数值分析大作业 1 实验报告

2015011506　金帆　自 56 班

目录

1 需求分析

1-1 符号约定

首先约定，以下对于像素点坐标的描述(x, y)，其中x表示像素点所在的行数，y表示像素点所在的列数。假设图像有X横行、Y纵列，则图像左上角、右上角、左下角、右下角的坐标分别为$(0,0)$、$(0, Y-1)$、$(X-1, 0)$、$(X-1, Y-1)$。

1-2 概述

总体目标是，编写图像扭曲变形程序，可以对图像进行扭曲变形。

图像扭曲的本质是一个坐标到坐标的变换，即一个$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$的映射$f$。给定原图，在求取扭曲后的图像时，我们的目标是，对于扭曲后图像的每一个像素点(i, j)，寻找原图中对应点的坐标(x, y)，使得$f(x, y) = (i, j)$，即求解映射f的逆映射。

一般地，通过解析法或者迭代法求得的(x, y)不是整数点，而原图是离散的，只有整数点处才有值，因而必须对原始图像进行插值，用插值结果作为原图(x, y)处的像素值，也就是扭曲后图像(i, j)处的值。本次作业，我们尝试使用三种插值方式：最近邻、双线性、双三次。

1-3 旋转扭曲变换

对于行数与列数分别为X与Y的图像，其图像中心点的坐标是$(\frac{X-1}{2}, \frac{Y-1}{2})$，旋转半径$R = \min(\frac{X-1}{2}, \frac{Y-1}{2})$。点$(x, y)$相对于图像中心的极坐标表示记为$(r, \alpha)$，则

$$x = r \cdot \cos(\alpha) + \frac{X-1}{2}$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha) + \frac{Y-1}{2}$$

假设变换后的极坐标表示为(r^*,α^*)，则变换方程为:

$$\begin{cases} r^* = r \\ \alpha^* = \alpha + \dfrac{\theta(R-r)}{R} \cdot I(r<R) \end{cases}$$

其中$I(\cdot)$是示性函数，θ是参数，控制旋转的方向和角度。

其反变换为

$$\begin{cases} r = r^* \\ \alpha = \alpha^* - \dfrac{\theta(R-r^*)}{R} \cdot I(r^*<R) \end{cases}$$

设变换后的点的直角坐标是(i,j)，则有

$$r^* = \sqrt{\left(i - \frac{X-1}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Y-1}{2}\right)^2}$$

$$\alpha^* = \text{atan2}(j - \frac{Y-1}{2}, i - \frac{X-1}{2})$$

这样给定(i,j)，先计算(r^*,α^*)，再计算(r,α)，得到变换前的直角坐标(x,y)。这样得到的(x,y)不是整数点，因此需要使用插值方法，将插值结果作为变换后图像的(i,j)处的值。

这一过程对 RGB 三个通道遍历，并对新图像的每一个像素点(i,j)遍历。

1-4 水波纹扭曲变换

直角坐标和极坐标转换的部分与 1-3 节的旋转扭曲相同。只是，我们将正向变换公式变形为

$$\begin{cases} r^* = r \\ \alpha^* = \alpha + \theta\sin(\dfrac{r}{R}\rho + \phi) \end{cases}$$

其中θ、ρ、ϕ是参数，$\theta > 0$控制水波纹的幅度，$\rho > 0$控制波长，ϕ控制相位。

反向变换公式相应变为

$$\begin{cases} r = r^* \\ \alpha = \alpha^* - \theta \sin(\dfrac{r^*}{R}\rho + \phi) \end{cases}$$

其余步骤与 1-3 节旋转扭曲相同，此处不再赘述。需要注意的是，由于此处不再有$I(r < R)$的示性函数，因此变换后的(x, y)可能超出了图像范围。这时我们的处理是，令$x' = \max(0, \min(X - 1, x))$，$y' = \max(0, \min(Y - 1, y))$。

1-5　B 样条变换

在原图等距选取一些控制点，组成阵列。在x方向相邻控制点间隔N_x像素，在y方向相邻控制点间隔N_y像素。我们假设图像边长是上述间隔的整数倍加 1，这样保证图像的四个角上的像素一定是控制点。

每个控制点的位置都可以在图像范围内拖动。记$\Delta P_x(i, j)$表示x方向第i个、y方向第j个控制点在x方向的位移，$\Delta P_y(i, j)$表示x方向第i个、y方向第j个控制点在y方向的位移。该控制点在原图中的原始坐标应为$(N_x i, N_y j)$，拖动后的坐标变为

$$(N_x i + \Delta P_x(i, j), N_y j + \Delta P_y(i, j))$$

1-5-1　一次 B 样条变换

对于原图坐标为(x, y)的像素点，一次 B 样条变换后，其位移如下:

$$v_x(x, y) = \sum_{l=0}^{1} \sum_{m=0}^{1} G_{l,1}(u) \cdot G_{m,1}(v) \cdot \Delta P_x(i + l, j + m)$$

$$v_y(x, y) = \sum_{l=0}^{1} \sum_{m=0}^{1} G_{l,1}(u) \cdot G_{m,1}(v) \cdot \Delta P_y(i + l, j + m)$$

