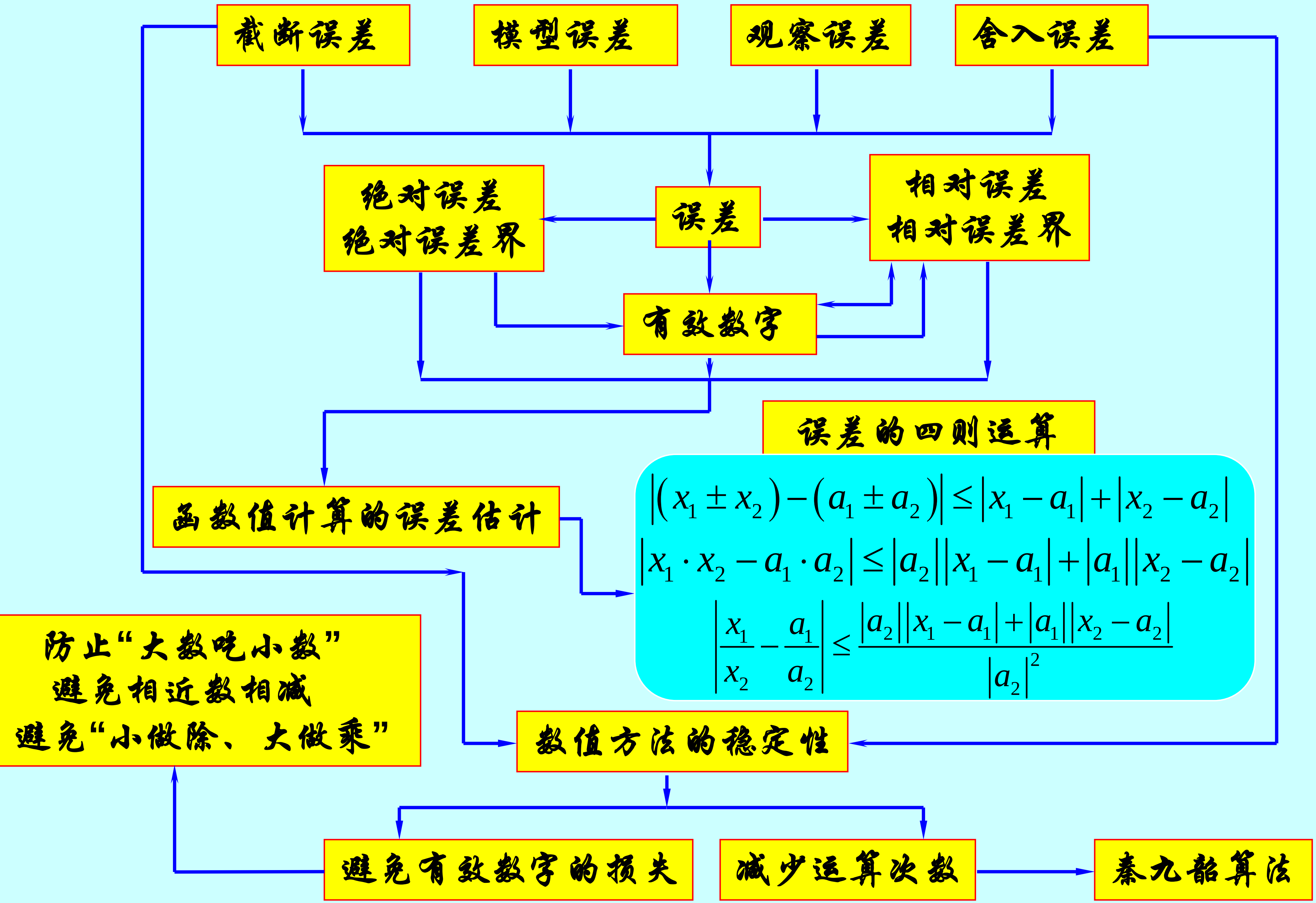
# 误差分析与数值方法稳定性内容结构框图



# 与向量、矩阵范数相关内容结构框图

矩阵的条件数及其性质

向量范数

矩阵范数

1-范数、2-范数、∞-范数

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k| \quad \|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \quad \|x\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|x_k|$$

