



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第3章 逐次逼近法

非线性方程的迭代解法



工程实际与科学计算中都遇到大量求解非线性方程的问题。 设非线性方程

$$f(x) = 0 \quad (3-17)$$

求数 α ，使 $f(\alpha) \equiv 0$ ，则称 α 为方程（3-17）的根，或称函数 $f(x)$ 的零点。

常见的非线性方程有，代数方程（二次、三次等）超越方程（三角方程，指数、对数方程等）。



但是我们发现即使是最基本的代数方程，当次数超过4时，在一般情况下就不能用公式表示方程的根，即难于用解析法求出方程的根，对于超越方程那就更难了。

因此，研究用数值方法计算非线性方程的根就显得非常必要。在求根时通常假设非线性方程 $f(x)=0$ 中的函数 是关于 x 的连续函数。

若令

$$y = f(x)$$

则它在平面直角坐标系 $O-xy$ 下的图象为连续曲线，

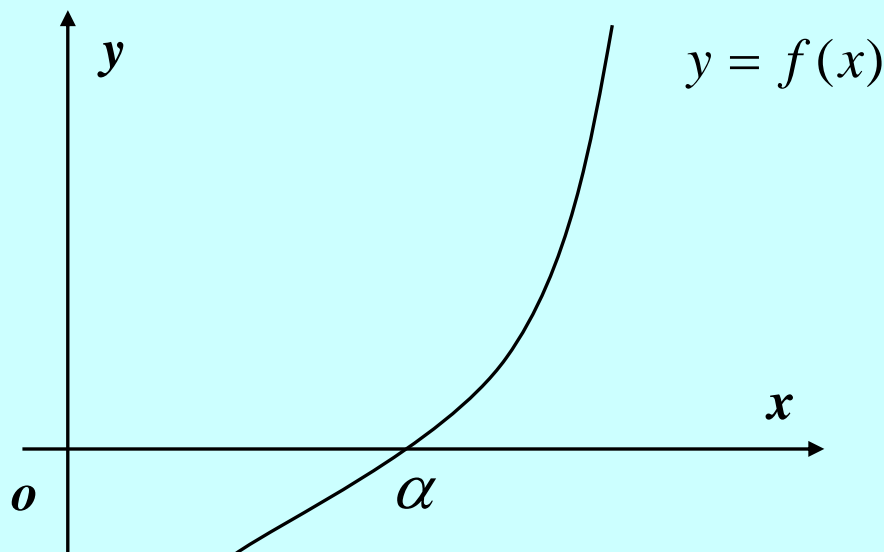


DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

可见, 求 $f(x) = 0$ 的根, 就是求 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点 α



如果 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上仅有一个根, 则称 $[a, b]$ 为方程的**单根区间**; 若方程在 $[a, b]$ 上有多个根, 则称 $[a, b]$ 为方程的**多根区间**。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

方程的单根区间和多根区间统称为**方程的有根区间**。为了研究方便，我们主要研究方程在**单根区间**上的求解方法。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

3.2.1 简单迭代法

首先将方程 $f(x) = 0$ 化为一个与它同解的方程

$$x = \varphi(x) \quad (3-18)$$

其中 $\varphi(x)$ 为 x 的连续函数。即如果数 α 使 $f(\alpha) \equiv 0$, 则也有 $\alpha \equiv \varphi(\alpha)$, 反之, 若 $\alpha \equiv \varphi(\alpha)$, 则也有 $f(\alpha) \equiv 0$ 。



任取一个初始值 x_0 ，代入 (3-18) 的右端，得到 $x_1 = \varphi(x_0)$ 再将 x_1 代入 (3-18) 右端得 $x_2 = \varphi(x_1)$ ，继为之，得到一个数列，其一般表示形式为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-19)$$

通常称 (3-19) 为求解非线性方程的简单迭代法，也称迭代法或迭代过程或迭代格式， $\varphi(x)$ 称为迭代函数， x_k 称第 k 步的迭代值或简称迭代值。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

