第四章　矩　阵

第一节　矩阵概念的一些背景

主要内容

- 前 言
- 矩阵应用举例
- 矩阵的表示和相等

矩阵的定义

定义 5 由$m \times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫作一个矩阵$m \times n$矩阵. 这$m \times n$个数称为矩阵的元素， a_{ij}称为矩阵A的第i行第j列元素. 简记为$A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

$n \times n$矩阵也称为n阶方阵. 由一个n阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义的一个n阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称为矩阵A的行列式，记作$|A|$或$det(A)$.

一、前言

在线性方程组的讨论中我们看到，线性方程组的一些重要性质反映在它的系数矩阵和增广矩阵的性质上，并且解方程组的过程也表现为变换这些矩阵的过程．除线性方程组之外，还有大量的各种各样的问题也都提出矩阵的概念，并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究，甚至于有些性质完全不同的、表面上完全没有联系的问题归结成矩阵问题以后却是相同的．这就使矩阵

成为数学中一个极其重要的应用广泛的概念，因而也就使矩阵成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象． 这一章的目的是引入矩阵的运算，并讨论它们的一些基本性质．

为了使读者对矩阵的概念以及下面要讨论的问题的背景有些了解，我们来介绍一些提出矩阵概念的问题．

二、矩阵应用举例

引例 1　　坐标变换矩阵

在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系转轴 (反时针方向转轴)，那么平面直角坐标变换的公式为

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases} \qquad (1)$$

其中θ为x轴与x'轴的夹角．显然，新旧坐标之间的关系，完全可以

通过公式中系数所排成的如下2×2矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

表示出来. 通常，矩阵(2)称为坐标变换(1)的矩阵.

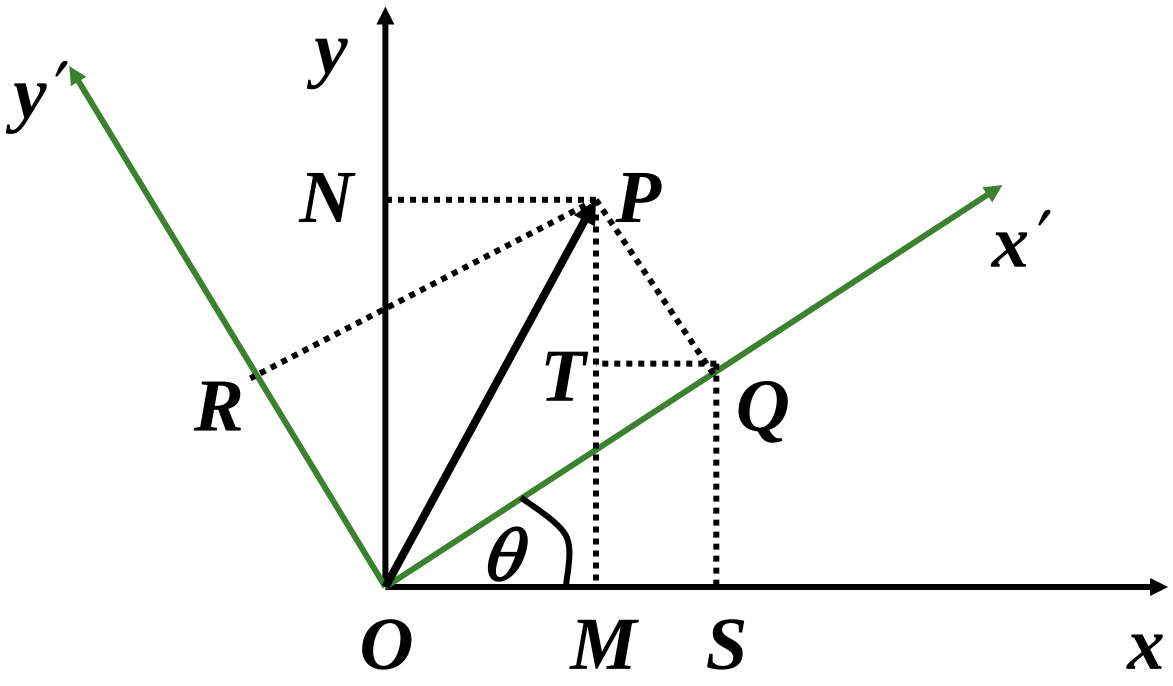

图4-1

$$\begin{cases} x = OM = OS - TQ = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = ON = SQ + TP = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

在空间的情形，保持原点不动的仿射坐标系的变换公式为

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \tag{3}$$

同样，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

就称为坐标变换(3)的矩阵.

引例 2　　二次曲线的矩阵

二次曲线的一般方程为

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{5}$$

(5) 的左端可以用表

	x	y	1
x	a	b	d
y	b	c	e
1	d	e	f

来表示，其中每一个数就是它所在的行和列所对应的x,y或1的乘积

的系数，而(5)的左端就是按这样的约定所形成的项的和．换句话说，只要规定了$x,y,1$的次序，二次方程(5)的左端就可以简单地用矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{6}$$

来表示．通常，(6)称为二次曲线(5)的矩阵．

从方程到矩阵的过程如下：

方程 $$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

研究 ⇓ 抽象化

表格

	x	y	1
x	a	b	d
y	b	c	e
1	d	e	f

$\xrightarrow{\text{简化}}$ 矩阵 $$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

引例 3　经济中的矩阵

在讨论国民经济的数学问题中也常常用到矩阵. 例如，假设在某一地区，某一种物资，比如说煤，有s个产地$A_1, A_2, \cdots, A_s$和n个销地$B_1, B_2, \cdots, B_n$. 那么一个调运方案就可用一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

来表示，其中a_{ij}表示产地A_i运到销地B_j的数量.

引例 4　　向量是矩阵的特例

n维向量也可以看成是矩阵的特殊情形． n维行向量就是$1\times n$矩阵． n维列向量就是$n\times 1$矩阵.

三、矩阵的表示和相等

以后我们用大写的拉丁字母$A, B, \cdots$，或者

$$(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$$

来代表矩阵.

有时候，为了指明所讨论矩阵的阶数，可以把$s \times n$矩阵写成

$A_{s\times n}, B_{s\times n}, \cdots$，或者

$$(a_{ij})_{s\times n},(b_{ij})_{s\times n},\cdots$$

注意： 矩阵的符号和行列式的符号的区别.

矩阵的相等

设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{l\times k}$，如果$m=l, n=k$，且$a_{ij}=b_{ij}$，对$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$都成立，则称矩阵$A$与矩阵$B$相等，记为$A=B$. 只有两个矩阵完全一样才叫相等.

四、几种特殊矩阵

a)对角矩阵(diagonal matrix)

如下的矩阵称为对角矩阵，记为$diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

b) 数量矩阵(scalar matrix)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

c) 三角矩阵(triangular matrix)

上三角矩阵(upper triangular matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵(lower triangular matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d) 对称矩阵(symmetric matrix)和反对称矩阵(anti-symmetric matrix)

如果n阶矩阵$A=(a_{ij})$的元素满足$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称$A$为$n$阶对称矩阵.

一个对称矩阵如下

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

如果n阶矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称$A$为$n$阶反对称矩阵，如

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$