第 五 节　　矩 阵 的 分 块

主要内容

- 矩阵分块法
- 分块矩阵的运算

一、矩阵分块法

1. 定义

对于行数和列数较高的矩阵A，运算时常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算． 我们将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵， 每个小矩阵称为A的子块，**以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.**

例如将3×4矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多，下面举出三种分块形式:

(1) $$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

(2) $$\left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

(3) $$\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$(1)\quad \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

分法(1)可记为

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$B_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad B_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

即$B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$为$A$的子块，而$A$形式上成为以这些子块为元素的分块矩阵. 分法 (2) 及 (3) 的分块矩阵可以类似写出.

2. 常用的分块法

设有$s \times n$矩阵$A = \left(a_{ij}\right)_{s \times n}$，则对$A$有以下三种常用的分块方法：

1） 按行分块

即把A的每一行当作一个子块，这时每个子块为一行向量，也就是说，矩阵 A 是由一个行向量组组成：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}.$$

2） 按列分块

即把A的每一列当作一个子块，这时每个子块为一列向量，也就是说，矩阵 A 是由一个列向量组组成：

$$A = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n)$$

3） 分块对角矩阵

当n阶矩阵$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$中非零元素都集中在主对角线附近时，有时可将$A$分成下面的分块对角矩阵(准对角矩阵).

准对角矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}$$

其中A_i是n_i阶方针$(i=1,2,\cdots,l)$.

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.

1. 分块矩阵的加法

设矩阵A与B的行数相同、列数相同，采用相同的分块方法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中A_{ij}, B_{ij}的行数和列数都相同，那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

例 1

设$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & A_2 \end{pmatrix}$

$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} B_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B_2 \end{pmatrix}$

求$A+B$.

解： 将A,B分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & A_2 \end{pmatrix}，其中 \quad A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B_2 \end{pmatrix}，其中 \quad B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$
$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & A_2+B_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix}$$

所以$A+B=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$

2. 分块矩阵的数乘运算

设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$是常数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

3. 分块矩阵的乘法运算

设A为$s\times n$矩阵， B为$n\times m$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix}$$

其中每个A_{ij}是$s_i\times n_j$矩阵，每个B_{ij}是$n_i\times m_j$矩阵，于是有

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$C_{pq}=\sum_{k=1}^{l} A_{pk}B_{kq}\,(p=1,2,\cdots,t;q=1,2\cdots,r).$

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$$

求AB.

解： 把A,B分块成

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2&0_{2\times 2}\\A_1&E_2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}E_2&0_{2\times 2}\\A_1&E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1B_{12}+B_{22}\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{aligned}A_1B_{11}+B_{21}&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$A_1B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

例 3　设A,B都是n阶矩阵，$AB=O$，证明

$$rank(A)+rank(B)\le n.$$

证明：　设$B=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]$，则

$$AB=A[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]=[A\beta_1 \quad A\beta_2 \quad \cdots \quad A\beta_n]$$

所以

$$AB=O\Leftrightarrow A\beta_1=0,A\beta_2=0,\cdots,A\beta_n=0.$$

因此，由$AB=0$知，B的每一列向量都是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量．从而

$$rank(B)\leq n-rank(A)$$

即

$$rank(A)+rank(B)\leq n.$$

4. 分块矩阵的转置

$$\text{设}A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

$$\text{则}A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}.$$

5. 分块对角矩阵的运算

形式如

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & O \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_l \end{pmatrix}$$

矩阵，其中$a_i(i=1,2,\cdots,l)$是数，通常称为**对角矩阵**.

设A为n阶矩阵，且A可分成如下形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}$$

称为**分块对角矩阵或准对角矩阵**，其中A_i为n_i阶方阵，

$$A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_l).$$

分块对角矩阵的性质

1） $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_l|$;

2） 若$|A_i| \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, l)$，则$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}$$

设A, B是两个n阶矩阵，且采用相同的分法可把它们都分成分块对角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_l \end{pmatrix}$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_lB_l \end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & O \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l+B_l \end{pmatrix}.$$

矩阵求逆(分块)

设n阶矩阵D分块为

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

其中A,B分别是k阶和r阶的可逆矩阵，C是$r\times k$矩阵，O是$k\times r$矩阵，求D^{-1}.

