第九章 欧几里得空间

第四节　正交变换

主要内容

- 定义
- 性质

一、定义

在解析几何中，我们有正交变换的概念．正交变换就是保持点之间的距离不变的变换．在一般的欧氏空间中，我们有

定义 9 欧氏空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为**正交变换**，如果它保持向量的内积不变，即对于任意的 $\alpha, \beta \in V$，都有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta).$$

二、性质

定理 4 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，于是下面四个命题是相互等价的：

1) $\mathscr{A}$ 是正交变换；

2) $\mathscr{A}$ 保持向量的长度不变，即对于 $\alpha \in V$,

$$|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|;$$

3) 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基；

4) $\mathscr{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

我们证明：1）与 2）等价；1）与 3）等价；3）与 4）等价，于是得到 1），2），3），4）的等价性

证明 首先证明 1) 与 2) 等价.

如果 $\mathcal{A}$ 是正交变换，那么

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \alpha).$$

两边开方即得 $|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$.

1）$\mathcal{A}$ 是正交变换；
2）$\mathcal{A}$ 保持向量的长度不变，即对于 $\alpha \in V$，$|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$；

反过来，如果 $\mathcal{A}$ 保持向量的长度不变，那么

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \alpha),$$

$$(\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\beta) = (\beta, \beta),$$

$$(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta).$$

把最后的等式展开即得

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)+2(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)+(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta).$$

再利用前面两个等式，就有

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

这就是说，$\mathcal{A}$是正交变换.

再来证 1) 与 3) 等价.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 是一组标准正交基，即

1）$\mathcal{A}$ 是正交变换；

3）如果 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基；

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

如果 $\mathcal{A}$ 是正交变换，那么

$$(\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

这就是说，$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基. 反过来，如果$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么由

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n,$$

1）$\mathcal{A}$ 是正交变换；
3）如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基；

3）$\mathcal{A}$ 把 V 的一个规范正交基变成规范正交基

与

$$\mathcal{A}\alpha = x_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + x_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \ldots + x_n\mathcal{A}\varepsilon_n ,$$

$$\mathcal{A}\beta = y_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + y_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \ldots + y_n\mathcal{A}\varepsilon_n ,$$

即得

$$(\alpha , \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = (\mathcal{A}\alpha ,\mathcal{A}\beta) .$$

因而 $\mathcal{A}$ 是正交变换.

最后来证 3) 与 4) 等价.

设 $\mathcal{A}$ 在标准正交基 $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \ldots , \varepsilon_n$ 下的矩阵为

A，即

3）如果 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1$，$\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基；

4）$\mathcal{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

3）如果 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1$，$\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基；

4）$\mathcal{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)A.$$

如果 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 A 可以看作由标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 到 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 的过渡矩阵，因而是正交矩阵. 反过来，如果果 A 是正交矩阵，那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 就是标准正交基.

这样，我们就证明了1)，2)，3)，4)的等价性.

证毕

如果 A 是正交矩阵，那么由

$$AA^{\mathrm{T}} = E$$

可知

$$|A|^2 = 1 \text{ 或者 } |A| = \pm 1 .$$

因此，正交变换的行列式等于 $+1$ 或者 -1 . 行列式等于 $+1$ 的正交变换通常称为**旋转**，或者称为**第一类的**；行列式等于 -1 的正交变换称为**第二类的**.

注：

1. 正交变换是一个欧氏空间到它自身的同构映射.

2. 正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换.

3. 正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

例 1 R^2(二维平面)中将每个向量按逆时针旋转 θ 角的线性变换(即旋转变换)是一个正交变换.

解法一: 设 σ 是这个旋转变换,取R^2的规范正交基 $\varepsilon_1=(1,0)^T,\ \varepsilon_2=(0,1)^T$,则有

$$\sigma(\varepsilon_1)=(cos\theta)\varepsilon_1+(sin\theta)\varepsilon_2$$

$$\sigma(\varepsilon_2)=(-sin\theta)\varepsilon_1+(cos\theta)\varepsilon_2$$

所以 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

A是正交矩阵,故σ是正交变换.

解法二：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 R^2 的规范正交基，则旋转 θ 角的旋转变换 σ 关于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

对 $\forall \alpha, \beta \in R^2$，设 $\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)X, \beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)Y$，有 $\sigma(\alpha) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)AX$，$\sigma(\beta) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)AY$，从而

$$\big(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\big) = (AX)^T AY = X^T Y = (\alpha, \beta).$$

所以，σ 是 R^2 的一个正交变换.

例 2 令 W_2 是三维空间 R^3 中过原点的一个平面，σ 是 R^3 关于 W_2 的镜面反射(如图9.1)，则 σ 是 R^3 的正交变换.

事实上，设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为W_2 的规范正交基，即过原点互相正交的单位向量构成的基，而 ε_3 为过原点且垂直于W_2 的单位向量，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 R^3 的规范正交基.

