DOI:10.13715/j.cnki.nsjxu.1982.02.013

学生优秀论文

三次样条函数插值误差的界

袁亚湘

§1 引 言

关于三次样条插值的误差估计已有大量的成果。至今最好的结果是：

定理 1 设$f(x)\in C^m(I)(m=1,2,3,4)$，$\theta_s f(x)\in S_i(3,\triangle)$是$f(x)$关于$I(=[0,1])$上分划$\triangle$：$0=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=1$的$(I)$型三次样条插值函数（给出$f(x)$的节点值及端点的导数值），则：

$$\|D^r(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant C_{mr}\|D^m f\|_\infty h^{m-r}\quad[0\leqslant r\leqslant min(3,m)] \tag{1.1}$$

这里，
$$h=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\triangle x_i,\ \triangle x_i=x_i-x_{i-1}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,N) \tag{1.2}$$

$\|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|_{L\infty}[0,1]$，而$C_{m,r}$由表1给出。

定理 2 设$f(x)\in C^m(I)(m=1,2,3,4)$，$\theta_H f(x)$是$f(x)$在$I$上关于分划$\triangle$的三次Hermite插值函数，则：

$$\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty\leqslant\lambda_{m,r}\|D^m f\|_\infty h^{m-r}[0\leqslant r\leqslant min(3,m)] \tag{1.3}$$

其中$\lambda_{m,r}$由表2给出。

定理 3 若$f(x)\in C^m(I)$，则对$i=0,1,\cdots\cdots,N$，

$$|Df(x_i)-D\theta_s f(x_i)|\leqslant r_m\|D^m f\|_\infty h^{m-1}\quad(m=1,2,3,4) \tag{1.4}$$

$$|D^2 f(x_i)-D^2\theta_s f(x_i)|\leqslant\overline{r}_m\|D^m f\|_\infty h^{m-2}\quad(m=1,2,3,4) \tag{1.5}$$

其中r_m，$\overline{r}_m$由表3给出。

表 1

$C_{m,r}$	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$
$m=1$	$\frac{15}{4}\left(\frac{3}{2}\right)$	$14(5)$	——	——
$m=2$	$\frac{5}{8}^*\left(\frac{13}{48}\right)$	$\frac{11}{4}(0.8623)$	$10(4)$	——
$m=3$	$\frac{7^*}{81}\left(\frac{41}{864}\right)$	$\frac{113^*}{216}\left(\frac{4}{27}\right)$	$\frac{3}{2}+\frac{8\beta}{9}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\right)$	$3+\frac{8\beta^2}{9}\left(2+\frac{8}{9}\beta^2\right)$
$m=4$	$\frac{5}{384}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}\left(\frac{1}{12}+\frac{\beta}{4}\right)$	$\frac{\beta+\beta^{-1}}{2}$

本文1982年2月11日收到。是在付凯新副教授指导下完成的。

其中$\beta=h/\underline{h}$，$\underline{h}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\triangle x_i$ (1.6)

表 2

$\lambda_{m,r}$	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$
$m=1$	$\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)$	$4(3)$	——	——
$m=2$	$\frac{1^*}{4}\left(\frac{1}{16}\right)$	$\frac{5^*}{4}\left(g(x_0)\right)$	$4^*\left(\frac{8}{3}\right)$	——
$m=3$	$\frac{4^*}{81}\left(\frac{1}{96}\right)$	$\frac{3^*}{8}\left(\frac{13\sqrt{13}-46}{27}\right)$	$\frac{3^*}{2}\left(\frac{8}{27}\right)$	$3^*(2)$
$m=4$	$\frac{1}{384}$	$\frac{\sqrt{3}}{216}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$

其中：$g(x)=\frac{120x^2-137x+44}{96(1-x)}$　　$x_0=\frac{2}{3}+2\sqrt{\frac{5}{72}}\cos\left(120^0+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{117}{8}}\right)$

表 3

m	1	2	3	4
r_m	$10(5)$	$\frac{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{24}$
$\overline{r}_m$	——	(4)	$\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)$

上面三个定理都是属于[1]的，打(*)号的数学是由山东大学文涛同志改进得到[4]，园括号中的较优结果是由本文给出的。

本文主要是利用了Peano核定理，Taylor公式及由本文推导的一些分段多项式积分公式和数值积分公式。这些结果因以后多次用到，我们将其列举如下：

定理4 [5](Peano核定理)设E是$PC^{n+1}([a,b])$上$(n\geqslant0)$的线性泛函，且对于所有的n次多项式P有$E[P(x)]=0$，则对于所有的$f(x)\in PC^{n+1}([a,b])$，

$$E(f)=\frac{1}{n!}E_x\left[\int_a^b D^{n+1}f(t)(x-t)_+^n dt\right] \tag{1.7}$$

其中：

$$(x-t)_+^n=\begin{cases}(x-t)^n & x\geqslant t\\ 0 & x\leqslant t\end{cases} \tag{1.8}$$

而且E_x表示作用于看成x的函数的表达式$\int_a^b D^n f(t)(x-t)_+^n dt$的线性泛函$E$。(关于$PC$的定义同[7]，即$f(x)\in PC^n[I]$表示$f(x)$在$I$上$n-1$次连续可微且分段n次连续可微函数。)

定理5 [6] 设$f(x)\in C^2[0,1]$，则：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\qquad a\leqslant\eta\leqslant b \tag{1.9}$$

定理6 若$f(x)\in PC^1([a,b])$，则：

$$\left|\int_a^b f(x)dx-[P_1f(a)+P_2f(b)](b-a)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}[1+(P_1-P_2)^2]\|Df\|_\infty (b-a)^2 \tag{1.10}$$

其中　$P_1, P_2 \geqslant 0$，$P_1+P_2=1$

证明：1° 当$P_1=1$，$P_2=0$时，由：

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-f(a)|\,dx \leqslant \int_a^b \|Df\|_\infty [x-a]dx$$

即可得到(1.10)，同理当$P_1=0$，$P_2=1$时(1.10)也成立。

2° 当$P_1=P_2=\frac{1}{2}$，由

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx - f(a)\frac{b-a}{2} + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx - f(b)\frac{b-a}{2}$$

与1°即可知(1.10)也成立。

3° 当$f(a)=f(b)$时，同样可利用2°中的等式证明(1.10)。

4° 当$f(a)\neq f(b)$，$P_1\neq P_2$，$P_1\cdot P_2\neq 0$时，不失一般性，我们假定：$a=0$，$b=1$；$\triangle f \equiv f(b)-f(a)>0$，$0<P_1<P_2<1$，

$$L=\int_0^1 f(x)dx - [P_1 f(0)+P_2 f(1)]>0$$

记$\varphi(x)=f(x)-[P_1 f(0)+P_2 f(1)]$，则$\varphi(0)=-P_2\triangle f<0$，$\varphi(1)=P_1\triangle f>0$，

