第7章

常微分方程初值问题数值解法

7.2 线性多步法

7.2　线性多步法

前节所讨论的方法如**Euler**方法、改进**Euler**方法都称为单步法（单步长法）。 因为它们只利用前一个点的信息来计算下一个点，即，只用初始点u_0计算u_1； 一般说来，只用u_n来计算u_{n+1}。

线性单步法一般说来，精度是较低的。为提高精度，我们考虑构造多步法。 所谓“多步法”，即当计算出若干个点之后，用几个已计算出的点来计算下一个点。 在计算公式中的一个主要特征就是，u_{n+1}不仅依赖于u_n ，而且也直接依赖于$u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots$等已经算出的值。它可以大大提高截断误差的阶。

在前面，我们介绍了基于数值积分的特殊的单步法、二步法。例如

显式单步法**Euler**公式： $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$

线性二步法**Milne**公式： $u_{n+2} = u_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$

单步法一般可写成：

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n, t_{n+1}, u_{n+1}; h) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots N-1$$

其中 φ 是依赖于右端的函数 $f(t,u)$。

当取 $\varphi = f(t_n, u_n)$ 时，为**Euler**法；

当 取 $\varphi = f(t_{n+1}, u_{n+1})$ 时，为隐式**Euler**法；

当取 $\varphi = \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$ 时，为梯形法。

线性多步法的一般公式为：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\qquad \alpha_k\neq 0 \tag{7-24}$$

或 $$\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j u_{n+j}-h\beta_j f_{n+j}\right]=0$$（数值解满足的差分方程）

其中 $f_{n+j}=f(t_{n+j},u_{n+j})$, α_j,β_j是常数， α_0 和 β_0 不同时为0。

按（**7-24**）计算u_{n+k}时要用到前面k个已知值 $u_n,u_{n+1},\cdots;u_{n+k-1}$

因此称（**7-24**）为多步法 或 k–步法。

又因为 **(7-24)**关于 $u_{n+j},\ f_{n+j}$ 是线性的，所以称为线性多步法。

为使多步法的计算能够进行，除给定的初值u_0 外，还要知道附加初值$u_1,u_2,\cdots,u_{k-1}$，这可用其它方法计算。 若 $\beta_k=0$ 则称（**7-24**）是显式的; 若 $\beta_k\neq 0$ 则方法（**7-24**）是隐式的。

构造线性多步法有许多不同方式，我们在这里主要介绍两类方法：积分插值法和待定函数法（基于**Taylor**展开）。

7.2.1积分插值法

仍将(1.1)于区间$[t_n, t_{n+1}]$上写成积分形式

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))\,dt \qquad (7\text{-}25)$$

我们用k次**Lagrange**插值多项式

$$L_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^{k} f(t_{n-i}, u(t_{n-i}))\, l_i(t)$$

来近似替代(7-25)中的被积函数，这里$\{t_i\}$为等距的插值节点列，

$h=t_{i+1}-t_i$, 而插值基函数为

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k} \frac{t-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} = \frac{\omega(t)}{\omega'(t_{n-i})(t-t_{n-i})} \qquad \omega(t) = (t-t_n)\cdots(t-t_{n-k})$$

$$i = n, n-1, \cdots, n-k$$

插值节点的不同取法就导致不同的多步法。

（1）**Adams外插法（显式多步法）**

取k+1个节点t_{n-k}, …， t_{n-1}, t_n及函数值$f(t_{n-i}, u(t_{n-i}))$ $i=k$, …, 1, 0

构造区间$[t_n, t_{n+1}]$上逼近$f(t, u(t))$的k次**Lagrange**插值多项式$L_{n,k}(t)$

$$f\left(t, u(t)\right) = L_{n,k}\left(t\right) + r_{n,k}\left(t\right) \qquad (7\text{-}26)$$

其中$r_{n,k}(t)$为插值余项。 代到（2.2）式中得

$$u\left(t_{n+1}\right) = u\left(t_n\right) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,k}\left(t\right) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} r_{n,k}\left(t\right) dt$$

舍去余项

$$R_{n,k} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} r_{n,k}\left(t\right) dt$$

并用u_j代替$u(t_j)$即得

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=0}^{k} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} l_i\left(t\right) dt\right) \cdot f\left(t_{n-i}, u_{n-i}\right)$$

$$= u_n + h \sum_{i=0}^{k} b_{ki} f\left(t_{n-i}, u_{n-i}\right)$$

其中

$$b_{ki}=\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} l_i(t)\,dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{k}\frac{t-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}}\right)dt=\int_0^1\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{k}\frac{\tau-j}{j-i}\,dt$$

且 $t=t_n+\tau h$，$\tau\in[0,1]$。 注： $t-t_{n-j}=t_n+\tau h-t_n+jh=(\tau+j)h$

注意，被插值点$t\in[t_n, t_{n+1}]$不包含在插值节点的决定区间$[t_{n-k}, t_n]$

故此多步法称为**Adams外插法**。

Adams外插公式的系数表

i	0	1	2	3	4
b_{0i}	1				
$2b_{1i}$	3	-1			
$12b_{2i}$	23	-16	5		
$24b_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720b_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Adams外插公式中，几种常用的差分格式：

$$u_{n+1}=u_n+h\,f(t_n,u_n) \qquad k=0$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[3f(t_n,u_n)-f(t_{n-1},u_{n-1})\right] \qquad k=1$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{12}\left[23f(t_n,u_n)-16f(t_{n-1},u_{n-1})+5f(t_{n-2},u_{n-2})\right] \qquad k=2$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{24}\left[55f(t_n,u_n)-59f(t_{n-1},u_{n-1})+37f(t_{n-2},u_{n-2})-9f(t_{n-3},u_{n-3})\right] \qquad k=3$$

