

# 数据结构基础——堆、并查集

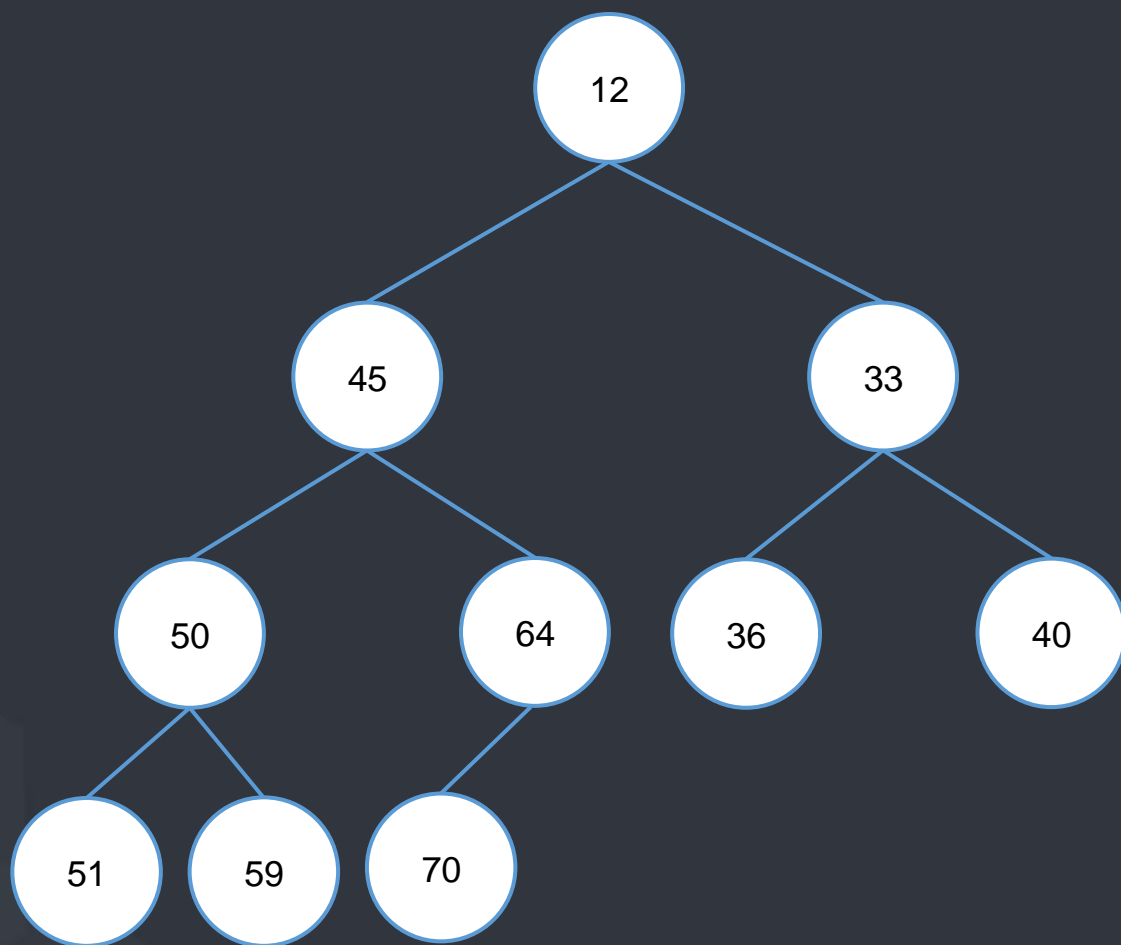
邓丝雨



## 优先队列/堆

- 优先队列又名二叉堆，是特殊的二叉树。二叉堆有两种：最大堆和最小堆。
- 最大堆（大根堆）：父结点的键值总是大于或等于任何一个子节点的键值。
- 最小堆（小根堆）：父结点的键值总是小于或等于任何一个子节点的键值。