如果由迭代格式产生的数列收敛，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

则称**迭代法收敛**，否则称**迭代法发散**。若迭代法收敛于 α ，则 α 就是方程 (3-17) 的根，即有 $f(\alpha) \equiv 0$ 。

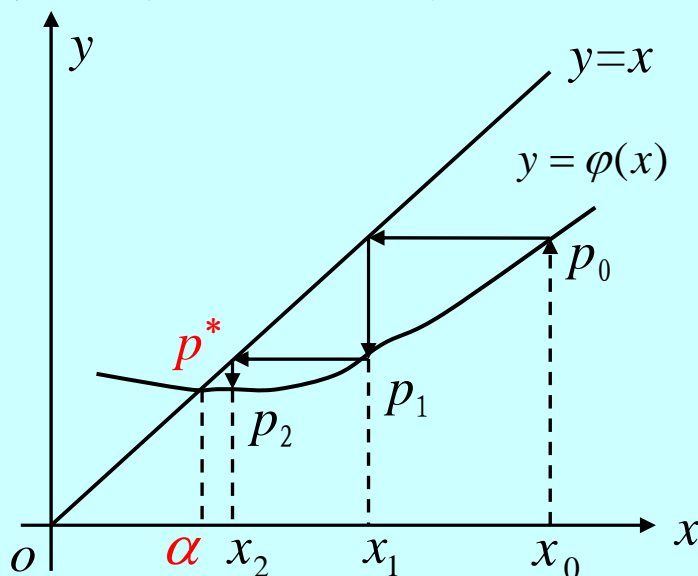


几何直观:

在曲线 $y = \varphi(x)$ 上得到点列 P_1, P_2, \dots , 其横坐标分别为由公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

所确定的迭代值 x_1, x_2, \dots , 若迭代法收敛 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$, 则点列 P_1, P_2, \dots 将越来越逼近所求的交点 $P(\alpha) = P^*$ 。



**例1**用迭代法求 $f(x) = 2x^3 - x - 1 = 0$ 的根。**解****(1)** 化方程为等价方程

$$x = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} = \varphi(x) \quad \text{迭代公式: } x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{x_k+1}{2}} = \varphi(x_k)$$

取初始值 $x_0 = 0$ ，则迭代值为

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.79, \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}} = \sqrt[3]{0.895} \approx 0.964,$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}} \approx 0.994, \dots, \text{显然, 当 } k \rightarrow \infty \text{ 时, } x_k \rightarrow 1.$$

即 $f(1) \equiv 0$ ，即迭代法收敛于1， $x=1$ 就是方程 $f(x)=0$ 的根。



(2) 化 $f(x) = 0$ 为等价方程: $x = 2x^3 - 1 = \varphi(x)$, 同样取初始值 $x_0 = 0$, 其迭代格式为: $x_{k+1} = 2x_k^3 - 1$ 。此时, $x_1 = 2 \times 0 - 1 = -1$, $x_2 = 2(-1)^3 - 1 = -3$, $x_3 = 2(-3)^3 - 1 = -55$, 显然, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $x_k \rightarrow -\infty$, 故迭代法发散。

上述例子表明, 迭代法的收敛与发散, 依赖于迭代函数的构造, 迭代函数构造的方法很多。

例如, $x = x - f(x) = \varphi(x)$ 中的 $\varphi(x)$ 就是 (3-17) 的迭代函数。而且很容易证明 $\varphi(x) = x - k(x)f(x)$ ($k(x) \neq 0$) 也是 (3-17) 的迭代函数。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

