第7章

常微分方程的数值解法

考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad a \le t \le b \\ u(a) = u_0 \end{cases} \tag{6-1}$$

或与其等价的积分方程

$$u(t) = u_0 + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{6-2}$$

若 $f(t,u)$ 满足Lipschitz条件，即存在常数 L ，对任意 $t \in [a,b]$ ，均有

$$\left| f(t,u) - f(t,\bar{u}) \right| \le L \left| u - \bar{u} \right|$$

则（**6-1**）的解存在且唯一。

首先我们利用数值积分公式建立求解（6-1）或（6-2）的数值方法。

什么是数值解法?

它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列事先取定的 $[a,b]$ 中的离散点（称为节点）

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b$$

（通常取成等距，即 $t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, \cdots, N$ 其中 $h > 0$ 称为步长）

上求出未知函数 $u(t)$ 之值 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_N)$ 的近似值 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 。而 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 通常称为初值问题的数值解。

6.1.1 基于数值积分的解法

将节点取为 $t_n = a + nh \quad h = \dfrac{b-a}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N$

由（6-2），

$$\begin{cases} u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad (6\text{-}3)$$

如果 $u(t_n)$ 的近似值 u_n 已经求出，则通过计算**(6-3)**右端项的数值积分可求出 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1}.

一、Euler法

首先，对(6-3)右端积分项使用左矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_n, u(t_n))$$

令

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \qquad (6\text{-}4)$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为**Euler求解公式**，又称**矩形公式**。

例： 用**Euler**公式计算初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 100u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $u(t)$ 在 $t = 0.3$ 处的数值解 u_3。（取步长 $h = 0.1$，小数点后保留**4**位）。

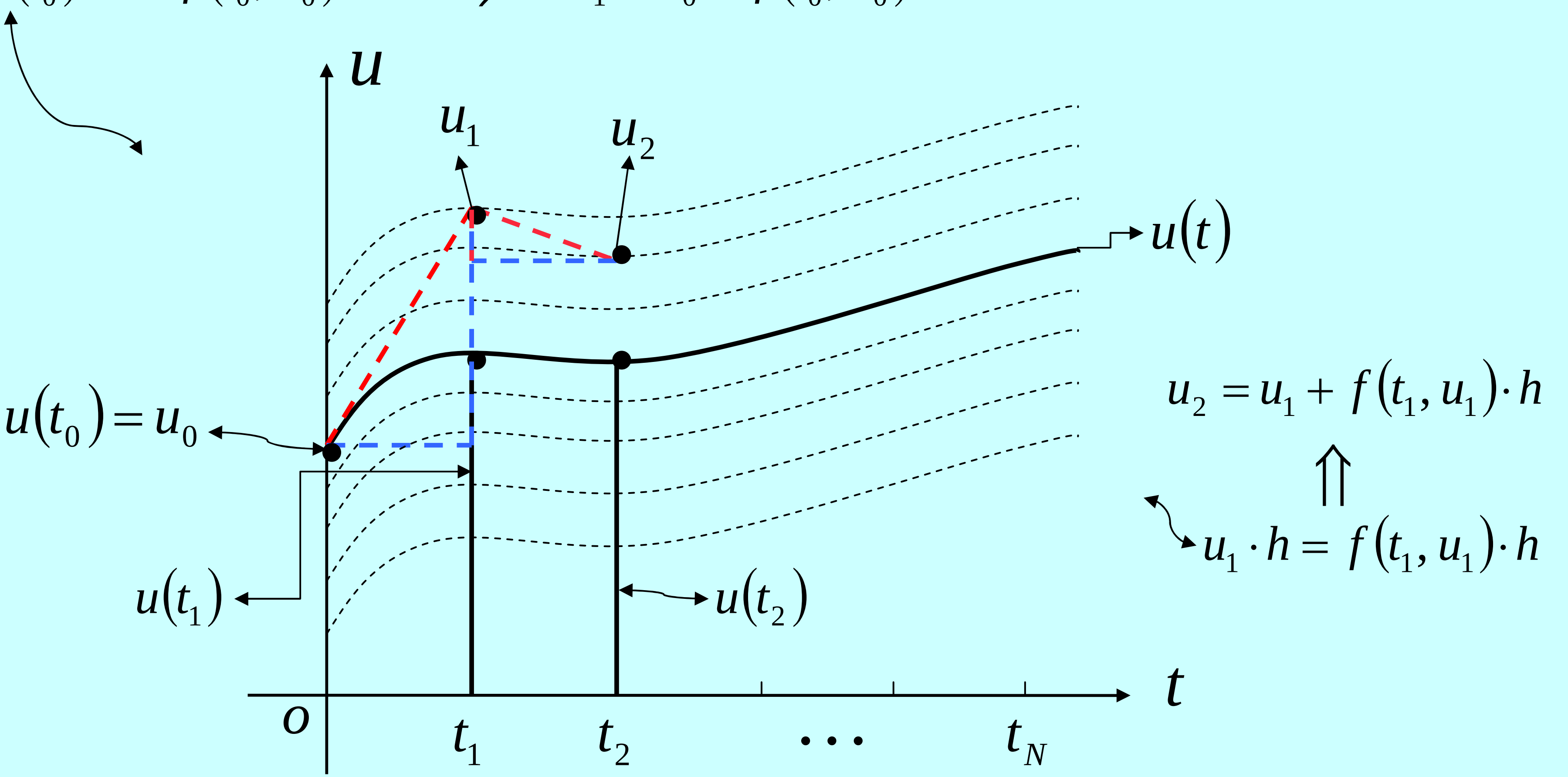
解： 相应的Euler公式：

$$u_{n+1}=u_n+h\left(t_n^2+100u_n^2\right)=u_n+0.1\times\left(t_n^2+100u_n^2\right)$$

由初值$u(0)=u_0=0$，计算得

$$u(0.1)\approx u_1=u_0+0.1\times\left(t_0^2+100u_0^2\right)$$
$$=0.0+0.1\times(0.0+100\times0.0)=0.0000$$
$$u(0.2)\approx u_2=u_1+0.1\times\left(t_1^2+100u_1^2\right)$$
$$=0.0+0.1\times\left(0.1^2+100\times0.0\right)=0.0010$$
$$u(0.3)\approx u_3=u_2+0.1\times\left(t_2^2+100u_2^2\right)$$
$$=0.0+0.1\times\left(0.2^2+100\times(0.0010)^2\right)=0.0051$$

$$u'(t_0)\cdot h = f(t_0, u_0)\cdot h \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)\cdot h$$



Euler法（切线法）的几何解释

隐Euler法

首先，对(6-3)右端积分项使用右矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

令

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_{n+1}, u_{n+1}) \tag{7-4}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为隐Euler公式，又称右**矩形公式**。

二、梯形法

对(6-3)右端的积分使用梯形求积分式计算，

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u(t))dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n)+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right)$$

令

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right) \qquad (6-5)$$

$$n=0,1,2,\cdots,N$$

上式称为**梯形公式**，简称**梯形法**.

将Euler公式与隐式Euler公式做算术平均，也可得出梯形公式

二、梯形法

对**(7-3)**右端的积分使用梯形求积分式计算，

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u(t))dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n) +$$

令 $u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right)$，$n=0,1,2,\cdots,N$ (6-5)

上式称为梯形求解公式，简称梯形法.

梯形公式与Euler公式相比要精确的多，但是梯形公式的计算量要大一些。每步计算要解一个关于 u_{n+1} 的非线性方程，从而要用如下迭代公式：

$$u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]})\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$，反复迭代，即

$$u_{n+1}^{[1]} = u_n + \frac{h}{2}\left[\, f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[0]}) \,\right]$$

如此迭代下去得到迭代序列：

$$u_{n+1}^{[0]}, \quad u_{n+1}^{[1]}, \quad u_{n+1}^{[2]}, \quad \cdots, \quad u_{n+1}^{[k]}, \cdots$$

若序列 $\{u_{n+1}^{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $u_{n+1}^{[*]}$，当 $k\to\infty$ 时，得到：

$$u_{n+1}^{[*]} = u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1}^{[*]})\right)$$

则取 $u_{n+1} = u_{n+1}^{[*]}$ 为第 $n+1$ 个近似值。

在实际计算中，通常要求满足 $\left|u_{n+1}^{[k+1]} - u_{n+1}^{[k]}\right| < \varepsilon$ 为终止条件，此时取 $u_{n+1}^{[k+1]}$ 作为 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1}。

为了避免求解非线性代数方程，可以用Euler法将它显化，建立预测——校正系统：

$$\begin{cases} \bar{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1})\right) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad (6\text{-}6)$$

