姓名：________

学号：________

院系：________

____级　班

大 连 理 工 大 学

课程名称：<u>计算方法</u>　试卷：<u>B</u>　考试类型　<u>闭卷</u>

授课院（系）：<u>数学系</u>　考试日期：<u>2009 年 1 月 8 日</u>　试卷共 <u>2</u> 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	34	15	15	10	10	10	6	/	/	/	100
得　分											

一、　填空，每题 2 分，共 34 分

1) 已知近似值 $a=246.00$ 有 5 位有效数字，则 a 的绝对误差界为 <u>$\frac{1}{2}\times10^{-2}$</u>，a 的相对误差界为 <u>0.5×10^{-4}</u>；

$a=10^k\times0.a_1a_2\cdots a_n$　$a=10^3\times0.246$　$|x-a|\le\frac{1}{2}\times10^{k-n}$　$k=3$　$n=5$

$\begin{cases} a=\pm10^k\times0.a_1a_2\cdots a_n \\ |x-a|\le\frac{1}{2}\times10^{k-n} \\ \frac{|x-a|}{|a|}\le\frac{1}{2a_1}\times10^{1-n}\end{cases}$

2) 于 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，用 $y=a+bx$ 做 $f(x)=\sin x$ 最佳平方逼近，则法方程组为：________；

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24}\end{bmatrix}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$　$-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$　1　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$　$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx$　$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx$　$(\varphi_0,f(x))\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$

3) 设 $A=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 5 & 7\end{pmatrix}$，$\|A\|_1=$ <u>17</u>，$\mathrm{cond}_1(A)=$ <u>289</u>；

行范数　$\|A\|_1\|A^{-1}\|_1$　$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 10\\ 5 & -7\end{bmatrix}$

4) 为了减少运算次数，应将表达式 $\dfrac{x^4+16x^2+8x-1}{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}$

改写为 ________

$(((x+0)x+16)x+8)x-1$

$((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1$

5) 已知 $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=5$，则均差 $f[0,1,2]=$ <u>0</u>，对应于 $x_0=0$ 插值基函数 $l_0(x)=$ <u>$\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$</u>；

$\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$

6) 此数值求积公式 $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{\sqrt[4]{e}}+e^{-1}\right)$ 的代数精度为： <u>3</u>；

Simpson

$u'=f(t,u)$

7) 求解 $u'=-u+t-e^t$ 的隐式 Euler 公式： <u>$u_{n+1}=u_n+h(-u_{n+1}+t_{n+1}-e^{-1})\Rightarrow u_{n+1}=\frac{u_n+ht_{n+1}-e}{1+h}$</u>；

显示 $u_{n+1}=u_n+h[f(t_n,u_n)]$

隐 $u_{n+1}=u_n+h[f(t_{n+1},u_{n+1})]$

8) 用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 <u>$[1,2]$</u>。

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ 的 $\mathbf{LL'}$ 分解为：$\begin{bmatrix}1 & \\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{bmatrix}$；

10) $[0,1]$ 上以 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 权函数的正交多项式 $\varphi_0(x)=$ <u>1</u>，$\varphi_1(x)=$ <u>$x-\frac{1}{4}$</u>。

$\int_0^1\ln\frac{1}{x}dx$　$\int_0^1\ln\frac{1}{x}\,x\,dx$

11) $x=0$ 是 $f(x)=1-x-e^x=0$ 的根，则具有平方收敛的迭代公式为：

$x_{n+1}=x_n+\frac{1-x_n-e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$　$(k=0,1,2,\cdots)$　Newton迭代公式

先判断重根

$f(0)=0$

$f'(0)=-1-e^0=-2\ne0$

单根

$x^4+0x^3+16x^2+8x-1$

$16x^5-17x^4$

$H = I - \frac{2}{w^Tw} ww^T$

$w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

12）将向量 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 变换为向量 $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的正交矩阵 H 为 $\begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$；

$w = \vec{x} - \|x\|_2 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $H(w) = I - \frac{2}{w^Tw} ww^T$

