考试时间

2014年12月22日（周一）晚上18:00～19:40

答疑时间和地点

时间：2014年12月21日上午9:00～11:30

地点：研教楼204

《计算方法》考试基本不要求内容

没有讲授的内容

第二章 不要求部分：

Gauss列主元消去法； 解三对角矩阵的追赶法。

降低要求部分：

Schur分解只要求掌握关于正规矩阵的**Schur**分解之特点

第五章 不要求部分：

（**1**）分段低次插值；

（**2**）三次样条插值；

降低要求部分：

Hermite插值只要求掌握两点三次公式；

第六章 不要求部分：

（1）**Romberg**算法；

（2）数值求积公式的求积余项。

第七章 不要求部分：

Runge-Kutta方法阶的计算。

一、填空题

（1）已知a=1.234, b=2.345分别是x和y的具有4位有效数字的近似值, 那么,

$$\frac{|x-a|}{|a|} \le \underline{\frac{1}{2}\times 10^{-3}} \qquad |(3x-y)-(3a-b)| \le \underline{2\times 10^{-3}}$$

（2） $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 的QR分解，A= $\underline{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

将向量 $x=(1,4,3)^{\mathrm{T}}$映射成 $y=(1,5,0)^{\mathrm{T}}$的Householder变换矩阵

A= $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}$ $\quad \mathrm{cond}_2(H) = \underline{\mathbf{1}}$

（3）记区间[-1,1]上以ρ(x)=1为权函数的正交多项式序列为

$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$。

则其中的 $\phi_2(x) = \underline{\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)}$　　$\int_{-1}^{1} x \cdot \phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\quad \mathbf{0} \quad}$

（4）数值求解微分方程 $\begin{cases} u' = -2tu^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ 的**Euler**法格式为

$\underline{u_{n+1} = u_n - 2ht_n u_n^2}$ 梯形法格式为 $\underline{u_{n+1} = u_n - h\left(t_n u_n^2 + t_{n+1} u_{n+1}^2\right)}$

(5)已知$f(x)$是一个次数不超过**4**的多项式, 其部分函数值如下表所示:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	-1	1	19	65

则 $f[0,1,2] = \underline{\quad \mathbf{2} \quad}$　$f(x) = \underline{2x^3 - 4x^2 + 1}$　$f[0,1,2,4] = \underline{\quad \mathbf{2} \quad}$

（6）满足下列条件：$H(0)=1, H'(0)=0, H(1)=0, H'(1)=1$

的三次Hermite插值多项式H(x)= $\underline{3x^3-4x^2+1}$ （写成最简形式）

（7）Simpson数值求积公式的代数精度为 $\underline{3}$ 用该公式分别

估算定积分 $I_1=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int_0^1\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)\mathrm{d}x$ 所得近似值分别

记为S和 $\tilde{S}$，则 $S=\underline{\dfrac{5}{24}}$ $I_2-\tilde{S}=$ ________

（8）迭代格式 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$ 对于任意初值 $x_0>0$均收敛于 $\underline{\sqrt[3]{3}}$

其收敛阶p= $\underline{2}$

$$I_2-\tilde{S}=\int_0^1\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)\mathrm{d}x-S\left(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2\right)$$

$$=2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-2S\left(x^4\right)=\frac{2}{5}-\frac{5}{24}=-\frac{1}{60}$$

$$x=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}=\varphi(x) \longrightarrow f(x)=x^3-3=0, \qquad \varphi'\left(\sqrt[3]{3}\right)=0, \varphi''\left(\sqrt[3]{3}\right)\neq 0$$

（9）设矩阵A的奇异值分解 $A = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

则 $\|A\|_2 = \underline{\ 2\ }$ $\|A\|_F = \underline{\ \sqrt{5}\ }$

（10）已知 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ & 0.5 \end{pmatrix}$ $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(t) = t^{10}$ $A^{10} = \underline{\begin{pmatrix} 2^{-10} & 10 \times 2^{-9} \\ 0 & 2^{-10} \end{pmatrix}}$ $e^{A} = \underline{\begin{pmatrix} \sqrt{e} & \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \end{pmatrix}}$ $f(t) = e^{t}$

$e^{At} = \underline{\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & te^{\frac{t}{2}} \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}}$ $\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} & (1+\frac{t}{2})e^{\frac{t}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}}$

