第3章 逐次逼近法

作业:

3、5、6、7、8（1）、9、10、12（2）、13、14、15、18、23

3.1 解线性方程组的迭代解法

3.2 非线性方程的迭代解法

3.1 解线性方程组的迭代法

3.1.1 简单迭代法

3.1.2 迭代法的收敛性

求解线性方程组:

$$Ax = b \qquad (3\text{-}1)$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}, b \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

直接法:通过有限步四则运算求得问题的精确解	迭代法:设计迭代法则，从初始值出发求得问题的近似解
1、舍入误差得问题的近似解;	1、问题的近似解;
2、破坏问题的稀疏结构;	2、保持问题的稀疏结构
3、程序实现相对复杂;	3、程序设计相对简单
适合求解中小规模、稠密的线性方程组	如何构造收敛、快速的迭代公式

使用迭代法求解线性方程组时，首先要将它变形

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = Bx + f \qquad (3\text{-}2)$$

其中 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}, f \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

即（3-1）的解是（3-2）的解，反之，（3-2）的解也是（3-1）的解。用不同的方法构造（3-2）就可得到不同的迭代法。（3-2）中的矩阵B称为迭代矩阵。

$$\Longleftrightarrow$$

称使用

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式.

如果对任意 $x^{(0)}$，都有 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ 。即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散.

具体迭代过程

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$

代入 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ 的右端

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{f}$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \Longrightarrow x^{*} = Bx^{*} + f \Longleftrightarrow Ax^{*} = b$$

使用迭代法求解就是求向量序列 $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$ 的极限向量

3.1.1 简单迭代法

简单迭代法也称基本迭代法，有些迭代法可以通过对基本迭代法的加速或变形而得到。设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为非奇异，且 $a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$。

对上式移项和变形后可得等价的方程组:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}\right) \end{cases}$$

迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Jacobi迭代法

例1 将线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ x_2 = \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 = \frac{1}{4}(-2x_1 - x_2 + 12) \end{matrix}$$

解：写成Jacobi迭代格式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \quad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \quad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3;$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8} \qquad x_1^{(2)} = \frac{1}{8}(20+3\times3-2\times3) \approx 2.875 \qquad \cdots \qquad x_1^{(10)} \approx 3.00032$$

$$x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3 \qquad x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left(33+4\times\frac{20}{8}+3\right) \approx 2.3636 \qquad \cdots \qquad x_2^{(10)} \approx 1.999838$$

$$x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3 \qquad x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12-2\times\frac{20}{8}-3\right) \approx 1 \qquad \cdots \qquad x_3^{(10)} \approx 0.999881$$

终止条件为： $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon$ 。

精确解为： $x^* = (3, 2, 1)^T$ 。

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，在计算 $x_2^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}$ 已经算出，计算 $x_i^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出。一般说来，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要**精确**些。 故对

Jacobi迭代法

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)})
\end{cases}
$$

作如下改进

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})
\end{cases}
$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\vdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$， $x_2^{(5)}\approx 2.000072$， $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le 10^{-5}$

Jacobi迭代法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

将迭代格式改写成如下的分量形式，即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad k = 0, 1, 2, \cdots; \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

称为Gauss-Seidel迭代法。

若记

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & \cdots & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1j} & \cdots & -a_{j-1n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

由 $A = D - L - U$ ，得 $Dx = (L+U)x + b$ 从而

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\,x^{(k)} + D^{-1}b \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

令 $B_J = D^{-1}(L+U),\ f_J = D^{-1}b,$

则

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J \quad (k = 0,1,\cdots)$$

由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$ ，得 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ 从而

$$x=(D-L)^{-1}Ux+(D-L)^{-1}b$$

则Gauss-Seidel迭代法可以写成

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $B_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}U,\ f_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}b$

则

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}_G \quad (k=0,1,\cdots)$$

3.1.2 迭代法的收敛性

考虑如下问题:

① 如何判断迭代过程是否收敛呢?

② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么?

③ 决定迭代收敛速度的因素是什么?

设某种迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

第k+1步迭代向量与真实解的差

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{*} =$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*}) = \cdots = B^{k+1}\left(x^{(0)} - x^{*}\right)$$

从而

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} \to x^{*} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{B}^{k+1}\left(x^{(0)} - x^{*}\right) \to 0$$

而 $\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^{*}$ 是一个非零的常向量，因此只有

$$x^{(k+1)} \to x^{*} \Leftrightarrow B^{k+1} \to 0 \quad \text{（零矩阵）}$$

定理 3.1

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = x^*$$

的充分而且必要条件是 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{O}_{n\times n} \Leftrightarrow \rho(\boldsymbol{B}) < 1$。

定理 3.2　迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$ 对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{f}$

均收敛的充要条件为：$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$。

定理 3.3（充分条件） 若 $\|B\|<1$，则迭代法收敛，

且有 $$\|x^{(k)}-x^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

与阶数无关

证明 $$x^{(k+1)}-x^{(k)} = Bx^{(k)}-Bx^{(k-1)} = B(x^{(k)}-x^{(k-1)})$$

$$x^{(k)}-x^* = x^{(k)}-x^{(k+1)}+x^{(k+1)}-x^*$$

$$= B(x^{(k-1)}-x^{(k)})+B(x^{(k)}-x^*)$$

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|+\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^*\right\|$$

$$(1-\|B\|)\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| \le \cdots \le \|B\|^k\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

例4 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

问使用Jacobi法和G-S法求解是否收敛.

（1） 求Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

即 $\rho(B) = 0 < 1$ ， 故Jacobi迭代法收敛.

（2）求G-S迭代法的迭代矩阵 B_G ，由

$$\det(\lambda I - B_G) = \det\left(\lambda I - (D-L)^{-1}U\right)$$

$$= \det\left((D-L)^{-1}(\lambda(D-L)-U)\right)$$

$$= \det\left((D-L)^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda(D-L)-U\right) = 0$$

得

$$\det\left(\lambda(D-L)-U\right) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

进一步得 $\rho(B_G) = 2 > 1$，故G-S迭代法发散.