其中，基函数定义由作业要求给出，

$$u=\frac{x}{N_x}-\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor,\ v=\frac{y}{N_y}-\left\lfloor\frac{y}{N_y}\right\rfloor,\ i=\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor,\ j=\left\lfloor\frac{y}{N_y}\right\rfloor$$

可以看到，一次 B 样条使用了该点“周围”最近邻的 4 个控制点的信息，是这 4 个控制点的位移的线性组合。这里的“周围”是在控制点位置没有移动时定义的。

1-5-2 三次 B 样条变换

对于原图坐标为(x,y)的像素点，三次 B 样条变换后，其位移如下:

$$v_x(x,y)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}G_{l,3}(u)\cdot G_{m,3}(v)\cdot\Delta P_x(i+l,j+m)$$

$$v_y(x,y)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}G_{l,3}(u)\cdot G_{m,3}(v)\cdot\Delta P_y(i+l,j+m)$$

其中，基函数定义由作业要求给出，

$$u=\frac{x}{N_x}-\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor,\ v=\frac{y}{N_y}-\left\lfloor\frac{y}{N_y}\right\rfloor,\ i=\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor-1,\ j=\left\lfloor\frac{y}{N_y}\right\rfloor-1$$

可以看到，三次 B 样条使用了该点“周围”最近邻的 16 个控制点的信息，是这 16 个控制点的位移的线性组合。

由于使用了取整运算，B 样条变换的逆变换没有解析解。之后我们采用迭代法，以求取其逆变换的数值解。

1-6 最近邻插值

对于非整数坐标(x,y)，使用与它距离最近的整点处的值作为插值结果。

1-7 双线性插值

对于非整数坐标(x,y)，定义

$$u=x-\lfloor x\rfloor,\ v=y-\lfloor y\rfloor,\ i=\lfloor x\rfloor,\ j=\lfloor y\rfloor$$

则插值结果

$$f(x,y)=f(u+i,v+j)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(i,j) & f(i,j+1)\\ f(i+1,j) & f(i+1,j+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

直观来说，就是先在x方向做两次线性插值，再对所得结果在y方向做线性插值。

1-8　双三次插值

对于非整数坐标(x,y)，定义

$$u=x-\lfloor x\rfloor,\ v=y-\lfloor y\rfloor,\ i=\lfloor x\rfloor,\ j=\lfloor y\rfloor$$

则插值结果

$$f(x,y)=f(u+i,v+j)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}a_{lm}\cdot u^{l}\cdot v^{m}$$

其中系数a_{lm}通过以下矩阵运算得到:

$$\begin{bmatrix}a_{00}\\a_{10}\\a_{20}\\a_{30}\\a_{01}\\a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{02}\\a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{03}\\a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}f(i,j)\\f(i+1,j)\\f(i,j+1)\\f(i+1,j+1)\\f_x(i,j)\\f_x(i+1,j)\\f_x(i,j+1)\\f_x(i+1,j+1)\\f_y(i,j)\\f_y(i+1,j)\\f_y(i,j+1)\\f_y(i+1,j+1)\\f_{xy}(i,j)\\f_{xy}(i+1,j)\\f_{xy}(i,j+1)\\f_{xy}(i+1,j+1)\end{bmatrix}$$

其中系数矩阵为（图片来自 https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation ）

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\
9 & -9 & -9 & 9 & 6 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 3 & -3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\
-6 & 6 & 6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-6 & 6 & 6 & -6 & -4 & -2 & 4 & 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\
4 & -4 & -4 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

