



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第4章

插值与逼近



4.1 引言

4.1.1 插值问题

4.1.2 多项式插值的基本概念

4.2 Lagrange型插值

4.2.1 Lagrange插值公式

4.2.2 Newton插值公式

4.2.3 插值余项

4.5 正交函数族在逼近中的应用

4.5.1 正交多项式简介

4.5.2 正交多项式的一些重要性质

4.5.3 数据拟合的最小二乘法



4.1 引言

- 插值方法是数值分析中的一个简单而又重要的方法，利用该方法可以通过函数在有限个点处的函数值求出其近似函数，进而估算出函数在其它点处的值
- 插值方法在离散数据处理、函数的近似表示、数值微分、数值积分、曲线与曲面的生成等方面有重要的应用
- 本文主要介绍了插值方法中的多项式插值方法

4.1.1 插值问题

设已知函数在 $[a, b]$ 上 n 个互异点处的函数值和导数值

$$\begin{aligned} & f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1); \\ & f(x_2), f'(x_2), \dots, f^{(\alpha_2-1)}(x_2); \\ & \dots \quad \dots \\ & f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(\alpha_n-1)}(x_n), \end{aligned} \tag{4-1}$$

构造一个简单易算的函数 $p(x)$ ，使其满足下述条件：

$$p^{(\mu_i)}(x_i) = f^{(\mu_i)}(x_i), \tag{4-2}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu_i = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1。$$

以上问题称作插值问题。

x_1, x_2, \dots, x_n 称为插值节点；

$p(x)$ 称为 $f(x)$ 关于节点组 x_1, x_2, \dots, x_n 的插值函数；

(4-2) 称为插值条件。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

在插值法中需考虑的问题:

- 简单函数类的选取问题
- 存在唯一性问题
- 余项估计问题
- 收敛性问题

4.1.2 插值函数的存在唯一性、插值基函数

设简单函数类 S 是连续函数空间 $C[a,b]$ 的 n 维子空间, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是 S 的一组基底函数, 即 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关, 且对任意 $p(x) \in S$, 有且仅有一组系数 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$, 使得 $p(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$ 。

下面以 (4-1) 中所有 $\alpha_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的特殊情形为例, 介绍插值函数的存在唯一性。此时插值条件为

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-3)$$

而插值问题就是在 S 中寻求一个函数 $p(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$, 使得 $p(x)$ 满足插值条件 (4-3)。该问题等价于通过求解方程组

$$\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-4)$$

确定一组系数 c_1, c_2, \dots, c_n



定义4.1 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且对 $[a, b]$ 上的任意 n 个互异点 x_1, x_2, \dots, x_n , 行列式

$$D[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4-5)$$

则称 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足**Haar**条件。

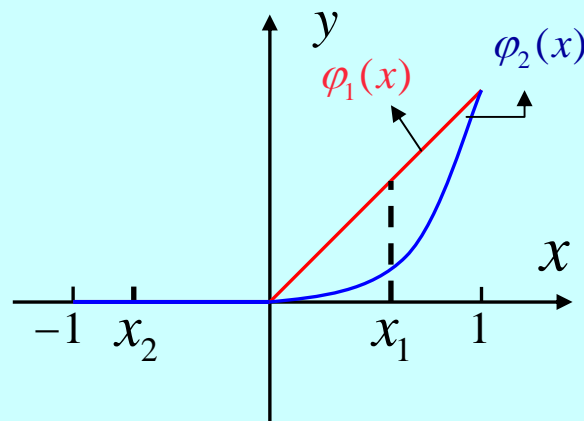
注: 并不是任何线性无关的连续函数都满足**Haar**条件。

例如, 取 $[-1, 1]$ 上的连续函数

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



显然 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 线性无关，但是不满足Haar条件。



即存在 x_1 、 x_2 使得

$$D[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$



由定义4.1及线性代数的基本知识，易得下述定理.