注意: 并不是对任何情况, G-S迭代比Jacobi迭代收敛速度快.

对于某些特殊的方程组，从方程组本身就可判定其收敛性.不必求迭代矩阵的特征值或范数.

定义3.1 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3\text{-}14)$$

则称矩阵 A 为对角占优阵；如果（3-14）中严格不等式成立，称矩阵 A 为严格对角占优阵.

可以证明严格对角占优阵 A 为非奇异矩阵，即

$$\det(A) \neq 0$$

事实上, 如果A奇异, 则Ax=0有非零解 $c_1, c_2, \ldots, c_n$

令 $$|c_i| = \max_{1\le j\le n}\{|c_j|\}$$

则 $$a_{i,1}c_1 + a_{i,2}c_2 + \cdots + a_{i,n}c_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{i,i}c_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}c_j$$

$$\Rightarrow |a_{i,i}|\cdot|c_i| \le \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|\cdot|c_j|$$

$$\Rightarrow |a_{i,i}| \le \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|\cdot|c_j|/|c_i| \le \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$$

与A为严格对角占优矩阵矛盾!

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对角占优矩阵　　　　严格对角占优矩阵

定理3.4 （充分性条件）若线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

中的 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，则Jacobi法和 Gauss-Seidel法均收敛。

证（1）Jacobi迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{B}_J$ 的每一行每个元素取绝对值的和为 $\dfrac{1}{|a_{ii}|}\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$

严格对角占优 $\Longrightarrow \dfrac{1}{|a_{ii}|}\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|<1 \Longrightarrow \|\boldsymbol{B}_J\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j\neq i}\left|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \Longrightarrow$ 收敛

（2）G-S迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$，其特征值 λ 满足

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)\right)$$

$$=\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\cdot\det[\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}]=0$$

因为 $\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\neq 0$，则有

$$\det(C)=\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0 \qquad (3\text{-}16)$$

假设 $|\lambda|\ge 1$

$$C=\lambda(D-L)-U=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{pmatrix}$$

由于 A 为严格对角占优阵，则应有 $(i=1,2,\cdots,n)$

$$|\lambda||a_{ii}|>|\lambda|\sum_{j\ne i}|a_{ij}|=\sum_{j\ne i}|\lambda||a_{ij}|\ge\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$$

即矩阵 C 为严格对角占优阵，故 $\det(C)\ne O$，与（3-16）式矛盾

B_G 的所有特征值的绝对值均小于1，即 $\rho(B_G)<1$

G-S迭代法收敛.

若A为对称正定矩阵：

1、若2D-A为正定矩阵，则Jacobi迭代法收敛

2、Gauss-Seidel迭代法收敛

迭代改善法

对良态或者不十分严重病态的线性方程组,与直接法结合对已得近似解进行精度改善.

1)用三角分解法(带列主元LU分解)求$Ax=b$

$$PA = LU \quad \Rightarrow PAx = LUx = Pb$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

得到计算解 $\tilde{x}$

2)求$\tilde{x}$的修正向量 z

用双精度计算余向量 $r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = Az$

$$PAz = LUz = Pr \quad \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pr \\ Uz = y \end{cases}$$

令 $x = \tilde{x} + z \qquad Ax = A\tilde{x} + Az = b - r + Az = b$

故 $x = \tilde{x} + z$即为近似解 $\tilde{x}$的改进解.

3)反复对近似解进行改善,即反复2)的过程.

例3 见书P57-58

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \xrightarrow{\text{直接法得初始近似解}} \boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(1)}$$

$$\text{余量}\boldsymbol{r}^{(1)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(1)} \xrightarrow{\text{利用余量求修正量}} \boldsymbol{Az}^{(1)}=\boldsymbol{r}^{(1)}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}} \boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{z}^{(1)}$$

$$\text{余量}\boldsymbol{r}^{(2)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(2)} \xrightarrow{\text{利用余量求修正量}} \boldsymbol{Az}^{(2)}=\boldsymbol{r}^{(2)}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}} \boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\boldsymbol{z}^{(2)}$$

3.2 非线性方程的迭代解法

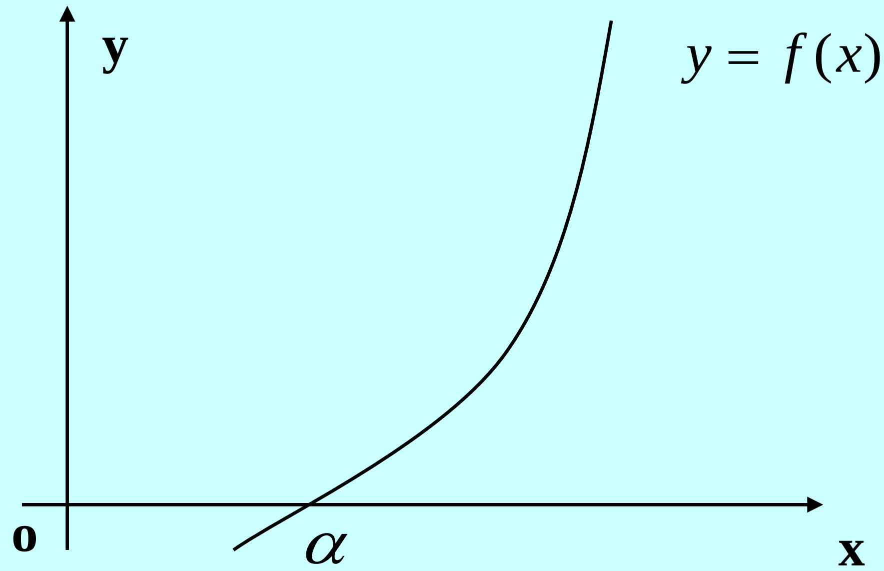
求解非线性方程问题

设非线性方程

$$f(x) = 0$$

求数 α，使 $f(\alpha) \equiv 0$ ，则称 α 为方程的**根**，或称函数 $f(x)$ 的**零点**。

求 $f(x)=0$ 的根就是求$y=f(x)$与X轴的交点α



如果 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上仅有一个根，则称 $[a,b]$ 为方程的**单根区间**; 若方程在 $[a,b]$ 上有多个根，则称 $[a,b]$ 为方程的**多根区间**。

