



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第7章

常微分方程的数值解法

7.1.1 一阶常微分方程的初值问题

考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u' = f(t, u), & a \leq t \leq b \\ u(a) = u_0 \end{cases} \quad (7-1)$$

或与其等价的积分方程

$$u(t) = u_0 + \int_a^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (7-2)$$

若 $f(t, u)$ 满足**Lipschitz**条件, 即存在常数 L , 对任意 $t \in [a, b]$, 均有

$$|f(t, u) - f(t, \bar{u})| \leq L|u - \bar{u}|$$

则 (7-1) 的解存在且唯一。



首先我们建立求解 (7-1) 或 (7-2) 的数值方法。

什么是数值解法？

它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列事先取定的 $[a, b]$ 中的离散点（称为节点）

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \leq b$$

通常取成等距，即 $t_i - t_0 = ih, i=1, 2, \cdots, N$ ，其中 $h>0$ 称为步长。

求出其上的未知函数 $u(t)$ 之值 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_N)$ 的近似值：

$$u_1, u_2, \cdots, u_N$$

而 u_1, u_2, \cdots, u_N 通常称为初值问题的数值解。

7.1.2 线性单步法

考虑初值问题(7-1)，首先将区间 $[a, b]$ 划分为 N 个等距小区间，小区间长度 $h = \frac{b-a}{N}$ 并选取网格点，点列 $t_i = ih, i=0, 1, \dots, N$ 。已知 $u(t_0) = u_0$ ，则可计算

$$f(t_0, u(t_0)) = f(t_0, u_0) = u'(t_0),$$

利用**Taylor**公式，在 $t=t_0$ 处将 $u(t_1)$ 展开

$$\begin{aligned} u(t_1) &= u(t_0) + u'(t_0)h + \frac{1}{2!}u''(\xi)h^2 \\ &= u(t_0) + f(t_0, u_0)h + R_0, \end{aligned}$$

其中 $R_0 = \frac{1}{2!}u''(\xi)h^2$ ，若步长 h 足够小，则可忽略二次项

R_0 ，记得：

$$u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$$



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

这里 u_1 是 $u(t_1)$ 的近似值, 利用 u_1 又可以算出 u_2 , 如此下去可算出 $u(t)$ 在所有节点上的近似值。

一般的计算公式为:

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \quad (7-3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

这就是求解初值问题的**Euler**公式。

Euler方法是最简单的数值方法。

练习 用**Euler**公式计算如下初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 100u^2 & 0 < t \leq 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $u(t)$ 在 $t=0.3$ 处的数值解 u_3 。(取步长 $h=0.1$,小数点后保留4位)

解: 相应的Euler公式:

$$u_{n+1} = u_n + h \left(t_n^2 + 100u_n^2 \right) = u_n + 0.1 \times \left(t_n^2 + 100u_n^2 \right)$$

由初值 $u(0) = u_0 = 0$, 计算得

$$\begin{aligned} u(0.1) \approx u_1 &= u_0 + 0.1 \times \left(t_0^2 + 100u_0^2 \right) \\ &= 0.0 + 0.1 \times (0.0 + 100 \times 0.0) = 0.0000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0.2) \approx u_2 &= u_1 + 0.1 \times \left(t_1^2 + 100u_1^2 \right) \\ &= 0.0 + 0.1 \times (0.1^2 + 100 \times 0.0) = 0.0010 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0.3) \approx u_3 &= u_2 + 0.1 \times \left(t_2^2 + 100u_2^2 \right) \\ &= 0.0010 + 0.1 \times (0.2^2 + 100 \times (0.0010)^2) = 0.0051 \end{aligned}$$

