§7.4 刚性问题及其求解公式

前面讨论的关于一个微分方程式的数值解法完全适用于一阶微分方程组，而且只要将微分方程式情形的函数换成函数向量，表达式也不发生变化。下面考虑一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, u_1, u_1, \cdots, u_m), \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, u_1, u_1, \cdots, u_m), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} = f_m(t, u_1, u_1, \cdots, u_m), \end{cases}$$

这里 $f_{1,}\ f_2, \cdots, f_m\left(t_0 \le t \le T, |u_i| < \infty, i = 1, 2, \cdots, m\right)$ 是$\boldsymbol{m+1}$个变元的连续函数。为使上述方程组的解确定，还需要给出初值条件

$$u_i(t_0) = u_{0i} \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

这就是一阶微分方程组的初值问题。

例 考虑一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f_1(t,u,v),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f_2(t,u,v),\end{cases}\quad\text{（7-36）}\qquad\begin{cases}u(0)=u_0\\v(0)=v_0\end{cases}\quad\text{（7-37）}$$

解此方程组的**Euler**法为：

$$\begin{cases}u_{n+1}=u_n+hf_1(t_n,u_n,v_n)\equiv u_n+hf_{1n}\\v_{n+1}=v_n+hf_2(t_n,u_n,v_n)\equiv v_n+hf_{2n}\end{cases}\quad\text{（7-38）}$$

引进向量记号：

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{U}_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_n=\begin{pmatrix}f_{1n}\\f_{2n}\end{pmatrix}$$

则（7-36）～（7-38）可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}),\\[2ex]\boldsymbol{U}(0)=\boldsymbol{U}_0\end{cases}\qquad \boldsymbol{U}_{n+1}=\boldsymbol{U}_n+h\boldsymbol{F}_n$$

如果实际问题不是一阶方程组而是高阶方程式，也可以把它化成一阶方程组。

例如m阶微分方程：

$$u^{(m)} = f\left(t, u, u', \cdots, u^{(m-1)}\right),$$

只要引进新变量

$$u_1 = u, \quad u_2 = u', \quad \cdots, \quad u_m = u^{(m-1)},$$

就化成一阶方程组,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = u_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = u_3 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} = f\left(t, u, u', \cdots, u^{(m-1)}\right) \end{cases}$$

此种转换不仅是理论上需要，在计算也可能更方便。

更一般的，引进向量记号：

$$\boldsymbol{u}=\left(u_1,u_2,\cdots,u_m\right)^T,\quad \boldsymbol{f}=\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)^T,\quad \boldsymbol{u}_0=\left(u_{01},u_{02},\cdots,u_{0m}\right)^T$$

则一阶方程组可写成向量形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}\left(t,\boldsymbol{u}\right),\\ \boldsymbol{u}\left(t_0\right)=\boldsymbol{u}_0\end{cases}$$

若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u})$关于$\boldsymbol{u}$满足**Lipschitz**条件，则上述问题有唯一解。

前面介绍的线性多步方法，预–校算法和**Runge-Kutta**法也完全可以直接推广到一阶方程组，只需用向量代替相应的标量。

7.4.1 刚性问题

有一类常微分方程(组)，在求数值解时遇到相当大的困难，这类常微分方程组解的分量有的变化很快,有的变化很慢。常常出现这种现象：变化快的分量很快地趋于它的稳定值，而变化慢的分量缓慢地趋于它的稳定值。从数值解的观点来看，当解变化快时应该用小步长，当变化快的分量已趋于稳定，就应该用较大步长积分。但是理论和实践都表明，很多方法，特别是显式方法的步长仍不能放大，否则便出现数值不稳定现象，即误差急剧增加，以到掩盖了真值，使求解过程无法继续进行。常微分方程组的这种性质叫做刚性（**Stiff**）。它在化学反应、电子网络和自动控制等领域中都是常见的。

例1 某化学反应方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \underline{-2000u_1 + 999.75u_2} + 1000.25, \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \underline{u_1 - u_2}。 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^2 \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}$$

初始条件：$\boldsymbol{u}(0) = (0, -2)^T$

方程右端矩阵为：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2000 & 999.75 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F} = (1000.25, 0)^T$

由 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^2 + 2001\lambda + 1000.25 = 0$

$\boldsymbol{A}$特征值为：$\lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = -2000.5$， 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1999.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

容易看出, 方程有特解：$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

从而，方程组的通解为

$$u_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} x_{11} + C_2 e^{\lambda_2 t} x_{21} + 1$$

$$u_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} x_{12} + C_2 e^{\lambda_2 t} x_{22} + 1$$

利用初始条件 $\boldsymbol{u}(0) = (0, -2)^T$， 确定出常数$\boldsymbol{C}_1$和$\boldsymbol{C}_2$,

$C_1 = -2.99975$， $C_2 = -0.00025$。

因此，问题的精确解为

$$u_1(t) = -1.499875 e^{-0.5t} + 0.499875 e^{-2000.5t} + 1$$

$$u_2(t) = \underbrace{-2.99975 e^{-0.5t}}_{\text{慢瞬态分量}} \underbrace{-0.00025 e^{-2000.5t}}_{\text{快瞬态分量}} \underbrace{+1}_{\text{稳态分量}}$$