它们分别为1阶、2阶、3阶、4阶差分法（格式）。

Adams外插公式的余项为：

$$R_{n,k}=\int_{t_n}^{t_{n+1}} r_{n,k}(t)\,dt=\frac{1}{(k+1)!}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\prod_{i=0}^{k} t-t_{n-i}\right) f^{(k+1)}(\xi(t),u(\xi(t)))\,dt$$

$$=\frac{h^{k+2}}{(k+1)!}\int_0^1\prod_{i=0}^{k}(\tau+i)\;f^{(k+1)}(\xi(\tau),u(\xi(\tau)))\,d\tau=O\left(h^{k+2}\right)$$

（1）**Adams内插法（隐式多步法）**

取$k+2$个节点$t_{n-k}, \cdots, t_n, t_{n+1}$及函数值 $f(t_{n-i+1}, u(t_{n-i+1}))$ $i=0, \cdots, k+1$

构造区间$[t_{n-k}, t_{n+1}]$上逼近 $f(t, u(t))$的$k+1$次L−插值多项式$L_{n,k+1}(t)$

$$f\left(t, u\left(t\right)\right) = L_{n,k+1}\left(t\right) + r_{n,k+1}\left(t\right)$$

其中$r_{n,k+1}(t)$为插值余项。 同理即得

$$u_{n+1} = u_n + h\sum_{i=0}^{k+1} b_{k+1i} f\left(t_{n-i+1}, u_{n-i+1}\right)$$

其中

$$b_{k+1i} = \int_{-1}^{0} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1} \frac{\tau + j}{j - i}\, dt$$

且 $t = t_{n+1} + \tau h$, $\tau \in [-1, 0]$。

注： $t - t_{n-j+1} = t_{n+1} + \tau h - t_n + (j-1)h = (\tau + j)h$

注意，被插值点$t \in [t_n, t_{n+1}]$包含在插值节点的决定区间$[t_{n-k}, t_{n+1}]$故此多步法称为**Adams内插法**。

Adams内插公式的系数表

$(b_{k+1,i})$ i	0	1	2	3	4
b_{0i}	1				
$2b_{1i}$	1	1			
$12b_{2i}$	5	8	−1		
$24b_{3i}$	9	19	−5	1	
$720b_{4i}$	251	646	−264	106	−19

Adams内插公式中，几种常用的差分格式：

$$u_{n+1}=u_n+h\,f\left(t_{n+1},u_{n+1}\right) \qquad k=-1$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[f\left(t_n,u_n\right)+f\left(t_{n+1},u_{n+1}\right)\right] \qquad k=0$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{12}\left[5f\left(t_{n+1},u_{n+1}\right)+8f\left(t_n,u_n\right)-f\left(t_{n-1},u_{n-1}\right)\right] \qquad k=1$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{24}\left[9f\left(t_{n+1},u_{n+1}\right)+19f\left(t_n,u_n\right)-5f\left(t_{n-1},u_{n-1}\right)+f\left(t_{n-2},u_{n-2}\right)\right] \qquad k=2$$

它们分别为1阶、2阶、3阶、4阶差分法（格式）。

Adams外插公式的余项为：

$$R_{n,k+1}=\int_{t_n}^{t_{n+1}}r_{n,k+1}(t)\,dt=\frac{1}{(k+2)!}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\prod_{i=0}^{k+1}t-t_{n-i+1}\right)f^{(k+2)}\Big(\xi(t),u\big(\xi(t)\big)\Big)\,dt$$

$$=\frac{h^{k+3}}{(k+2)!}\int_{-1}^{0}\prod_{i=0}^{k+1}(\tau+i)f^{(k+2)}\Big(\xi(\tau),u\big(\xi(\tau)\big)\Big)\,d\tau \;=O\left(h^{k+3}\right)$$

若将（7-2）中积分区间改为$[t_n, t_{n+2}]$，对(7-2)右端使用

Simpson求积公式，即

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t,u(t))\,\mathrm{d}t \approx \frac{t_{n+2}-t_n}{6}\left[f(t_{n+2},u(t_{n+2}))+4f(t_{n+1},u(t_{n+1}))+f(t_n,u(t_n))\right]$$

分别用u_n替代$u(t_n)$, u_{n+1}替代$u(t_{n+1})$，并记

$$u_{n+2}=u_n+\frac{2h}{6}\left[f(t_{n+2},u_{n+2})+4f(t_{n+1},u_{n+1})+f(t_n,u_n)\right]$$

进一步可写成

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right] \qquad \textbf{(7-27)}$$

其中 $f_{n+2}=f(t_{n+2},u_{n+2})$， $f_{n+1}=f(t_{n+1},u_{n+1})$， $f_n=f(t_n,u_n)$

此为**Milne公式**，为线性二步方法。

Adams外插法和Adams内插法的几点区别：

1）系数小，从而计算中内插法的舍入误差的影响比外插法要小；

2）在同一个误差精度下，内插法比外插法可少算一个已知量值。 这是由于在计算u_{n+1}时，内插法和外插法所用的已知值相同，为k+**1**： u_n， u_{n-1}， $\cdots$, u_{n-k}，但是内插法的局部截断误差为$O\left(h^{k+3}\right)$， 外插法的局部截断误差为$O(h^{k+2})$ 。

3）内插法是隐式格式（稳定性好），外插法是显式格式。

7.2.2 待定系数法（基于Taylor展开式的求解公式）

用数值积分法只能构造一类特殊的多步法，其系数一般只满足：

$$a_k=1, a_{k-\mathbf{m}}=-1 \quad a_l=0，当 l\neq k-\mathbf{m}, k。$$

本节我们将基于**Taylor**展开式来构造出更一般的求解公式。

待定系数法

令 $$L_k[u(t);h]=\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)\right] \qquad （\mathbf{7\text{-}28}）$$