微分算子的定义为：（误差分析参见 3-4-3 节）

$$f_x(x,y)\approx\frac{1}{2}[f(x+1,y)-f(x-1,y)]$$

$$f_y(x,y)\approx\frac{1}{2}[f(x,y+1)-f(x,y-1)]$$

$$f_{xy}(x,y)\approx\frac{1}{2}[f_x(x,y+1)-f_x(x,y-1)]$$

2　方案设计

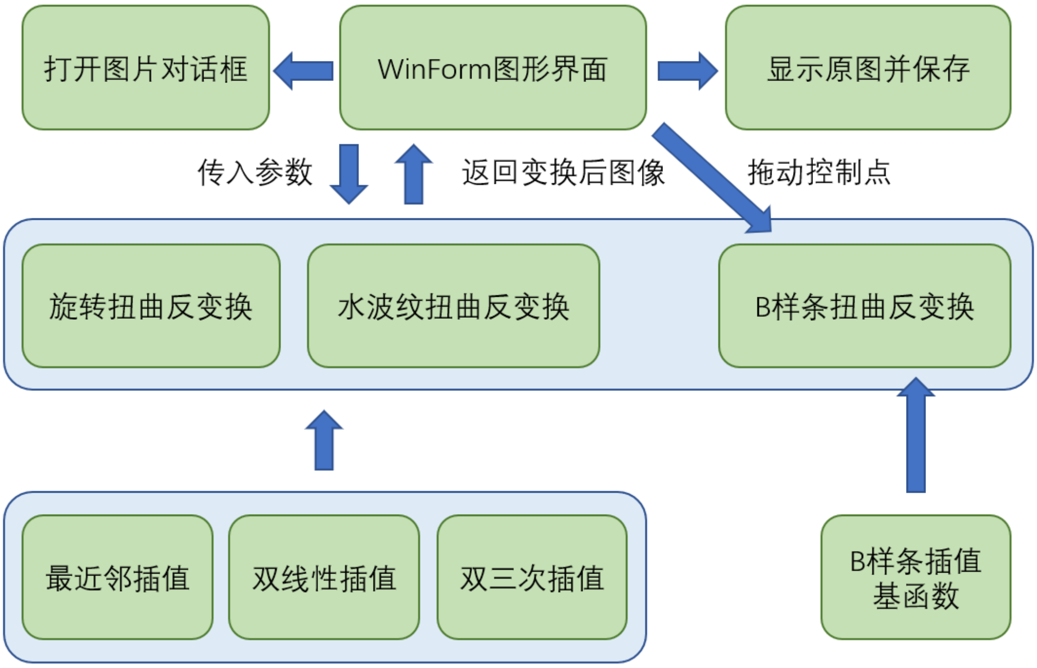
2-1　编程语言及环境

采用 C#（.NET Framework 4.5.2），在 Visual Studio 2015 下开发，可执行文件可在 Windows 10 环境下直接运行，无需安装第三方库。

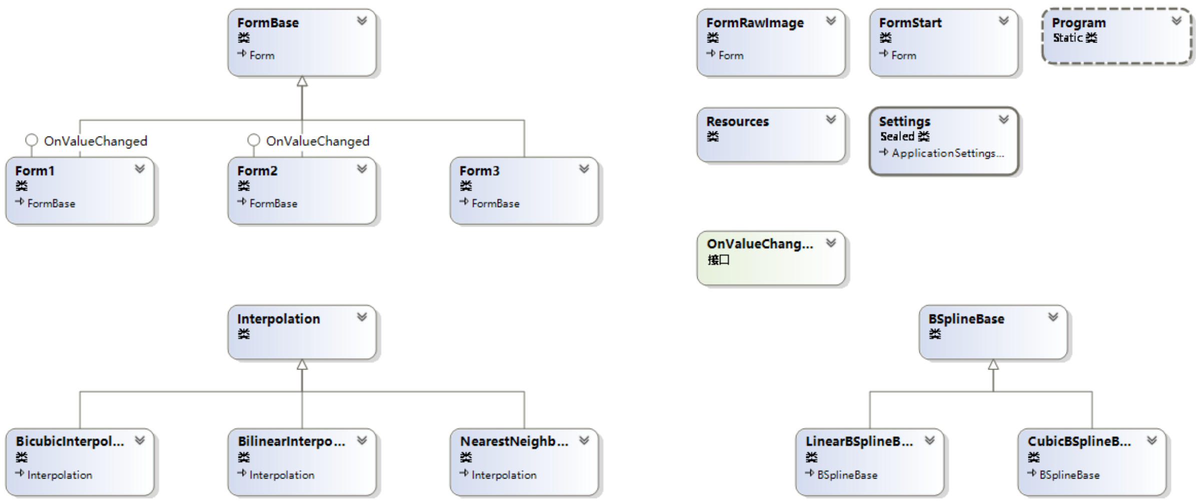
图像读写使用了.NET 框架内置的 System.Drawing.Bitmap 类，为提高性能，绕过了 Bitmap 类提供的 SetPixel 和 GetPixel 方法，使用不安全的指针直接操作内存。已在编译选项中开启了“允许不安全代码”，以支持 unsafe 语句。

程序自带一个 WinForm 界面，不提供命令行接口。在 Visual Studio 中已对工程的输出做了重定向，生成的 exe 文件就在根目录下的 exe 文件夹内。

2-2　系统模块图、类图



我们使用面向对象（OOP）的思想编写程序。3 个任务分别对应 3 个窗体，由于有较多的共有部分，共有部分写为 FormBase 类中，其被 3 个任务的窗体分别继承，并加入各自的参数控件，并重写反变换算法。插值被单独做成一个类，三种插值分别是其一个子类，接口统一，这样上层就无需关心具体是哪种插值的实现。同理，一阶和三阶的 B 样条变换同样也采用父类-子类的继承关系。



2-3　必做任务的反变换求解（解析法）

在 1-3 节和 1-4 节，我们已经给出了必做任务的反变换的解析公式。程序从参数控件上获取到当前的参数，代入解析公式，对每个(i,j)像素点，反变换得出对应的坐标(x,y)。由于这里的坐标(x,y)不是整数点，需要调用插值模块，将插值结果作为变换后图像的(i,j)位置的值。对于 RGB 图像，每个通道都如此操作。

2-4　选做任务的反变换求解（迭代法）

B 样条正变换的公式（参见 1-5 节）$f(x,y)=(i,j)$比较复杂，由于取整运算，其逆变换$f^{-1}(i,j)=(x,y)$的解析公式不易求得。

2-4-1　B 样条正变换的性质

显然，B 样条正变换公式$f(x,y)$在x和y均是非整数时是连续的。

注意到一阶 B 样条基函数具有以下性质:

$$G_{l,m}(1)=G_{l+1,m}(0)$$
$$G_{0,m}(0)=G_{m,m}(1)=0$$

因此，展开和式后，发现$f(x,y)=(i,j)$在当x或y跨越整数时，仍然连续的。

综上，一阶 B 样条正变换是一个$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$的连续映射。对于三阶 B 样条变换，基函数的一阶、二阶导数也有类似性质，使得三阶 B 样条变换是二次连续可微的。