其中包含$e^{-0.5t}$的项为慢变分量，包含$e^{-2000.5t}$的项为快变分量，它们的和称为渐态解，常数项称为稳态解。

当$t\to\infty$时, $u_1(t)\to 1$, $u_2(t)\to 1$都趋于稳定解。

但是我们发现快变分量很快趋于零， 而慢变分量趋于零速度则很慢。 物理上用时间常数表示衰减速度, 这里

快变过程的时间常数 $\tau_1=-\dfrac{1}{\lambda_1}=\dfrac{1}{2000.5}\approx 0.0005$,

快变分量趋于零大约时间是：$t_1=10\tau_1\approx 0.005$ ，分量$e^{-2000.5t}\approx 0$,

而慢变过程的时间常数 $\tau_2=-\dfrac{1}{\lambda_2}=\dfrac{1}{0.5}=2$,

慢变分量趋于零大约时间是：$t_2=10\tau_2=20$，分量$e^{-0.5t}$才近似于0。

这表明此方程组的解分量变化速度相差很大, 是一个刚性方程。

用数值方法求解这种方程将会遇到很大困难。

量 $\dfrac{1}{\left|\operatorname{Re}\lambda_i\right|}\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 称为系统的时间常数。

时间常数是工程师和物理学家用于表达衰减率的一种术语。

就是说，如果 $\operatorname{Re}\lambda_i<0$，则在时间 $-\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda_i}$ 内，特征解衰减 $\dfrac{1}{e}$ 倍。

例如方程 $u'=\lambda u$，其解为 $u(t)=Ce^{\lambda t}$；如果 $\lambda<0$，则在 $-\dfrac{1}{\lambda}$ 这段时间内，特征解衰减 $\dfrac{1}{e}$ 倍。若 λ 为复数，解就按模衰减 $\dfrac{1}{e}$ 倍。

考虑用精度较高的4级4阶**Runge-kutta**方法求解上述初值问题

因为此方法的绝对稳定区间是（**−2.78, 0**），要想

$$\bar{h} = \lambda_1 h = -2000.5h \text{ 和 } \bar{h} = \lambda_2 h = -0.5h$$

都落在稳定区间内，需取步长

$$0 < h < \frac{-2.78}{-\lambda_1} \le 0.00139,$$

若取步长h=**0.00139**，则在时间区间**[0, 20]**上求解，步数 $N = \frac{T}{h} \approx 14388$，即需要计算**14388**步之后，才能到达稳定解。

若考虑问题是非线性的，其**Jacobi**矩阵的特征值和这问题相同，由于这方法每步需**4**次计算函数值，则总共计算有段函数达**30000**次以上，才能抵达稳态解。

另外，h太小也会使舍入误差问题变得相当严重，因此，现在的问题是要有保证稳定性但不限制步长的方法。

考虑线性常系数系统

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{g}(t),\quad t\in[a,b] \qquad (7\text{-}39)$$

和非线性系统

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}),\quad t\in[a,b]$$

定义 称（**7-39**）为刚性的，如果 λ_i是矩阵***A***的特征值, 满足

① $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0,\ j=1,2,\cdots,m$

② $\dfrac{\max_j|\mathrm{Re}(\lambda_j)|}{\min_j|\mathrm{Re}(\lambda_j)|}=R>>1$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda_j)$是 λ_j 的实部， ***R***称为刚性比。

定义7.4 称**(1.6.12)**为刚性的, 如果在 ***t*** 的区间***I***=**[0,** ***T*****]**内,

f 的**Jacobi**矩阵 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的特征值 $\lambda_i(t)$ 满足定义**6.1**的条件 ① ②。

A–稳定性

若刚性比R＞＞1，则A病态，对应的刚性方程称为病态方程

通常刚性比 $s=\mathrm{O}\left(10^{p}\right)$， $p\geq 1$ 就认为是刚性方程，且R越大刚性越严重, 例中R=4001。

用于刚性方程组的数值方法应当对h不加限制，据此，**Dahlquist**引进一种A–稳定概念。

定义7.5 数值方法称为A-稳定，如果将它用于模型问题

$$u'(t)=\lambda u(t)$$

的绝对稳定区域包含复平面整个左半平面Z-, 其中 λ 是复数。

为了判别线性多步法A-稳定，将它用于模型问题 $u'(t)=\lambda u(t)$

得到线性差分方程：

$$\sum_{j=0}^{k}\left(\alpha_j-\bar{h}\beta_j\right)u_{n+j}=0$$ 其中 $\bar{h}=\lambda h$。

相应的的特征方程为 $\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=0$

或
$$\bar{h}=\frac{\rho(\lambda)}{\sigma(\lambda)} \qquad (*)$$

其中
$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\ \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j\lambda^j,\quad m\le k。$$

