Introduction to Artificial Intelligence, Fall & Winter 2022
College of Computer Science, Zhejiang University
Reference Solutions for Problem Set 2

丁尧相

2023 年 1 月 5 日

Problem 1.1. 给定四个逻辑变量 A, B, C, D，下列命题对应的模型（model）各有多少个?

- $B \vee C$.
- $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D$.
- $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B \wedge C \wedge D$.

参考解答: 3, 15, 0.

Problem 1.2.

- 将下面的命题转换为析取范式（disjunctions）：
  1. $A \iff (B \vee E)$
  2. $E \Rightarrow D$.
  3. $C \wedge F \Rightarrow \neg B$.
  4. $E \Rightarrow B$.
  5. $B \Rightarrow F$.
  6. $B \Rightarrow C$.
- 假定上述命题为真，试采用 resolution 方法证明 $\neg A \wedge \neg B$.

参考解答:

- (1) $(\neg A \vee B \vee E) \wedge (\neg(B \vee E) \vee A)$, (2) $\neg E \vee D$, (3) $\neg(C \wedge F) \vee \neg B$, (4) $\neg E \vee B$, (5) $\neg B \vee F$, (6) $\neg B \vee C$.
- 由上述六个式子都为真，可知 $(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (6)$ 为真。其中，对 (3)(5)(6) 同时运用 resolution 可知 $\neg B$ 为真。进而由 (4) 知 $\neg E$ 为真。进而由 (1) 的第一个析取式知 $\neg A$ 为真。

Problem 1.3. (***) 2-CNF 指每个析取式都包含两个变量的命题，例如 $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee D)$. 3-CNF 同理。请回答下述问题:

- 对于 n 个逻辑变量，最多可以构成多少个逻辑上不等价的 2-CNF?
- 利用上一问结果，证明 resolution 算法能够在多项式复杂度内求解任何 2-CNF 的 SAT 问题。
- 对于 3-CNF，是否仍有上一问的结论?

参考解答:

- 通过观察，可以发现由最多 n 个逻辑变量 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 组成的 2-CNF 只能表示这样的逻辑式子: $X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_k \wedge (X_{k+1} \vee X_{k+2}) \wedge (X_{k+3} \vee X_{k+4}) \wedge \cdots \wedge (X_{k+2k'-1} \vee X_{k+2k'})$, 其中 $k + 2k' \leq n$, 每个 X 均为一个逻辑变量 A 或其否 $\neg A$。特别地，一个式子中的所有 X 都必须代表不同的逻辑变量。设 n 个变量中有 k 个不属于析取式部分，则对应的逻辑式有 $A_n(k) = 3^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{((n-k)/2)!} 2^{(n-k)/2}$ 个（当 $n-k$ 为偶数）或 $A_n(k) = 3^k \binom{n}{k} \frac{(n-k-1)!}{((n-k-1)/2)!} 2^{(n-k-1)/2}$（当 $n-k$ 为奇数）。进而全部的逻辑式有 $[\sum_{k=0}^{n} A_n(k)] - 1$ 个。
- 首先观察到上一问中形式的逻辑式可以在 $O(n)$ 复杂度内直接找出 SAT 解。同时，又观察到任何 2-CNF 都可以在多项式时间内化简为上述形式的逻辑式，或在化简过程中证明无解。因而知 2-SAT 问题存在多项式时间算法。
- 3-CNF 并不一定能化简成第一问中形式的逻辑式。因而 3-SAT 无法用上述方法证明存在多项式解。事实上，3-SAT 问题是 NP-完全的。

Problem 2.1. 考虑倒车入库问题，给定 8 个变量“油门”、“刹车”、“停车”、“挂倒档”、“到达位置”、“打方向”、“熄火”、“入库成功”，并假设这些都是二元真值变量（只有“真”和“假”两个值）。

- 请设计一个 Bayesian net (BN)，利用上述变量表示倒车入库问题。
- 基于该 BN，计算 p(入库成功|挂倒挡 $= False$，油门 $= True$) 的概率。
- 在该 BN 中，“油门”和“刹车”是否是独立或条件独立的？若条件独立，其条件包括那些（个）变量?

参考解答: 重点是注意各变量间的依赖关系，例如只有挂倒挡才能踩油门，到达位置才能刹车，停车后才能熄火，等。

Problem 2.2. 对于图 1 中的三个 BN，下面的结论是否成立？请给出论证。

- $F_1 \perp\!\!\!\perp F_2 | N$
- $F_1 \perp\!\!\!\perp N | M_1$

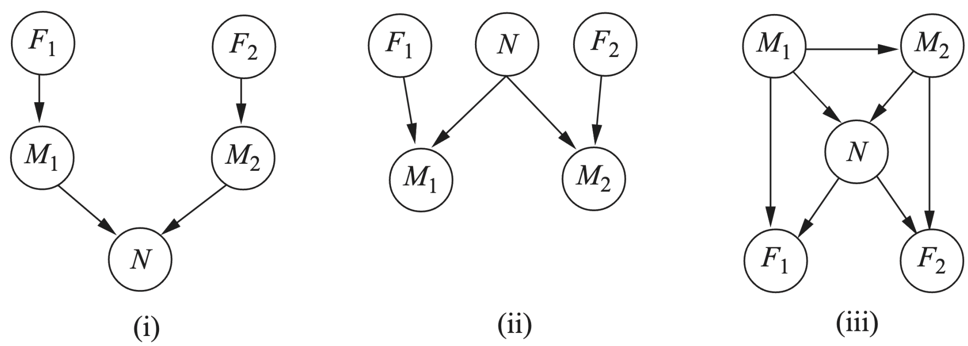

图 1: Problem 2 的 BN.

参考解答:

- 只有图 (ii) 成立。
- 只有图 (i) 成立。

Problem 2.3. (***）请举出一个 Simpson's paradox 的例子，并尝试画出对应的 BN 来解释悖论产生的原因。

参考解答: Simpson's paradox 的出现，关键在于在分析因果关系时，是否存在潜在因素对待分析的原因和结果变量发生作用，如结石问题中，结石大小可能影响。