又由于基函数是有界的，假设其绝对值的界是T，则对 1-5 节的公式进行放缩:

$$|v_x(x,y)|\le(L+1)(M+1)T^2\cdot\max(|\Delta P_x(i+l,j+m)|)$$

$$\left|v_y(x,y)\right|\le(L+1)(M+1)T^2\cdot\max(\left|\Delta P_y(i+l,j+m)\right|)$$

也是有界的，因此 B 样条正变换满足$\left\|f(x,y)-(x,y)\right\|$有界。

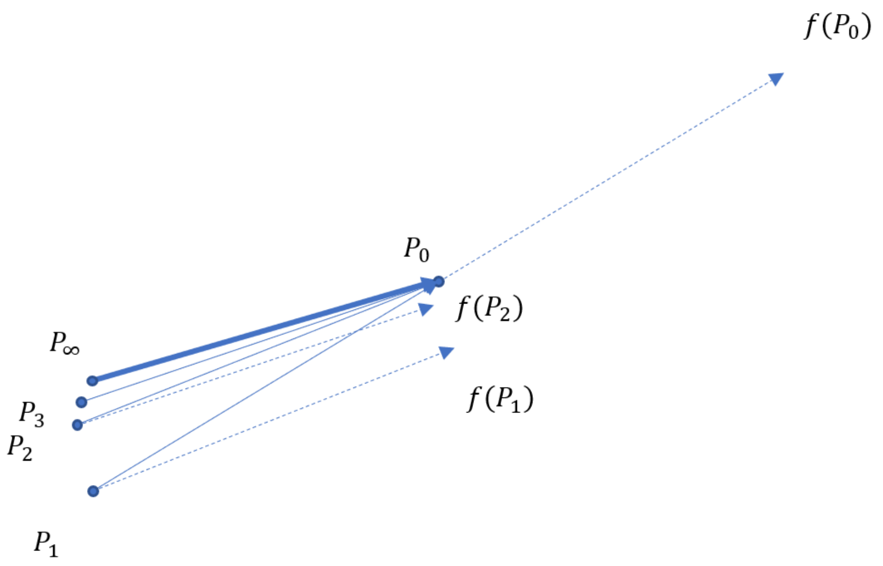
2-4-2　B 样条逆变换的存在性

此部分不做要求，此处略去，以下假定逆变换存在且唯一。

2-4-3　迭代法求解逆变换

在本小节中，以符号P表示一个点的坐标的二元数组(x, y)，经过 B 样条正变换后坐标变为$f(P)$。逆变换的本质是，给定P_0，求取P_∞使得$f(P_\infty) = P_0$。算法如下：

输入：P_0（二元数组），映射f
输出：P_∞使得$f(P_\infty) \approx P_0$
步骤：
`for i = 1, 2, …, MaxIteration`
求解满足如下条件的P_i：向量$P_0 - P_i = f(P_{i-1}) - P_{i-1}$
$P_\infty := P_{\text{MaxIteration}}$



假设得到的一系列点P_i收敛至P_∞。注意到

$$|P_0 - f(P_{i-1})| = |P_i - P_{i-1}|$$

因此“二维点列$\{P_i\}$收敛到P_∞”与“二维点列$\{f(P_i)\}$收敛到P_0”等价。

2-5 插值

插值算法见 1-6、1-7、1-8 节。

在插值时，图像的边缘处理比较麻烦。我们采取的办法是，累加的时候，对于下标超出了原图范围的项一律置零，相当于补上 0。

为了加快双三次插值的速度，在代码中部分运算被展开，使其差分的意义不容易看出，这是以牺牲可读性为代价的。

3 误差分析

3-1 观测误差

不属于本文讨论范围。

3-2 舍入误差

C#中的 double 类型，精度有 15-16 位有效数字，因此舍入误差可以忽略。在计算的最后一步，将 double 类型的数转成 0~255 范围的 uint8，舍入误差上界为 0.5。

3-3 截断误差（迭代法）

在 2-4-3 节中，迭代算法在给定的最大迭代次数后停止。为了便于控制精度，同时也为加快运算速度，我们在每次迭代后，比较当前的$f(P_i)$与目标点P_0的距离（以无穷范数度量，即$\left\|f(P_i)-P_0\right\| \coloneqq \max(|f_x(P_i)-P_{0x}|,|f_y(P_i)-P_{0y}|)$）；如果距离小于给定的误差界$\epsilon$，则提前停止迭代。

经过试验，在每一个像素点上，我们都提前停止了迭代。因此，我们下式满足：

$$\left\|f(P)-P_0\right\| < \epsilon$$

其中P是我们算法的输出结果，进而，其与P_∞的误差满足：

$$\left|\left|P-P_\infty\right|\right| = \left|\left|P-f^{-1}(P_0)\right|\right| < M_0 \cdot \epsilon$$

其中$M_0 = \max(\max(\left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(P_j)\right|\right|), \max(\left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(P_j)\right|\right|))$，$P_j$在$P_\infty$的某个邻域内。

这样在无穷范数意义下，截断误差的上界是$M_1\epsilon$。

3-4　方法误差（插值）

在本节中，约定符号$z(x,y)$表示一个$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$的映射。当$x$与$y$是整数时，$z(x,y)$表示原图在该位置的某个通道的取值（0~255）。$z(x,y)$就是未知的被插值函数。

