

**2021年“深圳杯”**

**数学建模挑战赛D题**

**基于一个微分对策问题的机器学习能力定量评价**

**队员： 刘肇隆 （贵州大学数学与统计学院）**

**徐翊铭 （贵州大学数学与统计学院）**

**宋耀 （贵州大学数学与统计学院）**

**指导老师： 范馨月**

**基于一个微分对策问题的机器学习能力定量评价**

**摘要**

生活中有许多例如像最优控制、微分对策等具有连续动作以及状态的问题，使用机器学习方法来解决，会有效率(效果/算力)较低的缺点，那么特殊的微分对策问题是我们用来测试机器学习方法的重要途径。本文是一个古老的博弈问题即羊-犬追赶问题。该问题限制了羊在一个半径为R 的圆形区域内以一个恒定的速率v和满足在逃逸的路径上的各点与圆心的距离单调不减的任意转弯能力，而犬以常定的速率V在圆上进行围捕，防止羊逃逸和具有改变运动方向的能力

针对任务一，通过假设条件，结合犬动态追捕羊的现实情况，确定目标函数，建立针对该问题的微分对策模型，达到通过运动学精确建模求解犬围堵羊的最优策略。

针问题任务二，通过任务一中得到的多指标数据，结合各种情况，从而对羊可以逃逸胜出给出一个合理条件。

针对任务三，结合任务二，并且在任务二的假设条件下。通过机器学习给出训练方法，使得训练羊可以成功逃逸。

针对任务四。

针对任务五

关键词：微分对策模型、机器学习

**目录**

[一、问题重述 1](#_Toc13653)

[1.1 背景知识与具体问题 1](#_Toc28276)

[二、 问题分析 1](#_Toc8437)

[三、基本假设 2](#_Toc23069)

[四、符号定义与说明 2](#_Toc17437)

[五、模型建立与求解 3](#_Toc1637)

[5.1 问题一 3](#_Toc15528)

[5.1.1](#_Toc26810)

[5.1.1.1 3](#_Toc25950)

[5.1.2](#_Toc12085)

[5.2 问题二 11](#_Toc24720)

[5.2.1 11](#_Toc24732)

[5.2.1.1](#_Toc21758)

[5.3 问题三 23](#_Toc23358)

[六、模型总结 24](#_Toc12270)

[七、模型评价 24](#_Toc31611)

[八、参考文献 25](#_Toc10765)

[附录 25](#_Toc22489)

**一、问题重述**

**1.1 背景知识与具体问题**

由于机器学习的方法在解决某些问题效率或者效果不佳，例如：最优控制、微分对策这样具有连续动作和状态等问题。那么特殊的微分对策问题是测试机器学习方法好与坏的一个重要竞争案例。本文是一个经典的羊-犬博弈问题，限制羊与犬的一些能力和一些奔跑路径，建立微分对策模型，对该问题进行求解。

任务：

(1)通过运动学精确建模求解犬的最优围堵策略。

(2)假设犬以最优策略围堵，基于精确建模求解羊可以逃逸胜出的条件。

(3)假设羊理解自己的能力、限制和躲避犬围堵而逃逸的目标，但不具备 基于运动学的最优化决策知识，假设 2 中羊可以逃逸的条件被满足，给出一种机器学习方法，使得羊通过学习训练后实现逃逸。

(4)设计一套评价体系，定量评价 3 中给出的机器学习方法的学习能力

(5)提出并定量评价更多的羊逃逸机器学习方法。

1. **问题分析**

本文要解决的问题是对羊-犬逃逸问题的目标量化，以及对该目标做出合理的假设和建模，通过机器学习的方法对该系列问题进行求解并设计一套评价体系，最后提出更多的羊逃逸的机器学习方法。

针对任务一，以羊-犬博弈问题的假设数据为依据，结合现实意义与任务，模拟犬动态确定羊的奔跑方向。确定量化目标。然后假设出各个参数描述，建立微分对策模型,通过运动学精确求解犬的最优围堵策略。

针对任务二，。通过任务一中得到的量化目标的数据，以犬的最优围堵策略为基础，考虑羊逃逸胜出的条件。

针对任务三，结合任务一和任务二，选择机器学习中的对抗生成网络，对犬和羊进行训练，满足羊逃逸的条件，最后通过训练使得羊成功逃逸。



图2.1 总流程图

**三、基本假设**

在模型的建立时，我们做出如下假设：

1. 假设本文讨论犬的速度和羊的速度恒定，且V（犬的速度）大于v（羊的速 度），且在一个合理的范围内，即有一个速度比值域；
2. 假设羊的速度小于犬，且羊要逃离犬的围堵，那么羊随机改变的角度为(顺时针方向为正)。