p-范数 $\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}$

F-范数 $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$

$m_1$-范数 $\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

向量范数等价性

矩阵范数等价性

矩阵范数与向量范数的相容性

$$\|Ax\|_V\le\|A\|_M\|x\|_V$$

由向量范数构造矩阵范数

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \quad \|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \quad \|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^HA\right)}$$

矩阵范数的性质：1) $\rho(A)\le\|A\|$ 2) $\|A\|\le\rho(A)+\varepsilon$ 3) $\left\|(I\pm A)^{-1}\right\|\le\dfrac{1}{1-\|A\|}$

# 矩阵计算与分解内容结构框图

矩阵分解

$A \in \mathrm{C}^{m\times n}$

矩阵奇异值分解

满奇异值分解

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$$

约化的奇异值分解

$$A = U_1 \Sigma V_1^H$$

用矩阵奇异值分解讨论矩阵的性质

$A \in \mathrm{C}^{n\times n}$

矩阵schur分解

$$A = URU^H$$

正规矩阵schur分解

$$A = UDU^H$$

利用矩阵的特征系统讨论

矩阵的可对角化条件

矩阵的Jordan分解 $A = TJT^{-1}$

矩阵三角分解

Doolittle分解

$A=LU$ $PA=LU$

Cholesky分解

$A=LL^T$

化方程组$Ax=b$为两个三角方程组求解

$Ly=b$ $Ux=y$

$Ly=Pb$ $Ux=y$

$Ly=b$ $L^T=y$

矩阵的QR分解

Householder变换矩阵及其性质

化方程组为一个三角方程组求解

$Ax=y \longrightarrow Rx=Q^Ty$

# 矩阵分析简介内容结构框图

矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$

收敛矩阵 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$

矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k$

对角矩阵法

Jordan标准型法

Hamilton-Caylay定理

矩阵函数

$f(A) \overset{\Delta}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k A^k$

矩阵函数计算

$f(A) = T\,\mathrm{diag}\left(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_s)\right)T^{-1}$

矩阵函数的导数与积分

矩阵对一个变量的导数

矩阵对一个变量的积分

函数对矩阵变量的导数

解微分方程组

$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = AX(t)$ 通解：$X(t) = e^{At}X(0)$

$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = AX(t) + F(t)$

通解：$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}F(\tau)\mathrm{d}\tau$

第一章部分相关习题 **P16**

1、（4） **解**：设有$n$为有效数字， 则由定理1.7，得

$$\frac{|x-a|}{|a|} \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

注意:$8 \le \sqrt{70} \le 9$，则可取 $a_1$=8。 为使 $\frac{|x-a|}{|a|} < 0.1\%$，只需使

$$\frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{2 \times 8} \times 10^{1-n} < 0.001$$

即

$$10^n > \frac{1}{16} \times 10^4 \Rightarrow n = 3$$

查表后得出

$$\sqrt{70} \approx 8.37$$

**P17 11（3）**如何计算函数 $\int_N^{N+1}\frac{dx}{1+x^2}$ 的之比较准确**,**其中$N$充分大。

解：

$$\int_N^{N+1}\frac{dx}{1+x^2}=\mathbf{arctg}(N+1)-\mathbf{arctg}N =$$

注：令 $\alpha=\mathbf{arctg}(N+1),\ \beta=\mathbf{arctg}N$ ，则 $\mathrm{tg}\,\alpha = N \quad \mathrm{tg}\beta = N+1$

