第5章

插 值 与 逼 近

5.1 引言

- 插值方法是数值分析中的一个简单而又重要的方法，利用该方法可以通过函数在有限个点处的函数值求出其近似函数，进而估算出函数在其它点处的值
- 插值方法在离散数据处理、函数的近似表示、数值微分、数值积分、曲线与曲面的生成等方面有重要的应用
- 本文主要介绍了插值方法中的多项式插值方法

5.1.1 插值问题

设已知函数在$[a, b]$上n个互异点处的函数值和导数值

$$
\begin{aligned}
& f(x_1),\ f'(x_1),\cdots,\ f^{(\alpha_1-1)}(x_1);\\
& f(x_2),\ f'(x_2),\cdots,\ f^{(\alpha_2-1)}(x_2);\\
& \qquad\cdots\qquad\cdots\\
& f(x_n),\ f'(x_n),\cdots,\ f^{(\alpha_n-1)}(x_n),
\end{aligned}
\tag{5-1}
$$

构造一个简单易算的函数$p(x)$，使其满足下述条件：

$$p^{(\mu_i)}(x_i) = f^{(\mu_i)}(x_i)\,, \tag{5-2}$$

$$i=1,2,\cdots,n;\quad \mu_i=0,1,\cdots,\alpha_i-1。$$

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 个条件

以上问题称作插值问题。

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为插值节点;

$p(x)$称为 $f(x)$关于节点组$x_1,x_2,\cdots,x_n$的插值函数;

（**5-2**）称为插值条件。

在插值法中需考虑的问题：

- 简单函数类的选取问题
- 存在唯一性问题
- 余项估计问题
- 收敛性问题

5.1.2 插值函数的存在唯一性、插值基函数

设简单函数类**S**是连续函数空间**C**$[a,b]$的n维子空间，$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是**S**的一组基底函数，即 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上线性无关，且对任意 $p(x)\in\mathbf{S}$，有且仅有一组系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbf{R}$，使得 $p(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$。

下面以（**5-1**）中所有 $\alpha_i=1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的特殊情形为例，介绍插值函数的存在唯一性。此时插值条件为

$$p(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5-3}$$

而插值问题就是在S中寻求一个函数 $p(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$，使得$p(x)$满足插值条件（**5-3**）。该问题等价于通过求解方程组

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5-4}$$

确定一组系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$

定义5. 1 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，并且对$[a,b]$上的任意n个互异点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，行列式

$$D[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}\neq 0 \qquad \text{(5-5)}$$

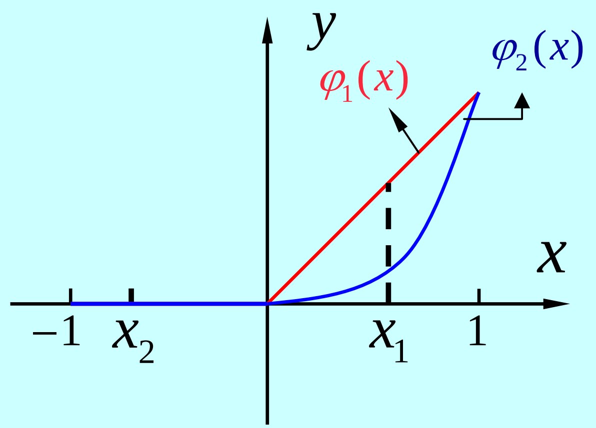
则称 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上满足**Haar**条件。

注：并不是任何线性无关的连续函数都满足Haar条件。

例如, 取[-1,1]上的连续函数

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ x & 0\le x\le 1\end{cases} \qquad \varphi_2(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ x^2 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

显然 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 线性无关，但是不满足**Haar**条件。



即存在x_1、x_2使得

$$D[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

由定义5.1及线性代数的基本知识，易得下述定理.