**四、符号定义与说明**

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 符号说明 |
| tn | Bn点到B(n-1)点的时间 |
| V | 犬的速度 |
| v | 羊的速度 |
| R | 犬奔跑圆的半径 |
| A1..AN | 犬的初始点,...到最终点 |
| B1...BN | 羊的初始点....到最终点 |
| α | 羊于狼之间的夹角 |
| r | 羊初始点于圆心的距离 |
| U1（t） | 犬的x方向关于t的速度函数 |
| U3（t） | 犬的y方向关于t的速度函数 |
| U2（t） | 犬在x方向上的t速率变化函数 |
| U4（t） | 犬在y方向上的t速率变化函数 |
| τ | 累计可数个小时间段内犬跑过的角度 |
| N | R到r之间分段的次数 |
| X1（t） | t时刻犬在x轴上的位置 |
| X2（t） | t时刻羊在x轴上的位置 |
| X1（0） | 犬初始点x的坐标 |
| X2（0） | 羊初始点x的坐标 |
|  | 羊每一步改变的角度（顺时针为正） |
| Tn | An点到A(n-1)点的时间 |
| △tn | 时间差 |
| n | 羊路径上的时间分段次数 |
| T | 羊到围堵点所需时间 |
| Y1(0) | 犬初始点y的坐标 |
| Y2(0) | 羊初始点y的坐标 |
| Y1(t) | t时刻犬在y轴上的位置 |
| Y2(t) | t时刻羊在y轴上的位置 |

**五、模型建立与求解**

## 5.1 任务一

### 5.1.1 犬-羊博弈问题的背景

[博弈论](https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%9A%E5%BC%88/_blank)是数学，更确切地说是[运筹学](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%90%E7%AD%B9%E5%AD%A6" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%9A%E5%BC%88/_blank)的一个分支，谈经论道自然少不了数学语言，外行人看来只是一大堆数学公式。好在博弈论关心的是日常经济生活问题，所以不能不食人间烟火。其实这一理论是从棋弈、扑克和战争等带有竞赛、对抗和决策性质的问题中借用的术语，听上去有点玄奥，实际上却具有重要现实意义。博弈论 主要研究公式化了的激励结构间的相互作用。是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。 博弈论考虑游戏中的个体的预测行为和实际行为，并研究它们的优化策略。生物学家使用博弈理论来理解和预测[进化论](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%9B%E5%8C%96%E8%AE%BA" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%9A%E5%BC%88/_blank)的某些结果。博弈论已经成为经济学的标准分析工具之一。在生物学、经济学、国际关系、计算机科学、政治学、[军事战略](https://baike.baidu.com/item/%E5%86%9B%E4%BA%8B%E6%88%98%E7%95%A5" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%9A%E5%BC%88/_blank)和其他很多学科都有广泛的应用，本文的犬-羊博弈问题就是这些问题的一种简化。

### 5.1.2模型建立与目标量化描述

首先固定圆的半径R和犬的初始点与羊的初始点分别为A1,B1，其中 为羊与犬之间的顺时针夹角，给定一个速度比值域，选取速度比值域里的最大值。

第一步：羊随机改变一个角度，羊从B1->B2点，，时间为t1,此时分别判断犬顺或逆时针跑的下一个目标点A2与B2的距离，则犬沿着距离变小的方向奔跑到A2点，若出现距离相等的情况，则让犬随机选择顺时针或者逆时针奔跑，时间为T1,

第二步：羊又随机改变一个角度到达下一个目标点B2，时间为t2，此时犬判断奔跑的方向与上述一致,时间为T2，以此类推。

第三步：若在某一Bn（1<n<N-1），犬可以奔跑到羊下一个目标点在圆R上的对应点，此时时间为T(n-1)，那么有一个徘徊时间，=t(n-1)-T(n-1)。此时犬在该对应点上观察，羊下一步随机奔跑的方向，采取奔跑方向的方案与第一步相同。重复第二三步骤。

第四步：若在BN围堵点，犬可以到达该围堵点，可以算出犬与羊之间的距离应为0，以及徘徊时间的和，此时可以调整下犬与羊之间的速度比，使得徘徊时间和达到最小。若在BN围堵点，犬无法达到该围堵点，调整下犬与羊之间的速度比，使得犬与羊的距离最小和徘徊时间较短。