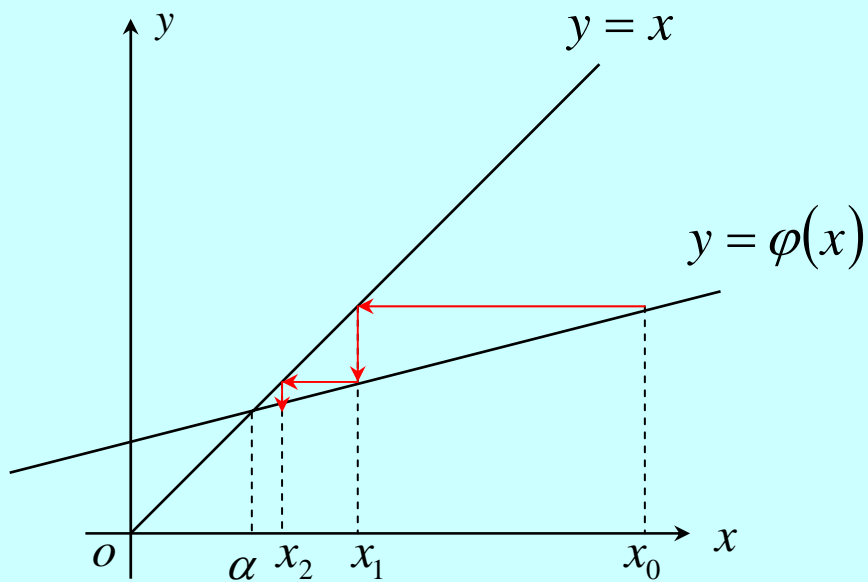
对于同一个方程，由于构造出来的迭代函数不同，有的迭代函数所构成的迭代法收敛，有的迭代函数所构成的迭代法却发散。那么迭代函数须满足什么条件，迭代法才能收敛。



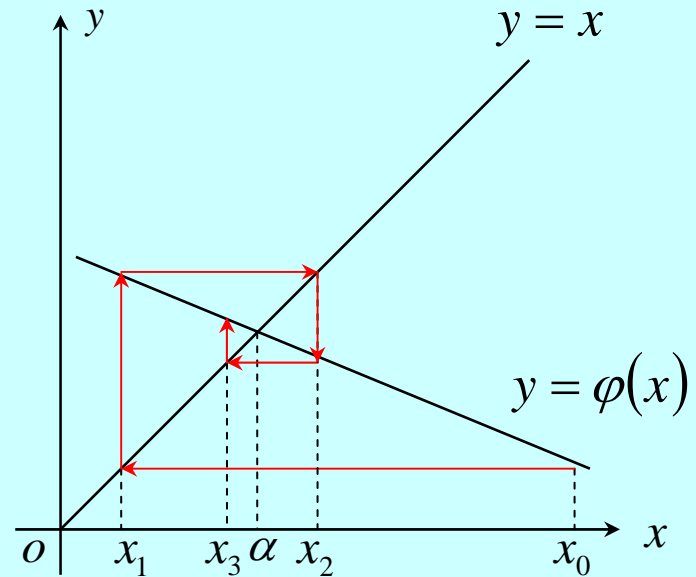
DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



$$0 < \varphi'(x) < 1$$



$$-1 < \varphi'(x) < 0$$

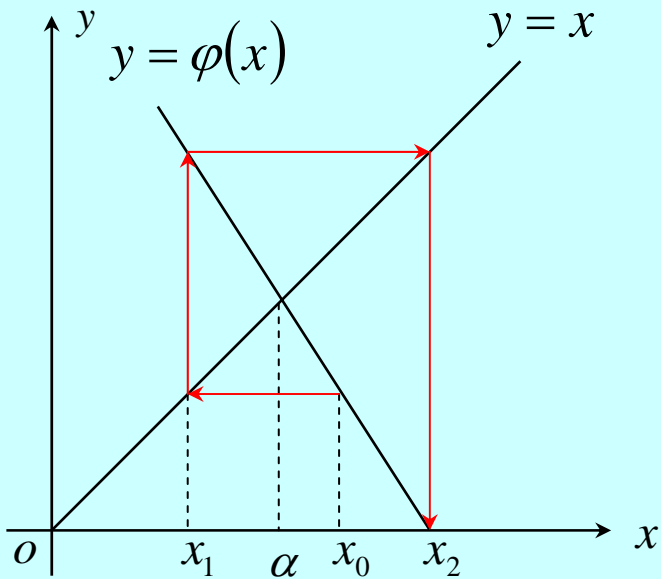
从而, 迭代函数满足条件: $|\varphi'(x)| < 1$ 时, 迭代法收敛。