求解公式(6-6)称为改进的Euler法，其中 $\bar{u}_{n+1}$称为预测值，u_{n+1} 称为校正值. 其求解顺序为：

$$u_0 \to \bar{u}_1 \to u_1 \to \bar{u}_2 \to u_2 \to \cdots \to \bar{u}_N \to u_N$$

改进的Euler法还可写成如下形式：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h\,f(t_n, u_n))\right] \qquad (6\text{-}7)$$

如果 $f(t, u(t))$ 关于 u 是线性函数，则隐式公式可以显式化。

例，若方程为： $u'(t) = t \cdot u + 5$

后Euler公式：$u_{n+1} = u_n + h(t_{n+1}u_{n+1} + 5)$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 5h}{1 - t_{n+1}h} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N$$

梯形公式：$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(t_n u_n + t_{n+1}u_{n+1} + 10\right)$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}t_{n+1}}\left(\left(1 + \frac{h}{2}t_n\right)u_n + 5h\right) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N$$

三、Milne公式

若在区间上，对(6-2)右端的使用 Simpson求积公式，得

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t,u(t))\,dt \approx \frac{t_{n+2}-t_n}{6}\left[f(t_{n+2},u(t_{n+2}))+4f\left(t_{n+1},u\left(t_{n+1}\right)\right)+f(t_n,u(t_n))\right]$$

令 $$u_{n+2}=u_n+\frac{2h}{6}\left[f(t_{n+2},u_{n+2})+4f\left(t_{n+1},u_{n+1}\right)+f(t_n,u_n)\right] \qquad (6\text{-}8)$$

(6−8) 可写成

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right] \qquad (6\text{-}9)$$

其中 $f_{n+2}=f(t_{n+2},u_{n+2})$，$f_{n+1}=f(t_{n+1},u_{n+1})$， $f_n=f(t_n,u_n)$

此为二步方法，需要已知 u_n 和 u_{n+1}，才能由(6−9)计算出 u_{n+2} 的值。二步以上的方法也称为多步法。

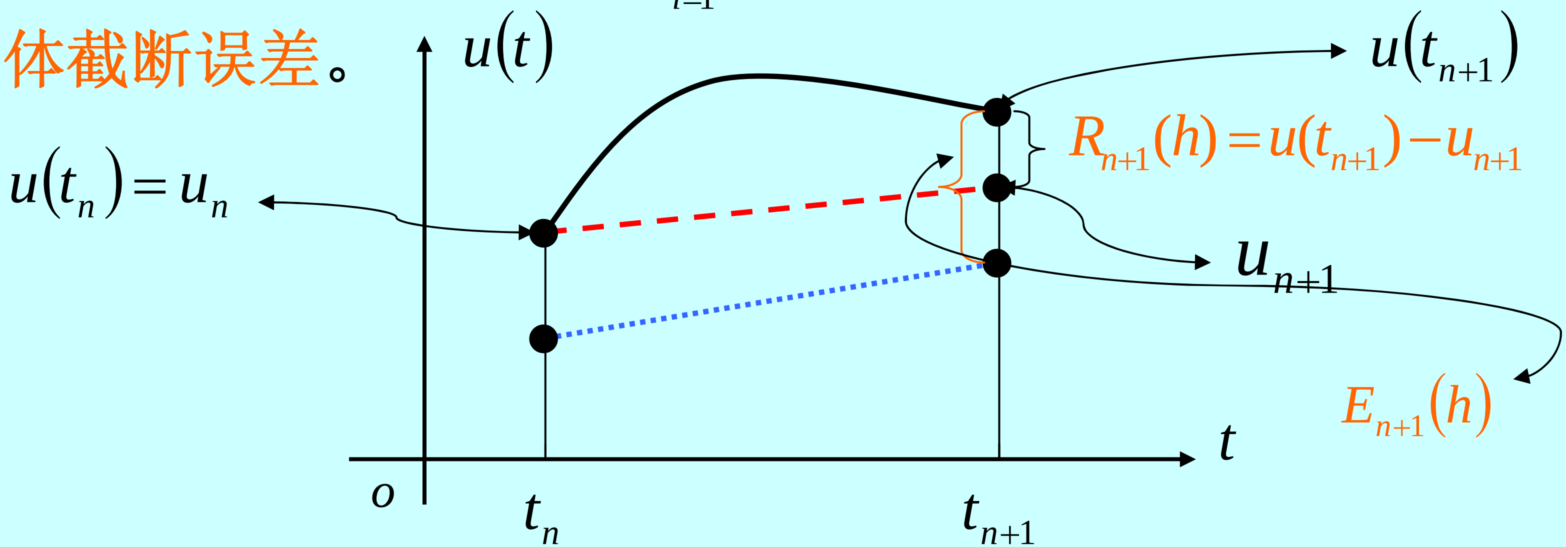
衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度。

定义 假设 $u_i=u(t_i)$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，则称

$$R_n(h)=u(t_n)-u_n$$

为求解公式第 n 步的**局部截断误差**。

定义 $E_n(h)=u(t_n)-u_n=\sum_{i=1}^{n}R_i(h)$ 为求解公式在 t_n 点上的**整体截断误差**。



如果设某求解公式的局部截断误差：$R_n(h)=O(h^{p+1})$

则我们可以证明其整体截断误差为：$E_n(h)=O(h^p)$

这样我们就称该求解公式具有 p 阶精度。

事实上，若 $R_i(h)=O(h^{p+1})$, $i=1,2,\cdots,n$，则

$$E_n(h)=\sum_{i=1}^{n}R_i(h)=\sum_{i=1}^{n}O(h^{p+1})=\sum_{i=1}^{n}h\cdot O(h^p)$$

$$=h\cdot O(h^p)\cdot n=O(h^p)\cdot n\times\frac{T}{n}=O(h^p)$$

求解公式的精度越高，计算解的精确性可能越好。通过简单的分析，可知Euler法具有一阶精度，梯形法具二阶精度。

下面利用**Taylor**展开，求**Euler**法的局部截断误差

$$
\begin{aligned}
R_n(h) &= u(t_n) - u_n = u(t_n) - \left[u_{n-1} + h\, f(t_{n-1}, u_{n-1})\right] \\
&= u(t_n) - \left[u(t_{n-1}) + h\, f(t_{n-1}, u(t_{n-1}))\right] \\
&= u(t_n) - \left[u(t_{n-1}) + h\, u'(t_{n-1})\right] \\
&= u(t_{n-1}) + h u'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2!} u'(t_{n-1}) + O(h^3) \\
&\qquad - u(t_{n-1}) - h\, u'(t_{n-1}) \\
&= \frac{h^2}{2!} u'(t_{n-1}) + O(h^3) = O(h^3)
\end{aligned}
$$

下面重点介绍微分方程的基于函数Taylor展开式的数值解法。在前面，我们已经介绍了基于数值积分的特殊的单步法与多步法。

显式单步法Euler公式： $u_{n+1}=u_n+hf(t_n,u_n)$

线性二步法公式： $u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}(f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n)$

单步法一般可写成：

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n,t_{n+1},u_{n+1};h) \quad n=0,1,2,\cdots N-1 \qquad (7\text{-}3)$$

其中 φ 是依赖于(7-1)右端的函数 $f(t,u)$。

当取 $\varphi=f(t_n,u_n)$ 时，为Euler法；

当取 $\varphi=f(t_{n+1},u_{n+1})$ 时，为后Euler法；

当取 $\varphi=\frac{h}{2}[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})]$ 时，为梯形法。

通过（**7-3**）计算结点$t_n=t_0+nh$, $n=0, 1, 2, \cdots$的近似值 u_n，每次只用到前一结点的值u_{n-1}，所以从初值u_0出发可逐步算出以后各结点的值$u_1, u_2, \cdots$, 故称为单步法。

线性多步法，它的一般公式为：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k \neq 0 \qquad \text{（7-4）}$$

其中 $f_{n+j}=f(t_{n+j},u_{n+j}),\alpha_j,\beta_j$ 是常数，α_0 和 β_0 不同时为0。按（7-4）计算 u_{n+k} 时要用到前面 k 个结点值 $u_n,u_{n+1},\cdots,u_{n+k-1}$，因此称（7-4）为多步法 或 k–步法。

又因为（7-4）关于 u_{n+j}, f_{n+j} 是线性的，所以称为线性多步法。

为使多步法的计算能够进行，除给定的初值u_0外，还要知道附加初值$u_1,u_2,\cdots,u_{k-1}$，这可用其它方法计算。若$\beta_k=0$则称（7–4）是显式的；若$\beta_k\neq0$, 则方法（7–4）是隐式的。

例如，对于线性二步法：

$$\alpha_2 u_{n+2} + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = h\left(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

当取

$$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \ \beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{3},\ \beta_2 = \frac{4}{3},$$

