# 第 6 章

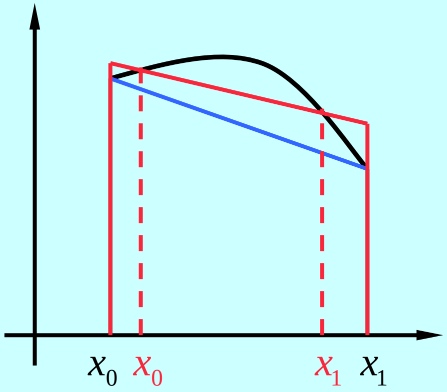
# 插值函数的应用

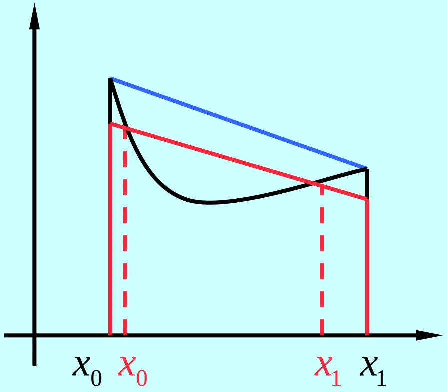
## 6.2 Gauss型求积公式

本节介绍具有最高代数精度的数值求积公式，即**Gauss**型求积公式。 形如

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \qquad \textbf{（6-32）}$$

此插值型求积公式（并未要求取等距节点）的代数精度至少为$n$



在区间[-1，1]上的两点的求积公式的一般形式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

两点的**Newton-Cotes**求积公式是梯形公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-1) + f(1)$$

其代数精度为1。

若不限制等距节点，我们可以特意的去选取 $x_0, x_1, A_0, A_1$。

由代数精度的的定义，分别取 $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$，并令

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

可得到如下非线性方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2 \\ A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 = \int_{-1}^{1} x \cdot dx = 0 \\ A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot dx = \dfrac{2}{3} \\ A_0 \cdot x_0^3 + A_1 \cdot x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

即 $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

至少具有**3**次代数精度， 再取 $f(x) = x^4$ 时，

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$$

故具有**3**次代数精度。

这样如果我们用代数精度最高原则， 通过求解具$2n+2$非线性方程组来确定所有 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 和 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 共计有$2n+2$个待定系数， 就可以构造出具有$2n+1$次代数精度的数值积分公式。

**定义 6.2** 如果形

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的求积公式具有代数精度$2n+1$次, 则称其为**Gauss型求积公式,** 并称其中的求积节点$\boldsymbol{x_k}$(**$k$=0, 1, ⋯, $n$**)为**Gauss**点。

但是这需要求解非线性代数多项式方程组。 一般来说，很难求解。需用数学机械化的算法—吴方法求解。

### 6.2.1 Gauss型求积公式

**定理 6.2** 要使插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E_n(f) \qquad (6\text{-}33)$$

具有2$n$+1次代数精度，必须且只须以节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$为零点

$n$+1次多项

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

与所有次数不超过$n$的多项式在$[a, b]$上关于权函数$\rho(x)$正交。

定理 6.2 换句话为：

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是Gauss $\Leftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)$ 是正交多项式。

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是Gauss点 $\Leftrightarrow$ $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是正交多项式的根。

**证 必要性** 假设（**6-33**）具有$2n+1$次代数精度, 则对任意 $q(x)\in\mathbf{P}_n$ , $\omega_{n+1}(x)q(x)\in\mathbf{P}_{2n+1}$，从而由 $\omega_{n+1}(x)$ 的定义,

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}A_k\omega_{n+1}(x_k)q(x_k) \ =0$$

即 $\omega_{n+1}(x)$与$q(x)$在$[a,b]$上关于权函数 $\rho(x)$正交。

**充分性，** 假设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意一个次数不超过$n$的多项式在$[a,b]$上关于权函数 $\rho(x)$正交。

下面证明以 $\omega_{n+1}(x)$的零点$x_0, x_1, \cdots, x_n$为节点的数值求积公式具有代数精度$2n+1$。

已知 $$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x)\mathrm{d}x= \ 0 \ =\sum_{k=0}^{n}A_k\omega_{n+1}(x_k)q(x_k)$$

对任意 $f(x)\in\mathbf{P}_{2n+1}$，用 $\omega_{n+1}(x)$ 除 $f(x)$, 其商为$q(x)\in\mathbf{P}_n$，余项为$r(x)\in\mathbf{P}_n$。 即 $$f(x)=\omega_{n+1}(x)q(x)+r(x)$$

