

第六章 线性空间

第六节 子空间的交与和

主要内容

- 子空间的交
- 子空间的和
- 子空间的交与和的性质
- 例题
- 子空间的交与和的维数

一、子空间的交

1. 定义

定义15 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 称

$$V_1 \cap V_2 = \{ \alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2 \}$$

为 V_1, V_2 的**交**.

2. 性质

定理 6 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

证明 首先, 由 $0 \in V_1, 0 \in V_2$, 可知 $0 \in V_1 \cap V_2$, 因而 $V_1 \cap V_2$ 是非空的. 其次, 如果 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$, 即 $\alpha, \beta \in V_1$, 而且 $\alpha, \beta \in V_2$, 那么 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha + \beta \in V_2$, 因此 $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$. 对数量乘积可以同样地证明. 所以 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间.

证毕

3. 子空间的交的运算规律

1) 交换律 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$

2) 结合律 $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$

由结合律，我们可以定义多个子空间的交：

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^s V_s$$

它也是子空间.

二、子空间的和

1. 定义

定义 16 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 所谓 V_1 与 V_2 的**和**, 是指由所有能表示成 $\alpha_1 + \alpha_2$, 而 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ 的向量组成的子集合, 记作 $V_1 + V_2$, 即

$$V_1 + V_2 = \{ \alpha \mid \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2 \}$$

2. 性质

定理 7 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的和 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间.

证明 首先, $V_1 + V_2$ 显然是非空的. 其次
如果 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$, 即

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 \in V_1, \beta_2 \in V_2,$$

那么

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2).$$

又因为 V_1, V_2 是子空间, 故有

$$\alpha_1 + \beta_1 \in V_1, \quad \alpha_2 + \beta_2 \in V_2.$$

因此

$$\alpha + \beta \in V_1 + V_2.$$

同样,

$$k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2.$$

所以, $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间.

证毕

3. 子空间的和的运算规律

1) 交换律 $V_1 + V_2 = V_2 + V_1;$

2) 结合律 $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3).$

由结合律，我们可以定义多个子空间的和：

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s = \sum_{i=1}^s V_i$$

它是由所有表示成

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, s)$$

的向量组的子空间.

三、子空间的交与和的性质

性质 1 设 V_1, V_2, W 都是子空间, 那么由 $W \subset V_1$ 与 $W \subset V_2$ 可推出 $W \subset V_1 \cap V_2$; 而由 $W \supset V_1$ 与 $W \supset V_2$ 可推出 $W \supset V_1 + V_2$.

性质 2 对于子空间 V_1, V_2 , 以下三个论断是等价的:

1) $V_1 \subset V_2$; 2) $V_1 \cap V_2 = V_1$; 3) $V_1 + V_2 = V_2$.

四、例题

例 1 设 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$, $V_2 = L(\alpha_1, \alpha_3)$ 是 R^3 两个不同的 2 维子空间, 求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$, 并指它们的几何意义.

解 因为 V_1 和 V_2 是两个不同的子空间, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 否则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示从而 $V_1 = V_2$ 与题设矛盾. 于是由子空间的交与和的定义可得 $V_1 \cap V_2 = L(\alpha_1)$, $V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R^3$.

其几何意义是： $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 是向量 α_1, α_2 所确定的平面， $V_2 = L(\alpha_1, \alpha_3)$ 是向量 α_1, α_3 所确定的平面， $V_1 \cap V_2$ 是这两个平面的交线， $V_1 + V_2$ 是整个 3 维空间. 如图 6-6 所示.

