答疑时间和地点

2011年**12**月**19**日上午**10:00～12:00**

研教楼**204**教室

（4）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 10 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$，要是 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{a}$应满足 $|a|<1$

（7）设$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，$\int_0^1 e^{\boldsymbol{A}t}dx=$ ________

$$\frac{de^{\boldsymbol{A}t}}{dt}=Ae^{\boldsymbol{A}t} \Rightarrow \int_0^1 e^{\boldsymbol{A}t}dt=\boldsymbol{A}^{-1}\int_0^1 \frac{e^{\boldsymbol{A}t}}{dt}dt=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I}\right)$$

第三章部分相关习题 P96

1）（×） 2）（×） 3）（√） 4）（*B*） 5）（*C*）

6）$0<\beta<\frac{\sqrt{7}}{7}$ 7）$\lambda(x_k)=\frac{1}{3x_k^2-x_k-1}$

9）（1）；$\varphi(x)=x-\frac{5x-e^x}{5-e^x}$； （2）

10）$|a|<1$

第四章部分相关习题 P132

1） $a=3, b=3;$ **2）** **2** **1** $= f[x_i, x_j, x_k]$

3） $f[0,1,2,3]=2; \quad f[0,1,2,3,4]=0;$

4） $\sum_{i=0}^{3} x_i l_i(0) =$ **0** $\quad \sum_{i=0}^{3}(x_i^3+1) l_i(x) = x^3+1$

5） $f[1,3,6]=f[3,6,7]=1,$

$$p(x)=1+4(x-1)+(x-1)(x-3)=x^2$$

第五章部分相关习题 P154

（1） （ × ） （2）（ C ） （3）（ C ）

（4） $\sum_{i=0}^{3} A_i x_i =$ __0__ $\sum_{i=0}^{3} A_i \left(x_i^3 + 3x_i^2\right) =$ __2__

（5） $\varphi_1(x) =$ $x - \frac{2}{3}$ $\int_0^1 x \cdot \varphi_3(x) dx =$ __0__

4. 已知**Gauss**型求积公式公式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

证明：当**0≤i<j≤n**时， $\sum_{k=0}^{n} A_k \omega_i(x_k) \cdot \omega_j(x_k) = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \boxed{\omega_i(x_k) \cdot \omega_j(x_k)} \approx \int_a^b \rho(x) \cdot \omega_i(x) \omega_j(x) dx = \left(\omega_i(x), \omega_j(x)\right)$$

$$= 0$$

不超过2n次

第七章部分相关习题 P210

（1）一　二

（2）$0<h<\frac{2.78}{50}=0.056$，$0<h<\frac{2}{50}=0.004$

（3）$\frac{1}{2}h^2u''(t)+O(h^3)$

2012级期末考试基本不要求内容

第二章　不要求部分：

（1）**Jordan**分解中变换矩阵T的计算；

（2）各类分解或算法的时空复杂性；

（3）解三对角矩阵的追赶法。

附录一　不要求部分：微分方程组的求解。

第三章　不要求部分：　二分法；

第四章　不要求部分：　三次样条插值；

降低要求部分：

Hermite插值只要求掌握两点三次公式；

第七章　不要求部分：**Runge-Kutta**方法、差分法。

一、填空题（共50分，每填对一空得2分）

（1）已知a=1.234, b=2.345分别是x和y的具有4位有效数字的近似值, 那么,

$$\frac{|x-a|}{|a|} \le \underline{\frac{1}{2}\times 10^{-3}} \qquad |(3x-y)-(3a-b)| \le \underline{2\times 10^{-3}}$$

（2）$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 的QR分解，A= $\underline{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

将向量 $x=(1,4,3)^{\mathrm{T}}$映射成 $y=(1,5,0)^{\mathrm{T}}$的Householder变换矩阵

A= $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}$ $\quad \mathrm{cond}_2(H) = \underline{\ 1\ }$

（**3**）记区间**[-1,1]**上以 ρ **(*x*)=1**为权函数的正交多项式序列为 $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$。则其中的 $\phi_2(x) = \underline{\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)}$

$\phi_3(x)$ 在**[-1,1]**上的二次最佳平方逼近多项式 $p_2(x) = \underline{\mathbf{0}}$

（**4**）数值求解微分方程 $\begin{cases} u' = -2tu^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ 的**Euler**法格式为

$\underline{u_{n+1} = u_n - 2ht_n u_n^2}$ 梯形法格式为 $\underline{u_{n+1} = u_n - h(t_n u_n^2 + t_{n+1} u_{n+1}^2)}$

