大连理工大学《矩阵与数值分析》2009年真题 2006级《计算方法》试题B卷答案

一、 填空，每题4分，共34分

1）a 的绝对误差界为 $\underline{\frac{1}{2}\times10^{-2}}$，$a$ 的相对误差界为 $\underline{\frac{1}{4}\times10^{-4}}$；

2）法方程组为：$\underline{\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8}\\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^2}{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}$；

$(\varphi_0,\varphi_0)=\frac{\pi}{2}$, $(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{\pi^2}{8}$, $(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $(\varphi_0,\sin x)=1$, $(\varphi_1,\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=1$,

3）设 $\|A\|_\infty=$ __17__，$\text{cond}_\infty(A)=$ __17×17=289__；$\underline{\left(\left\|\begin{pmatrix}-7 & 10\\ 5 & -7\end{pmatrix}\right\|_1\left\|\begin{pmatrix}7 & 10\\ 5 & 7\end{pmatrix}\right\|_1\right)}$

4）应改写为 $\underline{\dfrac{(((x+16)x+0)x+8)x-1}{((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1}}$

5）均差 $f[0,1,2]=$ __0__，$l_0(x)=\underline{\dfrac{(x-2)(x-1)}{2}}$；

6）此数值求积公式的代数精度为：__3__；

7）求解 $u'=-u+t-e^{-1}$ 的隐式Euler：$\underline{u_{n+1}=\dfrac{u_n+(t_{n+1}-e^{-1})h}{1+h}}$；

8）用二分法进行一步后根所在区间为: [1, 2]。

9） LL^T 分解为：$\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$；

10） $[0,1]$ 上以 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 权函数的正交多项式 $\phi_0(x)=$ __1__，$\phi_1(x)=\underline{x-\frac{1}{4}}$。

11）；$\underline{x_{k+1}=x_k-\dfrac{1-x_k-e^{x_k}}{e^{x_k}+1},k=0,1,2,\cdots}$

12） 正交矩阵 $\underline{H=\frac{1}{3}\times\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}}$；

二、计算题

1.（15 分）**解**：已知，$\alpha_2=1, \alpha_1=0, \alpha_0=-1, \beta_2=0, \beta_1=\frac{1}{2}, \beta_0=\frac{3}{2}$。

$c_0=1-1=0, c_1=2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0, c_2=\frac{1}{2}\times 2-\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\neq 0$，故此为二步一阶方法。

局部误差主项为：$-\frac{3}{2}h^2u''(t_n)+O(h^3)$。

又$\rho(\lambda)=\lambda^2-1$，满足根条件，故此差分格式收敛。

又考虑模型问题$u'=\mu u$则，有特征多项式：

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\lambda^2-\left(\frac{\bar{h}}{2}\right)\lambda-\left(1+\frac{3\bar{h}}{2}\right)=0，\text{其中 } \bar{h}=\mu h$$

由判别式可知$|\lambda|<1$的充要条件是：$\left|\frac{\bar{h}}{2}\right|<-\frac{3\bar{h}}{2}<2$，而$\left|\frac{\bar{h}}{2}\right|<-\frac{3\bar{h}}{2}$自然成立，

则由$-\frac{3\bar{h}}{2}<2$得出 $\bar{h}\in\left(-\frac{4}{3},0\right)$。

由于$0>\bar{h}=\mu h=-40h>-\frac{4}{3}$，故$h$的取值范围是：$0<h<\frac{1}{30}$。#

2.（15 分）**解**：$\mu_m=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^m dx$，$m=0,1,2,\cdots$，则

$\mu_0=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}$，$\mu_1=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$，$\mu_2=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$，$\mu_3=\int_{-1}^{1}x^5dx=0$。

$$\varphi_2(x)=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 1\\ 0 & \frac{2}{5} & x\\ \frac{2}{5} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{4}{15}x^2-\frac{4}{25}，\text{令 }\phi_2(x)=0\text{即得，}\phi_2(x)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}\right)=0$$

得 Gauss 点：$x_{0,1}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$。取$f(x)=1$，$x$，令$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=A_0f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+A_1f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

即得到方程组：$\frac{2}{3}=A_0+A_1$，$0=A_1-A_0$，解之，得$A_0=A_1=\frac{1}{3}$，从而得到

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx\approx\frac{1}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$，又取$f(x)=x^4$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \cdot x^4 dx = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4\right] = \frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{147}$$

故所得到的数值求积公式是具有 m=3 次代数精度 Gauss 求积公式。

$$\int_{-1}^{1} x^4 \cdot e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3}\left(e^{-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} + e^{-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{5}} \ \#$$

3.（10 分）解： $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，

$$\mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0$$

则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0\left(\sigma_1 = \sqrt{2},\ \sigma_2 = 0\right)$，所以 $\boldsymbol{\Sigma} = \left(\sqrt{2}\right)$。

下面求对应的标准正交的特征向量(正规直交)，即

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；　　$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$；

即 $V = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，因 rank(**A**)=1，故有 $\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$。计算得

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_1,$$

得约化的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{u}_2$, 使其与 $\boldsymbol{U}_1$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 的一组标准正交基，可取 $U_2 = \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则 $U = (U_1\ \ U_2)$ 是酉阵, 故矩阵 **A** 的奇异值分解（满的奇异值分解）为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ \#$$

4．（**10 分**）**解**：（1）Gauss-Seidel 法迭代公式：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - a x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{a}{2} x_1^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$；

（2）Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为：$\boldsymbol{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，则令

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^3 - a^2\lambda^2 = \lambda^2(2\lambda - a^2) = 0$$

得 Gauss-Seidel 迭代法收敛的充要条件为：$|a| < \sqrt{2}$；

5．（**10 分**）**解**：**由于** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^3 - (\lambda-1)\right] - \left[(\lambda-1)^2 - 1\right] = (\lambda-1)^2\left[(\lambda-1)^2 - 1\right] - \left[(\lambda-1)^2 - 1\right] = \lambda^2(\lambda^2 - 2)^2。$$

即 $\lambda_1 = 0$（二重），$\lambda_2 = 2$（二重）。

$(0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$，即 $\mathbf{rank}(0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$，故其代数重复度=几何重复度=2，即 $\lambda_1 = 0$ 为半单的；且其对应的 Jordan 块为 2 块，和为 2 阶的。

$(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，即 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3$，故其代数重复度=2，几何重复度=1，即 $\lambda_2 = 2$ 为亏损的；且其对应的 Jordan 块为 1 块，和为 2 阶的。

综上所述，A 的 Jordan 标准型为：$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2\end{pmatrix}$或$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ #

二、 证明题（6 分）

若 $\rho(A)<1$，则存在范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$.

证明: 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\rho(A))$，并取非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\|A\|_T \le \rho(A)+\varepsilon=\rho(A)+\frac{1}{2}(1-\rho(A))=\rho(A)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho(A)=\frac{1}{2}(1+\rho(A))<\frac{1}{2}\times 2=1$$

#