装

订

线

大连理工大学应用数学系

数学与应用数学专业 2005 级试 A 卷答案

课 程 名 称：计算方法　　　授课院（系）：应 用 数 学 系

考 试 日 期：2007 年 11 月　日　　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	42	8	15	15	15	5	/	/	/	/	100
得　分											

一、填空（每一空 2 分，共 42 分）

1．为了减少运算次数，应将表达式．$\dfrac{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}{x^4+16x^2+8x-1}$

改写为 $\underline{\dfrac{((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1}{(((x+0)x+16)x+8)x-1}}$；

2．给定 3 个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$ 和 $x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 求得的近似值为 $\underline{\frac{1}{4}\left(1+2e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$，

用 Simpson 公式求得的近似值为 $\underline{\frac{1}{6}\left(1+4e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$。

1．设函数 $s(x)\in S_3(-1,0,1)$，若当 $x<-1$ 时，满足 $s(x)=0$，则其可表示

为 $\underline{s(x)=c_1(x+1)_+^3+c_2x_+^3+c_3(x-1)_+^3}$。

4．已知 $f(0)=0,\ f(1)=6,\ f(2)=12$, 则 $f[0,1]=\underline{\ 6\ }$，$f[0,1,2]=\underline{\ 0\ }$，逼近 $f(x)$ 的 Newton 插值多项式为 $\underline{6x}$。

5．用于求 $f(x)=e^x-1-x=0$ 的根 $x=0$ 的具有平方收敛的 Newton 迭代公式为：$\underline{x_{k+1}=x_k-2\times\dfrac{e^{x_k}-1-x_k}{e^{x_k}-1}}$。

6．已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准型是 $\underline{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$ 或 $\underline{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$；

7．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正规矩阵，则 $\|A\|_2 = \underline{\rho(A)}$；

8．求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=(t^2-1)u+t$， $u(t_0)=u_0$ 的向后（隐式）

Euler 法的显式化的格式为： $\underline{u_{n+1}=\dfrac{u_n+ht_{n+1}}{1+h\left(1-t_{n+1}^2\right)}}$。

9．设 $a=211.00112$ 为 x 的近似值，且 $|x-a|\le 0.5\times 10^{-2}$，则 a 至少有

$\underline{\quad 5 \quad}$ 位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x}=(3,4)^T$，化为 $\boldsymbol{y}=(5,0)^T$ 的 Householder 矩阵为： $\underline{\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}}$；

11． $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^k=\underline{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}}$；

12．用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 $\underline{(1,2)}$，进行二步后根所在区间为 $\underline{(1.5,2)}$。

13．若 $\int_0^1 f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ $(\boldsymbol{n}\ge 2)$ 为 Newton-Cotes 求积公式，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k\,x_k=\underline{\frac{1}{2}}$，若为 Gauss 型求积公式，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k\,x_k^4=\underline{\frac{1}{5}}$。

14．设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU^H}$ 中，$\boldsymbol{R}$ 可取为 $\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$

$\underline{或\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$。

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\underline{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\,e^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}=\underline{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$。

二、（8 分）已知近似值 $a_1=1.21$，$a_2=3.65$，$a_3=9.81$ 均为有效数字，试估计算术运算 $a_3+\dfrac{a_1\cdot a_2}{a_3}$ 的相对误差界。

解：由已知，

$$\left|x_1-a_1\right|\le\frac{1}{2}\times10^{k-n}=\frac{1}{2}\times10^{-2}；\ \left|x_2-a_2\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-2}；\ \left|x_3-a_3\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-2}。$$

令

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1\cdot x_2}{x_3}+x_3，\ f(a_1,a_2,a_3)=\frac{a_1\cdot a_2}{a_3}+a_3，$$

由函数运算的误差估计式

$$f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)\approx$$

$$f'_{x_1}(a_1,a_2,a_3)(x_1-a_1)+f'_{x_2}(a_1,a_2,a_3)(x_2-a_2)+f'_{x_3}(a_1,a_2,a_3)(x_3-a_3)$$

$$=\frac{a_2}{a_3}(x_1-a_1)+\frac{a_1}{a_3}(x_2-a_2)+\left(1-\frac{a_1\cdot a_2}{a_3^2}\right)(x_3-a_3)$$