时，就是**Miline**法。

$$u_{n+2} = u_n + \frac{h}{3}\left(f_{n+2} + 4 f_{n+1} + f_n\right)$$

7.2　基于**Taylor**展开式的求解公式

用数值积分法只能构造一类特殊的多步法，本节我们将基于Taylor展开式来构造出更一般的求解公式。

初值问题（**7-1**），（**7-2**）的解充分光滑，将 $u(t)$ 在t_0处用**Taylor**公式展开：

$$u(t)=u(t_0)+hu'(t_0)+\frac{h^2}{2!}u''(t_0)+\cdots+\frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_0)+O\left(h^{p+1}\right) \quad \textbf{(7-5)}$$

其中

$$u(t_0)=u_0,$$

$$u'(t_0)=f(t_0,u(t_0))=f(t_0,u_0),$$

$$u''(t_0)=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} = f_t(t_0,u_0)+f(t_0,u_0)f_u(t_0,u_0)$$

$$u^{(3)}(t_0)=\frac{d}{dt}\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=t_0}=f_{tt}(t_0,u_0)+2f(t_0,u_0)f_{tu}(t_0,u_0)+f^2(t_0,u_0)f_{uu}(t_0,u_0)$$
$$+f_t(t_0,u_0)f_u(t_0,u_0)+f(t_0,u_0)\left(f_u(t_0,u_0)\right)^2$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad (7-6)$$

令 $$\varphi(t,u(t);h)=\sum_{j=1}^{p}\frac{h^{j-1}}{j!}\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}f(t,u(t)) \qquad (7\text{-}7)$$

则可将（7-5）改写成为

$$u(t_0+h)-u(t_0)=h\varphi(t_0,u(t_0);h)+O(h^{p+1})$$

舍去余项 $O(h^{p+1})$，则得 $u_1-u_0=h\phi(t_0,u_0;h)$。

一般而言，若已知u_n，则

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n;h) \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

这是一个单步法，局部截断误差为$O(h^{p+1})$，由（7-6）（7-7），可知φ关于 f 非线性。 当 p=1时，它是Euler法。由于计算$\varphi(t_n,u_n;h)$的工作量太大，一般不直接用Taylor展开法做数值计算，但可用它计算附加值。

2. 待定系数法

令 $$L_k\left[u(t);h\right]=\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)\right] \qquad (7\text{−}8)$$

设$u(t)$是初值问题（**7-1**），（**7-2**）的解，将$u(t+jh)$和$u'(t+jh)$ 在点t处进行**Taylor**展开，

$$u(t+jh)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(jh)^l}{l!}u^{(l)}(t)=u(t)+\frac{jh}{1!}u'(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(3)}(t)+\cdots$$

$$u'(t+jh)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(jh)^{l-1}}{(l-1)!}u^{(l)}(t)=u'(t)+\frac{jh}{1!}u''(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u^{(3)}(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(4)}(t)+\cdots$$

将上式代入（7−8）式，并按h的同次幂合并同类项，得

$$L_k\left[u(t);h\right]=\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(jh)^l}{l!}u^{(l)}(t)-h\beta_j\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(jh)^{l-1}}{(l-1)!}u^{(l)}(t)\right]$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\right)u(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l!}\sum_{j=0}^{k}j^l\alpha_j-\frac{1}{(l-1)!}\sum_{j=0}^{k}j^{l-1}\beta_j\right)u^{(l)}(t)\,h^l$$

即 $L_k[u(t);h]=c_0u(t)+c_1hu'(t)+c_2h^2u''(t)+\cdots+c_ph^pu^{(p)}(t)+\cdots,$

其中
$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k \\ c_1=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_p=\dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k) \\ \qquad p=2,3,\cdots \end{cases} \tag{7-9}$$

若$u(t)$有p+2次连续微商，则可选取适当k和α_j，β_j使 $c_0=c_1=c_2=\cdots=c_p=0$，而$c_{p+1}\neq 0$，即选α_j和β_j满足：

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k)=0 \\ \qquad p=2,3,\cdots \end{cases}$$

此时 $L_k[u(t);h]=c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)+O(h^{p+2})$

而 $u'(t)=f(t,u(t))$，则

$$\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j u(t_n+jh)-h\beta_j f(t_n+jh,u(t_n+jh))\right]=R_n$$

$$R_n=c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t_n)+O(h^{p+2})$$

舍去余项R_n，并u_{n+j}代替$u(t_n+jh)$，用 f_{n+j}记$f(t_{n+j},u_{n+j})$，就得到线性多步法（**7-4**），其局部截断误差：

$$R_{n+k}=L_k[u(t);h]=c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)+O(h^{p+2})$$

$c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)$称为局部截断误差主项；

c_{p+1}称为局部截断误差主项系数。

可以证明其整体截断误差$En=O(h^p)$，故称为p阶k步法。

因为（7-4）可以相差一个非零常数，所以不妨设 $\alpha_k=1$。当$\beta_k=0$时，u_{n+k}可用$u_{n+k-1}, \cdots$，u_n直接表示，故称为显式法。

反之，当$\beta_k\neq0$时，求u_{n+k}需解一个方程(一般用迭代法)，称为隐式法。

用待定函数法构造多步法的一个基本要求是选取 α_j,β_j使局部截断误差的阶尽可能高。

下面我们讨论构造一般线性二步法公式的待定系数法。此时

$k=2, \alpha_2=1$。记$\alpha_0=\alpha$，其余四个系数 $\alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2$，由

$c_0=c_1=c_2=c_3=0$ 确定，即满足方程：

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + 1 = 0 \\ c_1 = \alpha_1 + 2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 0 \\ c_3 = \dfrac{1}{6}(\alpha_1 + 8) - \dfrac{1}{2}(\beta_1 + 4\beta_2) = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{2}(\alpha_1 + 4) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\alpha_1 = -(1+\alpha), \quad \beta_0 = -\frac{1}{12}(1+5\alpha),$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3}(1-\alpha), \quad \beta_2 = \frac{1}{12}(5+\alpha),$$

所以一般二步法为

$$u_{n+2} - (1+\alpha)u_{n+1} + \alpha u_n = \frac{h}{12}[(5+\alpha) f_{n+2} + 8(1-\alpha) f_{n+1} - (1+5\alpha) f_n]$$

(7−10)

由（7−9）知道:

$$c_4 = \frac{1}{24}(\alpha_1 + 16) - \frac{1}{6}(\beta_1 + 8\beta_2) = -\frac{1}{24}(1+\alpha),$$

$$c_5 = \frac{1}{120}(\alpha_1 + 32) - \frac{1}{24}(\beta_1 + 16\beta_2) = -\frac{1}{360}(17 + 13\alpha),$$

当$\alpha \neq 1$时$c_4 \neq 0$ ，方法（7−10）是三阶二步法。

当$\alpha=-1$时$c_4=0$ ，但$c_5 \neq 0$，方法（7−10）化为：

$$u_{n+2} = u_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n) \qquad (7-11)$$

这是四阶二步法，是具有最高阶的二步法，称为**Milne**方法。

此外，若取$\alpha=0$, 则（**7-10**）为：

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{12}\left(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n\right) \qquad (7-12)$$

此为二步隐式**Adams**方法；若取α=−5 ，则（7−10）为：

$$u_{n+2}+4u_{n+1}-5u_n=2h\left(2f_{n+1}+f_n\right)$$

是显式方法。

用类似的计算过程可获得一些常用的线性多步法的局部截断误差。

当k=1时，梯形法（二阶隐式方法）：

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f_{n+1}+f_n\right) \qquad (7-13)$$

其中$\alpha_1=1,\ \alpha_0=-1,\ \beta_1=\beta_0=\frac{1}{2}$，从而有， $c_0=1-1=0,$

$$c_1=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0,\ c_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0,\ c_3=\frac{1}{3!}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\neq 0,$$

其局部截断误差为 $R_{n+1}(h)=-\frac{1}{12}h^3u^{(3)}(t_n)+O(h^4)$。

向后**Euler**法（一阶隐式方法）

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1} \qquad \textbf{（7-14）}$$

其中α_1=1，α_0=−1，β_1=1，β_0=0，从而有，

$$c_0 = 1-1 = 0, \quad c_1 = 1-1 = 0，c_2 = \left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2} \neq 0。$$

其局部截断误差为：$R_{n+1}(h) = -\dfrac{1}{2}h^2u^{(2)}(t_n) + O(h^3)$。

当 k=3时，三步三阶显式**Adams**方法：

$$u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{h}{12}\left(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n\right) \qquad \textbf{（7-15）}$$

其中

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = 0, \beta_3 = 0, \beta_2 = \frac{23}{12}, \beta_1 = -\frac{16}{12}, \beta_0 = \frac{5}{12}$$

