Projeção L2

Introdução aos Métodos Discretos

Prof. Joventino de Oliveira Campos - joventino.campos@ufjf.br
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Espaço dos Polinômios Lineares

$P_1(I)$ espaço vetorial das funções lineares no intervalo $I = [x_0, x_1]$

$$P_1(I) = \{v : v(x) = c_0 + c_1 x, x \in I, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Qualquer função v em $P_1(I)$ pode ser expressa como

$$v(x) = \alpha_0 \lambda_0(x) + \alpha_1 \lambda_1(x)$$

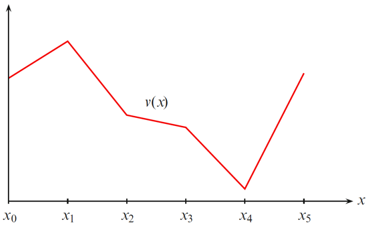
$\{x_0, x_1\}$: pontos
$\{\alpha_0, \alpha_1\}$: valores nodais $\quad \alpha_0 = v(x_0); \alpha_1 = v(x_1)$
$\lambda_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$
$\{\lambda_0, \lambda_1\}$: base nodal para $P_1(I)$
$\lambda_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad , \quad \lambda_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Espaço das funções lineares contínuas por partes

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$: $n+1$ pontos nodais
Intervalo : I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L$
Subintervalos : $I_i = [x_{i-1}, x_i]\,, i = 1, 2, \cdots n \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$
O espaço das funções lineares contínuas por partes V_h

$$V_h = \left\{ v : v(x) \in C^0(I),\, v|_i \in P_1\left(I_i\right) \right\}.$$

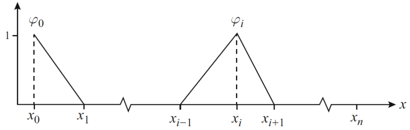
$C^0(I)$: espaço das funções contínuas em I
$P_1\left(I_i\right)$: espaço das funções lineares em I_i



Funções Lineares por partes

Qualquer função v em V_h pode ser escrita como combinação linear de $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$:
$\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$: valores nodais de v. $\alpha_i = v\left(x_i\right); i = 0, 1, \cdots, n$.

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$$



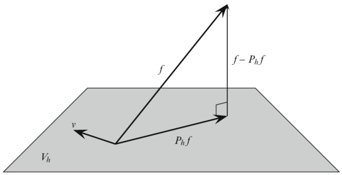
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \left(x - x_{i-1}\right)/h_i, & \text{se } x \in I_i \\ \left(x_{i+1} - x\right)/h_{i+1}, & \text{se } x \in I_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

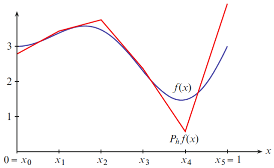
Conteúdo

Projeção L2

A função $f \in L^2(I)$ e sua projeção L^2 $P_h f$ no espaço V_h de f é definida por

$$\int_I (f - P_h f)\, v dx = 0, \forall v \in V_h$$





A projeção L^2 $P_h f$ aproxima f num sentido médio. É comum $P_h f$ superestimar e subestimar os mínimos e máximos locais de f, respectivamente.

Projeção L2

Como a equação deve ser satisfeita para toda v, podemos exigir que seja satisfeita para as funções base:

$$\int_I (f - P_h f)\,\varphi_i dx = 0, \quad i = 0, 1, \cdots n$$

onde φ_i são as funções chapéu.
Como $P_h f$ pertence a V_h,

$$P_h f = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j$$

onde ξ_j são as incógnitas. Substituindo na primeira equação:

$$\int_I f \varphi_i dx = \int_I \left(\sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i dx = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \int_I \varphi_j \varphi_i dx, i = 0, 1, \cdots n$$

Forma matricial

Matriz de Massa :

$$M_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx, \quad i,j = 0,1,\cdots n$$

