第5章 插值与逼近

5.3 三次样条插值

多项式Lagrange插值:

整体性强, 光滑性好 (无穷阶连续), 但不一定收敛;

分段Lagrange多项式插值:

局部性好, 光滑性差 (C^0连续), 收敛性保证;

分段 Hermite多项式插值:

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证, 但需要导数值信息;

样条插值:（样条函数—满足一定光滑性的分段多项式）。

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证, 只需要函数值信息。

样条函数是一个重要的逼近工具，在插值、数值微分、曲线拟合等方面有着广泛的应用。

定义5.3 对区间(−∞，+∞)的一个分割：

$$\Delta: -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty,$$

若分段函数$s(x)$满足条件：

（1）在每个区间$(-\infty, x_1]$，$[x_j, x_{j+1}]$，（$j=1, 2, \cdots, n-1$）和$[x_n, +\infty)$上，$s(x)$是一个次数不超过m的实系数代数多项式；

（2）$s(x)$在对区间$(-\infty, +\infty)$上具有直至$m-1$阶的连续微商，

则称$y=s(x)$为对应于分割Δ的m次样条函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为样条节点，以$x_1, x_2, \ldots, x_n$为节点的m次样条函数的全体记为：

$$S_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

m=1时，样条函数是分段线性函数；

m=2时，是分段1阶连续的二次函数

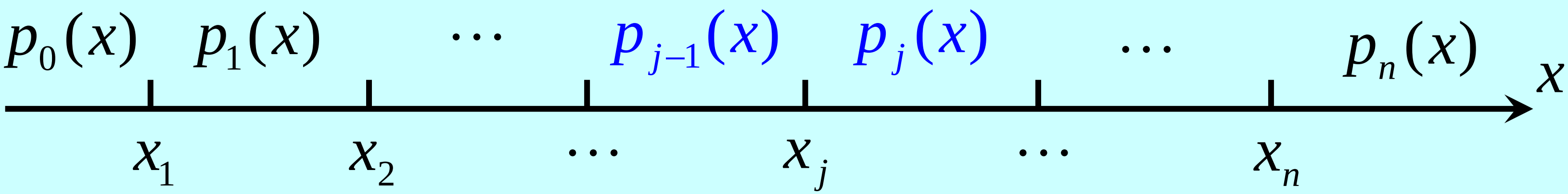
显然，m次样条函数比一般的m次分段插值多项式的光滑性好。

问题：如何判断一个分段的多项式函数是样条函数？

设

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x), & x\le x_1 \\ p_1(x), & x_1\le x\le x_2 \\ \vdots & \\ p_j(x), & x_j\le x\le x_{j+1} \\ \vdots & \\ p_n(x), & x_n\le x \end{cases} \qquad p_j(x)\in \boldsymbol{P}_m\,(j=0,1,\ldots,n)$$

即有



由m次样条函数的定义，可知

$$p_{j-1}^{(i)}(x_j) = p_j^{(i)}(x_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

令

$$q_j(x) = p_j(x) - p_{j-1}(x) \in \mathbf{P}_m$$

可知

$$q_j^{(i)}(x_j) = p_{j-1}^{(i)}\left(x_j\right) - p_j^{(i)}\left(x_j\right) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

即，x_j是$q(x)$的 m重根，从而有

$$q_j(x) = c_j(x - x_j)^m$$

光滑因子

进一步可得，

$$p_j(x) = p_{j-1}(x) + q_j(x) = \qquad + \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

对于满足上述性质的如下形式的分段m次多项式**s(x)**，

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x), & x\le x_1 \\ p_1(x), & x_1\le x\le x_2 \\ \vdots & \\ p_j(x), & x_j\le x\le x_{j+1} \\ \vdots & \\ p_n(x), & x_n\le x \end{cases} \qquad p_j(x)\in \boldsymbol{P}_m(j=0,1,\dots,n)$$

s(x)是m次样条的充要条件应为

$$p_0(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

$$p_1(x)=p_0(x)+c_1(x-x_1)^m,$$

$$p_2(x)=p_1(x)+c_2(x-x_2)^m=p_0(x)+c_1(x-x_1)^m+c_2(x-x_2)^m,$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