从而有，

$$c_0 = 1 - 1 = 0,\ c_1 = 2 + 3 - \left(-\frac{5}{12} - \frac{16}{12} + \frac{23}{12}\right) = -2 + 3 - 1 = 0,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(-4 + 9) - \left(-\frac{16}{12} + \frac{23}{12} \times 2\right) = \frac{5}{2} - \frac{30}{12} = 0,$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}(-8 + 27) - \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{12} + \frac{23}{12} \times 4\right) = \frac{19}{6} - \frac{1}{24}(23 \times 4 - 16) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10} = 0,$$

$$c_4 = \frac{1}{4!}\left(-16 + 3^4\right) - \frac{1}{3!}\left(-\frac{16}{12} + \frac{23 + 8}{12}\right) = \frac{9}{4!} = \frac{3}{8} \neq 0。$$

其局部截断误差为：

$$R_{n+3}(h) = \frac{3}{8} h^4 u^{(4)}(t_n) + O(h^5)。$$

三步四阶隐式Adams方法：

$$u_{n+3}=u_{n+2}+\frac{h}{24}\left(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n\right) \qquad （7-16）$$

其局部截断误差为： $R_{n+3}(h)=-\frac{19}{720}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$。

三步四阶Hamming方法：

$$u_{n+3}=\frac{1}{8}(9u_{n+2}-u_n)+\frac{3h}{8}\left(f_{n+3}+2f_{n+2}-f_{n+1}\right) \qquad （7-17）$$

其局部截断误差为： $R_{n+3}(h)=-\frac{1}{40}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$。

四步四阶显式Adams方法：

$$u_{n+4}=u_{n+3}+\frac{h}{24}\left(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n\right) \qquad （7-18）$$

其局部截断误差为： $R_{n+4}(h)=\frac{251}{720}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$

四步四阶显式**Milne**方法： $u_{n+4}=u_n+\frac{4h}{3}\left(2f_{n+3}-f_{n+2}-2f_{n+1}\right)$

其局部截断误差为： $R_{n+4}(h)=\frac{8}{15}h^5u^{(5)}(t_n)+O(h^6)$ （7-19）

7.2.2　四阶显式Runge-Kutta法

Euler是最简单的单步法。单步法不需要附加初值，所需的存储量小，改变步长灵活，但线性单步法的阶最高为2，**Taylor**展开法，用在同一点(t_n,u_n)的高阶导数表示$\varphi(t, u(t), h)$，这不便于计算。

通过观察我们发现显式Euler法和隐**Euler**法各用到了$u(t)$在$[t,t+h]$上的一个一阶导数值，它们都是一阶方法。梯形法和改进的**Euler**法用到了$u(t)$在$[t, t+h]$上的两个一阶导数值，它们都是二阶方法。而**Runge-Kutta**型方法是用$u(t)$在$[t,t+h]$上的f在一些点的值非线性表示$f(t, u(t), h)$，使单步法的局部截断误差的阶和**Taylor**展开法相等。

Runge-Kutta方法是求解初值问题（3.1）的一类重要的经典算法，显式Runge-Kutta方法的绝对稳定区域是有限区。不适用于求解刚性方程，1964年Butcher首先提出了隐式的**Runge-Kutta**法，可用于求解刚性方程。

Runge-Kutta方法的一般结构

$$u_{n+1} = u_n + h\sum_{i=1}^{m} c_i k_i$$

$$k_i = f(t + ha_i, u_n + h\sum_{j=1}^{m} b_{ij} k_j) \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中 $t_n = t_0 + nh, (n = 0, 1, \cdots,)$，$h$为积分步长，$u_n$为$u(t_n)$的近似值，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ $(i, j=1, \cdots, m)$称为**Runge-Kutta**矩阵，其中在上面公式中未出现的元素定义为零，而$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$和$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_m)^T$分别称为**Runge-Kutta**节点和**Runge-Kutta**权。且这些系数要满足以下条件：

$$c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} b_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

通常可将这些系数排列成以下形式，成为**Butcher**数表示法：

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^T \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \\ \hline & c_1 & \cdots & c_m \end{array}$$

在公式中要用到m个$f(t,u)$的值，故称为m级**Runge-Kutta**法。

如果$j \geqslant i$时， $b_{ij}=0$，即为严格下三角矩阵，就是显式Runge-Kutta方法，此时$k_1=f(t_n, u_n)$，则由计算公式可逐个递推出$k_2, \cdots, k_m$

如果$j > i$时， $b_{ij}=0$，而对角元素b_{ii}不全为零，这时公式称为半隐式Runge-Kutta方法，这时k_i可表示为：

$$k_i = f(t + ha_i, u_n + h\sum_{j=1}^{m-1} b_{ij}k_j + hb_{ii}k_i) \quad i = 1, \cdots, m,$$

这是关于k_i的非线性方程式，因此每一步要解m个非线性方程式，若b_{ii}均相等，则成为对角隐式**Runge-Kutta**方法简称DIRK方法，此时由上式求ki的系数矩阵相同，故每步只求一个非线性方程式的解。

一般隐式**Runge-Kutta**方法的右端包含全部$k_1, k_2, \cdots, k_m$，故求$k_1, k_2, \cdots, k_m$需要解一个m×m阶的非线性方程组。

为得到**Runge-Kutta**公式需要确定公式的系数$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{c}$。

下面我们用Taylor展开思想来构造高阶显式**Runge-Kutta**公式。

假设三组系数和已给定，则求解（7-1），（7-2）的一般显式**Runge-Kutta**法的计算过程如下：

$$u_{n+1} = u_n + h\phi(t_n, u_n, h), \qquad n = 0,1,\cdots \tag{7-20}$$

其中

$$\phi(t, u(t), h) = \sum_{i=1}^{m} c_i k_i \tag{7-21}$$

$$\left\{\begin{aligned}
k_1 &= f(t,u), \\
k_2 &= f(t+ha_2, u(t)+hb_{21}k_1), \quad b_{21} = a_2, \\
k_3 &= f(t+ha_3, u(t)+h(b_{31}k_1+b_{32}k_2)), \quad b_{31}+b_{32} = a_3, \\
&\cdots \quad \cdots \\
k_m &= f(t+ha_m, u(t)+h\sum_{j=1}^{m-1} b_{mj}k_j), \quad \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} = a_m
\end{aligned}\right. \tag{7-22}$$

先引进若干记号，首先$[t,t+h]$取上的m个点：

$$t_1 = t \le t_2 \le t_3 \le \cdots \le t_m \le t + h,$$

令 $t_i = t + a_i h = t_1 + a_i h, \quad i = 2,\cdots,m$，此时 $\boldsymbol{a} = (0, a_2, \cdots, a_m)^T$，

$\boldsymbol{B}$为严格三角矩阵。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{21} & & & \\ b_{31} & b_{32} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm-1} \end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{B}$与h无关，$\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} = a_i, \quad i = 2,\cdots,m, \quad c_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1$

系数$\{a_i\}$, $\{b_{ij}\}$和$\{c_i\}$将按如下原则确定：

假定$u(t_n)=u_n$ ，由显式**Runge-Kutta**公式得到的数值解u_{n+1}与方的精确解$u(t_{n+1})$之差，如果有

$$u(t_{n+1}) - u_{n+1} = O(h^{p+1})$$

将$u(t_{n+1})$在t_n处**Taylor**展开，再将k_i关于h展开，代入到（7-21）式中，使$h^l(l=0, 1, \cdots, p-1)$的系数和(7−7)式同次幂的系数相等。

如此得到的算法（7−20）称为m级p阶**Runge-Kutta**法。

现在推导一些常用的计算方案，特别地，给出m=3显式Runge-Kutta法的推导。

首先将$u(t+h)$在 t 处展开到 h 的三次幂, 即：

$$u(t+h)=u(t)+\sum_{l=1}^{3}\frac{h^l}{l!}u^{(l)}(t)+O(h^4)=u(t)+h\tilde{\varphi}(t,u(t),h), \quad (7-23)$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}(t,u,h)=f+\dfrac{1}{2}h\tilde{f}+\dfrac{1}{6}h^2(\tilde{f}f_u+\hat{f})+O(h^3)\\ \tilde{f}=f_t+ff_u\\ \hat{f}=f_{tt}+2ff_{tu}+f^2f_{uu}\end{cases} \quad (7-24)$$

其次，由二元函数f在点$(t,u(t))$处的**Taylor**展开式可得：

$$k_1 = f(t,u(t)) = f,$$

$$k_2 = f(t+ha_2, u+ha_2k_1)$$

$$= f + ha_2(f_t + k_1 f_u) + \frac{1}{2}h^2 a_2{}^2\left(f_{tt} + 2k_1 f_{tu} + k_1{}^2 f_{uu}\right) + O(h^3)$$

$$= f + ha_2\tilde{f} + \frac{1}{2}h^2 a_2{}^2\hat{f} + O(h^3)$$

$$k_3 = f + ha_3\tilde{f} + h^2(a_2 b_{32} f_u \tilde{f} + \frac{1}{2}a_3{}^2\hat{f}) + O(h^3)$$