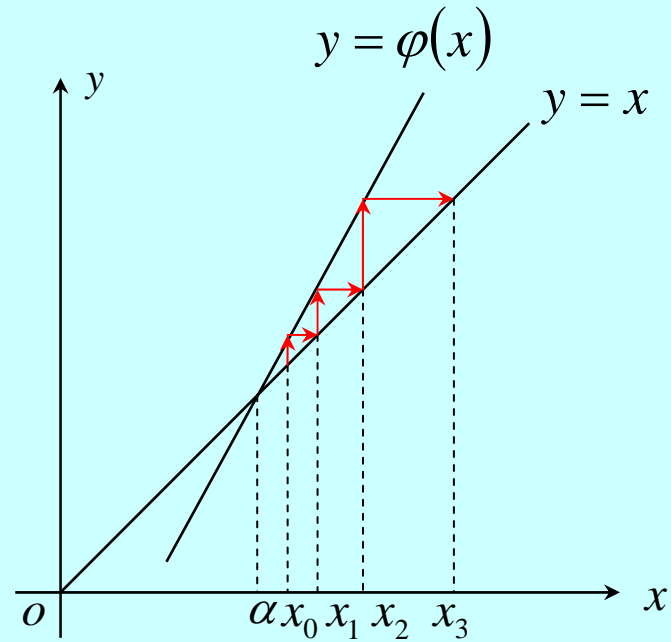
DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



$$\varphi'(x) < -1$$



$$1 < \varphi'(x)$$

从而, 当 $\varphi'(x) < -1$ 或 $1 < \varphi'(x)$ 时, 迭代法发散。

定理3.5 设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

(1) 当 $x \in [a, b]$ 时, $a \leq \varphi(x) \leq b$

(2) 存在正数 $0 < L < 1$, 对任意 $x \in [a, b]$ 均有

$$|\varphi'(x)| \leq L$$

则 $x = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内存在唯一根 α , 且对任意初始值 $x_0 \in [a, b]$, 迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

收敛于 α , 且

$$1. \quad |x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \quad (3-20)$$

$$2. \quad |x_k - \alpha| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \quad (3-21)$$





DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

由于定理3.5的条件一般难于验证，而且在大区间 $[a, b]$ 上，这些条件也不一定都成立，所以在使用迭代法时往往在根 α 的附近进行。只要假定 $\varphi'(x)$ 在 α 的附近连续，且满足

$$|\varphi'(\alpha)| < 1$$

则根据连续函数的性质，一定存在 α 的某个邻域 $S : |x - \alpha| \leq \delta$ ， $\varphi(x)$ 在 S 上满足定理3.5的条件。



故在S中任取初始值 x_0 , 迭代格式

$$x_k = \varphi(x_{k-1})$$

收敛于方程的根 α , 即 $f(\alpha) \equiv 0$, 称这种收敛为局部收敛。

例2 求方程 $x = e^{-x}$ 在 $x = 0.5$ 附近的一个根, 要求精度 $\delta = 10^{-3}$ 。 $(f(x) = xe^x - 1 = 0)$

解

由于 $\varphi'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$, 故当 $x \in [0.5, 0.7]$ 时,

$$|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} \leq 0.61 < 1$$

因此, 迭代格式 $x_{k+1} = e^{-x_k}$, 对于初始值 $x_0 = 0.5$ 是收敛的。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

迭代的数值结果表

k	x_k	$x_{k+1} = e^{-x_k}$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.5	0.60531	
1	0.60531	0.545239	0.061292
2	0.545239	0.579703	0.034464
3	0.579703	0.560065	0.019638
4	0.560065	0.571172	0.011107
5	0.571172	0.564863	0.006309
6	0.564863	0.568439	0.003576
7	0.568439	0.566409	0.002030
8	0.566409	0.567560	0.001151
9	0.567560	0.566907	0.000653
10	0.566907	0.567277	0.000370



从定理3.5的 (3-21) 式可以看出, 当 L 或 $|\varphi'(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的值越小, 迭代过程的收敛速度就越快。但当 $L < 1$ 且接近于1时, 迭代法虽然收敛, 但是收敛速度很慢。为了使收敛速度有定量的判断, 特引入收敛速度的阶的概念, 作为判断迭代法收敛速度的重要标准。

设迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $x_{k+1} \rightarrow \alpha$, 并记

$$e_k = x_k - \alpha \text{ 。$$

**定义3.2**

若存在实数 $p \geq 1$ 和 $c > 0$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c \quad (3-23)$$

