姓名:________

学号:________

院系:________

矩阵数值分析___班

主讲教师________

大连理工大学

课程名称: 矩阵与数值分析　试卷: 统一　考试类型　闭卷

授课院(系): 数学系　考试日期: 2010年1月12日　试卷共8页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	50	6	6	6	10	12	10	/	/	/	100
得分											

一、填空与判断题(×或√),每空 2 分,共 50 分

(1) 已知 $a = 2009.12$, $b = 2010.01$ 分别是按四舍五入原则得到的 x_1 和 x_2 近似值. 那么 $\frac{|x_1 - a|}{|a|} \le$ $\frac{\frac{1}{4}\times10^{-2}}{\frac{1}{2}\times10^{-2}}$, $\frac{|x_2 - b|}{|b|} \le$ $\frac{1}{2\times2}\times10^{-6} = \frac{1}{4}\times10^{-5}$, $|x_1x_2 - ab| \le$ $4019.13\times\frac{1}{2}\times10^{-2} = 20.09565$

$|a||x_1-a| + |a||x_2-b|$

P12页

(2) $[0,1]$ 上权函数 $\rho(x) = x$ 的正交多项式族中 $\phi_1(x) =$ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$;

$\int_0^1 (x^5 + x^3)\phi_3(x) =$ 0 。

$x(x^4+x^2)\phi_3(x)$

(3) 已知存在实数 R 使曲线 $y = x^2$ 和 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 相切。求切点横坐标近似值的 Newton 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + (x_n-8)^2 - R^2}{4x_n^3 + 2x_n - 8}$

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则它的奇异值为 $\sqrt{5}, \sqrt{5}$。

$\sqrt{5}$ 2个吗? $\sqrt{5}, \sqrt{5}$

(5) 若取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\int_0^1 e^{At}dt = \begin{bmatrix} e-1 & 1 \\ 0 & e-1 \end{bmatrix}$。

$e^t \quad te^t$

$\begin{bmatrix} e-1 & 1 \\ & e-1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} e-1 & e \\ & e-1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e \\ & e \end{bmatrix} - I$

(6) 若 $\|A\| < 1$, 则 $\|(I - A)^{-1}\| \le$ $\frac{1}{1-\|A\|}$。

(7) 已知 $f(a-h), f(a), f(a+h)$, 计算一阶数值导数的公式是:

$f'(a) =$ $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ $+ O(h^2)$; 取 $f(x) = \sqrt{x}$, $h = 0.001$, 那么, 用此公式计算 $f'(2)$ 的近似值时, 为避免误差的危害, 应该写成:

$f'(2) \approx$ $\frac{1}{\sqrt{2+0.001} + \sqrt{2-0.001}}$。

$\mu_m = \int_a^b \rho(x) x^m dx$

$\mu_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ $\mu_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$\phi_0(x) = 1$ $\phi_1(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

(5) $f(m) = e^{mt}$ $f'(m) = me^{mt}$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ $\int_0^1 te^t dt$

$\int_0^1 te^t dt$
$= te^t|_0^1 - \int_0^1 e^t dt$
$= e - (e-1) = 1$

$\int_0^1 \int_0^1 te^t$

会证明

$te^t|_0^1 - (\int_0^1 e^t)$

$e^t - (e^t$

装　订　线

二、（6分）已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & -2 & 0 \\ & & & -2 \end{pmatrix}$，求出 A 的 Jordan 分解以及 $\sin tA$。

$\lambda^2(\lambda+2)^2$

$\det(\lambda I-A)=\lambda^2(\lambda+2)^2$

0 代数重复度 2

-2 2

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}$

以 $\lambda_1=0$ 为特征值的 Jordan 块阶数的和为 2

几何重复度 $4-\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=1$

$\sin tA=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ & 0 & & \\ & & -\sin 2 & \\ & & & -\sin 2 \end{bmatrix}$

以 $\lambda_2=2$ 为特征值的 Jordan 块阶数的和为 2

几何重复度 $4-\mathrm{rank}(\lambda_2 I-A)=4-2=2$

以 $\lambda_2=2$ 为特征值的 Jordan 块的个数为 2

A的Jordan标准型为 $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}$ $\sin tA=\begin{bmatrix} 0 & t & & \\ & 0 & & \\ & & -\sin 2t & \\ & & & -\sin 2t \end{bmatrix}$

求出 T.