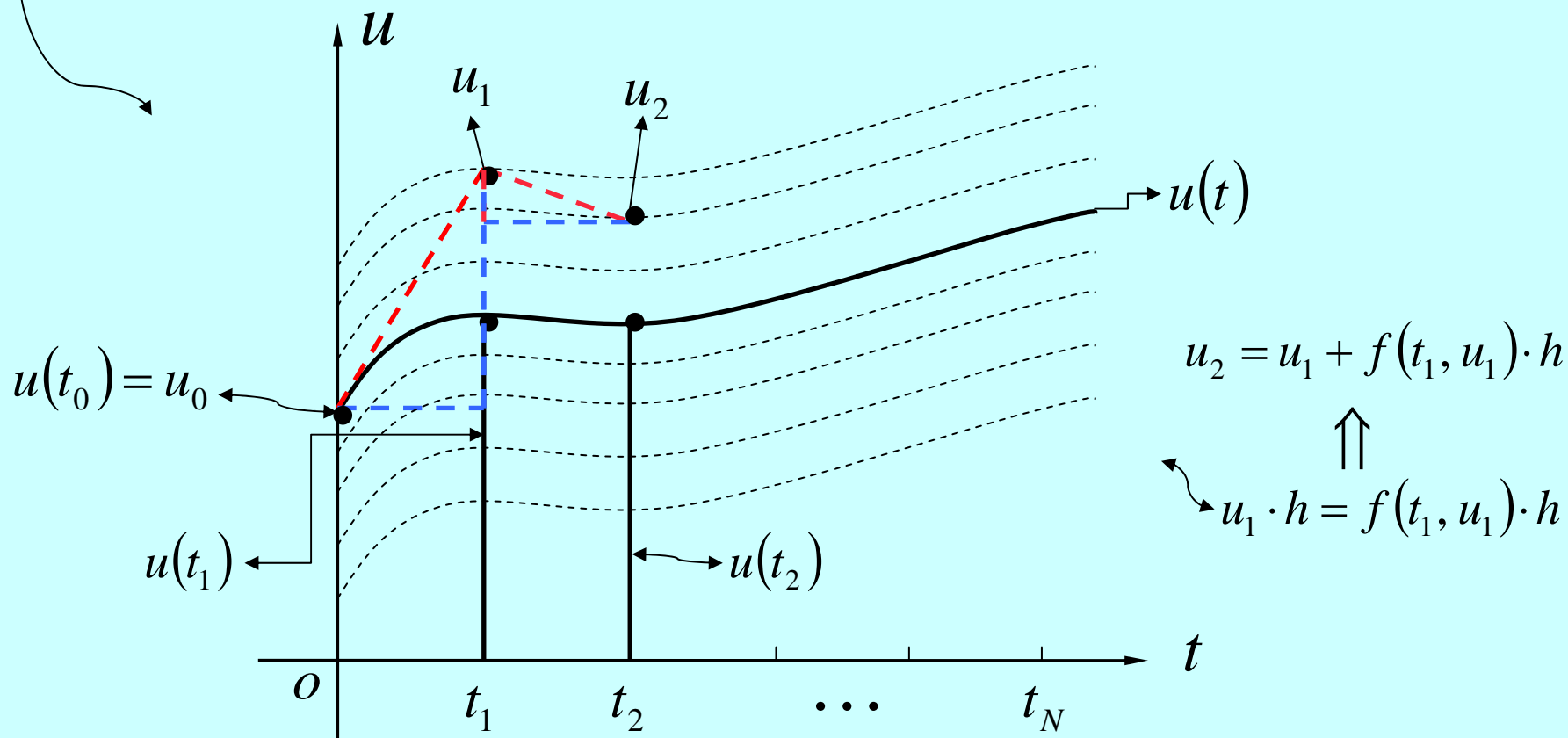


DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

$$u'(t_0) \cdot h = f(t_0, u_0) \cdot h \Rightarrow u_1 = u_0 + f(t_0, u_0) \cdot h$$



Euler法（切线法）的几何解释

利用**Taylor**公式，在 $t=t_{n+1}$ 处将 $u(t_n)$ 展开成：

$$u(t_n) = u(t_{n+1}) - u'(t_{n+1})h + \frac{1}{2!}u''(\xi)h^2$$

舍去二次项 $-\frac{1}{2!}u''(\xi)h^2$ ，用 u_n 近似代替 $u(t_n)$ 得：

一般的计算公式为：

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7-4)$$

这就是求解初值问题的**隐式Euler**公式。

将**Euler**与**隐式Euler**公式做算术平均，可得梯形公式：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \quad (7-5)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

