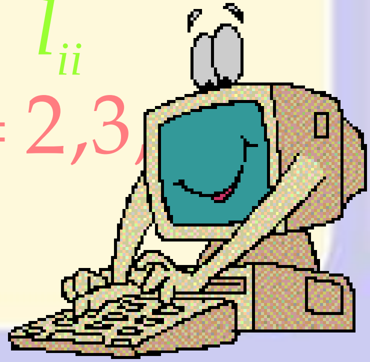
计算方法

第2章 插值法

2.4 Hermite插值法



§ 2.4 Hermite插值法

Newton插值和Lagrange插值虽然构造比较简单，但都存在插值曲线在节点处有尖点，不光滑，插值多项式在节点处不可导等缺点

设$f(x)$在节点$a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$处的函数值为$y_0, y_1, \cdots, y_n$，

设$P(x)$为$f(x)$的在区间$[a,b]$上的具有一阶导数的插值函数

若要求$\boldsymbol{P(x)}$在$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$上具有一阶导数(一阶光滑度)

显然$P(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处必须满足

$$
\begin{aligned}
P(x_i) &= f(x_i) = y_i \qquad & i = 0,1,\cdots,n \\
P'(x_i) &= f'(x_i) = y_i' \qquad & i = 0,1,\cdots,n
\end{aligned}
\qquad \text{--------(1)}
$$

Hermite插值的一般提法如下：

给出函数$f(x)$在$n+1$个互异节点上的函数值及若干导数值，设插值节点为$x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n$。给出

$$f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(m_0)}(x_0)$$

$$f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(m_1)}(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(m_n)}(x_n)$$

其中$m_i(i=0,1,2,\cdots,n)$是正整数。

以上总共有$N=n+1+\sum_{i=1}^{n} m_i$个插值条件，要求构造不低于$N-1$次插值函数H（x）满足以上插值条件。

共$2n+2$个方程　可以解出$2n+2$个待定的系数

因此$P(x)$可以是最高次数为$2n+1$次的多项式

两个节点就可以用$2\times1+1=3$次多项式作为插值函数

一般,*Hermite*插值多项式$H_k(x)$的次数k如果太高会影响收敛性和稳定性(*Runge*现象),因此k不宜太大,仍用分段插值

一、两点三次Hermite插值

先考虑只有两个节点的插值问题

设$f(x)$在节点x_0, x_1处的函数值为y_0, y_1

在节点x_0, x_1处的的一阶导数值为y_0', y_1'

两个节点最高可以用3次$Hermite$多项式$H_3(x)$作为插值函数

$H_3(x)$应满足插值条件

$$H_3(x_0) = y_0 \qquad H_3(x_1) = y_1$$

$$H_3'(x_0) = y_0' \qquad H_3'(x_1) = y_1'$$

$H_3(x)$应用四个插值基函数表示

设$H_3(x)$的插值基函数为$h_i(x), i=0,1,2,3$

$$H_3(x)=a_0h_0(x)+a_1h_1(x)+a_2h_2(x)+a_3h_3(x)$$

希望插值系数与Lagrange插值一样简单

重新假设

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$$H_3'(x)=y_0\alpha_0'(x)+y_1\alpha_1'(x)+y_0'\beta_0'(x)+y_1'\beta_1'(x)$$

其中

$$\boxed{\alpha_0(x_0)=1} \quad \boxed{\alpha_0(x_1)=0} \quad \boxed{\alpha_0'(x_0)=0} \quad \boxed{\alpha_0'(x_1)=0}$$

$$\alpha_1(x_0)=0 \quad \alpha_1(x_1)=1 \quad \alpha_1'(x_0)=0 \quad \alpha_1'(x_1)=0$$

$$\beta_0(x_0)=0 \quad \beta_0(x_1)=0 \quad \beta_0'(x_0)=1 \quad \beta_0'(x_1)=0$$

$$\beta_1(x_0)=0 \quad \beta_1(x_1)=0 \quad \beta_1'(x_0)=0 \quad \beta_1'(x_1)=1$$

可知　x_1是$\alpha_0(x)$的二重零点,即可假设

$$\alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

由　$\alpha_0(x_0)=1 \quad \alpha_0'(x_0)=0$

可得 $\boxed{a=-\dfrac{2}{(x_0-x_1)^3}}$ $\boxed{b=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}+\dfrac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}}$

$$\alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

$$=(x-x_1)^2\left(-\frac{2x}{(x_0-x_1)^3}+\frac{1}{(x_0-x_1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}\right)$$

$$=\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}\left(1+\frac{2x_0}{x_0-x_1}-\frac{2x}{x_0-x_1}\right)$$

$$=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x)$$

Lagrange
插值基函数

即 $$\alpha_0(x)=(1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似可得

$$\alpha_1(x)=(1+2l_0(x))\cdot l_1^2(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\cdot l_0^2(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\cdot l_1^2(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