方程的单根区间和多根区间统称为**方程的有根区间。**为了研究方便，我们主要研究方程在**单根区间上的求解方法。**

简单迭代法

首先将方程 $f(x)=0$ 化为一个与它同解的方程

$$x=\varphi(x) \tag{3-18}$$

其中 $\varphi(x)$ 为 X 的连续函数。即如果数 α 使 $f(\alpha)\equiv 0$，则也有 $\alpha\equiv\varphi(\alpha)$， 反之，若 $\alpha\equiv\varphi(\alpha)$，则也有 $f(\alpha)\equiv 0$

任取一个初始值 x_0，代入（3-18）的右端，得到 $x_1=\varphi(x_0)$ 再将 x_1 代入（3-18）右端得 $x_2=\varphi(x_1)$，继为之，得到一个数列，其一般表示形式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{3-19}$$

通常称（3-19）为求解非线性方程的简单迭代法，也称迭代法或迭代过程或迭代格式，$\varphi(x)$ 称为迭代函数，x_k 称第 k 步的迭代值或简称迭代值。

如果由迭代格式产生的数列收敛，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

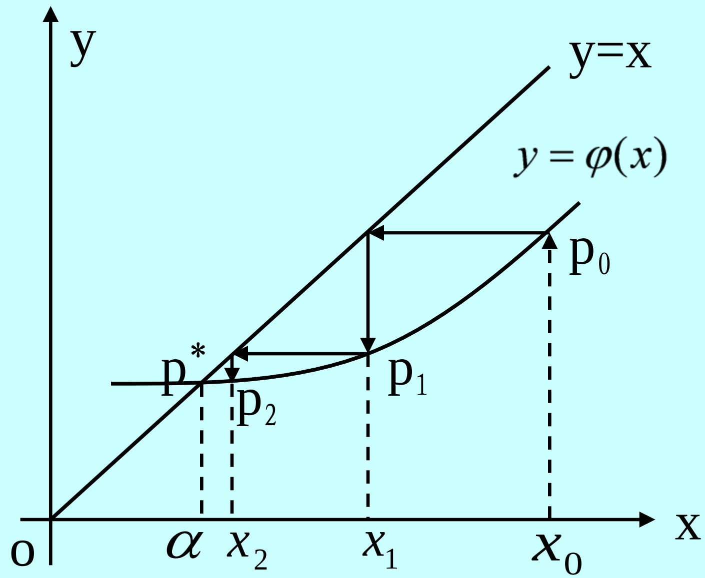
则称迭代法收敛，否则称迭代法发散。若迭代法收敛于 α，则 α 就是方程（3-17）的根，即有 $f(\alpha)\equiv 0$。

几何直观:

在曲线 $y=\varphi(x)$ 上得到点列 $P_1, P_2, \cdots$，其横坐标分别为由公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

所确定的迭代值 $x_1, x_2, \cdots$，若迭代法收敛 $\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$ ，则点列 $P_1, P_2, \cdots$ 将越来越逼近所求的交点 $P(\alpha)=P^*$ 。



例1 用迭代法求 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根。

化方程为等价方程

$$x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}=\varphi(x)$$

取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.79 \quad x_2=\sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}}\approx 0.964$$

