第7章

常微分方程的数值解法

7.1.1 一阶常微分方程的初值问题

考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad a \le t \le b \\ u(a) = u_0 \end{cases} \qquad \textbf{(7-1)}$$

或与其等价的积分方程

$$u(t) = u_0 + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad \textbf{(7-2)}$$

若$\boldsymbol{f(t,u)}$满足**Lipschitz**条件，即存在常数**L**，对任意$\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$,

均有

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \le L|u - \bar{u}|$$

则（**7-1**）的解存在且唯一。

首先我们建立求解（**7-1**）或（**7-2**）的数值方法。

什么是数值解法?

它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列事先取定的$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$中的离散点（称为节点）

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \le b$$

通常取成等距，即$\boldsymbol{t_i = t_0 = ih, i = 1, 2, \cdots, N}$， 其中$\boldsymbol{h > 0}$称为步长。

求出其上的未知函数$\boldsymbol{u(t)}$之值 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_N)$的近似值:

$$u_1, u_2, \cdots, u_N$$

而$\boldsymbol{u_1, u_2, \cdots, u_N}$通常称为初值问题的数值解。

7.1.2 线性单步法

考虑初值问题(7−1)，首先将区间$[a, b]$划分为N个等距小区间，小区间长度 $h=\dfrac{b-a}{N}$ 并选取网格点，点列$t_i=ih$, $i=0, 1, \cdots, N$。已知$u(t_0)=u_0$, 则可计算

$$f\left(t_0, u\left(t_0\right)\right)= f\left(t_0, u_0\right)=u'\left(t_0\right),$$

利用**Taylor**公式，在$t=t_0$处将$u(t_1)$展开

$$u\left(t_1\right)=u\left(t_0\right)+u'\left(t_0\right)h+\frac{1}{2!}u''\left(\xi\right)h^2$$

$$=u\left(t_0\right)+f\left(t_0, u_0\right)h+R_0 ,$$

其中 $R_0=\dfrac{1}{2!}u''\left(\xi\right)h^2$, 若步长$h$足够小，则可忽略二次项$R_0$, 记得：

$$u_1=u_0+h\,f\left(t_0, u_0\right)$$

这里u_1是$u(t_1)$的近似值, 利用u_1又可以算出u_2, 如此下去可算出$u(t)$在所有节点上的近似值。

一般的计算公式为:

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \tag{7-3}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

这就是求解初值问题的**Euler**公式。

Euler方法是最简单的数值方法。

练习 用**Euler**公式计算如下初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 100u^2 & 0 < t \le 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解$u(t)$在t=0. 3处的数值解u_3。（取步长h=0.1,小数点后保留4位）

解：相应的Euler公式：

$$u_{n+1} = u_n + h\left(t_n^2 + 100u_n^2 \right) = u_n + 0.1\times\left(t_n^2 + 100u_n^2 \right)$$