设$\varphi(x)$在$[0,1]$上的最小零点为$x_0\left(\text{显然}x_0\geqslant\frac{P_2\triangle f}{\|f'\|_\infty}\right)$令$\overline{\varphi}(x,x_0)$是一折线函数：

$$\overline{\varphi}(x,x_0)=0 \qquad \text{当}\frac{P_2\triangle f}{\|Df\|_\infty}\leqslant x\leqslant x_0\text{时}$$

$$\overline{\varphi}(x,x_0)=\begin{cases}\varphi(0)+\|Df\|_\infty x & 0\leqslant x\leqslant \frac{P_2\triangle f}{\|Df\|_\infty}\\ \|Df\|_\infty (x-x_0) & x_0\leqslant x\leqslant \frac{x_0+1}{2}+\frac{P_1\triangle f}{2\|Df\|_\infty}\\ \varphi(1)+\|Df\|_\infty(1-x) & \frac{x_0+1}{2}+\frac{P_1\triangle f}{2\|Df\|_\infty}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

则知　$\varphi(x)\leqslant\overline{\varphi}(x,x_0)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

显然　$\overline{\varphi}(x,x_0)\leqslant\overline{\varphi}\left(x,\frac{P_1\triangle f}{\|Df\|_\infty}\right)$

于是：

$$L\leqslant\int_0^1\overline{\varphi}\left(x,\frac{P_1\triangle f}{\|Df\|_\infty}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\|Df\|_\infty+2(P_1-P_2)\triangle f-\frac{(\triangle f)^2}{\|Df\|_\infty}\right)\leqslant\frac{1}{4}[1+(P_1-P_2)^2]\|Df\|_\infty \quad \text{得证}$$

引理1　若$f(x)$是$[a,b]$上的线性函数，则：

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\begin{cases}\frac{|f(a)+f(b)|}{2}(b-a) & \text{当}f(a)f(b)\geqslant 0\\ \frac{1}{2}\left|\frac{f^2(a)+f^2(b)}{f(a)-f(b)}\right|(b-a) & \text{当}f(a)f(b)<0\end{cases} \tag{1.11}$$

引理2　若$f(x)$是$[a,b]$上的二次多项式，且$a<c<b$，$f(a)=f(c)=0$，则：

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\frac{|f(b)|}{b(b-c)(b-a)}[4(c-a)^3+(b-a)^2(b-3c+2a)] \tag{1.12}$$

引理1、2的证明从略。

§2 三次Hermite插值的误差估计

首先，由[6]可知

$$\theta_H f(x)=f(x_{i-1})\varphi_{00}(t)+f(x_i)\varphi_{10}(t)+ \\ +[\mathbf{D}f(x_{i-1})\varphi_{01}(t)+\mathbf{D}f(x_i)\varphi_{11}(t)]\triangle x_i \tag{2.1}$$

其中 $x\in[x_{i-1},\ x_i]$，$i=1,2,\cdots\cdots,N$，$t=\dfrac{x-x_{i-1}}{\triangle x_i}$

$$\varphi_{00}(t)=(1-t)^2(1+2t);\qquad \varphi_{01}(t)=t(1-t)^2;$$
$$\varphi_{10}(t)=\varphi_{00}(1-t);\qquad \varphi_{11}(t)=-\varphi_{01}(t) \tag{2.2}$$

$\theta_H f(x)$与§1中定义相同，以下不再解释而沿用§1的记号。

定理1 设$f(x)\in C^r(I)$，则：

$$\|\mathbf{D}^r(f-\theta_H f)\|_\infty\leqslant\lambda_{r,r}\|\mathbf{D}f\|_\infty h^{1-r}\qquad (r=0,1) \tag{2.3}$$

其中 $r_{1,0}=\dfrac{3}{4}$，$r_{1,1}=3$。

证明：任给$x\in[x_i-1,x_i]$ $(i=1,2,\cdots\cdots,N)$，不失一般性，可设$x_{i-1}=0$，$x_i=1$，$\triangle x_i=h=1$。(在本节各定理的证明中，我们总这样假定) 则：

$$\theta_H f(x)=f(0)\varphi_{00}(x)+f(1)\varphi_{10}(x)+\mathbf{D}f(0)\varphi_{01}(x)+\mathbf{D}f(1)\varphi_{11}(x) \tag{2.4}$$

$$\therefore\quad |f(x)-\theta_H f(x)|=|[f(x)-f(0)]\varphi_{00}(x)+[f(x)-f(1)]\varphi_{10}(x)-\mathbf{D}f(0)\varphi_{01}(x) \\ -\mathbf{D}f(1)\varphi_{11}(x)|\leqslant\|\mathbf{D}f\|_\infty[|x\varphi_{00}(x)|+|(1-x)\varphi_{10}(x)+|\varphi_{01}(x)|+\varphi_{11}(x)|] \\ \leqslant\frac{3}{4}\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

故知：$\|f(x)-\theta_H f(x)\|_\infty\leqslant\dfrac{3}{4}\|\mathbf{D}f\|_\infty h$

又因
$$|\mathbf{D}\theta_H f(x)|=|f(0)\mathbf{D}\varphi_{00}(x)+f(1)\mathbf{D}\varphi_{10}(x)+\mathbf{D}f(0)\mathbf{D}\varphi_{01}(x)+\mathbf{D}f(1)\mathbf{D}\varphi_{11}(x)| \\ =|[f(1)-f(0)]\mathbf{D}\varphi_{10}(x)+\mathbf{D}f(0)\mathbf{D}\varphi_{01}(x)+\mathbf{D}f(1)\mathbf{D}\varphi_{11}(x)| \\ \leqslant\|\mathbf{D}f\|_\infty[|\mathbf{D}\varphi_{10}(x)|+|\mathbf{D}\varphi_{01}(x)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(x)|] \\ \leqslant 2\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

$\therefore$ $\|\mathbf{D}\theta_H f\|_\infty\leqslant 2\|\mathbf{D}f\|_\infty$

从而 $\|\mathbf{D}(f-\theta_H f)\|_\infty\leqslant\|\mathbf{D}f\|_\infty+\|\mathbf{D}\theta_H f\|_\infty\leqslant 3\|\mathbf{D}f\|_\infty$ 〈证毕〉

定理2 设$f(x)\in C^2(I)$，则：

$$\|\mathbf{D}^r(f-\theta_H f)\|_\infty\leqslant\lambda_{2,r}\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h^{2-r}\qquad r=0,1 \tag{2.5}$$