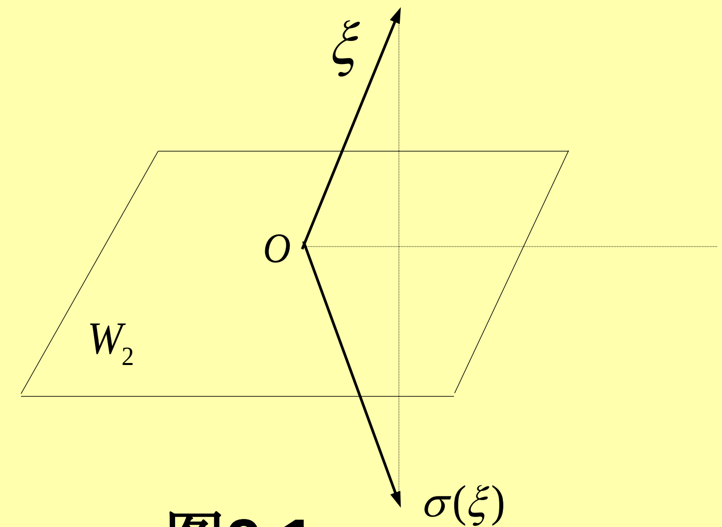

图9.1

由变换 σ 的定义，有

$$\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,\sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_2,\sigma(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3$$

对任意 $\xi,\eta\in R^3$，设

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\eta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

则

$$\sigma(\xi)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_3\end{pmatrix},\sigma(\eta)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\-y_3\end{pmatrix}$$

于是

$$\big(\sigma(\xi),\sigma(\eta)\big) = x_1y_1 + x_2y_2 + (-x_3)(-y_3)$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = (\xi,\eta)$$

又 σ 是 R^3 的线性变换，所以 σ 是 R^3 的一个正交变换.

$$\sigma(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \sigma(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \sigma(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$$

或者，注意到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 和 $\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_1, \sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_2,$ $\sigma(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3$ 都是 R^3 的规范正交基，从

$$\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_1, \sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_2, \sigma(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3$$

得到

$$(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

因为矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，所以 σ 是 R^3 的一个正交变换.

例如，在欧氏空间中任取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，定义线性变换 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \quad \mathcal{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i, i = 2, \dots, n.$$

那么，$\mathcal{A}$ 就是一个第二类的正交变换. 从几何上看，这是一个镜面反射(参看本章习题 15) .

正交变换保持夹角不变. 事实上，设 σ 是欧氏空间 V 的一个正交变换，θ_1 是非零向量 α 与 β 的夹角，θ_2 是 $\sigma(\alpha)$ 与 $\sigma(\beta)$ 的夹角，$0 \leq \theta_1 \leq \pi$，$0 \leq \theta_2 \leq \pi$，那么

$$\theta_1 = arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} = arccos\frac{\left(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\right)}{|\sigma(\alpha)||\sigma(\beta)|} = \theta_2$$

需要注意的是，保持任意两个非零向量夹角不变的线性变换不一定是正交变换. 特别地，把正交向量变成正交向量的线性变换不一定是正交变换.

（举例：数乘变换）

例 3 设$\mathcal{T}$为n维欧氏空间V的一个线性变换. 若对一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$中的向量，有

$$(\mathcal{T}\alpha_i, \mathcal{T}\alpha_i) = (\alpha_i, \alpha_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

问：$\mathcal{T}$是否一定是正交变换？

解： 不一定. 例如，对二维欧氏空间 R^2，显然

$$\varepsilon_1 = (1, 0),\ \varepsilon_2 = (0, 1)$$

是其一组标准正交基. 另外，令$\mathcal{T}$是 R^2的一个线性变换，且

$$\mathcal{T}\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2, \mathcal{T}\varepsilon_2 = \varepsilon_2$$

显然，有

$$(\mathcal{T}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathcal{T}\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \boldsymbol{\varepsilon}_2)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1),$$

$$(\mathcal{T}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathcal{T}\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2).$$

$\mathcal{T}$在标准正交基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{pmatrix}$$

显然A不是正交矩阵，故$\mathcal{T}$不是正交变换.

例 4 证明：正交变换的特征值的为± 1.

证明：设$\mathcal{T}$是正交变换，λ是它的特征值，即有

$$\mathcal{T}\alpha = \lambda\alpha, \qquad \alpha \neq \mathbf{0}$$

则$(\alpha,\alpha) = (\mathcal{T}\alpha,\mathcal{T}\alpha) = (\lambda\alpha,\lambda\alpha) = \lambda^2(\alpha,\alpha)$，但

$(\alpha,\alpha) \neq \mathbf{0}$，所以

$$\lambda^2 = 1，即\lambda = \pm 1.$$