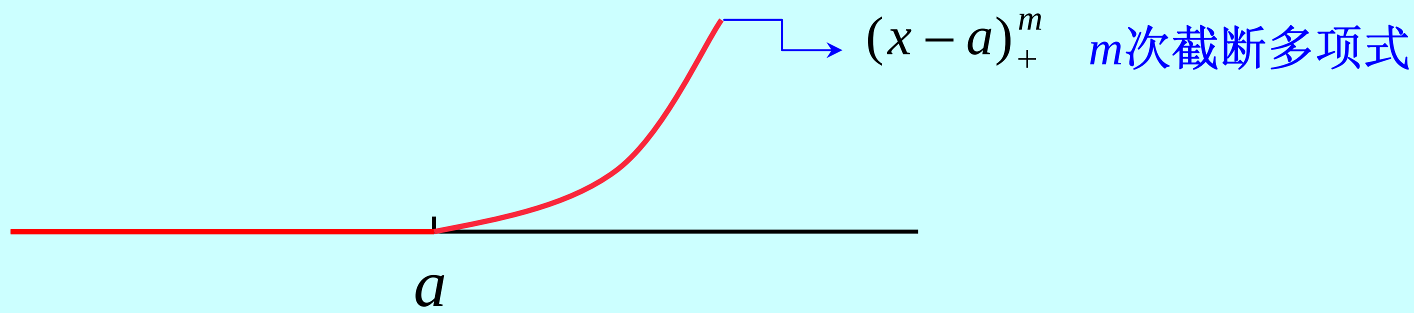
$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+c_n(x-x_n)^m=p_0(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)^m$$

为了便于表示分段信息, 引进截断多项式:

$$(x-a)_+^m = \begin{cases} (x-a)^m, & x \ge a, \\ 0, & x < a, \end{cases} \tag{5-30}$$

易见 $(x-a)_+^m \in \mathbf{C}^{m\text{-}1}(-\infty, +\infty)$ 类的分段m次多项式。

$\mathbf{C}^{m\text{-}1}(-\infty, +\infty)$表示$(-\infty,+\infty)$上$m-1$次连续可微函数的集合。



定理5.5 任意$s(x)\in \mathbf{S}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$均可唯一地表示为

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j (x - x_j)_+^m, \quad -\infty < x < +\infty \qquad \textbf{(4-31)}$$

其中$p_m(x)\in \mathbf{P}_m$，$c_j(j=1, 2, \cdots, n)$为实数。

定理5.6 为使$s(x)\in \mathbf{S}_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，必须且只须存在$p_m(x)\in \mathbf{P}_m$和$n$个实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j (x - x_j)_+^m, \quad -\infty < x < +\infty$$

结论

$$S_m(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \operatorname{span}\left\{1, x, \cdots, x^m, (x-x_1)_+^m, (x-x_2)_+^m, \cdots, (x-x_n)_+^m\right\}$$

m次样条空间的维数：$\dim S_m(x_1, x_2,\ldots, x_n) = m+n+1$

例**1** 验证分片多项式是三次样条函数。

$$S(x)=\begin{cases}1-2x & x<-3\\ 28+25x+9x^2+x^3 & -3\le x<-1\\ 26+19x+3x^2-x^3 & -1\le x<0\\ 26+19x+3x^2 & 0\le x\end{cases}$$

解 利用上面的定理**(**光滑因子**)**验证.

$$-\left[\qquad\qquad\right]=(x+3)^3,$$

$$-\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]=-2(x+1)^3,$$

$$-\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]=x^3,$$

所以由定理**4.5**可知该函数为三次样条函数.

例2，设

$$S(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x<1 \\ ax^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

是以0，1，2为节点的三次样条函数，则a=____, b=____, c=____。

解： 1）**由** $ax^3+bx^2+cx-1-\left(x^3+x^2\right)=\left(x-1\right)^3$，即

$$\left(a-1\right)x^3+\left(b-1\right)x^2+cx-1=x^3-3x^2+3x-1$$

比较$1, x, x^2, x^3$的系数，可得

$$a-1=1\Rightarrow a=2,\quad b-1=-3\Rightarrow b=-2,\quad c=3。$$

2）由连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)\Big|_{x=1}$$ 即，

$$a+b+c-1=1^3+1^2=2\ \Rightarrow a+b+c=3$$

由一阶导数连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)'\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)'\Big|_{x=1}$$ 即，

$$\left(3ax^2+2bx\ \ +c\right)\Big|_{x=1}=\left(3x^2+2x\right)\Big|_{x=1}$$

$$3a+2b+c\ =3+2\ \Rightarrow 3a+2b+c=5$$

由二阶导数连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)''\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)''\Big|_{x=1}$$ 即，

$$\left(6ax+2bx\right)\Big|_{x=1}=\left(6x+2\right)\Big|_{x=1}\qquad 6a+2b\ =6+2\ \ \Rightarrow 6a+2b=8$$

