第5章 插值与逼近

5.2.4 Hermite插 值

5.2.4 Hermite插值

理论和应用中提出的某些插值问题，要求插值函数$p(x)$具有一定的光滑度，即在插值节点处满足一定的导数条件，这类插值问题称为**Hermite**插值问题。**Hermite**插值问题的一般提法是：

设已知函数 $f(x)$ 在 s 个互异点 x_1, x_2 **, …,** x_s 处的函数值和导数值：

$$f(x_1),\ f'(x_1),\cdots,\ f^{(\alpha_1-1)}(x_1);$$

$$f(x_2),\ f'(x_2),\cdots,\ f^{(\alpha_2-1)}(x_2);$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$f(x_s),\ f'(x_s),\cdots,\ f^{(\alpha_s-1)}(x_s),$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为正整数，记 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=n+1$，构造一个$n$次多项式$p_n(x)$，使其满足插值条件：

$$p_n^{(\mu_i)}(x_i)=f^{(\mu_i)}(x_i)=y_i^{(\mu_i)},\quad i=1,2,\cdots,s;\quad \mu_i=0,1,\cdots,\alpha_i-1。\qquad \textbf{(5-18)}$$

可以采用类似于构造**Lagrange**插值基函数$l_j(x)$的方法来解决**Hermite**插值问题。先构造一批 n 次多项式作为插值基函数，即

$$L_{i,k}(x),\ \ i=1,2,\cdots,s\ ;\ \ k=0,1,\cdots,\alpha_i-1,$$

将n次插值多项式表为如下形式：

$$p_n(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(k)}L_{i,k}(x) \qquad \textbf{(5-21)}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left[y_iL_{i,0}(x)+y_i'L_{i,1}(x)+\cdots+y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}(x)\right]$$

且满足插值条件（**5-18**）。

这就要求使这批多项式满足条件：

$$L_{i,k}^{(h)}(x_m)=0,\quad m\neq i,\qquad h=0,1,\cdots,\alpha_m-1; \tag{5-19}$$

$$L_{i,k}^{(h)}(x_i)=\begin{cases}0, & h\neq k\,,\\ 1, & h=k\,。\end{cases}\qquad h,k=0,1,\cdots,\alpha_i-1, \tag{5-20}$$

$$p_n(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[y_iL_{i,0}(x)+y_i'L_{i,1}(x)+\cdots+y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}(x)\right]$$

显然，对于插值节点 x_m, m=1, •••, s，由（**5-19**）和（**5-20**），

$$\begin{aligned}p_n(x_m)&=\sum_{i=1}^{s}\left[y_iL_{i,0}(x_m)+y_i'L_{i,1}(x_m)+\cdots+y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}(x_m)\right]\\&=\cdots+\left[y_mL_{m,0}(x_m)+y_m'L_{m,1}(x_m)+\cdots+y_m^{(\alpha_m-1)}L_{m,\alpha_m-1}(x_m)\right]+\cdots\\&=y_mL_{m,0}(x_m)=y_m\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_n'(x_m)&=\sum_{i=1}^{s}\left[y_iL_{i,0}'(x_m)+y_i'L_{i,1}'(x_m)+\cdots+y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}'(x_m)\right]\\&=\cdots+\left[y_mL_{m,0}'(x_m)+y_m'L_{m,1}'(x_m)+\cdots+y_m^{(\alpha_m-1)}L_{m,\alpha_m-1}'(x_m)\right]+\cdots\\&=y_m'L_{m,1}'(x_m)=y_m'\,,\ \cdots\end{aligned}$$

满足插值条件。

以下构造$L_{i,k}(x)$，令 $A(x)=\prod_{v=1}^{s}(x-x_v)^{\alpha_v}$， 且令

$$l_{i,k}(x)=\frac{1}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)} \qquad \textbf{(5-22)}$$