定理5. 1 设已知函数 $f(x)$ 在 n 个互异点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处的函数值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ，亦即

$$y_i = f(x_i) \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

又设S的基底函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Haar条件，则存在唯一的函数

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \in \mathbf{S}$$

满足插值条件

$$p(x_i)=y_i, \qquad i=1,2,\cdots,n。$$

事实上, 由插值条件

$$p(x_i)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x_i)=y_i,\quad i=1,2,\cdots,n。$$

可得线性方程组

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

其系数矩阵行列式满足:

$$D[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

故其解$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 存在唯一, 故定理5.1成立。

由定理5.1，特别地，对于插值问题（1）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \qquad x_i \neq x_j\text{，当}\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\text{时} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n\text{。}$$

应存在唯一的函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=l_1(\boldsymbol{x})$满足如下的插值条件：

$$l_1(x_1) = 1 = y_1\text{，}\quad l_1(x_i) = 0 = y_i\text{，}\ i = 2, 3, \cdots, n\text{。}$$

对于插值问题（2）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

应存在唯一的函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})= l_2(x)$满足如下的插值条件：

$$l_2(x_2) = 1 = y_2\text{，}\quad l_1(x_i) = 0 = y_i\text{，}\quad i = 1, 3, \cdots, n\text{。}$$

对于插值问题（n）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

应存在唯一的函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})= l_n(x)$满足如下的插值条件：

$$l_n(x_n) = 1 = y_n\text{，}\quad l_n(x_i) = 0 = y_i\text{，}\quad i = 1, 3, \cdots, n-1\text{。}$$

如此定义下去，就得到S中唯一的一组线性无关函数，

$$l_k(x)\ (k=1, 2, \cdots, n)$$

且

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k \\ 0, & i\neq k\end{cases}, \qquad k=1,2,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots,n$$

又

$$D[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{vmatrix} l_1(x_1) & l_2(x_1) & \cdots & l_n(x_1) \\ l_1(x_2) & l_2(x_2) & \cdots & l_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1(x_n) & l_2(x_n) & \cdots & l_n(x_n) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

即 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足**Haar**条件。

推论5.1 若S满足如定理5.1中所设，则S中存在唯一的一组函数 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}, \quad k=1,2,\cdots,n; \quad i=1,2,\cdots,n$$

$l_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$称为插值基函数。易证 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 也是S的一组基底函数。

利用插值函数的存在唯一性,可证明

推论5.2 在定理5.1的假设下，函数 $p(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot l_k(x)$ 是S中满足插值条件 $p(x_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 的唯一函数。