从而，$a+b+c=3\quad 3a+2b+c=5\quad 6a+2b=8$

$$\Rightarrow a=2,\ b=-2,\ c=3。$$

5.3.2 三次样条插值及其收敛性

有些实际问题中提出的插值问题，要求插值曲线具有较高的光滑性和几何光顺性。例如，在船体放样时，模线员用压铁压住弹性均匀的窄木条（样条）的两端，强迫样条通过一组已知离散的型值点。当样条取得合适的形状后，再沿着样条画出所需的曲线。在小挠度的情形下，该曲线可以由三次样条函数表示。由于样条函数插值不仅具有较好的收敛性和稳定性，而且其光滑性也较高，因此，样条函数成为了重要的插值工具。

其中应用较多的是三次样条插值。

设给定节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 及节点上的函数值 $f(x_i)=y_i$ $i=0,1,\cdots,n$。三次样条插值问题就是构造 $s(x)\in \mathbf{S}_3(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 使

样条节点为插值节点

$$s(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \qquad (5\text{-}33)$$

三次样条插值问题实际上是一种特殊类型的分段三次多项式插值问题：

1）它只在插值区间端点比**Lagarnge**多项式插值问题多两个边界条件，但却在内点处有一阶、二阶连续的导函数，从而要比**Lagarnge**插值更光滑。

2）分段**Hermite**三次多项式插值问题，只有被插值函数在所有插值节点处的函数值和导数值都已知时才能使用，而且在内点处有二阶导函数一般不连续。

下面我们讨论三次样条插值多项式$s_3(\boldsymbol{x})$的构造。

一般来讲，构造三次样条插值多项式$s_3(x)$ ，若用待定系数法，

可写成 $S_3(x)=a_i x^3+b_i x^2+c_i x+d_i \quad x\in[x_i, x_{i+1}] \quad i=0,1,\cdots,n-1$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i为待定系数，共有$4n$个。按定义$s_3(x)$应满足：

（1）插值条件$n+1$个： $S(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$

连续性条件$n-1$个：$S(x_i-0)=S(x_i+0) \quad i=0,1,\cdots,n-1$

（2）在内点一阶导数连续性条件$n-1$个：

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \qquad i=0,1,\cdots,n-1$$

（3）在内点二阶导数连续性条件$n-1$个：

$$S''(x_i-0)=S''(x_i+0) \qquad i=0,1,\cdots,n-1$$

共计个$4n-2$条件。

因此要确定$4n$个系数，尚需要另外附加2个条件。

通常有如下三种类型的附加条件，称为边界条件：

第一种：固支条件（第一类边界条件）

$$S'(x_0)=f'(x_0),\quad S'(x_n)=f'(x_n)$$

第二种： $S''(x_0)=f''(x_0)$， $S''(x_n)=f''(x_n)$， 特别地，

$f''(x_0)=f''(x_n)=0$， 称为自然边界条件；

第三种：周期条件

$$S(x_0-0)=S(x_n+0),\quad S'(x_0-0)=S'(x_n+0),\quad S''(x_0-0)=S''(x_n+0),$$

已知 $f(x_0)=f(x_n)$ 确定的周期函数。

例3，已知 $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1,$ **求** $f(x)$ **在区间** $[-1, 1]$ **上的**三次自然样条插值多项式。

解： 这里n=2区间$[-1, 1]$分成两个子区间，故设

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & x\in[-1,0] \\ s_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & x\in[0,1] \end{cases}$$

且 $s_0'(x)=3a_0x^2+2b_0x+c_0$, $s_0''(x)=6a_0x+2b_0$

$s_1'(x)=3a_1x^2+2b_1x+c_1$, $s_1''(x)=6a_1x+2b_1$

由插值条件和连续性条件：$s_0(-1)=1$, $s_0(0)=s_1(0)=0$, $s_1(1)=1$

由在内点一阶、二阶导数连续性条件：$s_0'(0)=s_1'(0)$, $s_0''(0)=s_1''(0)$

以及由自然边界条件： $s_0''(-1)=0$, $s_1''(1)=0$ 。

得到如下8×8阶线性方程组：

$$-a_0+b_0-c_0+d_0=1,\ -6a_0+2b_0=0,\ \ b_0-b_1=0,\ \ d_0=0$$

$$a_1+b_1+c_1+d_1=1,\ \ 6a_1+2b_1=0,\ \ \ c_0-c_1=0,\ \ d_1=0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & & & & \\ -6 & 2 & & & & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 6 & 2 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解之，$a_0=-a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_0=b_1=\dfrac{3}{2}$，$c_0=c_1=b_0=b_1=0$。