其中 $\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}$代表 $\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}$ 在点 x_i 附近的 **Taylor**级数中幂次不超过 α_i-k-1 的项之和，即

$$\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right]_{(x_i)}+\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right]_{(x_i)}'\left(x-x_i\right)+\frac{1}{2!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right]_{(x_i)}''\left(x-x_i\right)^2+\cdots$$

注： $l_{i,k}(x)=\frac{1}{k!}\left\{a_0+a_1(x-x_i)+\cdots+a_{\alpha_i-k-1}(x-x_i)^{\alpha_i-k-1}\right\}\in\mathbf{P}_{\alpha_i-k-1}$

取 $L_{i,k}(x)=\underline{(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x-x_i)^k(x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}}\,\underline{l_{i,k}(x)}$

$$=\frac{A(x)(x-x_i)^k}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)} \qquad \textbf{(5-23)}$$

这样

$$L_{i,k}(x)=\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\cdot\frac{(x-x_i)^k}{k!}\cdot\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}$$

$$A(x)=\prod_{v=1}^{s}(x-x_v)^{\alpha_v}\text{。}$$

$$i=1,2,\cdots,s\ ;\ k=0,1,\cdots,\alpha_i-1,$$

即为所求的一批插值基函数多项式。

$L_{i,k}(x)$的阶数为：

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+k+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_s+\alpha_i-k-1$$

$$=\alpha_1+\cdots+\alpha_i+\cdots+\alpha_s-1=n$$

例6 $s=2$且 $\alpha_1=\alpha_2=2$，情形。此时

$$p(x)=\left[\ y_1 L_{1,0}(x)\ +y_1' L_{1,1}(x)\ +y_2 L_{2,0}(x)+y_2' L_{2,1}(x)\ \right]$$

此时 $A(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$

$$L_{1,0}(x)\ =\left(x-x_2\right)^2\left\{\frac{1}{\left(x-x_2\right)^2}\right\}_{(x_1)}^{(1)}$$

$$=\left(x-x_2\right)^2\left\{\left.\frac{1}{\left(x-x_2\right)^2}\right|_{x=x_1}+\left.\left(\frac{1}{\left(x-x_2\right)^2}\right)'\right|_{x=x_1}\left(x-x_1\right)\right\}$$

$$=\left(x-x_2\right)^2\left\{\frac{1}{\left(x_1-x_2\right)^2}-\frac{2\left(x-x_1\right)}{\left(x_1-x_2\right)^3}\right\}$$

$$=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\left\{1-\frac{2\left(x-x_1\right)}{\left(x_1-x_2\right)}\right\}$$

$$L_{1,0}(x)=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\left\{1-\frac{2(x-x_1)}{(x_1-x_2)}\right\}$$

那么

$$L_{1,1}(x)=(x-x_1)^2\cdot(x-x_1)\cdot\left\{\frac{1}{(x-x_2)^2}\right\}_{(x_1)}^{(0)}=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2(x-x_1)$$

同理有

$$L_{2,0}(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2\left\{1-\frac{2(x-x_2)}{(x_2-x_1)}\right\}$$

$$L_{2,1}(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2(x-x_2)$$

$$H_3(x)=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\left\{1-\frac{2(x-x_1)}{(x_1-x_2)}\right\}y_1+\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2(x-x_1)y_1'$$

$$+\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2\left\{1-\frac{2(x-x_2)}{(x_2-x_1)}\right\}y_2+\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2(x-x_2)y_2'$$

练习 已知 $f(x)=\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, 构造三次**Hermite**多项式$H_3(x)$。

解： 已知 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

则

$$H_3(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1-2\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}\right)^2+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}\right)^2+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1-2\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi+8\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi}\right)\left(\frac{4\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{4\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\right)^2+\left(\frac{\pi-8\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\right)\cdot\left(\frac{4\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi}\right)^2$$