则称迭代法是 p 阶收敛。当 $p = 1$ 时, 称线性收敛, 当 $p > 1$ 时称超线性收敛, 当 $p = 2$ 时, 称平方收敛。

p 越大迭代法的收敛速度也越快。但是在实际使用中 p 很难直接确定, 常常采用一些其他的方法来确定收敛的阶。使用Taylor展开式是一种常用的方法。

如果 $\varphi(x)$ 在根 α 处充分光滑（各阶导数存在），
则可对 $\varphi(x)$ 在 α 处进行Taylor展开，得

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \varphi(x_k) = & \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k - \alpha)^2 \\ & + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_k - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - \alpha)^p \end{aligned}$$

如果 $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0$ ，但是 $\varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0$ ，则

$$x_{k+1} - \varphi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha =$$

即

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!}$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\varphi^{(p)}(\alpha)|}{p!}。$$



定理3.6

如果 $x=\varphi(x)$ 中的迭代函数 $\varphi(x)$ 在根 α

附近满足:

(1) $\varphi(x)$ 存在 p 阶导数且连续;

(2) $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0$

则迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛。

例 取迭代函数 $\varphi(x) = x - \alpha(x^2 - 5)$

要使如下迭代法收敛到 $x^* = \sqrt{5}$, 则 α 的取值范围?

且当 α 取何值时, 其至少为平方收敛?

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

解: $|\varphi'(x)| = |1 - 2\alpha x|$, 令

$$|\varphi'(\sqrt{5})| = |1 - 2\alpha\sqrt{5}| < 1, \quad \text{即有}$$

$$-1 < 1 - 2\alpha\sqrt{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

显然, 当 $\alpha \neq \frac{1}{2\sqrt{5}}$ 时, $0 \neq |\varphi'(\sqrt{5})| < 1$ 。故其线性收敛。

而当 $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ 时, $|\varphi'(\sqrt{5})| = 0$ 。故其至少平方收敛。





例3

设 $f(x) \neq 0$ 且 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ 证明由

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x) \quad (3-24)$$

建立的迭代格式至少是平方收敛。

证

根据定理3.6, 只需证明 $\varphi'(\alpha) = 0$ 。因为

$$\varphi'(\alpha) = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right]'_{x=\alpha} = \left[1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right]_{x=\alpha} = \left[\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right]_{x=\alpha} = 0$$

故该迭代法至少是平方收敛。

由 (3-24) 式建立的迭代法就是有名的 **Newton法**。



3.2.2 Newton迭代法及其变形

用迭代法解非线性方程时，如何构造迭代函数是非常重要的，那么怎样构造的迭代函数才能保证迭代法收敛呢？不管非线性方程 $f(x) = 0$ 的形式如何，总可以构造

$$x = \varphi(x) = x - k(x)f(x) \quad (k(x) \neq 0) \quad (3-25)$$

作为方程 (3-17) 求解的迭代函数。因为

$$\varphi'(x) = 1 - k'(x)f(x) - k(x)f'(x)$$

而且 $|\varphi'(x)|$ 在根 α 附近越小，其局部收敛速度越快，



故可令

$$\varphi'(\alpha) = 1 - k'(\alpha)f(\alpha) - k(\alpha)f'(\alpha) = 1 - k(\alpha)f'(\alpha) = 0$$

若 $f'(\alpha) \neq 0$ (即不是的重根), 则

$$k(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

故可取 $k(x) = \frac{1}{f'(x)}$ 代入 (3-25) 式, 得

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$





定理3.7

设方程 $f(x)=0$ 的根为 α ，且 $f'(\alpha) \neq 0$

则迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-26)$$

至少是平方收敛，并称 (3-26) 为 **Newton** 迭代法。

由于 **Newton** 迭代法带有 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ ，使用起来不太方便。为了不求导数，可用导数的近似式替代 $f'(x)$ 。因为

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

将它代入 (3-26) 的 $f'(x_k)$ 中，得



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left[\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right]} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1})$$

则 $x_{k+1} =$ (3-27)