三、（6分）给定求积节点：$x_k=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$，请用复化的梯形公式和复化的 Simpson 公式，计算如下定积分的近似值。

$$\int_0^1 e^{x(x-1)}dx$$

$T_4(f)=\frac{1-0}{2\times4}[f(0)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(1)]$

$=\frac{1}{8}[e^{0(0-1)}+2(e^{\frac14(\frac14-1)}+e^{\frac12(\frac12-1)}+e^{\frac34(\frac34-1)})+e^{1(0)}]$

$=\frac{1}{8}[1+2(0.829+0.779+0.829)+1]$

$=0.859$

$\Rightarrow S_2(f)=\frac{1-0}{6\times2}[f(0)+2\sum f(0.5)+4(f(0.25)+f(0.75))+f(1)]$

$=\frac{1}{12}[2+2\times0.779+4\times2\times0.829]$

6.632

$=0.849$

$L_1(x) = \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} f(x_0) + \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} f(x_1)$

五、（10 分）

（1） 用 Schimidt 正交化方法，构造 $[-1,1]$ 上以 $\rho(x) \equiv 1$ 权函数的正交多项式系：$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$；

「正交互构系
最佳平方逼近 积分
空间」

（2）利用所得到的结果构造 $f(x) = x^4$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳二次平方逼近多项式；

（3）构造 $[-1,1]$ 上的两点 Gauss 型数值求积公式；

（4）利用（3）的结果给出 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx$ 的近似值。

$\frac{x^2}{2}$ $\frac{x^3}{3}$

$\phi_0(x) = 1$

$\mu_0 = \int_{-1}^1 1\,dx = 2$ $\mu_1 = \int_{-1}^1 x\,dx = 0$ $\mu_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

$\mu_3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$

$\phi_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 2x$ $\phi_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}$

$\begin{bmatrix} (\phi_0\phi_0) & & \\ & (\phi_1\phi_1) & \\ & & (\phi_2\phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f\phi_0) \\ (f\phi_1) \\ (f\phi_2) \end{bmatrix}$ $S^*(x) = \frac{1}{10}$

$(\phi_0\phi_0) = \int_{-1}^1 1\times1\,dx = 2$ $(\phi_1\phi_1) = \int_{-1}^1 x\cdot x\,dx = \frac{2}{3}$ $(\phi_2\phi_2) = \int_{-1}^1 (\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9})(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9})dx =$

会转换

$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

$\phi_2 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}$ 求高斯点 $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{a+b}{2}$ $\frac{a-b}{2}$

$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ -A_0 + A_1 = 0 \end{cases}$ $A_0 = A_1 = 1$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$

$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)dt$

令 $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t) = g(t)$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx = \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})\right]$

$= \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 g(t)dt$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 0.2113}{1+0.2113} + \frac{\sin 0.7887}{1+0.7887}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{0.2094}{1+0.2113} + \frac{0.7094}{1+0.7887}\right] = 0.285$

$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$

第一特征多项式 $\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j$，第二特征多项式 $\sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$

七、(10分) 已知解常微分方程初值问题 $\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ 的某线性二步法的第一、第二特征多项式分别为：

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3},\quad \sigma(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda^2$$

(1) 给出此线性二步法具体表达式，并求出其局部截断误差主项；

(2) 讨论其收敛性；

(3) 求其绝对稳定区间。

$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\bar{h}\lambda^2 = 0$

$(1-\frac{2}{3}\bar{h})\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$

$(3-2\bar{h})\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$u_{n+2} - \frac{4}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n = \frac{2}{3}h f_{n+2}$

$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3} & \alpha_1 = -\frac{4}{3} & \alpha_2 = 1 \\ \beta_0 = 0 & \beta_1 = 0 & \beta_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$4|$ $< 3-2\bar{h}+1 < 1$

$4 < 4-2\bar{h} < 1$

$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} = 0$

$4-2\bar{h} > 1$

$2\bar{h} <$

$C_1 = (-\frac{4}{3}+2) - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{10}{9} - \frac{12}{9}$

$C_2 = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3}+2^2\times1) - (2\times\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3}+4) - \frac{4}{3} = 0$

$C_3 = \frac{1}{6}(-\frac{4}{3}+2^3\times1) - \frac{1}{2}(2^2\times\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}(-\frac{4}{3}+8) - \frac{1}{2}\times\frac{8}{3} = \frac{10}{9} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{9}$

$\frac{20}{3\times6}$

$C_3 h^3 f^{(3)} u(t) = -\frac{2}{9}h^3 f$

$-\frac{2}{9}h^3 u^{(3)}(t_n)$

$P=2>1$ $\rho(\lambda)=0$ 的根

$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}$

$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ $\lambda_1 = \frac{1}{3}$

$(3\lambda-1)(\lambda-1) = 0$ $\lambda_2 = 1$ (单根) $|\lambda| \le 1$

∴ 收敛

$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\bar{h}\lambda^2 = 0$

$(1-\frac{2}{3}\bar{h})\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$

$\lambda^2 - \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}\bar{h}}\lambda + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}\bar{h}} = 0$

$|b| = \frac{4}{3-2\bar{h}}$ $c = -\frac{1}{3-2\bar{h}}$

$\left|\frac{4}{3-2\bar{h}}\right| < 1 + \frac{1}{3-2\bar{h}} < 2$

$\left|\frac{4}{3-2\bar{h}}\right| < \frac{4-2\bar{h}}{3-2\bar{h}}$

$-4 < 4-2\bar{h} < +4$

$-8 < -2\bar{h}$

$\bar{h}$

$\bar{h} < 0$

$(-\infty, 0)$