$$x_3=\sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}}\approx 0.994$$

$$x_k\to 1$$

$x=1$ 就是方程 $f(x)=0$ 的根。

化方程为等价方程

$$x=2x^3-1=\varphi(x)$$

取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=2\times 0-1=-1$$

$$x_2=2(-1)^3-1=-3$$

$$x_3=2(-3)^3-1=-55$$

$$x_k\to-\infty$$

迭代法发散。

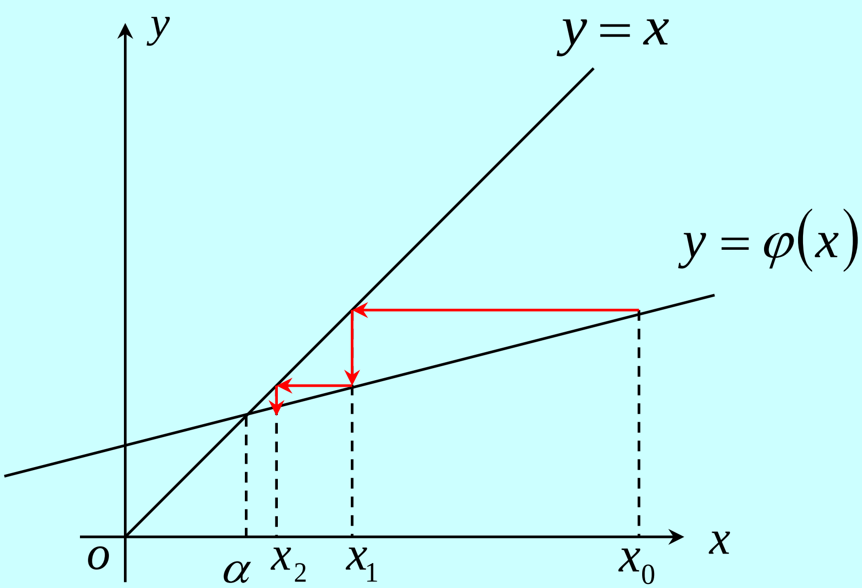
迭代法的收敛与发散，依赖于迭代函数的构造，迭代函数构造的方法很多。

例如，
$$f(x)=0 \iff x = x \pm f(x)$$
$$\iff x = x \pm k(x) f(x)$$

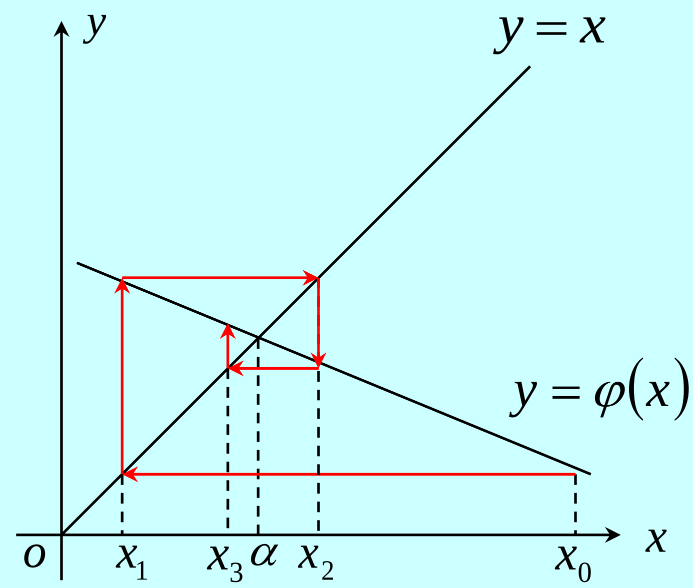
迭代函数

$$\varphi(x) = x \pm f(x)$$
$$\varphi(x) = x \pm k(x) f(x) \quad (k(x) \neq 0)$$

迭代函数须满足什么条件，迭代法才能收敛?

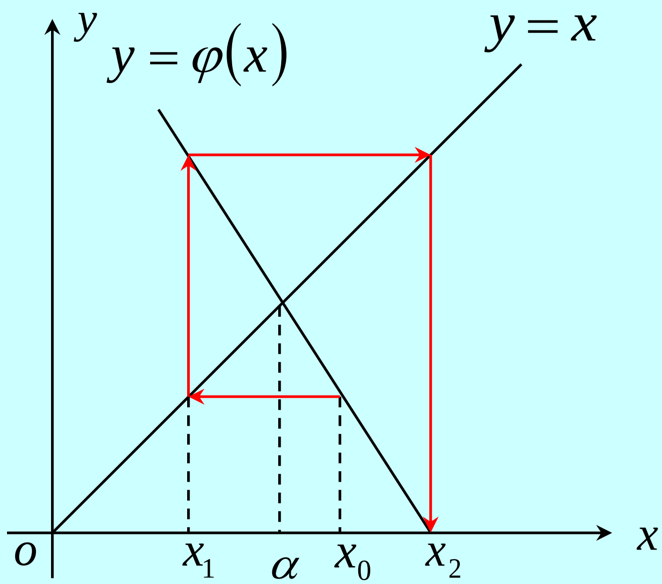


$0 < \varphi'(x) < 1$

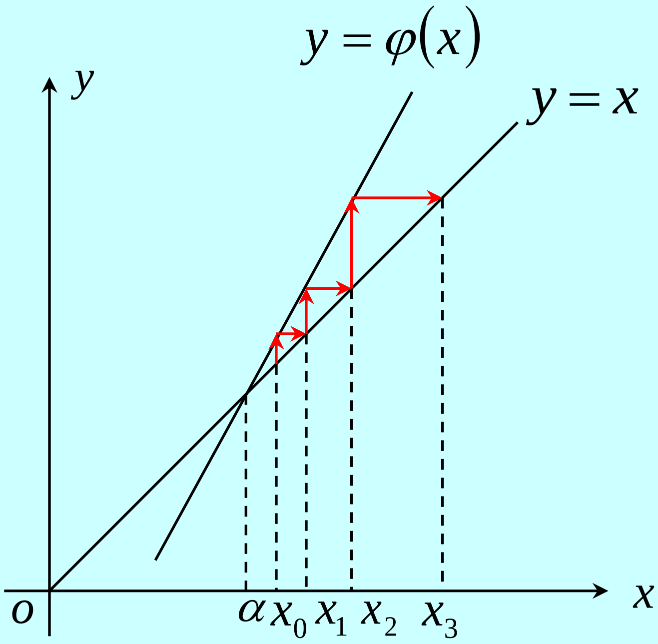


$-1 < \varphi'(x) < 0$

从而,迭代函数满足条件：$|\varphi'(x)| < 1$时,迭代法收敛。



$\varphi'(x)<-1$



$1<\varphi'(x)$

从而,当 $\varphi'(x)<-1$ 或 $1<\varphi'(x)$ 时,迭代法发散。

定理3.5 设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

（1） 当 $x \in [a,b]$ 时，$a \le \varphi(x) \le b$

（2） 存在正数 $0 < L < 1$，对任意 $x \in [a,b]$ 均有

$$|\varphi'(x)| \le L$$

则 $x = \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在唯一根 α，且对任意初始值 $x_0 \in [a,b]$，迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

收敛于 α，且

1. $$|x_k - \alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \tag{3-20}$$

2. $$|x_k - \alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \tag{3-21}$$

证 满足条件（1）、（2）时，易证方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在唯一根 α 。事实上,令 $f(x)=x-\varphi(x)$

由 $x\in[a,b]$ 时， $a\le\varphi(x)\le b$

$$f(a)=a-\varphi(a)\le 0 \qquad f(b)=b-\varphi(b)\ge 0$$

$$|\varphi'(x)|\le L<1 \quad\Rightarrow f'(x)=1-\varphi'(x)>0$$

连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 且在端点取值异号, 故在 $[a,b]$ 上有唯一根.

$$0=f(\alpha)=\alpha-\varphi(\alpha)\Leftrightarrow\alpha=\varphi(\alpha)$$

根据微分中值定理可得

$$x_{k+1}-\alpha = \varphi(x_k)-\varphi(\alpha) = \varphi'(\xi_1)(x_k-\alpha)$$

$$x_{k+1}-x_k = \varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\xi_2)(x_k-x_{k-1})$$