设$u(t)$是初值问题（**7-1**）的解，将$u(t+jh)$和 $u'(t+jh)$

在点t处进行**Taylor**展开,

$$u(t+jh)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(jh)^l}{l!}u^{(l)}(t)=u(t)+\frac{jh}{1!}u'(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(3)}(t)+\cdots$$

$$u'(t+jh)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(jh)^{l-1}}{(l-1)!}u^{(l)}(t)=u'(t)+\frac{jh}{1!}u''(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u^{(3)}(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(4)}(t)+\cdots$$

将上式代入（**7-28**）式，得

$$L_k[u(t);h]=\sum_{j=0}^{k}\left(\alpha_j \qquad\qquad -h\beta_j \qquad\qquad\right)$$

将下式按h的同次幂合并同类项，

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\left[u(t)+\frac{jh}{1!}u'(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(3)}(t)+\cdots\right]$$

$$-\sum_{j=0}^{k}\beta_j h\left[u'(t)+\frac{jh^2}{1!}u''(t)+\frac{j^2h^3}{2!}u'''(t)+\frac{j^3h^4}{3!}u^{(4)}(t)+\cdots\right]$$

得

$$\left(\qquad\right)+\left(j\alpha_j-\qquad\right)h+\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j^2}{2!}\alpha_j-j\beta_j\right)h^2+\cdots$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\right)u(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l!}\sum_{j=0}^{k}j^l\alpha_j-\frac{1}{(l-1)!}\sum_{j=0}^{k}j^{l-1}\beta_j\right)u^{(l)}(t)\,h^l$$

记为 （**7-29**）

$$L_k\left[u(t);h\right]=c_0u(t)+c_1hu'(t)+c_2h^2u''(t)+\cdots+c_ph^pu^{(p)}(t)+c_{p+1}O\left(h^{p+1}\right)$$

其中

$$c_l = \qquad\qquad l=0,1,\cdots,p,\cdots$$

即有

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \\ c_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ c_p = \dfrac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) - \dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \cdots + k^{p-1}\beta_k) \\ \qquad p = 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{7-30}$$

若$u(t)$有p+2次连续微商，则可选取适当k和α_j, β_j使 $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$，而$c_{p+1} \neq 0$，即选$\alpha_j$和$\beta_j$满足

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) - \dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \cdots + k^{p-1}\beta_k) = 0 \\ \qquad p = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

定理（多步法性质定理）多步法（7-24）的下列三个性质等价：

1. $c_0=c_1=\cdots=c_p=0$。
2. 对每个次数$\leqslant p$的多项式，$L[f_p(t);h]=0$。
3. 对一切$u(t)\in\mathbf{C}^{p+1}$, $L[u(t);h]=O(h^{p+1})$。

证明：若性质1成立，则（7-29）式具有形式

$$L_k\left[u(t);h\right]=c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)+\ \cdots+,$$

若对u是次数$\leqslant p$的多项式，则一切$j>p$, $u^{(j)}(t)=0$, 因此，有上式 $L[u(t);h]=0$。故性质1推出性质2。

若性质2成立，若$u(t)\in\mathbf{C}^{p+1}$, 则由**Taylor**定理，我们可记 $u(t)=f_p+r$, 其中f是次数$\leqslant p$的多项式，r是一函数。因为

$$L[f_p(t);h]=0,$$

所以 $L_k\left[u(t);h\right]=L_k\left[r(t);h\right]=\ c_{p+1}h^{p+1}r^{(p+1)}(\xi)=O(h^{p+1})$

故性质2推出性质3。

最后，若性质3成立。则由（7-29）式可知必有

$$c_0=c_1=\cdots=c_p=0。$$

因此，性质3推出性质1。

此时 $L_k\left[u(t);h\right]= c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)+O\left(h^{p+2}\right)$

而 $u'(t) = f(t,u(t))$，则

$$\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j u(t_n+jh)-h\beta_j f(t_n+jh,u(t_n+jh))\right]=R_{n,k}$$

$$R_{n,k} = c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t_n)+O(h^{p+2})$$

舍去余项R_n，并u_{n+j}代替$u(t_n+jh)$，用 f_{n+j}记$f(t_{n+j},u_{n+j})$，就得到线性多步法（**7-24**），其局部截断误差：$R_{n,k}=O\left(h^{p+1}\right)$

$c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)$称为局部截断误差主项；

c_{p+1}称为局部截断误差主项系数。

可以证明其整体截断误差 $\varepsilon_n=O\left(h^p\right)$，故称为$p$阶$k$步法。

因为（7-24）可以相差一个非零常数，所以不妨设 $\alpha_1=1$。当 $\beta_k=0$ 时, u_{n+k}可用u_{n+k-1}, …， u_n直接表示，故称为显式法。反之，当 $\beta_k\neq 0$ 时，求u_{n+k}需解一个方程(一般用迭代法)，称为隐式法。

用待定函数法构造多步法的一个基本要求是选取 α_j,β_j 使局部截断误差的阶尽可能高。

下面我们讨论构造一般线性二步法公式的待定系数法。

$$\alpha_2 u_{n+2}+\alpha_1 u_{n+1}+\alpha_0 u_n=h\left(\beta_2 f_{n+2}+\beta_1 f_{n+1}+\beta_0 f_n\right)$$

考虑一般性，此时有

$k=2,\alpha_2=1$。记 $\alpha_0=a$，其余四个系数 $\alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2$，由

$c_0=c_1=c_2=c_3=0$ 确定，即满足方程:

$$\boxed{c_p=\frac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\frac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k)}$$

$$\begin{cases} c_0=a+\alpha_1+1=0 \\ c_1=\alpha_1+2-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2}(\alpha_1+4)-(\beta_1+2\beta_2)=0 \\ c_3=\dfrac{1}{6}(\alpha_1+8)-\dfrac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2)=0 \end{cases}$$

