线性代数 试卷 4

院（系）________ 班级________ 学号________ 姓名________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
评阅												
审核												

注意事项:

（1）本试卷共八道大题，共八页，请认真核对。

（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填或错填的试卷为无效试卷。

（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔答卷无效。

得 分

一、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 设某三阶行列式的第二行元素分别为 $-1,2,3$，对应的余子式分别为 $-3,-2,1$，则此行列式的值为____________。

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&3&2\end{pmatrix}$，那么其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________。

3. 若线性方程组 $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&t&3\\3&6&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 $t=$____________。

4. 若三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 2，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值的乘积为____________。

5. 二次型 $2x_1^2-7x_1x_2+4x_2^2$ 的规范型是____________。

得 分

二、选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，且 $\left|\boldsymbol{A}\right|=2$，则行列式 $\left|\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right|$ =____________________。

（A）-2　　（B）0　　（C）2　　（D）6

2．已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^2=$____________________。

（A）$\boldsymbol{A}$　　（B）$\boldsymbol{D}$　　（C）$\boldsymbol{E}$　　（D）$-\boldsymbol{E}$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为任意 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{O}$ 为 n 阶零矩阵，则下列各式中正确的是____________________。

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$　　（B）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

（C）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　　（D）由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 必可推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

4. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可以表示为____________________。

（A）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$　　（B）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$

（C）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\alpha_1$　　（D）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

5. 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$ 线性无关，则____________________。

（A）向量组中增加任意一个向量后仍线性无关

（B）向量组中增加任意一个向量后线性相关

（C）向量组中减少任意一个向量后线性相关

（D）向量组中减少任意一个向量后仍线性无关

得 分

三、（本题 10 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$。

（1）计算 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$；

（2）判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否可换？

（3）解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}\right)$。

得 分

四、（本题 12 分）

设 $n \geq 2$ 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$。

（1）计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；

（2）求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否为正定矩阵？

得 分

五、（本题 12 分）

设向量组由四个向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$组成。

（1）求出这个向量组的秩，并求出一个极大线性无关组；

（2）用求出的极大线性无关组表示其余向量；

（3）这个向量组可以找到几个极大线性无关组？为什么？

得 分

六、（本题 12 分）

设线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$，

当λ取何值时，这个线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时给出方程组的通解。

得 分

七、（本题 14 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$。

（1）求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（3）求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$ 是对角形矩阵；

（4）设多项式 $\varphi(x)=x^2+7x-8$，计算 $\varphi(\boldsymbol{A})$。

得 分

八、（本题 10 分）证明题。

1. 设非零向量α,β的内积为零，证明：$\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2=\left|\alpha+\beta\right|^2$。

2. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，构造向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$。证明：当$n$是偶数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关；当$n$为奇数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关。

线性代数 试题4答案

一、填空题（本题共15分，每小题3分）

答案：1. -10　　2. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$　　3. 4　　4. 0　　5. $y_1^2 - y_2^2$

二、选择题（本题共15分，每小题3分）

答案：1. C　　2. C　　3. A　　4. B　　5. D

三、(本题10分)

解答：(1) $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -5 & 14 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可换。

(3) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$。

四、

解答：(1) $|\boldsymbol{A}|=$

$=\begin{cases} 0, & n \geq 3 \\ -1, & n=2 \end{cases}$。

(2) $\boldsymbol{A}$ 的秩为2。

(3) 不是正定矩阵。

五、(本题12分)

(1) 向量组的秩是3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 可以构成一个极大线性无关组。

(2) $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$。

(3) 极大无关组必然含有 $\boldsymbol{\alpha}_4$，其余三个向量任选两个即可，因此，有三个极大线性无关组。

六、(本题12分)

当 $\lambda \neq 1, -2$ 时，方程组有唯一解。

当 $\lambda = -2$ 时，系数矩阵的秩是2，增广矩阵的秩是3，方程组没有解。

当 $\lambda = 1$ 时，无穷解，方程组的通解为 $k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

七、(本题14分)

解答：

（1） $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda+8)(\lambda-1)^2$。

（2）特征值为 1，1，－8

（3）构造矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$。

（4）由于 $\varphi(\Lambda)=\boldsymbol{O}$，因此 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\Lambda)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$。

八、（本题 10 分）

略