返回本节

5.1.2 多项式插值基本概念

假设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的未知或复杂函数,

但已知该函数在互异点

$$a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$$

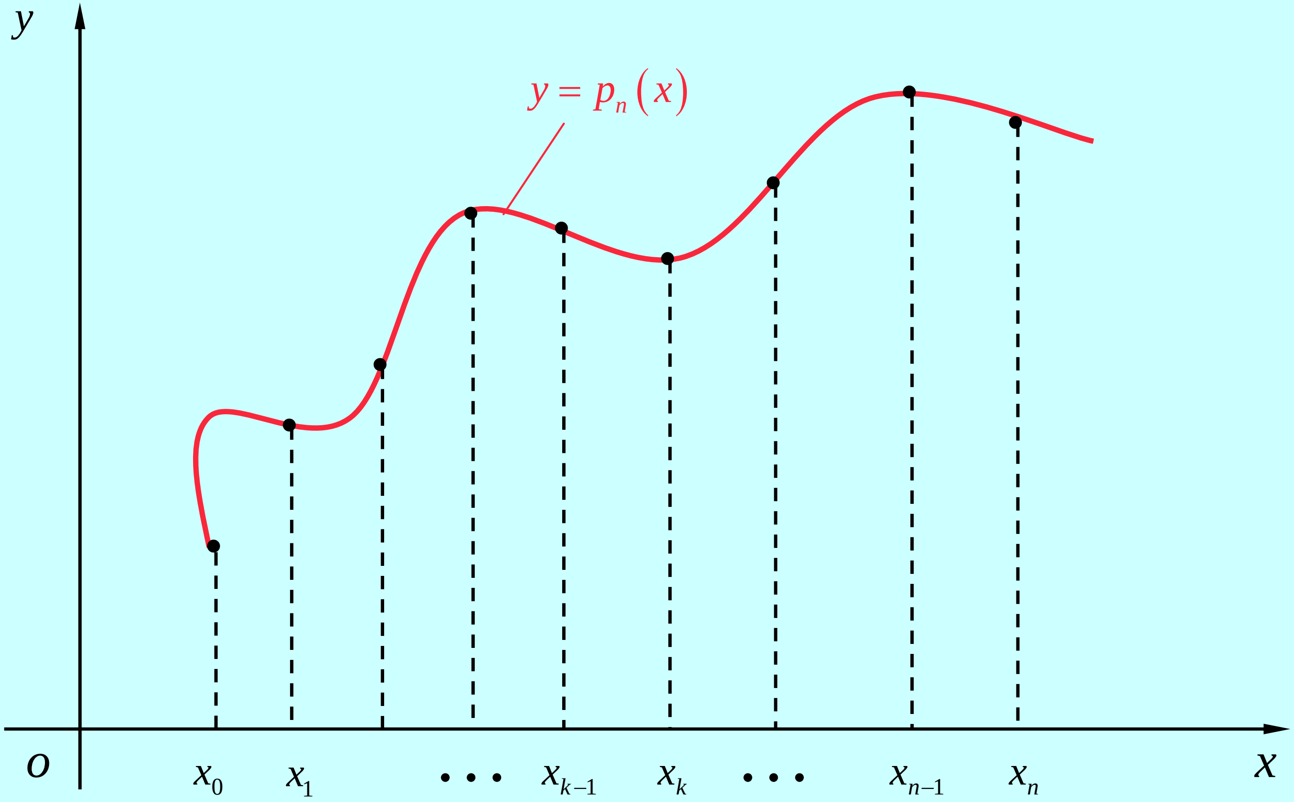
处的函数值 $y_0\,,\,y_1\,,\,\cdots\,,\,y_n$

我们的目标是找一个简单的函数，例如多项式函数

$p_n(x)$，使之满足条件

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n \qquad \textbf{(5-3)}$$

即在给定点x_i处, $p_n(x)$与$f(x)$是相吻合的。


y
$y = p_n(x)$
o
x_0
x_1
$\cdots$
x_{k-1}
x_k
$\cdots$
x_{n-1}
x_n
x

通常把 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ 称为插值节点，

$p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值多项式（函数），

$f(x)$ 称为被插函数，$[a,b]$ 称为插值区间，

条件（5-3）称为插值条件，求 $p_n(x)$ 的过程称为插值法。

例1，只需取 $\varphi_0(x)=1$， $\varphi_1(x)=x$， $\cdots$， $\varphi_n(x)=x^n$

且在 $[a,b]$ 上满足**Haar**条件， 则有

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

由插值条件可得

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{cases}$$

显然，其系数是满足**Vandermorde**（范德蒙）行列式

$$V_n[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{vmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i>j}\left(x_i-x_j\right)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(x_i-x_j\right)\neq 0$$

因此，在$\mathbf{P}_n$（所有次数不超过n的实系数代数多项式的集合）中有唯一的多项式 $p_n(x)$, 满足

$$p_n\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$$

这实际上就证明了代数多项式插值的存在唯一性。

返回本节

Lagrange插值问题

给定 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异点 $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$ 及函数值 y_0 , y_1 , $\cdots$, y_n 。

构造次数不超过 n 的实系数代数多项式 $p_n(x)$，使之满足插值条件：

$$p_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

此类函数插值问题，称为**Lagrange**插值问题。

具体取简单函数类S子空间=n+1维多项式空间$\mathbf{P}_n$

并选取推论5.1中的$l_k(x)$ (k=1, 2, ⋯, n)作为插值基函数。

5.2.1 Lagrange插值公式

考虑n=1的情形, 给定$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$, $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$且$\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{x_1}$