定理4.1 设已知函数 $f(x)$ 在 n 个互异点 x_1, x_2, \dots, x_n 处的函数值 y_1, y_2, \dots, y_n ，亦即

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

又设 S 的基底函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 **Haar** 条件，则存在唯一的函数

$$p(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \in S$$

满足插值条件

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

事实上，由插值条件

$$p(x_i) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

可得线性方程组

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其系数矩阵行列式满足：

$$D[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

故其解 c_1, c_2, \dots, c_n 存在唯一，故定理4.1成立。

由定理4.1，特别地，对于插值问题（1）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

应存在唯一的函数 $l_1(x)$ 满足如下的插值条件：

$$l_1(x_1) = 1 = y_1, \quad l_1(x_i) = 0 = y_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n。$$

对于插值问题（2）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

应存在唯一的函数 $l_2(x)$ 满足如下的插值条件：

$$l_2(x_2) = 1 = y_2, \quad l_2(x_i) = 0 = y_i, \quad i = 1, 3, \cdots, n。$$

对于插值问题（ n ）：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

应存在唯一的函数 $l_n(x)$ 满足如下的插值条件：

$$l_n(x_n) = 1 = y_n, \quad l_n(x_i) = 0 = y_i, \quad i = 1, 3, \cdots, n-1。$$



如此定义下去, 就得到唯一的一组线性无关函数,

$$l_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

且

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

又

$$D[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} l_1(x_1) & l_2(x_1) & \cdots & l_n(x_1) \\ l_1(x_2) & l_2(x_2) & \cdots & l_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1(x_n) & l_2(x_n) & \cdots & l_n(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

即 $l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足**Haar**条件。

称其为**插值基函数**。



推论4.1 若S满足如定理4.1中所设, 则S中存在唯一的一组函数 $l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$,

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$l_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 称为**插值基函数**。易证 $l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$ 也是S的一组基底函数。

利用插值函数的存在唯一性, 可证明

推论4.2 在定理4.1的假设下, 函数 $p(x) = \sum_{k=1}^n y_k l_k(x)$ 是S中满足插值条件 $p(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ 的唯一函数。



4.1.2 多项式插值基本概念

假设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的未知或复杂函数, 但已知该函数在互异点

$$a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值 y_0, y_1, \cdots, y_n

我们的目标是找一个简单的函数, 例如多项式函数 $p_n(x)$, 使之满足条件

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n \quad (4-3)$$

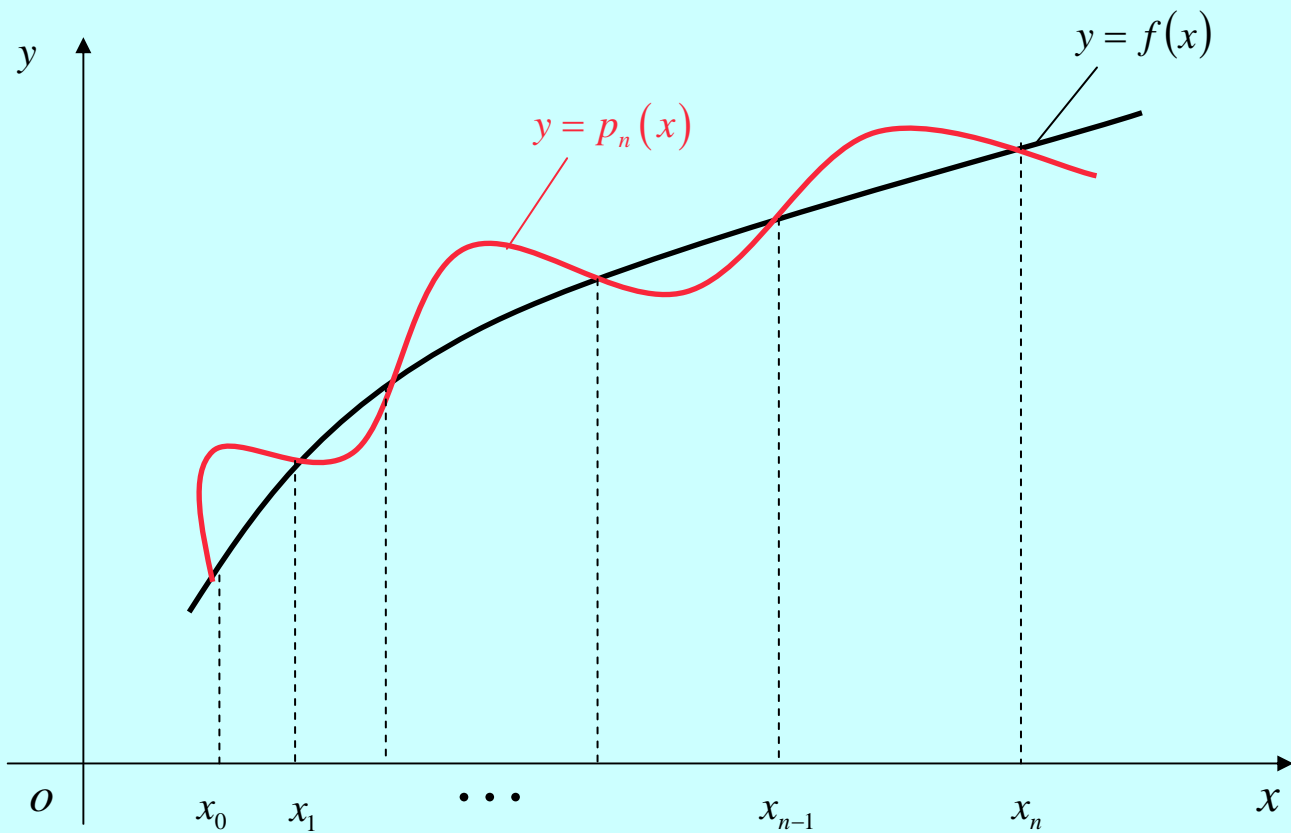
即在给定点 x_i 处, $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 是相吻合的。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



