第一节　数　域

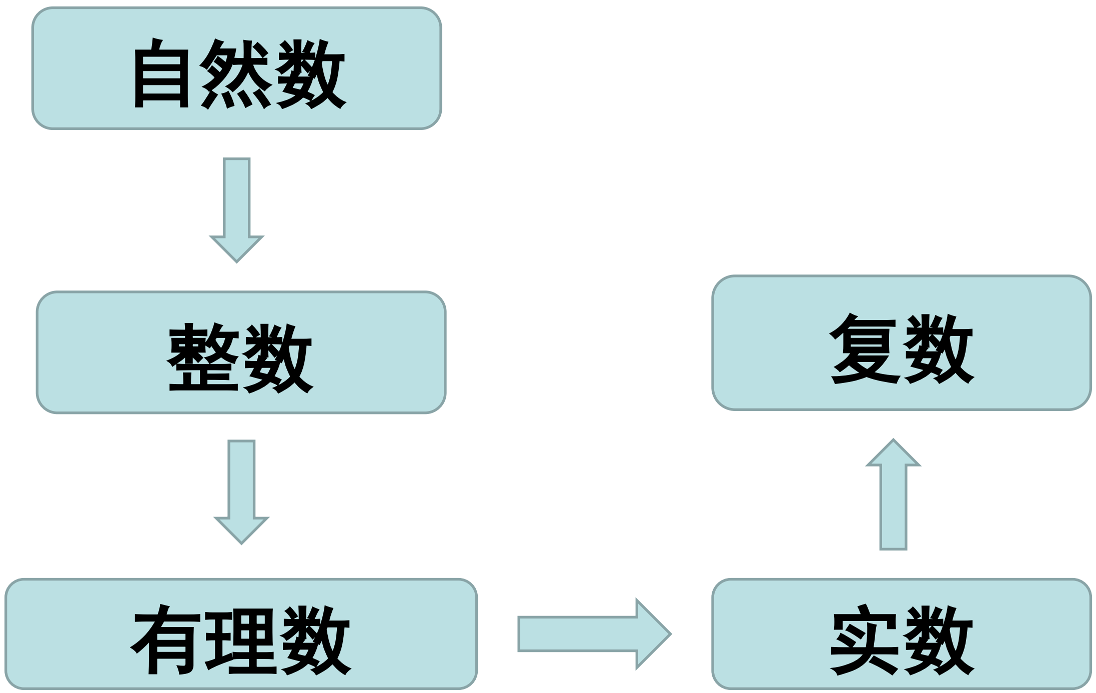
主要内容

- 前言
- 数域的定义
- 举例

一、前言

多项式是代数学中最基本的对象之一，它不但与高次方程的讨论有关,而且在进一步学习代数以及其他数学分支时也都会碰到.在中学代数中我们学过多项式，现在的讨论可以认为是中学所学知识的加深，且推广到更一般的情况.

数的发展历程



这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入.

按照所研究的问题，我们常常需要明确规定所考虑的数的范围. 譬如说，在解决一个实际问题中列出了一个二次方程，这个方程有没有解就与未知量所代表的对象有关.

任意两个整数的商不一定是整数，限制在整数的范围内，除法不是普遍可以做的，而在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可以做的.

数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数.

代数性质: 关于数的加、减、乘、除等运算的性质.

代数所研究的问题主要涉及数的代数性质.

数集: 把某些数当作整体来考虑的时候，称它为一个数的集合，简称数集.

二、数域的定义

定义 1 设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1． 如果 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个**数域**.

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域. 这三个数域我们分别用字母 Q，R，C 来代表.

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中，我们就说数集 P 对这个运算是**封闭的.** 因此，数域的定义也可以说成，如果一个包含 0，1 在内的数集 P 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为 0)是封闭的，那么 P 就称为一个数域.

单选题 1分

设置

全体自然数组成的集合是数域吗?

A 不是

B 是

提交

单选题 1分

设置

全体整数组成的集合是数域吗?

A 是

B 不是

提交

三、举例

例 1 所有具有形式

$$a+b\sqrt{2}$$

的数(其中 a , b 是任何有理数)，构成一个数域．通常用 $Q(\sqrt{2})$ 来表示这个数域．显然，数集 $Q(\sqrt{2})$ 包含 0 与 1 并且它对加减法是封闭的． 现在证明它对乘除法也是封闭的．我们知道

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$

$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a, b, c, d 都是有理数，所以

$$ac+2bd, \quad ad+bc$$

也是有理数．这就是说乘积

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$

还在 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ 内，所以 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ 对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}\neq 0$，而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

因为 a, b, c, d 都是有理数，所以

$$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2},\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$$

也是有理数．这就证明了$\mathrm{Q}(\sqrt{2})$对除法封闭.

例 2 所有可以表成形式

$$\frac{a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n}{b_0 + b_1\pi + \cdots + b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中 n,m 为任意非负整数，a_i , b_j ($i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m$)是整数.

例 3 所有奇数组成的数集，对于乘法是封闭的，但对于加、减法不是封闭的. $\sqrt{2}$ 的整数倍的全体组成一数集，它对于加、减法是封闭的，但对于乘除法不封闭. 所以，以上两个数集都不是数域.

最后，我们指出数域的一个重要性质. 所有的数域都包含有理数域作为它的一部分. 事实上，设 P 是一个数域，由定义，P 含有 1． 根据 P 对于加法的封闭性，$1+1=2$, $2+1=3$, … , $n+1=n+1$, … 全在 P 中，换句话说，P 包含全体自然数.

又因 0 在 P 中，再由 P 对减法的封闭性，$0-n=-n$ 也在 P 中，因而 P 包含全体整数．任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由 P 对除法的封闭性即得上述结论．