构造一次多项式$\boldsymbol{p_1(x)}$, 满足条件：$p_1(x_0) = y_0$， $p_1(x_1) = y_1$

由直线的两点式可知： $\dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ 解之, 得

$$p_1(x) = y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

进一步可改写成： $p_1(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$

推论5.1的具体形式

其中 $l_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ $l_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

分别称其为对应于节点x_0和x_1的插值基函数。

5.2.1 Lagrange插值公式

具体取简单函数类S子空间=n+1维多项式空间$\mathbf{P}_n$

并选取推论5.1中的$l_k(x)$ (k=1, 2, ⋯, n)作为插值基函数。

考虑n=1的情形，给定(x_0, y_0)，(x_1, y_1)且$x_0 \neq x_1$ 构造一次多项式$p_1(x)$，满足条件：$p_0(x_0) = y_0$，$p_1(x_1) = y_1$。

由推论5.1, $p_1(x)$可写成

$$p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

其中$l_i(x)$ i=0, 1均为一次多项式, 且满足

$$l_0(x_0) = 1,\ l_0(x_1) = 0,\ l_1(x_1) = 1,\ l_1(x_0) = 0。$$

那么必有 $l_0(x) = A(x - x_1)$，再由 $l_0(x_0) = A(x_0 - x_1) = 1$，得

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad \text{同理得} \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

分别称$l_0(x)$和$l_1(x)$为对应于节点x_0和x_1的插值基函数。推论5.1的具体形式

一次Lagrange插值多项式 $p_1(x)$即为：

$$p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 ,$$

【注意】

- 插值基函数的个数=插值节点的个数;
- 插值基函数的次数=插值节点的个数−1;
- 插值基函数决定着插值多项式满足插值条件;
- 插值基函数与插值节点的次序无关。

考虑 n=2的情形，给定(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)且 $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ 构造二次多项式$p_2(x)$，满足条件：

$$p_2(x_0) = y_0,\ p_2(x_1) = y_1,\ p_2(x_2) = y_2$$

进一步写成 $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

其中$l_i(x)$ i=0, 1, 2均为二次的插值基函数多项式，且满足

$$l_0(x_0) = 1 \qquad l_0(x_1) = 0 \qquad l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_1) = 1 \qquad l_1(x_1) = 0 \qquad l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_2) = 1 \qquad l_2(x_0) = 0 \qquad l_2(x_1) = 0$$

下面我们$l_0(x)$以为例来确定出：$l_0(x)$，$l_1(x)$，$l_2(x)$

由条件 $l_0(x_1)=0 \quad l_0(x_2)=0$ 可知，x_1，x_2 是 $l_0(x)$ 的两个根，从而

$$l_0(x)=A(x-x_1)(x-x_2)$$

其中*A*为待定系数。 又由 $\boldsymbol{l_0(x_0)=1}$， 可得

$$1=A(x_0-x_1)(x_0-x_2) \Rightarrow A=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

从而

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理，

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

进而满足条件的二次**Lagrange插值**多项式为：

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个互异点，取

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}\quad j=0,1,\cdots,n. \qquad \textbf{(5-6)}$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

显然 $$l_j(x_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad i,j=0,1,\cdots,n。\qquad \textbf{(5-7)}$$

$l_j(x_i)(j=0,1,\cdots,n)$ 称为n次**Lagrange插值基函数。**从而

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot l_i(x)$$

就是多项式空间$\mathbf{P}_n(x)$中满足插值条件： $p_n(x_i)=y_i\quad(i=0,1,\cdots,n)$

的唯一的多项式$p_n(x)$，称为n次**Lagrange插值多项式。**

例1 已知函数 $f(x)$ 的如下函数值：

x_i	1	2	3
$y_i=f(x_i)$	-1	-1	1

求 $f(x)$的二次**Lagrange**插值多项式$p_2(x)$，并利用$p_2(x)$计算出 $f(1.5)$的近似值。

解 首先计算插值基函数：

$$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}(x-2)(x-3),\quad l_1(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-(x-1)(x-3),$$