(11) 取迭代函数 $\varphi(x)=x-\beta\left(x^2-11\right)$ 要使迭代法收敛到 $\alpha=\sqrt{11}$,

则 β 的取何范围是 $\underline{\quad 0<a<\dfrac{1}{\sqrt{11}} \quad}$ 且其收敛阶为 $\underline{\quad 2和1 \quad}$

(12)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，存在$A$的一个$PA=LU$分解，则

$$\boldsymbol{P}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}\quad \boldsymbol{L}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}\quad \boldsymbol{U}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

。

按某个数值求积公式计算出：$\int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+12+2\sqrt{7}\right)$

该公式的代数精度为 **3** $\frac{1}{3}=\frac{3-1}{6}$，$12=4\sqrt{9}$，$2\sqrt{7}=\sqrt{28}$

设x为精确值，a是其以近似值，且 $\frac{|x-a|}{|a|}\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$，则 $\left|\frac{x^3-a^3}{a^3}\right|\le$ $\frac{3}{2}\times10^{-2}$

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{f(a)}\right|\approx\left|\frac{f'(a)}{f(a)}\right||x-a| \quad \left|\frac{x^3-a^3}{a^3}\right|\approx\left|\frac{\left.(x^3)'\right|_{x=3}}{a^3}\right||x-a|=\frac{3|x-a|}{|a|}\le\frac{3}{2}\times10^{-2}$$

设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0.00\\0.01\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0.01\\0.03\end{pmatrix}$，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty=$ **0.02**；

谱半径 $\rho\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right)=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=$ **0.0003**

已知$\varphi_6(x)$为**[0,1]**上权函数 $\rho(x)=x^2$ 的正交多项式，则有：

$$\int_0^1 \varphi_6(x)\cdot\left(x^6+3x^4+5x^2\right)\mathrm{d}x=0$$ （√）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{i,j}\right)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ ，则有 $\left\|\boldsymbol{A}^T\right\|_1=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ （√）

若$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，则**sin**$\boldsymbol{A}$必可逆。（×）

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$ 与梯形求积公式的代数精度相同 （√）

设$\boldsymbol{A}$复对称矩阵，则存在$\boldsymbol{n}$阶酉阵$\boldsymbol{U}$及上对角阵 $\boldsymbol{D}\in\mathbf{R}^{n\times n}$

使得$\boldsymbol{A=UDU^H}$

（√）

二、设线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

(1) 求系数矩阵的$\boldsymbol{LU}$分解并利用$\boldsymbol{LU}$分解求$\boldsymbol{A}^{-1}$**;**

(2) 利用平方根法（又称**Cholesky**方法）解此方程组；

(3) 构造解此方程组的**G-S**迭代格式，并讨论其收敛性。

解 **(1)** $$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2\left(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

同理得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

(2)的Cholesky分解与*LU*分解相同

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

再由 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) *G-S*迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}\left(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$

收敛性证明　方法一、　因为对称正定，所以**G-S**法收敛.

方法二、　由特征方程

$$|C(\lambda)|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ \lambda & 2\lambda & 2\\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2\lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & 3\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ \lambda & 2\lambda & 2\\ 0 & 0 & 3\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

知 $\rho\left(\boldsymbol{B}_G\right)=\frac{2}{3}<1$。所以**G-S**法收敛

三、求拟合下列数据的最小二乘曲线 $y=ce^{bx}$

x_i	**-1**	**-2**	**0**	**1**	**2**
y_i	$e^{-3.1}$	$e^{-0.9}$	e	$e^{3.1}$	$e^{4.9}$

x_i	-2	-1	0	1	2
$\ln y_i$	$\mathbf{-3.1}$	$\mathbf{-0.9}$	$\mathbf{1.0}$	$\mathbf{3.1}$	4.9

法方程组 $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 20\end{bmatrix}$

解得 ***a*=1, *b*=**2, ***c*=*e***。 最小二乘解 $y=e^{2x+1}$

五、对于解常微分方程初值问题 $\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ 的线性二步法

$$u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{h}{16}\left(7f_{n+2} + 8f_{n+1} - 3f_n\right)$$

(1) 求其局部截断误差**(**必须写出主项**),**并指出该方法是几阶方法;

(2) 讨论收敛性; **(3)**求绝对稳定区间。

解 （**1**） $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0,$

$$c_4 = \frac{1}{4!}\left(-\frac{5}{4} + 2^4\right) - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{16}\left(8 + 2^3 \times 7\right) = \frac{59}{96} - \frac{64}{96} = -\frac{5}{96}$$