# 删除堆顶





## 例1：合并果子

- 在一个果园里，多多已经将所有果子打了下来，而且按果子的不同种类分成了不同的堆。多多决定把所有的果子合成一堆。每一次合并，多多可以把两堆果子合并到一起，消耗的体力等于两堆果子的重量之和。可以看出，所有的果子经过 $n-1$ 次合并之后，就只剩下一堆了。多多在合并果子时总共消耗的体力等于每次合并所耗体力之和。假定每个果子重量都为1，并且已知果子的种类数和每种果子的数目，你的任务是设计出合并的次序方案，使多多耗费的体力最少，并输出这个最小的体力耗费值。



## 例2:

- N个数按顺序加入数组，每次加入的时候就输出其中位数



### 例3: [JSOI2007]建筑抢修

- 小刚在玩JSOI提供的一个称之为“建筑抢修”的电脑游戏：经过了一场激烈的战斗，T部落消灭了所有Z部落的入侵者。但是T部落的基地里已经有N个建筑设施受到了严重的损伤，如果不尽快修复的话，这些建筑设施将会完全 毁坏。
- 现在的情况是：T部落基地里只有一个修理工人，虽然他能瞬间到达任何一个建筑，但是修复每个建筑都需要一定的时间。同时，修理工人修理完一个建筑才能修理下一个建筑，不能同时修理多个建筑。
- 如果某个建筑在一段时间之内没有完全修理完毕，这个建筑就报废了。你的任务是帮小刚合理的制订一个修理顺序，以抢修尽可能多的建筑。