$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)。$$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2\\&=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)\times(-1)+\left[-(x-1)(x-3)\times(-1)\right]+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)\times 1\\&=-\frac{1}{2}\times\left(x^2-5x+6\right)+\left(x^2-4x+3\right)+\frac{1}{2}\times\left(x^2-3x+2\right)=x^2-3x+1\end{aligned}$$

于是 $f(1.5)\approx p_2(1.5)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}+1=-1.25.$

返回本节

5.2.2 Newton插值公式

在插值问题中，为了提高插值精度，有时需增加插值节点个数。插值节点个数发生变化后，所有的**Lagrange**插值基函数都会发生变化，从而整个**Lagrange**插值多项式的结构发生变化，这在计算实践中是不方便的。为了克服**Lagrange**插值多项式的缺点，能灵活地增加插值节点，使其具有“承袭性”，我们引进**Newton插值公式**。

n次多项式空间$\mathbf{P}_n$的基函数：$1, x, \cdots, x^n$

$l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 其中 $l_j(x)=\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$

设已知函数$f(x)$在$[a,b]$上的$[n+1]$个互异插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值$f_0, f_1, \cdots, f_n$，将基函数取作：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_j(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i), \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \quad \textbf{(5-8)}$$

显然 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上满足**Haar**条件。

n次插值多项式可写成如下形式：

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad \textbf{(5-9)}$$

其中待定系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 由插值条件

$$p(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

来确定。

例如, n=1时, $p_1(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

由插值条件: $p(x_0) = f_0 \quad p(x_1) = f_1$

可得, 即

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$p_1(x_1) = \qquad + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow \qquad = \frac{\quad - \quad}{\qquad}$$

从而

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

n=**2**时, 应有

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

即

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

由

$$p_2(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

得

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$p_2(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_0(x) + a_2\varphi_2(x)$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad \text{即}$$

$$p_2(x) = \overbrace{\boxed{f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}}^{p_1(x)} + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)}(x - x_0)(x - x_1)$$

实际上, 由于插值多项式的唯一性, **Newton**插值多项式只是**Lagrange**插值多项式的另一种表现形式, 两者是可以互推的。

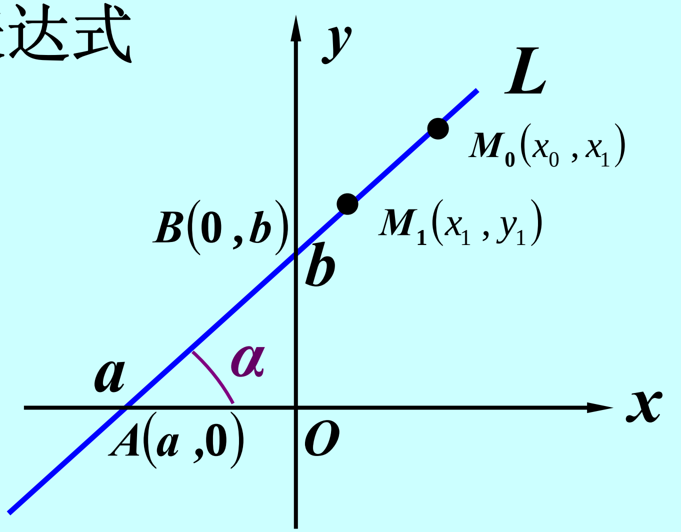
例如, 对于同一直线L可有如下四种表达式

① 两点式: $\dfrac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

② 截距式: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

③ 点斜式: $y - f(x_0) = k(x - x_0) \quad k = \tan\alpha$

④ 斜截式: $y = kx + b$



为得到**Newton**插值多项式的一般表达式, 即a_j, j=0 , 1, ⋯, n 的一般表达式, 我们给出均差的定义。

设函数$f(x)$在$[a,b]$上的$[n+1]$个互异插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$上的函数值 $f_0, f_1, \cdots, f_n$， 称

$$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} \qquad k \neq i \tag{5-11}$$