于是，代入（7-21）中，即

$$\phi(t,u,h) = \sum_{i=1}^{3} c_i k_i = \left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\right)$$

$$= c_1 f + c_2\left(f + ha_2\left(f_t + k_1 f_u\right) + \frac{1}{2}a_3 \hat{f} h^2\right)$$

$$+ c_3\left(f + a_3\tilde{f}h + \left(a_2 b_{32} f_u \tilde{f} + \frac{1}{2}a_3^2\hat{f}\right)h^2\right) + O(h^3)$$

并合并 $h^l(l=0, 1, 2)$ 的

$$\phi(t,u,h)=\sum_{i=1}^{3}c_ik_i=(c_1+c_2+c_3)f+h(a_2c_2+a_3c_3)\tilde{f}+$$

$$+\frac{1}{2}h^2\left[2a_2b_{32}c_3f_u\tilde{f}+(a_2{}^2c_2+a_3{}^2c_3)\hat{f}\right]+O(h^3) \qquad (7\text{-}25)$$

由已知

$$\tilde{\varphi}(t,u,h)=u'(t)+u''(t)\frac{1}{2}h+u^{(3)}(t)\frac{1}{6}h^2$$

$$=f+\frac{1}{2}h\tilde{f}+\frac{1}{6}h^2(\tilde{f}f_u+\hat{f})+O(h^3)$$

其中 $\tilde{f}=f_t+ff_u$， $\hat{f}=f_{tt}+2ff_{tu}+f^2f_{uu}$。

比较 $\phi(t,u,h)$ 和 $\tilde{\phi}(t,u,h)$ 的同次幂系数，可得以下具体方案：

（一）m=1 此时 c_1=c_2=0， $\Phi(t, u, h)$=$c_1 f$，比较h的零次幂，知

$$\phi(t,u,h) = f,$$

方法（7-21）为一级一阶**Runge-Kutta**法，实际上为Euler法。

（二）m=2, 此时 c_3=0

$$\phi(t,u,h) = (c_1 + c_2)f + ha_2c_2\tilde{f} + \frac{1}{2}h^2a_2{}^2c_2\hat{f} + O(h^3)$$

与 $\tilde{\phi}(t,u,h)$ 比较1, h的系数，则

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad a_2c_2 = \frac{1}{2}$$

它有无穷多组解，从而有无穷多个二级二阶方法。

三个常见的方法是：

（1） $c_1=0, c_2=1, a_2=\frac{1}{2}$， 此时

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+hk_2, \\ \qquad k_1=f(t_n,u_n), \\ \qquad k_2=f\left(t_n+\frac{1}{2}h, u_n+\frac{1}{2}hk_1\right) \end{cases} \tag{7-27}$$

称为中点法。

其Butcher表为：

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

（2） $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$，$a_2 = 1$， 此时

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 = f(t_n, u_n), \\ k_2 = f(t_n + h, u_n + hk_1) \end{cases} \tag{7-27}$$

称为改进的Euler法。

其Butcher表为

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

（3）$c_1=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{3}{4}$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，此时

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{4}\left(k_1+3k_2\right), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f\left(t_n+\dfrac{2}{3}h,u_n+\dfrac{2}{3}hk_1\right) \end{cases}$$

其Butcher表为：

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \dfrac{2}{3} & 1 & \\ \hline & \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \end{array}$$

（三）m=2 比较（7-24）和（7-25），令 $1, h, h^2$ 的系数相等，并注意 $\tilde{f}, \hat{f}$ 的任意性，得

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, \qquad a_2 c_2 + a_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_2^{\,2} c_2 + a_3^{\,2} c_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_2 b_{32} c_3 = \frac{1}{6}.$$

四个方程不能完全确定六个系数，因此这是含两个参数的三级三阶方法类。　常见方案有：

（1）Heun三阶方法。　此时取

$$c_1 = \frac{1}{4},\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{3}{4},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{2}{3},\ b_{32} = \frac{2}{3}。$$

$$
\begin{cases}
u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{4}\left(k_1 + 3k_3\right), \\
k_1 = f(t_n, u_n), \\
k_2 = f\left(t_n + \dfrac{1}{3}h, u_n + \dfrac{1}{3}hk_1\right) \\
k_3 = f\left(t_n + \dfrac{2}{3}h, u_n + \dfrac{2}{3}hk_2\right)
\end{cases}
\tag{7-28}
$$

Butcher表为：

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

（2）Kutta三阶方法， 此时

$$c_1=\frac{1}{6},\ c_2=\frac{2}{3},\ c_3=\frac{1}{6},\ \ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=1,\ b_{32}=2。$$

方法为：

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{6}h(k_1+4k_2+k_3), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3=f(t_n+h,u_n-hk_1+2hk_2). \end{cases} \tag{7-29}$$

Butcher表为：

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

（3）**Nystrom三阶方法**， 此时

$$c_1=\frac{1}{4},\ c_2=\frac{3}{8},\ c_3=\frac{3}{8},\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{2}{3},\ b_{32}=\frac{2}{3}。$$

方法为：

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{4}\left(k_1+\dfrac{3}{2}k_2+\dfrac{3}{2}k_3\right), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f\left(t_n+\dfrac{2}{3}h,u_n+\dfrac{2}{3}hk_1\right), \\ k_3=f\left(t_n+\dfrac{2}{3}h,u_n+\dfrac{2}{3}hk_2\right)。 \end{cases} \qquad (7\text{–}29)$$

Butcher表为：

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

（四）m=4将（7-24）和（7-25）展开到h^3, 比较 $h^i(i=0,1,2,3)$的系数，则含13个待定系数的11个方程，由此得到含两个参数的四级四阶Runge-Kutta方法类，其中最常用的有以下两个方法：

经典四阶**Runge-Kutta**方法：

$$
\begin{cases}
u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\
k_1=f(t_n,u_n), \\
k_2=f\left(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_1\right), \\
k_3=f\left(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_2\right), \\
k_4=f(t_n+h,u_n+hk_3).
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{8}(k_1+3k_2+3k_3+k_4), \\
k_1=f(t_n,u_n), \\
k_2=f\left(t_n+\dfrac{1}{3}h,u_n+\dfrac{1}{3}hk_1\right), \\
k_3=f\left(t_n+\dfrac{2}{3}h,u_n-\dfrac{1}{3}hk_1+hk_2\right), \\
k_4=f(t_n+h,u_n+hk_3).
\end{cases}
$$

（**7-30**）

Butcher表分别为：

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

以上讨论的是m级**Runge-Kutta**法在m=1, 2, 3, 4时，可分别得到最高阶级一、二、三、四阶，但是，通常m级Runge-Kutta方法最高阶不一定是m阶。若设$p(m)$是m级**Runge-Kutta**方法可达到的最高阶，可证：

$$p(5)=4,\ p(6)=5,\ p(7)=6,\ p(8)=6,\ p(9)=7。$$

例1 分别用Euler法，改进的Euler法(7-27)和经典**Runge-Kutta**法(7-30)求解初值问题：

$$u' = 1 - \frac{2tu}{1+t^2}, \quad 0 \le t \le 2, \quad u(0) = 0$$

解：Euler法计算公式为：$u_{n+1} = u_n + h\left(1 - \dfrac{2t_n u_n}{1+t_n^{\ 2}}\right)$,

改进的Euler法计算公式为：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2), \quad k_1 = 1 - \frac{2t_n u_n}{1+t_n^{\ 2}}, \quad k_2 = 1 - \frac{2(t_n + h)(u_n + hk_1)}{1+(t_n+h)^2},$$

经典Runge-Kutta法计算公式为：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad k_1 = 1 - \frac{2t_n u_n}{1+t_n^{\ 2}}, k_2 = 1 - \frac{2(t_n + \frac{1}{2}h)(u_n + \frac{1}{2}hk_1)}{1+(t_n + \frac{1}{2}h)^2},$$

$$k_3 = 1 - \frac{2\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\left(u_n + \frac{1}{2}hk_2\right)}{1+(t_n+h)^2}, \quad k_4 = 1 - \frac{2(t_n + h)(u_n + hk_3)}{1+(t_n+h)^2}.$$

取步长h=0. 5, t_n=0. 5n, n=0, 1, 2, 3。 并与精确解： $u(t)=\dfrac{t(3+t^2)}{3(1+t^2)}$ 作比较 ，计算结果见下表：

