积分逼近 · l_0
cond.
代数精度 · 隐式

姓名：李庆新

学号：

院系：

级　班

装

订

线

大连理工大学

课程名称：计算方法　试卷：B　考试类型：闭卷

授课院（系）：数学系　考试日期：2009年1月8日　试卷共2页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	34	15	15	10	10	10	6	/	/	/	100
得 分											

一、　填空，每题2分，共34分

1) 已知近似值 $a=246.00$ 有5位有效数字，则 a 的绝对误差界为 $\frac{1}{2}\times10^{-2}$，a 的相对误差界为 $\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{|a|}$；

$a=10^k\times0.a_1a_2a_3$　$a=10^3\times0.246$　$|x-a|\le\frac{1}{2}\times10^{k-n}$　$k=3$　$n=5$

$a=10^3\times0.24600$　$|x-a|\le\frac{1}{2}\times10^{3-5}$　$\frac{|x-a|}{|a|}$

$\frac{1}{2a_1}\times10^{1-5}$?

2) 于 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，用 $y=a+bx$ 做 $f(x)=\sin x$ 最佳平方逼近，则法方程组为：________；

3) 设 $A=\begin{pmatrix}7&10\\5&7\end{pmatrix}$，$\|A\|_1=$ 17，$\mathrm{cond}_1(A)=$ ~~289~~；

$\mathrm{cond}_1(A)=\|A\|_1\|A^{-1}\|_1$　$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7&10\\5&-7\end{bmatrix}$　17×17

$\mathrm{cond}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|$

4) 为了减少运算次数，应将表达式 $\dfrac{x^4+16x^2+8x-1}{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}$ 改写为 $\dfrac{(((1\cdot x-0)x+16)x+8)x-1}{((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1}$

5) 已知 $f(0)=1$，$f(1)=3$，$f(2)=5$，则均差 $f[0,1,2]=$ 0，对应于 $x_0=0$ 插值基函数 $l_0(x)=$ $\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$；

$\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$　$x_0=0$　$x_1=1$　$x_2=2$

Newton插值公式

6) 此数值求积公式 $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{\sqrt[4]{e}}+e^{-1}\right)$ 的代数精度为：3；

$n=1$　$2n+1$　S_n

7) 求解 $u'=-u+t-e^{-1}$ 的隐式 Euler 公式：$u_{n+1}=u_n+h(-u_{n+1}+t_{n+1}-e^{-1})\Rightarrow u_{n+1}=\frac{u_n+ht_{n+1}\cdots}{1+h}$；

$f(u,t)=-u+t-e^{-1}$

8) 用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 $[1,2]$。

9) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ 的 LL^T 分解为：$\begin{bmatrix}1&\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\&1\end{bmatrix}$；

若 L 的对角元素为正，则分解是唯一的　正定对称阵　Cholesky分解

$L=\begin{pmatrix}1&\\2&1\end{pmatrix}$　$\begin{bmatrix}1&\\2&1\end{bmatrix}$

$l_{11}=\sqrt{1}=1$

$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=\frac{2}{1}=2$

$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=1$

10) $[0,1]$ 上以 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 权函数的正交多项式 $\varphi_0(x)=$ 1，$\varphi_1(x)$

11) $x=0$ 是 $f(x)=1-x-e^{-x}=0$ 的根，则具有平方收敛的迭代公式为：

二重根．

$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x)}{f'(x)}$

$\mu_0=\int_0^1\ln\frac{1}{x}dx$　$f'(0)=-1+1=0$　$\varphi_0(x)=1$

$\mu_1=\int_0^1 x\ln\frac{1}{x}dx$　$\varphi_0(x)=1$

$\varphi_1(x)=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&\varphi_0(x)\\(\varphi_1,\varphi_0)&\varphi_1(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_0&1\\\mu_1&x\end{vmatrix}$　$\varphi_1(x)=$

$x_{k+1}=x_k+2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 二重根平方收敛的

$H = I - \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

12）将向量 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 变换为向量 $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的正交矩阵 H 为________

?

$H \quad a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\cancel{\alpha} = H \cdot \alpha = \|\alpha\|_2 \cdot e_1$ $\|a_1\| = 3$ $\therefore w_1 = a_1 - \|a_1\|_2 e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$w = x - \|x\| e_1 = \frac{x - y}{\|x - y\|_2}$

$w_1^T \cdot w_1 = 6$

$w_1 \cdot w_1^T = [\ ]$

二、计算题

1．（15 分）如下求解初值问题 $u' = f(t, u)$，$u(t_0) = u_0$ 的线性二步法

$$u_{n+2} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3f_n)$$

①确定出它的阶 p、局部截断误差主项和收敛性，求出其绝对稳定区间；

②给出上述方法求解方程：$u' = -40u$，$u(0) = 1$，的步长 h 的取值范围。$(0 \sim \frac{1}{30})$

解. ① $\alpha_0 = -1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$

$\beta_0 = \frac{3}{2} \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \quad \beta_2 = 0$