其中 $\xi_1,\xi_2 \in [a,b]$ 由条件（2）得

$$\begin{cases} |x_{k+1}-\alpha| = |\varphi'(\xi_1)||x_k-\alpha| \le L|x_k-\alpha| \\ |x_{k+1}-x_k| = |\varphi'(\xi_2)||x_k-x_{k-1}| \le L|x_k-x_{k-1}| \end{cases} \quad (3\text{-}22)$$

又因为

$$|x_k-\alpha| \le |x_k-x_{k+1}|+|x_{k+1}-\alpha| \le L|x_k-x_{k-1}|+L|x_k-\alpha|$$

将上式移项整理后，得 $(1-L)|x_k-\alpha|\le L|x_k-x_{k-1}|$，从而

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

即（3-20）成立。再反复使用（3-22）的第2式，得

$$|x_k-x_{k-1}|\le L|x_{k-1}-x_{k-2}|\le\cdots\le L^{k-1}|x_1-x_0|$$

将上式代入（3-20）即得（3-21）成立。

又因为 $L<1$，所以根据（3-21）得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-\alpha|=0 \quad \text{即} \quad \lim_{k\to\infty}x_k=\alpha$$

故迭代法收敛。

迭代法收敛依据I:

当迭代函数满足定理3.5的条件（难以验证）

L 较小

相邻两次计算值的偏差 $|x_k - x_{k-1}| \le \delta$(事先给定的精度)

迭代过程就可以终止，x_k 就可作为 α 的近似值。

L 的大小可作出估计时，估计所需要的迭代次数

$$|x_k - \alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow k \ge \log_L \frac{\delta(1-L)}{|x_1 - x_0|}$$

迭代法收敛依据II:

使用迭代法时往往在根α的附近进行。

假定 $\varphi'(x)$ 在α的附近连续且满足:

$$|\varphi'(\alpha)|<1$$

则一定存在 α 的某个邻域 $S:|x-\alpha|\leq\delta$, $\varphi(x)$ 在S上满足定理3.5的条件。故在S中任取初始值 x_0 ,迭代格式

$$x_k=\varphi(x_{k-1})$$

收敛于方程的根α, 即 $f(\alpha)\equiv 0$, 称此收敛为局部收敛.

例2 求方程 $x = e^{-x}$在 $x = 0.5$ 附近的一个根，要求精度$\delta = 10^{-3}$。$\left(f\left(x\right) = xe^{x} - 1 = 0\right)$

解 由于 $\varphi'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$，故当 $x \in [0.5, 0.6]$ 时，

$$|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} \le 0.61 < 1$$

因此，迭代格式 $x_{k+1} = e^{-x_k}$，对于初始值 x_0=0.5是收敛的。

迭代停止条件

$$|x_k - x_{k-1}| \approx \frac{1-L}{L}\delta = \frac{1-0.61}{0.61} \times 10^{-3} = 0.64 \times 10^{-3}$$

迭代的数值结果表

k	x_k	e^{-x_k}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	0.5	0.606531	0.106531
1	0.606531	0.545239	0.061292
2	0.545239	0.579703	0.034464
3	0.579703	0.560065	0.019638
4	0.560065	0.571172	0.011107
5	0.571172	0.564863	0.006309
6	0.564863	0.568439	0.003576
7	0.568439	0.566409	0.002030
8	0.566409	0.567560	0.001151
9	0.567560	0.566907	0.000653
10	0.566907	0.567277	0.000370

定理3.5误差估计式

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

L或 $|\varphi'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的值越小，迭代的收敛速度就越快。

$L<1$且接近于1时，迭代法虽然收敛,但收敛速度很慢。

为了使收敛速度有定量的判断，特介绍收敛速度的阶的概念，作为判断迭代法收敛速度的重要标准。

设迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，当 $k\to\infty$ 时，$x_{k+1}\to\alpha$ 并记 $e_k=x_k-\alpha$ 。

定义3.2 若存在实数 $p\geq 1$ 和 $c>0$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c \tag{3-23}$$

则称迭代法是 p 阶收敛。当 $p=1$ 时，称线性收敛，当 $p>1$ 时称超线性收敛，当 $p=2$ 时称平方收敛。

p 越大迭代法的收敛速度也越快。但是在实际使用中 p 很难直接确定，常常采用一些其他的方法来确定收敛的阶。使用Taylor展开式是一种常用的方法。

如果 $\varphi(x)$ 在根 α 处充分光滑（各阶导数存在），则可对 $\varphi(x)$ 在 α 处进行Taylor展开，得

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k-\alpha)^2$$

$$+\cdots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_k-\alpha)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-\alpha)^p$$

如果 $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$，但是 $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$，则

$$x_{k+1}-\varphi(\alpha)=x_{k+1}-\alpha=$$

即 $$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|\phi^{(p)}(\xi_k)|}{p!}=\frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!}$$

上式说明迭代法具有 p 阶收敛

定理3.6 如果 $x=\varphi(x)$ 中的迭代函数 $\varphi(x)$ 在根 α 附近满足：

(1) $\varphi(x)$ 存在 p 阶导数且连续；

(2) $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0,\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$，则迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛。

例 取迭代函数 $\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$

要使如下迭代法收敛到 $x^*=\sqrt{5}$，则 α 应取何值？

且其收敛阶是多少？ $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

解： $|\varphi'(x)|=|1+2\alpha x|$ 令 $|\varphi'(\sqrt{5})|=|1+2\alpha\sqrt{5}|<1$

$$-1<1+2\alpha\sqrt{5}<1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}<\alpha<0$$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $\varphi'(\sqrt{5})=0$ 其收敛阶 $p=2$

当 $\alpha\neq-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $0\neq|\varphi'(\sqrt{5})|<1$ 其收敛阶 $p=1$

例3 设 $f(x)=0$ 且 $f(\alpha)\equiv 0, f'(\alpha)\neq 0$ 证明由

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x) \qquad (3\text{-}24)$$

建立的迭代格式至少是平方收敛。

证 根据定理3.6， 只需证明 $\varphi'(\alpha)=0$ 。因为

$$\varphi'(\alpha) = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]'_{x=\alpha} = \left[1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha} = \left[\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha} = 0$$