其中 $\lambda_{2,0}=\dfrac{1}{16}$，$\lambda_{2,1}=g(x_0)$，$\lambda_{2,2}=\dfrac{8}{3}$

这里 $x_0=2\sqrt{\dfrac{5}{27}}\cos\left(120^\circ+\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{117}{8}}\right)+\dfrac{2}{3}$，$g(x)=\dfrac{120x^2-137x+44}{96(1-x)}$；

$$\lambda_{21}\approx 0.25149765$$

证明　利用Peano定理，可知$\forall x\in[0,1]$，若$f(x)\in C^m(I)$

$$D^r(f-\theta_H f)=\int_0^1 D^m f(t) D_x^r[(x-t)_+^{m-1}-\theta_H(x-t)_+^{m-1}]/(m-1)dt$$

$$(m=2,3\quad 0\leqslant r\leqslant m-1)$$

定义：

$$g_{m,r}(r)=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\left|D_x^r\left\{(x-t)_+^{m-1}-\theta_H(x-t)_+^{m-1}\right\}\right|dt$$

$$(m=2,3\quad 0\leqslant r\leqslant m-1)\tag{2.6}$$

则知：

$$\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty\leqslant\|D^m f\|_\infty h^{m-1}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}g_{m,r}(x),\ \begin{pmatrix}m=2,3\\0\leqslant r\leqslant m-1\end{pmatrix}\tag{2.7}$$

直接计算可知：

$$\theta_H(x-t)_+=x^2[(x-t)+2(1-t)(1-x)]\qquad(0<t<1)$$

利用§1引理1不难得到：

$$g_{2,0}(x)=4\frac{(1-x)^2x^2}{(1+2x)(3-2x)}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)\tag{2.8}$$

$$g_{2,1}(x)=\begin{cases}2x(1-x)(1-3x+3x^2)+\dfrac{x(3x-2)^2}{6(1-x)}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}\\[2ex] 2x(1-x)(1-3x+3x^2)+\dfrac{x(3x-2)^2}{6(1-x)}+\dfrac{(1-x)(3x-)^2}{6x}, & \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\[2ex] 2x(1-x)(1-3x+3x^2)+\dfrac{(1-x)(3x-1)^2}{6x}, & \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{2.9}$$

不难证明：

$$g_{2,0}(x)\leqslant g_{2,0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}\qquad 0\leqslant x\leqslant 1\tag{2.10}$$

$$g_{2,1}(x)\leqslant g_{2,1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{108}\qquad\left(\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\right)$$

因为在　$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$上，$Dg_{2,1}(x)=\dfrac{-6x^2+9x-4}{6(1-x)^2}(24x^3-48x^2+27x-4)$

$\therefore$

$$g_{2,1}(x)\leqslant g_{2,1}(x_0)$$

$$\left(x_0=\frac{2}{3}+2\sqrt{\frac{5}{72}}\cos(120^\circ+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{117}{8}})\right)\qquad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$$

由于　$g_{2,1}(x)$　关于$x=\frac{1}{2}$对称，从而可知：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}g_{2,1}(x)=g_{2,1}(x_0)=g(x_0)\tag{2.11}$$

由[4]可知：

$$D^2\theta_H f(0)=2[3(f(1)-f(0))-2Df(0)-Df(1)]\tag{2.12}$$

$$D^2\theta_H f(1)=2[Df(0)+2Df(1)-3(f(1)-f(0))]$$

由§1定理6可知

$$|D^2\theta_H f(0)|\leqslant 6\times\frac{1}{4}\times\left(1+(\frac{1}{3})^2\right)\|D^2f\|_\infty=\frac{5}{3}\|D^2 f\|_\infty\tag{2.13}$$

同理：　$|D^2\theta_H f(1)|\leqslant\frac{5}{3}\|D^2f\|_\infty$

由于　$D^2\theta_H f(x)$是一线性函数，

$\therefore$　$$\|D^2\theta_H f(x)\|_\infty\leqslant\frac{5}{3}\|D^2 f\|_\infty\tag{2.14}$$

从而　$\|D^2(f-\theta_H f)\|_\infty \leqslant \|D^2 f\|_\infty + \|D^2\theta_H f\|_\infty \leqslant \frac{8}{3}\|D^2 f\|_\infty$　(2.15)

由　(2.7),(2.10),(2.11)及(2.15)即知定理成立。

定理 3　设$f(x)\in C^3(I)$，则：

$$\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty \leqslant \lambda_{3,r}\|D^3 f\|_\infty h^{3-r} \qquad r=0,1,2,3. \tag{2.16}$$

其中　$\lambda_{3,0}=\frac{1}{96}$,　$\lambda_{31}=\frac{13\sqrt{13}-46}{27}$,　$\lambda_{3,2}=\frac{8}{27}$,　$\lambda_{3,3}=2$

证明：利用§1的引理2，不难证明：

$$g_{3,0}(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}\frac{x^2(1-x)^3}{(3-2x)^2} & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{4}{3}\frac{x^3(1-x)^2}{(1+2x)} & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases} \tag{2.17}$$

$$g_{3,1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{27}x\frac{(2-3x)^3}{(1-x)^2} & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\ \frac{1}{27}x\frac{(2-3x)^3}{(1-x)^2}+\frac{1}{27}(1-x)\frac{(3x-1)^3}{x^2} & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ \frac{1}{27}(1-x)\frac{(3x-1)^3}{x^2} & x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases} \tag{2.18}$$

$$g_{3,2}(x)=\begin{cases}4x^2(1-x)^2+\frac{8}{27}\frac{(1-3x)^3}{(1-2x)^2} & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\ 4x^2(1-x)^2 & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ 4x^2(1-x)^2+\frac{8}{27}\frac{(3x-2)^2}{(1-2x)^2} & x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases} \tag{2.19}$$

利用数学分析的方法可证：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} g_{3,0}(x)=g_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{96} \tag{2.20}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} g_{3,1}(x)=g_{3,1}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)=\frac{13\sqrt{13}-46}{27} \tag{2.21}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} g_{3,2}(x)=g_{3,2}(0)=\frac{8}{27} \tag{2.22}$$

再利用(2.7)，即知定理对$r=0,1,2$成立。

注意到　$D^3\theta_H f(x)=6[Df(0)+Df(1)-2(f(1)-f(0))]$　(2.23)

及(1.6)，可得：

$$D^3\theta_H f(x)=D^3 f(\eta) \qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1$$

∴　$\|D^3\theta_H f(x)\|\leqslant\|D^3 f\|_\infty$

从而　$\|D^3(f-\theta_H f)\|_\infty \leqslant \|D^3 f\|_\infty + \|D^3\theta_H f\|_\infty \leqslant 2\|D^3 f\|_\infty$　(2.24)