（*）是一个由 $\lambda\in \mathbf{Z}$到复平面 $\bar{h}\in\mathbf{Z}$ 的解析变换。

命题 设 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 是方程（1.6.15）的根，则下列表述等价

① 线性多步法 ***A*-稳定**

② $\mathrm{Re}\,\bar{h}<0,\Rightarrow|\lambda_{\mathrm{j}}|<1,\ j=1,2,\cdots,k$

③ $|\lambda_{\mathrm{j}}|\ge 1\Rightarrow \mathrm{Re}\,\bar{h}\ge 0$。

例**1** 隐式**Euler**公式 $u_{n+1}=u_n+hf_{n+1}$

由于 $\rho(\lambda)=\lambda-1,\ \sigma(\lambda)=\lambda$， 则

$$\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)=\mathrm{Re}\,\frac{\lambda-1}{\lambda}=\mathrm{Re}\left(\frac{|\lambda|(\cos\theta+i\sin\theta)-1}{|\lambda|(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$

$$=\frac{|\lambda|\left(\quad-|\lambda|\cos\theta\right)}{|\lambda|^2}$$

显然当 | λ | ≥**1**时， $\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)\ge 0$，故隐式**Euler**公式 A-稳定。

例2 梯形公式

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f_n+f_{n+1}\right)$$

由于$\rho(\lambda)=\lambda-1,\sigma(\lambda)=\frac{1}{2}(\lambda+1)$，则

$$\operatorname{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda-1}{\frac{\lambda+1}{2}}\right)=\operatorname{Re}\left(2\frac{|\lambda|(\cos\theta+i\sin\theta)-1}{|\lambda|(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\right)=2\left(\frac{|\lambda|^2-1}{|\lambda+1|^2}\right)$$

显然当｜λ｜≥1时，$\operatorname{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)\geq 0$，故梯形公式*A*稳定。

例3 考虑k步线性法

$$u_{n+k}=u_n+\frac{kh}{2}\left(f_n+f_{n+k}\right)$$

由于 $\rho(\lambda)=\lambda^k-1,\sigma(\lambda)=\frac{k}{2}\left(\lambda^k+1\right)$，则

$$\bar{h}(\lambda)=\frac{\rho(\lambda)}{\sigma(\lambda)}=\frac{2}{k}\frac{\lambda^k-1}{\lambda^k+1}=\frac{2}{k}\cdot\frac{\left(\lambda^k-1\right)\left(\overline{\lambda^k+1}\right)}{\left|\lambda^k+1\right|^2}=\frac{2}{k}\cdot\frac{|\lambda|^{2k}+\lambda^k-\overline{\lambda}^k-1}{\left|\lambda^k+1\right|^2}$$

$$\lambda^k=|\lambda|^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$

$$=\frac{2}{k}\cdot\frac{|\lambda|^{2k}-1+i2\lambda^k\sin\theta}{\left|\lambda^k+1\right|^2}$$

故 $\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)=\frac{2}{k}\cdot\frac{|\lambda|^{2k}-1}{|\lambda+1|^2}$

显然当 | λ | ≥1时，$\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right)\geq 0$，故$k$步线性法$A$-稳定。

现在考察 **Euler**公式

$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

由于 $\rho(\lambda) = \lambda - 1, \sigma(\lambda) = 1$， 则

$$\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right) = \mathrm{Re}\frac{1}{\lambda - 1} = \mathrm{Re}\frac{\mathrm{Re}\,\lambda - 1 + i\,\mathrm{Im}\,\lambda}{|\lambda - 1|^2} = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda - 1}{|\lambda - 1|^2}$$

显然若｜λ｜≥**1,** 而 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\mathrm{Re}\left(\bar{h}(\lambda)\right) < 0$，故**Euler**法非***A***-稳定。

实际上**,** 可以证明显式线性多步法都不是***A***-稳定的（参看[6]）。

练习 给定问题 $\begin{cases} u' = -0.1u + 199.9v \\ v' = -200v \end{cases}$， $\begin{cases} u(0) = 2 \\ v(0) = 1 \end{cases}$

（1）求出问题的精确解；（2）求出问题的刚性比；

（3）若用四级四阶**Runge-Kutta**法求解时,试问步长$\boldsymbol{h}$允许取多大才能保证计算稳定？

解： $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}(0) = \big(u(0), v(0)\big)^T = (2, 1)^T$ 。

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & 199.9 \\ 0 & -200 \end{pmatrix}$ 故A的特征根多项式为：

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 0.1 & -199.9 \\ 0 & \lambda + 200 \end{vmatrix} = (\lambda + 0.1)(\lambda + 200)$$

A有二个不同的特征根, 从而A可与对角形矩阵相似, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}$ 。

与特征根 $\lambda_1 = -0.1$ $\lambda_2 = -200$ 相应的二个线性无关的特征向量为：

$$x_1 = (1, 0)^T, \quad x_2 = (1, -1)^T$$

故得 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 及 $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