从而，相对误差可写成

$$\frac{\left|f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)\right|}{\left|f(a_1,a_2,a_3)\right|}\le\frac{\left|\frac{a_2}{a_3}\right|\left|x_1-a_1\right|+\left|\frac{a_1}{a_3}\right|\left|x_2-a_2\right|+\left|1-\frac{a_1\cdot a_2}{a_3^2}\right|\left|x_3-a_3\right|}{\left|\frac{a_1\cdot a_2}{a_3}+a_3\right|}\ \#$$

三、（**15 分**）设线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+3x_2=4\\3x_1+x_2=4\\2x_1+x_2+4x_3=7\end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并利用得到的上三角矩阵计算出 $\det(\boldsymbol{A})$（要有换元、消元过程）；

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

解：（1）

$$\begin{pmatrix}1&3&0&4\\3&1&0&4\\2&1&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&0&4\\1&3&0&4\\2&1&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&0&4\\0&\frac{8}{3}&0&\frac{8}{3}\\0&\frac{1}{3}&4&\frac{13}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&0&4\\0&\frac{8}{3}&0&\frac{8}{3}\\0&0&4&4\end{pmatrix}$$

故，$x=(1,1,1)^T$，$\det(\boldsymbol{A})=(-1)\times\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & \frac{8}{3} & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-32$。

（2）由于 Gauss-Seidel 迭代法的特征值满足：

$$\mathbf{det}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-L)-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3\lambda & \lambda & 0\\ 2\lambda & \lambda & 4\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^3-36\lambda^2=4\lambda^2(\lambda-9)=0\text{，则}$$

$\lambda(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})=0,0,9$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})=9>1$，从而 Gauss-Seidel 迭代法发散。

又由于 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为：

$$\boldsymbol{B}_J=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\text{，}\mathbf{det}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J)=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3 & \lambda & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda=\lambda(\lambda^2-9)\text{，则}$$

$\lambda(\boldsymbol{B}_J)=0,3,-3$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_J)=3>1$，从而 Jacobi 迭代法发散。

（3）将上述方程组的第一个方程与第二个方程对调后，新的方程组的系数矩阵为：$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 7\end{pmatrix}$是严格对角占有的，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。且新的方程组与原方程组同解。

Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式分别为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_2^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_1^{(k)}\right)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\right)\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_2^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_1^{(k+)}\right)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\right)\end{cases}\qquad\#$$

四、（15 分）对于如下求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=f(t,u)$，$u(t_0)=u_0$ 的数值方法

$$u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{h}{8}\left(3f_{n+2}+8f_{n+1}+f_n\right)$$

①证明其收敛性；求出它的局部截断误差主项及绝对稳定区间；

②要用此方法解 $u'=-20u$，$u(0)=1$。为使方法绝对稳定，求出步长 h 的

取值范围并以$u_0=1$，$u_1=1$初值，$h=0.01$为步长，求出$u(0.02)$的近似值u_2。

解：（1）注意，$\alpha_0=-\frac{1}{2},\alpha_1=-\frac{1}{2},\alpha_2=1,\beta_0=\frac{1}{8},\beta_1=1,\beta_2=\frac{3}{8}$，从而

$$\begin{cases} C_0=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0 \\ C_1=2-\frac{1}{2}-(\frac{1}{8}+1+\frac{3}{8})=0 \\ C_2=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+4)-(1+2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_3=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2}+2^3)-\frac{1}{2}(1+2^2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_4=\frac{1}{4!}(-\frac{1}{2}+2^4)-\frac{1}{3!}(1+2^3\times\frac{3}{8})=-\frac{1}{48} \end{cases}$$

故此为**线性隐式二步三阶法**，其局部截断误差主项为：$-\frac{1}{48}h^4u^{(4)}(t_n)$。

（2）令，$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$，得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$，

满足根条件；又方法阶$p=3>1$，故此差分格式收敛。

（3）又对于模型问题：$u'=\mu u\ (\mu<0)$，取$\bar{h}=\mu h$

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{3}{8}\bar{h}\right)\lambda^2-\left(\frac{1}{2}+\bar{h}\right)\lambda-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\bar{h}=\lambda^2-\left(\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)\lambda-\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)=0$$

而要使得 $|\lambda|<1$ 的充要条件为：

$$\left|\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right|<1-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}=1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$$