通常把 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ 称为插值节点,

$p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值多项式(函数),

$f(x)$ 称为被插函数, $[a,b]$ 称为插值区间,

条件(4-3)称为插值条件, 求 $p_n(x)$ 的过程称为插值法。

例1, 只需取 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, \cdots , $\varphi_n(x) = x^n$

且在 $[a,b]$ 上满足 Haar 条件, 则有

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

由插值条件可得

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{array} \right.$$



显然，其系数是满足Vandermorde（范德蒙）行列式

$$V_n[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

因此，在 \mathbf{P}_n （所有次数不超过 n 的实系数代数多项式的集合）中有唯一的多项式 $p_n(x)$ ，满足

$$p_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

这实际上就证明了代数多项式插值的**存在唯一性**。



Lagrange插值问题

给定 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异点 $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ 及函数值 y_0, y_1, \cdots, y_n 。

构造次数不超过 n 的实系数代数多项式 $p_n(x)$, 使之满足插值条件:

$$p_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

此类函数插值问题, 称为**Lagrange**插值问题。



4.2.1 Lagrange插值公式

考虑 $n=1$ 的情形, 给定 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 且 $x_0 \neq x_1$
构造一次多项式 $p_1(x)$, 满足条件: $p_1(x_0) = y_0, p_1(x_1) = y_1$

由直线的两点式可知: $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, 解之, 得

$$p_1(x) = y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

进一步可改写成: $p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$

$$\text{其中 } l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

分别称其为对应于节点 x_0 和 x_1 的插值基函数。

并且具有性质:

$$l_0(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = 1 \quad l_0(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} = 0$$

$$l_1(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1 \quad l_1(x_0) = \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} = 0$$

从而, $p_1(x)$ 满足插值条件:

$$p_1(x_1) = y_1 \quad p_1(x_0) = y_0$$

故 $p_1(x)$ 即为满足条件的一次**Lagrange**插值多项式。

- 注意:
- 插值基函数的个数=插值节点的个数;
 - 插值基函数的次数=插值节点的个数-1;
 - 插值基函数决定着插值多项式满足插值条件;
 - 插值基函数与插值节点的次序无关。



