计算物理第 10 次作业第 17 题

姓名：姚星宇　　学号：PB21000188　　班级：2021 级少年班学院四班

2022 年 12 月 17 日

1　题目重述

进行单中心 DLA 模型的模拟 (可以用圆形边界，也可以用正方形边界)，并用两种方法计算模拟得到的 DLA 图形的分形维数，作出双对数图这里采用盒计数法（box-counting）和沙盒法（sandbox）进行分形维度的计算

2　题目分析

DLA 模型的模拟在第 11 题已经进行过，这里不赘述方法。此处主要写出两种计数方法的原理及实现。

2.1　Box-counting 方法

对于平面上的分形图案，最为直观地计算分形维度的方法即为盒计数（Box-counting）法：该方法使用不同尺度的方格来覆盖分析图案，并将对分形图案相交的方格进行计数。若使用的方格尺度为 b，得到的被覆盖格数为 N，反复多次，可得：

$$\ln N = -\nu \ln b + C \tag{1}$$

其中 ν 即为分形维度。在实际操作中，可使用最小二乘法对得到的一系列 N, b 的值进行拟合，得到 μ。

对于 DLA 计算函数输出的两个存储结果的数组（res，其中 res[i] 为第 i 个添加的点的坐标 $[x_i, y_i]$；boundary，其中 boundary[i] 为没有粒子占据但至少有一个粒子与其相邻的格点的坐标），直接实现计算与覆盖的盒子相交的算法较为困难，故这里先对原始计算数据进行预处理：将其变形为二维数组，即可通过简单的算术运算而非检索得到相应格点的状态，可大幅降低计算消耗。

为了初始化为二维数组，需要先确定数据规模：可通过查找 boundary 中 x_i, y_i 的极大、极小值来得到图形之边界，并创建对应规模的二维 bool 数组，初始化为 False。然后，遍历 res，将对应位置的变量翻转为 True，初始化即完成。

在改变尺度进行计数的过程中，本次作业采用从小尺度到大尺度的计算方法：即先从最小的单位方格开始，逐步提升方格的边长，并记录此时相交的节点数量，即可作出双对数图，得到分形维度。在实现上，每次提升边长时均可创建行数、列数为原矩阵 $\frac{1}{2}$ 的的新矩阵，并将原矩阵中 $[2*i, 2*j], [2*i+1, 2*j], [2*i, 2*j+1], [2*i+1, 2*j+1]$ 的元素取或并填入新矩阵的 $[i, j]$ 处（若与原矩阵的边界相交，则将原矩阵外的点视作不被占据）。

得到每次增加尺度时对应的格数后，即可作出双对数图，拟合得到分形维度。

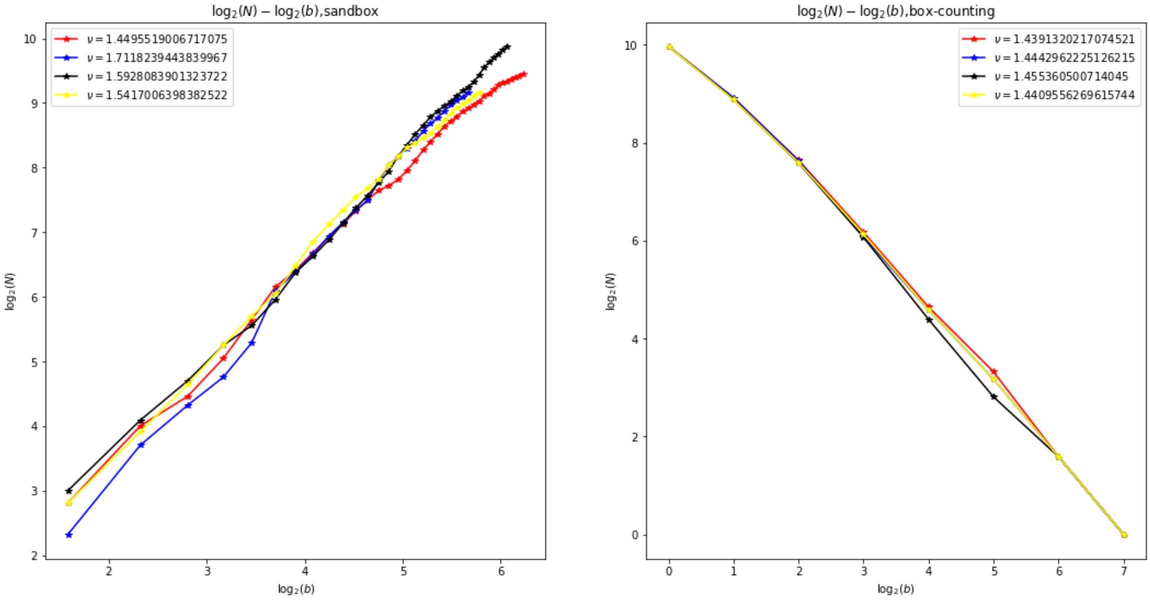

图 1: 程序运行结果

2.2 Sandbox 方法

对于有明显中心的单个分形图案，可使用盒计数法计算分形维度：对于边长为 r，中心与图形中心重合的正方形，包含的图形点数满足：

$$N = Cr^{\nu}(1+\delta(r)), \text{可简化为} \ln N = \nu \ln r + C' \tag{2}$$

即可由上式作出双对数图并计算分形维度。

由一个粒子生长出的 DLA 图案明显符合上述条件，故可使用 sandbox 方法进行计算。这种方法在实现上是简单的：同 box-counting 方法进行初始化，得到二维数组（以距离原点最近的边界边作为正方形的边），然后从原点开始依次扩大计算半径，得到半径关于内部点的数目的结果数组，并返回作出双对数图。

3 结果

关于维度的数据如下表：

N = 1000,seed=	114	514	1919	810	$\bar{\nu}$
sandbox 方法	1.450	1.711	1.592	1.542	1.57 ± 0.11
box-counting 方法	1.439	1.444	1.455	1.441	1.445 ± 0.007

且每条双对数曲线的方差 $|r| > 0.998$，可认为具有较好的线性关系，即结果有一定可信度。由表中数据得到，box-counting 方法的精确度较高，而 sandbox 方法可能由于数据规模的限制，导致边缘的维度与中心的维度不同，使得各组数据之间差别过大（观察可得 sandbox 中间一段重合度较高，而中心附近的点由于数量不够呈现较大随机性，边缘点又因为没有充分发展导致整体偏小），增大点数并适当缩小计数区域可获得更好的结果。

参考文献

[1] 丁泽军. 计算物理讲义 [M]