



线性方程组可能有唯一解，无穷多个解或者无解.

如二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ 有唯一解 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

如二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 有无穷多个解.

如二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ 无解.



回顾：矩阵的定义

由 $s \times n$ 个元素排成的 s 行(横的) n 列(纵的) 的表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s \times n$ 矩阵. 这 $s \times n$ 个元素称为矩阵的元素, a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 简记为 $A = A_{s \times n} = (a_{ij})_{s \times n} = (a_{ij})$.



行阶梯形矩阵

满足下面三个条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**

- 1) 每个阶梯只有一行；
- 2) 设矩阵有 r 个非零行（元素不全为零的行），第 i 个非零行的第一个非零元素所在的列标记为 $n_i, i = 1, 2, \dots, r$ ，则
$$n_1 < n_2 < \dots < \dots n_r;$$
- 3) 元素全为零的行（如果有的话）一定在矩阵的最下面几行.



例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特点：阶梯线下方的元素全为零； 每一个台阶都只有一行；
台阶数等于非零行的个数； 阶梯线的竖线后面的第一个
元素为非零元。



第一 节 消 元 法

主要 内 容

- 线性方程组的概念
- 消元法
- 消元法的总结
- 线性方程组与矩阵





一、线性方程组的概念

现在来讨论一般的线性方程组. 所谓一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$

的方程组，其中 x_1, x_2, \dots, x_n 代表 n 个未知量， s 是方程的个数， a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n$)称为方程组的系数， b_j ($j = 1, 2, \dots, s$)称为常数项. 方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 s 不一定相等.



系数 a_{ij} 的第一个指标 i 表示它在第 i 个方程，第二个指标 j 表示它是 x_j 的系数.

所谓方程组(1)的解，就是指由 n 个数 k_1, k_2, \dots, k_n 组成的有序数组 (k_1, k_2, \dots, k_n) ，当 x_1, x_2, \dots, x_n 分别用 k_1, k_2, \dots, k_n 代入后，(1) 中每个等式都变成恒等式，方程组(1)的解的全体称为它的解集合. 解方程组实际上就是找出它全部的解，或者说，求出它的解集合. 如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为同解的.





显然，如果知道了一个线性方程组的全部系数和常数项，那么这个线性方程组就基本确定了。确切地说，线性方程组(1)可以用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

来表示。实际上，有了(2)之后，除去代表未知量的文字外，线性方程组(1)就确定了。下面介绍如何用消元法解一般线性方程组。



二、消元法

1. 引例

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$





解：用消元法求解，其步骤如下：

Step 1：交换前两个方程，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

Step 2：把第一个方程的(-2)倍加到第二个方程，第一个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$



Step 3: 交换后两个方程, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -5, \\ 6x_2 + 2x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Step 4: 把第二个方程的(-3)倍加到第三个方程, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -5, \\ 5x_3 = 15. \end{array} \right.$$



Step 5: 将第三个方程的 $(1/5)$ 倍加到第二个方程, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_2 = -2, \\ 5x_3 = 15. \end{array} \right.$$

Step 6: 把第二个方程的 $(1/2)$ 倍加到第一个方程, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ 2x_2 = -2, \\ 5x_3 = 15. \end{array} \right.$$

因此方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$.



例1中所用的消元过程，实际上是对方程组实施以下的运算或变换：

- (a) 一个方程的两端乘以一个不等于零的数；
- (b) 一个方程的两端乘以同一个数后加到另一个方程；
- (c) 互换两个方程的位置.

定义 1 变换(a), (b), (c) 称为方程组的**初等变换**.





2. 消元法的证明

消元的过程就是反复施行初等变换的过程. 下面证明, 初等变换总是把方程组变成同解方程组.

证明: 我们只证明变换(b).

对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$



进行第二种初等变换. 为方便起见, 不妨设把第二个方程的 k 倍加到第一个方程, 得到新方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + ka_{21})x_1 + (a_{12} + ka_{22})x_2 + \cdots + (a_{1n} + ka_{2n})x_n = b_1 + kb_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array} \right. \quad (3)$$

现在设 (c_1, c_2, \dots, c_n) 是 (1) 的任一解. 因 (1) 与 (3) 的后 $s - 1$ 个方程是一样的, 所以 (c_1, c_2, \dots, c_n) 满足 (3) 的后 $s - 1$ 个方程. 又 (c_1, c_2, \dots, c_n) 满足 (1) 的前两个方程



$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1,$$

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2.$$

把第二式的两边乘以 k , 再与第一式相加, 即得

$$(a_{11}+ka_{21})c_1 + (a_{12}+ka_{22})c_2 + \cdots + (a_{1n}+ka_{2n})c_n = b_1 + kb_2,$$

故 (c_1, c_2, \dots, c_n) 又满足 (3) 的第一个方程, 因而是 (3) 的解. 类似地
可证 (3) 的任一解也是 (1) 的解. 这就证明了 (1) 与 (3) 是同解的.



