第七节　分块乘法的初等变换及应用举例

主要内容

- 分块初等矩阵
- 应用举例

一、分块初等矩阵

1. 定义

定义 15 把单位矩阵 E 进行如下分块：

$$E = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

对它进行三种初等变换所得到的矩阵称为**分块初等矩阵.**

分块初等矩阵有以下三种：

1） **分块对换矩阵** 对换两行(列)所得到

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix},$$

2） **分块倍乘矩阵** 某一行(列)左乘(右乘)矩阵P所得到

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix},$$

3） **分块倍加矩阵** 一行(列)加上另一行(列)的P(倍数)所得到

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

2. 分块初等矩阵的性质

和初等矩阵与初等变换的关系一样，分块初等矩阵有与初等矩阵类似的性质：

用分块初等矩阵左乘分块矩阵 A，在保证可乘的情况下，其作用相当于对分块矩阵 A 进行一次相应的初等行变换； 用分块初等矩阵右乘分块矩阵 A， 其作用相当于对分块矩阵 A进行一次相应的初等列变换.

例如，设有如下分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

分别用三种分块初等矩阵左乘它，其结果如下：

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}.$$

在$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}$中，适当选择$P$，可使$C+PA=O$． 例如 A 可逆时，选$P=-CA^{-1}$，则$C+PA=O$．于是上式右端成为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其他问题时是比较方便的，因此这种运算非常有用.

二、应用举例

例 1 设

$$T=\begin{pmatrix}A & O\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中A,D可逆，求T^{-1}.

解： 因为

$$\begin{pmatrix}E_m & O\\ -CA^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & O\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & D\end{pmatrix},$$

且

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

或者，因为

$$(T \,\vdots\, E)=\left(\begin{array}{cc:cc} A & O & E & O \\ C & D & O & E \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} A & O & E & O \\ O & D & -CA^{-1} & E \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} E & O & A^{-1} & O \\ O & E & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{array}\right)$$

所以$T^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

例 2 设

$$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中T_1,D可逆，试证$\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}$存在，并求$T_1^{-1}$.

证明： 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

因为T_1可逆，对它进行初等变换后仍可逆，即

$$\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆，故$\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}$存在.

由$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix} T_1 = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$

解得 $T_1^{-1} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

再由例 1 得

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & O \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix}.$$

证法 2 因为

$$
(T_1 \vdots E)=\left(\begin{array}{cc:cc} A & B & E & O \\ C & D & O & E \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} A-BD^{-1}C & O & E & -BD^{-1} \\ C & D & O & E \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} E & O & \left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ C & D & O & E \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} E & O & \left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ O & D & -C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} & E+C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} E & O & (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ O & D & -C(A-BD^{-1}C)^{-1} & E+C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:cc} E & O & (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ O & E & -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right)$$

所以$T_1^{-1}=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}$

因为T_1可逆，对它进行初等变换后仍可逆，所以$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在.

例 3 证明行列式的乘积公式$|AB| = |A||B|$.

证明： 注意

$$\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式得到

$$\begin{vmatrix} E & A \\ O & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

即

$$|A||B| = \begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

又因为矩阵$\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}$作$n$次列变换后可变成矩阵$\begin{pmatrix} AB & O \\ B & -E \end{pmatrix}$，

即

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix} \xrightarrow[j=1,2,\cdots,n]{\text{第}j\text{列与第}n+j\text{列交换}} \begin{pmatrix} AB & O \\ B & -E \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -E \end{vmatrix} = (-1)^n |AB||-E| = |AB|.$$

这就证明了$|AB| = |A||B|$.　　证毕

例 4　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad 1\leq k\leq n,$$

则有下三角矩阵$B_{n\times n}$使

$$BA=\text{上三角矩阵}.$$

证明：　对 n 作归纳法.　当$n=1$时，一阶矩阵既是上三角矩阵又是下三角矩阵，故命题成立.

设对$n-1$命题为真，我们来看

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

它仍满足命题中所设的条件.　由归纳法假设，有下三角矩阵

$(B_1)_{(n-1)\times(n-1)}$满足

$$B_1A_1=\text{上三角矩阵}.$$

对A作如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

再作

$$\begin{pmatrix} B_1 & O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

这时矩阵已成为上三角形了.　将两次乘法结合起来就得到

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

此即为所要求的下三角矩阵.

证毕

LU分解及其应用

1. LU分解

记矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

记$L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，这里$m_{i1}=-\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i=2,3,4$，则有

$$L_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_{21}&1&0&0\\m_{31}&0&1&0\\m_{41}&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}&a_{34}^{(1)}\\0&a_{42}^{(1)}&a_{43}^{(1)}&a_{44}^{(1)}\end{pmatrix}$$

记$L_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&m_{32}&1&0\\0&m_{42}&0&1\end{pmatrix}$，这里$m_{i2}=-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},i=3,4$，则有

$$L_2\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}&a_{34}^{(1)}\\0&a_{42}^{(1)}&a_{43}^{(1)}&a_{44}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&m_{32}&1&0\\0&m_{42}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}&a_{34}^{(1)}\\0&a_{42}^{(1)}&a_{43}^{(1)}&a_{44}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&0&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\0&0&a_{43}^{(2)}&a_{44}^{(2)}\end{pmatrix}$$

记$L_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&m_{43}&1\end{pmatrix}$，这里$m_{43}=-\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$，则有

$$L_3\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&0&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\0&0&a_{43}^{(2)}&a_{44}^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&m_{43}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&0&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\0&0&a_{43}^{(2)}&a_{44}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\0&0&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\0&0&0&a_{44}^{(3)}\end{pmatrix}$$

因此

$$L_3L_2L_1A = U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

令$L_3L_2L_1 = \bar{L}$， 则$\bar{L}$是下三角的，使得

$$\bar{L}A = U.$$

令

$$L=\bar{L}^{-1}=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_{21}&1&0&0\\m_{31}&0&1&0\\m_{41}&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&m_{32}&1&0\\0&m_{42}&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&m_{43}&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-m_{21}&1&0&0\\-m_{31}&0&1&0\\-m_{41}&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-m_{32}&1&0\\0&-m_{42}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-m_{43}&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-m_{21}&1&0&0\\-m_{31}&-m_{32}&1&0\\-m_{41}&-m_{42}&-m_{43}&1\end{pmatrix}$$

就有

$$A = LU.$$

于是，A分解成了一个下三角矩阵L与一个上三角矩阵A的乘积.

2. LU分解的应用

求解线性方程组$Ax = b$.

如果$A = LU$，则线性方程组变为$L(Ux) = b$，于是线性方程组等价于求解两个方程组$Ly = b$，$Ux = y$.

$$L=\left(l_{ij}\right)_{n\times n}, \qquad U=\left(u_{ij}\right)_{n\times n}$$

具体的计算公式为：

$$\begin{cases} y_1=b_1, \\ y_k=b_k-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n=y_n/u_{nn}, \\ x_k=\left(y_k-\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right)/u_{kk}, \qquad k=n-1,\cdots,2,1. \end{cases}$$