# 第3章　逐次逼近法

## 求解线性方程组的迭代解法

本章主要介绍求解线性方程组、非线性方程

之

**迭代解法**

## 3.1　解线性方程组的迭代法

前面已经介绍了用直接法求解线性方程组：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \qquad (3\text{-}1)$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{n},\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n}$

在用直接法求解的过程中，我们发现系数矩阵*A*在不断变动，如果**A**的阶数较大时，占用计算机的内存就很大，而且程序较复杂，对程序设计的技巧要求也较高。

因此，我们希望找到一种在求解过程中系数矩阵不变，且程序设计又不复杂的求解方法，这种方法就是迭代法。

使用迭代法求解（3-1）时，首先要将它变形，变成如下形状的等价方程组

$$x = Bx + f \qquad (3\text{-}2)$$

其中 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}, f \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

即（3-1）的解是（3-2）的解，反之，（3-2）的解也是（3-1）的解。用不同的方法构造（3-2）就可得到不同的迭代法。（3-2）中的矩阵*B*称为迭代矩阵。

$$Ax = b \Leftrightarrow (3\text{-}1)$$

如果已导出（3-1）的等价方程组（3-2）后，计算（3-1）的解就变成求序列的极限。

取初始向量 $x^{(0)}$ 代入 $x = Bx + f$ 的右端。

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + f$$

$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + f$$

$$x^{(3)} = Bx^{(2)} + f$$

其一般形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{（3-3）}$$

通常称使用（3-3）式求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式。

如果对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有当 $k \to \infty$ 时，$x^{(k)} \to x^{*}$。

其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{(k)})^T$，$\boldsymbol{x}^{*} = (\boldsymbol{x}_1^{*}, \boldsymbol{x}_2^{*}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{*})^T$

也可写成

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{*} \quad \text{即} \quad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i^{*},\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散。

由于

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

所以收敛迭代法的极限向量 $x^*$，满足

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

即为方程组（3-2）的解，从而也是（3-1）的解。

因此，使用迭代法求解就是求向量序列$\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots$ 的极限向量$x^*$。

## 3.1.1 简单迭代法

简单迭代法也称基本迭代法，有些迭代法可以通过对基本迭代法的加速或变形而得到。设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为非奇异， 且$a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

对上式移项和变形后可得等价的方程组：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}\right) \end{cases} \tag{3-4}$$

将（**3-4**）写成迭代格式，即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-5}$$

也可写成

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-6}$$

迭代法（**3-5**）或（**3-6**）称为**Jacobi迭代法**。

**例1** 将线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20\right) \\ \Rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left(-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33\right) \\ \Rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(-2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 12\right) \end{array}$$

**解：写成Jacobi迭代格式（3-5）：**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \text{（3-5）}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \quad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \quad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3;$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \qquad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \qquad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3\,;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}\left(20 + 3\times 3 - 2\times 3\right) \approx 2.875 \quad \ldots, \quad x_1^{(10)} \approx 3.00032$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left(33 + 4\times\frac{20}{8} + 3\right) \approx 2.3636 \quad \ldots, \quad x_2^{(10)} \approx 1.999838$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12 - 2\times\frac{20}{8} - 3\right) \approx 1 \quad \ldots, \quad x_3^{(10)} \approx 0.999881$$

**终止条件为：** $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon$。**精确解为：** $x^* = (\,3, 2, 1\,)^T$。

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，在计算 $x_2^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}$ 已经算出，计算 $x_i^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出。一般说来，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要精确些。故对 Jacobi迭代法（3-5）可作如下改进。

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4\ x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2\ x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4\ x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2\ x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\vdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$， $x_2^{(5)}\approx 2.000072$， $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le 10^{-5}$

将迭代格式可写成如下的分量形式，即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ k = 0, 1, 2, \cdots; \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad （3\text{-}9）$$

称为**Gauss-Seidel迭代法**。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

**Jacobi迭代**

迭代法的收敛性

我们要考虑如下问题：

① 如何判断迭代过程是否收敛呢?

② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么?

③ 决定迭代收敛速度的因素是什么?

