第八章 λ-矩阵

第三节　　不变因子

主要内容

- 行列式因子
- 标准形的唯一性
- 不变因子
- λ-矩阵可逆的条件
- 举例

一、行列式因子

在上一节，我们讨论了 λ-矩阵的标准形，其主要结论是：任何 λ-矩阵都能化成标准形. 但是矩阵的标准形是否唯一呢？答案是肯定的. 为了证明唯一性，要引入矩阵的行列式因子的概念.

1. 定义

定义 5 设 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 k，$1 \le k \le r$，$A(\lambda)$ 中必有非零的 k 级子式. $A(\lambda)$ 中全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶**行列式因子**.

由定义可知，对于秩为 r 的 λ-矩阵，行列式因子一共有 r 个. 行列式因子的意义就在于，它在初等变换下是不变的.

2. 行列式因子的性质

定理 3 等价的 λ - 矩阵具有相同的秩与相同的各阶行列式因子.

证明 我们只要证明，λ - 矩阵经过一次初等行变换，秩与行列式因子是不变的.

设 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 经过一次初等行变换变成 $B(\lambda)$，$f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别是 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子. 我们证明 $f(\lambda) = g(\lambda)$. 下面分三种情形讨论.

1) $A(\lambda)$ 经初等行变换 (1) 变成 $B(\lambda)$. 这时 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式或者等于 $A(\lambda)$ 的某个 k 阶子式，或者与 $A(\lambda)$ 的某一个 k 阶子式反号, 因此 $f(\lambda)$ 是$B(\lambda)$ 的 k 阶子式的公因式，从而 $f(\lambda) \mid g(\lambda)$.

2) $A(\lambda)$ 经初等行变换 (2) 变成 $B(\lambda)$. 这时 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式或者等于 $A(\lambda)$ 的某个 k 阶子式, 或者等于 $A(\lambda)$ 的某一个 k 阶子式的 c 倍 , 因此 $f(\lambda)$ 是 $B(\lambda)$ 的 k 阶子式的公因式，从而 $f(\lambda) \mid g(\lambda)$.

3) $A(\lambda)$ 经初等行变换 (3) 变成 $B(\lambda)$. 这时 $B(\lambda)$ 中那些包含 i 行与 j 行的 k 阶子式和那些不包含i 行的 k 阶子式都等于 $A(\lambda)$ 中对应的 k 阶子式；$B(\lambda)$中那些包含 i 行但不包含 j 行的 k 阶子式，按 i 行分成两部分，而等于 $A(\lambda)$ 的一个 k 阶子式与另一个k 阶子式的 $\pm\varphi(\lambda)$ 倍的和，也就是 $A(\lambda)$ 的两个 k 阶子式的组合. 因此 $f(\lambda)$ 是 $B(\lambda)$ 的 k 阶子式的公因式，从而 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.

对于列变换，可以完全一样地讨论．总之，如果 $A(\lambda)$ 经一次初等变换变成 $B(\lambda)$，那么

$$f(\lambda) \mid g(\lambda) .$$

但由于初等变换是可逆的，$B(\lambda)$ 也可以经一次初等变换变成 $A(\lambda)$．由上面的讨论，同样应有

$$g(\lambda) \mid f(\lambda) .$$

于是 $f(\lambda) = g(\lambda)$.

当 $A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式为零时，$B(\lambda)$ 的全部 k 阶子式也就为零；反之亦然.

因此， $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 既有相同的各阶行列式因子，又有相同的秩.

证毕

二、标准形的唯一性

1. 标准形的行列式因子

设标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, … , $d_r(\lambda)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ (i = 1, 2, … , r-1)．不难证明, 在这种形式的矩阵中，如果一个 k 阶子式包含的行与列的标号不完全相同，那么这个 k 阶子式一定为零. 因此，为了计算 k 阶行列式因子，只要看由 i_1 , i_2 , …, i_k 行与 i_1 , i_2 , …, i_k 列 $(1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le r)$ 组成的 k 阶子式就行了， 而这个k 阶子式等于

$$d_{i_1}(\lambda)d_{i_2}(\lambda)\cdots d_{i_k}(\lambda).$$

显然，这种 k 阶子式的最大公因式就是

$$d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda).$$

2. 标准形的唯一性

定理 4 λ - 矩阵的标准形是唯一的.

证明 设 (1) 是 $A(\lambda)$ 的标准形．由于$A(\lambda)$ 与 (1) 等价，它们有相同的秩与相同的行列式因子，因此，$A(\lambda)$ 的秩就是标准形的主对角线上非零元素的个数 r； $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子就是

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\ (k = 1, 2, \cdots, r) \qquad (2)$$

于是

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= D_1(\lambda), \\ d_2(\lambda) &= \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_r(\lambda) &= \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

这说明 $A(\lambda)$ 的标准形 (1) 的主对角线上的元素是被 $A(\lambda)$ 的行列式因子所唯一确定的，所以 $A(\lambda)$ 的标准形是唯一的.