下面给出例5类型的**Hermite**插值公式的误差估计。

定理5.3 设 $f(x)\in \mathbf{C}^{2s-1}[a,b]$, **在** (a,b) **内**$2s$**阶可导，又设**

$a\le x_1<x_2<\cdots<x_s\le b$, 则由例**5**确定的**Hermite**插值多项式p_{2s-1}

有如下的误差估计式**:**

$$f(x)-p_{2s-1}(x)=\frac{f^{(2s)}(\xi)}{(2s)!}[\sigma(x)]^2,\quad x\in[a,b] \qquad \textbf{(5-24)}$$

其中 $\min(x_1,x_2\cdots x_s)<\xi<\max(x_1,x_2\cdots x_s)$。

证 若x为 $x_1, x_2, \ldots, x_s$ 中的某一个**,** 则（**5-24**）显然成立。

以下假设 $x\neq x_i$ $(i=1,2,\ldots,s)$, 由插值条件**,**可设

$$f(x)-p_{2s-1}(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_s)^2K(x)=[\sigma(x)]^2K(x),$$

对上述给定的 x **,** 引进辅助函数**:**

$$\varphi(t)=f(t)-p_{2s-1}(t)-K(x)(t-x_1)^2\cdots(t-x_s)^2,$$

$$\varphi(t) = f(t) - p_{2s-1}(t) - K(x)(t-x_1)^2 \cdots (t-x_s)^2$$

显然

$$\varphi(x_i) = \varphi'(x_i) = 0,\ \ i = 1, 2, \cdots, s,\quad \varphi(x) = 0。$$

即$\varphi(t)$有s个二重零点 $x_1, x_2, \ldots, x_s$ 和一个单重零点x。

反复运用**Rolle**定理可证，至少有一个 ξ， 且有

$$\min(x, x_1, \cdots x_s) < \xi < \max(x, x_1, \cdots, x_s)$$

使得

$$\varphi^{(2s)}(\xi) = f^{(2s)}(\xi) - 0 - K(x) \cdot (2s)! = 0,$$

于是，得

$$K(x) = \frac{f^{(2s)}(\xi)}{(2s)!}$$

代入（4-25）即知（4-24）成立。

5.2.5 分段低次插值

利用插值法构造近似函数时，为了提高逼近精度，经常需要增加插值节点，加密插值节点会使插值函数与被插值函数在更多节点上的取值相同，那么误差是否会随之减小呢？

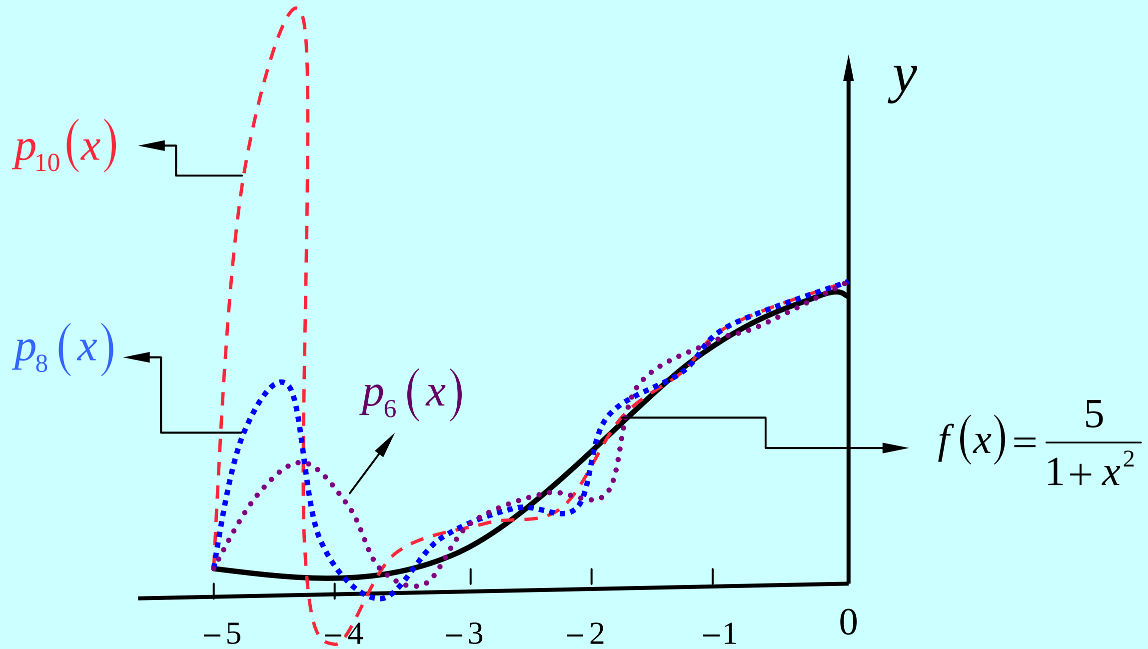
答案是否定的。原因在于插值节点增多导致插值多项式的次数增高，而高次多项式的振荡次数增多有可能使插值多项式在非节点处的误差变得很大。