代入

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & x\in[-1,0] \\ s_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & x\in[0,1] \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的三次自然样条插值多项式为：

$$S(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[-1,0] \\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[0,1] \end{cases}$$

待定系数法过于繁琐，当 n 充分大时，计算量过大，不实用。

下面我们介绍一种构造三次样条（**3-Spline**）插值多项式的三转角方程构造法。此方法的特点是：只需求解一个不超过n+1阶线性方程组，而且力学意义明显。 设

$$s'(x_k)=m_k\ \ (k=0,1,\cdots,n),\ h_k=x_{k+1}-x_k\quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

因为$s(x)$在每一个子区间$[x_k,x_{k+1}]$上都是三次多项式，因此，在$[x_0,\ x_n]$上可以将$s(x)$表示成分段两点三次**Hermite**插值多项式。

由**5.2**中的例**6**， 当$x\in[x_k,x_{k+1}]$时，

$$s(x)=s(x_k)\underbrace{\left(1-2\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)^2}_{L_{10}(x)}+m_k(x-x_k)\overbrace{\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2}^{L_{11}(x)}$$

$$+s(x_{k+1})\underbrace{\left(1-2\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2}_{L_{20}(x)}+m_{k+1}(x-x_{k+1})\underbrace{\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2}_{L_{21}(x)}$$

(5-34)

即 $h_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$

$$s(x) = \frac{h_k + 2(x - x_k)}{h_k^3}(x - x_{k+1})^2 y_k + \frac{h_k - 2(x - x_{k+1})}{h_k^3}(x - x_k)^2 y_{k+1}$$

$$+ \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})^2}{h_k^2} m_k + \frac{(x - x_{k+1})(x - x_k)^2}{h_k^2} m_{k+1}\,。 \qquad (5\text{-}35)$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-1$$

*n*个方程

n+**1**个未知量

因此，求$s(x)$的关键在于确定n+1个常数$m_0, m_1, \ldots, m_n$。

为此，对$s(x)$求二阶导数，

$$\left(\frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})^2}{h_k^2} m_k\right)'' = \left(\frac{(x - x_{k+1})^2 + 2(x - x_k)(x - x_{k+1})}{h_k^2} m_k\right)' = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k$$

得

$$s''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1}$$

$$+ \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \qquad (5\text{-}36)$$

于是，对于 $x\in[x_k, x_{k+1}]$,

$$\lim_{x\to x_k^+} s''(x)=\frac{6x_k-2x_k-4x_{k+1}}{h_k^2}m_k+\frac{6x_k-4x_k-2x_{k+1}}{h_k^2}m_{k+1}+\frac{6(x_k+x_{k+1}-2x_k)}{h_k^3}(y_{k+1}-y_k),$$

$$\lim_{x\to x_k^+} s''(x)=-\frac{4}{h_k}m_k-\frac{2}{h_k}m_{k+1}+\frac{6}{h_k^2}(y_{k+1}-y_k)。\qquad (5\text{-}37)$$

在**(5-36)**中以$k-1$取代k, 便得$s(x)$在$[x_{k-1}, x_k]$上的表达式, 并求得

$$s''(x)=\frac{6x-2x_{k-1}-4x_k}{h_{k-1}^2}m_{k-1}+\frac{6x-4x_{k-1}-2x_k}{h_{k-1}^2}m_k+\frac{6(x_{k-1}+x_k-2x)}{h_{k-1}^3}(y_k-y_{k-1}),$$

$$\lim_{x\to x_k^-} s''(x)=\frac{2}{h_{k-1}}m_{k-1}+\frac{4}{h_{k-1}}m_k-\frac{6}{h_{k-1}^2}(y_k-y_{k-1})。\qquad (5\text{-}38)$$

由 $\lim\limits_{x\to x_k^+} s''(x)=\lim\limits_{x\to x_k^-} s''(x)\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$ 得