为 $f(x)$ 关于x_i, x_k的一阶均差（差商）。 称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} \qquad i \neq j \neq k$$

为$f(x)$ 关于x_i, x_j, x_k的二阶均差（差商）。 称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \tag{5-12}$$

为 $f(x)$关于 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k **阶均差（差商）**。

均差有如下性质:

1° $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$ 其中 $\omega_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$

2° 对称性, 即在 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 中任意调换 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的位置时, 均差的值不变, 即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_1,x_0,\cdots,x_k]=\cdots=f[x_k,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]$$

3° 若 $f(x)=x^m$, m为自然数, 则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\begin{cases}0, & k>m\\ 1, & k=m\\ \text{诸}x_i\text{的齐次函数,} & k<m\end{cases}$$

4° 设 $f(x)$ 在包含 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的区间(a,b)内k次可微，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

此处 $\min(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\xi<\max(x_0,x_1,\cdots,x_k)$。

练习，若 $f(x)=-3x^4+5x^3-2x^2+1$， 求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^4]$ 和 $f[e^0,e^1,\cdots,e^5]$

解：$f[2^0,2^1,\cdots,2^4]=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}=\dfrac{-3\times 4!}{4!}=-3$

$$f[e^0,e^1,\cdots,e^5]=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}=0。$$

由均差的定义，我们可以推出

$$a_j=f\left[x_0,x_1,\cdots,x_j\right]\quad j=1,\cdots,n$$

从而$p_2(x)$的**Newton**插值公式为：

$$p_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

更一般地，我们可以构造出n次**Newton**插值多项式公式：

$$p_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$=p_{n-1}(x)+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

构造n次**Newton**插值多项式公式，关键是构造$f(x)$的各阶关于插值节点 x_0，x_1, ⋯,x_n 的均差值。

为了便于计算均差值，常常利用如下形式生成均差表：

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	

注意：

$$p_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

用**Newton**插值公式，求解例1。

解　首先利用均差表计算各阶均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	-1			
		$\frac{-1+1}{2-1}=0$		
2	-1			
		$\frac{1+1}{3-2}=2$	$\frac{2-0}{3-1}=1$	
3	1			

由上面的均差表可知，$f[0,1]=0$，$f[0,1,2]=1$，故所求的插值多项式为：

$$p_2(x)=-1+0(x-1)+(x-1)(x-2)=x^2-3x+1$$

例2 已知 $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=-6$, $f(3)=11$， 求$f(x)$关于上述节点组的三次插值多项式 $p_3(x)$。

解 首先利用均差表计算均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	2			
		$\frac{-3-2}{1-0}=-5$		
1	-3		$\frac{-3+5}{2-0}=1$	
		$\frac{-6+3}{2-1}=-3$		$\frac{10-1}{3-0}=3$
2	-6		$\frac{17+3}{3-1}=10$	
		$\frac{11+6}{3-2}=17$		
3	11			

由上面的均差表可知，$f[0,1]=-5$，$f[0,1,2]=1$， $f[0,1,2,3]=3$，故所求的插值多项式为：

$$p_3(x)=2-5x+x(x-1)+3x(x-1)(x-2)=3x^3-8x^2+2$$

例 3 已知 $f(-2)=-5$, $f(-1)=-2$, $f(0)=3$, $f(1)=10$, $f(2)=19$, $f(3)=30$, 求 $f(x)$ 关于上述节点组的插值多项式 $p(x)$。