(5)已知***f*(*x*)**是一个次数不超过**4**的多项式**,** 其部分函数值如下表所示**:**

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	-1	1	19	65

则 $f[0,1,2] = \underline{\mathbf{2}}$ $f(x) = \underline{2x^3 - 4x^2 + 1}$ $f[0,1,2,4] = \underline{\mathbf{2}}$

（6）满足下列条件：$H(0)=1, H'(0)=0, H(1)=0, H'(1)=1$

的三次**Hermite**插值多项式**H(*x*)=** $\underline{3x^3-4x^2+1}$ （写成最简形式）

（7）**Simpson**数值求积公式的代数精度为 $\underline{\mathbf{3}}$ 用该公式分别

估算定积分 $I_1=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int_0^1\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)\mathrm{d}x$ 所得近似值分别

记为*S*和 $\tilde{S}$ 和 $S=\underline{\dfrac{5}{24}}$ $I_2-\tilde{\boldsymbol{S}}=$ ________

（8）迭代格式 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$ 对于任意初值 $x_0>0$ 均收敛于 $\underline{\sqrt[3]{3}}$

其收敛阶***p***= $\underline{\mathbf{2}}$

$$I_2-\tilde{\boldsymbol{S}}=\int_0^1\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)\mathrm{d}x-\boldsymbol{S}\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)$$

$$=2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-\mathbf{2}\boldsymbol{S}\left(x^4\right)=\frac{2}{5}-\frac{5}{24}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{60}}$$

$$x=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}=\varphi(x) \longrightarrow f(x)=x^3-3=0, \qquad \varphi'\left(\sqrt[3]{3}\right)=0,\ \varphi''\left(\sqrt[3]{3}\right)\neq 0$$

（9）设矩阵A的奇异值分解 $A=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

则 $\|A\|_2 =$ <u>2</u>　$\|A\|_F =$ <u>$\sqrt{5}$</u>

（10）已知 $A=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ & 0.5\end{pmatrix}$　$\sum_{k=0}^{\infty} A^k =$ <u>$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$</u>

$f(t)=t^{10}$　$A^{10}=$ <u>$\begin{pmatrix}2^{-10} & 10\times 2^{-9}\\ 0 & 2^{-10}\end{pmatrix}$</u>　$e^{A}=$ <u>$\begin{pmatrix}\sqrt{e} & \sqrt{e}\\ 0 & \sqrt{e}\end{pmatrix}$</u>　$f(t)=e^t$

$e^{At}=$ <u>$\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{2}} & te^{\frac{t}{2}}\\ 0 & e^{\frac{t}{2}}\end{pmatrix}$</u>　$\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}=$ <u>$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} & (1+\frac{t}{2})e^{\frac{t}{2}}\\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\end{pmatrix}$</u>

二、（12分）设线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

(1) 求系数矩阵的***LU***分解；

(2) 利用平方根法（又称**Cholesky**方法）解此方程组；

(3) 构造解此方程组的***G-S***迭代格式，并讨论其收敛性。

解 **(1)**

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}$$

(2)的Cholesky分解与*LU*分解相同

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

再由 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) *G-S*迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}\left(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$

收敛性证明　方法一、　因为对称正定，所以**G-S**法收敛.

方法二、　由特征方程

$$|C(\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3\lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3\lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

知 $\rho\left(\boldsymbol{B}_G\right) = \dfrac{2}{3} < 1$。所以**G-S**法收敛

三、（**8**分）求拟合下列数据的最小二乘曲线　$y = a + bx$

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y_i	**1.8**	**1.2**	**-0.2**	**-0.8**	**-2.2**

解 法方程组　$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -10.4 \end{bmatrix}$

解得 ***a*=1.96, *b*=−1**。　最小二乘解　$y = 1.96 - x$

四、（8分）设$\|\cdot\|_1$是$\mathbf{R}^n$上的1-向量范数, $\mathbf{P}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为非奇异矩阵。

对于任意$\mathbf{P}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为非奇异矩阵。对于任意$x\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$\|x\|_P=\|Px\|_1。$$

证明: $\|\cdot\|_P$是$\mathbf{R}^n$上的一种向量范数, 并且 $\|x\|_P\le\max\limits_{1\le j\le n}\|p_j\|_1\cdot\|x\|_1$