首先因为

$$|D| = |A||B|$$

（证明见第二章第六节 例 3 ）

所以当A, B可逆时，D也可逆. 设

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11} + BX_{21} & CX_{12} + BX_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases} AX_{11} = E_k \\ AX_{12} = O \\ CX_{11} + BX_{21} = O \\ CX_{12} + BX_{22} = E_r \end{cases}$$

由第一、二式得

$$X_{11} = A^{-1}, \qquad X_{12} = A^{-1}O = O,$$

代入第四式，得

$$X_{22} = B^{-1},$$

代入第三式，得

$$BX_{21}=-CX_{11}=-CA^{-1},\quad X_{21}=-B^{-1}\,CA^{-1}$$

因此

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别地，当$C=O$时，有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

用矩阵分块的方法：(1) 计算A^2，AB；(2) 求A^{-1}.

解： 把矩阵A, B进行如下分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \qquad B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

并令

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix},\qquad B_{12}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad B_{22}=\begin{pmatrix}0&4\\2&4\\1&4\end{pmatrix}.$$

则 1）

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$A^2=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^2&O\\O&A_2^2\end{pmatrix},$$

其中

$$A_1^2=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&12\\12&29\end{pmatrix},$$

$$A_2^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&1\\0&4&-4\\0&0&4\end{pmatrix},$$

所以

$$A^2=\begin{pmatrix}5 & 12 & 0 & 0 & 0\\ 12 & 29 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_{11} & A_1B_{12}\\ A_2B_{21} & A_2B_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$A_1B_{11}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -3 & 10\end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_2B_{21}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_2B_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix},$$

所以

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 & 0 \\ -3 & 10 & 17 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

2） 因为$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$， 所以$A=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$，

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$， $A_2=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -1/8\\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}.$$

例 5 解矩阵方程$AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

解： 令

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\end{pmatrix}$$

则
$$\begin{cases}x_1-3x_4=-1,\\ -2x_1+6x_4=2,\\ x_2-3x_5=0,\\ -2x_2+6x_5=0,\\ x_3-3x_6=-2,\\ -2x_3+6x_6=4,\end{cases}$$

解线性方程组得

$$X=\begin{pmatrix} 3c_1-1 & 3c_2 & 3c_3-2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

其中c_1, c_2, c_3为任意常数.

例 6 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，求$|A^8|,A^4,A^{-1}$.

解:

$$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},\qquad A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix},$$

$$|A^8|=|A|^8=(|A_1A_2|)^8=(|A_1|)^8(|A_2|)^8=(-25)^8 4^8=10^{16}.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1^4=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^4=\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{pmatrix},$$

$$A_2^4=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^4=\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 8 & 2^2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 2^6 & 2^4 \end{pmatrix},$$

所以$A^4=\begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A_1|}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-25}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A_2|}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/25 & 4/25 & 0 & 0 \\ 4/25 & -3/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

例 7 已知$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，其中$P=\begin{pmatrix}-1&4\\1&1\end{pmatrix}$，求$A^{11}$.

解: $P=\begin{pmatrix}-1&4\\1&1\end{pmatrix}$， 由于$|P|=-5\neq 0$，所以$P$可逆.

$$P^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}1&-4\\-1&-1\end{pmatrix},$$

由于$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，那么$A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1}$.

$$A^{11}=\left(P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}\right)^{11}$$

$$=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}\,P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{11}P^{-1}\quad=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/5 & 4/5\\ 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot 2^{11} & \frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot 2^{11}\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot 2^{11} & -\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot 2^{11}\end{pmatrix}.$$