至此定理得证。

§3　三次样条的误差新估计

为了估计三次样条插值的误差$\|\mathbf{D}^2(f-\theta_s f)\|_\infty$，我们利用三角不等式：

$$\|\mathbf{D}^r(f-\theta_s f)\|_\infty \leqslant \|\mathbf{D}^r(f-\theta_H f)\|_\infty + \|\mathbf{D}^r(\theta_H f-\theta_s f)\|_\infty \tag{3.1}$$

在$x\in[x_{i-1},x_i]$　$(i=1,2,\cdots\cdots,N)$上，显然有：

$$\theta_H f(x)-\theta_s f(x)=(\mathbf{D}f_{(x_{i-1})}-\mathbf{D}\theta_s f_{(x_{i-1})})\triangle x_i\varphi_{0,1}\left(\frac{x-x_{i-1}}{\triangle x_i}\right)+$$

$$+(\mathbf{D}f_{(x_i)}-\mathbf{D}\theta_s f_{(x_i)})\triangle x_i\varphi_{1,1}\left(\frac{x-x_{i-1}}{\triangle x_i}\right) \tag{3.2}$$

首先，我们将§1定理3改进如下：

定理1　若$f(x)\in C^m(I)$　$(m=1,2)$则：

$$|\mathbf{D}f(x_i)-\mathbf{D}\theta_s f(x_i)|\leqslant r_m\|\mathbf{D}^m f\|_\infty h^{m-1} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,N) \tag{3.3}$$

其中　$r_1=5,\qquad r_2=\frac{5}{6},$

证明：记$S^1=\begin{bmatrix}\mathbf{D}\theta_s f(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{D}\theta_s f(x_{N-1})\end{bmatrix}$，$f^1=\begin{bmatrix}\mathbf{D}f(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{D}f(x_{N-1})\end{bmatrix}$

则由[7]可知：

$$\mathbf{A}[f^1-s^1]=r(f)=\begin{bmatrix}r_1(f)\\ \vdots\\ r_{N-1}(f)\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

其中：　$\mathbf{A}=(a_{ij})$

$$a_{ij}=\begin{cases}2(\triangle x_i+\triangle x_{i+1}) & 1\leqslant i=j\leqslant N-1\\ \triangle x_{i+1} & 2\leqslant i=j+1\leqslant N-1\\ \triangle x_i & 1\leqslant i=j-1\leqslant N-2\\ 0 & \text{在其它情况下}\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}r_i(f)=&\triangle x_{i+1}\mathbf{D}f(x_{i-1})+2(\triangle x_{i+1}+\triangle x_i)\mathbf{D}f(x_i)+\triangle x_i\mathbf{D}f(x_{i+1})-\\ &-3[\triangle x_{i+1}(\triangle x_i)^{-1}(f(x_i)-f(x_{i-1}))+\\ &+\triangle x_i(\triangle x_{i+1})^{-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))]\end{aligned} \tag{3.6}$$

令　$$\mathbf{D}=diag(d_1,\cdots\cdots,d_{N-1}),\ d_i=a_{ii}^{-1},\ i=1,2,\cdots\cdots,N-1 \tag{3.7}$$

则：　$$\mathbf{D}\mathbf{A}[f^1-s^1]=\mathbf{D}r(f)=\begin{bmatrix}d_1r_1(f)\\ \vdots\\ d_{N-1}r_{N-1}(f)\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

当　$f(x)\in C^2(I)$时，由[7]可知：

$$|d_ir_i(f)|\leqslant\frac{5}{6}\frac{\triangle x_i\triangle x_{i+1}}{\triangle x_i+\triangle x_{i+1}}\|\mathbf{D}^2f\|_\infty$$

注意到　$\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}max(a,b)\qquad(a>0,b>0)$

从而可知　$\|\mathbf{D}r(f)\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|d_ir_i(f)|\leqslant\frac{5}{12}h\|\mathbf{D}^2f\|_\infty$

而　　$\|(\mathbf{D}\mathbf{A})^{-1}\|_\infty\leqslant 2$

∴ $$\|f^1 - s^1\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h \tag{3.9}$$

又 $2\mathbf{DA}s^1 = b$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$b_i = \begin{cases} 3(\lambda_1 f(x_1, x_2) + \mu_1 f(x_0, x_1) - \mu_1 Df(0) & i = 1 \quad (3\cdot10) \\ 3(\lambda_i f(x_i, x_{i+}1) + \mu_i f(x_{i-1}, x_i)) & 2 \leqslant i \leqslant N-2 \quad (3.11) \\ 3(\lambda_{N-1} f(x_{N-1}, x_N) + \mu_{N-1} f(x_{N-1}, x_N)) - \lambda_{N-1} Df(1) & i = N-1 \end{cases}$$

这里 $$\lambda_i = \frac{\triangle x_i}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i \qquad (i = 1, 2 \cdots\cdots N-1) \tag{3.12}$$

其中 $f(x, y)$的定义同[6]，即

$$f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(x \neq y), \quad f(x, x) = f'(x) \tag{3.13}$$

下面我们证明：

$$\|s^1\|_\infty \leqslant 4\|\mathbf{D}f\|_\infty \tag{3.14}$$

设 $$|\mathbf{D}\theta_s f(x_i)| = \|s^1\|_\infty \qquad (1 \leqslant i \leqslant N-1)$$

如果 $i_0 = 1$，则由(3.10)、(3.11)可知：

$$(2 - x_1)\|s^1\|_\infty \leqslant 3 + \mu_1\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

可见(3.14)成立。同理 $i_0 = N-1$时，(3.14)也成立。

如果$2 \leqslant i_0 \leqslant N-2$，可证$\|s^1\|_\infty \leqslant 3\|\mathbf{D}f\|_\infty$，从而知(3.4)成立。

∴ $$\|f^1 - s^1\|_\infty \leqslant 5\|\mathbf{D}f\|_\infty \tag{3.15}$$

由(3.9)和(3.15)即知定理成立。 （证毕）

定理 2 设$f(x) \in C^m(I)$，$(m = 2, 3, 4)$，则：

$$|\mathbf{D}^2 f(x_i) - \mathbf{D}^2\theta_s f(x_i)| \leqslant \overline{r}_m \|\mathbf{D}^m f\|_\infty h^{m-2} \qquad (i = 0, 1 \cdots\cdots, N) \tag{3.16}$$

其中 $\overline{r}_2 = 4$, $\overline{r}_3 = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, $\overline{r}_4 = \dfrac{1}{4}$

证明： 记$M_i = \mathbf{D}^2\theta_s f(x_i)(i = 0, 1, \cdots\cdots, N)$, $M = \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}$, $f^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^2 f(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}^2 f(x_N) \end{bmatrix}$