解 首先利用均差表计算均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	$\cdots$
-2	-5				
		$\frac{-2+5}{-1+2}=3$			
-1	-2		$\frac{5-3}{0+2}=1$		
		$\frac{3+2}{0+1}=5$		$\frac{1-1}{1+2}=0$	
0	3		$\frac{7-5}{1+1}=1$		$\cdots$
		$\frac{10-3}{1-0}=7$		$\frac{1-1}{2+1}=0$	
1	10		$\frac{9-7}{2-0}=1$		$\cdots$
		$\frac{19-10}{2-1}=9$		$\frac{1-1}{3-0}=0$	
2	19		$\frac{11-9}{3-1}=1$		
		$\frac{30-19}{3-2}=11$			
3	30				

由上面的均差表可知，$f[-2,-1]=3$，$f[-2,-1,0]=1$，$f[-2,-1,0,1]=0$，

故所求的插值多项式为：$p_2(x)=-5+3(x+2)+(x+1)(x+2)$

$$=x^2+6x+3$$

下面给出均差的性质4°的证明。

令
$$p_k(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

即$p_k(x)$是$f(x)$关于节点组 $x_0, x_1, \cdots, x_k$的k次插值多项式，则插值余项

$$r_k(x)=f(x)-p_k(x)$$

至少有k+1个互异的零点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$。反复利用**Rolle**定理，可知在 $\min(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 和 $\max(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 之间至少有一个ξ，使

$$r_k^{(k)}(\xi)=f^{(k)}(\xi)-p_k^{(k)}(\xi)=0$$

又由$p_k(x)$的表达式，

$$p_k^{(k)}(\xi)=k!\,f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f^{(k)}(\xi)$$

所以

$$=\ \text{———}$$

返回本节

5.2.3 插值余项

定理5.2 若$f(x)$在包含着插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$的区间$[a,b]$上$n+1$次可微, 则对任意$x\in[a, b]$, 存在与x有关的 ξ $(a<\xi<b)$使得

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (5\text{-}14)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

证 **任取**$x\in[a, b]$, 当$x=x_0, x_1,\cdots, x_n$时，公式（4-14）显然成立。以下设 $x\neq x_i\ (i=0,1, \cdots,n)$,视 x 为一个节点，据一阶均差的定义，

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0) \qquad (5\text{-}15)$$

$$=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

$$=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2),$$

$$\vdots$$

进一步, k=1, 2, ⋯, n

$$f[x,x_0,\cdots,x_{k-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]+f[x,x_0,\cdots,x_k](x-x_k), \qquad (5\text{-}16)$$

将（5-15）递推展开：

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)\\
&= f(x_0)+\{f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)\}(x-x_0)\\
&= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1) \qquad p_n(x)\\
&= \cdots =\\
&= \boxed{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}\\
&\qquad + f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),
\end{aligned}$$

取余项

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= f(x)-p_n(x)\\
&= f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\\
&= f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x), \qquad (5\text{-}17)
\end{aligned}$$

由均差的性质4°，

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \min(x,x_0,\cdots,x_n)<\xi<\max(x,x_0,\cdots,x_n)$$

特别地，

$$f[x_0,x_1]=f'(\xi_1),\quad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f''(\xi_2)}{2!},\ \cdots,\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$

Newton公式可写成：

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(\xi_1)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

其中 $\min(x_0,\cdots,x_n)<\xi_i<\max(x_0,\cdots,x_n)$, $\quad i=1,2,\cdots,n$

若固定x_0, 令x_1,x_2, …,x_n一起趋于x_0，那么，

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Newton公式的极限即为$f(x)$ 在x=x_0点处的**Taylor**级数的前n+1项和。

插值余项的应用

证明 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$， $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, x_i^k = x^k \quad 0 \le k \le n$

首先，由**Lagrange**插值公式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$$

可知被插值函数应该为 $f(x) \equiv 1$。 由插值余项公式，

$$f(x) - p_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} l_i(x) = \frac{f(\xi)^{(n+1)}}{(n+1)\,!}\, \omega_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1。$$