=

$$\frac{1}{h_{k-1}}m_{k-1}+2\left(\frac{1}{h_{k-1}}+\frac{1}{h_k}\right)m_k+\frac{1}{h_k}m_{k+1}=3\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k^2}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right)。\quad \textbf{(5-39)}$$

用 $\frac{h_k+h_{k-1}}{h_{k-1}h_k}$ 除等式两端，并化简所得方程，得到基本方程组

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k,\quad (k=1,2,\cdots,n-1) \qquad (5\text{-}40)$$

n−**1**个方程
n+**1**个未知量

其中

$$\lambda_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}},\quad \mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}},\quad g_k=3\left(\mu_k\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}+\lambda_k\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right), \qquad (5\text{-}41)$$

$$(k=1,2,\cdots,n-1)$$

方程组（5−40）中含n−1个方程、n+1个未知数$m_0, m_1, \cdots, m_n$。

为了解出$m_k(k=0, 1, \cdots, n)$，还应补充两个方程。因此，我们通过在插值条件（5-33）上再附加两个边界条件来解决这个问题。

本节我们考虑下面三类边界条件。

一、第一类边界条件是 $\begin{cases} s'(x_0) = f'_0, \\ s'(x_n) = f'_n, \end{cases}$ (5-42)

即 $m_0 = f'_0,\ m_n = f'_n$。 此时，化为n−1阶线性方程组

$$\begin{cases} 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1 - \lambda_1 f'_0, \\ \lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k, \qquad (k = 2, 3, \cdots, n-2) \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} = g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n, \end{cases} \tag{5-43}$$

n−**1**个方程
n−**1**个未知量

进一步

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 - \lambda_1 f'_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{pmatrix} \tag{5-44}$$

三对角
严格对角
占优

得出$m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$。

二、第二类边界条件是 $\begin{cases} s''(x_0)=f_0'' \\ s''(x_n)=f_n'' \end{cases}$ (5−45)

由（5-37），（5-38）边界条件可得

$$\lim_{x\to x_0^+} s''(x)=f_0''=-\frac{4}{h_0}m_0-\frac{2}{h_0}m_1-\frac{6}{h_0^2}(y_1-y_0)。 \quad 两端\times\frac{h_0}{2}$$

$$\lim_{x\to x_n^-} s''(x)=f_n''=\frac{2}{h_{n-1}}m_{n-1}+\frac{4}{h_{n-1}}m_n-\frac{6}{h_{n-1}^2}(y_n-y_{n-1})。 \quad 两端\times\frac{h_{n-1}}{2}$$

从而边界方程可表示为并与（5-40）联立即得所需方程组：

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0}-\dfrac{h_0}{2}f_0'', \\ m_{n-1}+2m_n=\dfrac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}}+\dfrac{h_{n-1}}{2}f_n''。 \end{cases} \quad (5-46)$$

n+1个方程 n+1个未知量

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k, \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

此时化为n+1阶线性方程组

三对角
严格对角占优

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}47)$$

其中$g_1, g_2, \cdots, g_{n\text{-}1}$如（5−41）定义，而

$$\begin{cases} g_0 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{2} f_0'', \\ g_n = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases} \qquad (5\text{-}48)$$

解得$m_0, m_2, \cdots, m_n$。

三、第三类边界条件是周期性条件

设 $f(x)$ 是以x_n-x_0为一个周期的函数，这时$s(x)$也应以x_n-x_0为周期。于是$s(x)$在端点处满足条件

$$\lim_{x\to x_0^+} s^{(p)}(x)=\lim_{x\to x_n^-} s^{(p)}(x),\quad (p=0,1,2) \tag{5-49}$$

由（5−37）和（5−38）得

$$\lim_{x\to x_0^+} s''(x)=-\frac{4}{h_0}m_0-\frac{2}{h_0}m_1+\frac{6}{h_0^2}(y_1-y_0),$$

$$\lim_{x\to x_n^-} s''(x)=\frac{2}{h_{n-1}}m_{n-1}+\frac{4}{h_{n-1}}m_n-\frac{6}{h_{n-1}^2}(y_n-y_{n-1}),$$

再注意到， $\lim_{x\to x_0^+} s''(x)=f_0''=f_n''=\lim_{x\to x_n^-} s''(x)$ $\lim_{x\to x_0^+} s'(x)=\lim_{x\to x_n^-} s'(x)$

从而得m_0=m_n，所以

$$\frac{1}{h_0}m_1+\frac{1}{h_{n-1}}m_{n-1}+2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_{n-1}}\right)m_n=3\left(\frac{y_1-y_0}{h_0^2}+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}^2}\right),$$