解之得

$$\alpha_1=-(1+a),\quad \beta_0=-\frac{1}{12}(1+5a),$$

$$\beta_1=\frac{2}{3}(1-a),\quad \beta_2=\frac{1}{12}(5+a),$$

所以一般二步法为

$$u_{n+2}-(1+a)u_{n+1}+au_n=\frac{h}{12}\left[(5+a)f_{n+2}+8(1-a)f_{n+1}-(1+5a)f_n\right]$$

（**7-31**）

由（**7-30**）知道：

$$c_4=\frac{1}{24}(\alpha_1+16)-\frac{1}{6}(\beta_1+8\beta_2)\ =-\frac{1}{24}(1+a),$$

$$c_5=\frac{1}{120}(\alpha_1+32)-\frac{1}{24}(\beta_1+16\beta_2)=-\frac{1}{360}(17+13a),$$

当$a\neq-1$时$c_4\neq0$ ，方法（**7-31**）是三阶二步法。

当$a=-1$时$c_4=0$ ，但$c_5\neq0$，方法（**7-31**）化为：

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}(f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n)$$

这是四阶二步法，是具有最高阶的二步法，称为**Milne**方法。

此外，若取$a=0$, 则（**7-31**）为：

$$u_{n+2}=u_{n+1}+\frac{h}{12}\left(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n\right)$$

此为二步隐式**Adams**方法；

若取a=−5 ，则（**7-31**）为：

$$u_{n+2}+4u_{n+1}-5u_n=2h\left(2f_{n+1}+f_n\right)$$

是显式方法。

用类似的计算过程可获得一些常用的线性多步法的局部截断误差。

当k=1时，梯形法（二阶隐式方法）：

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f_{n+1}+f_n\right)$$

其中$\alpha_1=1, \alpha_0=-1, \ \beta_1=\beta_0=\frac{1}{2}$，从而有， $c_0=1-1=0,$

$$c_1=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0,\ c_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0,\ c_3=\frac{1}{3!}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\neq 0,$$

其局部截断误差为 $R_{n+1}(h)=-\frac{1}{12}h^3u^{(3)}(t_n)+O(h^4)$。

后**Euler**法（一阶隐式方法）

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$$

其中$\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -1, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0$，从而有，

$c_0 = 1-1 = 0$, $c_1 = 1-1 = 0$，$c_2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$。

其局部截断误差为：$R_{n+1}(h) = -\frac{1}{2} h^2 u^{(2)}(t_n) + O(h^3)$。

当 k=3时，三步三阶显式**Adams**方法：

$$u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{h}{12}\left(23 f_{n+2} - 16 f_{n+1} + 5 f_n\right)$$

其中

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = 0, \quad \beta_3 = 0, \beta_2 = \frac{23}{12}, \beta_1 = -\frac{16}{12}, \beta_0 = \frac{5}{12}$$

从而有，

$$c_0=1-1=0\,,\ c_1=2+3-\left(-\frac{5}{12}-\frac{16}{12}+\frac{23}{12}\right)=-2+3-1=0\,,$$

$$c_2=\frac{1}{2}(-4+9)-\left(-\frac{16}{12}+\frac{23}{12}\times 2\right)=\frac{5}{2}-\frac{30}{12}=0\,,$$

$$c_3=\frac{1}{3!}(-8+27)-\frac{1}{2}\left(-\frac{16}{12}+\frac{23}{12}\times 4\right)=\frac{19}{6}-\frac{1}{24}(23\times 4-16)=\frac{9}{10}-\frac{9}{10}=0\,,$$

$$c_4=\frac{1}{4!}\left(-16+3^4\right)-\frac{1}{3!}\left(-\frac{16}{12}+\frac{23+8}{12}\right)=\frac{9}{4!}=\frac{3}{8}\neq 0\text{。}$$

其局部截断误差为：

$$R_{n+3}(h)=\frac{3}{8}h^4u^{(4)}(t_n)+O(h^5)\text{。}$$

三步四阶隐式**Adams**方法：

$$u_{n+3}=u_{n+2}+\frac{h}{24}\left(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n\right)$$

其局部截断误差为： $R_{n+3}(h)=-\frac{19}{720}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$。

三步四阶**Hamming**方法：

$$u_{n+3}=\frac{1}{8}(9u_{n+2}-u_n)+\frac{3h}{8}\left(f_{n+3}+2f_{n+2}-f_{n+1}\right)$$

其局部截断误差为： $R_{n+3}(h)=-\frac{1}{40}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$。

四步四阶显式**Adams**方法：

$$u_{n+4}=u_{n+3}+\frac{h}{24}\left(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n\right)$$

其局部截断误差为： $R_{n+4}(h)=\frac{251}{720}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$

四步四阶显式**Milne**方法： $u_{n+4}=u_n+\frac{4h}{3}\left(2f_{n+3}-f_{n+2}-2f_{n+1}\right)$

其局部截断误差为： $R_{n+4}(h)=\frac{8}{15}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$

7.2.3 预估-校正算法

我们知道线性k步隐式方法虽然具有稳定好、精度高的特点，但是每个隐式方法关于待定的u_{n+k}一般是非线性的，虽然能利用一些迭代法（例如简单迭代法，或**Newton**迭代法）来求解，但若u_{n+k}的初始近似值选得不好，则其计算量会比利用一次显式公式大得多。 我们既要利用隐式方法的稳定性及精确性，又要利用显式公式的简易性，把两者结合起来，做到取长补短。 办法之一就是先用同阶的显式公式确定较好的迭代初值，然后再按隐式方法迭代一两次达到精度要求。这就是所谓的预估-校正算法（格式）。