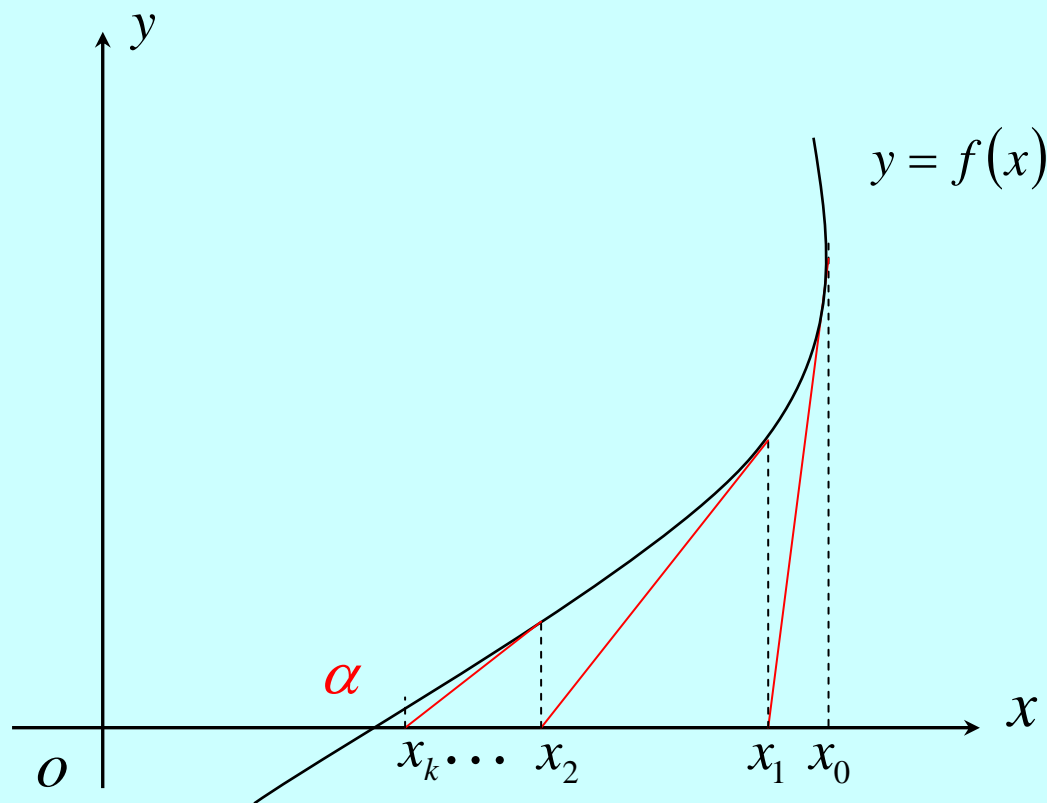
(3-27) 就是弦截法。 由于弦截法采用了导数的近似值，故在Newton法和弦截法都收敛的情况下，弦截法的收敛阶为 $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ ，低于Newton法，为超线性收敛。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