# 并查集

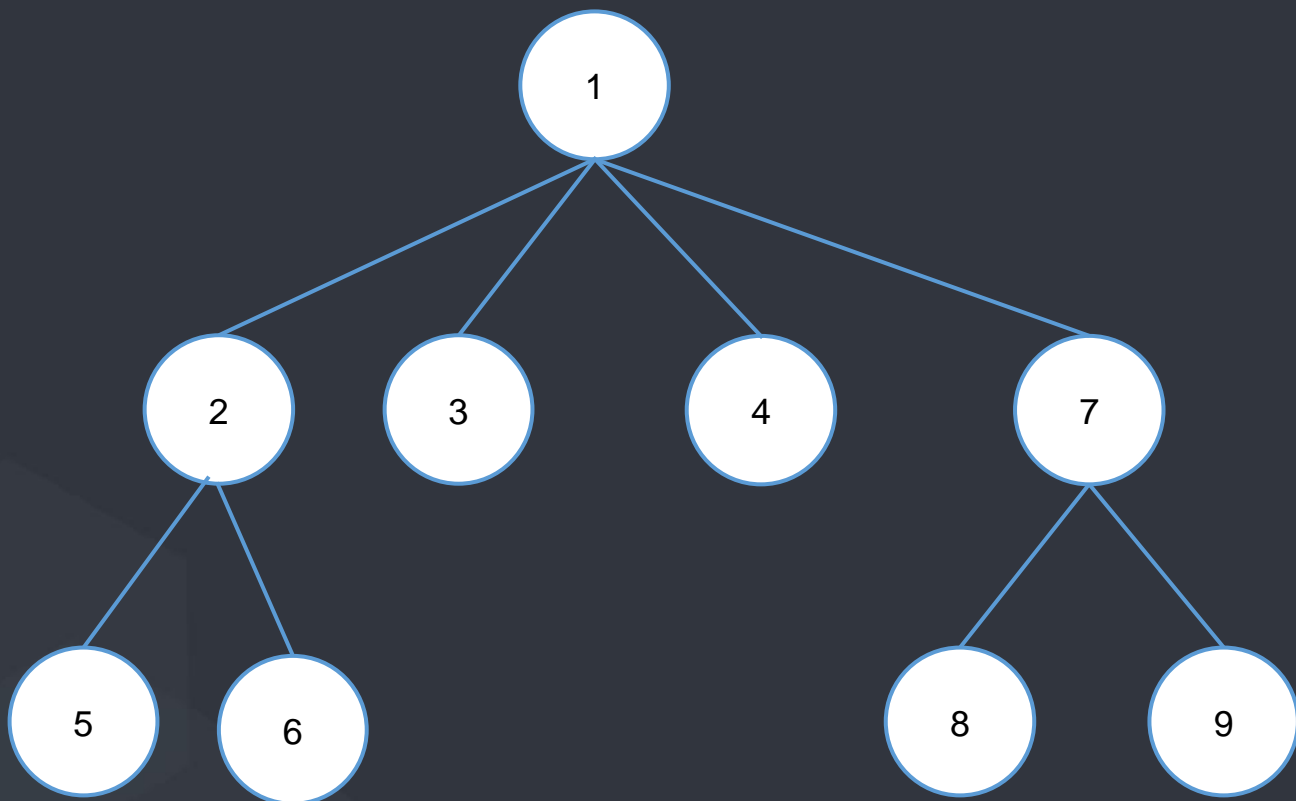


# 并查集

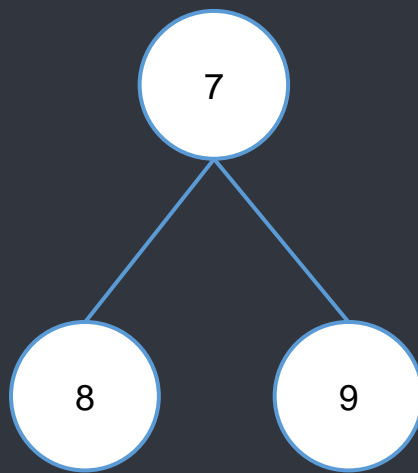
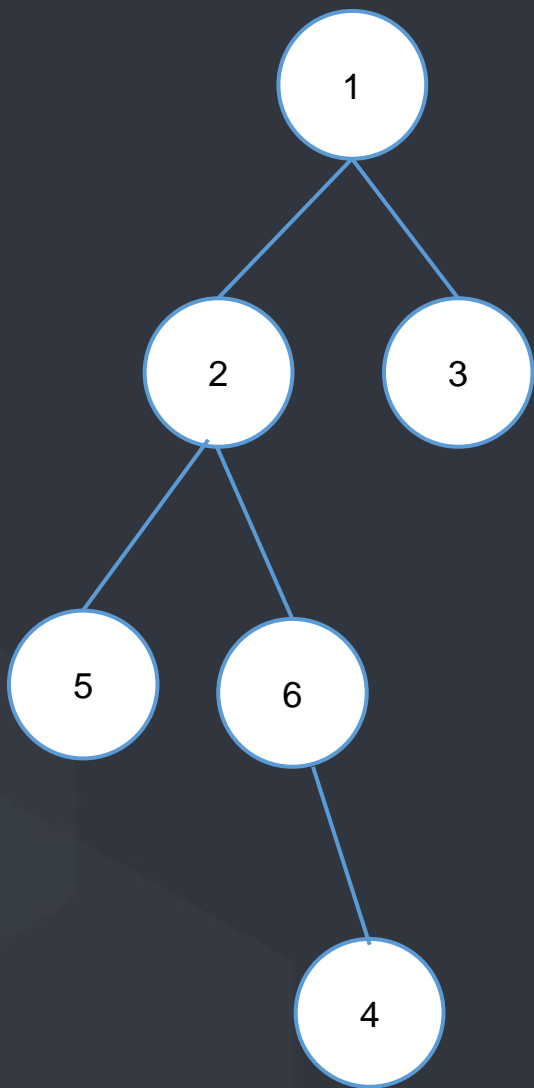
- 实现集合的合并与查找
- 用树来存储一个集合
- 如果两个点有共同的根，他们就在一个集合里
- 合并两个点所在集合只需要把一个点的根接到另一个点的根下面就行