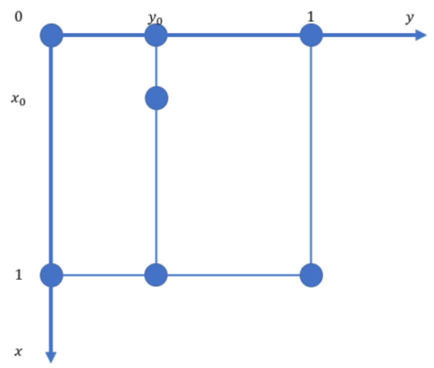
3-4-1　最近邻插值

最近邻插值的x方向与y方向是解耦的。我们假定，$z(x,y)$在x方向和y方向上的一阶导数存在且有界M_1。除去物体边缘等梯度大的区域外，M_1都很小；在图像中一些梯度大的地方（例如物体轮廓线），M_1较大。

x方向与y方向的误差上界各为$\frac{1}{2}M_1$，总的方法误差上界为M_1。

3-4-2　双线性插值

不失一般性，假设求值点(x_0,y_0)位于单位正方形内，4 个顶点是插值点。



假设$z(x,y)$在x方向和y方向的二阶导数存在且有界M_2。

首先考察$(0,y_0)$与$(1,y_0)$处的插值结果的误差界。这相当于在直线$x=0$和$x=1$上做两次y方向的线性插值，因此误差界是

$$|z(0,y_0)-z^*(0,y_0)|\leq\frac{1}{2}M_2\cdot\max\big(x(1-x)\big)=\frac{1}{8}M_2$$

$$|z(1,y_0)-z^*(1,y_0)|\leq\frac{1}{2}M_2\cdot\max\big(x(1-x)\big)=\frac{1}{8}M_2$$

然后给定$z(0,y_0)$与$z(1,y_0)$，考察(x_0,y_0)处的插值结果的误差界。这相当于在直线$y=y_0$做一次x方向的线性插值，因此相对于给定的$z(0,y_0)$与$z(1,y_0)$，误差界是

$$|z(x_0,y_0)-z^*(x_0,y_0)|_{z(0,y_0),z(1,y_0)}\leq\frac{1}{2}M_2\cdot\max\big(x(1-x)\big)=\frac{1}{8}M_2$$

再加上$z(0,y_0)$与$z(1,y_0)$的误差界，最坏情形下两种误差叠加，总误差为

$$|z(x_0,y_0)-z^*(x_0,y_0)|\leq\frac{1}{8}M_2+\frac{1}{8}M_2=\frac{1}{4}M_2$$

3-4-3　双三次插值

在使用双三次插值时，误差来自两方面：一是使用差分近似代替导数的误差，二是双三次插值本身的误差。在最坏情形下，两者叠加，

首先，假设插值函数$z(x,y)$的二阶导数存在且有界，即

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}z(x,y)\right|\leq M_2$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}z(x,y)\right|\leq M_2$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}z(x,y)\right|\leq M_2$$

同理假设$z(x,y)$的三、四阶导数存在，且有界M_3、M_4。

首先分析差分代替导数的误差界。对于导数的估计，公式是（参加 1-8 节）：

$$f_x(x,y) \approx \frac{1}{2}[z(x+1,y) - z(x-1,y)]$$

$$f_y(x,y) \approx \frac{1}{2}[z(x,y+1) - z(x,y-1)]$$

$$f_{xy}(x,y) \approx \frac{1}{2}[z_x(x,y+1) - z_x(x,y-1)]$$

构造辅助函数$z^*(x) = \frac{1}{2}[z(x+1) - z(x-1)]$。

由微分中值定理，存在$x^* \in [x-1, x+1]$使得

$$z^*(x) = z'(x^*)$$

故有

$$|z^*(x) - z'(x)| = |z'(x^*) - z'(x)| \le M_2 \cdot |x^* - x| \le M_2$$

将这个结论应用到 1-8 节的 3 个公式，得到误差界

$$\left|f_x(x,y) - \frac{1}{2}[z(x+1,y) - z(x-1,y)]\right| \le M_2$$

$$\left|f_y(x,y) - \frac{1}{2}[z(x,y+1) - z(x,y-1)]\right| \le M_2$$

同理，根据辅助函数

$$z^*(x,y) = \frac{1}{4}[z(x+1,y+1) + z(x-1,y-1) - z(x+1,y-1) - z(x-1,y+1)]$$

可以得到误差界

$$\left|f_{xy}(x,y) - \frac{1}{2}[z_x(x,y+1) - z_x(x,y-1)]\right| \le M_2 + M_3$$

第二部分的误差来自双三次插值本身。根据 Wikipedia 提供的公式，双三次插值的结果可以使用以下的二次型表示：

$$p(x,y)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}P^T\cdot F\cdot P\begin{bmatrix}1\\ y\\ y^2\\ y^3\end{bmatrix}$$