由初值$u(0) = u_0 = 0$，计算得

$$u(0.1) \approx u_1 = u_0 + 0.1\times\left(t_0^2 + 100u_0^2 \right)$$

$$= 0.0 + 0.1\times\left(0.0 + 100\times 0.0\right) = 0.0000$$

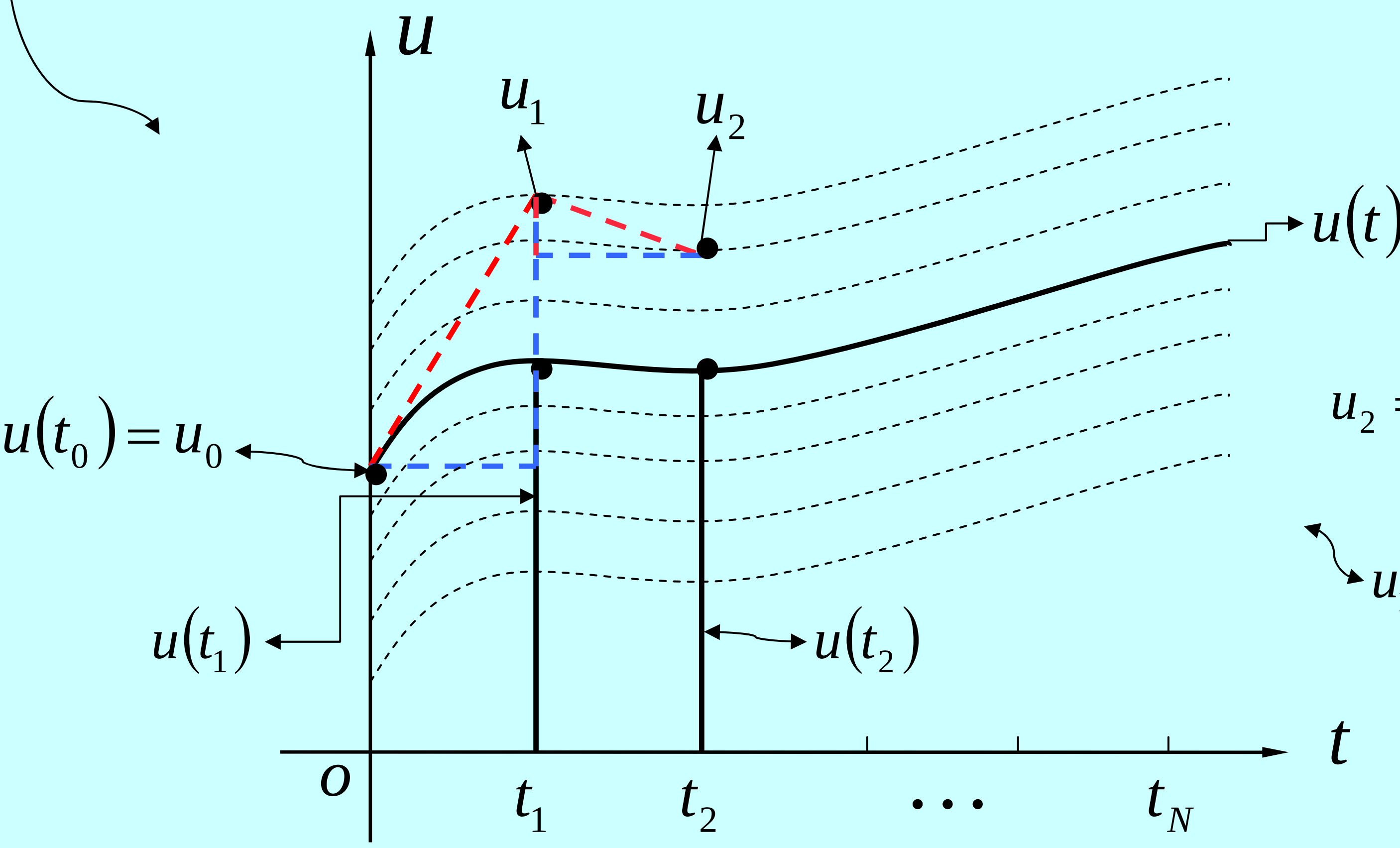
$$u(0.2) \approx u_2 = u_1 + 0.1\times\left(t_1^2 + 100u_1^2 \right)$$

$$= 0.0 + 0.1\times\left(0.1^2 + 100\times 0.0\right) = 0.0010$$

$$u(0.3) \approx u_3 = u_2 + 0.1\times\left(t_2^2 + 100u_2^2 \right)$$

$$= 0.0010 + 0.1\times\left(0.2^2 + 100\times\left(0.0010\right)^2\right) = 0.0051$$

$$u'(t_0)\cdot h = f(t_0, u_0)\cdot h \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)\cdot h$$



$$u_2 = u_1 + f(t_1, u_1)\cdot h$$

$$\Uparrow$$

$$u_1 \cdot h = f(t_1, u_1)\cdot h$$

Euler法（切线法）的几何解释

利用**Taylor**公式，在$t=t_{n+1}$处将$u(t_n)$展开成：

$$u(t_n)=u(t_{n+1})-u'(t_{n+1})h+\frac{1}{2!}u''(\xi)h^2$$

舍去二次项 $-\frac{1}{2!}u''(\xi)h^2$，用u_n近似代替$u(t_n)$得：

一般的计算公式为：

$$u_{n+1}=u_n+h\,f(t_{n+1},u_{n+1})\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad \textbf{(7-4)}$$

这就是求解初值问题的隐式**Euler**公式。

将**Euler**与隐式**Euler**公式做算术平均，可得梯形公式：

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right] \qquad \textbf{(7-5)}$$

$$n=0,1,2,\cdots,N-1$$

也可用数值积分公式推到上述公式, 即令**(7-2)**式中的积分限为区间$[\boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{t_{n+1}}]$的端点，即有

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))\mathrm{d}t$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

对(**7-2**)右端积分项使用左矩形求积公式, 则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))\mathrm{d}t \approx u(t_n) + h\, f(t_n, u(t_n))$$