由于 $\omega_{n+1}(x)$与所有次数不超过$n$的多项式正交, 所以

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x) + \rho(x)r(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \rho(x) r(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

又由于$n$+1点插值型求积公式对次数不超过$n$的多项式是精确的, 故

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_k \omega_{n+1}(x_k) q(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k \Big[\underbrace{\boxed{\omega_{n+1}(x_k) q(x_k) + r(x_k)}}_{f(x_k)}\Big] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

从而

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

**即（6-33）式具有2*n*+1次代数精度，为Gauss型求积公式。**

**Gauss型求积公式其求积系数有如下性质**

（**1**） $A_k > 0$， $k = 0, 1, \cdots, n$ 且 $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)dx$

（**2**） $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx$

其中$l_k(x)$ **(**$k$=0,1,⋯,$n$**)**是以$x_0, x_1, \cdots, x_n$为插值节点的**Lagrange**插值基函数。

证：（**1**）由于是**Gauss**型求积公式，故对2$n$次多项式 $l_k^2(x)$，（$k$=0, 1, ⋯, $n$）求积公式精确成立，即

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k^2(x_i)$$

由$l_k(x)$的性质， $l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$ 得

$$\int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = A_k = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx > 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

又$A_k$的定义： $\sum_{i=0}^{n} A_k = \sum_{i=0}^{n} \left( \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx \right) = \int_a^b \rho(x) \left( \sum_{i=0}^{n} l_k(x) \right) dx = \int_a^b \rho(x) dx$

## 下面举出两种常用的正交多项式的例

**例1** 令$T_0=1$, $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$，$x\in[-1,1]$, 称$T_n(x)$为$n$ **Chebyshev**多项式。

由三角恒等式 $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$

令 $x=\cos\theta$，得

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad n=1, 2, \cdots$$

所以$T_n(x)$是$n$次多项式，且具

（1）递归性 $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$， $T_2(x)=2x^2-1$,

$T_3(x)=4x^3-3x$， $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$， $\cdots$,

（2）正交

$$\left(T_n(x),T_m(x)\right)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

（3）奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

$n$为偶数时为偶函数，$n$为奇数时为奇函数；

（4） $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$，在（−1, 1）有$n$个互异实根

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad k = 1,2,\cdots,n$$

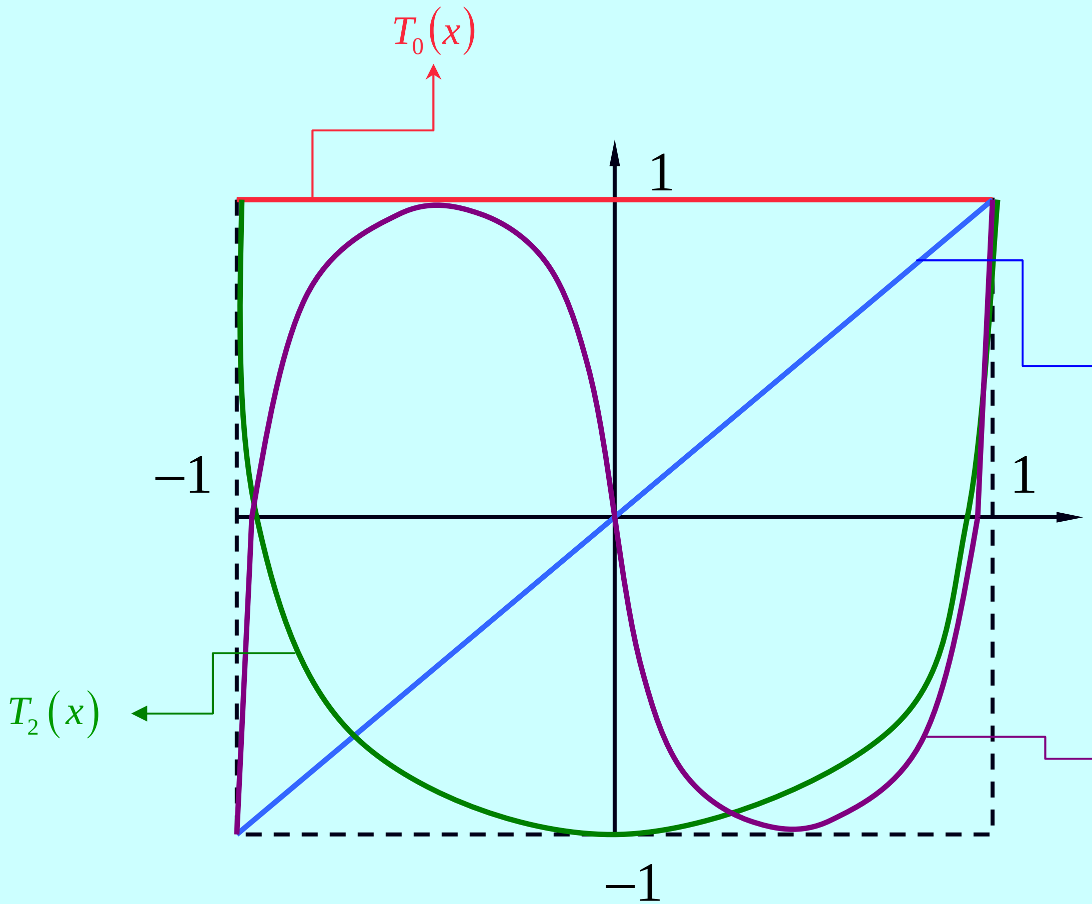
所以$\{T_n(x)\}$是$[-1, 1]$上以$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$为权函数的正交多项式系。

