高等代数学（第四版）习题解答
第四章　线性映射

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

4.1　线性映射的概念

1. (1) 是. 显然 $\boldsymbol{\varphi}(x,y)=n(x,y)=(nx,ny)$. 对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}((x_1,y_1)+(x_2,y_2))&=\boldsymbol{\varphi}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(n(x_1+x_2),n(y_1+y_2))\\&=(nx_1,ny_1)+(nx_2,ny_2)=\boldsymbol{\varphi}(x_1,y_1)+\boldsymbol{\varphi}(x_2,y_2),\\\boldsymbol{\varphi}(k(x_1,y_1))&=\boldsymbol{\varphi}(kx_1,ky_1)=(nkx_1,nky_1)=k(nx_1,ny_1)=k\boldsymbol{\varphi}(x_1,y_1).\end{aligned}$$

(2) 是. 经计算可得 $\boldsymbol{\varphi}(x,y)=(x\cos\dfrac{\pi}{3}-y\sin\dfrac{\pi}{3},x\sin\dfrac{\pi}{3}+y\cos\dfrac{\pi}{3})=(x,y)\boldsymbol{A}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3}&\sin\dfrac{\pi}{3}\\-\sin\dfrac{\pi}{3}&\cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}.$$

由此定义式容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘.

(3) 是. 对任意的 $f,g\in C[0,1]$, $k\in\mathbb{K}$, 容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘:

$$\boldsymbol{\varphi}(f(x)+g(x))=\int_0^x(f(t)+g(t))\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{\varphi}(f(x))+\boldsymbol{\varphi}(g(x)),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(kf(x))=\int_0^x kf(t)\mathrm{d}t=k\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=k\boldsymbol{\varphi}(f(x)).$$

(4) 否. 对一般的 $(x, y) \in V$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\boldsymbol{\varphi}(k(x, y)) = (2k^2x^2, ky) \neq (2kx^2, ky) = k\boldsymbol{\varphi}(x, y).$$

(5) 当 $(a, b) = (0, 0)$ 时, $\boldsymbol{\varphi}$ 是恒等变换, 因此是线性变换. 当 $(a, b) \neq (0, 0)$ 时, $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换. 因为 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = (a, b) \neq \mathbf{0}$, 故由高代教材的命题 4.1.2 (1) 可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换.

2. 先证充分性. 当 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时, 只需验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}_n$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta}), \\ \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{A}k\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性变换. 再证必要性. 用反证法, 若 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 由高代教材的命题 4.1.2 (1) 可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

3. 例 4.2.

4. 基础训练解答题 2.

4.2 线性映射的运算

1. 记数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵全体组成的线性空间为 $M_n(\mathbb{K})$. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵, 则由矩阵的运算规则可知

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$,

因此 $M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的代数.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 则

$$(k\boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})) = k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{I}_V(\boldsymbol{\alpha})),$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知结论成立.

3. 例 4.17.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 经计算得

$$\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知 $\boldsymbol{\varphi}$ 是幂等变换.

5. 例 4.8.

6. 例 4.12.

7. 例 4.13.

4.3 线性映射与矩阵

1. 基础训练填空题 3. 根据求导运算法则可知, $\boldsymbol{\varphi}(1)=0$, $\boldsymbol{\varphi}(x^i)=ix^{i-1}\,(1\leq i\leq n-1)$. 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 的基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 下的表示矩阵为:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

2. (1) 从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

用初等变换法可求得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&3&1\\2&1&5&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&4&4&5\\-3&-4&-6&-4\\1&1&4&1\\1&2&4&6\end{pmatrix}.$$

3. 该线性变换将 $(1,0)$ 变为 $(\cos\theta,\sin\theta)$, 将 $(0,1)$ 变为 $(-\sin\theta,\cos\theta)$. 因此它在基 $\{(1,0),(0,1)\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

4. 基础训练填空题 5. 线性变换 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^{-2}+2\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{I}_V$ 在 V 的第一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, 因此它在第二组基下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{I}.$$

5. 基础训练解答题 1. 事实上, 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m$ 分别是 V 和 U 的基, 定义 V 到 U 的线性映射 $\boldsymbol{\varphi}_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)$:

$$\boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{f}_i,\quad \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{0}\ (k\ne j).$$

则 $\{\boldsymbol{\varphi}_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)\}$ 组成向量空间 $\mathcal{L}(V,U)$ 的一组基.

