第 6 章

插值函数的应用

6.3 外推加速原理与Romberg算法

6.3 外推加速原理与Romberg算法

由复合求积公式的余项表达式看到，数值求积的精度与步长h有关。如

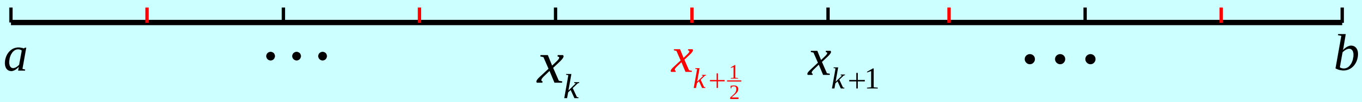
$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\,,\quad I-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

因此，在实际计算中应选择比较小的步长，使其能计算出好的数值结果。本节介绍便于在计算机上实现的递推算法。

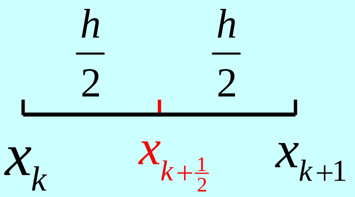
6.3.1 逐次分半递推算法

设将区间$[a,b]$分为n等分，共有$n+1$个分点，如果将求积区间再二分一次，则分点增至$2n+1$个，我们将二分前后两个积分值联系起来加以考察。

每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$经过二分只增加了一个分点：



则在区间$[x_k, x_{k+1}]$上利用复化梯形公式可导出：



$$\frac{\frac{h}{2}}{2}\left[f(x_k)+2f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]$$

这里 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 代表二分前的步长。

再将每个子区间上的积分值相加得

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

进一步有

$$T_{2n}=\frac{1}{2}\overset{T_n}{\boxed{\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]}}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right), \qquad \textbf{(6-43)}$$

此为折半算法的复化梯形递推求积分公式。

例2 计算积分近似值

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$$

$$\boxed{T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)},$$

解 先对整个区间[0, 1]使用梯形公式。对于函数

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，定义它在 $x=0$ 的值 $f(0)=1$，$f(1)=0.8414709$,

由梯形公式

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$$

将区间二等分，求出中点的函数值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0.9588510$,

利用递推公式**(6-43)**，有

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=0.9397933。$$

进一步二分求积区间，并计算新分点上的函数值

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=0.9896158,\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=0.9088516。$$

再利用式**(6-43)**，有

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135。$$

这样不断二分下去，数值计算结果见下表。

k	$T_{n=2^k}$	误差	k	$T_{n=2^k}$	误差
1	0.9397933	0.0062898	6	0.9460769	0.0000062
2	0.9445135	0.0015696	7	0.9460815	0.0000016
3	0.9456909	0.0003922	8	0.9460827	0.0000004
4	0.9459850	0.0000981	9	0.9460830	0.0000001
5	0.9460596	0.0000235	10	0.9460831	0.0000000

精确值是：$0.9460831\cdots$。

注意：需要二分区间**10**次，即要有**1025**个分点，计算量很大。

6.3.2 外推加速公式与Romberg算法

梯形法计算简单但收敛慢，本节讨论如何提高收敛速度以节省计算量。

根据复化梯形公式的余项表达式(6-17)

$$I - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b);$$

$$I - T_{2n} = -\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\bar{\eta}), \quad \bar{\eta} \in (a,b)。$$

假定 $f''(\eta) \approx f''(\bar{\eta})$，则有

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \Rightarrow 4\left(\qquad\qquad\right) \approx$$

整理，得

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)。 \qquad (6\text{-}45)$$

由此可见，只有二分前后的两个积分值T_n与T_{2n}相当接近，就可以保证计算结果T_{2n}的误差很小。

这样直接用计算结果来估计误差的方法通常称作误差的**事后估计法**。

按式(6-45)，积分近似值 T_{2n} 的误差大致等于$\frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$，若用这个误差值作为$T_{2n}$的一种补偿，即

$$\overline{T} = T_{2n} + \qquad\qquad = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

可以期望所得到更好的近似结果。

注意精确值 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =0.9460831\cdots$，三次二分得到，

$T_4=0.9445135$， $T_8=0.9456909$，分别具有二位有效数字。

而

$$\frac{4}{3} \qquad - \frac{1}{3} \qquad = 0.9460834$$

具有六位有效数字。 按一般形式

$$\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{4\cdot T_{2n}-T_n}{4-1}$$

组合得到的近似值，其实质究竟是什么？

直接验证知，按公式**(6.3)**组合得到的近似值恰为S_n，即

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n \text{。}$$

也就是说，利用复化梯形法二分前后的两个积分值 T_n 与 T_{2n}，按式(6−45)做线性组合，结果得到复化**Simpson**的积分值S_n 。

事实上， $T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$，那么，

$$\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{2}{3}T_n+\frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{3}T_n$$

$$=\frac{1}{3}T_n+\frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right)+\frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(b)\right]$$

$$=S_n$$

这是一种外推加速技术。

若记 $T_1(k-1)=\dfrac{4}{3}T_0(k)-\dfrac{1}{3}T_0(k-1)=\dfrac{4^1T_0(k)-T_0(k-1)}{4^1-1}$

其中$T_0(k)=T_{2n}$， $T_0(k-1)=T_n$。利用同样的推导方式，还可得到

$$I\approx\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n=\frac{16}{15}S_{2^k}-\frac{1}{15}S_{2^{k-1}}=\frac{16}{15}T_1(k)-\frac{1}{15}T_1(k-1)$$