也可用数值积分公式推到上述公式, 即令(7-2)式中的积分限为区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 的端点, 即有

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

对(7-2)右端积分项使用左矩形求积公式, 则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt \approx u(t_n) + h f(t_n, u(t_n))$$

分别用 u_n 替代 $u(t_n)$, u_{n+1} 替代 $u(t_{n+1})$, 并记

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Euler公式又称**矩形公式**。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

对(7-2)右端积分项使用右矩形求积公式, 则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt \approx u(t_n) + h f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

分别用 u_n 替代, u_{n+1} 替代 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1} , 记

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

隐式（后）Euler公式, 又称右矩形公式。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

对(7-2)右端的积分使用梯形求积分式计算,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt \approx \frac{h}{2} [f(t_n, u(t_n)) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n) +$$

令

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}))$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

得梯形法。



梯形公式与Euler公式相比要精确的多，但是梯形公式的计算量要大一些。每步计算要解一个关于 u_{n+1} 的非线性方程，从而要用如下迭代公式：

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$ ，反复迭代，即

$$u_{n+1}^{[1]} = u_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[0]}) \right]$$

一般的迭代公式表示为： $k=0, 1, 2, \dots$,

$$u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]}) \right]$$



如此迭代下去得到迭代序列：

$$u_{n+1}^{[0]}, \quad u_{n+1}^{[1]}, \quad u_{n+1}^{[2]}, \quad \cdots, \quad u_{n+1}^{[k]}, \quad \cdots$$

若序列 $\{u_{n+1}^{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $u_{n+1}^{[*]}$ ，当 $k \rightarrow \infty$ 时，得到：

$$u_{n+1}^{[*]} = u_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[*]}) \right)$$

则取 $u_{n+1} = u_{n+1}^{[*]}$ 为第 $n+1$ 个近似值。

在实际计算中，通常要求满足 $|u_{n+1}^{[k+1]} - u_{n+1}^{[k]}| < \varepsilon$ 为终止条件，此时取 $u_{n+1}^{[k+1]}$ 作为 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1} 。



为了避免求解非线性代数方程，可以用Euler法将它显化，
建立预测——校正系统：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1})) \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right. \quad (7-6)$$

此求解公式称为改进的Euler法，其中 \bar{u}_{n+1} 称为预测值，
 u_{n+1} 称为校正值。其求解顺序为：

$$u_0 \rightarrow \bar{u}_1 \rightarrow u_1 \rightarrow \bar{u}_2 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{u}_N \rightarrow u_N$$



改进的Euler法还可写成如下形式：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h f(t_n, u_n)) \right] \quad (7-7)$$

如果 $f(t, u(t))$ 关于 u 是线性函数，则隐式公式可以显式化。

例如 若方程为： $u'(t) = t \cdot u + 5$

隐式Euler公式： $u_{n+1} = u_n + h(t_{n+1}u_{n+1} + 5)$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 5h}{1 - t_{n+1}h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

梯形公式： $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(t_n u_n + t_{n+1} u_{n+1} + 10)$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}t_{n+1}} \left(\left(1 + \frac{h}{2}t_n \right) u_n + 5h \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Euler公式、隐式Euler公式、梯形公式

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}))$$



一般可统一写成：

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n, t_{n+1}, u_{n+1}; h) \quad (7-8)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

其中 φ 是依赖于(7-1)右端的函数 $f(t, u)$ 。

当取 $\varphi = f(t_n, u_n)$ 时，为**Euler法**；

当取 $\varphi = f(t_{n+1}, u_{n+1})$ 时，为**隐式Euler法**；

当取 $\varphi = \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$ 时，为**梯形法**。

通过(7-8)计算结点 $t_n = t_0 + nh, n=0, 1, 2, \dots$ 的近似值 u_{n+1} ，每次只用到前一结点的值 u_n ，所以从初值 u_0 出发可逐步算出以后各结点的值 u_1, u_2, \dots, u_N 。故称为**单步法**。