故该迭代法至少是平方收敛。

由（3-24）式建立的迭代法就是有名的Newton法。

构造收敛迭代法

非线性方程　　　　迭代函数

$$f(x)=0 \qquad x=\varphi(x)=x-k(x)f(x) \quad (k(x)\neq 0)$$

$|\varphi'(x)|$ 在根 α 附近越小，其局部收敛速度越快，

$$\varphi'(\alpha)=1-k'(\alpha)f(\alpha)-k(\alpha)f'(\alpha)=1-k(\alpha)f'(\alpha)=0$$

若 $f'(\alpha)\neq 0$（即不是的重根），则 $k(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\alpha)}$

取 $k(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$ 得

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

定理3.7 设方程 $f(x)=0$ 的根为 α，且 $f'(\alpha)\neq 0$

则迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (3\text{-}26)$$

至少是平方收敛，并称（3-26）为Newton迭代法。

为了避免求导数，利用导数的近似式替代 $f'(x)$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

将它代入（3-26）得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left[\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right]} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

弦截法

则 $x_{k+1} =$

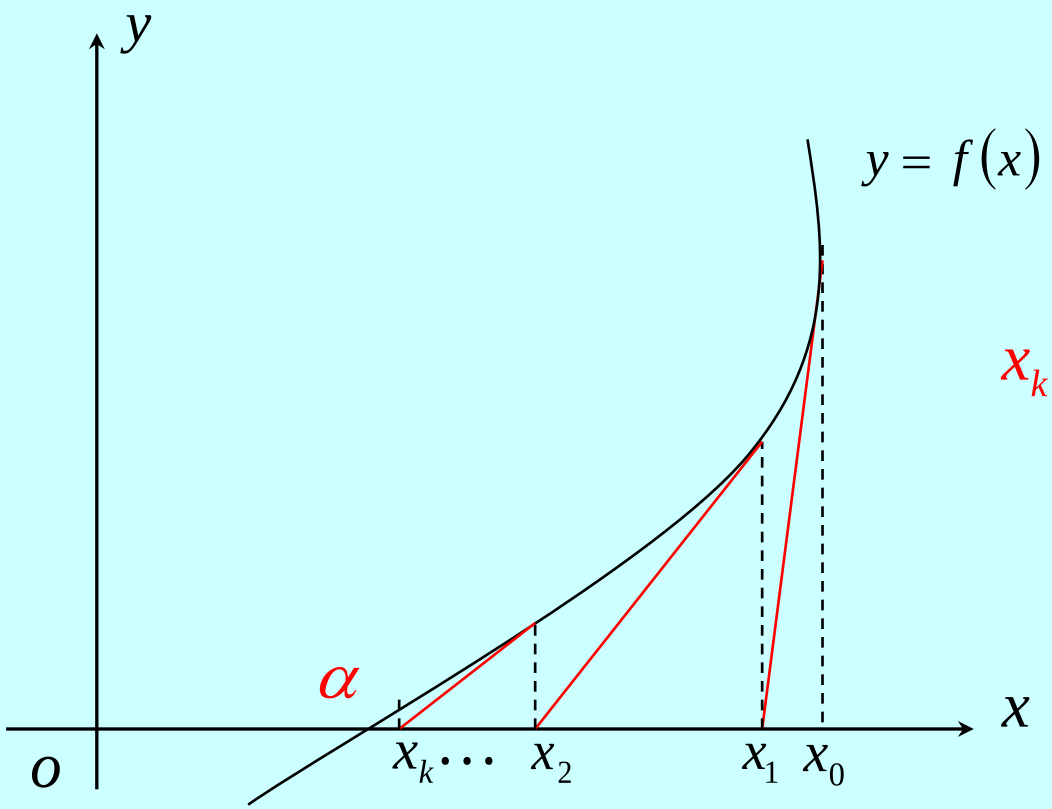
收敛阶为 $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ **超线性收敛**，低于Newton法

Newton法与弦截法的几何意义如下：

使用Newton迭代格式，由x_k得到x_{k+1}，在几何上就是过曲线上的B点作切线 p_1，p_1与 X 轴的交点即为 x_{k+1}。故Newton法也称切线法。

弦截法在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦Q来替代曲线AB。用 Q_i 在 X 轴上截取的值，即 Q_i 与 X 轴的交点 x_{k+i} 作为 α 的近似值，故称弦截法。