将以上结果代入

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$

得两个节点的三次Hermite插值公式

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$

$$= y_0(1+2l_1(x)) \cdot l_0^2(x) + y_1(1+2l_0(x)) \cdot l_1^2(x)$$

$$+ y_0'(x-x_0) \cdot l_0^2(x) + y_1'(x-x_1) \cdot l_1^2(x)$$

$$= y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+ y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

二、两点三次Hermite插值的余项

两点三次Hermite插值的误差为

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$$

$$R_3(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)=0$$

$$R_3'(x_i)=f'(x_i)-H_3'(x_i)=0 \qquad i=0,1$$

x_0,x_1均为$R_3(x)$的二重零点,因此可设

$$R_3(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中$K(x)$待定

构造辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$$

均是二重根

$$\varphi(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)-K(x)(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2=0 \quad i=0,1$$

$$\varphi(x)=f(x)-H_3(x)-K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2=0$$

因此$\varphi(t)$至少有5个零点

连续使用4次Rolle定理，可得，

至少存在一点$\xi\in[x_0,x_1]$ 使得 $\varphi^{(4)}(\xi)=0$

即 $\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0$

$$K(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

所以,两点三次Hermite插值的余项为

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \qquad x_0\le\xi\le x_1$$

以上分析都能成立吗?

当$f^{(4)}(x)$在$[x_0,x_1]$上存在且连续时,上述余项公式成立

例1. 已知$f(x)$在节点1,2处的函数值为$f(1)=2,\ f(2)=3$

$f(x)$在节点1,2处的导数值为$f'(1)=0,\ f'(2)=-1$

求$f(x)$的两点三次插值多项式,及$f(x)$在$x=1.5,1.7$处的函数值.

解: $x_0=1, x_1=2 \quad y_0=2, y_1=3 \quad y_0'=0, y_1'=-1$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$$=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$H_3(x) = 2\left(1+2(x-1)\right)(x-2)^2 + 3\left(1-2(x-2)\right)(x-1)^2 - (x-2)(x-1)^2$$

$$= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9$$

$$f(1.5) \approx H_3(1.5) = 2.625$$

$$f(1.7) \approx H_3(1.7) = 2.931$$

作为多项式插值,三次已是较高的次数，次数再高就有可能发生Runge现象,因此，对有n+1节点的插值问题，我们可以使用分段两点三次Hermite插值

三、分段两点三次Hermite插值

设函数$f(x)$在$[a,b]$上的节点x_i上的函数值为y_i，$i=0,1,\cdots,n$ 在节点x_i上的导数值为y_i'，$i=0,1,\cdots,n$

对任意两个相邻的节点$x_k, x_{k+1}, k=0,1,\cdots,n-1$

可构造两点三次Hermite插值多项式

$$H_3^{(k)}(x)=y_k\alpha_0^{(k)}(x)+y_{k+1}\alpha_1^{(k)}(x)+y_k'\beta_0^{(k)}(x)+y_{k+1}'\beta_1^{(k)}(x)$$

$$x\in[x_k,x_{k+1}]\qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

$\alpha_0^{(k)}(x),\alpha_1^{(k)}(x),\beta_0^{(k)}(x),\beta_1^{(k)}(x)$为Hermite插值基函数

其中 $$\alpha_0^{(k)}(x)=\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

$$\alpha_1^{(k)}(x)=\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$$\beta_0^{(k)}(x)=(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 \qquad \beta_1^{(k)}(x)=(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

我们称 $H_3(x)=H_3^{(k)}(x)$ ， $k=0,1,\cdots,n-1$

为分段三次Hermite插值多项式，其余项为

$$|R_3(x)|\le \max_{0\le k\le n-1}\left|R_3^{(k)}(x)\right|=\max_{0\le k\le n-1}\left[\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\right]$$

$$=\frac{M_4}{4!}\max_{0\le k\le n-1}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

即

$$\left|R_3(x)\right| \le \frac{M_4}{4!}\max_{0\le k\le n-1}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

