大连理工大学试卷答案

课 程 名 称：计算方法　　授课院（系）：应 用 数 学 系

考 试 日 期：2008 年 1 月 11 日

一、填空（每一空 2 分，共 46 分）

1．设 $A=(A_1\quad A_2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ 2，A 的奇异值 $=\sqrt{5}$，1，$\|A\|_2=\sqrt{5}$，$\|A_1\|_1=$ 3。

2．给定 3 个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$ 和 $x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 求得的近似值为：$\frac{1}{4}\left(1+2e^{-0.5}+e^{-1}\right)$，则用复化 Simpson 公式求得的近似值为 $\frac{1}{6}\left(1+4e^{-0.5}+e^{-1}\right)$。

2．设函数 $s(x)\in S_3(-1,0,1)$，若当 $x<-1$ 时，满足 $s(x)=0$，则其可表示为 $s(x)=c_1(x+1)_+^3+c_2x_+^3+c_3(x-1)_+^3$。

4．已知 $f(0)=0,\ f(1)=6,\ f(2)=12$，则 $f[0,1]=$ 6，$f[0,1,2]=$ 0，逼近 $f(x)$ 的 Newton 插值多项式为：$6x$。

5．用于求 $f(x)=x-\sin x=0$ 的根 $x=0$ 的具有平方收敛的 Newton 迭代公式为：$x_{k+1}=x_k+\dfrac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}$。

6．已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准型是：$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$；

7．取 $f(\boldsymbol{x})=\|A\boldsymbol{x}\|_2^2$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{3\times 2}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$，则

$\dfrac{d\ f(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \underline{2\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = 2\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 12x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 \end{cases}}$；

8．求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t) = (t^2 - 1)u + t$， $u(t_0) = u_0$ 的向后（隐式）Euler 法的显式化的格式为： $\underline{u_{n+1} = \dfrac{u_n + ht_{n+1}}{1 + h\left(1 - t_{n+1}^2\right)}}$。

9．设 $a = 211.00112$ 为 x 的近似值，且 $\left|x - a\right| \le 0.5 \times 10^{-2}$，则 a 至少有 $\underline{\quad 5 \quad}$ 位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x} = (3, 4)^T$，化为 $\boldsymbol{y} = (5, 0)^T$ 的 Householder 矩阵为： $\underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$；

11．$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$；

12．用二分法求方程 $f(x) = 2x^3 - 5x - 1 = 0$ 在区间 $[1, 3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 $\underline{(1, 2)}$，进行二步后根所在区间为 $\underline{(1.5, 2)}$。

13．写出如下二阶常微分方程两点边值问题的差分格式为（化成最简分量形式）： $\underline{21u_{i-1} - 40u_i + 19u_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 9}$。

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

其中 $x_i = ih$， $i = 0, 1, \cdots, 10$， $h = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$。

14．设 $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{URU}^H$ 中，$\boldsymbol{R}$ 可取为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ 或 $\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$。

15．设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\,e^{At}}{\mathrm{d}t} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$。#

二、（8 分）根据下列表格给出的数据，求其形如 $s(x)=a+bx$ 的最小二乘拟合曲线。

x_k	−2	−1	0	1	2
y_k	−3.1	−0.9	1.0	3.1	4.9

解：正规方程为：

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \end{pmatrix}$$

即为：$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$，解之，$s(x)=2x+1$。#

三、（12 分）设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并利用得到的上三角矩阵计算出 $\det(\boldsymbol{A})$（要有换元、消元过程）；

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

解：（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

故，$x=(1,1,1)^T$，$\det(\boldsymbol{A})=(-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-32$。

（2）由于 Gauss-Seidel 迭代法的特征值满足：

$$\det\left(\lambda\left(\boldsymbol{D}-L\right)-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3\lambda & \lambda & 0\\ 2\lambda & \lambda & 4\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^{3}-36\lambda^{2}=4\lambda^{2}\left(\lambda-9\right)=0\text{，则}$$

$\lambda\left(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}\right)=0,0,9$，故 $\rho\left(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}\right)=9>1$，从而 Gauss-Seidel 迭代法发散。

又由于 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为：

$$\boldsymbol{B}_{J}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\text{，}\det\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{J}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3 & \lambda & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{3}-9\lambda=\lambda\left(\lambda^{2}-9\right)\text{，则}$$

$\lambda\left(\boldsymbol{B}_{J}\right)=0,3,-3$，故 $\rho\left(\boldsymbol{B}_{J}\right)=3>1$，从而 Jacobi 迭代法发散。

（3）将上述方程组的第一个方程与第二个方程对调后，新的方程组的系数矩阵为：$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 7\end{pmatrix}$是严格对角占有的，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。且新的方程组与原方程组同解。

Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式分别为：

$$\begin{cases}x_{1}^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_{2}^{(k)}\right)\\ x_{2}^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_{1}^{(k)}\right)\\ x_{3}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_{1}^{(k)}-x_{2}^{(k)}\right)\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}x_{1}^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_{2}^{(k)}\right)\\ x_{2}^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_{1}^{(k+)}\right)\\ x_{3}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_{1}^{(k+1)}-x_{2}^{(k+1)}\right)\end{cases}\qquad\#$$

四、(**15 分**)对于如下的数值方法

$$u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{h}{8}\left(3f_{n+2}+8f_{n+1}+f_n\right)$$

(1) 求出其局部截断误差主项，并指出此方法的完整名称；

(2) 证明其收敛性；(3) 求出其绝对稳定区间。

解：(1) 注意，$\alpha_0=-\frac{1}{2},\alpha_1=-\frac{1}{2},\alpha_2=1,\beta_0=\frac{1}{8},\beta_1=1,\beta_2=\frac{3}{8}$，从而

$$\begin{cases} C_0=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0 \\ C_1=2-\frac{1}{2}-(\frac{1}{8}+1+\frac{3}{8})=0 \\ C_2=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+4)-(1+2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_3=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2}+2^3)-\frac{1}{2}(1+2^2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_4=\frac{1}{4!}(-\frac{1}{2}+2^4)-\frac{1}{3!}(1+2^3\times\frac{3}{8})=-\frac{1}{48} \end{cases}$$

故此为**线性隐式二步三阶法**，其局部截断误差主项为：$-\frac{1}{48}h^4u^{(4)}(t_n)$。

(2) 令，$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$，得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$，

满足根条件；又方法阶 $p=3>1$，故此差分格式收敛。

(3) 又对于模型问题：$u'=\mu u\ (\mu<0)$，取$\bar{h}=\mu h$

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{3}{8}\bar{h}\right)\lambda^2-\left(\frac{1}{2}+\bar{h}\right)\lambda-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\bar{h}=\lambda^2-\left(\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)\lambda-\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)=0$$

而要使得 $|\lambda|<1$ 的充要条件为：

$$\left|\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right|<1-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}=1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$$

而 $1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$ 自然成立。现在再由 $\left|\frac{4+8\bar{h}}{8-3\bar{h}}\right|<\frac{4-4\bar{h}}{8-3\bar{h}}$ 得

$$-4+4\bar{h}<4+8\bar{h}<4-4\bar{h}\Leftrightarrow -1+\bar{h}<1+2\bar{h}<1-\bar{h}$$

由 $-1+\bar{h}<1+2\bar{h}$，可推出$-2<\bar{h}<0$，即$\bar{h}\in(-2,0)$。#

五、(**14 分**)

(1) 用 Schimidt 正交化方法，构造$[-1,1]$上权函数$\rho(x)\equiv 1$正交多项式系，$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$；

(2) 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，用 1) 中所得到的$\phi_2(x)$的零点x_0,x_1为插值节点构造$f(x)$的 Largrange 插值多项式$L_1(x)$，并给出余项估计式；

(3) 设要计算积分$\int_{-1}^{1} f(x)dx$, 以$L_1(x)$代替$f(x)$，求出相应的数值求积公式，并求出其代数精度；

(3) 利用 3)的结果给出$\int_0^2 f(x)dx$ 的数值求积公式。

解：(1) $\phi_0(x)=1$，

$$\phi_1(x)=\begin{vmatrix}(1,1) & 1\\ (x,1) & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & x\end{vmatrix}=2x$$

$$\phi_2(x)=\begin{vmatrix}(1,1) & (x,1) & 1\\ (x,1) & (x,x) & x\\ (x,x) & (x,x^2) & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & \frac{2}{3} & x\\ \frac{2}{3} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{4}{3}x_2-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)$$

(2) 令$\phi_2(x)=\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)=0$，得$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$。则

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)=\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}f(x_0)+\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}f(x_1),$$

$$r_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)dx,\approx I_1(f)=\int_{-1}^{1} L_1(x)dx=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，3 次代数精度。

(4) 令$x=t+1$则

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(t+1)dt\approx f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)。\#$$

六、证明题（5 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，证明：对于 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的任何矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\ge 1$。

证明：

（1）由题意，可知矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 奇异。故 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 奇异。反证法，若存在某种范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|A^{-1}B\|<1$，则 $\rho(A^{-1}B)<1$，则可知 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 非奇异，与条件矛盾。

（2）由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，故对 $x\neq 0$，取与向量 x 的范数相容的矩阵范数 $\|\cdot\|$，则由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

得 $$\|\boldsymbol{x}\|=\|-(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\Rightarrow\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\ge 1。\#$$