可得所求问题的精确解：

$$X(t) = e^{At} X(0) = T \begin{pmatrix} e^{-0.1t} & \\ & e^{-200t} \end{pmatrix} T^{-1} X(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.1t} & \\ & e^{-200t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-0.1t} - e^{-200t} \\ e^{-200t} \end{pmatrix}$$

(2)求出问题的刚性比

$$s=\frac{\max\limits_{j}\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_j\right)\right|}{\min\limits_{j}\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_j\right)\right|}=\frac{200}{0.1}=2000=2\times10^3$$

(3)若用四级四阶**Runge-Kutta**法求解时, 因为其绝对稳定区间是 $(-\mathbf{2.78},\ \mathbf{0}]$, 要想

$$\bar{h}_1=\lambda_1 h=-0.1h \quad 和 \quad \bar{h}_2=\lambda_2 h=-200h$$

都落在绝对稳定区间内, 需取步长 $\boldsymbol{h<0.0139}$, 才能保证计算稳定 。

然而，**Dahlquist**已经证明，***A***-稳定方法阶不超过**2**，而且在二阶***A***-稳定线性多步方法中梯形法的误差主项系数最小。这个具有约束性的结论启示人们减弱***A***-稳定条件，寻求适于刚性方程组的方法类。

Widlund引进了 $A(\alpha)-$稳定性， 这个概念是基于下述想法：

为保证对***h***不加限制，只要 $h\mu_j$ 属于绝对稳定区域即可，这个区域不必占据整个左半平面 Z_-。

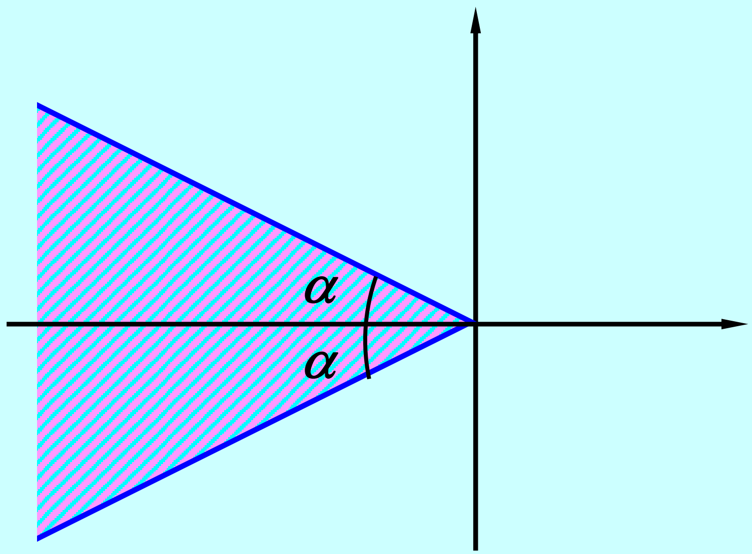
定义**7.5** 如果它的稳定区域包含了复平面 $h\mu$ 的无限楔形区域，则数值方法称为 $A(\alpha)-$稳定性。

$$w_\alpha = \left\{ h\mu \middle| -\alpha < \pi - \arg(h\mu) < \alpha \right\},\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

若对充分小的 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，方法是 $A(\alpha)-$稳定性的，则称方法为**A(0)**稳定。

$A(\alpha)-$ 稳定的方法其绝对稳定区域较**A-**稳定方法的绝对稳定区域小， 因此若方法是**A-**稳定的，则必然是 $A(\alpha)-$稳定性 的，

$A(\alpha)-$稳定为图**7-1**中的阴影部分



显然， $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$-稳定就是$A$-稳定。

Widlund还证明了 $A(\alpha)-$稳定 的线性多步法必为隐式方法。此外, 对 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 当***k*=*p*=3**及***k*=*p*=4**时, 存在 $A(\alpha)-$稳定的线性***k***步方法。**Gear**进一步减弱了稳定性要求，引进刚性稳定概念。

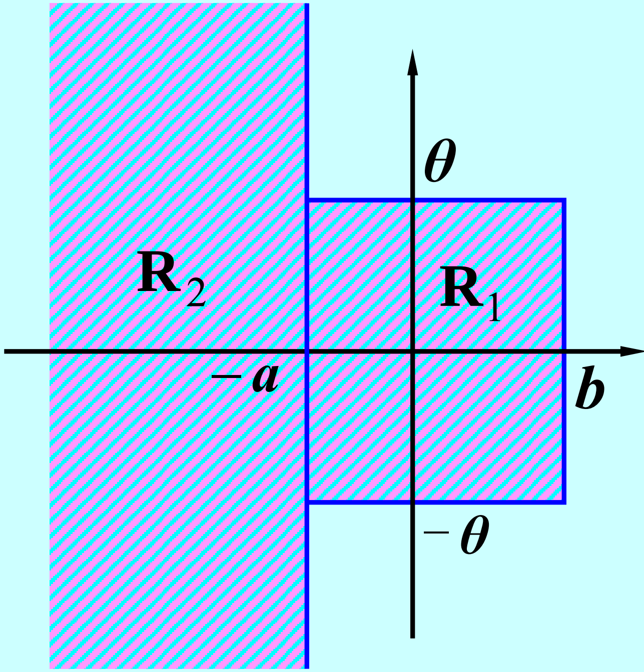
定义**7.6** 一个数值方法称为刚性稳定的，如果存在正常数 a, b, θ，使它在区域:

$$\mathbf{R}_1=\{h\mu \mid \mathrm{Re}(h\mu)\le -a\}$$

绝对稳定； 而在区域:

$$\mathbf{R}_2=\{h\mu \mid -a\le \mathrm{Re}(h\mu)\le b,\ |\mathrm{Im}(h\mu)|\le\theta\}$$