下面列举几个常见的预估-校正（**PECE**）算法。

例2 **Adams**四阶预估-校正（**PECE**）算法。

取四阶**Adams**外插法为预估算法,四阶**Adams**内插法为校正算法,即

$$\textbf{P:}\quad u_{n+4}^{[0]}-u_{n+3}^{[1]}+\frac{h}{24}\left(55f_{n+3}^{[1]}-59f_{n+2}^{[1]}+37f_{n+1}^{[1]}-9f_{n}^{[1]}\right)$$

$$\textbf{E:}\quad f_{n+4}^{[0]}=f\left(t_{n+4},u_{n+4}^{[0]}\right)$$

$$\textbf{C:}\quad u_{n+4}^{[1]}-u_{n+3}^{[1]}+\frac{h}{24}\left(9f_{n+4}^{[0]}+19f_{n+3}^{[1]}-5f_{n+2}^{[1]}+f_{n}^{[1]}\right)$$

$$\textbf{E:}\quad f_{n+4}^{[1]}=f\left(t_{n+4},u_{n+4}^{[1]}\right)$$

例3 四阶**Milne （PECE）**方法。

P: $$u_{n+4}^{[0]} - u_{n}^{[1]} + \frac{4h}{3}\left(2f_{n+3}^{[1]} - f_{n+2}^{[1]} + 2f_{n+1}^{[1]}\right),$$

E: $$f_{n+4}^{[0]} = f\left(t_{n+4}, u_{n+4}^{[0]}\right),$$

C: $$u_{n+4}^{[1]} - u_{n+2}^{[1]} + \frac{h}{3}\left(f_{n+4}^{[0]} + 4f_{n+3}^{[1]} + f_{n+2}^{[1]}\right),$$

E: $$f_{n+4}^{[1]} = f\left(t_{n+4}, u_{n+4}^{[1]}\right),$$

例4 Hamming（PECE）方法。

P: $$u_{n+4}^{[0]} - u_{n}^{[1]} + \frac{4h}{3}\left(2f_{n+3}^{[1]} - f_{n+2}^{[1]} + 2f_{n+1}^{[1]}\right),$$

E: $$f_{n+4}^{[0]} = f\left(t_{n+4}, u_{n+4}^{[0]}\right),$$

C: $$u_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{8}u_{n+3}^{[1]} + \frac{1}{8}u_{n+1}^{[1]} = \frac{3h}{8}\left(f_{n+4}^{[0]} + 2f_{n+3}^{[1]} - f_{n+2}^{[1]}\right),$$

E: $$f_{n+4}^{[1]} = f\left(t_{n+4}, u_{n+4}^{[1]}\right),$$

以上我们讨论了求解问题（**7-1**），（**7-2**）的单步法和多步法。 对于上述两类方法求近似解（数值解）还应关注三个问题：误差估计、收敛性和稳定性。

具体说，

一、数值方法的局部截断误差和阶

二、在离散点t_n处的数值解u_n是否收敛到精确解$u(t_n)$

三、数值方法的稳定性

对于第一个问题前面我们已经讨论过, 而关于数值方法收敛性问题我们在这里不详细讨论, 只给出一些基本结论性的结果，即：

对单步法（**7-8**）, 当方法的阶$p\geq 1$时, 有整体误差

$$E_n=u(t_n)-u_n=O(h^p)$$

故有 $\lim\limits_{h\to 0} E_n=0$, 因此方法是收敛的。

对于多步法, 若方法是k 步p 阶法, 那么（**7-24**）是一个k阶差分方程, 引入多步法（**7-24**）的第一特征多项式和第二特征多项式:

第一特征多项式

第二特征多项式

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j, \qquad \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

定义7.1 若（**7-24**）的第一特征多项式 $\rho(\lambda)$ 的所有根在单位圆内或圆上($|\lambda|\leqslant 1$), 且位于单位圆周上的根都是单根, 称多步法（**7-24**）满足根条件。

定理7.2 若线性多步法(7-24)的阶$p \geqslant 1$，且满足根条件，则方法是收敛的。

我们可以证明对于常用的数值方法都是满足收敛性条件的。

下面我们着重讨论第三个问题，即**数值方法的稳定性**问题。用多步法计算时，各种因素如初值

$$u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$$

是有误差的，且这些误差将在计算中传递下去。 如果误差积累无限增长，则会歪曲真解，这样的算法是不能用的。

例2 初值问题 $u' = 4tu^{\frac{1}{2}}$，$0 \le t \le 2$； $u(0) = 1$

精确解为 $u(t) = (1+t^2)^2$。考虑二步三阶显式法：

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = 2h(2f_{n+1} + f_n)$$

取步长h=0. 1， 初值u_0=1， 附加值：$u_1 = (1+h^2)^2 (h = 0.1)$。

数值结果表

	精确解	数值解
0	**1.0000000**	**1.0000000**
0.1	**1.0201000**	**1.0201000**
0.2	**1.0816000**	**1.0812000**
0.3	**1.1881000**	**1.1892385**
0.4	**1.3456000**	**1.3388660**
0.5	**1.5625000**	**1.5929935**
…	**…**	**…**
1.0	**4.0000000**	**-68.639804**
1.0	**4.8841000**	**+367.26392**
…	**…**	**…**
2.0	**25.0000000**	**-6.96×10^8**

在开始几步数值解与精确解符合，但在再往后算，数值解的误差则急剧增长，完全歪曲了真解.