由于任务一要求是根据运动学精确建模求解犬围堵羊的最优策略即是以犬为重心作为考虑，假设羊下一步的运动方向是随机的。本文将通过随机给出不同位置犬羊的初始点以及给出犬与羊的速度比值域，，将羊逃离圆心的路程分段考虑即将分成N个同心圆，每个同心圆之间的两点路径则为羊的运动路径，以及将羊在两点之间的时长进行分段，可以得出每个时刻犬与羊的速度，运动方向，以及两者之间位置关系,从而使得犬可以观察羊的移动方向，实现动态围堵。目标函数是为了使得犬在围堵点的徘徊时间最小，以及运动方向最优。分段进行分析体现了微分的思想，根据上述的假设条件，以及速度等相关物理知识建立的微分方程，如下：

 （1）

其中x(t)，y(t)分别为犬在t时刻在x方向上和y方向上的速度函数，U2（t）为犬在x方向上的t速度变化函数，U4（t）为犬在x方向上的t速度变化函数。n为将tn分成n个时间段，△t=tn/n，τ为在△t时刻内犬所跑过的圆心角，

目标函数:



其中T为羊到围堵所需时间，X1(T),X2(T)分别代表犬，羊在T时刻在x轴上的数值,Y1(T),Y2(T)分别代表犬，羊在T时刻在y轴上的数值。是所需徘徊时间。

#### 5.1.2.1算法设计图



#### 5.1.2.2模型求解

这边把程序生成的图画上去

在该模型下，随机固定一个圆，以及给出一个半径R,我们给出了犬与羊的随机生成点，将羊初始点与圆R的距离分成N段，从羊的初始点随机给出一个变化角度，接着根据犬羊之间的距离进行判断犬奔跑的方向，，让羊沿着该角度移动到下一个同心圆上的点，此时让犬也移动到对应的点位，此时计算两者所需的时间，若犬也能够到达相应点位，计算犬所需时间，可以对羊进行观察，判断羊下一步的奔跑方向，动态的调整出发速度与奔跑方向。我们的最优围堵策略体现在虽然不可以在中途调整犬的移动速度，但是调整犬出发时奔跑的速度以及不断的去判断犬与羊的之间的位置，改变移动的方向，最终使得两点之间的距离最小以及所需的徘徊时间较小，从调整速度和缩短时间表现了犬围堵羊的最优策略。

## 5.2 任务二

### 5.2.1目标指标

### 任务二是建立在任务一以犬最优围堵策略的基础上进行， 即如何实现羊逃逸胜出的条件

#### 5.2.1.1羊逃逸情形

若在任务一的模型基础上，在T的时刻，若要实现羊逃逸的胜利的场景，那么在T时刻时，羊到达围堵点，此时犬应该还未到达，这时候从改点跑出圆R的范围，实现逃逸胜利

#### 5.2.1.2羊逃逸的条件

若在任务一的模型基础上，羊要实现逃逸，则应在羊的逃逸的角度上看待问题即羊奔跑的下一步方向也要与犬的距离作为判断条件，即羊奔跑的是沿着出发点的切线方向且下一点的与犬的距离增大的方向是进行移动。且在羊在到达围堵点时，羊还未到达围堵点。所以得出的逃逸条件如下：

1. 羊有自己对奔跑方向的的判断。
2. 在围堵点时，犬还未到围堵点。

## 5.3任务三

**5.4任务四**

**5.4.1 任务目标**

设计一套评价体系，定量评价 3 中给出的机器学习方法的学习能力。

**5.4.2确定评价指标**

该任务的目的就是对机器学习方法的学习能力进行评价，实际上就是对所有的可能性，进行仿真模拟。因此本文将从运行时间、成功逃逸占比等指标。

表5.4.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 指标 | | | |
| 类别 | 运行时间 | 逃逸成功占比 | 时间复杂度 | 空间复杂度 |

得到各指标的参数，我们采用熵权评价指标法。

熵权评价指标法的步骤：

1. 数据标准化

将各指标的数据进行标准化处理。假定给定了K个指标

，其中。假设对各指标数据标准化后的值为，那么

1. 求各指标的信息熵

根据信息论中信息熵的定义，一组数据的信息熵，其中，如果，则定义

1. 确定各指标权重

根据信息熵的计算公式，计算出各指标的信息熵为。通过信息熵计算各指标的权重：

1. 计算得分

根据计算出的指标权重，以及各指标水平的评分。设Zl为第l个指标的最终得分，则。

得到权重后我们对该机器学习各指标的学习能力进行一个评分，从而评价该机器学习对哪些指标学习能力较强。

5.5任务五

5.5.1 任务目标

提出并定量评价更多的羊逃逸机器学习方法

5.5.2分析任务

**六、模型总结**

**七、模型评价**

**八、参考文献**

**附录**