记 $T_2(k-1)=\dfrac{16}{15}T_1(k)-\dfrac{1}{15}T_1(k-1)=\dfrac{4^2T_1(k)-T_1(k-1)}{4^2-1}$

可证 $T_2(k-1)=C_{2^{k-1}}$ 复化的**Cotes**数值积分公式

同理

$$I\approx\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n=\frac{64}{63}C_{2^k}-\frac{1}{63}C_{2^{k-1}}=\frac{64}{63}T_2(k)-\frac{1}{63}T_2(k-1)$$

记 $T_3(k-1)=\dfrac{64}{63}T_2(k)-\dfrac{1}{63}T_2(k-1)=\dfrac{4^3T_2(k)-T_2(k-1)}{4^3-1}$

可证 $T_3(k-1)-I=O(h^8)$

下面给出高精度的递推算法—**Romberg**算法。

若用n=2^{k-1}表示区间$[a, b]$的等分数，记 $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{b-a}{2^{k-1}}$

$$\begin{cases} T_0(0)=\dfrac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \\ T_0(k)=T_{2^k}=\dfrac{1}{2}T_0(k-1)+\dfrac{b-a}{2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} f\left(a+(2j+1)\dfrac{b-a}{2^{k-1}}\right) \\ (k=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \textbf{(6-48)}$$

注：$\dfrac{h}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b-a}{2^{k-1}}=\dfrac{b-a}{2^k}$， $f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)=f\left(a+\left(j+\dfrac{1}{2}\right)h\right)=f\left(a+(2j+1)\dfrac{h}{2}\right)$

$$=f\left(a+(2j+1)\frac{b-a}{2^k}\right)$$

在作k次等分后，取

$$\begin{cases} T_0(k-1)=T_{2^{k-1}} \qquad (k=1,2,\cdots) \\ T_m(k-1)=\dfrac{4^m T_{m-1}(k)-T_{m-1}(k-1)}{4^m-1} \\ (m=1,2,\cdots;k=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \textbf{(6-49)}$$

可逐次求出序列$\{T_m(k)\}$列表如下：

$n=2^k$	梯形	**Simpson**	**Cotes**	**R**	**R**	**R**
1	$T_0(0)$					
2	$T_0(1)$	$T_1(0)$				
4	$T_0(2)$	$T_1(1)$	$T_2(0)$			
8	$T_0(3)$	$T_1(2)$	$T_2(1)$	$T_3(0)$		
16	$T_0(4)$	$T_1(3)$	$T_2(2)$	$T_3(1)$	$T_4(0)$	
32	$T_0(5)$	$T_1(4)$	$T_2(3)$	$T_3(2)$	$T_4(1)$	$T_5(0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

这个复化梯形公式的递推式结合外推加速技术的构造高精度数值求积公式的方法称为**Romberg**方法，又叫逐次分半加速法。

例2 用**Romberg**方法求积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值，取误差 $\varepsilon \leqslant 10^{-4}$。

解： 利用公式（**6-48**）和（**6-49**），

（**1**） $T_0(0)=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]=\frac{4+2}{2}=3,$

（**2**） $T_0(1)=\frac{1}{2}T_0(0)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}=3.1,$

（3） $T_1(0)=\frac{4}{3}T_0(1)-\frac{1}{3}T_0(0)=\frac{4}{3}\times\frac{31}{10}-\frac{1}{3}\times 3\approx 3.13333,$

（**4**） $T_0(2)=\frac{1}{2}T_0(1)+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\approx 3.13118,$

（5） $T_1(1)=\frac{4^1}{4^1-1}T_0(2)-\frac{1}{4^1-1}T_0(1)=\frac{4}{3}T_0(2)-\frac{1}{3}T_0(1)\approx 3.14157,$

（6） $T_2(0)=\frac{4^2}{4^2-1}T_1(1)-\frac{1}{4^2-1}T_1(0)=\frac{16}{15}T_1(1)-\frac{1}{15}T_1(0)\approx 3.14212,$

（7） $T_0(3)=\frac{1}{2}T_0(2)+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\approx 3.13899,$

（8） $T_1(2)=\frac{4^1}{4^1-1}T_0(3)-\frac{1}{4^1-1}T_0(2)=\frac{4}{3}T_0(3)-\frac{1}{3}T_0(2)\approx 3.14157$,

（9） $T_2(1)=\frac{4^2}{4^2-1}T_1(2)-\frac{1}{4^2-1}T_1(1)=\frac{16}{15}T_1(2)-\frac{1}{15}T_1(1)\approx 3.14159$,

（10） $T_3(0)=\frac{4^3}{4^3-1}T_2(1)-\frac{1}{4^3-1}T_2(0)=\frac{64}{63}T_2(1)-\frac{1}{63}T_2(0)\approx 3.14158$,

数值计算结果列表

k	$T_{n=2^{k-1}}$	$S_{n=2^{k-1}}$	$C_{n=2^{k-1}}$	$R_{n=2^{k-1}}$	$\cdots$
1	3.00000				
2	3.10000	3.13333			
3	3.13118	3.14157	3.14212		
4	3.13899	3.14159	3.14159	3.14158	
5	3.14094	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159

而 $|T_4(0)-T_3(0)|=|3.14159-3.14158|<10^{-4}$,

可以停止计算，得近似值：$\int_0^1\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x\approx T_4(0)\approx 3.14159$。

积分的精确值为：$I(f)=\pi$。

The End