例如，对于函数 $f(x)=\dfrac{5}{1+x^2}$ 在$[-5,5]$上构造等距节点：

$$x_k=-5+\frac{10}{n}k \qquad (k=0,1,\cdots,n)。$$

分别取 n=6、n=8 和 n=10作出插值多项式$p_n(x)$逼近$f(x)$。

等距节点高次插值多项式的Rung现象



插值函数的稳定性的分析，得到插值函数的舍入误差项为：

$$e_n=\max_{a\le x\le b}\left|I_n(f,x)-I_n(\bar{f},x)\right|\le\max_{a\le x\le b}\left[\sum_{i=0}^{n}\left|l_i(x)\right|\right]\max_{1\le i\le n}\left|f_i-\bar{f}_i\right|=\eta_n\max_{1\le i\le n}\left|f_i-\bar{f}_i\right|$$

其中 $\eta_n=\max\limits_{a\le x\le b}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\left|l_i(x)\right|\right)$, $I_n(f,x)=\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)f_i$, $I_n(\bar{f},x)=\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)\bar{f}_i$ 。

显然，对等距节点的高次的**Largrange**多项式插值 η_n是随着n增长的，

故得出结论：**Runge现象对等距节点的高次插值多项式的是典型的。**

为了克服高次插值多项式的上述弊端，通常采用分段低次插值的方法，即以插值节点为分点，将$[a, b]$分成若干个小区间，并在每个小区间上进行低次的多项式插值。

一、分段线性Lagrange插值

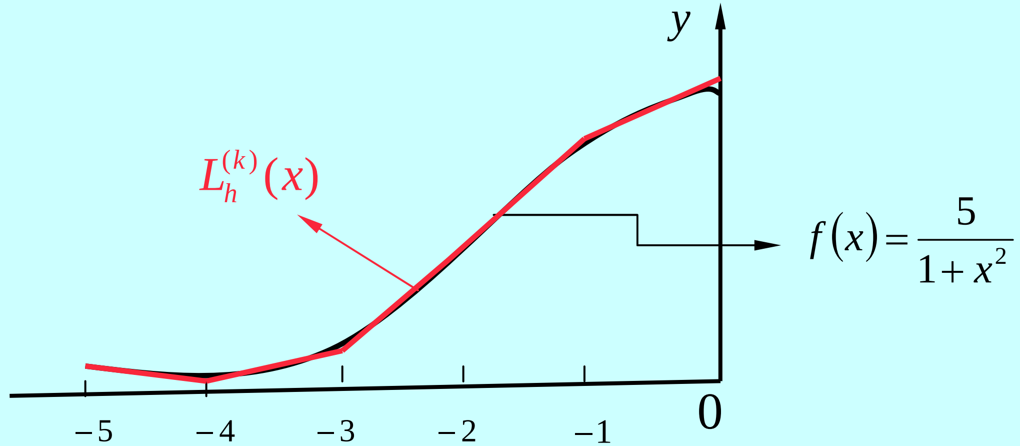
设插值节点 $x_0, x_1, \cdots,$ x_n满足$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$, 在每一个区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$上做线性插值多项式

$$L_h^{(k)}(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]。 \tag{5-26}$$

令

$$L_h(x) = \begin{cases} L_h^{(0)}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ L_h^{(1)}(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ L_h^{(n-1)}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases} \tag{5-27}$$