通常人们都是通过模型方程来讨论方法的数值稳定性。

模型方程为：

$$u' = \mu u \tag{7-32}$$

而一般形式的一阶微分方程总能化成（**7-32**）的形式。

本书中数值方法的稳定性也是如此。前提是求解好条件问题，其中**Re**（μ）<0。另外，我们也不考虑h→0时方法的渐近稳定性。因为实际计算时，h是固定的。 当某一步u_n有舍入误差时，若以后的计算中不会逐步扩大，称这种稳定性为绝对稳定性。

此后，若不做特殊说明，都是指绝对稳定性 。

例如，对最简单的Euler法

$$u_{n+1}=u_n+hf_n,\qquad n=0,1,2\cdots$$

用其求解模型方程（**7-32**）得到

$$u_{n+1}=u_n+h\mu u_n=(1+\mu h)u_n,\qquad n=0,1,2\cdots$$

当u_n有舍入误差时，其近似解为 $\tilde{u}_n$ ，从而有

$$\tilde{u}_{n+1}=(1+\mu h)\tilde{u}_n$$

取 $\varepsilon_n=u_n-\tilde{u}_n$ ，得到误差传播方程

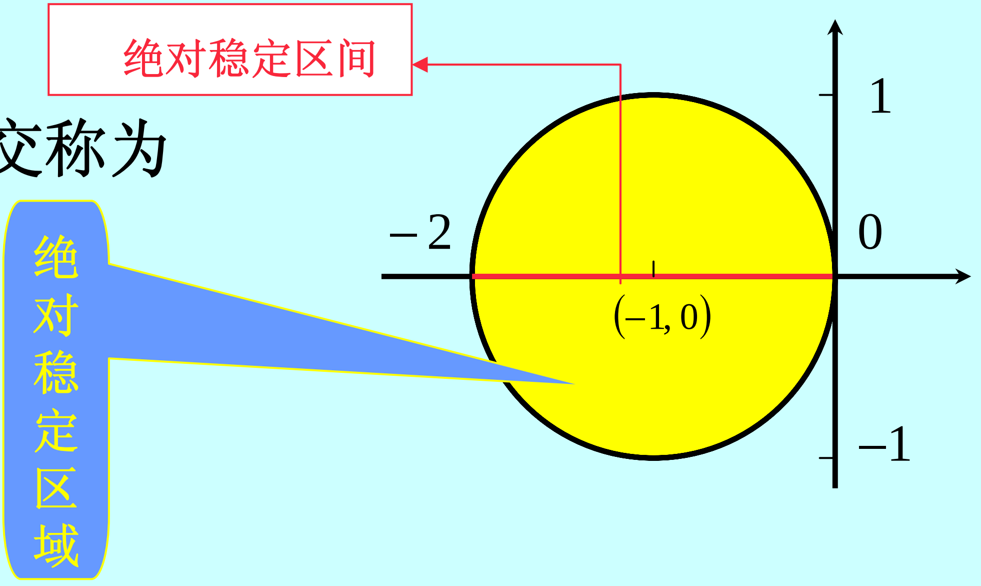
$$\varepsilon_{n+1}=(1+\mu h)\varepsilon_n,$$

记 $\bar{h}=\mu h$，只要 $|1+\bar{h}|<1$，则显式**Euler**方法的解和误差都不会恶性发展，此时方法绝对稳定。 又由于实数$\mu<0$，从 $|1+\bar{h}|<1$, 可得 $-2<\bar{h}<0$。即 $0<h<\dfrac{2}{-\mu}$ 时，(**7-33**）绝对稳定，

若μ为复数，在 $\bar{h}=\mu h$ 的复平面上，则 $|1+\bar{h}|<1$ 表示为以$(-1,0)$为圆心，1为半径的单位圆。

定义7.2 一个数值方法用于求解模型问题（**7-32**），若在平面中的某一区域**D**中方法都是绝对稳定的，而在区域**D**外，方法是不稳定的，则称**D**是方法的**绝对稳定区域**；它与实轴的交称为**绝对稳定区间**。

例如，显式**Euler**方法的**绝对稳定区域、区间。如图**



下面考察**Runge-Kutta**法的绝对稳定性。

根据定义，在 $m=p$阶**Runge-Kutta**法（**7-12**）取 $f=\mu u$，则

$$k_1=\mu u_n$$

$$k_2=\mu(1+b_{21}\mu h)u_n=\mu P_1(\mu h)u_n$$

$$k_3=\mu\left(u_n+h\sum_{j=1}^{2}b_{3j}k_j\right)=\mu\left(1+b_{31}\mu h+b_{32}\mu hP_1(\mu h)\right)u_n=\mu P_2(\mu h)u_n$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$k_m=\mu P_{m-1}(\mu h)u_n$$

（其中$P_i(\lambda)$是 i 次多项式），从而有:

$$u_{n+1}=u_n+\mu h\left(\sum_{i=1}^{m}c_iP_{i-1}(\mu h)\right)u_n=u_n+P_m(\mu h)u_n \qquad n=0,1,\cdots$$

注意，$u' = \mu u$ 的解 $u(t) = e^{\mu u}$ 且 $u^{(j)}(t) = \mu^j u \quad j = 0,1,\cdots,p$

则精确解在tn处的**Tayloy**展开是为：

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2!}u''(t_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_n) + O\left(h^{p+1}\right)$$

$$= \left(1 + \mu h + \frac{(\mu h)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mu h)^p}{p!}\right)u(t_n) + O\left(h^{p+1}\right) = \sum_{k=0}^{p}\frac{(\mu h)^k}{k!}u(t_n) + O\left(h^{p+1}\right)$$

注意， $$u_{n+1} = \left(1 + P_m(\mu h)\right)u_n$$

若为p阶方法，则应有

$$R(h) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = O\left(h^{p+1}\right)$$

$$= \left(\quad - \quad \right)u(t_n) + O(h^{p+1})$$

从而 $1+P_m(\mu h)=\left(\sum\limits_{k=0}^{p}\dfrac{(\mu h)^k}{k!}\right)$

记 $\bar{h}=\mu h$，则可将上式写成

$$u_{n+1}=\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\bar{h}^k}{k!}\right)u_n=\lambda(\bar{h})u_n \qquad n=0,1,\cdots$$