7.1.3 Taylor展开法

初值问题 (7-1) 的解充分光滑, 将 $u(t)$ 在 t_0 处用**Taylor**公式展开:

$$u(t) = u(t_0) + hu'(t_0) + \frac{h^2}{2!}u''(t_0) + \cdots + \frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_0) + O(h^{p+1}) \quad (7-9)$$

其中

$$(7-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t_0) = u_0, \\ u'(t_0) = f(t_0, u(t_0)) = f(t_0, u_0), \\ u''(t_0) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} = f_t(t_0, u_0) \frac{dt}{dt} + f_u(t_0, u_0) \frac{du(t_0)}{dt} \\ u^{(3)}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{df}{dt} \right] \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d f_t(t, u)}{dt} \right|_{t=t_0} + \left. \frac{d [f(t, u) f_u(t, u)]}{dt} \right|_{t=t_0} \\ \quad = f_{tt}(t_0, u_0) + f_{tu}(t_0, u_0) f(t_0, u_0) + \left[f_t(t_0, u_0) + f(t_0, u_0) f_u(t_0, u_0) \right] f_u(t_0, u_0) \\ \quad + \left[f_{ut}(t_0, u_0) + f_{uu}(t_0, u_0) f(t_0, u_0) \right] f(t_0, u_0) \\ \quad = f_{tt}(t_0, u_0) + 2f(t_0, u_0) f_{tu}(t_0, u_0) + f^2(t_0, u_0) f_{uu}(t_0, u_0) \\ \quad + f_t(t_0, u_0) f_u(t_0, u_0) + f(t_0, u_0) (f_u(t_0, u_0))^2 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \end{array} \right.$$



令

$$\varphi(t, u(t); h) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \frac{d^j u(t)}{dt^j} h^{j-1} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \frac{d^{j-1} f(t, u(t))}{dt^{j-1}} h^{j-1} \quad (7-11)$$

则可将 (7-9) 改写成为

$$u(t_0 + h) - u(t_0) = h \varphi(t_0, u(t_0); h) + O(h^{p+1})$$

舍去余项 $O(h^{p+1})$, 则得 $u_1 - u_0 = h \varphi(t_0, u_0; h)$ 。

一般而言, 若已知 u_n , 则

$$u_{n+1} = u_n + h \varphi(t_n, u_n; h) \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

这是一个单步法, 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$, 由 (7-10) (7-11), 可知 φ 关于 f 是非线性的, 当 $p=1$ 时, 它是 **Euler** 法。

由于计算 $\varphi(t_n, u_n, h)$ 的工作量过大, 一般不直接用 **Taylor** 展开法做数值计算, 但可用它计算附加值。



DUT

大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

THE END



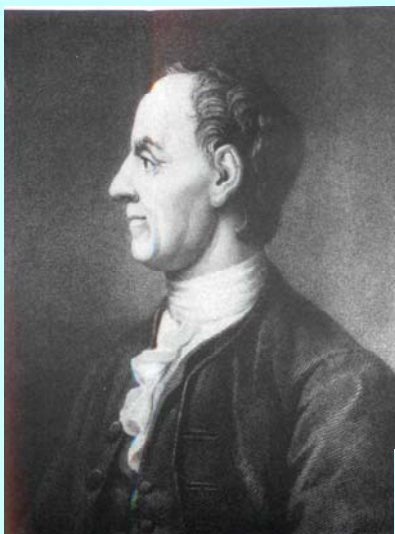
欧拉（Leonard Euler, 公元1707-1783年），历史上最伟大的数学家之一，与阿基米德、牛顿、高斯一起被称为有史以来贡献最大的四位数学家。

欧拉从小就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。13岁上大学，两年后获得瑞士巴塞尔大学的学士学位，次年又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。1725年，欧拉来到彼得堡，开始了他的数学生涯。

1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授。过度的工作使他得了眼病，右眼失明，时年28岁。1741年欧拉到柏林担任科学院物理数学所所长。1766年，重回彼得堡任职。没过多久，左眼视力衰退，最后完全失明。不幸的事情接踵而来，1771年一场大火将他的书房和大量研究成果全部化为灰烬。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。他还口述了几本书和400篇左右的论文。当大火烧掉他几乎全部的著述之后，欧拉用了一年的时间口述了所有这些论文并作了修订。