不完全导数条件的*Hermite*插值

例：试构造一个不高于4次的*Hermite*插值多项式

$H_4(x)$,使其满足条件

$$H_4(0)=0, \qquad H_4(1)=1, \qquad H_4(2)=1,$$

$$H_4'(0)=0, \qquad H_4'(1)=1,$$

解：用Lagrange插值基函数法构造$H_4(x)$,设

$$H_4(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_0(x)y_0'+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$\because y_0=y_0'=0$$

$$\therefore H_4(x)=h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$H_4(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_0(x)y_0'+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$h_0(x_0)=1, h_1(x_0)=0, h_2(x_0)=0, \bar{h}_0(x_0)=0, \bar{h}_1(x_0)=0$$

$$h_0(x_1)=0, h_1(x_1)=1, h_2(x_1)=0, \bar{h}_0(x_1)=0, \bar{h}_1(x_1)=0$$

$$h_0(x_2)=0, h_1(x_2)=0, h_2(x_2)=1, \bar{h}_0(x_2)=0, \bar{h}_1(x_2)=0$$

$$H_4'(x)=h_0'(x)y_0+h_1'(x)y_1+h_2'(x)y_2+\bar{h}_0'(x)y_0'+\bar{h}_1'(x)y_1'$$

$$h_0'(x_0)=0, h_1'(x_0)=0, h_2'(x_0)=0, \bar{h}_0'(x_0)=1, \bar{h}_1'(x_0)=0$$

$$h_0'(x_1)=0, h_1'(x_1)=0, h_2'(x_1)=0, \bar{h}_0'(x_1)=0, \bar{h}_1'(x_1)=1$$

(1)$h_1(x)$为四次多项式,且满足

$$h_1(0)=0,h_1(1)=1,h_1(2)=0,h_1'(0)=0,h_1'(1)=0$$

设$h_1(x)=l_1(x)(x-0)(ax+b)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}(x-0)(ax+b)$

由 $h_1(1)=1,h_1'(1)=0$ 得$\begin{cases}a+b=1\\2a+b=0\end{cases}\to\quad a=-1,b=2$

$$\therefore h_1(x)=x^2(x-2)^2$$

(2)$h_2(x)$为四次多项式,且满足

$$h_2(0)=0,h_2(1)=0,h_2(2)=1,h_2'(0)=0,h_2'(1)=0$$

设$h_2(x)=\lambda l_2^2(x)=\lambda(\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)})^2$

由$h_2(2)=1,l_2(2)=1$得$\lambda=1,\therefore h_2(x)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2$

(3)$\bar{h}_1(x)$为四次多项式,且满足

$$\bar{h}_1(0)=0,\bar{h}_1(1)=0,\bar{h}_1(2)=0,\bar{h}_1'(0)=0,\bar{h}_1'(1)=1$$

设$\bar{h}_1(x)=\lambda(x-0)^2(x-1)(x-2)$

由 $\bar{h}_1'(1)=1$ 得 $\lambda=-1$, $\therefore \bar{h}_1(x)=-x^2(x-1)(x-2)$

$$\therefore H_4(x)=h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_1(x)y_1'$$

$$=x^2(x-2)^2+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2-x^2(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

误差余项 $R_4(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2)$

重节点插商

对插商$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$中，若有某些节点相重，

由$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$可定义重节点插商

如：对$f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f[x_0,x]$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\\[2ex]\lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{1!}=\dfrac{f'(x_0)}{1!}=f'(x_0)\end{cases}$$

类似地 $f[x,x]=\lim\limits_{x_0,x_1\to x} f[x_0,x_1]$

$$=\lim_{\xi\to x}\frac{f'(\xi)}{1!}=\frac{f'(x)}{1!}$$

由此可得到一般重节点插商的表达式

$$\forall x \in R^n, f[\underbrace{x, x, \cdots, x}_{k+1\text{个}}] = \lim_{x_0, x_1, \cdots, x_k \to x} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

$$= \lim_{\xi \to x} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

于是有 $f[\underbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}_{n+1\text{个}}] = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

用重节点差商构造*Hermite*插值。

$$f[\underbrace{x,\ x,\cdots,\ x}_{k+1}]=\lim_{x_0,\ x_1,\cdots,\ x_{k-1}\to x} f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]=\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

例 求一个四次插值多项式$H(x)$，使

$x=0$时，$H(0)=-1$，$H'(0)=-2$；

$x=1$时，$H(1)=0$，$H'(1)=10$，$H''(1)=40.$

并写出插值余项的表达式。

解： 由于在$x=0$处有一阶导数值的插值条件，所以它是“二重节点”；而在$x=1$处有直到二阶导数值的插值条件，所以$x=1$是“三重节点”。因此，利用重节点差商公式可以作出下列差商表。

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	−1				
0	−1	−2			
1	0	1	3		
1	0	10	**9**	6	
1	0	10	**40/2！ =20**	11	5

根据*Newton*插值公式，插多项式为

$$H(x) = -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2$$

且插值余项为

$$R(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^2 (x-1)^3, 0 < \xi < 1,$$

其中$f(x)$是被插函数。