设某种迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

两式相减，得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*})=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{*}\right)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}$，则

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{B}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$

故当 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right)=\boldsymbol{0}$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{*}$ 是一个非零的常向量，因此只有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{k+1}=\boldsymbol{O}_{n\times n}\quad（零矩阵）$$

**定理 3.1** $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=0$ ( 即 $\boldsymbol{x}_i^{(k)}\to\boldsymbol{x}_i^*,\ i=1,2,\cdots,n$ )

的充分而且必要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}_{n\times n}\ \Leftrightarrow\ \rho(\boldsymbol{B})<1$。

**定理 3.2** 迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$ 对任意$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{f}$

均收敛的充要条件为: $\rho(\boldsymbol{B})<1$。

**定理 3.3** （充分条件）若 $\|\boldsymbol{B}\|<1$，则迭代法收敛，

且有

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|\le\frac{\|\boldsymbol{B}\|}{1-\|\boldsymbol{B}\|}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$$

证　由于$\rho(x)\leqslant\|B\|<1$，根据定理3.2知，迭代法（3-12）收敛。因为

$$x^{(k+1)}-x^{(k)}=Bx^{(k)}-Bx^{(k-1)}=B(x^{(k)}-x^{(k-1)})$$

而且

$$x^{(k)}-x^{*}=x^{(k)}-x^{(k+1)}+x^{(k+1)}-x^{*}$$

所以

$$\|x^{(k)}-x^{*}\|\le\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|+\left\|x^{(k+1)}-x^{*}\right\|$$

$$\le\|B\|\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|+\|B\|\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|$$

移项后得到

$$(1-\|B\|)\|x^{(k)}-x^{*}\|\le\|B\|\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

即

$$\|x^{(k)}-x^{*}\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii-1} & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & \cdots & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1j} & \cdots & -a_{j-1n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

下面考察**Jacobi**迭代法和**Gauss-Seidel**迭代法的收敛性。

## 观察Jacobi迭代法

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则其矩阵的表示形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

注意:

$$\overset{\boldsymbol{B}}{\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{D}^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix} = \overset{\boldsymbol{D}^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

令 $B_J = D^{-1}(L+U)$，$f_J = D^{-1}b$

注意，由 $A = D - L - U$，得 $D - A = (L+U)$ 从而

$$D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}A$$

则得（3-1）的等价方程组为 $x = B_J x + f_J$

其迭代格式为

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

将**Gauss-Seidel**公式改写成

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而可写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

从而有

$$(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}$$

整理后可得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

令

$$\boldsymbol{B}_{G-S} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{f}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

则

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}_G \quad （k=0,1,\cdots） \quad （\mathbf{3\text{-}10}）$$

（**3-10**）就是**Gauss-Seidel**迭代法。

**例，** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ **Jacobi法和G-S法求解是否收敛。**

**解：**

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J\right)=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \lambda & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0$$

得，$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm i\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\rho(\boldsymbol{B}_J)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$。

由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{G-s}\right)=\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 1\\ 2\lambda & 2\lambda & 2\\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda\end{vmatrix}=8\lambda\left(\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}\right)=0$$

得 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\dfrac{1}{2}<1$ 从而，**J迭代法发散，G-S迭代法收敛。**

**例　设线性方程组$Ax=b$, 其中** $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

问使用**Jacobi**法和G-S法求解是否收敛。

（1）**Jacobi**迭代法的迭代矩阵为:

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},$$

则

$$\det(\lambda I-B_J)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \lambda & 1\\ -1 & \frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{4}\lambda=\lambda\left(\lambda^2-\frac{11}{12}\right)=0$$

得　$\rho(B_G)=\frac{11}{12}=0.9167<1$，故Jacobi迭代法收敛。

（2）设G-S迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G$，由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G\right)=\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}\right)-\boldsymbol{U}\right)=0$$

得 $$\det\left(\lambda\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}\right)-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}3\lambda & 0 & -2\\ 0 & 2\lambda & 1\\ -2\lambda & \lambda & 2\lambda\end{vmatrix}=12\lambda^3+8\lambda^2-3\lambda^2$$

$$=\lambda^2(12\lambda-11)^2=0$$

即 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\dfrac{11}{12}=0.9167<1$， 故G-S迭代法收敛。

**定义：**$\mathbf{R}(\boldsymbol{B})=-\ln\left(\rho(\boldsymbol{B})\right)$ 称为迭代法的渐进收敛速度。

从而 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\dfrac{11}{12}=0.9167<\rho(\boldsymbol{B}_J)=\sqrt{\dfrac{11}{12}}=0.9574<1$

故可知G-S迭代法收敛得快。

若记$\varepsilon$为终止迭代的精度，则有迭代步数 $k\geq\dfrac{-\ln\varepsilon}{\mathbf{R}(\boldsymbol{B})}$