三个方法计算结果比较表

n	t_n	精确解 $u(t_n)$	**Euler法**		改进**Euler**法		经典**Runge-Kutta**法	
			数值解 u_n	误差	数值解 u_n	误差	数值解 u_n	误差
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0. 5	0. 433333	0. 500000	0. 066667	0. 400000	0. 033333	0. 433218	0. 000115
2	1. 0	0. 666667	0. 800000	0. 133333	0. 635000	0. 031667	0. 666312	0. 000355
3	1. 5	0. 807692	0. 900000	0. 092308	0. 787596	0. 020096	0. 807423	0. 000269
4	2. 0	0. 933353	0. 985615	0. 051282	0. 921025	0. 012308	0. 933156	0. 000171

以上我们讨论了求解问题（7-1），（7-2）的单步法和多步法。对于上述两类方法求近似解（数值解）还应关注三个问题：收敛性、误差估计和稳定性。

具体说，

一、数值方法的局部截断误差和阶；

二、在离散点t_n处的数值解u_n是否收敛到精确解$u(t_n)$；

三、数值方法的稳定性。

对于第一个问题前面我们已经讨论过，而关于数值方法收敛性问题我们在这里不详细讨论，只给出一些基本结论性的结果，即：

对单步法（**7-3**），当方法的阶p≥1时，有整体误差

$$E_n = u(t_n) - u_n = O(h^p)$$

故有 $\lim\limits_{h \to 0} E_n = 0$ ，因此方法是收敛的。

对于多步法，若方法是k步p阶法，那么（7-4）是一个k阶差分方程，引入多步法（7-4）的第一特征多项式和第二特征多项式：

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\quad \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

定义7.1 若（7-4）的第一特征多项式$\rho(\lambda)$的所有根在单位圆内或圆上（$|\lambda|\leqslant 1$），且位于单位圆周上的根都是单根，称多步法（7-4）满足根条件。

定理7.1　若线性多步法(7-4)的阶$p \geq 1$，且满足根条件，则方法是收敛的。

我们可以证明对于常用的数值方法都是满足收敛性条件的。

下面我们着重讨论第三个问题，即数值方法的稳定性问题。用多步法计算时，各种因素如初值

$$u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$$

是有误差的，且这些误差将在计算中传递下去。如果误差积累无限增长，则会歪曲真解，这样的算法是不能用的。

例2 初值问题 $u' = 4tu^{\frac{1}{2}}$，$0 \le t \le 2$；$u(0) = 1$

精确解为 $u(t) = (1+t^2)^2$。考虑二步三阶显式法：

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = 2h(2f_{n+1} + f_n)$$

取步长h=0. 1，初值u_0=1，附加值：$u_1 = (1+h^2)^2 (h = 0.1)$。

数值结果表

	精确解	数值解
0	**1.0000000**	**1.0000000**
0.1	**1.0201000**	**1.0201000**
0.2	**1.0816000**	**1.0812000**
0.3	**1.1881000**	**1.1892385**
0.4	**1.3456000**	**1.3388660**
0.5	**1.5625000**	**1.5929935**
…	**…**	**…**
1.0	**4.0000000**	**-68.639804**
1.0	**4.8841000**	**+367.26392**
…	**…**	**…**
2.0	**25.0000000**	**-6.96×10^8**

在开始几步数值解与精确解符合，但在再往后算，数值解的误差则急剧增长，完全歪曲了真解.

通常人们都是通过模型方程来讨论方法的数值稳定性。

模型方程为：

$$u' = \mu u \tag{7-32}$$

而一般形式的一阶微分方程总能化成（7-32）的形式。

本书中数值方法的稳定性也是如此。前提是求解好条件问题，其中**Re**(μ) <0。另外，我们也不考虑$h\rightarrow0$时方法的渐近稳定性。因为实际计算时，h是固定的。 当某一步u_n有舍入误差时，若以后的计算中不会逐步扩大，称这种稳定性为绝对稳定性。

此后，若不做特殊说明，都是指绝对稳定性 。

例如，对最简单的Euler法

$$u_{n+1} = u_n + hf_n, \qquad n = 0, 1, 2\cdots \qquad (7\text{-}33)$$

用其求解模型方程（7−32）得到

$$u_{n+1} = u_n + h\mu u_n = (1+\mu h)u_n, \qquad n = 0, 1, 2\cdots$$

当u_n有舍入误差时，其近似解为 $\tilde{u}_n$ ，从而有

$$\tilde{u}_{n+1} = (1+\mu h)\tilde{u}_n$$

取 $\varepsilon_n = u_n - \tilde{u}_n$ ，得到误差传播方程

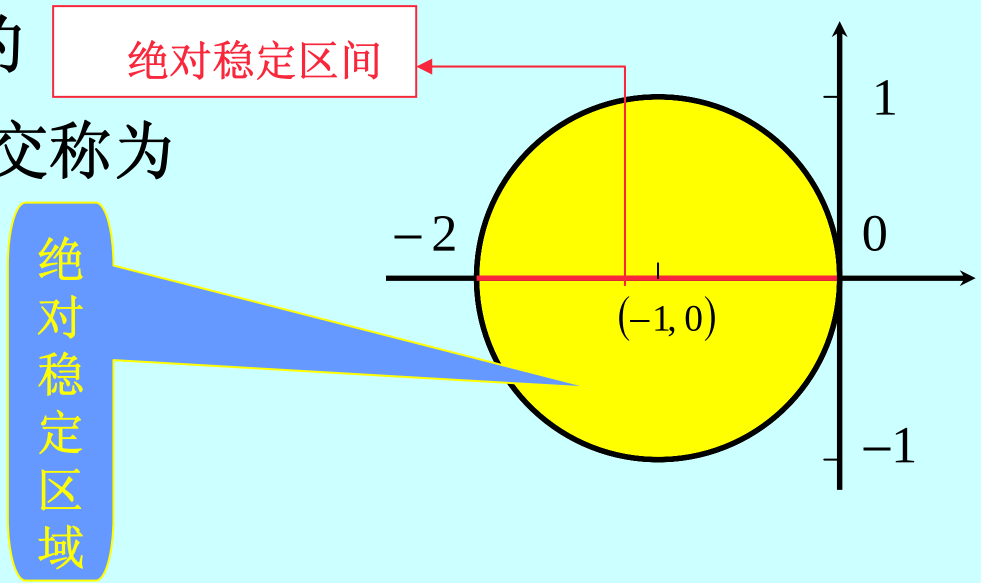
$$\varepsilon_{n+1} = (1+\mu h)\varepsilon_n,$$

记 $\bar{h}=\mu h$，只要 $|1+\bar{h}|<1$，则显式Euler方法的解和误差都不会恶性发展，此时方法绝对稳定。又由于实数$\mu<0$，从 $|1+\bar{h}|<1$，可得 $-2<\bar{h}<0$。即 $0<h<\dfrac{2}{-\mu}$ 时，（**7-33**）绝对稳定，

若μ为复数，在 $\bar{h}=\mu h$ 的复平面上，则 $|1+\bar{h}|<1$ 表示为以$(-1,0)$为圆心，1为半径的单位圆。

定义7.2 一个数值方法用于求解模型问题（7-32），若在平面中的某一区域**D**中方法都是绝对稳定的，而在区域**D**外，方法是不稳定的，则称**D**是方法的绝对稳定区域；它与实轴的交称为绝对稳定区间。

例如，显式Euler方法的绝对稳定区域、区间。如图



下面考察**Runge-Kutta**法的绝对稳定性。

根据定义，在 $m=p$阶**Runge-Kutta**法（7−20）取 $f=\mu u$，则

$$k_1=\mu u_n$$

$$k_2=\mu(1+b_{21}\mu h)u_n=\mu P_1(\mu h)u_n$$

$$k_3=\mu(u_n+h\sum_{j=1}^{2}b_{3j}k_j)=\mu(1+b_{31}\mu h+b_{32}\mu hP_1(\mu h))u_n=\mu P_2(\mu h)u_n$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$k_m=\mu P_{m-1}(\mu h)u_n$$

（其中$\boldsymbol{P}_i(\lambda)$是 i 次多项式），从而有：

$$u_{n+1}=u_n+\mu h(\sum_{i=1}^{m}c_iP_{i-1}(\mu h))u_n=u_n+P_m(\mu h)u_n\qquad n=0,1,\cdots$$

注意，$u' = \mu u$ 的解 $u(t) = e^{\mu u}$ 且 $u^{(j)}(t) = \mu^j u \quad j = 0,1,\cdots,p$

则

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2!}u''(t_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_n) + O\left(h^{p+1}\right)$$

$$= (1 + \mu h + \frac{(\mu h)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mu h)^p}{p!})u(t_n) + O\left(h^{p+1}\right)$$

若为p阶方法，则应有

$$R(h) = \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{(\mu h)^k}{k!} - \left(1 + P_m(\mu h)\right)\right] u(t_n) + O(h^{p+1})$$