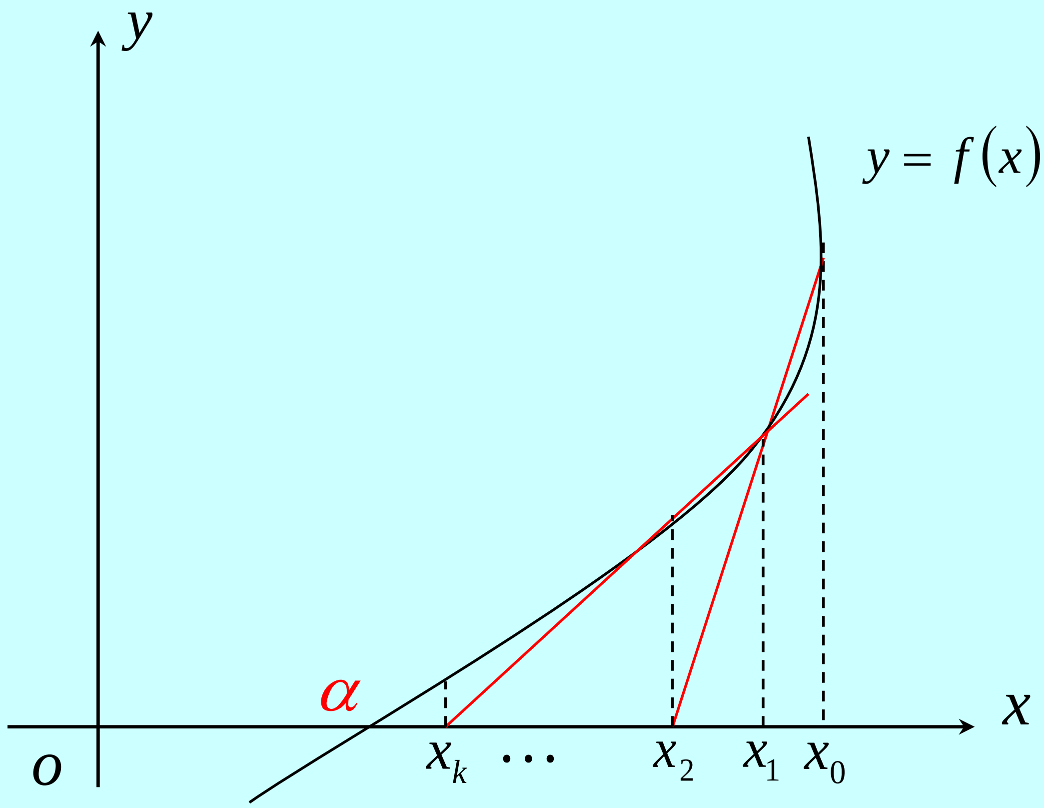
Newton 迭代法的几何意义



$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

使用Newton迭代格式，就是过曲线上的点 x_k 作切线与 X 轴的交点即为 x_{k+1}，故Newton法也称切线法。

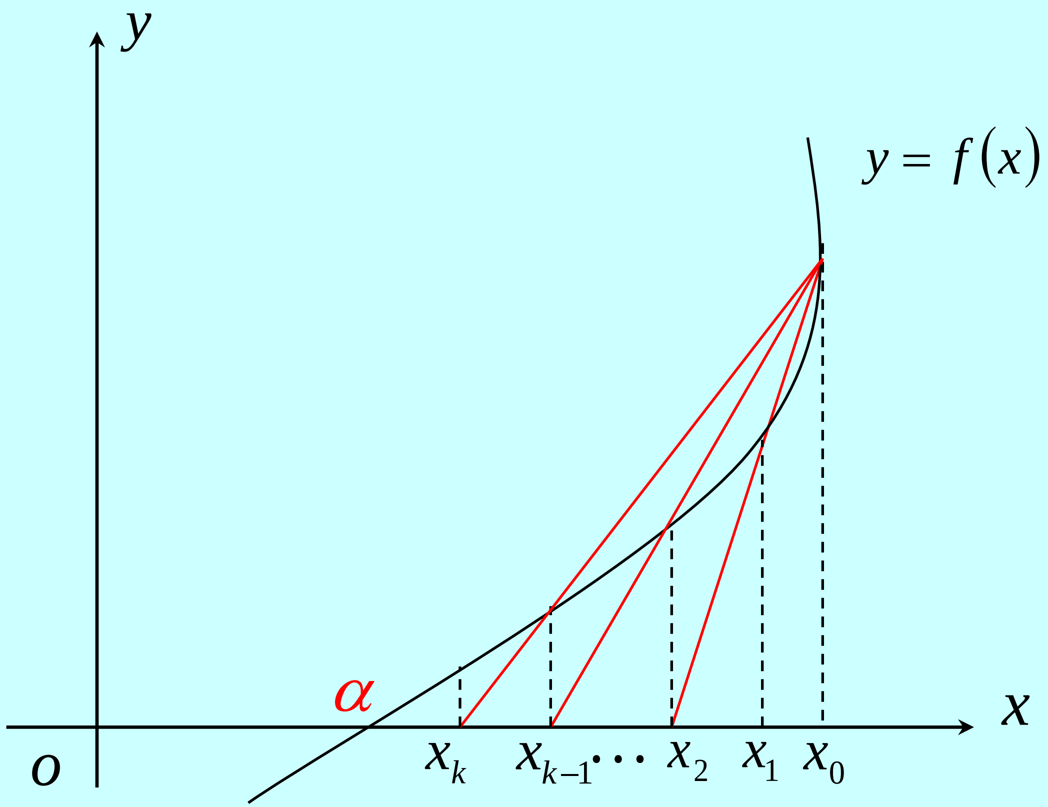
快速弦截法（割线法）的几何意义



$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

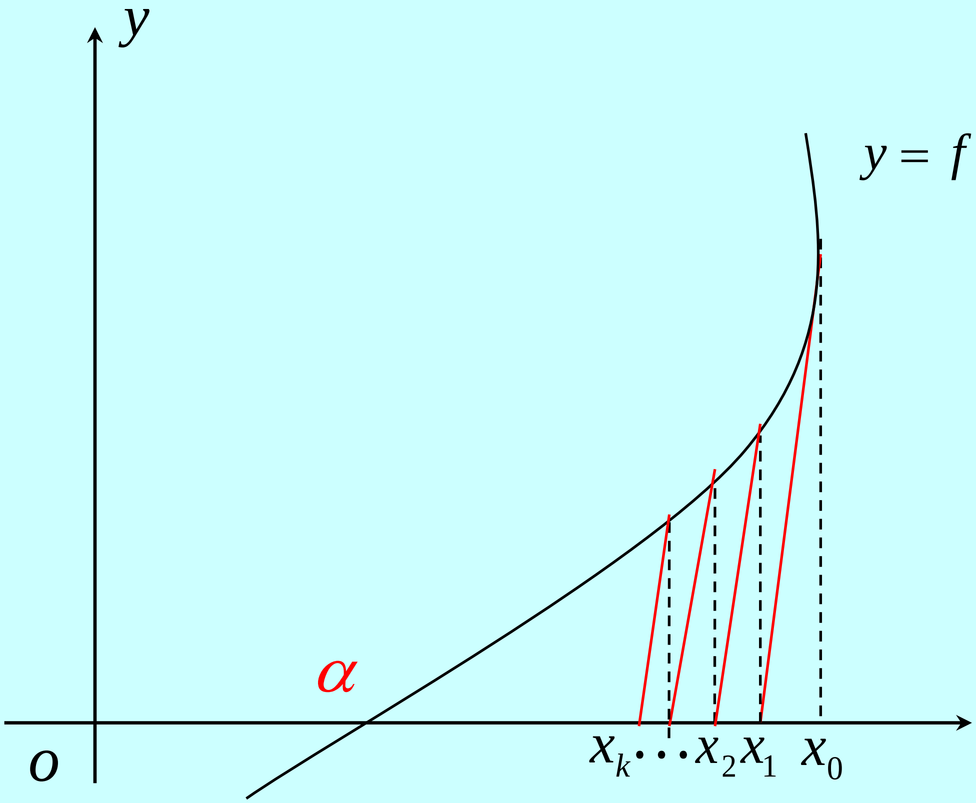
在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦来替代曲线用在轴上截取的值，即弦与 X 轴的交点 x_k 作为α的近似值，故称弦截法。