3. 用消元法求解一般的线性方程组

对于方程组(1)，首先检查 x_1 的系数. 如果 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}$ 全为零，那么方程组(1)对 x_1 没有任何限制， x_1 就可以取任何值，而方程组(1)可以看作 x_2, \dots, x_n 的方程组的解. 如果 x_1 的系数不全为零，那么利用初等变换(c)总可以使 $a_{11} \neq 0$. 利用初等变换(b)，分别把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第*i*个方程($i = 2, \dots, s$). 于是方程组(1)就变成



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{array} \right. \quad (4)$$

其中

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i = 2, \dots, s, j = 2, \dots, n.$$

这样，解方程组(1)的问题就归结为解方程组



$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \quad (5)$$

的问题. 显然, (5) 的一个解代入 (4) 的第一个方程就定出 x_1 的值, 这就得出 (4) 的一个解; 而 (4) 的解显然都是 (5) 的解. 这就是说, 方程组 (4) 有解的充分必要条件为方程组 (5) 有解, 而 (4) 与 (1) 是同解的, 因之, 方程组 (1) 有解的充分必要条件为方程组 (5) 有解.



对(5)再按上面的考虑进行变换，并且这样一步步做下去，最后就得到一个**阶梯形**方程组。为了讨论起来方便，不妨设所得的方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots \dots \dots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ 0 = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$



其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2 \dots, r$. 方程组(6)中的“ $0=0$ ”这样一些恒等式可能不出现，也可能出现，这时去掉它们也不影响(6)的解. 而且(1)与(6)是同解的.

现在考察(6)的解的情况.

如(6)中有方程 $0 = d_{r+1}$, 而 $d_{r+1} \neq 0$. 这时不管 x_1, \dots, x_n 取什么值都不能使它成为等式. 故(6)无解, 因而(1)无解.

当 $d_{r+1} = 0$ 或(6)中根本没有“ $0 = 0$ ”的方程时, 分两种情况:



情形一 $r = n$. 这时阶梯形方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots \dots \dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{array} \right. \quad (7)$$

其中 $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2 \dots, r)$. 由最后一个方程开始, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 的值就可以逐个地唯一地决定了. 在这种情形下, 方程组 (7) 也就是方程组 (1) 有唯一的解.



情形二 $r < n$. 这时阶梯形方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \end{array} \right.$$

其中 $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2 \cdots, r)$. 把它改写成

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{array} \right. \quad (8)$$



由此可见，任给 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 一组值，就唯一地定出 x_1, x_2, \dots, x_r 的值，也就是定出方程组 (8) 的一个解。一般地，由 (8) 我们可以把 x_1, x_2, \dots, x_r 通过 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 表示出来，这样一组表达式成为方程组 (1) 的一般解，而 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 称为一组自由未知量。





例 2 用消元法把线性方程组化成阶梯形方程，并由此判断方程组是否有解，若有解，求出其解.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$





解： 经过一系列的初等变换之后，方程组变成如下**阶梯形方程组**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_3 = -6. \end{array} \right.$$

由于在阶梯形方程中，有效方程的个数 r 与未知量的个数 n 相等，所以有唯一解。把 $x_3 = -6$ 代入第二个方程解得 $x_2 = -1$ ；再把 $x_3 = -6$ ， $x_2 = -1$ 代入第一个方程解得 $x_1 = 9$ 。故方程组的唯一解为 $x_1 = 9, x_2 = -1, x_3 = -6$ 。



例 3 用消元法把线性方程组化成阶梯形方程，并由此判断方程组是否有解，若有解，求出其解.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$



解： 经过一系列的初等变换之后，方程组变成如下**阶梯形方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ \quad \quad \quad - x_3 = 2, \\ \quad \quad \quad 0 = 1. \end{cases}$$

所以方程组无解.



例 4 用消元法解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



解： 经过一系列的初等变换之后，方程组化为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = \frac{1}{2}, \\ x_3 - 2x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2 + x_4, \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2x_4. \end{cases}$$



三、消元法求解一般的线性方程组

用消元法解线性方程组的整个过程，总体来说就是：首先用初等变换化线性方程组为阶梯形方程组，把最后的一些恒等式“ $0=0$ ”（如果出现的话）去掉，如果剩下的方程当中最后一个等式是零等于一非零的数，那么方程组无解，否则有解。在有解的情况下，如果阶梯形方程组中方程的个数 r 等于未知量的个数，那么方程组有唯一的解；如果阶梯形方程组中方程的个数 r 小于未知量的个数，那么方程组有无穷多个解。



把以上结果应用到齐次线性方程组，就有

定理 1 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中，如果 $s < n$ ，那么它必有非零解.



证明： 显然，方程组在化成阶梯形方程组之后，方程的个数不会超过原方程组中方程的个数，即

$$r \leq s < n.$$

由 $r < n$ 得知，它的解不是唯一的，因而必有非零解.

证毕





四、线性方程组与矩阵

如果知道了一个线性方程组的全部系数和常数项，那么这个方程组就基本上确定了。确切地说，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$

可以用如下的矩阵





$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

来表示，即对于给定的线性方程组可以唯一地确定 \bar{A} ；反之，给定矩阵 \bar{A} 可唯一地确定线性方程组. 即，**线性方程组与矩阵一一对应.**

于是，我们引入如下概念



定义 2 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$





$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

则称 A 为线性方程组的**系数矩阵**, \bar{A} 为方程组的**增广矩阵**.



显然，用初等变换化方程组成阶梯形方程组就相当于用初等行变换化增广矩阵成阶梯形矩阵. 因此，解线性方程组的第一步工作可以通过矩阵来进行，而从化成的阶梯形矩阵就可以判别方程组有解还是无解，在有解的情形下，回到阶梯形方程组去解.





例 5 用矩阵的初等行变换判断方程组是否有解

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

解：对它的增广矩阵作初等行变换

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 + 4r_1 \\ r_3 + 11r_1 \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & -30 & 33 & 96 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

从最后一行(0 0 0 -6)可以看出原方程组无解.