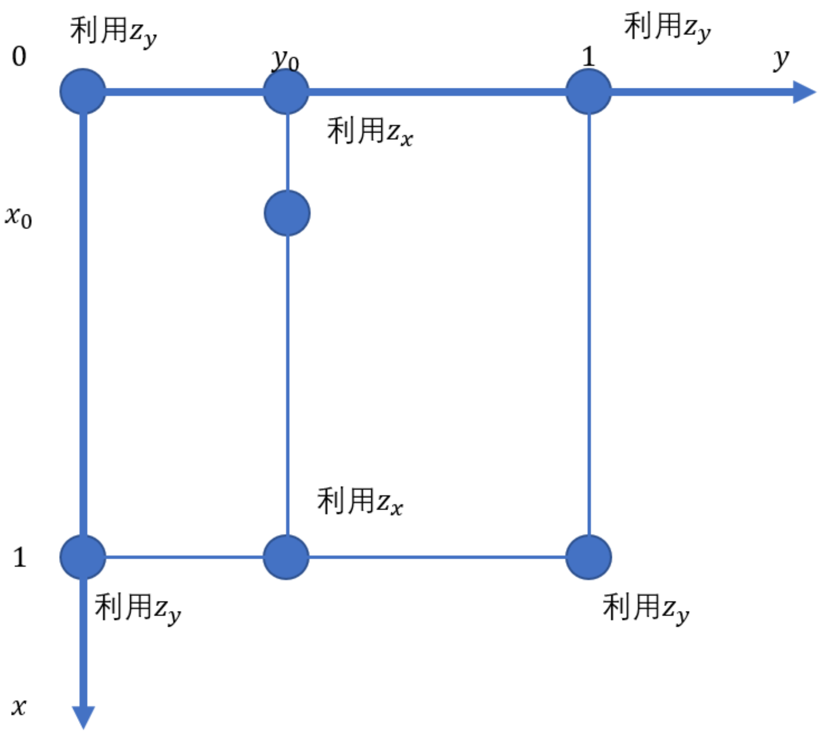
其中矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}z(0,0) & z(0,1) & z_y(0,0) & z_y(0,1)\\ z(1,0) & z(1,1) & z_y(1,0) & z_y(1,1)\\ z_x(0,0) & z_x(0,1) & z_{xy}(0,0) & z_{xy}(0,1)\\ z_x(1,0) & z_x(1,1) & z_{xy}(1,0) & z_{xy}(1,1)\end{bmatrix}$$

如果记$p_x=P\begin{bmatrix}1\\ x\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}$，$p_y=P\begin{bmatrix}1\\ y\\ y^2\\ y^3\end{bmatrix}$，则$p(x,y)=p_x^T\cdot F\cdot p_y=p_x^T\cdot(F\cdot p_y)$。

由于矩阵乘法的结合律，可以将双三次插值视为先在y方向利用z和z_y信息进行 2 次三次 Hermite 插值，然后在x方向利用z_x和z_{xy}对结果做 1 次三次 Hermite 插值。



与 3-4-2 节同理，最坏情形下，插值的误差界是两方向的误差界之和，即

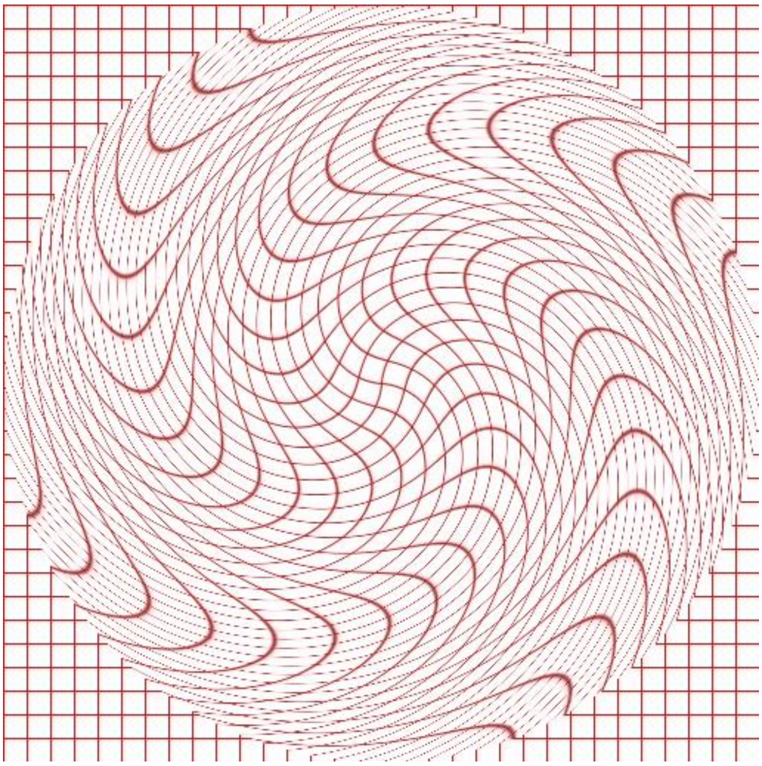
$$\max(|z(x,y)-f(x,y)|) \le \frac{1}{384}M_4+\frac{1}{384}M_4$$