进而误差传播方程为：$\varepsilon_{n+1}=\lambda(\bar{h})\varepsilon_n \quad m=1,2,3,4$

其中 $\lambda(\bar{h})=1+\bar{h}+\dfrac{1}{2!}\bar{h}^2+\cdots+\dfrac{1}{m!}\bar{h}^m.$

注意，当 $m=1,2,3,4$时，解不等式$|\lambda(\bar{h})|<1$就可得显式**Runge-Kutta**法公式绝对稳定域。当$\mu<0$为实数，则得各阶（ m=1, 2, 3, 4 ）的绝对稳定区间(见下表)。

Runge-Kutta法（ m=1, 2, 3, 4 ）的绝对稳定区间表

级	$\lambda(\bar{h})$	绝对稳定区间
一级	$1+\bar{h}$	$(-2,0)$
二级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2$	$(-2,0)$
三级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3$	$(-2.51,0)$
四级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3+\frac{1}{24}\bar{h}^4$	$(-2.78,0)$

现在考察多步法(**7-24**)，将它用于解模型方程(**7-32**)得到***k***阶线性差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = \mu h\sum_{j=0}^{k}\beta_j u_{n+j} \qquad \textbf{(7-33)}$$

若取$\bar{h}=\mu h$，则记（**7-34**）的特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\,\sigma(\lambda)=0 \qquad \textbf{(7-34)}$$

其中

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j \quad \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

由k阶线性差分方程的性质我们可以得到如下结论，若特征方程（**7-34**）的根都在单位圆内(｜ λ ｜<1), 则线性多步法（**7-24**）关于$\bar{h}=\mu h$ 绝对稳定, 其绝对稳定域是复平面 $\bar{h}$ 上的区域:

$$\mathbf{D}=\left\{\bar{h}\,\middle|\,\left|\lambda_j(\bar{h})\right|<1,\quad j=1,2,\cdots,k\right\}$$

例如，对于k=1时，考虑隐式方法中最简单的后退**Euler**法

$$u_{n+1}=u_n+hf(t_{n+1},u_{n+1})\qquad n=0,\ 1,\ \cdots$$

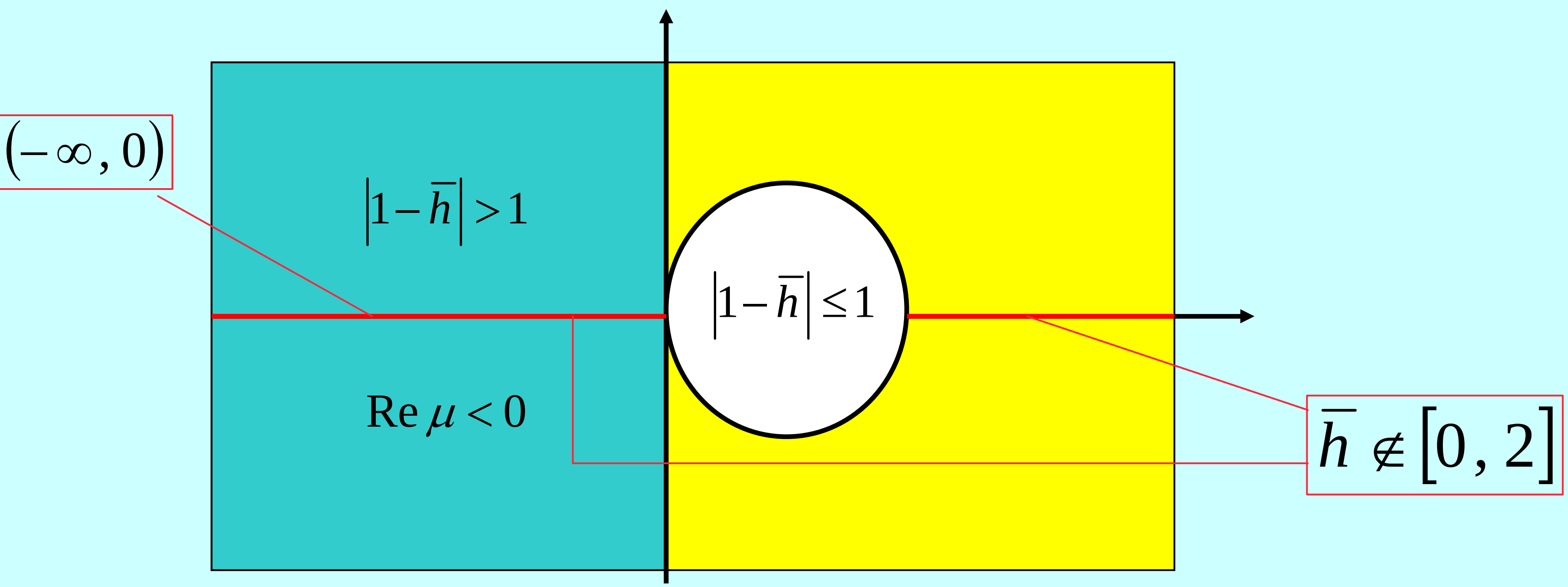
其特征方程为： $\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=(1-\bar{h})\lambda-1=0$

得 $\lambda_1 = \dfrac{1}{1-\bar{h}}$，当 $|1-\bar{h}|>1$ 时，$|\lambda_1|<1$，故 $|1-\bar{h}|>1$ 就是隐式**Euler**法的绝对稳定区域。

它是 $\bar{h}$ 平面上以（1.0）为圆心的单位圆外区域。

当**Re** μ ＜0时，它位于 $\bar{h}$ 平面上*y*轴左侧区域。

当 μ ＜0为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty, 0)$。



又如, 梯形法 $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}h\left(f_{n+1}+f_n\right) \quad n=0,1,\cdots$