其中 $p_j\ (j=1,2,\cdots,n)$为列向量。

证 (1)非负性 对于任意$x\in\mathbf{R}^n$, $\|x\|_P=\|Px\|_1\ge 0$, 并且

$$\|x\|_P=0\quad\Leftrightarrow\quad\|Px\|_1=0\quad\Leftrightarrow\quad Px=0\quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

（2）齐次性 $\forall\alpha\in R$

$$\|\alpha x\|_P=\|P(\alpha x)\|_1=\|\alpha(Px)\|_1=|\alpha|\cdot\|Px\|_1=|\alpha|\cdot\|x\|_P,$$

（3）三角不等式

$$\|x+y\|_P=\|P(x+y)\|_1=\|Px+Py\|_1\le\|Px\|_1+\|Py\|_1=\|x\|_P+\|y\|_P$$

（4）不等式的证明

方法一、 由算子范数与向量范数的相容性，

$$\|\boldsymbol{x}\|_P = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_1 \le \|\boldsymbol{P}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_1$$

方法二、

$$\|\boldsymbol{x}\|_P = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_1 = \left\|x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{p}_n\right\|_1$$

$$\le \left\|x_1\boldsymbol{p}_1\right\|_1 + \left\|x_2\boldsymbol{p}_2\right\|_1 + \cdots + \left\|x_n\boldsymbol{p}_n\right\|_1$$

$$= \left|x_1\right| \cdot \left\|\boldsymbol{p}_1\right\|_1 + \left|x_2\right| \cdot \left\|\boldsymbol{p}_2\right\|_1 + \cdots + \left|x_n\right| \cdot \left\|\boldsymbol{p}_n\right\|_1$$

$$\le \left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right| + \cdots + \left|x_n\right|\right) \cdot \max_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1$$

$$= \max_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_1$$

五、（**12**分）对于解常微分方程初值问题 $\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ 的线性二步法

$$u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{h}{16}\left(7f_{n+2} + 8f_{n+1} - 3f_n\right)$$

(1) 求其局部截断误差**(**必须写出主项**),**并指出该方法是几阶方法

(2) 讨论收敛性；**(3)**求绝对稳定区间。

解 （**1**） $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0,$

$$c_4 = \frac{1}{4!}\left(-\frac{5}{4} + 2^4\right) - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{16}\left(8 + 2^3 \times 7\right) = \frac{59}{96} - \frac{64}{96} = -\frac{5}{96}$$

局部截断误差 $R_{n+2}(h) = -\frac{5}{96}u^{(4)}(t_n)h^4 + O(h^5)$ 该方法是三阶方法

(2) 由 $\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$ 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}$

知该方法满足根条件, 又因其阶$\boldsymbol{p}$**=3≥1,** 所以该二步法收敛。

（3）特征方程 $\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda+\frac{1}{4}=\frac{7\bar{h}}{16}\lambda^2+\frac{8\bar{h}}{16}\lambda-\frac{3\bar{h}}{16}$

$$\left(1-\frac{7\bar{h}}{16}\right)\lambda^2-\left(\frac{5}{4}+\frac{8\bar{h}}{16}\right)\lambda+\left(\frac{1}{4}+\frac{3\bar{h}}{16}\right)=0$$

$$\lambda^2-\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\lambda+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=0$$

以下解不等式 $\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<1+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$

显然 $\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$。再由 $\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}$ 得

$$4\bar{h}-20<20+8\bar{h}<20-4\bar{h}$$

$$20-4\bar{h}<32-14\bar{h},$$

$$-10<\bar{h}<0$$

即此线性二步法的绝对稳定区间为**(-10,0)**。

六、（10分）已知 $\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

为**Gauss**型求积公式, 其中 ρ 为权函数；设 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$

是以x_0, x_1, ⋯ , x_n为节点的**Lagrange**插值基函数。证明：

(1) $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (i \neq j)$

(2) $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$

证 **(1)** 因为**Gauss**型求积公式的代数精度为$2n+1$，而$l_i(x)l_j(x)$为$2n$次的代数多项式，所以 $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i(x_k) l_j(x_k)$

又因为当$j \neq i$时，$l_i(x_k) l_j(x_k) = 0$，所以 $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x)\mathrm{d}x = 0$

(2) 对0, 1, ⋯ , n中任意固定的i , 而 $l_i^2(x)$为$2n$次的代数多项式,

所以 $\int_a^b \rho(x) l_i^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i^2(x_k) = A_i$ 从而

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k \cdot 1) = \int_a^b \rho(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Merry Christmas！

Happy New Year！

本学期课程到此结束