$I - \frac{2}{w^Tw} ww^T$

$= I - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \left[\frac{3}{5} \cdots \right]$

三、计算题

1.（15 分）如下求解初值问题 $u' = f(t,u)$，$u(t_0) = u_0$ 的线性二步法

$$u_{n+2} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3f_n)$$

$= I - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

①确定出它的阶 p、局部截断误差主项和收敛性，求出其绝对稳定区间；

②给出上述方法求解方程：$u' = -40u$，$u(0) = 1$，的步长 h 的取值范围。

$u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{h}{8}(3f_{n+2} + 8f_{n+1} + f_n)$

$C_4 = -\frac{1}{48}$

① 线性隐式二步三阶法.

$-\frac{1}{48}h^4 u^{(4)}(t_n)$

② $\rho(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ 满足根条件

又方法阶 $p = 3 > 1$. 故此

差分格式收敛.

③ 对于模型问题 $u' = \mu u$ $(\mu < 0)$

$\bar{h} = \mu h$

$\bar{h} \in (-2, 0)$

④ 解 $u' = 20u$，$u(0) = 1$.

求 h 范围，并以 $u_0 = 1$

$u_1 = 1$，$h = 0.01$ 为步长，

求 $u(0.02)$ 近似值 u_2

$u' = \mu u = -20u$

$-2 < \bar{h} = -20h < 0$

$0.1 = \frac{1}{10} > h > 0$

$0 < h < 0.1$

$-\frac{15}{2}h$

$u_2 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{-20h}{8}(\cancel{-20}3u_2 + 8u_1 + u_0)$

$= -\frac{15}{2}h u_2 - 20h u_1 - 2.5h u_0$

$(1 + \frac{15}{2}h) u_2 = (\frac{1}{2} - 20h) u_1 + (\frac{1}{2} - 2.5h) u_0$

$u_{n+2} - u_n = \frac{h}{2} f_{n+1} + \frac{3h}{2} f_n$

$\alpha_0 = -1$ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 1$ $\beta_0 = \frac{3}{2}$ $\beta_1 = \frac{1}{2}$ $\beta_2 = 0$

$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$C_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2) - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - 2 = 0$

$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$

$p = 1$ 线性二步一阶法.

$\frac{3}{2}h^2 u''(t_n)$

$\rho(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ $|\lambda| = 1 \leq 1$ 差分格式收敛.

考虑模型问题 $u' = \mu u$ $(\mu < 0)$ 特征方程

$\rho(\lambda) - \bar{h}\sigma(\lambda) = (\lambda^2 - 1) - \frac{\bar{h}}{2}(\lambda + 3) = 0$

即 $\lambda^2 - \frac{\bar{h}}{2}\lambda - (1 + \frac{3}{2}\bar{h}) = 0$

$|\lambda_k| < 1$ 的充要条件 $|b| < 1 - c < 2$ $\left|\frac{\bar{h}}{2}\right| < -\frac{3}{2}\bar{h} < 2$

得 $\bar{h} \in (-\frac{4}{3}, 0)$

$\bar{h} = \mu h$ $\mu = -40$ $-\frac{4}{3} < -40h < 0$

$u' = \mu u$

$\bar{h} = \mu h$

$-\frac{4}{3} < -40h < 0$

$\frac{4}{3} \times \frac{1}{40} > h > 0$

$0 < h < \frac{1}{30}$

$2n+1 = 5 \Rightarrow n = 2$ 即应构造具有3个Gauss点的求积公式，

导为，

2.（15分）确定 x_0, x_1, A_0, A_1 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的代数精度 m 达到最高，试问 m 是多少？取 $f(x)=e^{-x^2}$，利用所求得的公式计算出数值解。

$m=2\times1+1=3$???