中对方程式 $u'=\mu u$ 是精确的(见图7-2)。



定义表明刚性稳定比***A***-稳定要求低。

Gear提出这种定义的想法是这样的，微分方程（**7-40**）的解含有形式为 $e^{\mu t}$的成分，用数值方法以步长h积分一步时，这种量改变大约$e^{\mu t}$倍，如果 $\mu u = x + iy$，则改变的幅度为e^x，如果$x<-a$，则从量值上至少减少到原来的 e^a 倍。当a适当大时，区域$\mathbf{R}_1$中这种量的绝对值将很快减少到可忽略的程度，因而在$\mathbf{R}_1$中，公式的积分精度可以不予考虑，仅需要保证方法是稳定的.在包括原点的区域$\mathbf{R}_2$中，精度与稳定性均是需要考虑的。

简单地讲，求解（**7-40**）的一个满足刚性稳定的数值方法，可以在区域中不考虑积分精度，仅需要保证方法是稳定的。而在含原点的区域中，数值公式的精度和稳定性均需要考虑。

7.5　边值问题的数值解法

常微分方程边值问题亦称两点边值问题，二阶常微分方程的边值问题一般可写成

$$u'' = f(x, u', u) \quad x \in (a, b) \tag{7-41}$$

并结合下述三种边值条件：

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta; \tag{7-42}$$

$$u'(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta; \tag{7-43}$$

$$u(a) - \alpha_0 u'(a) = \alpha_1, \quad u(b) + \beta_0 u'(b) = \beta_1; \tag{7-44}$$

其中（7-44）式中 $\alpha_0 \geq 0$， $\beta_0 \geq 0$ $\alpha_0 + \beta_0 > 0$，它们分别称为第一、第二、第三边值条件。

在（7-41）中，当 $f(x, u', u)$关于 u', u为线性时，即此时（7-41）变成线性微分方程：

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \tag{7-45}$$

其中 $q(x) \leqslant 0$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C[a, b]$。

7.5.1打靶法

1. 线性打靶法

对于线性微分方程第一边值问题（7-45）和（7-42）可将它们转化为两个初值问题：

$$Lu_1 = u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = f(x), \qquad u_1(a) = \alpha,\ u_1'(a) = 0 \qquad \text{(7-46)}$$

$$Lu_2 = u_2'' + p(x)u_2' + q(x)u_2 = 0, \qquad u_2(a) = 0,\ u_2'(a) = 1 \qquad \text{(7-47)}$$

通过求解初值问题的解，从而得到边值问题的解。

定理7.3 设u_1是初值问题(7-46)的解, u_2是初值问题(7-47)的解, 并设 $u_2(b) \neq 0$，则边值问题（7-45）和（7-42）的解为：

$$u(x) = u_1(x) + \frac{\beta - u_1(b)}{u_2(b)} \cdot u_2(x) \qquad \text{(7-48)}$$

证 将微分算子L作用于（7-48）两边，并利用$Lu_2=0$则有

$$Lu = Lu_1 + \frac{\beta - u_1(b)}{u_2(b)} \cdot Lu_2 = Lu_1 = f$$

即$u(x)$满足方程（7-45）。注意到$u_2(a)=0$，则从（7-48）式得到

$$u(a) = u_1(a) + \frac{\beta - u_1(b)}{u_2(b)} \cdot u_2(a) = u_1(a) = \alpha$$

$$u(b) = u_1(b) + \frac{\beta - u_1(b)}{u_2(b)} \cdot u_2(b) = \beta$$

故满足边界条件（7-42），定理得证。

由定理7.3得到边值问题解的表达式（7-48）称为线性打靶法。

例1 用线性打靶法求解边值问题

$$\begin{cases} u''+xu'-4u=12x^2-3x, & 0<x<1 \\ u(0)=0, \quad u(1)=2 \end{cases}$$

其精确解表达式为$u(x)=x^4+x$。

解：先把它转化为两个初值问题

$$\begin{cases} u_1''+xu_1'-4u_1=12x^2-3x, \\ u_1(0)=0, \quad u_1'(0)=0 \end{cases} \qquad \textbf{(7-49)}$$

$$\begin{cases} u_2''+xu_2'-4u_2=0, \\ u_2(0)=0, \quad u_2'(0)=1 \end{cases} \qquad \textbf{(7-49)}$$

