记为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \dots, \varepsilon_n$.

于是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量. 以它们为列作矩阵 $P = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, 则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 13 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 2, -6)^T$,

将 α_1, α_2 标准正交化并补足为 R^4 的一组标准正交基.

解: 首先解齐次方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} x = 0$$

求得基础解系 $\alpha_3 = (-4, 0, 3, 1)^T$, $\alpha_4 = (0, -4, 3, 1)^T$.

将 α_1, α_2 标准正交化为 $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$,

$e_2 = \frac{1}{6}(1, 1, 3, -5)^T$; 将 α_3, α_4 标准正交化为

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4, 0, 3, 1)^T, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{234}}(5, -13, 6, 2)^T$$

e_1, e_2, e_3, e_4 即为所求的标准正交基.

例 14 用正交变换化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形.

解: f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 下面按三步骤进行:

(i) 求特征值. 由 $|\lambda E - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$ 得 A 的特征值为 $\{2, -1, -1\}$.

(ii) 解方程组 $(A - 2E)x = 0$. 由

$$A - 2E \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

看出一非零解为 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, 单位化后得

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

(iii) 解方程组 $(A + E)x = 0$. 由

$$A + E \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

看出线性无关的解 $\beta_2 = (1, -1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, -1)^T$;

标准正交化为 $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1)^T$.

$$(iv) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$x = Py$, 则得到 $f = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

例 15 设 $A = A^T \in R^{3 \times 3}$, A 的特征值为 $\{1, 2, 3\}$,
 $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T$ 与 $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 分别为 A 属于
1, 2 的特征向量, 求 A .

解: 设 α_3 是 A 的属于 $\lambda_3 = 3$ 的特征向量, 则 α_3
必同时正交于 α_1 与 α_2 . 因此不妨取 $\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_1 \times \alpha_2$
 $= (1, 0, 1)^T$. 今由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 求出矩阵 A . 方法之一是
将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 构成正交矩阵 P , 然后用公式
$$A = P \text{diag}(1, 2, 3) P^{-1}, \text{ 即}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

例 16 设 σ 是数域 P 上 n 维空间 V 上的一个线性变换, 在 $P[x]$ 中, $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 且 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素, 用 $\ker\sigma$ 表示线性变换 σ 的核. 证明:

$$\ker f(\sigma) = \ker f_1(\sigma) \oplus \ker f_2(\sigma).$$

证明：由 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 令 $\alpha \in \ker f_1(\sigma)$

则 $f_1(\sigma)\alpha = 0$,

$$f(\sigma)\alpha = (f_2(\sigma)f_1(\sigma))\alpha = f_2(\sigma)(f_1(\sigma))\alpha = 0$$

$$\alpha \in \ker f(\sigma)$$

于是 $\ker f_1(\sigma)$ 是 $\ker f(\sigma)$ 的子空间, 同理 $\ker f_2(\sigma)$ 是 $\ker f(\sigma)$ 的子空间.

由于 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 那么存在 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使

$$f_1(x)u(x) + f_2(x)v(x) = 1$$

$$f_1(\sigma)u(\sigma) + f_2(\sigma)v(\sigma) = \varepsilon$$

其中 ε 表示恒等变换.

$\forall \alpha \in \ker f(\sigma)$, 则 $f(\sigma)\alpha = 0$.

$$\alpha = f_1(\sigma)u(\sigma)\alpha + f_2(\sigma)v(\sigma)\alpha \quad (1)$$

而

$$f_1(\sigma)(f_2(\sigma)v(\sigma))\alpha = 0, f_2(\sigma)(f_1(\sigma)u(\sigma))\alpha = 0$$

于是

$$f_2(\sigma)v(\sigma)\alpha \in \ker f_1(\sigma), f_1(\sigma)u(\sigma)\alpha \in \ker f_2(\sigma),$$

因此

$$\ker f(\sigma) = \ker f_1(\sigma) + \ker f_2(\sigma).$$

$\forall \alpha \in \text{ker}f_1(\sigma) \cap \text{ker}f_2(\sigma)$, 则 $f_1(\sigma)\alpha = 0$,

$f_2(\sigma)\alpha = 0$. 由(1)式, $\alpha = 0$, 于是

$$\text{ker}f_1(\sigma) \cap \text{ker}f_2(\sigma) = \{0\}$$

因此

$$\text{ker}f(\sigma) = \text{ker}f_1(\sigma) \oplus \text{ker}f_2(\sigma).$$

例 17 设 \mathcal{A} 是欧氏空间 V 上的一个线性变换,

那么 $\mathcal{A}V + \ker(\mathcal{A})$ 是直和的三个等价充要条件:

- (1) $\mathcal{A}V \cap \ker(\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\};$
- (2) 不存在向量 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}\alpha \neq \mathbf{0}$, 但 $\mathcal{A}^2\alpha = \mathbf{0};$
- (3) $\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \mathcal{A}^2.$

证明: (1) \Rightarrow (2) 用反证法, 假设存在 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 但 $\mathcal{A}^2\alpha = 0$. 由于 $\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}V$, 并且 $\mathcal{A}^2\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = 0$, 所以 $\mathcal{A}\alpha \in \ker(\mathcal{A})$, 因此有 $\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}V \cap \ker(\mathcal{A})$, 且 $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 与已知条件矛盾, 所以假设不成立, 证毕.