而

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \quad （n\geqslant 1）$$

是首项系数为1的$n$次**Chebyshev**多项式。

# $n$=0，1，2，3次Chebyshev多项式的曲线



**例2** 设$L_n(x)$，$x\in[-1,1]$, 是以 $\rho(x)\equiv 1$为权函数的正交多项式称 $L_n(x)$（$n$=0, 1, ⋯）为$n$次Legendre多项式

$n$次Legendre多项式的一般表达式为

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

其具有

（1）递归性 $\left(n+1\right)L_{n+1}(x)=\left(2n+1\right)\cdot x\cdot L_n(x)-n\cdot L_{n-1}(x)$

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=x,\quad L_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),$$

$$L_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),\quad L_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\quad \cdots$$

（2）正交

$$\left(L_n(x),L_m(x)\right)=\int_{-1}^{1}L_n(x)L_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

（3）奇偶性

$$L_n(-x)=(-1)^n L_n(x)$$

$n$为偶数时为偶函数，$n$为奇数时为奇函数；

（4）$L_n(x)$ 在（$-1, 1$）有$n$个互异实根

所以$\{L_n(x)\}$是$[-1, 1]$上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式系。

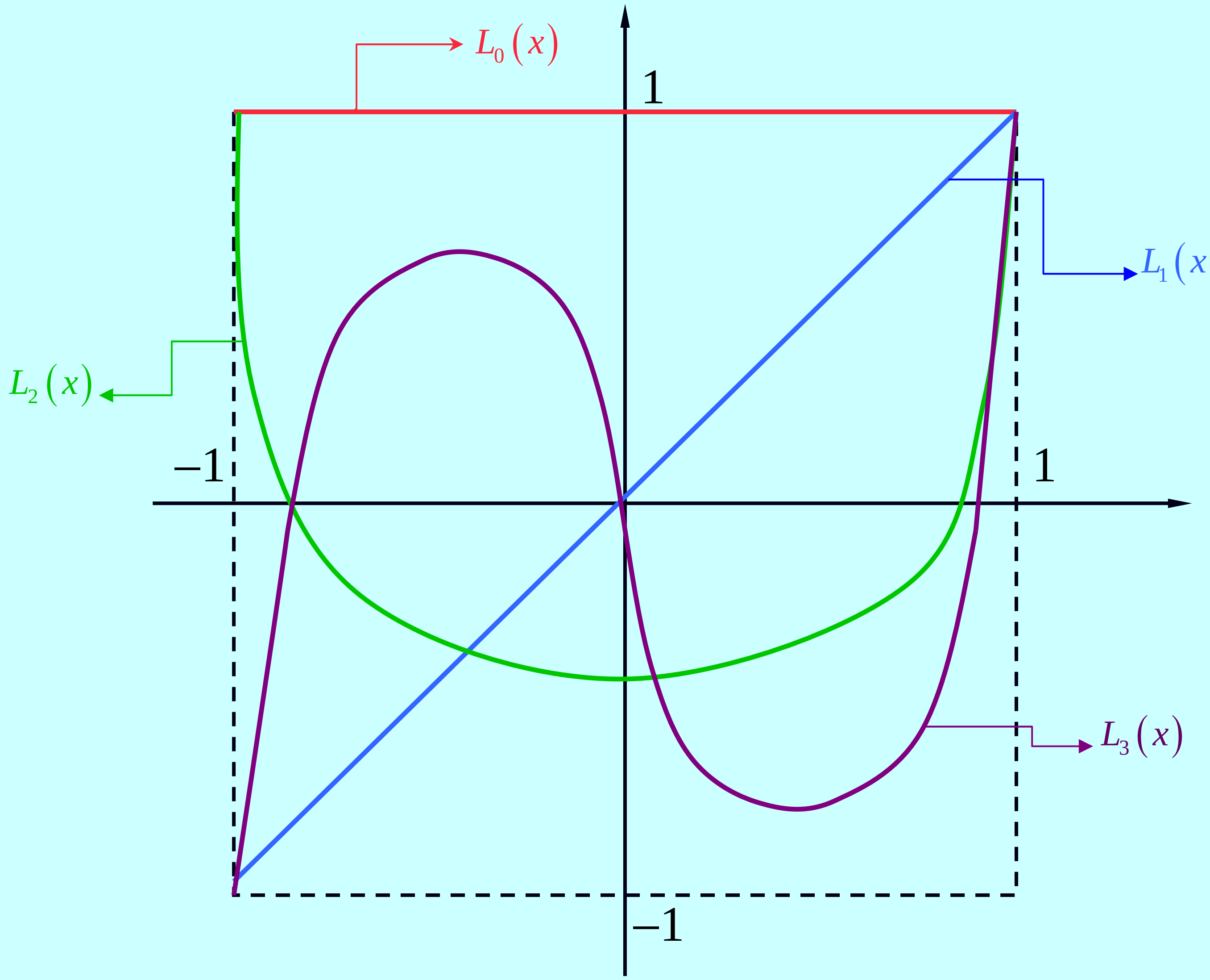
而 $$\tilde{L}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad (n\geqslant 1)$$

是首项系数为1的$n$次**Legendre**多项式。

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]=\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2)^n+C_n^1(x^2)^{n-1}+\cdots\right]=(2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n+\cdots$$

从而，上述$n$次多项式的首项$x^n$的系数为：$\dfrac{(2n)!}{n!}$

# $n$=0，1，2，3次Legendre多项式的曲线



根据定理5.2，我们可以构造如下的**Gauss**型求积公式

**(1) Gauss-Chebyshev型求积公式**

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad 其中 \begin{cases} = \dfrac{\pi}{n+1} \\ = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right) \\ k = 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

对于$n$=**1,2**时

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2}\left( f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

**3次代数精度**

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3}\left( f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