考虑 $n=2$ 的情形, 给定 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 且 $x_0 \neq x_1 \neq x_2$
构造二次多项式 $p_2(x)$, 满足条件:

$$p_2(x_0) = y_0, \quad p_2(x_1) = y_1, \quad p_2(x_2) = y_2$$

进一步写成 $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

其中 $l_i(x)$ $i=0, 1, 2$, 均为二次的插值基函数多项式, 且满足

$$l_0(x_0) = 1 \quad l_0(x_1) = 0 \quad l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0 \quad l_1(x_1) = 1 \quad l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_0) = 0 \quad l_2(x_1) = 0 \quad l_2(x_2) = 1$$

下面我们 $l_0(x)$ 以为例来确定出: $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$



由条件 $l_0(x_1)=0$ $l_0(x_2)=0$ 可知, x_1, x_2 是 $l_0(x)$ 的两个根, 从而

$$l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$$

其中A为待定系数。又由 $l_0(x_0)=1$, 可得

$$1 = A(x_0-x_1)(x_0-x_2) \Rightarrow A = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

从而,

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理,

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

进而满足条件的二次**Lagrange**插值多项式为：

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个互异点，取

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (4-6)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

显然
$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j=0, 1, \dots, n. \quad (4-7)$$

$l_j(x_i) (j=0, 1, \dots, n)$ 称为 **n 次Lagrange插值基函数**。 从而

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x)$$

就是多项式空间 $\mathbf{P}_n(x)$ 中满足插值条件： $p_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, \dots, n)$ 的唯一的**多项式** $p_n(x)$ ，称为 **n 次Lagrange插值多项式**。

例1 已知函数 $f(x)$ 的如下函数值:

x_i	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	-1	-1	1

求 $f(x)$ 的二次**Lagrange**插值多项式 $p_2(x)$, 并利用 $p_2(x)$ 计算出 $f(1.5)$ 的近似值。

解 首先计算插值基函数:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3), \quad l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3),$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)。$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(x-3) \times (-1) + [-(x-1)(x-3) \times (-1)] + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} \times (x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{2} \times (x^2 - 3x + 2) = x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

于是 $f(1.5) \approx p_2(1.5) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 1 = -1.25.$

返回本节



4.2.2 Newton插值公式

在插值问题中，为了提高插值精度，有时需增加插值节点个数。插值节点个数发生变化后，所有的Lagrange插值基函数都会发生变化，从而整个Lagrange插值多项式的结构发生变化，这在计算实践中是不方便的。为了克服Lagrange插值多项式的缺点，能灵活地增加插值节点，使其具有“承袭性”，我们引进Newton插值公式。

设已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个互异插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值 f_0, f_1, \dots, f_n ，将基函数取作：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-8)$$

则可将 n 次插值多项式写成如下形式：

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中待定系数 a_0, a_1, \dots, a_n 由插值条件

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

来确定。

例如, $n=1$ 时, $p_1(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

由插值条件: $p(x_0) = f_0 \quad p(x_1) = f_1$

可得, 即

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$p_1(x_1) = \quad + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow \quad = \frac{\quad}{\quad}$$

从而

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$n=2$ 时, 应有

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

即

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

由

$$p_2(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

得

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

即

$$p_2(x) = \boxed{f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)} + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)}(x - x_0)(x - x_1)$$

实际上，由于插值多项式的唯一性，**Newton**插值多项式只不过是**Lagrange**插值多项式的另一种表现形式，两者是可以互推的。为得到**Newton**插值多项式的一般表达式，即

$$a_j, \quad j = 1, \dots, n$$

的一般表达式，我们给出均差的定义。



定义4.2 设函数 $f(x)$ 在互异的节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值为

f_0, f_1, \dots, f_n , 称

$$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} \quad k \neq i \quad (4-11)$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_k 的一阶均差（差商）。称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} \quad i \neq j \neq k$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_j, x_k 的二阶均差（差商）。称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (4-12)$$

为 $f(x)$ 关于 x_0, x_1, \dots, x_k 的 k 阶均差（差商）。

均差有如下性质:

$$1^\circ f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} \quad \text{其中} \quad \omega_{k+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$$

2° 对称性, 即在 $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ 中任意调换 x_0, x_1, \dots, x_k 的位置时, 均差的值不变, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_1, x_0, \dots, x_k] = \cdots = f[x_k, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$$