由〔6〕知：

$$\lambda_j M_{j-1} + 2M_j + \mu_j M_{j+1} = 6f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \qquad j = 1, \cdots\cdots, N-1 \tag{3.17}$$

$$\left.\begin{aligned} &2M_0 + M_1 = 6f(x_0, x_0, x_1); \\ &M_{N-1} + 2M_N = 6f(x_{N-1}, x_N, x_N) \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

令： $$\begin{aligned} \overline{r}_i(f) &= \lambda_i \mathbf{D}^2 f(x_{i-1}) + 2\mathbf{D}^2 f(x_i) + \mu_i \mathbf{D}^2 f(x_{i+1}) - (\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_i) \\ &= \lambda_i \mathbf{D}^2 f(x_{i-1}) + 2\mathbf{D}^2 f(x_i) + \mu_i \mathbf{D}^2 f(x_{i+1}) - \\ &\quad - 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}); \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, N) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{r}_0 = 2\mathbf{D}^2 f(x_0) + \mathbf{D}^2 f(x_1) - 6f(x_0, x_0 x_1); \\ &\overline{r}_N = \mathbf{D}^2 f(x_{N-1}) + \mathbf{D}^2 f(x_N) - 6f(x_{N-1}, x_N, x_N) \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a}_{ij})$； $\overline{a}_{ij}, (j = 0, 1, \cdots\cdots, N)$由下式定义：

$$\overline{a_{ij}}=\begin{cases}2 & 0\leqslant i=j\leqslant N\\ \lambda_i & 1\leqslant i=j+1\leqslant N\\ \mu_i & 0\leqslant i=j-1\leqslant N-1\\ 0 & \text{在其它情况}\end{cases}\tag{3.20}$$

其中　$\lambda_N=\mu_0=1$

从而：　$$\overline{\mathbf{A}}[f^{\mathrm{II}}-M]=\overline{r}=\begin{bmatrix}\overline{r}_0(f)\\ \vdots\\ \overline{r}_N(f)\end{bmatrix}\tag{3.21}$$

由(3.19)可知(利用 Peano 核定理)：当$f(x)\in C^4(I)$时

$$\overline{r}_i(f)=\frac{1}{6}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\mathbf{D}^4f(t)\,\overline{r}_i\Big((x-t)^3_+\Big)dt\quad(i=1,2,\cdots\cdots,N-1)\tag{3.22}$$

直接计算可得：

$$\overline{r}_i((x-t)^3_+)=$$
$$=\begin{cases}12(x_i-t)+6\mu_i(x_{i+1}-t)-6\left[\dfrac{(x_{i+1}-t)^3}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})}-\dfrac{(x_i-t)^3}{\triangle x_i\triangle x_{i+1}}\right. & (x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i)\\ 6\mu_i(x_{i+1}-t)-6\dfrac{(x_{i+1}-t)^3}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & (x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1})\end{cases}\tag{3.23}$$

整理可得：

$$\overline{r}_i((x-t)^3_+=$$
$$=\begin{cases}6\lambda_i(t-x_{i-1})-6\dfrac{(t-x_{i-1})^3}{\triangle x_i(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & (x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i)\\ 6\mu_i(x_{i+1}-t)-6\dfrac{(x_{i+1}-t)^3}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & (x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1})\end{cases}\tag{3.24}$$

不难证明$\overline{r}_i((x-t)^3_+)$在$[x_{i-1},x_{i+1}]$上非负（证明方法同[7]）

于是：　$$|\overline{r}_i(f)|\leqslant\frac{1}{6}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}((x-t)^3_+)dt$$

$$=\frac{1}{6}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty\ \frac{6}{4}\frac{(\triangle x_i)^3+(\triangle x_{i+1})^3}{\triangle x_i+\triangle x_{i+1}}\leqslant\frac{1}{4}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty h^2\ (i=1,2,\cdots,N-1)\tag{3.25}$$

而　$$\begin{aligned}\overline{r}_0(f)&=4f(x_0,x_0,x_0)+2f(x_1,x_1,x_1)-6f(x_0,x_0,x_1)\\ &=[2f(x_1,x_1,x_0)+2f(x_1,x_1,x_0,x_0)-4f(x_1,x_0,x_0,x_0)]\triangle x_1\\ &=[2f(x_1,x_1,x_1,x_0,x_0)+4f(x_1,x_1,x_0,x_0,x_0)](\triangle x)^2\end{aligned}\tag{3.26}$$

$\therefore$　$$|\overline{r}_0(f)|\leqslant6\frac{\|\mathbf{D}^4f\|_\infty}{4!}h^2=\frac{1}{4}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty h^2$$

同理：　$$\left|\overline{r}_i(f)\right|\leqslant\frac{1}{4}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty h^2$$

于是：　$$\|\overline{r}\|_\infty\leqslant\frac{1}{4}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty h^2\tag{3.27}$$

注意到$\overline{\mathbf{A}}$的定义可知：$\|(\overline{\mathbf{A}})^{-1}\|_\infty\leqslant1$

$\therefore$　$$\|f^{\mathrm{II}}-M\|_\infty\leqslant\|(\overline{\mathbf{A}})^{-1}\|_\infty\|\overline{r}(f)\|_\infty\leqslant\frac{1}{4}\|\mathbf{D}^4f\|_\infty h^2\tag{3.28}$$

当$f(x)\in C^3(I)$时，利用 Peano 核定理：

$$r_i(f)=\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}D^3f(t)\,\overline{r}_i((x-t)^2{}_+)dt \qquad i=1,2,\cdots,N-1 \tag{3.29}$$

直接计算：

$$\overline{r}_i[(x-t)^2{}_+]=$$

$$=\begin{cases}4+2\mu_i-6\left[\dfrac{(x_{i+1}-t)^2}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})}-\dfrac{(x_i-t)^2}{\triangle x_i\triangle x_{i+1}}\right] & x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i\\[2ex] 2\mu_i-6\dfrac{(x_{i+1}-t)^2}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1}\end{cases} \tag{3.30}$$

整理知：

$$\overline{r}_i[(x-t)^2{}_+]=$$

$$=\begin{cases}-2\lambda_i+6\dfrac{(t-x_{i-1})^2}{\triangle x_i(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i\\[2ex] 2\mu_i-6\dfrac{(x_{i+1}-t)^2}{\triangle x_{i+1}(\triangle x_i+\triangle x_{i+1})} & x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1}\end{cases} \tag{3.31}$$

