第八章 λ-矩阵

第六节

若尔当(Jordan)标准形的理论推导

主要内容

- 若尔当标准形的初等因子
- 矩阵的若尔当标准形
- 举例
- 矩阵相似的条件

一、若尔当标准形的初等因子

我们用初等因子的理论来解决若尔当标准形的计算问题．首先计算若尔当标准形的初等因子.

设有若尔当块

$$J_0=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

则其初等因子为$(\lambda-\lambda_0)^n$.

证明 考虑它的特征矩阵

$$\lambda E - J_0 = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda-\lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

显然$|\lambda E - J_0| = (\lambda-\lambda_0)^n$，这就是 $\lambda E - J_0$ 的 n 阶行列式因子. 由于 $\lambda E - J_0$ 有一个 n - 1 阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\lambda_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

所以它的 n - 1 阶行列式因子是 1，从而它以下各阶的行列式因子全是 1． 因此，它的不变因子为

$$d_1(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n$$

由此即得， $\lambda E - J_0$ 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^n$.

证毕

下面再来求若尔当矩阵的初等因子.

设

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

是一个若尔当形矩阵，其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

既然 J_i 的初等因子是 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$，所以$\lambda E-J_i$与

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda-\lambda_i)^{k_i} \end{pmatrix}$$

等价. 于是

$$\lambda E - J$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda E_{k_1} - J_1 & & & \\ & \lambda E_{k_2} - J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_{k_s} - J_s \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_1} & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & (\lambda-\lambda_2)^{k_2} & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & (\lambda-\lambda_s)^{k_s} \end{pmatrix}$$

等价．因此，J 的全部初等因子是：

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

这说明，每个若尔当形矩阵的全部初等因子就是由它的全部若尔当块的初等因子构成的．由于每个若尔当块完全被它的阶数 n 与主对角线上元素 λ_0 所刻划，而这两个数都反映在它的初等因子 $(\lambda-\lambda_0)^n$ 中．因此，若尔当块被它的初等因子唯一决定．由此可见，若尔当形矩阵除去其中若尔当块排列的次序外是被它的初等因子唯一决定．

二、矩阵的若尔当标准形

定理 10 每个 n 阶的复数矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似，这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 A 唯一决定的，它称为 A 的若尔当标准形.

证明 设 n 阶矩阵 A 的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 可能有相同的，指数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 也可能有相同的．每一初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ 对应

于一个若尔当块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

这些若尔当块构成一若尔当形矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

根据以上的计算，J 的初等因子也是

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

因为 J 与 A 有相同的初等因子，所以它们相似.

如果另一若尔当形矩阵 J' 与 A 相似，那么 J' 与 A 就有相同的初等因子，因此 J' 与 J 除了其中若尔当块排列的次序外是相同的，由此得唯一性.

证毕

三、举例

例 1 设 12 级矩阵的不变因子是

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{9\text{个}}, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)\left(\lambda^2+1\right)^2.$$

按定义，它的初等因子有 7 个，即

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1), (\lambda+1),$$

$$(\lambda+i)^2, (\lambda-i)^2.$$

于是其若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & i & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & i & & \\
 & & & & & & & & & & -i & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1 & -i
\end{pmatrix}_{12\times 12}$$

例 2　求下列矩阵的若尔当标准形

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -9 & 4 & -6\\ -9 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 5 & -4 & 2 & 9\\ -3 & 1 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

解：（1）先求 A 的初等因子.

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-4 & 1 & -2\\ 9 & \lambda-4 & 6\\ 9 & -3 & \lambda+5\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda-4 & -2\\ \lambda-4 & 9 & 6\\ -3 & 9 & \lambda+5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-(\lambda-4)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda-4 & -2\\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda-7) & 2(\lambda-1)\\ 0 & 3(\lambda-1) & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda-7) & 2(\lambda-1) \\ 0 & 3(\lambda-1) & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 3(\lambda-1) & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$.

若尔当标准形是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解：（2）先求 B 的初等因子.

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda+2 & -1 & -1 & 2\\ -5 & \lambda+4 & -2 & -9\\ 3 & -1 & \lambda-2 & 2\\ -2 & 4 & -3 & \lambda-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}-1 & \lambda+2 & -1 & 2\\ \lambda+4 & -5 & -2 & -9\\ -1 & 3 & \lambda-2 & 2\\ 4 & -2 & -3 & \lambda-8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & \lambda+2 & -1 & 2\\ 0 & \lambda^2+6\lambda+3 & -\lambda-6 & 2\lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ 0 & 4\lambda+6 & -7 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+6\lambda+3 & -\lambda-6 & 2\lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 4\lambda+6 & -7 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda-9 & -\lambda+8 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 4\lambda+6 & -7 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\lambda r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda-9 & -\lambda+8 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 & -\lambda^2+8\lambda-7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 & -\lambda^2+8\lambda-7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 & -\lambda^2+8\lambda-7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}.$$

所以初等因子为

$$\lambda - 1, (\lambda - 1)^3.$$

若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

四、矩阵相似的条件

定理 10 换成线性变换的语言来说就是:

定理 11 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，在 V 中必定存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形， 并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\mathscr{A}$ 唯一决定的.

证明 在 V 中任取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，设 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵是 A．由定理 10 存在可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 成若尔当形矩阵. 于是在由

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)T$$

确定的基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下，线性变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵就是 $T^{-1}AT$．由定理 10，唯一性是显然的.

证毕

应该指出，若尔当形矩阵包括对角矩阵作为特殊情形，那就是由一阶若尔当块构成的若尔当形矩阵，由此即得

定理 12　复数矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是，A 的初等因子全为一次的.

证明略.

定理 13　**复数矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是，A 的不变因子都没有重根.**

虽然我们证明了每个复数矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似，并且有了具体求矩阵 A 的若尔当标准形的方法，但是并没有谈到如何确定过渡矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 成若尔当标准形的问题. T 的确定牵涉到比较复杂的计算问题，在这里就不讨论了.

最后指出，如果我们规定上三角形矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

为若尔当块，应用完全类似的方法，可以证明相应于定理 10，定理 11 的结论也成立.