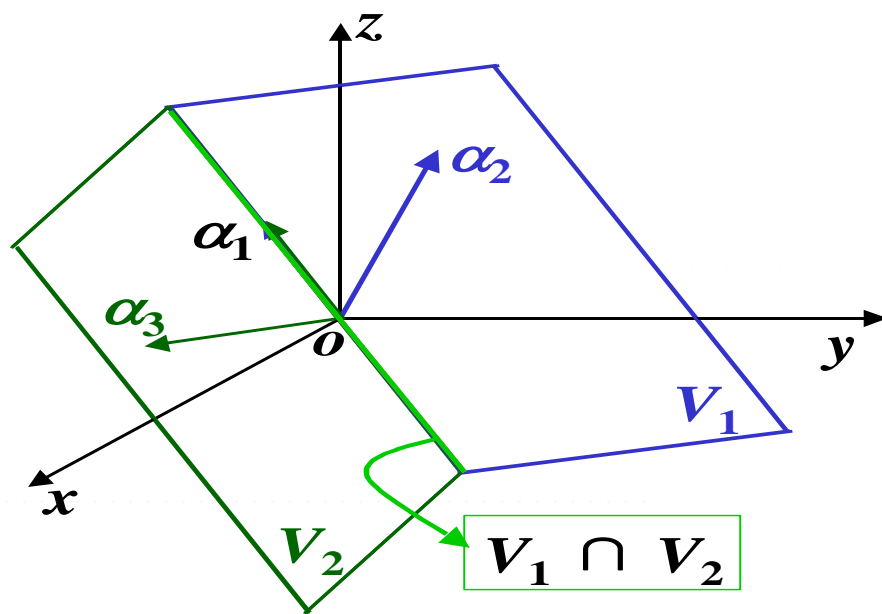


图 6-6 

例 2 设 V_1, V_2 分别是 \mathbf{R}^3 过原点的直线和平面(直线不在平面上)上的全体向量构成的子空间, 求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$, 并指它们的几何意义.

解 由定义容易求得

$$V_1 \cap V_2 = \{ \mathbf{0} \}, \quad V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{R}^3.$$

其几何意义如图 6-7 所示

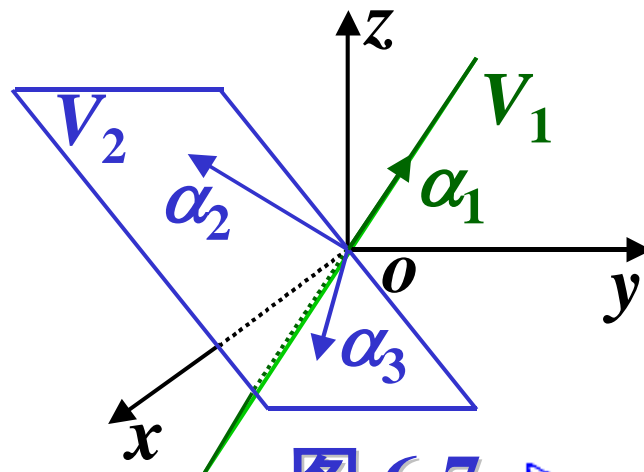


图 6-7 

例 3 在三维几何空间 R^3 中, 令

$$W_1 = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$$

则 W_1, W_2 是 R^3 中的**两个子空间**, 它们都是**二维**的, 记

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 0, -1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$$

则 $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1, \alpha_1, \alpha_3 \in W_2$. 从几何知识知

W_1, W_2 是**通过原点的平面**.

注意 α_1, α_2 是 W_1 的一组基, α_1, α_3 是 W_2 的一组基, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故它是 R^3 的一组基. 因此

$$W_1 + W_2 = R^3$$

从几何上看, $W_1 \cap W_2$ 应该是一条直线.
事实上,

$$W_1 \cap W_2 = \{(-x, x, 0) | x \in R\}$$

例 4 设 V_1, V_2 分别是 P^3 中齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间，那么 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间.

例 5 在一个线性空间 V 中, 有

$$\begin{aligned} & L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t) \end{aligned}$$

五、子空间的交与和的维数

关于子空间的交与和的维数，有以下定理.

定理 8 (维数公式) 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

证明 设 V_1, V_2 的维数分别是 s, t , $V_1 \cap V_2$ 的维数是 m . 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m.$$

如果 $m = 0$, 这个基是空集, 下面的讨论中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 不出现, 但讨论同样能进行. 由

定理 4  它可以扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m},$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}.$$

我们来证明，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 这样, $V_1 + V_2$ 的维数就等于 $s + t - m$, 因而维数公式成立.