于是：$|\overline{r}_i(f)|\leqslant\frac{1}{2}\|D^3f\|_\infty\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|\overline{r}_i[(x-t)^3{}_+]|dt=\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f(t)\|_\infty$

$$\frac{(\triangle x_i)^2+(\triangle x_{i+1})^2}{\triangle x_i+\triangle x_{i+1}}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f\|_\infty h \qquad i=1,2,\cdots\cdots,N-1 \tag{3.32}$$

同样利用　$|\overline{r}_0(f)|\leqslant\frac{1}{2}\|D^3f(t)\|_\infty\int_{x_0}^{x_1}|\overline{r}_0[(x-t)^2{}_+]|dt$

$$|\overline{r}_N(f)|\leqslant\frac{1}{2}\|D^3f(t)\|_\infty\int_{x_{N-1}}^{x_N}|\overline{r}_N[(x-t)^2{}_+]|dt$$

可证：$$|\overline{r}_0(f)|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f\|_\infty h,\qquad |\overline{r}_N(f)|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f\|_\infty h \tag{3.33}$$

$$\therefore\qquad \|\overline{r}\|_\infty\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f\|_\infty h \tag{3.34}$$

$$\therefore\qquad \|f^{\mathrm{II}}-M\|_\infty\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\|D^3f\|_\infty h \tag{3.35}$$

又因　$|6f(x_{j-1},x_j,x_{j+1})|\leqslant6\cdot\frac{1}{2}|f''(\zeta_j)|\leqslant3\|D^2f\|_\infty \qquad j=1,2,\cdots,N-1,$

$|6f(x_0,x_0,x_N)|\leqslant3\|D^2f\|_\infty, \quad\cdots\quad |6f(x_{N-1},x_N,x_N)|\leqslant3\|D^2f\|_\infty,$

由(3.1)，(3.18)即知：

$$\|\overline{A}M\|_\infty\leqslant3\|D^2f\|_\infty,\qquad \therefore\ \|M\|_\infty\leqslant3\|D^2f\|_\infty$$

$$\therefore\qquad \|f^{\mathrm{II}}-M\|_\infty\leqslant\|f^{\mathrm{II}}\|_\infty+\|M\|_\infty\leqslant4\|D^2f\|_\infty \tag{3.36}$$

由(3.28)，(3.35)，(3.36)即知定理得证　　　　（证毕）

下面我们对不同光滑程度的$f(x)$给出它的三次样条扦值的误差与所有可能的导数的误差的估计。

定理 3：如果$f(x)\in C'(\mathrm{I})$，则：

$$\|D^r(f-\theta_sf)\|_\infty\leqslant C_{1,r}\|Df\|_\infty h^{1-r} \qquad r=0,1 \tag{3.37}$$

其中　$C_{1,0}=\frac{3}{2},\quad C_{1,1}=5,$

证明：　$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$　$(1\leqslant i\leqslant N)$，　记 $t=\dfrac{x-x_{i-1}}{\Delta x_i}$（以下各定理的证明都作这样的假定，不再赘述）

$$\because\ \theta_s f(x)=f(x_{i-1})\varphi_{00}(t)+f(x_i)\varphi_{10}(t)+ + \mathbf{D}\theta_s f(_{i-1})\varphi_{01}(t)\Delta x_i+\mathbf{D}\theta_s f(x_i)\varphi_{11}(t)\Delta x_i \quad (3.38)$$

$$\therefore\ |f(x)-\theta_s f(x)|=|f(x)\varphi_{00}(t)+f(x)-\varphi_{10}(t)-\theta_s f(x)|\leqslant \leqslant[\|\mathbf{D}f\|_\infty(|t\varphi_{00}(t)|+|(1-t)\varphi_{10}(t)|)+ +\|s'\|_\infty(|\varphi_{01}(t)|+|\varphi_{11}(t)|)]\Delta x_i \quad (3.39)$$

利用(3.14)　可知：

$$|f(x)-\theta_s f(x)|\leqslant\|\mathbf{D}f\|_\infty\Delta x_i(t|\varphi_{00}(t)|+(1-t)|\varphi_{10}(t)|+ +4|\varphi_{00}(t)|+4|\varphi_{11}(t)|)$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\Delta x_i\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

$$\therefore\quad \|f-\theta_s f\|_\infty\leqslant\frac{3}{2}\|\mathbf{D}f\|_\infty h \quad (3.40)$$

由(3.38)，
$$\mathbf{D}\theta_s f(x)=f(x_i,x_{i-1})\mathbf{D}\varphi_{10}(t)+\mathbf{D}\theta_s f(x_{i-1})\mathbf{D}\varphi_{01}(t)+ +\mathbf{D}\theta_s f(x_i)\mathbf{D}\varphi_{11}(t) \quad (3.41)$$

$$\therefore\quad |\mathbf{D}\theta_s f(x)|\leqslant\|\mathbf{D}f\|_\infty(|\mathbf{D}\varphi_{10}(t)|+4|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+ +4|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|)\leqslant 4\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

$$\therefore\quad \|\mathbf{D}\theta_s f(x)\|_\infty\leqslant 4\|\mathbf{D}f\|_\infty$$

从而：
$$\|\mathbf{D}(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant 5\|\mathbf{D}f\|_\infty \quad (3.42)$$

由(3.40,(3.42)即知定理得证。

定理 4　若 $f(x)\in C^2(\mathrm{I})$，则

$$\|\mathbf{D}^r(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant C_{2,r}\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h^{2-r}\qquad r=0,1,2, \quad (3.43)$$

其中　$C_{20}=\dfrac{13}{48}$，$C_{21}=0.8623$，$C_{21}=4$

证明　由(3.2)有：

$$|\theta_H f(x)-\theta_s f(x)|\leqslant\|f'-s'\|_\infty\Delta x_i(|\varphi_{01}(t)+|\varphi_{11}(t)|) \quad (3.44)$$

注意到(3.9)即知：　$\|\theta_H f(x)-\theta_s f(x)\|_\infty=\dfrac{5}{24}\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h^2$

利用上式及(3.1),(2.5)即知：

$$\|f(x)-\theta_s f(x)\|_\infty\leqslant\frac{13}{48}\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h^2 \quad (3.45)$$

$$\because\quad |\mathbf{D}\theta_H f(x)-\mathbf{D}\theta_s f(x)|=|(\mathbf{D}f(x_{i-1})-\mathbf{D}\theta_s f(x_{i-1})]\mathbf{D}\varphi_{01}(t)+ +(\mathbf{D}f(x_i)-\mathbf{D}\theta_s f(x_i)]\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|$$

$$\leqslant\|f'-s'\|_\infty(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|) \quad (3.46)$$

$$\therefore\quad |\mathbf{D}\theta_H f(x)-\mathbf{D}\theta_s f(x)|\leqslant\frac{5}{6}h\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|)$$

$$|\mathbf{D}f(x)-\mathbf{D}\theta_s f(x)|\leqslant h\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty[\frac{5}{6}(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|)+g_{21}(t)]$$