显然 $L_h(x_i)=y_i$ (i=0, 1, $\cdots$,n), $L_h(x)$称为$f(x)$在$[a, b]$上的分段线性插值多项式。$y=L_h(x)$的图形是平面上连接点(x_0,y_0)、(x_1,y_1)、$\cdots$、(x_n, y_n)的一条折线（如图）。



由插值余项定理，当$f(x)$在$[a,b]$上二次可微时，对任意$x\in[x_k, x_{k+1}]$，余项为：

$$R_1(x)=f(x)-L_h^{(k)}(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1}), \tag{5-28}$$

从而
$$\max_{a\le x\le b}|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\le\frac{M_2}{8}h^2, \tag{5-29}$$

其中
$$M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|,\ h=\max_{0\le k\le n-1}h_k, \quad h_k=x_{k+1}-x_k$$

易证, 当 $f(x)\in \mathbf{C}[a,b]$时, $\lim_{h\to 0} L_h(x)=f(x)$ 在$[a,b]$上一致成立。

对$x\in[a,\boldsymbol{b}]$, 若$x\in[x_k,x_{k+1}]$, 则以 $L_h^{(k)}(x)$ 作为 $f(x)$的近似值;

若$x\leqslant x_0$, 则以 $L_h^{(0)}(x)$ 作为$f(x)$的近似值；若$x\geqslant x_n$, 则以 $L_h^{(n-1)}(x)$ 作为 $f(x)$的近似值。

二、分段二次Lagrange插值

当给定的函数表中节点的个数远多于3的时候, 为了提高计算精度, 或根据实际问题需要, 有时采取分段二次插值法。

对于$x\in[a,b]$, 应选择靠近x的三个节点做二次插值多项式:

（1）当$x\in[x_k, x_{k+1}]$,且x偏向x_k时,选择x_{k-1}, x_k, x_{k+1}作为插值节点;

（2）当$x\in[x_k, x_{k+1}]$, 且x偏向x_{k+1}时,选择x_k, x_{k+1}, x_{k+2}作为插值节点;

（3）当$x\in[x_0, x_1)$, 或$x<x_0$时,选择x_0, x_1, x_2作为插值节点;

（4）当$x\in(x_{n-1}, x_n]$, 或$x>x_n$时, 选择x_{n-2}, x_{n-1}, x_n作为插值节点;

根据实际问题的需要,还可采用分段Hermite插值或样条插值方法。

THE END

数学成绩不佳的数学大师— Hermite (埃尔米特)

埃尔米特　**Hermite，Charles（1822～1901）**

法国数学家。**1822**年**12**月**24**日生于法国洛林，法国科学院院士。巴黎综合工科学校和巴黎理学院教授。还有许多国家的科学科学院的荣誉成员。

他是十九世纪最伟大的代数几何学家，但是他大学入学考试重考了五次，每次失败的原因都是数学考不好。他的大学读到几乎毕不了业，每次考不好都是为了数学那一科。他大学毕业后考不上任何研究所，因为考不好的科目还是—— 数学。

数学是他一生的至爱，但是数学考试是他一生的恶梦。不过这无法改变他的伟大：课本上“共轭矩阵”是他先提出来的，自然数*e*的“超越数性质”，全世界，他是第一个证明出来的人。