注意右端边界$u(1)=2$，由定理7.2边值问题解为:

$$u(x)=u_1(x)+\frac{2-u_1(1)}{u_2(1)}\cdot u_2(x)$$

令 $z_1=u_1'$，$z_2=u_2'$，将两个初值问题（**7-49**）和（**7-50**）分别降为一阶方程组初值问题**:**

$$\begin{cases} u_1'=z_1, & u_1(0)=0 \\ z_1'=-xz_1+4u_1+12x^2-3x, & z_1(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2'=z_2\ , & u_2(0)=0 \\ z_2'=-xz_2+4u_2\ , & z_2(0)=1 \end{cases}$$

取$\boldsymbol{h}$**=0.02,** 用经典**Runge-Kutta**法分别求这两个方程组解$\boldsymbol{u_1(x_i)}$和$\boldsymbol{u_1(x_i)}$的数值解$\boldsymbol{u_{1i}}$和$\boldsymbol{u_{2i}}$，从而可得到精确解$\boldsymbol{u(x_i)}$的打靶法数值解$\boldsymbol{u_i}$。

部分点上的数值解、精确解和误差列表如下：

x_i	u_{1i}	u_{2i}	u_i	$u(x_i)$	$\lvert u_i - u(x_i)\rvert$
0.0	**0.000000000**	**0.000000000**	**0.0000000000**	**0.000000000**	**0.0000000**
0.2	**-0.002407991**	**0.204007989**	**0.2016000053**	**0.201600000**	**0.53×10-8**
0.4	**-0.006655031**	**0.432255024**	**0.4256000080**	**0.425600000**	**0.80×10-8**
0.6	**0.019672413**	**0.709927571**	**0.7296000083**	**0.729600000**	**0.83×10-8**
0.8	**0.145529585**	**1.064070385**	**1.2096000058**	**1.209600000**	**0.53×10-8**
1.0	**0.475570149**	**1.524428455**	**2.0000000000**	**2.000000000**	**0.00000000**

结果表明线性打靶法很有效。

2. 非线性打靶法

考虑一般非线性二阶常微分方程的边值问题是以（**7-41**）和（**7-42**）为例讨论打靶法，取初值问题

$$\begin{cases} u'' = f\left(x, u, u'\right) \qquad x \in \left(a, b\right) \\ u\left(a\right) = \alpha, \\ u'\left(a\right) = t_k \end{cases} \tag{7-51}$$

其中$\boldsymbol{t_k}$为$\boldsymbol{u}$在$\boldsymbol{a}$处的斜率，设此时得到的解$\boldsymbol{u(x, t_k)}$，而且要求

$$\lim_{k\to\infty} u\left(b, t_k\right) = u\left(b\right) = \beta \tag{7-52}$$

这时所得$\boldsymbol{u(x)}$即为所求解，因此问题归结为$\boldsymbol{t_k}$的选取。而（**7-52**）式又可视为非线性方程的求根问题，即求$\boldsymbol{t}$，使

$$u\left(b, t\right) - \beta = 0 \tag{7-53}$$

成立。

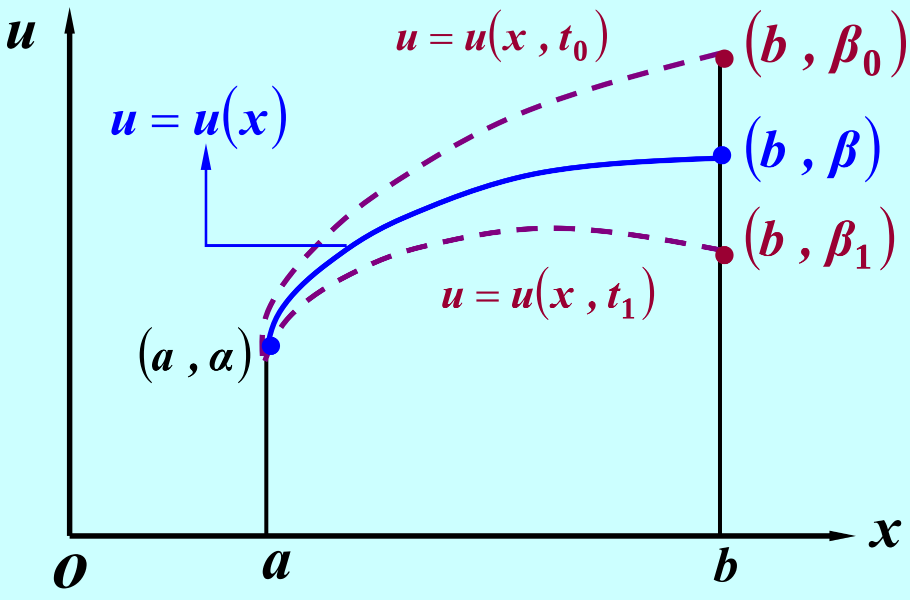
令 $z=u'$，（**7-51**）转化为一阶方程组

$$\begin{cases} u' = z \\ z' = f(x,u,z) \\ z(a) = t_k \\ u(a) = \alpha \end{cases} \qquad \textbf{(7-54)}$$

