第3章　逐次逼近法

基本迭代法的加速

3.4 迭代法的加速

使用迭代法的困难所在是计算量难以估计。有时迭代过程虽然收敛，但由于收敛速度缓慢，使计算量变的很大而失去使用价值。因此，迭代过程的加速具有重要意义。迭代法加速，就是要寻找一种改进迭代法直接产生的序列的收敛速度的方法，使原来不收敛的序列变成收敛，使原来收敛较慢的序列变得收敛快。

3.4.1　基本迭代法的加速

在3.1中介绍了线性方程组求解的**Jacobi**和**Gauss-Seidel**基本迭代法通过对基本迭代法加速可得其它迭代法。

一、超松弛法（SOR法）

Gauss-Seidel法的迭代格式为：

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad \textbf{（3-52）}$$

如果将（**3-52**）的右端记为 $\overline{x}_i^{(k+1)}$，并用 $\overline{x}_i^{(k+1)}$ 和 $x_i^{(k)}$ 的线性组合作迭代加速，得到

$$(1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \overline{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad \textbf{（3-53）}$$

将（3-52）的右端代入（3-53），得

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i=1,2,\cdots,n \quad k=1,2,\cdots,$$

这就是逐次超松弛法，简称SOR法，

ω 称为松弛因子。SOR法的收敛速度与 ω 的取值有关，当 $\omega=1$ 时，它就是Gauss-Seidel法。因此，可选取 ω 的值使（3-55）的收敛速度较Gauss-Seidel法快，从而起到加速作用。

为了讨论 ω 的取值与收敛性的关系，特将（3-54）改写成矩阵形式。由（3-54）可得

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

设 $A=D-L-U$，其中 $D=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，$L$，$U$同（3-7）
则上式可写成矩阵形式

$$Dx^{(k+1)}=(1-\omega)Dx^{(k)}+\omega\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}\right)$$

整理

$$(D-\omega L)x^{(k+1)}=[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega b$$

$$x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$$

令

$$L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U] \qquad f_\omega=\omega(D-\omega L)^{-1}b$$

则

$$x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+f \tag{3-56}$$

其中 L_ω 为SOR法的迭代矩阵。

显然，SOR法收敛 $\Leftrightarrow \rho(L_\omega)<1$。

①可以证明 $\rho(L_\omega)\ge|\omega-1|$ ，故若**SOR**法收敛，则

$$|\omega-1|\le\rho(L_\omega)<1$$

即 $0<\omega<2$ 是（3-56）收敛的必要条件。

②证明如果A是对称正定矩阵，则满足 $0<\omega<2$ 的 ω 和任意初始向量$x^{(0)}$ ，SOR法均收敛。

特别地，取 $\omega=1$, 则是**Gauss-Seidel**法。 从而得到结论：

如果A为对称正定阵时，Gauss-Seidel迭代法必收敛。（充分条件）

使SOR法收敛最快的松弛因子 ω 称最优松弛因子， 一般用表示 ω_{opt} 。

但是在实际计算时， ω_{opt} 是很难事先确定，一般可用试算法取近似最优值。在有些数学软件平台中有取ω_{opt}近似值的算法。

在设计**SOR**算法时，应注意**Jacobi**法、**Gauss-Seidel**法和**SOR**法的异同点，即（**3.6**），（**3.11**）和（**3-55**）的异、同点，使设计的算法更具一般性。

算例，见第84页。

3.4.2　Aitken加速

若某迭代法产生的数列数列$\{x_k\}$为线性收敛，即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}=c\neq 0$$

此时，当k从分大时，

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\approx c, \qquad \frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\approx c$$

则有

$$\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\approx\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}$$

$$\left(x_k-\alpha\right)^2\approx\left(x_{k+1}-\alpha\right)\left(x_{k-1}-\alpha\right)$$

$$x_k^2-2\alpha x_k-\alpha^2\approx x_{k+1}x_{k-1}-\alpha\left(x_{k-1}+x_{k+1}\right)+\alpha^2$$

$$x_k^2-x_{k+1}x_{k-1}\approx\alpha\left(2x_{k-1}-x_{k+1}-x_{k-1}\right)$$

由此推出

$$\alpha \approx \frac{x_{k-1}x_{k+1}-x_k^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}} = x_{k+1} - \frac{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}$$

令

$$\bar{x}_k = x_{k+1} - \frac{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}} \qquad \text{（3-57）}$$