6. 例 2.45 (相似矩阵有相同的迹). 由高代教材的定理 2.5.2 可知, 相似矩阵有相同的行列式.

7. 基础训练解答题 6.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 只与自己相似, 则对任意的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 都有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 也即 $\boldsymbol{A}$ 与任意可逆阵乘法可交换, 由例 2.11 的证法 2 可知 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$. 反之, 当 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$ 时, 显然它只与自己相似, 因此 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$.

9. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似可知, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$. 因此,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

10. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行相当于左乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列相当于右乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$. 注意到 $\boldsymbol{P}_{ij}^2=\boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{ij}^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}$ 是相似变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零常数 c 相当于左乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(c)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以非零常数 c^{-1} 相当于右乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(c^{-1})$. 注意到

$$\boldsymbol{P}_i(c)\boldsymbol{P}_i(c^{-1})=\boldsymbol{P}_i(c^{-1})\boldsymbol{P}_i(c)=\boldsymbol{I}_n,$$

故 $\boldsymbol{P}_i(c^{-1})=\boldsymbol{P}_i(c)^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_i(c)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(c^{-1})$ 是相似变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以常数 c 加到第 j 行上相当于左乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列乘以常数 $-c$ 加到第 i 列上相当于右乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(-c)$. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{T}_{ij}(-c)=\boldsymbol{T}_{ij}(-c)\boldsymbol{T}_{ij}(c)=\boldsymbol{I}_n,$$

故 $\boldsymbol{T}_{ij}(-c)=\boldsymbol{T}_{ij}(c)^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(-c)$ 是相似变换.

11. 设 $\boldsymbol{\varphi}:\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是相似变换. 由于 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 故它可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 记为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_i:\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{Q}_i^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_i\,(1\leq i\leq k)$ 是相似初等变换, 从而 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_k\circ\boldsymbol{\varphi}_{k-1}\circ\cdots\circ\boldsymbol{\varphi}_1$ 是若干次相似初等变换的复合.

12. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行与第 j 分块行相当于左乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列与第 j 分块列相当于右乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}'$. 注意到 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}'=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{P}_{ij}'=\boldsymbol{P}_{ij}^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}'$ 是相似变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于左乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列右乘非异阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 相当于右乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})$. 注意到

$$\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})=\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})=\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})$ 是相似变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 j 分块行上相当于左乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 分块列右乘矩阵 $-\boldsymbol{M}$ 加到第 i 分块列上相当于右乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})$. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})=\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})=\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})$ 是相似变换.

13. 例 4.28.

14. 例 4.21.

4.4　线性映射的像与核

1. 例 4.31. $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi} = k_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) + k_2(2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4)$, $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi} = k_1(-4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) + k_2(-\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4)$.

2. 任取 $\boldsymbol{v} \in V$, 由于 $V = V_1 \oplus V_2$, 故可设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, 其中 $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$. 由 $\boldsymbol{\varphi}$ 的定义可知

$$\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),$$

再由 $\boldsymbol{v}$ 的任意性可知 $\boldsymbol{\varphi}^2 = \boldsymbol{\varphi}$.

显然, 我们有

$$\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_1 \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \text{其中 } \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\} = V_1,$$

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0},\ \text{其中 } \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\} = V_2.$$

由定义可知, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i\,(1 \le i \le r)$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{0}\,(r+1 \le j \le n)$, 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

3. 基础训练填空题 10. 答案为: $\boldsymbol{\varphi}$ 的秩为 2, 零度也是 2.

4. 例 4.39. 答案为: $\dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi} = n^2 - 1$, 一组基为:

$$\boldsymbol{E}_{ij}\,(i \ne j),\ \boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{22},\ \boldsymbol{E}_{22} - \boldsymbol{E}_{33},\ \cdots,\ \boldsymbol{E}_{n-1,n-1} - \boldsymbol{E}_{nn}.$$

5. 例 4.40.