$\therefore k = 2$

$\therefore C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$C_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2) - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 0$

$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2)$

$= \frac{1}{2} \times (0 + 4) - (\frac{1}{2} + 0)$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$

$\therefore p = 2 \quad p = 1 \quad p = 1$

局部截断误差主项: $\frac{3}{2} h^2 u^{(2)}(t)$

② $u' = \mu u = -40u$

$\mu = -40$

$\bar{h} = \mu h$

求解 C_p 需k 是几阶

解: $-u_n + 0 \cdot u_{n+1} + u_{n+2} = h \sum (\frac{3}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1} + 0)$

$\therefore \alpha_0 = -1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$

$\beta_0 = \frac{3}{2} \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \quad \beta_2 = 0$

$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$

$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2)$

β_0 根 α_0 学

$C_p = \frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p \alpha_2 + 3^p \alpha_3 \cdots k^p \alpha_k) - \frac{1}{(p-1)!}$

$\frac{1}{p!}(0 \quad 1^p \quad 2^p \quad 3^p) - \frac{1}{(p-1)!}$

$\alpha \qquad \beta$

局部 $C_2 h^2 u^{(2)}(t)$

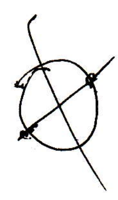
$\rho(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \cancel{\lambda_1 = \lambda_2} \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$

不收敛

$(\lambda - 1)^2$

$|\lambda| \leq 1$



$\lambda^2 - 1 = \frac{\bar{h}}{2}(\lambda + 3)$

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\bar{h}\lambda - (1 + \frac{3}{2}\bar{h}) = 0$

~~$|\frac{1}{2}\bar{h}| < -3 < 2$~~ ?

~~$\frac{1}{2}\bar{h} < -3$~~

$(\frac{1}{2}\bar{h}) < 1 - (1 + \frac{3}{2}\bar{h}) < 2$

$\lambda^2 - 1 = \bar{h}(\frac{\lambda}{2} + 3)$

$1 - (1 + \frac{3}{2}\bar{h}) < 2$

$-\frac{3}{2}\bar{h} < 2$

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\bar{h}$

$(\frac{1}{2}\bar{h}) < -\frac{3}{2}\bar{h}$

$\frac{2}{2}\bar{h} < \bar{h} < -3 \quad \bar{h} \in (-\frac{4}{3}, 0)$

2.（15分）确定 x_0、A_0、x_1、A_1 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的代数精度 m 达到最高，试问 m 是多少？取 $f(x)=e^{-x^2}$，利用所求得的公式计算出数值解。

零点 $(x_0 \cdots x_n)$，$n+1$ 次多项式，与 $[n]$ 正交。

$n=1$　$2n+1=m=3$　x^2，ϕ_2　　x_0、x_1　$n=1$　$2n+1=3$，$m=3$

$\rho(x)=x^2$

解：~~确定代数精度~~ 构造二次正交多项式：$u_0=\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$，$u_1=\int_{-1}^{1} x^2 x\,dx=\frac{2}{4}$，$u_2=\int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx = \cdots$

$\phi_0(x)=1$

$$\phi_1(x)=\begin{vmatrix}u_0 & 1\\ u_1 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & x\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\phi_2(x)=\begin{vmatrix}u_0 & u_1 & 1\\ u_1 & u_2 & x\\ u_2 & u_3 & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & x\\ 0 & \frac{1}{2} & x^2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(1-x^2)=\frac{1}{4}(1-x)(1+x)$$

令 $\phi_2(x)=0$ 得：$x_0=-1$，$x_1=1$

$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx$

$u_0=\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$u_1=\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 = 0$

$u_2=\int x^2 \cdot x^2 dx = \frac{1}{5}x^5 = \frac{2}{5}$

$u_3=\int x^2\cdot x^3 dx = 0$

又根据代数精度定义得：

令 $f(x)=1$　$A_0+A_1=\int_{-1}^{1} x^2 dx = 0$

令 $f(x)=x$　$-A_0+A_1=\int_{-1}^{1} x^2 x\,dx=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_0=-\frac{1}{4}$，$A_1=\frac{1}{4}$

$\therefore \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{4}f(-1)+\frac{1}{4}f(1)$　$m=3$

由代数精度定义得 A_0、A_1

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{4}e^{-1}+\frac{1}{4}e^{-1}=0.$$

① $\therefore \int_{-1}^{1}\rho(x)f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