解：~~根据代数精度~~ 构造二次正交多项式：$u_0=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$，$u_1=\int_{-1}^{1}x^2x\,dx=\frac{1}{4}$，$u_2=\int_{-1}^{1}x^2x^2dx=0$ u_3

$\phi_0(x)=1$

$\phi_1(x)=\begin{vmatrix} u_0 & 1 \\ u_1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & x \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}x$

$u_m=\int_{-1}^{1}x^2x^m dx$ $m=0,1$

$\phi_2(x)=\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & 1 \\ u_1 & u_2 & x \\ u_2 & u_3 & x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{2} & x^2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}(1-x^2)=\frac{1}{4}(1-x)(1+x)$

$\frac{4}{15}(3x^2-3)$

令 $\phi_2(x)=0$ 得：$x_0=-1$，$x_1=1$ $\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$u_0=\frac{2}{3}$

又根据代数精度定义得：

$$\left.\begin{aligned} A_0+A_1&=\int_{-1}^{1}x^2dx=0 \\ -A_0+A_1&=\int_{-1}^{1}x^2x\,dx=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0&=-\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \\ A_1&=\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\phi_2(x)=\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & x \\ \frac{2}{5} & 0 & x^2 \end{vmatrix}=\frac{4}{15}x^2-\frac{4}{25}=0$

$\therefore \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-\frac{1}{4}f(-1)+\frac{1}{4}f(1)$ $m=3$

Gauss点

$x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}$ $x_2=\sqrt{3/5}$

$\int_{-1}^{1}x^2e^{-x^2}dx=-\frac{1}{4}e^{-1}+\frac{1}{4}e^{-1}=0.$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx\approx A_0f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+A_1f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

$\frac{2}{3}=A_0+A_1$

$0=\sqrt{\frac{3}{5}}A_0+\ldots$

解：构造正交二次多项式：

$u_m=\int_{-1}^{1}x^2x^m dx$，$m=0,1,2,$

$u_0=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$，$u_1=\int_{-1}^{1}x^2x\,dx=0$，$u_2=\int_{-1}^{1}x^2x^2dx=\frac{2}{5}$，$u_3=\int_{-1}^{1}x^2x^3dx=0$

$\phi_2(x)=\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & 1 \\ u_1 & u_2 & x \\ u_2 & u_3 & x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & x \\ \frac{2}{5} & 0 & x^2 \end{vmatrix}=\frac{4}{15}x^2-\frac{4}{25}=\frac{4}{15}(x^2-\frac{3}{5})$

令 $\phi_2(x)=0$ 得Gauss点 $x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$，$x_1=\sqrt{\frac{3}{5}}$

又根据代数精度定义得

$$\left.\begin{aligned} A_0+A_1&=\frac{2}{3} \\ \sqrt{\tfrac{3}{5}}A_1-\sqrt{\tfrac{3}{5}}A_0&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_0=A_1=\frac{1}{3}$$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\frac{1}{3}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{1}{3}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$

$\int_{-1}^{1}x^2dx=A_0\times1+A_1\times1$

$\int_{-1}^{1}x^3dx=A_0\times(-\sqrt{\frac{3}{5}})+A_1\times\sqrt{\frac{3}{5}}$
$=0$

$\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{5}}$

$A_0=A_1=\frac{1}{3}$

$x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$x_1=\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)=\frac{1}{3}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{1}{3}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

$\int_{-1}^{1}x^2e^{-x^2}=\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}$

$=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{5}}$

5. （10分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求出 A 的 Jardan 标准型。

解：$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)^2=\begin{vmatrix}(\lambda-1)^2-1 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)^2$

$\lambda^2-2\lambda$

于是A的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$

$\lambda_1=0$ 的代数重复度为2，$rank(\lambda_1 I-A)=2$，$\therefore \alpha_1=n-rank(\lambda_1 I-A)=2$

$\lambda_2=2$ 的代数重复度为2，$rank(\lambda_2 I-A)=3$，$\therefore \alpha_2=n-rank(\lambda_2 I-A)=1$

$\because m_2>\alpha_2$ 是亏损的

$\therefore$ A的Jardan标准型为：

$$J=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

三、证明题（6分）设 A 为 n 阶方阵，若 $\rho(\lambda)<1$，则在 $C^{n\times n}$ 中存在一种矩阵范数 $\|\ \|$，使得 $\|A\|<1$。

证明 $\|A\|<\rho+\varepsilon$