可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，据统计他共写下了886本书籍和论文，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。



他被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉——算法学家，为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年），他在1748年1755年和1768~1770所著关于微积分的伟大论著（《无穷小分析引论》、《微分学原理》，《积分学原理》），立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。

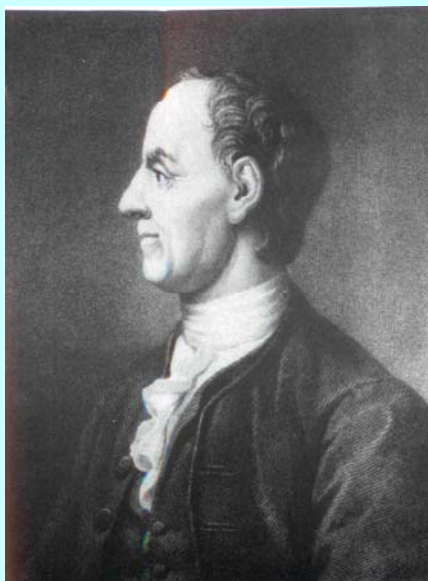
据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午他计算气球上升的规律消遣——像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。

欧拉的一生，是为数学发展而奋斗的一生，他那杰出的智慧，顽强的毅力，孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德，永远是我们值得学习的。

欧拉 Léonard Euler



莱昂纳尔·欧拉 (Léonard Euler, 1707~1783) 是历史上著作最多的数学家, 被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他: “欧拉计算毫不费力, 就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”, 欧拉—算法学家, 为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年 (1727年)。他在1748年、1755年和1768~1770所著关于微积分的伟大论著 (《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》), 立即就成为了经典著作, 并且在四分之一三个世纪中, 继续鼓舞着想成为大数学家的年轻人。

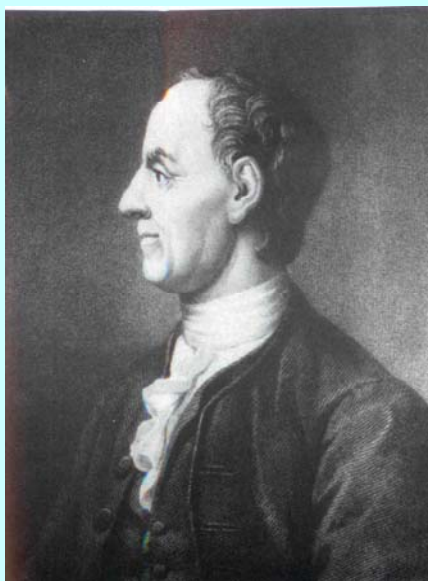
欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔, 其父是牧师, 欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文, 同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说, 在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中, 他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解 (月球理论) 的第一人。

在生命最后17年中他完全失明, 这并没有妨碍他的无以伦比的多产的; 他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领, 不仅心算算术类型的问题, 也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式, 都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷, 他享年77岁, 于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样, 在他的石板上计算, 然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的, 欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿, 他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候, 欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来, 他说了一句“我死了”, 就中止了他的生命和计算。

欧拉 Léonard Euler



莱昂纳尔·欧拉 (Léonard Euler, 1707~1783) 是历史上著作最多的数学家, 被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他: “欧拉计算毫不费力, 就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”, 欧拉——算法学家, 为解决特殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年 (1727年)。他在1748年、1755年和1768~1770所著关于微积分的伟大论著 (《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》), 立即就成为了经典著作, 并且在四分之一三个世纪中, 继续鼓舞着想成为大数学家的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔, 其父是牧师, 欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文, 同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说, 在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中, 他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解 (月球理论) 的第一人。

在生命最后17年中他完全失明, 这并没有妨碍他的无以伦比的多产的; 他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领, 不仅心算算术类型的问题, 也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式, 都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷, 他享年77岁, 于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣一像往常一样, 在他的石板上计算, 然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的, 欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿, 他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候, 欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来, 他说了一句“我死了”, 就中止了他的生命和计算。