从而 $$1+P_m(\mu h)=\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{(\mu h)^k}{k!}\right)$$

记 $\bar{h}=\mu h$ ，则可将上式写成

$$u_{n+1}=\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\bar{h}^k}{k!}\right)u_n=\lambda(\bar{h})u_n \qquad n=0,1,\cdots$$

进而误差传播方程为： $\varepsilon_{n+1}=\lambda(\bar{h})\varepsilon_n \qquad m=1,2,3,4$

其中 $$\lambda(\bar{h})=1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{m!}\bar{h}^m.$$

注意，当 $m=1,2,3,4$ 时，解不等式 $|\lambda(\bar{h})|<1$ 就可得显式 **Runge-Kutta**法公式绝对稳定域。当 $\mu<0$ 为实数，则得各阶（ m=1, 2, 3, 4 ）的绝对稳定区间(见下表)。

Runge-Kutta法（ m=1, 2, 3, 4 ）的绝对稳定区间表

级	$\lambda(\bar{h})$	绝对稳定区间
一级	$1+\bar{h}$	（−2，0）
二级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2$	（−2，0）
三级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3$	（−2.51，0）
四级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3+\frac{1}{24}\bar{h}^4$	（−2.78，0）

现在考察多步法（7-4），将它用于解模型方程（7-32）得到 **k**阶线性差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = \mu h \sum_{j=0}^{k}\beta_j u_{n+j} \qquad \textbf{(7-34)}$$

若取 $\bar{h} = \mu h$ ，则记（7-34）的特征方程为

$$\rho(\lambda) - \bar{h}\sigma(\lambda) = 0 \qquad \textbf{(7-35)}$$

其中

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j \lambda^j \qquad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j \lambda^j$$

由k阶线性差分方程的性质我们可以得到如下结论，若特征方程（7-35）的根都在单位圆内（｜λ｜<1），则线性多步法（7-4）关于 $\bar{h}=\mu h$ 绝对稳定, 其绝对稳定域是复平面 $\bar{h}$ 上的区域：

$$\mathbf{D}=\left\{\bar{h}\,\middle|\,\left|\lambda_j(\bar{h})\right|<1,\qquad j=1,2,\cdots,k\right\}$$

例如，对于k=1时，考虑隐式方法中最简单的后退Euler法

$$u_{n+1}=u_n+h\,f(t_{n+1},u_{n+1})\qquad n=0,\,1,\,\cdots$$

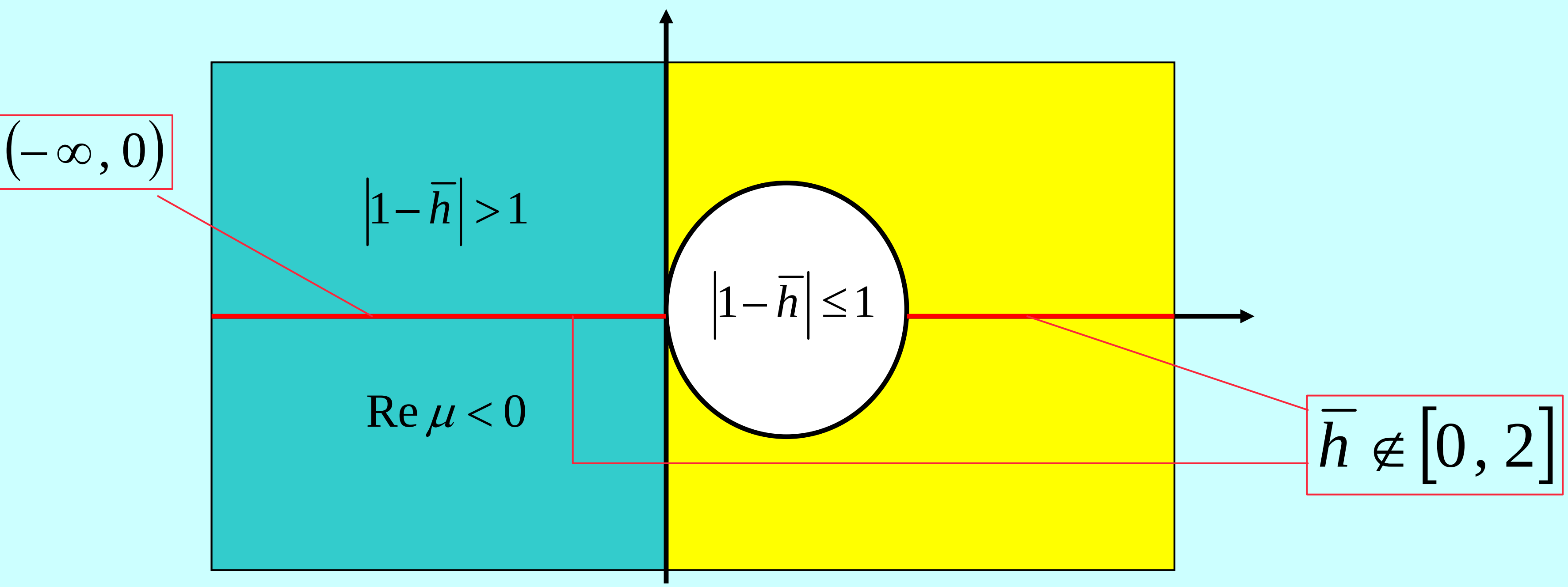
其特征方程为： $\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=(1-\bar{h})\lambda-1=0$

得 $\lambda_1=\dfrac{1}{1-\bar{h}}$，当 $|1-\bar{h}|>1$ 时，$|\lambda_1|<1$，故 $|1-\bar{h}|>1$ 就是隐式**Euler**法的绝对稳定区域。

它是 $\bar{h}$ 平面上以（1.0）为圆心的单位圆外区域。

当Reμ<0时，它位于 $\bar{h}$ 平面上y轴左侧区域。

当μ<0为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty, 0)$。



又如，梯形法 $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2}h(f_{n+1}+f_n) \quad n=0,1,\cdots$

其特征方程为：$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\dfrac{\bar{h}}{2}\right)\lambda-\left(1+\dfrac{\bar{h}}{2}\right)=0$

其根 $\lambda_1(\bar{h})=\dfrac{1+\dfrac{\bar{h}}{2}}{1-\dfrac{\bar{h}}{2}}$，当Reλ＜0时，$\left|\dfrac{1+\dfrac{\bar{h}}{2}}{1-\dfrac{\bar{h}}{2}}\right|<1$，故梯形公式的绝对稳定域是 $\bar{h}$ 平面的左半平面。绝对稳定区间为(-∞，0)。

这样检验绝对稳定性归结为检验特征方程(7-35)的根是否在单位圆内（|λ|＜1)。对此有很多判别法，如Schur准则、轨迹法。

我们这里只给出一种简单的、常用的判别法：

实系数二次方程$\lambda^2-b\lambda-c=0$的根在单位园内的充分必要条件为：

$$|b| < 1 - c < 2$$

k=1～4的隐式**Adams**类方法的绝对稳定区间（1<0为实数）。

步	阶	绝对稳定区间
1	2	（－∞，0）
2	3	（－6.0，0）
3	4	（－3.0，0）
4	5	（－1.8，0）

例 证明求解一阶常微分方程初值问题： $u' = f(t,u),\ u(0)=u_0$ 的差分格式

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{h}{12}(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n)$$

收敛并求其局部截断误差主项、绝对稳定区间。

解：由差分格式可知， $\rho(\lambda)=\lambda^2-\lambda$， $\sigma(\lambda)=\frac{1}{12}(5\lambda^2+8\lambda-1)$

令

$$\rho(\lambda)=\lambda(\lambda-1)=0\ ,$$

得$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$。则其特征值满足根条件：$|\lambda|<1$。

注意，$\alpha_0=0$, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\beta_0=-\frac{1}{12}$, $\beta_1=\frac{8}{12}$, $\beta_2=\frac{5}{12}$, 从而

$$\begin{cases} C_0 = 1 - 1 = 0 \\ C_1 = 2 - 1 - \left(-\dfrac{1}{12} + \dfrac{8}{12} + \dfrac{5}{12} \right) = 0 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}(-1+4) - \dfrac{3}{2} = 0 \\ C_3 = \dfrac{1}{6}\left(-1+2^3\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{12} + 2^2 \times \dfrac{5}{12} \right) = \dfrac{7}{6} - \dfrac{7}{6} = 0 \\ C_4 = \dfrac{1}{4!}\left(-1+2^4\right) - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{8}{12} + 2^3 \times \dfrac{5}{12} \right) = \dfrac{17}{24} - \dfrac{16}{24} = \dfrac{1}{24} \neq 0 \end{cases}$$