解：构造正交二次多项式。　$n=1$

$u_m=\int_{-1}^{1} x^2 x^m dx$，$m=0,1,2,~~3~~$

① 找 n，和 $m=2n+1$。

② 求 u_m 和 ϕ_{n+1}

③ 令 $\phi_{n+1}=0$ 求零点

④ $f(x)=1$，x^2　$u_0=A_0$ A_1　$u_1=A_0$ A_1　u_2　求 A_0 A_1

$u_0=\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$，$u_1=\int_{-1}^{1} x^2 x\,dx=0$，$u_2=\int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx=\frac{2}{5}$，$u_3=\int_{-1}^{1} x^2 x^3 dx = 0$

$2n+1$（3次）

$$\phi_2(x)=\begin{vmatrix}u_0 & u_1 & 1\\ u_1 & u_2 & x\\ u_2 & u_3 & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 1\\ 0 & \frac{2}{5} & x\\ \frac{2}{5} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{4}{15}x^2-\frac{4}{25}=\frac{4}{15}\left(x^2-\frac{3}{5}\right)$$

$f(x)=e^{-x^2}$　$f(x)=1$，$f(x)=x$

ϕ_{n+1}　$2\times 2-1$

令 $\phi_2(x)=0$ 得高斯点 $x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$，$x_1=\sqrt{\frac{3}{5}}$

又根据代数精度定义的

$$\begin{cases}A_0+A_1=\frac{2}{3}\\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_0+\sqrt{\frac{3}{5}}A_1=0\end{cases}\Rightarrow A_0=\frac{1}{3},\ A_1=\frac{1}{3}$$

$\int \rho(x)\cdot 1\,dx$　u_0　u_m　u_{2n+1}

$f(x)=1$　$\begin{cases}A_0+A_1=u_0\end{cases}$　$\therefore$ ~~A_0~~ $A_0+A_1=u_0=\frac{2}{3}$

$f(x)=x$　$A_0 f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+A_1 f(\sqrt{\frac{3}{5}})=u_1=0$.

$\therefore A_0=\frac{1}{3}$　$A_1=\frac{1}{3}$

$$\therefore \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{3}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

~~$f(x)=x^4$~~

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{3}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$\therefore f(x)=e^{-x^2}$

$\therefore$ 上式 $=\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{5}}$

3.（10分）求下列矩阵的一个奇异值分解

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

解：$A^HA=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

$\det(A^HA-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)=-\lambda(2-\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

∴ A^HA的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=0$，对应的特征向量为 $v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

又∵ $\text{rank}(A)=2$ Σ为对角元

∴ $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{bmatrix}$

$V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ 单位化

∴ $U=AV\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

$U\Sigma=AV$

$U=A\cdot V\Sigma$

∴ $A=\begin{bmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

$U\Sigma V^{-1}$

$A=U\Sigma V^H$

$A=U\Sigma V^H$

H^{-1} n^{-1}

A^{-1} A^{-1}

$U\Sigma=AV$

$U=AV\Sigma$

$A=U\Sigma V^{-1}$

4.（10 分）已知线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（1） 给出求解上述方程组的 Gauss-Seidel 法分量形式迭代公式；

（2） 确定 a 的值，得到 Gauss-Seidel 迭代法收敛的充要条件；

解：(1)
$$\begin{cases} x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right] \\ k=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

~~det~~

(2) 设 $C=\lambda(D-L)-U$ 书上有.

B_G 的特征值 λ 满足

$$=\begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ \lambda a & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(C)=\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ \lambda a & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\left[2\lambda^2-\lambda a^2\right]=2\lambda^2\left(\lambda-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\rho(C)=|\lambda_{max}|=\frac{|a|}{\sqrt{2}}<1$$

$$\therefore |a|<\sqrt{2}$$

(1) $x_1^{(k+1)}=1-a x_2^{(k)}$

$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}\left[-a x_1^{(k+1)}\right]=-\frac{1}{2}a x_1^{(k+1)}$

$x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)})$

5.（10分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$，求出 A 的 Jardan 标准型。

解：$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\cancel{\lambda-1}&1&0&0\\1&\lambda-1&0&0\\-1&1&\lambda-1&1\\1&-1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)^2$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$

$\lambda_1=0$ 的代数重复度为 2，$rank(\lambda_1 I-A)=2$，$\therefore d_1=n-rank(\lambda_1 I-A)=2$

$\lambda_2=2$ 的代数重复度为 2，$rank(\lambda_2 I-A)=3$，$\therefore d_2=n-rank(\lambda_2 I-A)=1$

$\because m_2>d_2$ 是亏损的。 ?

$\therefore$ A 的 Jardan 标准型为：

$$J=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

三、证明题（6分）设 A 为 n 阶方阵，若 $\rho(A)<1$，则在 $C^{n\times n}$ 中存在一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|A\|<1$。

?

$\rho(A)<1$

~~$\rho(A)\le\|A\|$~~

证 $\rho(A)<1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$

于是 对 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\rho(A))>0$

$\frac{1+\rho(A)}{2}<1$

$\|A\|<\rho(A)+\varepsilon<1$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho(A)+\rho(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho(A)<1$ $\rho(A)<1$