3° 若 $f(x)=x^m$, m 为自然数, 则

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} 0, & k > m \\ 1, & k = m \\ \text{诸 } x_i \text{ 的齐次函数, } & k < m \end{cases}$$

4° 设 $f(x)$ 在包含 x_0, x_1, \dots, x_k 的区间 (a, b) 内 k 次可微, 则

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

此处 $\min(x_0, x_1, \dots, x_k) < \xi < \max(x_0, x_1, \dots, x_k)$ 。

练习,若 $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 1$, 求 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^4]$ 和 $f[e^0, e^1, \dots, e^5]$

$$\text{解: } f[2^0, 2^1, \dots, 2^4] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{-3 \times 4!}{4!} = -3$$

$$f[e^0, e^1, \dots, e^5] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = 0。$$

由均差的定义, 我们可以推出

$$a_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j] \quad j = 1, \dots, n$$

从而 $p_2(x)$ 的**Newton**插值公式为:

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

更一般地, 我们可以构造出 n 次**Newton**插值多项式公式:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$



构造 n 次Newton插值多项式公式，关键是构造 $f(x)$ 的各阶关于插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 的均差值。

为了便于计算均差值，常常利用如下形式生成均差表：

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	...
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	

注意：

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$



用Newton插值公式，求解例1。

解 首先利用均差表计算各阶均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	-1			
2	-1	$\frac{-1+1}{2-1}=0$		
3	1	$\frac{1+1}{3-2}=2$	$\frac{2-0}{3-1}=1$	

由上面的均差表可知， $f[0, 1]=0$ ， $f[0, 1, 2]=1$ ，故所求的插值多项式为：

$$p_2(x) = -1 + 0(x-1) + (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 1$$



例2 已知 $f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=-6, f(3)=11$, 求 $f(x)$ 关于上述节点组的三次插值多项式 $p_3(x)$ 。

解 首先利用均差表计算均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	2	$\frac{-3-2}{1-0} = -5$		
1	-3	$\frac{-6+3}{2-1} = -3$	$\frac{-3+5}{2-0} = 1$	
2	-6	$\frac{11+6}{3-2} = 17$	$\frac{17+3}{3-1} = 10$	$\frac{10-1}{3-0} = 3$
3	11			

由上面的均差表可知, $f[0, 1] = -5$, $f[0, 1, 2] = 1$, $f[0, 1, 2, 3] = 3$, 故所求的插值多项式为:

$$p_3(x) = 2 - 5x + x(x-1) + 3x(x-1)(x-2) = 3x^3 - 8x^2 + 2$$

例 3 已知 $f(-2)=-5$, $f(-1)=-2$, $f(0)=3$, $f(1)=10$, $f(2)=19$, $f(3)=30$, 求 $f(x)$ 关于上述节点组的插值多项式 $p(x)$ 。

解 首先利用均差表计算均差值

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	...
-2	-5	$\frac{-2+5}{-1+2}=3$	$\frac{5-3}{0+2}=1$	$\frac{1-1}{1+2}=0$...
-1	-2	$\frac{3+2}{0+1}=5$	$\frac{7-5}{1+1}=1$	$\frac{1-1}{2+1}=0$...
0	3	$\frac{10-3}{1-0}=7$	$\frac{9-7}{2-0}=1$	$\frac{1-1}{3-0}=0$...
1	10	$\frac{19-10}{2-1}=9$	$\frac{11-9}{3-1}=1$		
2	19	$\frac{30-19}{3-2}=11$			
3	30				

由上面的均差表可知, $f[-2, -1]=3$, $f[-2, -1, 0]=1$, $f[-2, -1, 0, 1]=0$,

故所求的插值多项式为: $p_2(x) = -5 + 3(x+2) + (x+1)(x+2)$
 $= x^2 + 6x + 3$

下面给出均差的性质4° 的证明。

$$\begin{aligned} \text{令} \quad p_k(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_k] (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

即 $p_k(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点组 x_0, x_1, \cdots, x_k 的 k 次插值多项式, 则插值余项

$$r_k(x) = f(x) - p_k(x)$$

至少有 $k+1$ 个互异的零点 x_0, x_1, \cdots, x_k 。反复利用**Rolle**定理, 可知在 $\min(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 和 $\max(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 之间至少有一个 ξ , 使

$$r_k^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - p_k^{(k)}(\xi) = 0$$