6. 例 4.42.

7. 例 4.43.

8. 例 4.44.

9. 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 这是一个无限维线性空间, 定义 V 上的变换 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{S}$ 如下:

$$\boldsymbol{D}(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x), \quad \boldsymbol{S}(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

根据高代教材 § 4.2 习题 3 的结论, 它们都是 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{DS} = \boldsymbol{I}_V$. 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满射且 $\boldsymbol{S}$ 是单射, 但是 $\boldsymbol{D}$ 不是单射, 因为 $\boldsymbol{D}(1) = \boldsymbol{D}(0) = 0$; $\boldsymbol{S}$ 不是满射, 因为不存在 $f(x) \in V$, 使得 $\boldsymbol{S}(f(x)) = 1$. 因此 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{D}$ 都不是线性同构.

4.5　不变子空间

1. 例 4.45.

2. 例 4.46.

3. 例 4.48.

4. 例 4.50.

5. (1) 例 4.51.

(2) 先证 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{D} = L(1, x, \cdots, x^{n-2})$. 这是因为对任一 $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in V$, 有

$$\boldsymbol{D}f(x) = (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \in L(1, x, \cdots, x^{n-2});$$

反之, 对任一次数小于等于 $n-2$ 的实系数多项式 $g(x) = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, 有

$$g(x) = \boldsymbol{D}\left(\frac{b_{n-2}}{n-1}x^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{2}x^2 + b_0 x\right) \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{D}.$$

再证 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{D} = L(1)$, 这是因为如果 $f(x)$ 是次数小于 n 的实系数多项式且 $\boldsymbol{D}f(x) = 0$, 必有 $f(x) = c$ 为常数; 反之, 常数多项式的导数为 0. 由于 $1 \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{D} \cap \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{D}$, 故 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{D} \cap \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{D} \neq 0$. 注意到 $x^{n-1} \notin \mathrm{Im}\,\boldsymbol{D} + \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{D}$, 故 $V \neq \mathrm{Im}\,\boldsymbol{D} + \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{D}$.

6. 例 4.52.

复习题四

1. 例 4.3.

2. 例 4.4.

3. 例 4.5.

4. 例 4.6.

5. 例 4.7.

6. 例 4.9.

7. 例 4.10.

8. 例 4.14.

9. 例 4.15.

10. 例 4.16.

11. 因为 $\boldsymbol{\varphi}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{\varphi}$ 是满射, 故 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性同构. 考虑限制映射 $\boldsymbol{\varphi}|_U : U \to \boldsymbol{\varphi}(U)$, 由 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单射可知 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 也是单射, 显然 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 也是满射, 从而 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 是线性同构, 于是 $\dim \boldsymbol{\varphi}(U) = \dim U = r$.

设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 这是一个无限维线性空间, 定义 V 上的变换 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{S}$ 如下:

$$\boldsymbol{D}(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x), \quad \boldsymbol{S}(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

根据高代教材 § 4.2 习题 3 的结论, 它们都是 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{DS} = \boldsymbol{I}_V$, 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满射. 考虑 V 的子空间 $U = L(1)$, 容易知道 $\boldsymbol{D}(U) = 0$, 故 $\dim \boldsymbol{D}(U) = 0 \neq 1 = \dim U$, 即本题结论对无限维线性空间一般不成立.

12. 例 4.18.

13. 例 4.19.

14. 例 4.22.

15. 例 4.25.

16. 例 4.26.

17. 例 4.27.

18. 例 4.29. 答案为: 1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$, -1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

19. 例 4.30.

20. 例 4.32.

21. 例 4.33.

22. 例 4.34.

23. 例 4.35.

24. 例 4.36.

25. 例 4.37.

26. 例 4.38.

27. 例 4.41.

28. 例 4.47.

29. 例 4.49.

30. 例 4.53.

31. 例 4.54.

32. 例 4.55.

33. 例 4.56.

34. (1) (2) 例 4.57. (3) (4) 例 4.58.

35. 例 4.59.
36. 例 4.60.