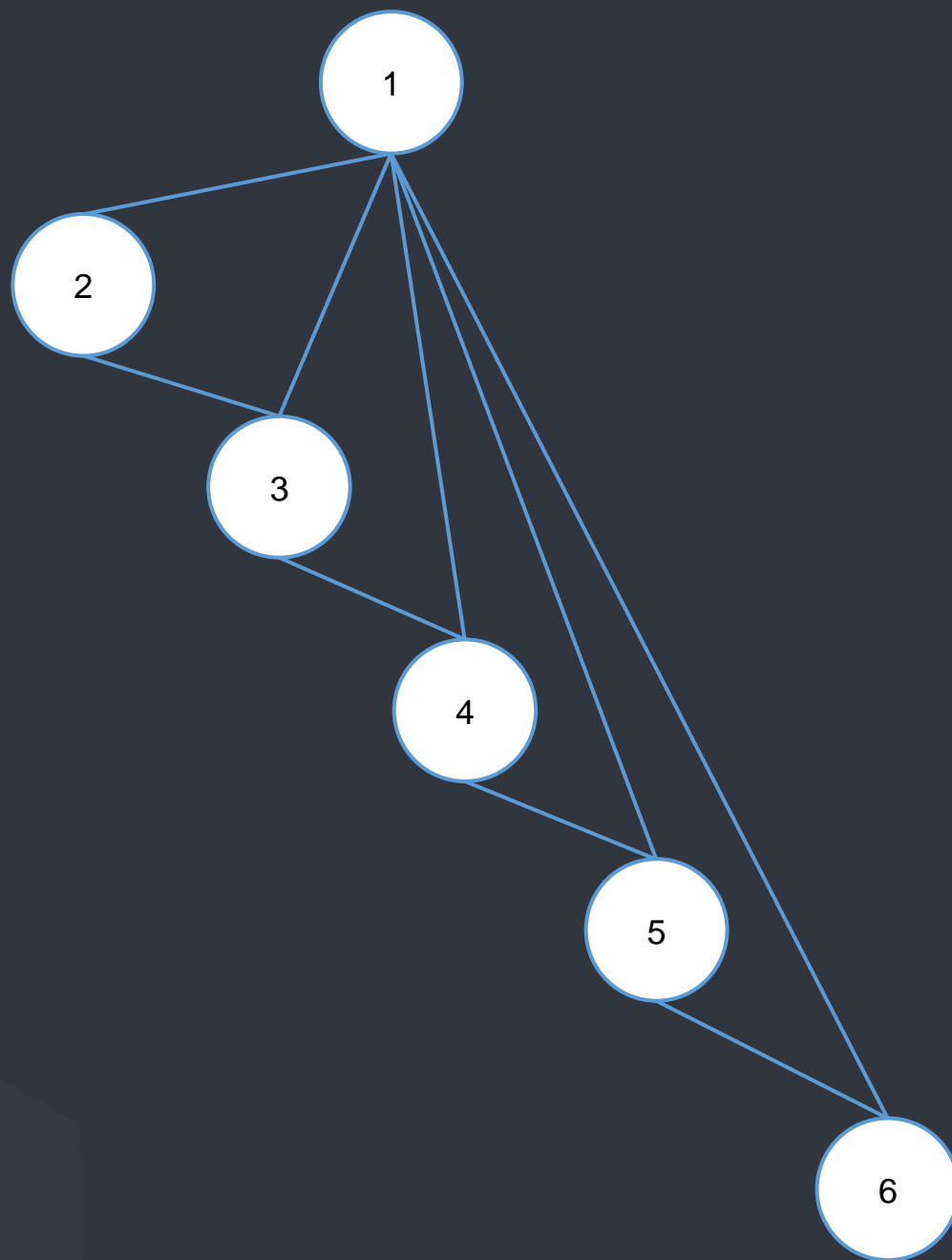
合并5, 9所在的集合



# 按秩合并



# 路径压缩



- 如果只有路径压缩，或者只有按秩合并，并查集单次操作的复杂度都是  $O(\log n)$ 。  
路径压缩 + 按秩合并的并查集，单次操作的复杂度才是  $O(\alpha(N))$ 。这里 $\alpha$ 是Ackerman函数的某个反函数，在很大的范围内（人类目前观测到的宇宙范围估算有 $10^{80}$ 个原子，这小于前面所说的范围）这个函数的值可以看成是不大于4的，所以并查集的操作可以看作是常数的。