又由 $p_k(x)$ 的表达式,

$$p_k^{(k)}(\xi) = k! f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f^{(k)}(\xi)$$

所以

$$= \text{—————}$$

返回本节

4.2.3 插值余项

定理4.2 若 $f(x)$ 在包含着插值节点 x_0, x_1, \cdots, x_n 的区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微, 则对任意 $x \in [a, b]$, 存在与 x 有关的 $\xi (a < \xi < b)$ 使得

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (4-14)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

证 任取 $x \in [a, b]$, 当 $x = x_0, x_1, \cdots, x_n$ 时, 公式(4-14)显然成立。以下设 $x \neq x_i (i=0, 1, \cdots, n)$, 视 x 为一个节点, 据一阶均差的定义,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\ &= f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) \\ &= f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-15)$$

进一步, $k=1,2,\cdots,n$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + f[x, x_0, \cdots, x_k](x - x_k), \quad (4-16)$$

将 (4-15) 递推展开:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\ &= f(x_0) + \{ f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) \} (x - x_0) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \quad p_n(x) \\ &= \cdots = \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \end{aligned}$$

取余项 $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$$= f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$= f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \omega_{n+1}(x), \quad (4-17)$$

由均差的性质4° ,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \min(x, x_0, \cdots, x_n) < \xi < \max(x, x_0, \cdots, x_n)$$

特别地,

$$f[x_0, x_1] = f'(\xi_1), \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f''(\xi_2)}{2!}, \quad \cdots, \quad f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$

Newton公式可写成:

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

其中 $\min(x_0, \cdots, x_n) < \xi_i < \max(x_0, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$

若固定 x_0 , 令 x_1, x_2, \cdots, x_n 一起趋于 x_0 , 那么,

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Newton公式的极限即为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处的**Taylor**级数的前 $n+1$ 项和。

插值余项的应用

证明
$$\sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1, \quad \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i^k = x^k \quad 0 \leq k \leq n$$

首先，由**Lagrange**插值公式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) \cdot f(x_i)$$

可知被插值函数应该为 $f(x) \equiv 1$ 。由插值余项公式，

$$f(x) - p_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^n l_i(x) = \frac{f(\xi)^{(n+1)}}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1。$$

同理，由插值余项公式，

$$x^k - \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i^k = \frac{(x^k)^{(n+1)} \Big|_{x=\xi}}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i^k = x^k$$

那么，
$$\sum_{i=0}^n l_i(0) x_i^k = 0^k = 0。$$

练习 取节点 $x_0=100$, $x_1=121$, $x_2=144$, 求逼近函数 $y = \sqrt{x}$ 的插值多项式 $p_2(x)$, 进一步求出 $y(115)$ 的近似值, 并估计误差。

解:

$$\begin{aligned}\sqrt{115} \approx p_2(115) &= \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} \times 10 + \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} \times 11 \\ &\quad + \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \times 12 \\ &= \frac{(-6) \times (-29)}{(-21)(-44)} \times 10 + \frac{15 \times (-29)}{21 \times (-23)} \times 11 + \frac{15 \times (-6)}{44 \times 23} \times 12 \\ &= \frac{145}{77} + \frac{1595}{161} - \frac{270}{253} = 10.72276 \quad \sqrt{115} = 10.72380 \dots\end{aligned}$$

返回本节

从而

$$r_2(115) = \sqrt{115} - p_2(115) = \frac{(\sqrt{x})^{(3)} \Big|_{x=\zeta}}{(2+1)!} (115-100) \cdot (115-121) \cdot (115-144)$$

$$|\sqrt{115} - p_2(115)| \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{10^5} \times 2070 = \frac{6210}{48 \times 10^5} = 0.00129375$$



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

THE END



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

作者姓名：张宏伟、金光日

工作单位：大连理工大学应用数学系

联系方式：E-mail: hwzhwdl@sohu.com



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第4章 插值与逼近