(2) \Rightarrow (1) 用反证法, 假设 $\mathcal{A}V \cap \ker(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, 则存在 $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{A}V \cap \ker(\mathcal{A})$. 由于 $\alpha \in \mathcal{A}V$, 则一定存在 $\beta \neq 0$, 使得 $\alpha = \mathcal{A}\beta$. 同时 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}^2\beta = 0$, 这样存在一个不为零的 β , 使得 $\mathcal{A}\beta \neq 0$, 但 $\mathcal{A}^2\beta = 0$, 与已知条件矛盾, 所以假设不成立, 证毕.

(2) \Rightarrow (3) 用反证法, 注意到 $\text{ker } \mathcal{A} \subseteq \text{ker } \mathcal{A}^2$,
 $\mathcal{A}^2 V \subseteq \mathcal{A} V$, 故若 $\text{rank } \mathcal{A} \neq \text{rank } \mathcal{A}^2$, 则必有
 $\text{rank } \mathcal{A} < \text{rank } \mathcal{A}^2$, 亦即 $\dim \mathcal{A} V > \dim \mathcal{A}^2 V$. (*)
又因为 $\dim \mathcal{A} V + \dim \text{ker } \mathcal{A} = \dim V$, 且

$$\dim \mathcal{A}^2 V + \dim \text{ker } \mathcal{A}^2 = \dim V$$

故由(*)知 $\dim \text{ker } \mathcal{A} < \dim \text{ker } \mathcal{A}^2$. 亦即存在 $\alpha \neq 0$,
 $\alpha \in \text{ker } \mathcal{A}^2$, 但 α 不属于 $\text{ker } \mathcal{A}$, 即存在 $\alpha \neq 0$,
 $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 但 $\mathcal{A}^2\alpha = 0$, 与已知条件矛盾, 假设不成立, 故(3)成立.

(3) \Rightarrow (2) 用反证法, 若有 $\alpha \neq 0, \mathcal{A}\alpha \neq 0$,
但 $\mathcal{A}^2\alpha = 0$, 则 α 不属于 $\ker\mathcal{A}$, 但 $\alpha \in \ker\mathcal{A}^2$.
因而 $\ker\mathcal{A}$ 是 $\ker\mathcal{A}^2$ 的真子集, 亦即 $\dim\ker\mathcal{A} < \dim\ker\mathcal{A}^2$, 亦即 $\dim\mathcal{A}V > \dim\mathcal{A}^2V$, 亦即
 $\text{rank}\mathcal{A} < \text{rank}\mathcal{A}^2$, 与已知条件矛盾, 假设不成立, 故(2)成立.

例 18 设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

两两互异. 证明: 若 $AB = BA$, 则 B 与一个对角矩阵相似, 且 B 是 A 的一个多项式.

证明：取 V 为复数域上的一个 n 维线性空间，并令 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为两个线性变换，它在一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵分别为 A, B . V_{λ_i} 为对应于特征值 λ_i 的特征子空间. 由于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互不相同，故

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n},$$

每个 V_{λ_i} 都是一维子空间.

又由于 $AB = BA$ ，则 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ ，从而 A 的特征子空间是 B - 子空间. 从而在 V_{λ_i} 中任取一个非零向量 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，则令

$$\mathcal{B}\alpha_1 = k_1\alpha_1$$

$$\mathcal{B}\alpha_2 = k_2\alpha_2$$

.....

$$\mathcal{B}\alpha_n = k_n\alpha_n$$

即 \mathcal{B} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

B 与对角矩阵 C 为线性变换 \mathcal{B} 在两组不同基下的矩阵，故两者相似，即 B 与对角矩阵 C 相似。

又由拉格朗日插值方法知存在唯一的 $n - 1$ 次多项式，使

$$f(\lambda_i) = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

于是由(1)得

$$\begin{aligned} Q^{-1}f(A)Q &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ \end{aligned}$$

从而 $B = f(A)$.

例 19 证明：奇数维欧氏空间中的旋转变换
一定有特征值1.

证明：设 V 是 n 维线性空间， n 是奇数， \mathcal{T} 是 V 的一个旋转变换， A 是 \mathcal{T} 在一组标准正交基下的矩阵，则 A 是正交矩阵，且 $|A| = 1$. 因为 n 是奇数，故有

$$|E - A| = |-(A - E)| = (-1)^n |A - E| = -|A - E|$$

另一方面，因为 A 是正交矩阵，就有

$$\begin{aligned} |E - A| &= |A^T A - A| = |(A^T - E)A| = |A^T - E||A| \\ &= |A - E| \end{aligned}$$

比较两式可知 $|E - A| = 0$. 因此，1是 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 的根. 即1为 $A(\mathcal{T})$ 的特征值.