分别用$\boldsymbol{u_n}$替代$u(t_n)$, $\boldsymbol{u_{n+1}}$替代$u(t_{n+1})$，并记

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Euler公式又称矩形公式。

对(7-2)右端积分项使用右矩形求积公式, 则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t\,, u(t))\mathrm{d}t \approx u(t_n) + h\, f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

分别用$\boldsymbol{u_n}$替代，$\boldsymbol{u_{n+1}}$替代$u(t_{n+1})$的近似值u_{n+1}，记

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

隐式（后）**Euler公式**，又称**右矩形公式**。

对**(7-2)**右端的积分使用梯形求积分式计算，

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u(t))dt \approx \frac{h}{2}[f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n) +$$

令

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1}) \right)$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N$$

得梯形法。

梯形公式与**Euler**公式相比要精确的多，但是梯形公式的计算量要大一些。 每步计算要解一个关于u_{n+1}的非线性方程，从而要用如下迭代公式：

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$， 反复迭代，即

$$u_{n+1}^{[1]} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[0]}) \right]$$

一般的迭代公式表示为：$k=0, 1, 2, \cdots$,

$$u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]}) \right]$$

如此迭代下去得到迭代序列：

$$u_{n+1}^{[0]},\quad u_{n+1}^{[1]},\quad u_{n+1}^{[2]},\ \cdots,\quad u_{n+1}^{[k]},\ \cdots$$

若序列$\{u_{n+1}^{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$收敛于$u_{n+1}^{[*]}$，当 $k\to\infty$ 时，得到：

$$u_{n+1}^{[*]}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1}^{[*]})\right)$$

则取 $u_{n+1}=u_{n+1}^{[*]}$ 为第 $n+1$ 个近似值。

在实际计算中，通常要求满足$\left|u_{n+1}^{[k+1]}-u_{n+1}^{[k]}\right|<\varepsilon$为终止条件，此时取$u_{n+1}^{[k+1]}$作为$u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1}。

为了避免求解非线性代数方程，可以用**Euler**法将它显化，建立预测——校正系统：

$$\begin{cases} \bar{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1})\right) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \textbf{(7-6)}$$

此求解公式称为改进的**Euler**法，其中 $\bar{u}_{n+1}$称为预测值，u_{n+1} 称为校正值. 其求解顺序为：

$$u_0 \to \bar{u}_1 \to u_1 \to \bar{u}_2 \to u_2 \to \cdots \to \bar{u}_N \to u_N$$

改进的**Euler**法还可写成如下形式：

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},\quad u_n+h\,f(t_n,u_n)\ \ )\right] \qquad \textbf{(7-7)}$$

如果$f(t,u(t))$关于u是线性函数，则隐式公式可以显式化。

例如 若方程为： $u'(t)=t\cdot u+5$

隐式**Euler**公式：$u_{n+1}=u_n+h(t_{n+1}u_{n+1}+5)$

$$u_{n+1}=\frac{u_n+5h}{1-t_{n+1}h}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots,N$$

梯形公式： $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(t_nu_n+t_{n+1}u_{n+1}+10\right)$

$$u_{n+1}=\frac{1}{1-\frac{h}{2}t_{n+1}}\left(\left(1+\frac{h}{2}t_n\right)u_n+5h\right)\qquad n=0,1,2,\cdots,N$$

Euler公式、隐式Euler公式、梯形公式

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\big)$$

一般可统一写成：

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi\left(t_n,u_n,t_{n+1},u_{n+1};h\right) \qquad （7-8）$$

$$n=0,1,2,\cdots,N-1$$

其中 ϕ是依赖于(**7-1**)右端的函数 $f(t,u)$。

当取 $\phi=f(t_n,u_n)$时, 为**Euler法**；

当取 $\phi=f(t_{n+1},u_{n+1})$时, 为隐式**Euler法**；

当取 $\varphi=\frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$时, 为梯形法。

通过（**7-8**）计算结点$t_n=t_0+nh$, $n=0,1,2,\cdots$的近似值u_{n+1}, 每次只用到前一结点的值u_n， 所以从初值 u_0出发可逐步算出以后各结点的值$u_1,u_2,\cdots,u_N$ 。 故称为单步法。

衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度。

定义 假设$u_i=(u(t_i))$，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$，则称

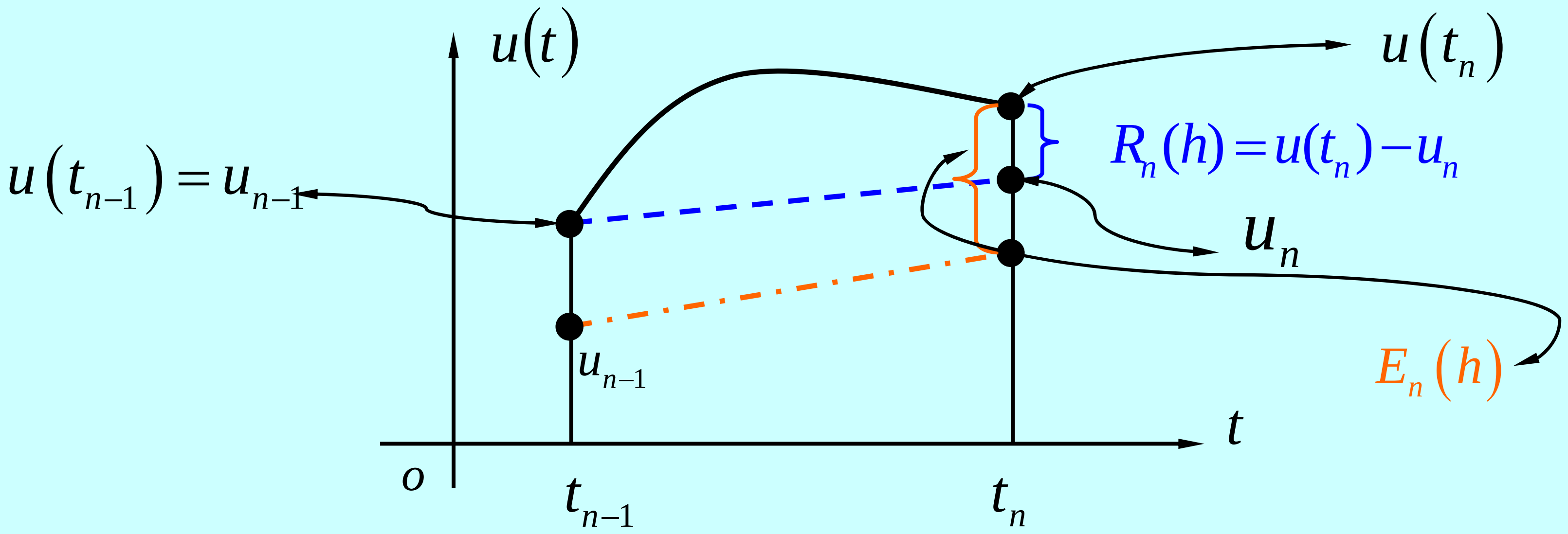
$$R_n(h)=u(t_n)-u_n$$

为求解公式第n步的局部截断误差。

定义

$$E_n(h)=u(t_n)-u_n=\sum_{i=1}^{n} R_i(h)$$

为求解公式在t_n点上的整体截断误差。



如果设某求解公式的局部截断误差：$R_n(h)=O(h^{p+1})$

则我们可以证明其整体截断误差为： $E_n(h)=O(h^p)$

这样我们就称该求解公式具有 p 阶精度。

事实上，若 $R_i(h)=O(h^{p+1})$, $i=1,2,\cdots,n$， 则

$$E_n(h)=\sum_{i=1}^{n}R_i(h)=\sum_{i=1}^{n}O\left(h^{p+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}h\cdot O\left(h^{p}\right)$$

$$=h\cdot O\left(h^{p}\right)\cdot n=O\left(h^{p}\right)\cdot\cancel{n}\times\frac{b-a}{\cancel{n}}=O\left(h^{p}\right)$$

求解公式的精度越高, 计算解的精确性可能越好。 通过简单的分析, 可知**Euler**法具有一阶精度, 梯形法具二阶精度。

下面利用**Taylor**展开, 求**Euler**法的局部截断误差

$$R_{n+1}(h) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = u(t_{n+1}) - \left[u_n + h\,f(t_n, u_n)\right]$$

$$= u(t_{n+1}) - \left[u(t_n) + h\,f(t_n, u(t_n))\right] \qquad \boxed{u(t_n) = u_n}$$

$$= \underline{u(t_{n+1})} - \left[u(t_n) + h\,u'(t_n)\right] \qquad \boxed{u'(t_n) = f(t_n, u(t_n))}$$

$$= \cancel{u(t_n)} + \cancel{h u'(t_n)} + \frac{h^2}{2!}u'(t_n) + O(h^3) - \cancel{u(t_n)} - \cancel{h u'(t_n)}$$

$$= O(h^2)$$

7.1.3 Taylor展开法

初值问题（**7-1**）的解充分光滑, 将$u(t)$ 在t_0处用**Taylor**公式展开：

$$u(t)=u(t_0)+hu'(t_0)+\frac{h^2}{2!}u''(t_0)+\cdots+\frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_0)+O\left(h^{p+1}\right) \qquad \textbf{（7-9）}$$