单步弦截法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_0) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}$$

平行线法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

从Newton和弦截法的迭代格式中可以看到，

弦截法不需要求导数值，需要有两个初始值，收敛速度慢

Newton需要求导数值，只需要一个初始值，收敛速度快

初始点需要在真实解附近选择

3.2.3 多根区间上的逐次逼近法

方程 $f(x)=0$ 在多根区间 $[a,b]$ 上，根的情况主要有两种：

1、均为单根。

- 寻找单根区间
- 对每个单根区间求根

2、有重根。

- 寻找单根区间
- 对每个单根区间快速求根

一、 $[a,b]$ 是 $f(x)=0$ 仅有单根的多根区间

1）求单根区间　设 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有 m 个根。

1、将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$

2、计算 $f(b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的值

若 $f(b_i)\cdot f(b_{i+1})<0$，$f(x)=0$ 在 $[b_i,b_{i+1}]$ 上至少有一个根。

若有根区间的个数为 m，则所得到的有根区间就都是单根区间

若有根区间的个数小于 m，再将小区间对分，计算在对分点处函数值再搜索有根区间，直到有根区间的个数是 m 为止。

2）在单根区间 $[c,d]$ 上求根

二分法基本思想：

将区间 $[c,d]$ 对分，对分点为 $x_0=\frac{1}{2}(c+d)$，计算 $f(x_0)$

若 $f(x_0)$ 与 $f(c)$ 同号，令 $x_0=c_1,d=d_1$

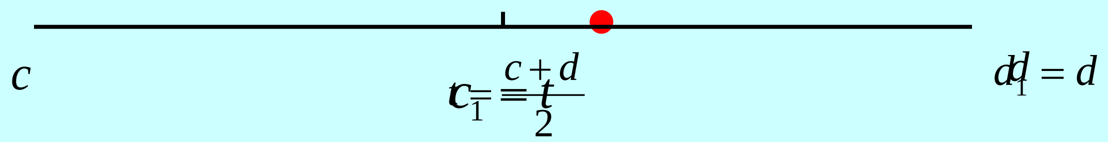
若 $f(x_0)$ 与 $f(c)$ 异号，令 $c=c_1,x_0=d_1$

新的有根区间 $[c_1,d_1]$ 为其长度为原来区间的一半

继续下去，有根区间为 $[c_n,d_n]$，其长度为 $d_n-c_n=\frac{1}{2^n}(d-c)$

d_n-c_n 达到根的精度要求，

$x_n=\frac{1}{2}(d_n+c_n)$ 就可作为根 α 的近似值。



$$f(c)\cdot f(t) > 0 \qquad f(d)\cdot f(t) < 0$$

$$[c, d] \supset [c_1, d_1] \supset \cdots \supset [c_n, d_n]$$

$$|x - \alpha| < \frac{d-c}{2^n}$$

二分法作用：

1、用于求方程的近似根。有根区间趋于零的速度较慢

2、可用于求迭代法的初始值：从某个区间 $[c_i, d_i]$ 开始使用其他迭代法求解，将 c_i 或 d_i 作为迭代法的初始值。

3、是一种好的并行算法。

例6 求 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.79x-41.769=0$ 在[0 ,8]中的三个根。

解

1、将有根区间[0，8]三等分， 得

$[0, 2.7]$ $[2.7, 5.4]$ $[5.4, 8]$

2、搜索单根区间：

$[0,2.7]$ $f(0)\cdot f(2.7)=(-41.768)\cdot(1.728)<0$

$[2.7,5.4]$ $f(2.7)\cdot f(5.4)=(1.728)\cdot(1.485)>0$

$[5.4,8]$ $f(5.4)\cdot f(8)=(1.485)\cdot(70.151)>0$

$[2.7,4]$ $f(2.7)\cdot f(4)=(1.7)\cdot(-0.209)<0$

$[4,5.4]$ $f(4)\cdot f(5.4)=(-0.2)\cdot(1.4)<0$

3、用单根算法，求 [0, 2.7], [2.7, 4], [4, 5.4]上的根。

二、 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有重根

设 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，其中$m\geqslant 2$整数， 则有

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \qquad 且 g(\alpha)\neq 0$$

此时 $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

由 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ 且$g(\alpha)\neq 0$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}$$

则

$$\varphi(x)=x-(x-\alpha)\cdot\left[\frac{g(x)}{m\cdot g(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right],$$

$$\varphi'(\alpha)=1-\frac{g(\alpha)}{m\cdot g(\alpha)+0}=1-\frac{1}{m}\neq 0$$

从而得到在这种条件下的Newton法**线性收敛**

为了提高收敛的阶，可取

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

从而

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{m}{m} = 0,$$

故新迭代法至少是平方收敛的。

例7 求方程 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$ 二重根 $\sqrt{2}$ 的计算值。

解 (1) 使用Newton法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=x_k-\frac{x_k^4-4x_k^2+4}{4x_k^3-8x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k}$$

(2) 使用

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{x_k^2-2}{4x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}$$

上述两种方法都取初始值 $x_0=1.5$，计算结果见下表。

1	1.453333	1.416667
2	1.436607	1.414216
3	1.425498	1.414214

方法（2）的收敛速度较方法（1）快。