这样初值问题**(7-54)**的解$\boldsymbol{u(x,t_k)}$就是边值问题**(7-41)**和**(7-42)**的解。

通常**,**可用二分法、插值法或**Newton**迭代法求**(7-53)**式的解。

而这一过程好比打靶，$\boldsymbol{t_k}$为子弹发射斜率，$\boldsymbol{u(b)=\beta}$ 为靶心，当 $|u(b,t_k)-\beta|<\varepsilon$ 时，得到解。



非线性打靶法示意图7-3

（1）用插值法求满足（7-53）式的t值

设当$t=t_0$时, $u(b, t_0)=\beta_0$，当$t=t_1$时， $u(b, t_1)=\beta_1$，

此时选取t_2的公式为

$$t_2=t_1+\frac{t_1-t_0}{\beta_1-\beta_0}\cdot(\beta-\beta_1)$$

一般，设当$t=t_{k-1}$时，$u(b, t_{k-1})=\beta_{k-1}$，当$t=t_k$时，$u(b, t_k)=\beta_k$，

此时选取t_{k+1}的公式为

$$t_{k+1}=t_k+\frac{t_k-t_{k-1}}{\beta_k-\beta_{k-1}}\cdot(\beta-\beta_k), \quad k=1, 2, \cdots \tag{7-55}$$

按（7-55）式求, 直到 $|u(b, t_k)-\beta|<\varepsilon$ 为止, 其中 ε 为允许误差界。

（2）用割线法求满足（7-53）式的*t*的值

我们知道，求 $f(x)=0$ 根的割线法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f\left(x_k\right)}{f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)}\cdot\left(x_k-x_{k-1}\right),\qquad k=1,2,\cdots$$

因此，对（7-53）式得迭代公式为

$$t_{k+1}=t_k-\frac{\left[u\left(b,t_k\right)-\beta\right]}{u\left(b,t_k\right)-u\left(b,t_{k-1}\right)}\cdot\left(t_k-t_{k-1}\right),\qquad k=1,2,\cdots$$

对非线性方程的第二、第三边值条件也同样可用插值法或迭代法求解

例2 打靶法求解非线性两点边值问题

$$\begin{cases} 4u'' + uu' = 2x^3 + 16 \qquad x \in (2\,,3) \\ u(2) = 8\,, \\ u'(3) = \dfrac{35}{3} \end{cases}$$

要求误差 $\varepsilon \le \dfrac{1}{2} \times 10^{-6}$，精确解为 $u(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$。

解 相应的初值问题为

$$\begin{cases} u' = z \\ z' = \dfrac{-uz}{4} + \dfrac{x^2}{2} + 4 \\ u(2) = 8\,, \\ z(2) = t_k \end{cases}$$

对每个t_k，用经典**Runge-Kutta**法（**7-31**）计算，取步长h=**0.02**，

选t_0=1.5求得

$$u(3,t_0)=11.4889,\quad \left|u(3,t_0)-\frac{35}{3}\right|=0.1777>\varepsilon$$

选t_1=2.5求得

$$u(3,t_1)=11.8421,\quad \left|u(3,t_0)-\frac{35}{3}\right|=0.0755>\varepsilon$$

由（7-55）式求得t_2

$$t_2=t_1-\frac{\left[u(3,t_1)-\frac{35}{3}\right]}{u(3,t_1)-u(3,t_0)}\cdot(t_1-t_0)=2.0032251,$$

求得$u(3, t_2)$=11.6678, 仍达不到精度要求。再由t_1, t_2, $u(3, t_1)$和$u(3, t_1)$

重复上述过程, 可求得t_3 ,再求解初值问题得

$$u(3,t_3)=11.666659,\qquad u(3,t_4)=11.666667$$

满足要求，此时解$u(x_j, t_4)$（j=0, 1, 2, ⋯, N）即为所求。

非线性边值问题的解

x_i	u_i	$u(x_i)$	$\left\lvert u_i - u(x_i) \right\rvert$
2.0	8.0000000000	8.0000000000	0.0000000000
2.2	8.4763636378	8.4763636363	0.15×10^{-8}
2.4	9.0933333352	9.0933333333	0.18×10^{-8}
2.6	9.8369230785	9.8369230769	0.16×10^{-8}
2.8	10.6971426562	10.6971428571	0.10×10^{-8}
3.0	11.6666666669	11.6666666667	0.02×10^{-8}