其特征方程为：$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{\bar{h}}{2}\right)\lambda-\left(1+\frac{\bar{h}}{2}\right)=0$

其根 $\lambda_1(\bar{h})=\frac{1+\frac{\bar{h}}{2}}{1-\frac{\bar{h}}{2}}$， 当**Re** μ ＜0时, $\left|\frac{1+\frac{\bar{h}}{2}}{1-\frac{\bar{h}}{2}}\right|<1$，故梯形公式

的绝对稳定域是 $\bar{h}$ 平面的左半平面。绝对稳定区间为$(-\infty, 0)$。这样检验绝对稳定性归结为检验特征方程(**7-34**)的根是否在单位圆内（｜ λ ｜＜1)。对此有很多判别法，如**Schur**准则、轨迹法。

k=1～4的隐式**Adams**类方法的绝对稳定区间（μ <0为实数）。

步	阶	绝对稳定区间
1	**2**	**（−∞，0）**
2	**3**	**（−6.0，0）**
3	**4**	**（−3.0，0）**
4	**5**	**（−1.8，0）**

这里我们给出一种简单的、常用的判别法：

实系数二次方程 $\lambda^2-b\lambda-c=0$的根在单位园内的充分必要条件为：

$$|b|<1-c<2 \tag{7-35}$$

例 证明求解一阶常微分方程初值问题：$u' = f(t,u),\ u(0) = u_0$ 的差分格式

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{h}{12}\left(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n\right)$$

收敛并求其局部截断误差主项、绝对稳定区间。

解：由差分格式可知，

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - \lambda, \quad \sigma(\lambda) = \frac{5}{12}\lambda^2 + \frac{8}{12}\lambda - \frac{1}{12},$$

令 $\rho(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = 0$，

得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$。则其特征值满足根条件：$|\lambda|<1$。

注意，$\alpha_0=0$，$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=1$，$\beta_0=-\dfrac{1}{12}$，$\beta_1=\dfrac{8}{12}$，$\beta_2=\dfrac{5}{12}$，

从而

$$\begin{cases} C_0=1-1=0 \\ C_1=2-1-\left(-\dfrac{1}{12}+\dfrac{8}{12}+\dfrac{5}{12}\right)=0 \\ C_2=\dfrac{1}{2}(-1+4)-\dfrac{3}{2}=0 \\ C_3=\dfrac{1}{6}\left(-1+2^3\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{12}+2^2\times\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{7}{6}-\dfrac{7}{6}=0 \\ C_4=\dfrac{1}{4!}\left(-1+2^4\right)-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{8}{12}+2^3\times\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{15}{24}-\dfrac{16}{24}=-\dfrac{1}{24}\neq 0 \end{cases}$$

故此为隐式二步三阶法，其局部截断误差主项为：$-\dfrac{1}{24}h^4u^{(4)}(t_n)$。

由定理7.1 可知，此方法收敛。

又其特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{5}{12}\bar{h}\right)\lambda^2-\left(1+\frac{8}{12}\bar{h}\right)\lambda+\frac{1}{12}\bar{h}=0$$

进一步

$$\lambda^2-\left(\frac{12+8\bar{h}}{12-5\bar{h}}\right)\lambda-\frac{(-\bar{h})}{12-5\bar{h}}=0$$

而使得 ｜λ｜<1，的充要条件为：

$$\left|\frac{12+8\bar{h}}{12-5\bar{h}}\right|<\frac{12-4\bar{h}}{12-5\bar{h}}=1+\frac{\bar{h}}{12-5\bar{h}}<2$$

而 $1+\frac{\bar{h}}{12-5\bar{h}}<2$ 自然成立。 现在再由 $\left|\frac{12+8\bar{h}}{\cancel{12-5\bar{h}}}\right|<\frac{12-4\bar{h}}{\cancel{12-5\bar{h}}}$ 得

$$-12+4\bar{h}<12+8\bar{h}<12-4\bar{h}$$ 而 $12+8\bar{h}<12-4\bar{h}$ 自然成立。

即有 $-3+\bar{h}<3+2\bar{h}$，可得其绝对稳定区间：$-6<\bar{h}<0$。

考虑如下线性**k**步隐式法

$$u_{n+k}-u_n=\frac{hk}{2}\left(f_{n+k}+f_n\right)$$

当**k=1**步时，$u_{n+1}-u_n=\frac{h}{2}\left(f_{n+1}+f_n\right)$

梯形法，一阶方法，绝对稳定区间为$(-\infty, 0)$。

当**k=2**步时，$u_{n+2}-u_n=h\left(f_{n+2}+f_n\right)$

令 $\rho(\lambda)=\lambda^2-1=0$,

得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$。则其特征值满足根条件。

$$u_{n+2}-u_n=h\left(f_{n+2}+f_n\right)$$

注意，$\alpha_0=-1$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$， $\beta_0=1$，$\beta_1=0$， $\beta_2=1$，从而

$$\begin{cases} C_0=1-1=0 \\ C_1=2-(1+1)=0 \\ C_2=\dfrac{1}{2}\times 2^2-2=0 \\ C_3=\dfrac{1}{6}\times 2^3-\dfrac{1}{2}\times 2^2=-\dfrac{2}{3}\neq 0 \end{cases}$$

绝对稳定区间：$(-\infty, 0)$。

故此为隐式二步二阶法, 其局部截断误差主项为：$-\dfrac{2}{3}h^3u^{(3)}(t_n)$。

由定理7.1 可知, 此方法收敛。 又其特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\bar{h}\right)\lambda^2-\left(1+\bar{h}\right)=0$$

$\lambda^2=\dfrac{1+\bar{h}}{1-\bar{h}}$ 而使得 $|\lambda|<1$, 的充要条件为： $\left|\dfrac{1+\bar{h}}{1-\bar{h}}\right|<1$

THE END