综上，最坏情形下，双三次插值方法（包含导数的差分估计）误差界是两方面误差之和，即

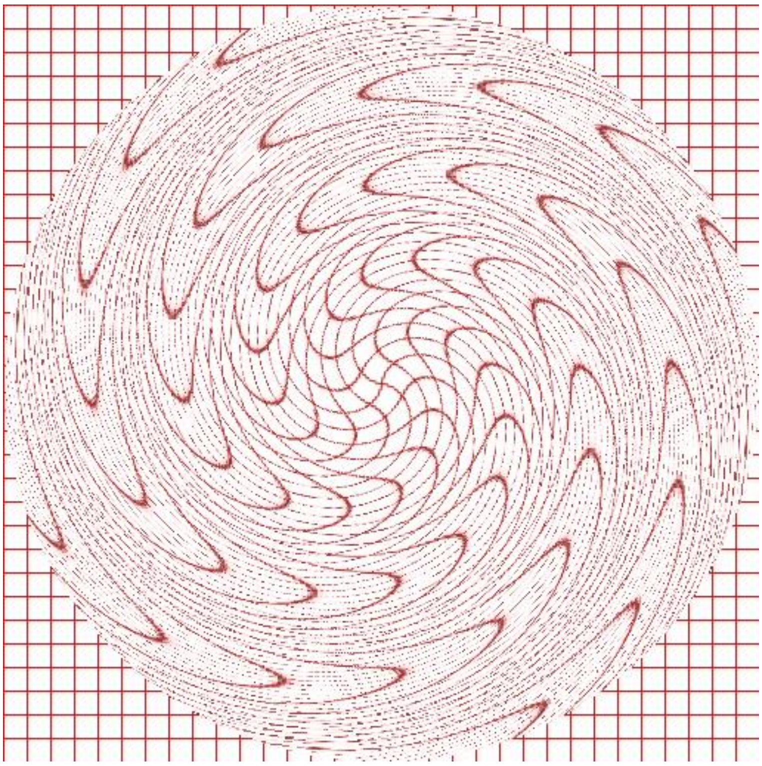
$$\frac{1}{192}M_4+M_2+M_3$$

4　结果展示与参数讨论

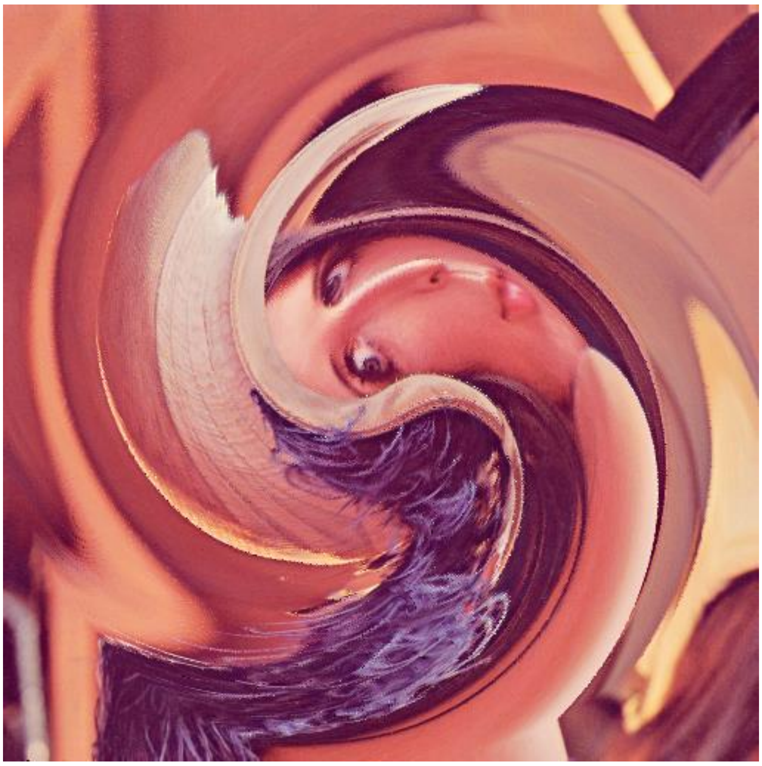
4-1　旋转扭曲变换



（双线性）

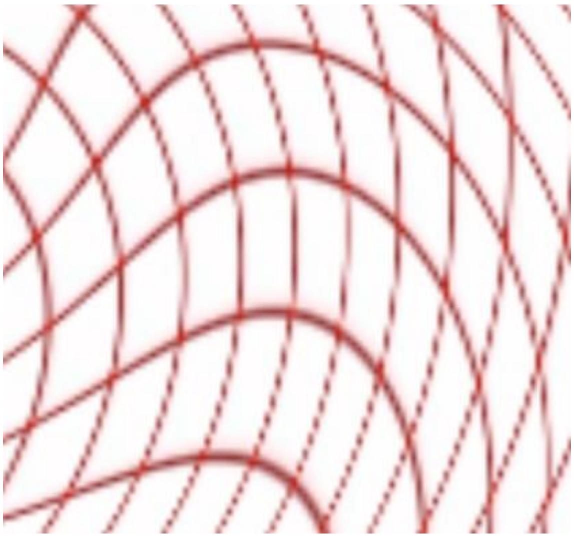


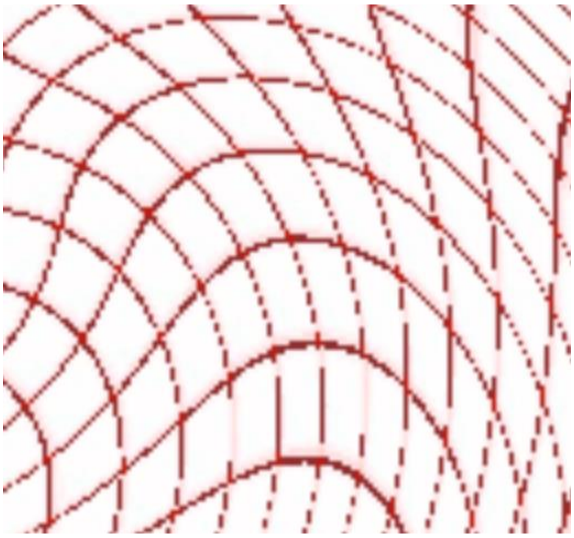
（最近邻）



（双三次）

考察一些扭曲较大的局部，观察双线性插值相比最近邻插值的改进：

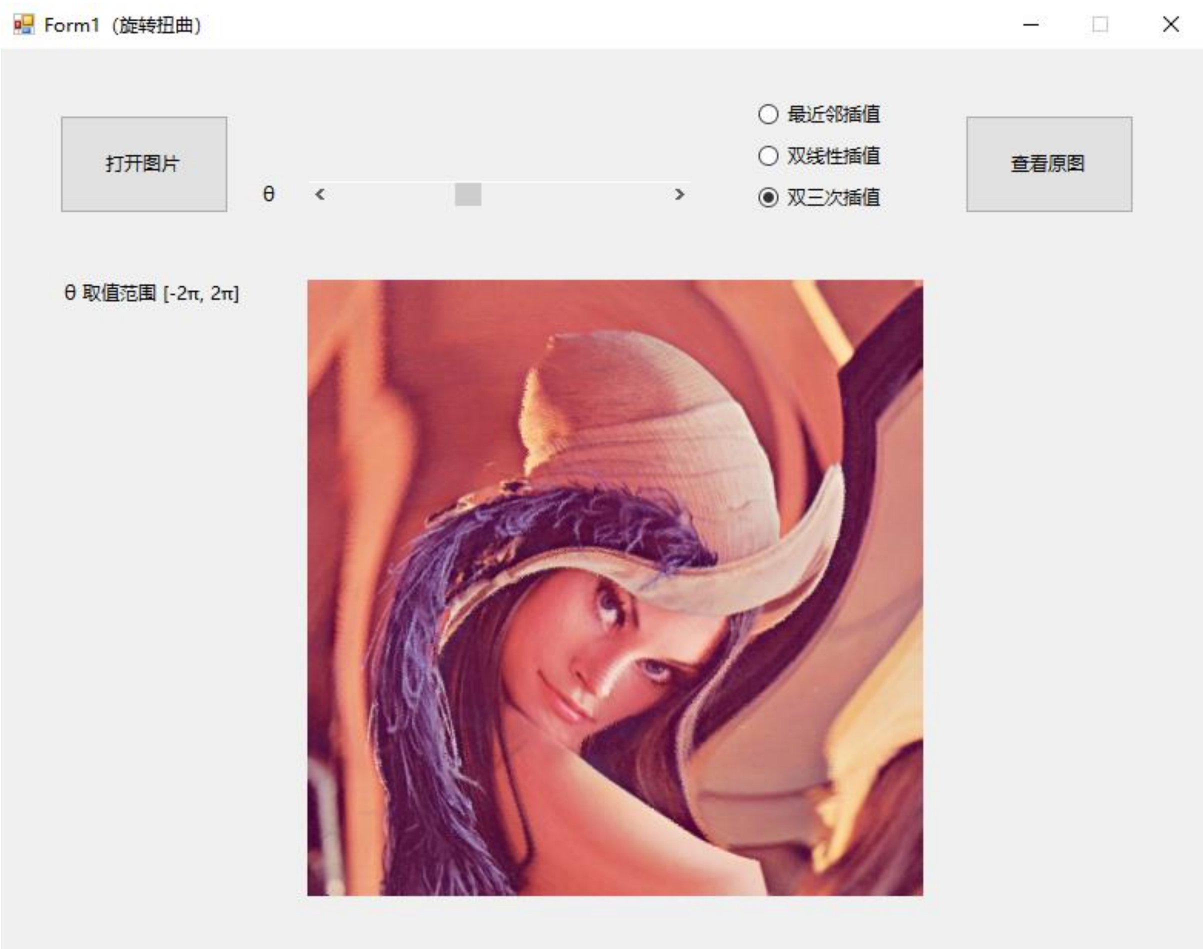

（双线性）


（最近邻）

最近邻插值的结果存在断续，而双线性的插值结果更平滑，在红色的线条和空白之间存在一些浅红色的渐变。这符合预期。

双三次的结果则更加平滑：

利用图形界面，可以打开更多的图片，并尝试改变旋转角度θ：



点击“查看原图”可以保存图片，并避免操作系统自带的 DPI 缩放机制。

4-2 水波纹扭曲变换

4-3 B 样条变换

参考文献

李庆阳、王能超、易大义：《数值分析》第 5 版

https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation

https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/language-reference/keywords/double https://msdn.microsoft.com/en-us/library/ms165366.aspx

https://msdn.microsoft.com/en-us/library/system.drawing.bitmap(v=vs.110).aspx

https://stackoverflow.com/questions/13511661/create-bitmap-from-double-two-dimentional-array