7.5.2　差分法

本节只考虑求解二阶线性常微分方程边值问题的差分法。

用差分法求解步骤是：

首先，对求解区间作剖分，用有限剖分结点代替连续区间，即将求解区间离散化；

其次，用数值微商公式把微分方程化为差分方程；

再而，求解已得到满足边界条件的线性代数方程组

求解此方程组，得到边值问题在节点上的函数近似值。

考虑二阶常微分方程边值问题

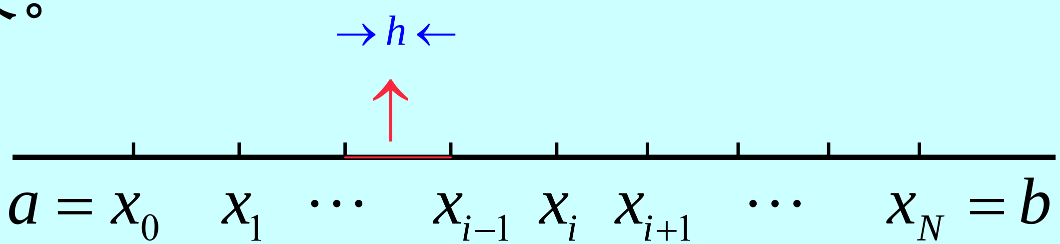
$$\begin{cases} Lu = \dfrac{d^2u}{dx^2} + p(x)\dfrac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad a < x < b & (7-56) \\ u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta & (7-57) \end{cases}$$

其中 $f, p, q \in \mathbf{C}[a, b], q(x) \leqslant 0$； α, β为给定常数。

首先，将区间 **[**a, b**]**分成 N 等分，分点为:

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \cdots, N\ , \quad h = \frac{b-a}{N}$$

于是我们得区间 $\boldsymbol{I}$=**[**a, b**]**的一个网格剖分。 x_i称为网格节点, h 称为步长。



现在将方程（**7-56**）在节点x_i离散化，为此由数值微分公式可得

$$u'(x_i)=\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+O(h^2)$$

$$u''(x_i)=\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2)$$

即在节点x_i处实现微分算子的离散化。 又设p_i=$p(x_i)$, q_i=(x_i), f_i=$f(x_i)$ 则有在 x_i处可将方程（**7-56**）写成：

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+p_i\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+q_i u(x_i)= f_i+O(h^2)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1。$$

舍去$O(h^2)$ ，并用u_i近似代替 $u(\boldsymbol{x}_i)$，则得到方程组：

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_i u_i=f_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \quad (7\text{-}58)$$

$$u_0=\alpha,\qquad u_N=\beta \qquad (7\text{-}59)$$

它的解u_i是$u(x)$于$x=x_i$的近似，称（7-58）和（7-59）为逼近（7-56）和（7-57）的差分方程或差分格式。重新改写得：

$$\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)u_{i-1}+\left(q_ih^2-2\right)u_i+\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)u_{i+1}=h^2 f_i,$$

$$i=1,2,\cdots,N-1$$

将$u_0=\alpha$, $u_N=\beta$分别代入$i=1$和$i=N-1$的两个方程中，并将已知量移到方程右端后，写成矩阵形式，得线性方程组：$\boldsymbol{AU=F}$。

其中

$$\boldsymbol{A}_{(N-1)\times(N-1)}=\begin{pmatrix} q_1h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_1 & & & \\ 1-\frac{h}{2}p_2 & q_2h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\frac{h}{2}p_{N-2} & q_{N-2}h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_{N-2} \\ & & & 1-\frac{h}{2}p_{N-1} & q_{N-1}h^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_{N-1})^T,$$

$$\boldsymbol{F} = \left(h^2 f_1 - (1 - \frac{h}{2} p_1)\alpha,\ h^2 f_2,\ \cdots,\ h^2 f_{N-2},\ h^2 f_{N-1} - (1 + \frac{h}{2} p_{N-1})\beta \right)^T。$$

可见函数矩阵A是三对角阵。由常微分方程理论可知，当

$q(x) \leqslant 0$时，$x \in [a, b]$两点边值问题的解存在且唯一；又当

步长满足$|\, h\, p_i \,| < 2$，即

$$h < \frac{2}{L}, \quad L = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$$

可证明函数矩阵A是严格对角占优，从而非奇异，我们可用消元法或迭代法求解方程组。

例2 用差分法计算线性边值问题

$$\begin{cases} u'' - u' = -2\sin x & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ u(0) = -1, \ u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

其解析解是: $u(x) = \sin x - \cos x$。

解： 已知$p(x)=-1$, $q(x)=0$, $\alpha=-1$, $\beta=1$。当取$N=4$, $h=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{4}$ 时，

节点为：$x_1=h=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=2h=\dfrac{\pi}{4}$, $x_3=3h=\dfrac{3\pi}{8}$。

相应的方程组为：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-\frac{h}{2} & 0 \\ 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} \\ 0 & 1+\frac{h}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\pi}{16}-\frac{\pi^2}{32}\cdot\sin\frac{\pi}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{64}\pi^2 \\ \frac{\pi}{16}-1-\frac{\pi^2}{32}\cdot\sin\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

将相应的参数代入上述方程组，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0.8037 & 0 \\ 1.964 & -2 & 0.8037 \\ 0 & 1.964 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0783 \\ -0.2181 \\ -1.0886 \end{pmatrix}$$

解得： $u_1 = -0.5351$， $u_2 = 0.0101$， $u_3 = 0.5503$

解析解是:

$$u\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.5412\,,\ u\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 0,\ u\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0.5412。$$

由于取的节点少，步长大，截断误差大，所以计算精度差。随着节点数增加（步长h缩小），精度将会明显提高。