因为

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}),$$

$$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}).$$

所以

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}).$$

现在来证明向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}$$

是线性无关的. 假设有等式

$$\begin{aligned} & k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \\ & + p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \dots + p_{s-m}\beta_{s-m} \\ & + q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 + \dots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \alpha &= k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{s-m}\beta_{s-m} \\ &= -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \dots - q_{t-m}\gamma_{t-m}. \end{aligned}$$

由 $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{s-m}\beta_{s-m}$

可知, $\alpha \in V_1$; 由 $\alpha = -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \dots - q_{t-m}\gamma_{t-m}$

可知, $\alpha \in V_2$. 于是 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 即 α 可以被

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 令 $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$,

则

$$l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \dots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0.$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}$ 线性无关, 所以

$$l_1 = \dots = l_m = q_1 = \dots = q_{t-m} = 0,$$

因而 $\alpha = 0$. 从而有

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{s-m}\beta_{s-m} = 0.$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}$ 线性无关, 又得

$$k_1 = \dots = k_m = p_1 = \dots = p_{s-m} = 0.$$

这就证明了

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}$$

线性无关, 因而它是 $V_1 + V_2$ 的一组基, 故维数公式成立.

证毕

从维数公式可以看到，和的维数往往要比维数的和来得小。例如，在三维几何空间中，两张通过原点的不同的平面之和是整个三维空间，而其维数之和却等于 4。由此说明这两张平面的交是一维的直线。

推论 如果 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1 , V_2 的维数之和大于 n , 那么 V_1, V_2 必含有非零的公共向量.

证明 由假设

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) > n.$$

但因 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间而有

$$\dim(V_1 + V_2) \leq n,$$

所以 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

即, $V_1 \cap V_2$ 中含有非零向量.

证毕

下面的求解过程用到以前学过的如下定理：

定理：(1) 若矩阵 A 经有限次初等行变换变为矩阵 B ， A 的行向量组与 B 的行向量组等价，而 A 的任意 k 个列向量与 B 中对应的 k 个列向量有相同的线性关系.

(2) 若矩阵 A 经有限次初等列变换变为矩阵 B ， A 的列向量组与 B 的列向量组等价，而 A 的任意 k 个行向量与 B 中对应的 k 个行向量有相同的线性关系.

例 5 设 $V = P^4$, $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 其中

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, -3), \alpha_2 = (-1, -1, 2, 1),$$

$$\alpha_3 = (-1, -3, 0, 5),$$

$$\beta_1 = (-1, 0, 4, -2), \beta_2 = (0, 5, 9, -14),$$

求 $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 的维数与基.

解： 因为

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) \\ &= L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大线性无关组就是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 把向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 中每个向量作为矩阵的一列, 构造矩阵 A :

$$A^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta_1^T, \beta_2^T)$$

对 A 进行初等行变换, 化成行最简形:

$$A^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta_1^T, \beta_2^T)$$

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, -3)$$

$$\alpha_2 = (-1, -1, 2, 1)$$

$$\alpha_3 = (-1, -3, 0, 5)$$

$$\beta_1 = (-1, 0, 4, -2)$$

$$\beta_2 = (0, 5, 9, -14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 5 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由A的行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, -3)$$

$$\alpha_2 = (-1, -1, 2, 1)$$

$$\alpha_3 = (-1, -3, 0, 5)$$

$$\beta_1 = (-1, 0, 4, -2)$$

$$\beta_2 = (0, 5, 9, -14)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 线性无关, 且 $\alpha_3 = -2\alpha_1 - \alpha_2$,

$\beta_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\beta_1$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是

$V_1 + V_2$ 的一组基, 维 $(V_1 + V_2) = 3$;

α_1, α_2 是 V_1 的一组基, 维 $(V_1) = 2$, β_1, β_2

是 V_2 的一组基, 维 $(V_2) = 2$.

由 $\beta_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\beta_1$ 得

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 = \beta_2 - 4\beta_1 = (-4, -5, 7, 6) \in V_1 \cap V_2$$

因为由维数公式

$$\begin{aligned}\dim(V_1 \cap V_2) &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) \\ &= 2 + 2 - 3 = 1.\end{aligned}$$

于是 $(-4, -5, 7, 6)$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的一组基.