

第八节 复系数与实系数

多项式的因式分解

主要内容

- 代数基本定理
- 复系数多项式因式分解定理
- 实系数多项式因式分解定理

一、代数基本定理

以上我们讨论了在一般数域上多项式的因式分解问题，现在来看一下在复数域与实数域上多项式的因式分解。复数域与实数域既然都是数域，因此前面所得的结论对它们也是成立的。但是这两个数域又有它们的特殊性，所以某些结论就可以进一步具体化。

对于复数域，我们有下面重要的定理：

代数基本定理 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中有一根.

这个定理的证明在本课程中不讲，将来利用复变函数论中的结论，可以很简单地证明.



这是复变函数中刘维尔定理的直接推论。

刘维尔定理：有界整函数 $f(z)$ 必为常数。

注

代数基本定理：在 z 平面上每个次数 ≥ 1 的复系数多项式 $p(z)$ 至少有一个根。

证明：否则， $\frac{1}{p(z)}$ 在 z 平面上有界，由刘维尔定理， $\frac{1}{p(z)}$ ，从而 $p(z)$ 必为常数，这与假设矛盾。

利用根与一次因式的关系(定理 7 及推论👉)

代数基本定理显然可以等价地叙述为：

定理 7 (余数定理) 用一次多项式 $x - \alpha$ 去除多项式 $f(x)$ ，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$ 。

推论 α 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x - \alpha) \mid f(x)$ 。

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式，在复数域上一定有一个一次因式.

由此可知，在复数域上所有次数大于 1 的多项式全是可约的. 换句话说，不可约多项式只有一次多项式. 于是，因式分解定理在复数域上可以叙述成：

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

二、复系数多项式因式分解定理

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

因此, 复系数多项式具有标准分解式

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \cdots (x - \alpha_s)^{l_s},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是不同的复数, l_1, l_2, \dots, l_s 是正整数. 标准分解式说明了每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

三、实系数多项式因式分解定理

下面来讨论实系数多项式的分解.

对于实系数多项式, 以下的事实是基本的, 即
如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根, 那么 α 的共轭数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根. 因为设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_n 是实数. 由假设

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

两边取共轭数，有

$$f(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

这就是说， $f(\bar{\alpha}) = 0$ ， $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根。

由此可以证明

实系数多项式因式分解定理 每个次数 ≥ 1

的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与判别式小于零的二次不可约因式的乘积。

证明 定理对一次多项式显然成立.

假设定理对次数 $< n$ 的多项式已经证明.

设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式. 由代数基本定理👉

$f(x)$ 有一复根 α . 如果 α 是实数, 那么

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x),$$

其中 $f_1(x)$ 是 $n - 1$ 次实系数多项式. 如果 α 不是实数, 那么 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根且 $\bar{\alpha} \neq \alpha$. 于是

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) f_2(x).$$

显然 $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$ 是一实系数二次不可约多项式. 从而 $f_2(x)$ 是 $n - 2$ 次实系数多项式. 由归纳法假设, $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$ 可以分解成一次与二次不可约多项式的乘积, 因而 $f(x)$ 也可以如此分解.

证毕

因此，实系数多项式具有标准分解式

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{l_1} \cdots (x - c_s)^{l_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{k_r},$$

其中 $c_1, \dots, c_s, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ 全是实数,

$l_1, \dots, l_s, k_1, \dots, k_r$ 是正整数, 并且

$$x^2 + p_i x + q_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

是不可约的, 也就是适合条件

$$p_i^2 - 4 q_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

注

从以上分析还可看出，如果复数 b 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个根，则 \bar{b} 也是 $f(x)$ 的一个根，并且它们的重数也一样。所以实系数多项式的复数根是成对出现的。

代数基本定理虽然肯定了 n 次方程有 n 个复根，但是并没有给出根的一个具体的求法。高次方程求根的问题还远远没有解决。特别是在应用方面方程求根是一个重要的问题，这个问题是相当复杂的，它构成了计算数学的一个分支，在这里我们就不讨论了。