其中

（7-10）
$$\begin{cases} u(t_0)=u_0, \\ u'(t_0)=f(t_0,u(t_0))=f(t_0,u_0), \\ u''(t_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = f_t(t_0,u_0)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}+f_u(t_0,u_0)\dfrac{\mathrm{d}u(t_0)}{\mathrm{d}t} \\ u^{(3)}(t_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]\Bigg|_{t=t_0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\,f_t(t,u)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}+\left.\dfrac{\mathrm{d}\left[f(t,u)f_u(t,u)\right]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \\ \quad =f_{tt}(t_0,u_0)+f_{tu}(t_0,u_0)f(t_0,u_0)+\left[f_t(t_0,u_0)+f(t_0,u_0)f_u(t_0,u_0)\right]f_u(t_0,u_0) \\ \qquad +\left[f_{ut}(t_0,u_0)+f_{uu}(t_0,u_0)f(t_0,u_0)\right]f(t_0,u_0) \\ \quad =f_{tt}(t_0,u_0)+2f(t_0,u_0)f_{tu}(t_0,u_0)+f^2(t_0,u_0)f_{uu}(t_0,u_0) \\ \qquad +f_t(t_0,u_0)f_u(t_0,u_0)+f(t_0,u_0)\left(f_u(t_0,u_0)\right)^2 \\ \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \end{cases}$$

令

$$\varphi\left(t,u(t);h\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^{j}u(t)}{\mathrm{d}t^{j}}h^{j-1}=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^{j-1}f\left(t,u(t)\right)}{\mathrm{d}t^{j-1}}h^{j-1} \quad \textbf{(7-11)}$$

则可将（**7-9**）改写成为

$$u\left(t_0+h\right)-u\left(t_0\right)=h\varphi\left(t_0,u\left(t_0\right);h\right)+O\left(h^{p+1}\right)$$

舍去余项 $O\left(h^{p+1}\right)$， 则得 $u_1-u_0=h\varphi\left(t_0,u_0;h\right)$。

一般而言，若已知u_n，则

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi\left(t_n,u_n;h\right) \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

这是一个单步法，局部截断误差为$O\left(h^{p+1}\right)$， 由（**7-10**）(7−11)，可知 φ 关于 f 是非线性的，当 p=1时，它是**Euler**法。

由于计算 $\varphi(t_n,u_n,h)$的工作量过大， 一般不直接用**Taylor**

展开法做数值计算，但可用它计算附加值。

THE END

欧拉（Leonard Euler, 公元1707-1783年），历史上最伟大的数学家之一，与阿基米德、牛顿、高斯一起被称为有史以来贡献最大的四位数学家。

欧拉从小就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。13岁上大学，两年后获得瑞士巴塞尔大学的学士学位，次年又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。1725年，欧拉来到彼得堡，开始了他的数学生涯.

1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授. 过度的工作使他得了眼病，右眼失明，时年28岁. 1741年欧拉到柏林担任科学院物理数学所所长。1766年，重回彼得堡任职。没过多久，左眼视力衰退，最后完全失明。不幸的事情接踵而来，1771年一场大火将他的书房和大量研究成果全部化为灰烬。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。他还口述了几本书和400篇左右的论文。当大火烧掉他几乎全部的著述之后，欧拉用了一年的时间口述了所有这些论文并作了修订。

可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，据统计他共写下了886本书籍和论文，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

他被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉--算法学家，为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年），他在1748年1755年和1768～1770所著关于微积分的伟大论著（《无穷小分析引论》、《微分学原理》，《积分学原理》），立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午他计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。

欧拉的一生，是为数学发展而奋斗的一生，他那杰出的智慧，顽强的毅力，孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德，永远是值得我们学习的。

欧 拉 Léonard Euler

莱昂纳尔·欧拉（Léonard Euler，1707～1783）是历史上著作最多的数学家，被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉--算法学家，为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年）。他在1748年、1755年和1768～1770所著关于微积分的伟大论著（《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》），立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。

欧 拉 Léonard Euler

莱昂纳尔·欧拉（Léonard Euler，1707～1783）是历史上著作最多的数学家，被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉--算法学家，为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年）。他在1748年、1755年和1768～1770所著关于微积分的伟大论著(《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》)，立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。