由于 $\alpha-\beta=\mathbf{arctg}(N+1)-\mathbf{arctg}N$ ，由差角公式：

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

得

$$\alpha-\beta=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$ ，进而有

$$\mathbf{arctg}(N+1)-\mathbf{arctg}N=\mathbf{arctg}\frac{1}{1+N(N+1)}$$

第二章部分相关习题 **P49**

（**1**）$A=\begin{pmatrix}1+a & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 当$a$满足条件 $a\neq -1$ 时，$A$可作 $LU$分解。

（**2**）$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & a\end{pmatrix}$ 当$a$满足条件 $a>2$ 时，$A$可作 $LL^T$分解，其中$L$是对叫元素为正的下三角阵，则$L$= $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \\ -\sqrt{2} & \sqrt{a-2}\end{pmatrix}$

（**3**）$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$， 则$\mathrm{cond}_2(A)$= $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{(2+\sqrt{2})^2}{2}$

（**4**）$R$为 对角 矩阵，$A$的特征值为 $R$的对角元 ，

$A$的特征向量为 $U$的列 ，当$A$为**Hermite**阵时，$R$为 实对角 阵，

当$A$为斜**Hermite**阵时，$R$为 纯复对角 阵。

**P55 5.**考察如下矩阵是否存在$LU$分解，如果存在是否唯一？

（**1**） $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{pmatrix}$ （**2**）$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}$

**（1）解：矩阵$A$的行列式的性质为：**

$$\det(A_1)=1\neq0,\ \det(A_2)=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,\ \det(A_3)=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{vmatrix}=10\neq0$$

若$A$存在$LU$分解，则应有：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\2u_{11}&2u_{12}+u_{22}&2u_{13}+u_{23}\\4u_{11}&4u_{12}+l_{32}u_{22}&4u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \underline{4} & 1 \\ 4 & \underline{6} & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 2u_{11} & \underline{2u_{12}+u_{22}} & 2u_{13}+u_{23} \\ 4u_{11} & 4u_{12}+l_{32}u_{22} & 4u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{pmatrix}$

进一步有 $u_{11}=1,\ u_{12}=2,\ u_{13}=3,$ 那么

$$2u_{12}+u_{22}=a_{22}=4 \Rightarrow u_{22}=4-2\times2=0$$

就有 $a_{32}=4u_{12}+l_{32}u_{22} \quad =2\times4+l_{32}\times0=8$

这与$\boldsymbol{a_{32}=6}$矛盾。 故 $A$ 不存在$LU$分解。

（2）解：矩阵$B$的行列式的性质为：

$$\det(B_1)=1\neq 0,\quad \det(B_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0,\quad \det(B_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

若$B$存在$LU$分解,则应由：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & l_{32} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 2u_{11} & 2u_{12}+u_{22} & 2u_{13}+u_{23}\\ 3u_{11} & 3u_{12}+l_{32}u_{22} & 3u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \underline{2} & \underline{1} \\ 3 & 3 & \underline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 2u_{11} & \underline{2u_{12}+u_{22}} & \underline{2u_{13}+u_{23}} \\ 3u_{11} & 3u_{12}+l_{32}u_{22} & \underline{3u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}} \end{pmatrix}$

---

从而，$u_{11}=1$，$u_{12}=1$，$u_{13}=1$，进一步有：

$$2u_{12}+u_{22}=a_{22}=2 \Longrightarrow u_{22}=0$$

$$2u_{13}+u_{23}=a_{23}=1 \Longrightarrow u_{23}=-1$$

$$3u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=a_{33}=1 \Longrightarrow u_{33}=l_{32}-2$$

即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & l_{32}-2 \end{pmatrix}$

其中$\boldsymbol{l_{32}}$可以任取，故$\boldsymbol{B}$存在$\boldsymbol{LU}$分解，但是不唯一。

**P272 1.**

（4）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 10 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$，要是 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{a}$应满足 $\underline{\quad |a|<1 \quad}$