从而

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_J) = -\ln\left(\rho(\boldsymbol{B}_J)\right) = -\ln\left(0.9754\right) \approx 0.043534$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}) = -\ln\left(\rho(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})\right) = -\ln\left(0.9167\right) \approx 0.086975$$

如取 $\varepsilon = 5\times10^{-6}$，则

$$k \ge \frac{-\ln\varepsilon}{\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_J)} = \frac{12.206073}{0.043534} \approx 281 \quad \text{取} \quad k = 281$$

$$k \ge \frac{-\ln\varepsilon}{\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})} = \frac{12.206073}{0.086975} \approx 141 \quad \text{取} \quad k = 141$$

例4　设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

问使用Jacobi法和G-S法求解是否收敛。

（1）求Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

即 $\rho(\boldsymbol{B}) = 0 < 1$ ，故Jacobi迭代法收敛。

（2）求G-S迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G$，由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G\right)=\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0$$

得

$$\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ \lambda & \lambda & 1\\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

进一步得 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$，故G-S迭代法发散。

对于某些特殊的方程组，从方程组本身就可判定其收敛性。不必求迭代矩阵的特征值或范数。

**定义3.1** 如果矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3\text{-}14)$$

则称矩阵$A$为对角占优阵，如果（3-14）中严格不等式成立，称矩阵$A$为严格对角占优阵。

可以证明严格对角占优阵$A$为非奇异矩阵，即

$$\det(A) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对角占优矩阵　　　　严格对角占优矩阵

**定理3.4**（充分性条件）若线性方程组

$$Ax = b$$

中的$A$为严格对角占优阵，则**Jacobi**法和**Gauss-Seidel**法均收敛。

证 （1）Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则$B_J$的每一行每个元素取绝对值的和为

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

因为$A$为严格对角占优阵，即

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3\text{-}15)$$

所以 $$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| < 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即

$$\|\boldsymbol{B}_J\|_\infty = \max_i \sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

根据定理3. 3，**Jacobi**迭代法收敛。

（2）**G-S**迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$, 则$\boldsymbol{B}_G$的特征值λ满足:

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)=\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\det[\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}]=0$$

因为 $\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\neq 0$, 设

$$\boldsymbol{C}=\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有

$$\det(C)=\det\big(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\big)=0 \qquad \textbf{(3-16)}$$

现在证明 | λ | <1。用反证法，假设 | λ | ≥1, 又由于

*A*为严格对角占优阵，所以（**3-15**）式成立，则应有

$$|\lambda||a_{ii}|>|\lambda|\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=\sum_{j\neq i}|\lambda||a_{ij}|$$

$$\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为严格对角占优阵，故 $\det(\boldsymbol{C}) \neq \boldsymbol{O}$

与（**3-16**）式矛盾，则必有 $|\lambda|<1$。

则 $\boldsymbol{B}_G$ 的所有特征值的绝对值均小于1，即

$$\rho(\boldsymbol{B}_G)<1$$

根据定理3.2，**G-S**迭代法收敛。

**例，设** $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

考察**J**和**G-S**迭代法的敛散性，并求出它们渐进收敛速度，如取$\varepsilon=5\times10^{-6}$，则各自的迭代步数$k$为多少？

**解：** 由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 严格对角占优，故**J**和**G-S**迭代法的收敛。

再由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J\right)=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{1}{8}\lambda=0,$$ 得 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\frac{1}{8}$。

从而

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_J) = -\ln\left(\rho(\boldsymbol{B}_J)\right) = -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) \approx 1.03972$$

如取 $\varepsilon = 5\times10^{-6}$，则

$$k \geq \frac{-\ln\varepsilon}{\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_J)} = \frac{15.425}{1.03972} \approx 14.85;\quad \text{取}\quad k = 14;$$

再由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_{G-s}\right) = \begin{vmatrix} 4\lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & 4\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 64\lambda^3 - 8\lambda^2 = 8\lambda^2\left(8\lambda - 1\right) = 0$$

得 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = \sqrt{\frac{1}{8}} < 1$，则 $\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}) = -\ln\left(\rho(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})\right) = -\ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 2.07944$。

$$k \geq \frac{-\ln\varepsilon}{\mathbf{R}(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})} = \frac{15.425}{2.07944} \approx 7.42;\quad \text{取}\ k = 15。$$

# THE END