故此为隐式二步三阶法，其局部截断误差主项为：$\dfrac{1}{24} h^4 u^{(4)}(t_n)$。

又由

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{5}{12}\bar{h}\right)\lambda^2-\left(1+\frac{8}{12}\bar{h}\right)\lambda+\frac{1}{12}\bar{h}$$

$$=\lambda^2-\left(\frac{12+8\bar{h}}{12-5\bar{h}}\right)\lambda-\frac{\left(-\bar{h}\right)}{12-5\bar{h}}=0$$

而使得 ｜λ｜<1，的充要条件为：

$$\left|\frac{12+8\bar{h}}{12-5\bar{h}}\right|<\frac{12-4\bar{h}}{12-5\bar{h}}=1+\frac{\bar{h}}{12-5\bar{h}}<2$$

而 $1+\frac{\bar{h}}{12-5\bar{h}}<2$ 自然成立。 现在再由 $\left|\frac{12+8\bar{h}}{12-5\bar{h}}\right|<\frac{12-4\bar{h}}{12-5\bar{h}}$ 得

$$-12+4\bar{h}<12+8\bar{h}<12-4\bar{h} \Leftrightarrow -3+\bar{h}<3+2\bar{h}<3-\bar{h}$$

即有 $-3+\bar{h}<3+2\bar{h}$， 可得其却对稳定区间：$-6<\bar{h}<0$。

7.4.2　差分法

本节只考虑求解二阶线性常微分方程边值问题的差分法。

用差分法求解步骤是：

首先，对求解区间作剖分，用有限剖分结点代替连续区间，即将求解区间离散化；

其次，用数值微商公式把微分方程化为差分方程；

再而，求解已得到满足边界条件的线性代数方程组

求解此方程组，得到边值问题在节点上的函数近似值。

考虑二阶常微分方程边值问题

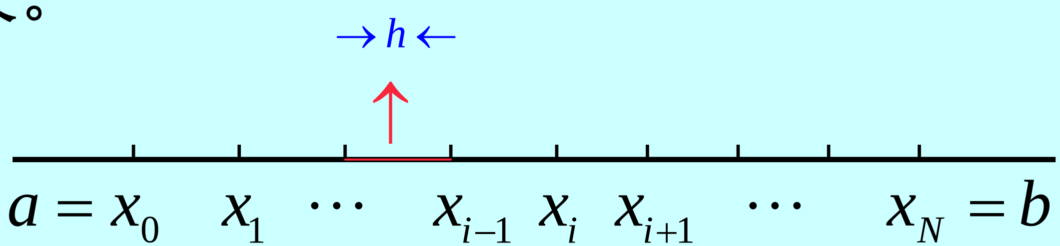
$$\begin{cases} Lu = \dfrac{d^2u}{dx^2} + p(x)\dfrac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad a < x < b & (7-56) \\ u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta & (7-57) \end{cases}$$

其中 $f, p, q \in \mathbf{C}[a, b], q(x) \leqslant 0$； α, β为给定常数。

首先，将区间 **[**a, b**]**分成 N 等分，分点为:

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \cdots, N \ , \ h = \frac{b-a}{N}$$

于是我们得区间 $\boldsymbol{I}$=[a, b]的一个网格剖分。 x_i称为网格节点, h 称为步长。



现在将方程（**7-56**）在节点x_i离散化，为此由数值微分公式

可得

$$u'(x_i)=\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+O(h^2)$$

$$u''(x_i)=\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2)$$

即在节点x_i处实现微分算子的离散化。 又设$p_i=p(x_i)$, $q_i=(x_i)$, $f_i=f(x_i)$ 则有在 x_i处可将方程（7−56）写成：

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+p_i\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+q_iu(x_i)=f_i+O(h^2)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1。$$

舍去$O(h^2)$，并用u_i近似代替 $u(\boldsymbol{x}_i)$，则得到方程组：

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_iu_i=f_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \quad (7\text{-}58)$$

$$u_0=\alpha,\qquad u_N=\beta \quad (7\text{-}59)$$

它的解u_i是$u(x)$于$x=x_i$的近似， 称（**7-58**）和（**7-59**）为逼近（**7-56**）和（**7-57**）的差分方程或差分格式。 重新改写得:

$$\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)u_{i-1}+\left(q_ih^2-2\right)u_i+\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)u_{i+1}=h^2f_i,$$

$$i=1,2,\cdots,N-1$$

将$u_0=\alpha$, $u_N=\beta$分别代入$i=1$和$i=N-1$的两个方程中， 并将已知量移到方程右端后，写成矩阵形式，得线性方程组：$\boldsymbol{AU=F}$。

其中

$$\boldsymbol{A}_{(N-1)\times(N-1)}=\begin{pmatrix} q_1h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_1 & & & \\ 1-\frac{h}{2}p_2 & q_2h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\frac{h}{2}p_{N-2} & q_{N-2}h^2-2 & 1+\frac{h}{2}p_{N-2} \\ & & & 1-\frac{h}{2}p_{N-1} & q_{N-1}h^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=(u_1, u_2, \cdots, u_{N-1})^T,$$

$$\boldsymbol{F}=\left(h^2 f_1-(1-\frac{h}{2}p_1)\alpha,\ h^2 f_2,\ \cdots,\ h^2 f_{N-2},\ h^2 f_{N-1}-(1+\frac{h}{2}p_{N-1})\beta\right)^T。$$

可见函数矩阵**A**是三对角阵。由常微分方程理论可知，当

$q(x)\leqslant 0$时，$x\in[a,b]$两点边值问题的解存在且唯一；又当步长满足 $|h\,p_i|<2$，即

$$h<\frac{2}{L},\quad L=\max_{a\le x\le b}|p(x)|$$

可证明函数矩阵A是严格对角占优，从而非奇异，我们可用消元法或迭代法求解方程组。

例2 用差分法计算线性边值问题

$$\begin{cases} u'' - u' = -2\sin x \qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ u(0) = -1, \quad u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

其解析解是: $u(x) = \sin x - \cos x$ 。

解： 已知$p(x)=-1, q(x)=0, \alpha=-1, \beta=1$。当取$N=4$，$h=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{4}$时，

节点为：$x_1=h=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=2h=\dfrac{\pi}{4}$，$x_3=3h=\dfrac{3\pi}{8}$。

相应的方程组为：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-\dfrac{h}{2} & 0 \\ 1+\dfrac{h}{2} & -2 & 1-\dfrac{h}{2} \\ 0 & 1+\dfrac{h}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{\pi^2}{32}\cdot\sin\dfrac{\pi}{8} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{64}\pi^2 \\ \dfrac{\pi}{16}-1-\dfrac{\pi^2}{32}\cdot\sin\dfrac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

将相应的参数代入上述方程组，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0.8037 & 0 \\ 1.964 & -2 & 0.8037 \\ 0 & 1.964 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0783 \\ -0.2181 \\ -1.0886 \end{pmatrix}$$

解得： $u_1 = -0.5351$， $u_2 = 0.0101$， $u_3 = 0.5503$

解析解是:

$$u\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.5412\,,\quad u\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 0,\quad u\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0.5412\text{。}$$

由于取的节点少，步长大，截断误差大，所以计算精度差。随着节点数增加（步长h缩小），精度将会明显提高。

THE END

欧拉（Leonard Euler, 公元1707-1783年），历史上最伟大的数学家之一，与阿基米德、牛顿、高斯一起被称为有史以来贡献最大的四位数学家。

欧拉从小就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。13岁上大学，两年后获得巴塞尔大学的学士学位，次年又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。1725年，欧拉来到彼得堡，开始了他的数学生涯.

1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授．过度的工作使他得了眼病，右眼失明，时年28岁．1741年欧拉到柏林担任科学院物理数学所所长。1766年，重回彼得堡任职。没过多久，左眼视力衰退，最后完全失明。不幸的事情接踵而来，1771年一场大火将他的书房和大量研究成果全部化为灰烬。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。他还口述了几本书和400篇左右的论文。当大火烧掉他几乎全部的著述之后，欧拉用了一年的时间口述了所有这些论文并作了修订。

可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，据统计他共写下了886本书籍和论文，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

如今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等，数也数不清．他对数学分析的贡献更独具匠心，《无穷小分析引论》一书便是他划时代的代表作，当时数学家们称他为“分析学的化身“．19世纪伟大数学家高斯曾说：”研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法。“著名数学家拉普拉斯（Laplace）曾说过：”读读欧拉、读读欧拉，它是我们大家的老师！”

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。

欧拉的一生，是为数学发展而奋斗的一生，他那杰出的智慧，顽强的毅力，孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德，永远是值得我们学习的。

欧 拉 Léonard Euler

莱昂纳尔·欧拉（Léonard Euler，1707～1783）是历史上著作最多的数学家，被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉--算法学家，为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年）。他在1748年、1755年和1768～1770所著关于微积分的伟大论著(《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》)，立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。