（7）设$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，$\int_0^1 e^{At}dx=$ __________

$$\frac{de^{At}}{dt}=Ae^{At} \Rightarrow \int_0^1 e^{At}dt=\boldsymbol{A}^{-1}\int_0^1 de^{At}= \quad \boldsymbol{A}^{-1}\left(e^{A}-\boldsymbol{I}\right)$$

**P273 3.**设 $A=xx^H$, 其中 $x\in\mathbf{C}^n$ 且 $x\neq 0$，判断如下矩阵序列的收敛性。

$$\left\{\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$$

注意, $A=xx^H$ 的特征值为：$x^Hx$，$0, \cdots, 0$，故 $\rho(A)=x^Hx$。

又

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^2=\frac{\left(xx^H\right)\left(xx^H\right)}{\rho^2(A)}=\frac{x\left(x^Hx\right)x^H}{\rho^2(A)}=\frac{\cancel{\rho(A)}\left(xx^H\right)}{\rho^{\cancel{2}}(A)}=\frac{A}{\rho(A)}$$

从而此矩阵序列的收敛, 其极限为：

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k=\frac{A}{\rho(A)}$$

4．**证明** $\rho(A)<1$时, $\sum_{k=1}^{\infty} kA^k = A(I-A)^{-2}$

**证明, 方法1**

注意, 绝对收敛的函数幂级数 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \dfrac{1}{1-t}$, $|t|<1$, 则

$$f'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad 令 \quad s(t)=f'(t)t=\sum_{k=0}^{\infty} kt^k = \frac{t}{(1-t)^2}$$

则得到新的绝对收敛的函数幂级数

$$F(t)=s(t)(1-t)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} kt^k\right)(1-t)^2 = t\,, \quad |t|<1$$

由定理3,可知相应的绝对收敛的矩阵幂级数为:

$$F(A)=\left(\sum_{k=0}^{\infty} kA^k\right)(I-A)^2 = A\,,$$ 当 $\rho(A)<1$时,

而当 $\rho(A)<1$时, 由定理1.6可得, $(I\text{-}A)$可逆，故得

$$\sum_{k=1}^{\infty} kA^k = A(I-A)^{-2}$$

**证明, 方法2** 由于 $\sum_{k=1}^{\infty} A^k = A(I-A)^{-1}$, 取 $Q=(I-A)^{-1}$ 则

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k\right)Q = A(I-A)^{-1}(I-A)^{-1} = A(I-A)^{-2},$$

由性质6、7

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k\right)Q = \sum_{k=1}^{\infty} A^k Q = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A^k\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)$$

$$\begin{array}{llllllll}
k=0,\ A\left(I+A+A^2+\cdots\right)= & A & +A^2 & +A^3 & +A^4 & +A^5 & +\cdots \\
k=1,\ A^2\left(I+A+A^2+\cdots\right)= & & A^2 & +A^3 & +A^4 & +A^5 & +\cdots \\
k=2,\ A^3\left(I+A+A^2+\cdots\right)= & & & A^3 & +A^4 & +A^5 & +\cdots \\
 & & & & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$A+2A^2+3A^3+\cdots+kA^k+\cdots\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$$

则 $$\sum_{k=1}^{\infty} kA^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = A(I-A)^{-2}$$

**练习** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{e}^{t\boldsymbol{A}}$。

**解** $\psi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2$，

由**Hamilton-Caylay**定理 $\psi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2$，即 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^2$，…

于是 $$e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}+(t\boldsymbol{A})+\frac{(t\boldsymbol{A})^2}{2!}+\frac{(t\boldsymbol{A})^3}{3!}+\frac{(t\boldsymbol{A})^4}{4!}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+\left(e^t-1-t\right)\boldsymbol{A}^2$$

$$=\begin{pmatrix}1-2t & t & 0\\ -4t & 2t+1 & 0\\ 1+2t-e^t & e^t-t-1 & e^t\end{pmatrix}。$$

# THE END