由（**3-57**）对数列$\{x_k\}$进行加速的方法称**Aitken**加速。

如果原数列$\{x_k\}$为线性收敛，可以证明：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{x}_k-\alpha}{x_k-\alpha}=0$$

故由（**3-57**）进行加速后得到的新数列$\{\bar{x}_k\}$，其收敛速度一般都比原数列快。将这种加速方法用于具体的迭代法上，可对原迭代法进行有效的加速，有时甚至能将发散的具体迭代格式通过这种加速后变成收敛。

非线性方程迭代求根的加速

设x^*是$f(x)=0$的根。 作简单迭代法 $x_k=\varphi(x_{k-1})$

1）任取初始值x_0

2）取k=1,2, ···

2.1 计算

$$\begin{cases} y_k=\varphi(x_k) \\ z_k=\varphi(y_k) \end{cases} \qquad \textbf{（3-58）}$$

2.2 用（**3-57**）对（**3-58**）进行加速，得到

$$x_{k+1}=z_k-\frac{(z_k-y_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \qquad \textbf{（3-59）}$$

这就是对迭代格式 $x_k=\varphi(x_{k-1})$,使用**Aitken**加速后的新迭代公式。

它可以合并为

$$x_{k+1}=\varphi(\varphi(x_k))-\frac{[\varphi(\varphi(x_k))-\varphi(x_k)]^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$$ （**3-60**）

这种加速后的迭代法（**3-60**）称**Steffensen**迭代法。

例1 用Steffensen迭代法计算 $x=x_3-1$**在**$x_0=1.5$**附近的近似解。**

解 1）**直接使用迭代格式：**$x_{k+1}=x_k^3-1$，则

$$\varphi(x)=x^3-1,\quad 且有\quad \left|\varphi'(1.5)\right|=2\times1.5^2-1=2.5>1$$

显然该迭代过程发散。

2）使用**Steffensen**法，即

$$y_k=\varphi(x_k),\ z_k=\varphi(y_k),\quad x_{k+1}=z_k-\frac{(z_k-y_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}\quad k=1,2,\cdots$$

$$x_1=z_0-\frac{(z_0-y_0)^2}{z_0-2y_0+x_0}\approx12.3965-\frac{100.4305}{9.1465}\approx1.41629$$

$$y_1=x_1^3-1=(1.41629)^3-1\approx1.84091$$

$$z_1=y_1^3-1=(1.84091)^3-1\approx5.23875$$

$$x_2 = z_1 - \frac{(z_1 - y_1)^2}{z_1 - 2y_1 + x_1} = 5.23875 - \frac{11.54532}{2.97384} \approx 1.35646$$

$$y_2 = x_2^3 - 1 = (1.35646)^3 - 1 \approx 1.49586$$

$$z_2 = y_2^3 - 1 = (1.49586)^3 - 1 \approx 2.34714$$

$$x_3 = z_2 - \frac{(z_2 - y_2)^2}{z_2 - 2y_2 + x_2} \approx 2.34714 - \frac{0.72468}{0.71188} \approx 1.32916$$

$$\vdots$$

从上面的计算可以看出，加速后的迭代是收敛的。对于原线性收敛或不收敛的数列，通过加速后可以达到更快的收敛，在一定条件下，甚至可达到二阶收敛。

用简单迭代、Newton迭代、弦截法、steffensen迭代法求方程 $f(x)=xe^x-1=0$在$x=0.5$附近的根的数值结果比较。$\delta=10^{-3}$

简单迭代法的迭代公式：$x_{k+1}=e^{-x_{k+1}}$

Newton迭代法的迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$

弦截法迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-x_{k-1}}{x_k e^{x_k}-x_{k-1}e^{x_{k-1}}}\left(x_k e^{x_k}-1\right)$

steffensen迭代法的迭代公式：

$$x_k=e^{-x_{k-1}}, \quad y_k=e^{-x_k}, \quad z_k=e^{-y_k},$$

$$x_{k+1}=z_k-\frac{\left(z_k-y_k\right)^2}{z_k-2y_k+x_k}$$

迭代的数值结果比较表

k	简单迭代法	弦截法	Newton	Setteffensen
0	0.5	0.3	0.5	0.5
1	0.606531	0.5	0.571020	0.567624
2	0.545239	0.583757	0.567156	0.567143
3	0.579703	0.562923	0.567144	0.567143
4	0.560065	0.567086		
5	0.571172	0.567143		
6	0.564863			
7	0.568439			
8	0.566409			
9	0.567560			
10	0.566907			

THE END