令 $G(t)=\frac{5}{6}(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|)+g_{2,1}(t)$

显然：$G(t)\leqslant g_{21}(\frac{1}{3})+\frac{5}{6}(|\mathbf{D}\varphi_{01}(\frac{1}{2})|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(\frac{1}{2})|)=\frac{35}{54}\qquad \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}$

利用数学分析方法可证：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}}G(t)=\max_{0.0604387\leqslant t\leqslant 0.0604388}G(t)$$

$$\leqslant\frac{5}{6}(|\mathbf{D}\varphi_{01}(0.0604387)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(0.0604388)|)+g_{21}(0.0604388)$$

$$<0.8623$$

由 $G(t)$ 的对称性可知：

$$G(t)<0.8623\qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\therefore\quad \|\mathbf{D}(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant 0.8623\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty h \tag{3.47}$$

由(3.36)知 $\|M\|_\infty\leqslant 3\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty$， 又 $\mathbf{D}^2\theta_s f$ 是一折线函数

$$\therefore\quad \|\mathbf{D}^2\theta_s f(x)\|_\infty=\|M\|_\infty\leqslant 3\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty$$

从而 $\|\mathbf{D}^2[f(x)]-\theta_s f(x)\|_\infty\leqslant 4\|\mathbf{D}^2 f\|_\infty$ （证毕）

定理5 若 $f(x)\in C^3(\mathrm{I})$，则：

$$\|\mathbf{D}^r(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant C_{3,r}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^{3-r}\quad r=0,1,2,3, \tag{3.48}$$

其中$C_{3,0}=\frac{41}{864}$，$C_{3,1}=\frac{4}{27}$，$C_{32}=\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{9}$，$C_{3,3}=2+\frac{8\beta^2}{9}$。

证明：由(3.44)，(1.4)，

$$\|\theta_H f-\theta_s f\|_\infty\leqslant\frac{1}{27}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^3 \tag{3.49}$$

由(2.16)，(3.1)，(3.27)知：

$$\|f(x)-\theta_s f(x)\|_\infty\leqslant\frac{41}{864}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^3 \tag{3.50}$$

由(3.46)，(3.4)可得

$$|\mathbf{D}\theta_H f(x)-\mathbf{D}\theta_s f(x)|\leqslant\frac{4}{27}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^2(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)|+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|)$$

利用(2.6) 知：

$$|\mathbf{D}f(x)-\mathbf{D}\theta_s f(x)|\leqslant\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^2[\frac{4}{27}(|\mathbf{D}\varphi_{01}(t)+|\mathbf{D}\varphi_{11}(t)|+g_{31}(t)]$$

$$\leqslant\frac{4}{27}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^2$$

$$\therefore\quad \|\mathbf{D}(f(x)-\theta_s f(x)\|_\infty\leqslant\frac{4}{27}\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty h^2$$

不难直接验算：

$$\mathbf{D}^2 f-\mathbf{D}^2\theta_s f=(1-t)[\mathbf{D}^2 f(x_{i-1})-\mathbf{D}^2\theta_s f(x_{i-1})]+[\mathbf{D}^2 f(x_i)-$$
$$-\mathbf{D}^2\theta_s f(x_i)]+t(1-t)F(x,x_{i-1},x_i)(\Delta x_i)^2 \tag{3.51}$$

其中 $F(x)=\mathbf{D}^2 f(x)$，显然

$$|F(x,x_{i=1},x_i)\triangle x_i|\leqslant 2\|\mathbf{D}^3 f\|_\infty \tag{3.52}$$

由(3.10)可知

$$\|D^2(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\right)\|D^3 f\|_\infty h$$

由〔1〕，我们有：

$$\|D^3(\theta_H f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant\frac{8}{9}\beta^2\|D^3 f\|_\infty$$

再利用(2.24)可知：

$$\|D^3(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant\left(2+\frac{8}{9}\beta^2\right)\|D^3 f\|_\infty$$ （证毕）

定理 6　如果$f(x)\in C^4(I)$，则：

$$\|D^2(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant\left(\frac{1}{12}+\frac{\beta}{4}\right)\|D^4 f\|_\infty h^2 \tag{3.53}$$

证明：　利用(2.1),(3.38)可得：

$$|D^2\theta_H f(x)-D^2\theta_s f(x)|\leqslant\|f^1-s^1\|_\infty(|D^2\varphi_{01}(t)|+|D^2\varphi_{11}(t)|)\frac{1}{\triangle x_i}$$

由(1.4)及上式：

$$\|D^2\theta_H f-D^2\theta_s f\|_\infty\leqslant\frac{\beta}{4}\|D^4 f\|_\infty h^2$$

再利用§1定理2—5(3.1)可得：

$$\|D^2(f-\theta_s f)\|_\infty\leqslant\left(\frac{1}{12}+\frac{\beta}{4}\right)\|D^4 f\|_\infty h^2$$ （证毕）

当$\beta\leqslant\frac{7}{6}$时，系数$\frac{1}{12}+\frac{\beta}{4}$优于$\frac{3}{8}$

§4　几个实例

从开始研究三次样条函数的误差以来，这些控制系数（即表1，表2中的系数）不断得到改进。到目前为止，我们仅知道$\lambda_{4i}(i=0,1,2,3,)$与$C_{4,0}$，C_{41}已达到最优。对于前者，可令$f(x)=x^4$，在I上作等距分划即可验证；至于后者，可参阅〔2〕。本文将给出一个引理和几个实例来证明由本文给出的$\lambda_{m,r}$〔$m=1,2,3,\ 0\leqslant r\leqslant min(3,m)$〕都已达到最优。

引理：　设$f(x)\in pC^m$〔0.1〕，$(m=1,2,3,4)$则：对I上的任何分划△，有$\tilde{\lambda}_{m,r}=\lambda_{m,r}$　〔$0\leqslant r\leqslant min(3,m)$〕

其中：

$$\tilde{\lambda}_{m,r}=\sup_{f\in pC^m(I)}\frac{\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty}{\|D^m f\|_\infty h^{m-r}}$$

$$\lambda_{m,r}=\sup_{f\in C^m(I)}\frac{\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty}{\|D^m f\|_\infty h^{m-r}}$$

证明：　显然有$\lambda_{m,r}\leqslant\tilde{\lambda}_{m,r}$，至于$\tilde{\lambda}_{m,r}\leqslant\lambda_{m,r}$的证明与〔2〕中119—120页的处理方法相同，证明略去。