局部截断误差 $R_{n+2}(h) = -\frac{5}{96}u^{(4)}(t_n)h^4 + O(h^5)$ 该方法是三阶方法

(2) 由 $\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$ 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}$

知该方法满足根条件**,** 又因其阶$\boldsymbol{p}$**=3≥1,** 所以该二步法收敛。

（3）特征方程 $\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda+\frac{1}{4}=\frac{7\bar{h}}{16}\lambda^2+\frac{8\bar{h}}{16}\lambda-\frac{3\bar{h}}{16}$

$$\left(1-\frac{7\bar{h}}{16}\right)\lambda^2-\left(\frac{5}{4}+\frac{8\bar{h}}{16}\right)\lambda+\left(\frac{1}{4}+\frac{3\bar{h}}{16}\right)=0$$

$$\lambda^2-\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\lambda+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=0$$

以下解不等式 $\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<1+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$

显然 $\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$。再由 $\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}$ 得

$$4\bar{h}-20<20+8\bar{h}<20-4\bar{h}$$

$$-40<4\bar{h},$$

$$-10<\bar{h}<0$$

即此线性二步法的绝对稳定区间为(**−10, 0**)。

六、已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 求A的Jordan 及计算$\sin(tA)$。

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-1&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,\quad \det(I-A)=\begin{vmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}$$

A的代数重复度为: 3;　　A的几何重复度2

A的Jordan标准型 $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 设

$$q(\lambda)=b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0,\quad f(\lambda)=\sin(\lambda t)$$

$$q(1)=b_2+b_1+b_0=f(t)=\sin t$$

$$q'(1)=2b_2+b_1=tf'(t)=t\cos t$$

$$q''(1)=2b_2=t^2f''(t)=-t^2\sin t$$

$$\begin{cases}b_2=-\dfrac{1}{2}t^2\sin t\\ b_1=t\cos t+t^2\sin t\\ b_0=\left(1-\dfrac{1}{2}t^2\right)\sin t-t\cos t\end{cases}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}t^2 \sin t \qquad b_1 = t\cos t + t^2 \sin t \quad b_0 = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 \right)\sin t - t\cos t$$

$$\sin(\boldsymbol{A}t) = b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\boldsymbol{I}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 \sin t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \left(t\cos t + t^2 \sin t\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2}t^2 \right)\sin t - t\cos t\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin(\boldsymbol{A}t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 & 0 \\ -t\cos t & \sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \sin t\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\sin t&0&0\\0&\sin t&t\cos t\\0&0&\sin t\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow x_1-x_3=0\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ 或 }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_2^1 \Longrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{无解}$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_2^2 \Longrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sin t\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\sin t & 0 & 0\\ 0 & \sin t & t\cos t\\ 0 & 0 & \sin t\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sin(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{T}\sin(\boldsymbol{J}t)\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t & 0 & 0\\ 0 & \sin t & t\cos t\\ 0 & 0 & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin t & 0 & 0\\ -t\cos t & \sin t & t\cos t\\ 0 & 0 & \sin t\end{pmatrix}$$

七、设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ 求**A**的奇异值分解,并据此计算 $\|A\|_2$、$\mathrm{cond}_2(A)$。

解 $A^TA=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{det}\left(\lambda I - A^TA\right)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -4\\ -4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-1)=0$

则A^TA的特征值为 $\lambda_1=9,\lambda_2=1\left(\sigma_1=3,\ \sigma_2=1\right)$，$\Sigma=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

下面求对应的标准正交的特征向量(正规直交)，即

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1-x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{matrix} \Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1+x_2=0\\ x_1+x_2=0\end{matrix} \Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ 因**rank(*A*)=2，**故有

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AV\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

故矩阵*A*的满奇异值分解为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = 3, \quad \mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = 3$$

八、 证明题 设$uv \in \mathbf{C}^n$ 若$A=uv^H$, 则 $\|A\|_2=\|u\|_2\|v\|_2$

证明，由于 $\|A\|_2^2=\rho\left(A^H A\right)$ 而$A=uv^H$, 则

$$A^H A=vu^H uv^H=\left(u^H u\right)vv^H$$

注意到，矩阵vv^H的谱半径为：$v^H v$ 从而

$$\|A\|_2^2=\rho\left(A^H A\right)=\left(u^H u\right)\left(v^H v\right)$$

又 $\|u\|_2^2=u^H u$, $\|v\|_2^2=v^H v$

故证得 $\|A\|_2=\|u\|_2\|v\|_2$