证毕

三、不变因子

1. 定义

定义 6 标准形的主对角线上非零元素

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$$

称为 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子.

2. 性质

定理 5 两个 λ - 矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者，它们有相同的不变因子.

证明 等式 (2) 与 (3) 给出了 λ - 矩阵的行列式因子与不变因子之间的关系. 这个关系式说明行列式因子与不变因子是相互确定的. 因此，说两个矩阵有相同的各阶行列式因子，就等于说它们有相同的各级不变因子.

必要性已由定理 3 证明.

充分性是很明显的. 因为若 λ - 矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 和同一个标准形等价，因而它们也等价. **证毕**

四、λ - 矩阵可逆的条件

由 (3) 可以看出，在 λ - 矩阵的行列式因子之间，有关系

$$D_k(\lambda)|D_{k+1}(\lambda)\ (k=1,2,\cdots,r-1) \qquad (4)$$

在计算λ –矩阵的行列式因子时，常常是先计算最高阶的行列式因子．这样，由 (4) 我们就大致有了低级行列式因子的范围了.

作为一个例子，我们来看可逆矩阵的标准形.

设$A(\lambda)$为一个 $n\times n$ 可逆矩阵，由 定理 1 知

$$|A(\lambda)| = d,$$

其中 d 是一非零常数. 这就是说,

$$D_n(\lambda) = 1.$$

于是由 (4) 可知, $D_k(\lambda) = 1\ (k = 1, 2, \ldots, n)$, 从而

$$d_k(\lambda) = 1\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

因此, 可逆矩阵的标准形是单位矩阵 E. 反过来, 与单位矩阵等价的矩阵一定是可逆的, 因为它的行列式是一个非零数. 这就是说, 矩阵可逆的充分必要条件是它与单位矩阵等价.

设矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，则由矩阵等价的充分必要条件知，存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$, $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$，使

$$A(\lambda) = P_1P_2 \dots P_l B(\lambda) Q_1Q_2 \dots Q_t .$$

特别地，当 $B(\lambda) = E$ 时，就得到

定理 6 矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充分必要条件是它可以表成一些初等矩阵的乘积.

由此又得到矩阵等价的另一条件

推论 两个 $s\times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件是，有一个 $s\times s$ 可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $Q(\lambda)$，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)\,A(\lambda)\,Q(\lambda)\,.$$

五、举例

例 试求下列矩阵的不变因子:

(1) $$\begin{pmatrix} -\lambda+2 & (\lambda-1)^2 & -\lambda+1 \\ 1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda^2-2 & -(\lambda-1)^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

(1) 解：

$$\begin{pmatrix} -\lambda+2 & (\lambda-1)^2 & -\lambda+1 \\ 1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda^2-2 & -(\lambda-1)^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}.$$

所以不变因子为： $1, \lambda-1, \lambda(\lambda-1).$

(2) 解:

$$
\begin{pmatrix}
\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\
-\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\
0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\
0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{初等变换}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2-\beta^2 & 2\beta(\lambda+\alpha) \\
0 & 0 & 2\beta(\lambda+\alpha) & -(\lambda+\alpha)^2+\beta^2
\end{pmatrix}.
$$

下面分两种情况进行讨论.

1）当 $\beta=0$ 时，矩阵的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2-\beta^2 & 2\beta(\lambda+\alpha) \\ 0 & 0 & 2\beta(\lambda+\alpha) & -(\lambda+\alpha)^2+\beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta=0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

所以不变因子为：

$1, 1, (\lambda+\alpha)^2,$

$(\lambda+\alpha)^2.$

2）当 $\beta \neq 0$ 时，矩阵的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2-\beta^2 & 2\beta(\lambda+\alpha) \\ 0 & 0 & 2\beta(\lambda+\alpha) & -(\lambda+\alpha)^2+\beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t=\lambda+\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-\beta^2 & 2\beta t \\ 0 & 0 & 2\beta t & -t^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-\beta^2 & 2\beta t \\ 0 & 0 & 2\beta t & -t^2+\beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - \frac{t}{2\beta} c_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 2\beta t \\ 0 & 0 & t^3/2\beta + 3\beta t/2 & -t^2+\beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{\beta^2} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2t/\beta \\ 0 & 0 & t^3/2\beta + 3\beta t/2 & -t^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2t/\beta \\ 0 & 0 & t^3/2\beta + 3\beta t/2 & -t^2+\beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 + \frac{2t}{\beta} c_3}$$

$$\xrightarrow{r_4 - \left(\frac{t^3}{2\beta} + \frac{3\beta t}{2}\right) r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^3/2\beta + 3\beta t/2 & t^4/\beta^2 + 2t^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4/\beta^2 + 2t^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4/\beta^2 + 2t^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta^2 r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(t^2 + \beta^2\right)^2 \end{pmatrix}.$$

即当 $\beta \neq 0$ 时，不变因子为 $1, 1, 1, \left(t^2 + \beta^2\right)^2$.

(3) 解：

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^4 \end{pmatrix}.$$

所以不变因子为 $1, 1, 1, (\lambda-1)^4$.