定理　§1定理2中的$\lambda_{m,r}$都已达到最优。

证明：对于$m=2,3$，$r=0,1,\cdots,m-1$，由§2中的定理2、定理3可知：

$$\lambda_{m,r}=\max_{x\in I}g_{m,r}(x)$$

设　$\lambda_m,r=g_{m,r}(x^{(m,r)})$　　$x^{(m,r)}\in I$

构造$f_{m,r}(x)\in pC^m(I)$，使其满足：

$$f_{m,r}^{(m)}(x)=sign\{D^r[(x^{(m,r)}-x)_+^{m-1}-\theta_H(x^{(m,r)}-x)_+^{m-1}]\}$$

则有：　$\|D^r(f_{m,r}-\theta_H f_{m,r})\|_\infty=\lambda_{m,r}\|D^m f_{m,r}\|_\infty h^{m-r}$

再利用本节引理即知$\lambda_{m,r}$已达最优。

下面我们举实例证明$\lambda_{1,0}$，$\lambda_{1,1}$，$\lambda_{2,2}$，$\lambda_{3,3}$也已达最优。

例1、 令

$$Df_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}\right]\\ -1 & x\in\left[\frac{1}{n},\ \frac{1}{2}\right]\cup\left[1-\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$$

$$f_n(x)=\int_0^x Df_n(x)dx\qquad(x\in I,n\geqslant 4)$$

取$n=1$，直接计算可得：

$$\theta_H f_n(x)=x(1-x)$$

从而　$\theta_H f_n\left(\frac{1}{2}\right)-f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2}{n}$

∵　$\|Df_n\|_\infty=1$，$n=1$，从而可知：

$$\tilde{\lambda}_{1,0}\geq\frac{3}{4}-\frac{2}{n}$$

由n的任意性，可知$\tilde{\lambda}_{1,0}\geq\frac{3}{4}$

由本节引理可得$\lambda_{1,0}\geq\frac{3}{4}$，故知$\lambda_{1,0}=\frac{3}{4}$已达最优。

例2　构造$f_n(x)\in pC^1(I)$，($n\geq4$)如下：

$$Df_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[\frac{1}{n},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]\\ -1 & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]\cup\left[1-\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$$

$$f_n(x)=\int_0^x Df_n(x)dx$$

取$n=1$，　得$\theta_H f_n(x)=-x(1-x)^2+x^2(1-x)+\left(1-\frac{8}{n}\right)(3x^2-2x^3)$

$$D\theta_H f_n\left(\frac{1}{2}\right)-Df_n\left(\frac{1}{2}\right)=3-\frac{12}{n}$$

由n的任意性，$\tilde{\lambda}_{1,1}\geq3$，进而知$\lambda_{1,1}\geq3$

∴　$\lambda_{1,1}=3$已达最优。

例3　构造$f_n(x)\in pC^2(I)$如下：($n\geq4$)

$$D^2f_n(x)=\begin{cases}-9 & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\\ 9 & x\in\left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{3}\right]\end{cases}$$

$$Df_n(x)=-1+\int_0^1 D^2f_n(x)dx\qquad x\in I$$

$$f_n(x)=\int_0^x Df_n(x)dx\qquad x\in I$$

仿照例1、2可证 $\lambda_{2,2}=\frac{8}{3}$已达最优。

例 4 构造$f_n(x)\in pC^3(I)$如下：（$n\geq 4$）

$$
D^3 f_n(x)=\begin{cases} 1 & x\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right]\cup\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right] \\ -1 & x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right] \end{cases}
$$

$$
D^2 f_n(x)=\int_0^x D^3 f_n(x)dx; \qquad Df_n(x)=\int_0^x D^2 f_n(x)dx
$$

$$
f_n(x)=\int_0^x Df_n(x)dx
$$

同样可证 $\lambda_{33}=2$已达最优。至此定理得证。

另外，本文还提出一个例子说明表1中的 $C_{4,3}$ 一定与分划比β有关。

例 5 取$f_n(x)=x^2\left(x-\frac{1}{n}\right)(x-1)$ $(n>2)$

显然 $f_n(x)\in C^4(I)$，令$x_0=1$，$x_1=\frac{1}{n}$，$x_2=1$，则对分划

$\triangle$： $0=x_0<x_1<x_2=1$，有

$$
\theta_s f_n(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(n-1)x^2\left(x-\frac{1}{n}\right) & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ \frac{n}{n-1}\left(x-\frac{1}{n}\right)(1-x)\left[\frac{1}{2n}-\left(1-\frac{1}{2n}\right)x\right] & x\in\left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}
$$

当n充分大时，

$$
\|D^3[f_n(x)-\theta_s f_n(x)]\|_\infty=3n-12-\frac{6}{n}
$$

而 $\|D^4 f_n\|_\infty=24$; $\qquad n=1-\frac{1}{n}$

从此明显可看出。不存在一个与β无关的常数$C_{4,3}$使

$$
\|D^3(f_n-\theta_s f_n)\|_\infty\leqslant C_{4,3}\|D^4 f_n\|_\infty h
$$

对一切 $n>2$ 都成立。

参 考 文 献

〔1〕 R.E.Carlson and C.A.Hall, Error Bounds for Bicubic Spline Interpolation, J.Approx Theory, 7(1973)41—47

〔2〕 C.A.Hall and W.Weston Meyer, Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation, J.Approx Theory, 16(1976)105—122

〔3〕 C.A.Hall, On Error Bounds for Spline Interpolation, J.Approx Theory.1(1968)209—218.

〔4〕 文涛，三次样条函数的误差估计，（1981年全国样条函数学术会议资料）。

〔5〕 P.J.Davis, Interpolation and Approximation, Blaisdell, Newyonk, 1963.

〔6〕 李岳生、黄友谦，数值逼近，人民教育出版社，1978年。
〔7〕 M.H.Schultz，样条分析，上海科学技术出版社，1979年。

Error Bouuds for Cubic Spline Interpolation

Yuan Ya—xiang

Abstract

It was considered that the error bounds of the forms $\|D^r(f-\theta_s f)\|_\infty \leq C_{m,r}\|D^m f\|_\infty h^{m-1}$ and $\|D^r(f-\theta_H f)\|_\infty \leqslant \lambda_{m,r}\|D^m f\|h^{m-r}$, ($m=1,2,3,4$. $0\leqslant r\leqslant \min(3,m)$), where $\theta_H f$ is cubic Hermite interpolation of $f\in c^m(I)$ and $\theta_s f$ is a cubic spline interpolation of f, matching f in slope at the end points of [0,1]. We Obtain Some of the Constants $\lambda_{m,r}$、C_{mr}, which are more smaller than heretofore known. It is shown that none of $\lambda_{n,r}$ Can be further improved.