同理，由插值余项公式，

$$x^k - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, x_i^k = \frac{\left.\left(x^k\right)^{(n+1)}\right|_{x=\xi}}{(n+1)\,!}\, \omega_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, x_i^k = x^k$$

那么， $\sum_{i=0}^{n} l_i(0)\, x_i^k = 0^k = 0$。

练习 取节点x_0=100，x_1=121，x_2=144，求逼近函数$y=\sqrt{x}$的插值多项式$p_2(x)$，进一步求出$y(115)$的近似值，并估计误差。

解：

$$\sqrt{115}\approx p_2(115)=\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)}\times 10+\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}\times 11$$

返回本节

$$+\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}\times 12$$

$$=\frac{(-6)\times(-29)}{(-21)(-44)}\times 10+\frac{15\times(-29)}{21\times(-23)}\times 11+\frac{15\times(-6)}{44\times 23}\times 12$$

$$=\frac{145}{77}+\frac{1595}{161}-\frac{270}{253}=10.72276 \qquad \sqrt{115}=10.72380\cdots$$

从而

$$r_2(115)=\sqrt{115}-p_2(115)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)\Big|_{x=\zeta}^{(3)}}{(2+1)\,!}(115-100)\cdot(115-121)\cdot(115-144)$$

$$\left|\sqrt{115}-p_2(115)\right|\le\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{10^5}\times 2070=\frac{6210}{48\times 10^5}=\boxed{0.00129375}$$

THE END

约瑟夫·路易·拉格朗日

（Joseph Louis Lagrange，1736～1813），法国数学家、物理学家

18世纪最伟大的科学家之一。在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。他是参议员，帝国伯爵，并被授予帝国大十字勋章。

1755年拉格朗日发表第一篇论文“极大和极小的方法研究”，发展了欧拉所开创的变分法，为变分法奠定了理论基础。1756年，受欧拉的举荐，拉格朗日被任命为普鲁士科学院通讯院士。1783年，被任命为都灵科学院名誉院长。出任法国米制委员会主任。制定了被世界公认的长度、面积、体积、质量的单位，拉格朗日为此做出了巨大的努力。1791年，拉格朗日被选为英国皇家学会会员，又先后在巴黎高等师范学院和巴黎综合工科学校任数学教授。1795年建立了法国最高学术机构——法兰西研究院后，拉格朗日被选为科学院数理委员会主席。他自己的一系列研究工作包括，编写了一批重要著作：《论任意阶数值方程的解法》、《解析函数论》和《函数计算讲义》。

拉格朗日科学研究所涉及的领域极其广泛。他在数学上最突出的贡献是使数学分析与几何与力学脱离开来，使数学的独立性更为清楚，从此数学不再仅仅是其他学科的工具。

拉格朗日在代数方程和超越方程的解法上，作出了有价值的贡献，推动了代数学的发展。最终解决了高于四次的一般方程为何不能用代数方法求解的问题。因而也可以说拉格朗日是群论的先驱。

在《解析函数论》以及他早在1772年的一篇论文中，他用幂级数表示函数的处理方法对分析学的发展产生了影响，成为实变函数论的起点。

拉格朗日也是分析力学的创立者。拉格朗日在其名著《分析力学》中，在总结历史上各种力学基本原理的基础上，发展达朗贝尔、欧拉等人研究成果，引入了势和等势面的概念，建立了拉格朗日方程，把力学体系的运动方程从以力为基本概念的牛顿形式，改变为以能量为基本概念的分析力学形式，奠定了分析力学的基础，为把力学理论推广应用到物理学其他领域开辟了道路。

拉格朗日用自己在分析力学中的原理和公式，建立起各类天体的运动方程。在天体运动方程的解法中，拉格朗日发现了三体问题运动方程的五个特解，即拉格朗日平动解。此外，他还研究彗星和小行星的摄动问题，提出了彗星起源假说等。

近百余年来，数学领域的许多新成就都可以直接或间接地溯源于拉格朗日的工作。所以他在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一。