**5次代数精度**

**(2) Gauss-Legendre型求积公式**

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad 其中 \begin{cases} = \dfrac{2}{(1-x_k^2)\left[L'_{n+1}(x_k)\right]^2} \\ k = 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

**例3** 求[−1,1]上关于的 $\rho(x)\equiv 1$ 两点**Gauss-Legendre**型求积式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

**解：** 首先，构造二次正交多项式

$$\phi_2(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & x \\ \mu_2 & \mu_3 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}\left(3x^2 - 1\right)$$

令

$$\phi_2(x) = \frac{4}{9}\left(3x^2 - 1\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}},\quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

此时，

$$A_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}dx = 1$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}dx = 1$$

或 取 $f(x)=1,x$，由代数精度的定义，得线性方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_1 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_1 - A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_0 = A_1 = 1}$$

则得具有**3**次代数精度的**Gauss-Legendre**公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

**例4** 求$[-1,1]$上5次代数精度的Gauss-Legendre型求积式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

**解：** 首先，构造三次正交多项式

$$\phi_3(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & x \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & x^2 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & x^2 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} x^3$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & x \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & x^2 \end{vmatrix} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{8}{15} - \frac{8}{27}\right) x^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{5}\right) x$$

令

$$\phi_3(x)=\frac{32}{45}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x\right)=0 \Longrightarrow \boxed{x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_1=0,\ x_2=\sqrt{\frac{3}{5}},}$$