Newton 迭代法的几何意义

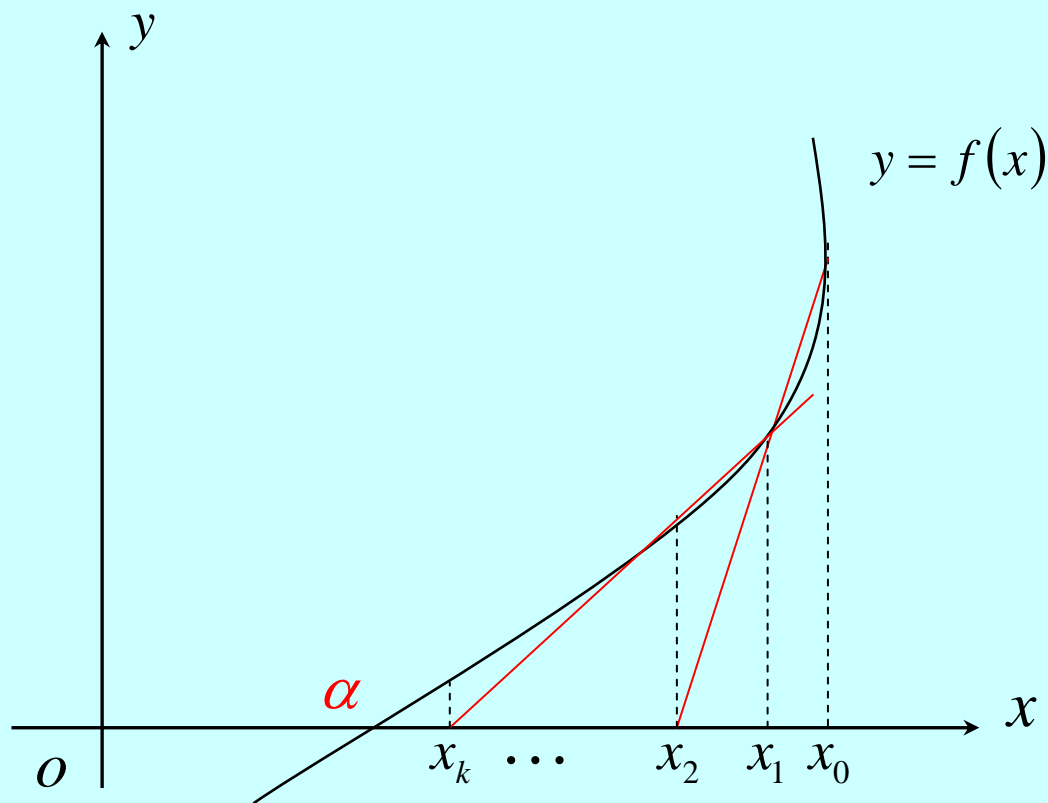
使用Newton迭代格式，就是过曲线上的点 x_k 作切线与 x 轴的交点即为 x_{k+1} ，故Newton法也称切线法。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



快速弦截法（割线法）的几何意义

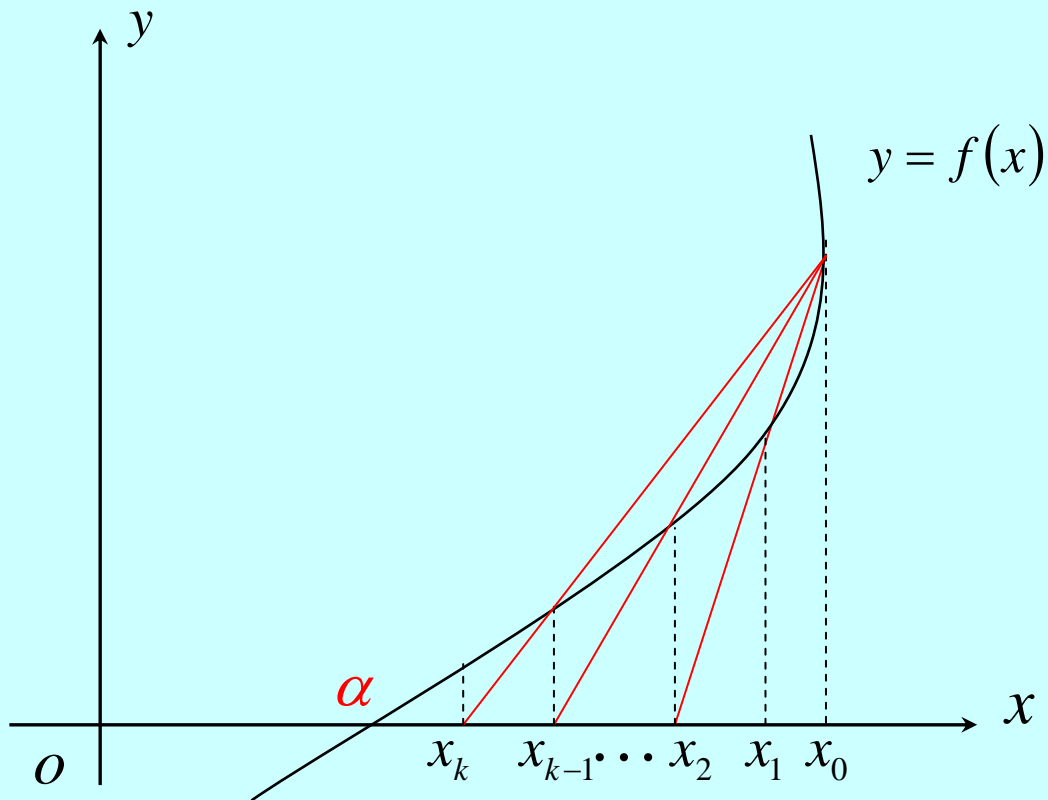
在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦来替代曲线用在轴上截取的值，即弦与 x 轴的交点 x_k 作为 α 的近似值，故称弦截法。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