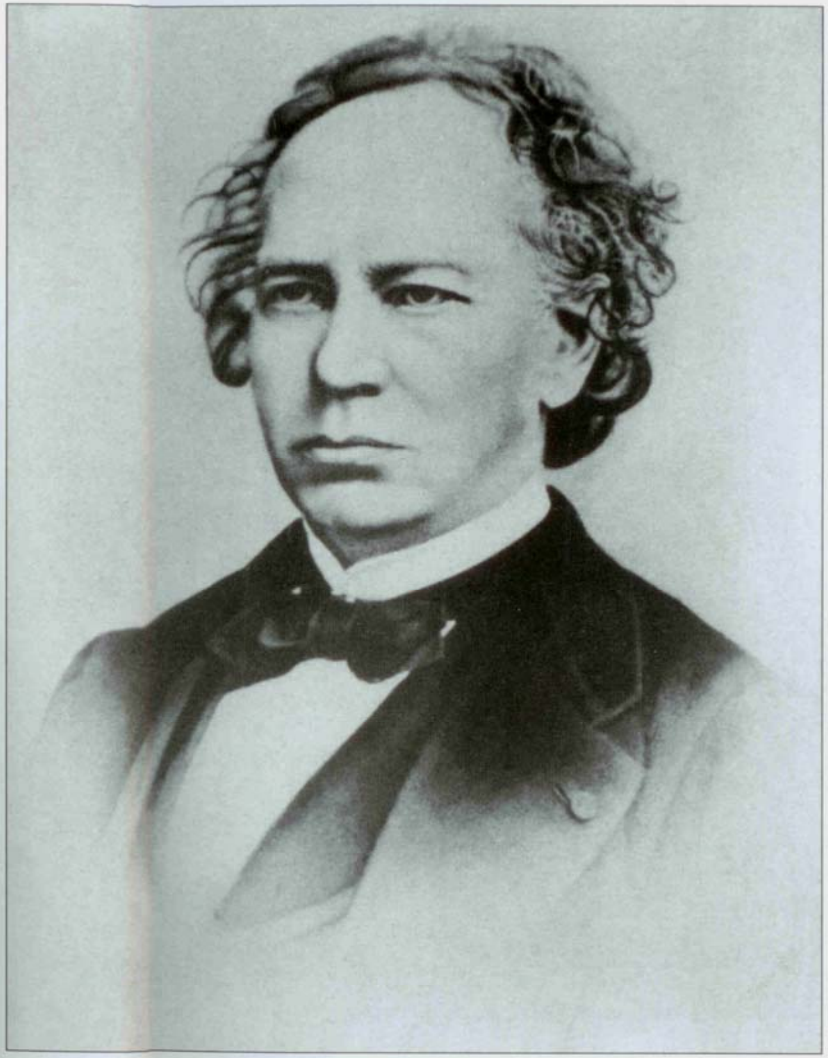
Hermite在七个孩子中排名第五，生下来右脚就残障，需扶拐杖行走。 **Hermite**从小就是个问题学生，上课时老爱找老师辩论，尤其是一些基本的问题。他尤其痛恨考试；后来写道："学问像大海，考试像鱼钩，老师老要把鱼挂在鱼钩上，教鱼怎么能在大海中学会自由、平衡的游泳？"

Hermite花许多时 ……，他认为在那里才能找到“数学的美，是回到 ……源头。” 巴黎综合工科技术学院入学考每年举 ……次才以吊车尾的成绩通过。其间他几乎要放弃时， ……对**Hermite**说:“你是自**Lagrange**以来的第 ……

Hermite进技术学 ……命令：肢障者不得进入工科学系， **Hermite**只 ……多了，结果他的数学还是不及格。有趣的是， ……应用数学杂志》发表《五次方方程式解的思索》 ……

他在二十四岁时， ……应付考试，无法继续升学，他只好找所学校做 ……做了几乎二十五年，仅管他这二十五年中发表了 ……名满天下，数学程度远超过当时所有大学的教授 ……，只能继续批改学生作业。

有人真正地赞赏他 ……轻视他。欣赏他的人后来也都在数学界享有盛名 ……志」的主编**Liouville**。**Hermite**在四十九岁时 ……五年，几乎整个法国的大数学家都出自他的门 …… 但是有一件事情是可以确定的——没有考试。



埃尔米特(Charles Hermite,1822~1901)