## 例1:

- $n$ 个学生分属 $m$ 个团体, ( $0 < n \leq 30000$ ,  $0 \leq m \leq 500$ ) 一个学生可以属于多个团体。一个学生疑似患病, 则它所属的整个团体都疑似患病。已知0号学生疑似患病, 以及每个团体都由哪些学生构成, 求一共多少个学生疑似患病。



## 例2:

- 有 $n$ 个从1到 $n$ 编号的箱子,将每个箱子当做一个栈,对这些箱子进行 $p$ 次操作,每次操作分别为以下两种之一:
- 1、输入  $M \ x \ y$ :表示将编号为 $x$ 的箱子所在的栈放在编号为 $y$ 的箱子所在栈的栈顶.
- 2、输入  $C \ x$ :计算编号为 $x$ 的所表示的栈中在 $x$ 号箱子下面的箱子数目.



### 例3:

- 动物王国中有三类动物A,B,C，这三类动物的食物链构成了有趣的环形。A吃B， B吃C， C吃A。 现有N个动物，以1 - N编号。每个动物都是A,B,C中的一种，但是我们并不知道它到底是哪一种。 有人用两种说法对这N个动物所构成的食物链关系进行描述：
- 第一种说法是"1 X Y"，表示X和Y是同类。
- 第二种说法是"2 X Y"，表示X吃Y。
- 此人对N个动物，用上述两种说法，一句接一句地说出K句话，这K句话有的是真的，有的是假的。问有多少句假话。



## 例4:

- S 城现有两座监狱，一共关押着 $N$  名罪犯，编号分别为 $1 \sim N$ 。他们之间的关系自然也极不和谐。如果两名怨气值为 $c$  的罪犯被关押在同一监狱，他们俩之间会发生摩擦，并造成影响力为 $c$  的冲突事件。
- 每年年末，警察局会将本年内监狱中的所有冲突事件按影响力从大到小排成一个列表，然后上报到S 城Z 市长那里。公务繁忙的Z 市长只会去看列表中的第一个事件的影响力，如果影响很坏，他就会考虑撤换警察局长。
- 在详细考察了 $N$  名罪犯间的矛盾关系后，警察局长准备将罪犯们在两座监狱内重新分配，以求产生的冲突事件影响力都尽量小。假设只要处于同一监狱内的某两个罪犯间有仇恨，那么他们一定会在每年的某个时候发生摩擦。那么，应如何分配罪犯，才能使Z市长看到的那个冲突事件的影响力最小？这个最小值是多少？





## 例5:

- 给你一些点，还有一些边，每个点上都有一个权值，然后有一些询问操作，分为两种
- Q a 询问与a直接或者间接想连的点中最大权值的是哪个点，输出那个点
- D a b 删除a b的边



# 分块

- 分块其实是一种非常优雅的暴力



## 例1:

- 给出一个长为 $n$ 的数列，以及 $n$ 个操作，每次操作可以对一个区间的每一个数加上一个数，或者查询一个点的值。



## 例1:

- 暴力算法 修改一次 $O(n)$  查询一次 $O(1)$
- 问题就出在修改太慢上面



## 例1:

- 由于每次操作的区间加的是同一个数，考虑将数列中每 $m$ 个元素进行一个打包
- 打包之后，如果是对这个包整体进行一个 $+x$ 的操作，那么就标记一下，暂时不需要给每个数都加上这个数
- 如果是对区间的一部分加上一个数，那么就把区间中每一个数的值都更新一下。



[6,11]+2

下标

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

各块的标记

				+5+2=+7						+5									
--	--	--	--	---------	--	--	--	--	--	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--

各个点的值

0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	5	5	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



- 每次修改改变最多 $n/m$ ( $m$ 为块的大小)个区间和最多 $2m-2$ 个单独的位置, 所有单次修改时间复杂度为 $O(n/m) + O(m)$
- 因为 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , 所以 $n/m = m$ 的时候最小, 块的大小取 $\sqrt{n}$



## 例2:

- 给出一个长为 $n$ 的数列，以及 $n$ 个操作，每次操作可以对一个区间的每一个数加上一个数，或者查询一个区间的和。





### 例3:

- 给出一个长为 $n$ 的数列，以及 $n$ 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 $x$ 的元素个数。