单步弦截法的几何意义

例4用**Newton**法和弦截法分别计算方程

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

在 $x = 1.5$ 附近的根 α 。**解****(1)** 使用**Newton**法，并取 $x_0 = 1.5$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \quad (3-28)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 1.5 - 1}{3(1.5)^2 - 1} \approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

迭代3次就得到具有6位有效数字的结果。



(2) 使用弦截法, 并取 $x_0 = 1.5, x_1 = 1.4$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 + x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 - 1}$$

$$x_2 = 1.4 - \frac{1.4^3 - 1.4 - 1}{1.4^2 + 1.4 \times 1.5 + 1.5^2 - 1} \approx 1.33522$$

$$x_3 = 1.33522 - \frac{1.33522^3 - 1.33522 - 1}{1.33522^2 + 1.33522 \times 1.4 + 1.4^2 - 1} \approx 1.32541$$

$$x_4 = 1.32541 - \frac{1.32541^3 - 1.32541 - 1}{1.32541^2 + 1.32541 \times 1.4 + 1.4^2 - 1} \approx 1.32476$$

... ..



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

THE END



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



我不知道在别人看来，我是什么样的人；但在我自己看来，我不过就象是一个在海滨玩耍的小孩，为不时发现比寻常更为光滑的一块卵石或比寻常更为美丽的一片贝壳而沾沾自喜，而对于展现在我面前的浩瀚的真理的海洋，却全然没有发现。——**牛顿**

1643年1月4日，在英格兰林肯郡小镇沃尔索浦的一个自耕农家庭里，牛顿诞生了。

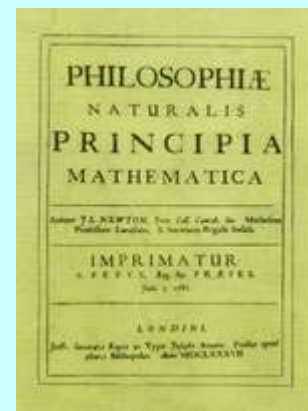
1727年3月20日，伟大艾萨克·牛顿逝世。同其他很多杰出的英国人一样，他被埋葬在了威斯敏斯特教堂。他的墓碑上镌刻着：

让人们欢呼这样一位多么伟大的人类荣耀曾经在世界上存在

伟大的成就之一：建立微积分

伟大的成就之二：对光学的三大贡献

伟大的成就之三：构筑力学大厦





DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



牛顿 (Issac Newton, 1642-1727)，英国数学家、物理学家, 17世纪科学革命的顶峰人物。在力学上牛顿提出作为近代物理学基础的力学三大定律和万有引力定律；他关于白光由色光组成的发现为物理光学奠定了基础；他还是微积分学的创始人之一。他的《自然哲学的数学原理》是近代科学史上的重要著作。

在牛顿的全部科学贡献中，数学成就占有突出的地位。微积分的创立是牛顿最卓越的数学成就，它为近代科学发展提供了最有效的工具，开辟了数学上的一个新纪元。此外，他的数学工作还涉及代数、解析几何、数值分析、概率论和初等数论等众多领域。

1686年，牛顿写成划时代的伟大著作《自然哲学的数学原理》一书（在1687年出版），在这部书中，牛顿从力学的基本概念(质量、动量、惯性、力)和基本定律(运动三定律)出发，运用他所发明的微积分这一锐利的数学工具，不但从数学上论证了万有引力定律，而且把经典力学确立为完整而严密的体系，把天体力学和地面上的物体力学统一起来，实现了物理学史上第一次大的综合。