取 $f(x)$ =1, $x$, $x^2$由代数精度的定义，得线性方程组

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_0+\sqrt{\frac{3}{5}}A_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \\ \frac{3}{5}A_0+\frac{3}{5}A_2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2 = 2 \\ A_2-A_0 = 0 \\ A_0+A_2 = \frac{10}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_0=A_2=\frac{5}{9}, A_1=\frac{8}{9}}$$

则得具有5次代数精度的**Gauss-Legendre**公式:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

具有3、5次代数精度的Gauss-Legendre公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$

**例5 求[−1,1]上关于 $\rho(x)=|x|$ 的两点Gauss型求积公式。**

$$\int_{-1}^{1}|x|\,f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

解： 首先构造二次正交多项式

$$\phi_2(x)=\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & x\\ \mu_2 & \mu_3 & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & x\\ \frac{1}{2} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(2x^2-1\right)$$

令 $\phi_2(x)=\frac{1}{4}\left(2x^2-1\right)=0 \Rightarrow x_0=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

此时，得

$$A_0=\int_{-1}^{1}|x|l_0(x)dx=\int_{-1}^{1}|x|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}dx=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\int_{-1}^{1}|x|l_1(x)dx=\int_{-1}^{1}|x|\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}dx=\frac{1}{2}$$

或 取 $f(x)=1,x$，由代数精度的定义，得线性方程

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} A_1 = \int_{-1}^{1} |x|\, x\, dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_1 - A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$$

则得具有**3**次代数精度的**Gauss-Legendre**公式：

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x)\, dx \approx \frac{1}{2}\left[ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

对于任意区间$[a,b]$上关于$\rho(x)\equiv 1$的**Gauss型求积式,**
只需作变量替换:

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t$$

则有 $x\in[a,b]\leftrightarrow t\in[-1,1]$，这样

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t\right)dt$$

$$\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)$$

。

**例6** 求 $\int_1^5 f(x)dx$ 的具有**3**次代数精度的**Gauss**公式。

**解：** 由 $2n+1=3 \Rightarrow n=1$，此求积公式具有**2**个**Gauss**节点。

作变量替换：$3+2t$, 再取$[-1,1]$上的**Gauss**节点、求积系数：

$$t_0=-\sqrt{\frac{1}{3}},\quad t_1=\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad A_0=A_1=1$$

从而，得

$$\int_1^5 f(x)dx=2\cdot\int_{-1}^1 f\left(3+2t\right)dt$$

$$\approx 2\sum_{k=0}^{1} A_k f\left(3+2t_k\right)=2f\left(3-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2f\left(3+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

若取 $f(x)=e^{-x^2}$，则

$$\int_1^5 e^{-x^2}dx=2\cdot\int_{-1}^1 e^{-\left(3+2t\right)^2}dt\approx 2\left[A_0\cdot e^{-\left(3+2t_0\right)^2}+A_1\cdot e^{-\left(3+2t_1\right)^2}\right]$$

$$=2\times\left(e^{-\left(3-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}+e^{-\left(3+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}\right)$$

**例7** 确定$x_0, x_1, A_0, A_1$使以下的求积公式为**Gauss**型求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

**解：首先构** $[0,1]$上关于$\rho(x)=\sqrt{1-x}$ 的首项系数为**1**的二次正交多项式，为此可设

$\phi_0(x)=1 \quad \phi_1(x)=x+a \qquad \phi_2(x)=x^2+bx+c$ ，从而有

$$\left.\begin{aligned}
(\phi_0,\phi_1) &= \int_0^1 \sqrt{1-x}(x+a)dx = 0 \\
(\phi_0,\phi_2) &= \int_0^1 \sqrt{1-x}(x^2+bx+c)dx = 0 \\
(\phi_1,\phi_2) &= \int_0^1 \sqrt{1-x}\cdot(x+a)\cdot(x^2+bx+c)dx = 0
\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
a &= -\frac{2}{5} \\
b &= -\frac{8}{9} \\
c &= \frac{8}{63}
\end{aligned}\right.$$

则

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{8}{63}$$

其零点为：$x_0$=0.7188, $x_1$=0.7101。

令 $f(x)$=1, $x$，用代数精度定义得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \dfrac{2}{3} \\ 0.7188\,A_0 + 0.7101\,A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\cdot x\cdot dx = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0.3891 \\ A_1 = 0.2776 \end{cases}$$

从而

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,f(x)dx \approx 0.3891\cdot f(0.7188) + 0.2776\cdot f(0.7101)$$

。

# The End