而 $1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$ 自然成立。现在再由 $\left|\frac{4+8\bar{h}}{8-3\bar{h}}\right|<\frac{4-4\bar{h}}{8-3\bar{h}}$ 得

$$-4+4\bar{h}<4+8\bar{h}<4-4\bar{h}\Leftrightarrow -1+\bar{h}<1+2\bar{h}<1-\bar{h}$$

由 $-1+\bar{h}<1+2\bar{h}$，可推出$-2<\bar{h}<0$，即$\bar{h}\in(-2,0)$。#

五、**（15 分）**

（1） 用 Schimidt 正交化方法，构造$[-1,1]$上以$\rho(x)\equiv 1$权函数的正交多项式系：$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，$\phi_3(x)$；

（2）构造计算$\int_{-1}^{1} f(x)dx$，具有 5 次代数精度的数值求积公式；

（3） 利用 2)的结果求出$\int_0^4 \frac{\sin x}{x} dx$的数值解。

解：由$2n+1=5 \Rightarrow n=2$，即应构造具有 3 个 Gauss 点的求积公式。首先构造 3 次正交多项式，令

$$\phi_3(x)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & x^2 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & x^3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} x^3$$

$$=\left(\frac{8}{15}-\frac{8}{27}\right)x^3+\left(\frac{8}{45}-\frac{8}{25}\right)x=\left[\left(\frac{27-15}{15\times 27}\right)x^3+\left(\frac{25-45}{45\times 25}\right)x\right]\times 8$$

$=\frac{32}{135}x^3-\frac{32}{225}x$；令$\phi_3(x)=0$即得，

$\phi_3(x)=\frac{1}{135}x^3-\frac{1}{225}x=x\left(\frac{1}{135}x^2-\frac{1}{225}\right)=0$，得$x_{0,2}=\pm\sqrt{\frac{135}{225}}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$， $x_1=0$

取$f(x)=1$，x，x^2，令 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+A_1 f(0)+A_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

即得到方程组：$2=A_0+A_1+A_2$， $0=-\sqrt{\frac{3}{5}}A_0+\sqrt{\frac{3}{5}}A_2$， $\frac{2}{3}=\frac{3}{5}A_0+\frac{3}{5}A_2$

解之，得$A_0=A_2=\frac{5}{9}$， $A_1=\frac{8}{9}$，从而具有 5 次代数精度 Gauss 求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9} f(0)+\frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

（**2**） $x=2(1+t)$，则有$\int_0^4 f(x)dx=2\int_1^{-1} f(2(1+t))dt$

$$\approx\frac{2}{9}\left[5\times f\left(2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)+8\times f(2)+5\times f\left(2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\right]$$

$$\int_0^4 \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{2}{9}\left[5\times\frac{\sin 2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}+16\times\sin 2+5\times\frac{\sin 2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\right]$$

$$\approx \frac{50}{9}\times\frac{\sin\left(\frac{10-2\sqrt{15}}{5}\right)}{10-2\sqrt{15}}+\frac{32}{9}\times\sin 2+\frac{50}{9}\times\frac{\sin\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}\right)}{10+2\sqrt{15}}$$

$$\approx \frac{\sin\left(\frac{10-2\sqrt{15}}{5}\right)\left(50+10\sqrt{15}\right)+128\times\sin 2+\sin\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}\right)\left(50-10\sqrt{15}\right)}{36}$$

六、证明题（5 分）任选一题

1．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$均为可逆矩阵，且齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$有非零解，证明：对于$\mathbf{C}^{n\times n}$中的任何矩阵范数$\|\cdot\|$，都有$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\geq 1$。

（1）由题意，可知矩阵$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$奇异。故$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$奇异。反证法，若存在某种范数$\|\cdot\|$，使得$\|A^{-1}B\|<1$，则$\rho(A^{-1}B)<1$，则可知$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$非奇异，与条件矛盾。

（2）由于$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$有非零解，故对$x\neq 0$，取与向量$x$的范数相容的矩阵范数$\|\cdot\|$，则由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

得 $$\|\boldsymbol{x}\|=\|-(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\Rightarrow\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\geq 1$$。#

2．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求出$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$，证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$收敛。

证明，$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}1&\mathrm{k}\\0&1\end{pmatrix}$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k=\begin{pmatrix}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}&\mathrm{k}\cdot\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\\0&\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}&\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\\0&\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{pmatrix}$$，而

级数$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$和$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$均收敛，有矩阵级数收敛定义可知，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$收敛。#