简写为 $$\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n, \tag{5-50}$$

其中 $$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \\ g_n = 3\left(\mu_n \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} + \lambda_n \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right). \end{cases} \tag{5-51}$$

将（**5-51**）与（**5-40**）联立，并用m_n取代m_0，得n阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5-52}$$

严格对角占优

n个方程
n个未知量

得出$m_1, m_2, \cdots, m_n$。

注意到，不论采用哪类边界条件，所得方程组的系数矩阵（见（5-44）、（5-47）和（4-52））都是严格对角占优阵，所以非奇异，故方程组有唯一解。

例4，给定插值条件

x_i	-1	0	1
y_i	1	0	1

用三转角方程构造法求 $f(x)$ 的三次自然样条插值多项式。

解： 由（5-40）和（5-46）可得三转角方程组：

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} - \dfrac{h_0}{2} f_0'' \\ \lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = 3\left(\lambda_1 \dfrac{(y_1 - y_0)}{h_0} + \mu_1 \dfrac{(y_2 - y_1)}{h_1} \right) \\ m_1 + 2m_2 = \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{h_1}{2} f_2'' \end{cases}$$

其中

$y_1 - y_0 = -1$，$y_2 - y_1 = 1$，$h_0 = h_1 = 1$，$f_0'' = f_2'' = 0$。 从而

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_0} = \mu_1 = \frac{h_0}{h_1 + h_0} = \frac{1}{2},$$

即 $\begin{cases} 2m_0 + m_1 \qquad\qquad = -3 \\ \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 = 0 \\ \qquad\qquad m_1 + 2m_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 解之,

$m_0 = -\frac{3}{2}$， $m_1 = 0$， $m_2 = \frac{3}{2}$， 代入（4-35），得

$$s_0(x) = (1 + 2\cdot(x+1))x^2 \cdot 1 + (1-2x)(x+1)^2 \cdot 0 + (x+1)x^2\left(-\frac{3}{2}\right) + x(x+1)^2 \cdot 0,$$
$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad x \in [-1, 0]$$
$$s_1(x) = (1+2x)\cdot(x-1)^2 \cdot 0 + (1 - 2(x-1))x^2 \cdot 1 + x(x-1)^2 \cdot 0 + x^2(x-1)\cdot\frac{3}{2},$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad x \in [0, 1]$$

即满足给定插值条件的 $f(x)$ 的三次自然样条插值多项式为：

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

例5 给定插值条件

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	0	0

以及第一类边界条件m_0=1, m_3=0, 求三次样条插值函数。

解 所求三转角方程组为**(5-43)**

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k,\ g_k = 0,\ \lambda_k = \mu_k = \frac{1}{2},\ \ k = 1, 2。$$

即 $\begin{cases} \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 = 0 \\ \frac{1}{2}m_1 + 2m_2 + \frac{1}{2}m_3 = 0 \end{cases}$ 再由m_0=1, m_3=0, 解得 $m_1 = -\frac{4}{15}$, $m_2 = \frac{1}{15}$。

代入（**5-35**），得

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x(1-x)(15-11x), & x \in [0,1] \\ \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x), & x \in [1,2] \\ \frac{1}{15}(x-3)^2(x-2), & x \in [2,3]. \end{cases}$$

例6 已知正弦函数表

x_i	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7
f_i	0.4794	0.6442	0.7833	0.8912	0.9636	0.9975	0.9917

以及边界条件 $s''(0.5)=-0.4794$， $s''(1.9)=-0.9463$

用三次样条插值函数$s(x)$计算诸节点中点处的函数值，并将计算结果与$\sin x$在相应点处的函数值相比较。

解 利用在第二类边界条件，计算结果列表如下：

x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$s(x)$	0.56462	0.71733	0.84144	0.93206	0.98547	0.99959	0.97386
$\sin x$	0.56464	0.71736	0.84147	0.93204	0.98545	0.99957	0.97385

上述结果表明，三次样条插值的逼近效果较好。

下面的定理说明了三次样条插值函数的收敛性。

定理5.7 设$f(x)\in \mathbf{C}^2[a,b]$，$s(x)$是以$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$为节点，满足三种边界条件中的任何一种的三次样条插值函数，记$h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$，则当$h\to 0$时，$s(x)$和$s'(x)$在$[a,b]$上分别一致收敛于$f(x)$和$f'(x)$。