Vetor de Carga:

$$b_i = \int_I f \varphi_i dx$$

Sistema linear $(n+1) \times (n+1)$ para $\mathrm{n}+1$ incógnitas ξ_j

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} M_{ij} \xi_j, \quad i = 0,1,\cdots n$$

Necessário resolver o sistema $\mathbf{M}\xi = \mathbf{b}$

Matriz de Massa - Integração

Podemos usar a regra de Simpson para integrar $\mathbf{M}_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx$

$$\varphi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1}) / h_i, & \text{se } x \in I_i \\ (x_{i+1} - x) / h_{i+1}, & \text{se } x \in I_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Entradas de M : $M_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$.

$$M_{ii} = \int_I {\varphi_i}^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} {\varphi_i}^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} {\varphi_i}^2 dx$$

$$= \frac{0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{6} h_i + \frac{1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0}{6} h_{i+1} = \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}, i = 1, 2, \cdots$$

Primeira e última entrada da diagonal de $\mathbf{M}$ são: $\frac{h_1}{3}$, $\frac{h_n}{3}$ respectivamente

Matriz de Massa - Integração

Entradas acima e abaixo da diagonal são iguais a

$$M_{ii+1} = \int_I \varphi_{i+1}\varphi_i dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}\varphi_i dx = \frac{h_{i+1}}{6}$$

Matriz Global

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & & \\ & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3}+\frac{h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3}+\frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ & & & & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & \\ \frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} & & \\ & & & \end{bmatrix} + \cdots \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ & & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}$$

Vetor de Carga - Integração

$$b_i = \int_I f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx$$
$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx$$

Usando a regra do Trapézio:

$$\begin{aligned} b_i &\approx \left(\left(f\left(x_{i-1}\right)\varphi_i\left(x_{i-1}\right) + f\left(x_i\right)\varphi_i\left(x_i\right)\right)h_i/2 \\ &+ \left(\left(f\left(x_i\right)\varphi_i\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right)\varphi_i\left(x_{i+1}\right)\right)h_{i+1}/2 \\ &= f\left(x_i\right)\left(h_i + h_{i+1}\right)/2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} f\left(x_0\right)h_1/2 \\ f\left(x_1\right)\left(h_1+h_2\right)/2 \\ f\left(x_2\right)\left(h_2+h_3\right)/2 \\ \vdots \\ f\left(x_{n-1}\right)\left(h_{n-1}+h_n\right)/2 \\ f\left(x_n\right)\left(h_n\right)/2 \end{bmatrix}$$

Algoritmo

- Criar uma malha com n elementos no intervalo I e definir o espaço das funções lineares contínuas por partes V_h.
- Calcular a matriz $\mathbf{M}$ e o vetor $\mathbf{b}$, onde $\mathbf{M}_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx$ e $\mathbf{b}_i = \int_I f \varphi_i dx$
- Resolver o sistema linear

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{b}$$

- Definir

$$P_h f = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j$$

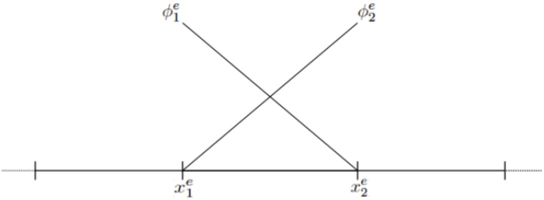
que é a aproximação para a função.

Conteúdo

Problema Local

As funções de base lineares ϕ_i^e podem ser definidas em cada elemento $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$, com espaçamento $h = x_2^e - x_1^e$, como:

$$\begin{aligned} \phi_1^e &= \frac{1}{h}\left(x_2^e - x\right), \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \phi_2^e &= \frac{1}{h}\left(x - x_1^e\right), \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \phi_i^e &= 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall x \notin [x_1^e, x_2^e] \end{aligned}$$



Problema Local

Então, para cada elemento Ω^e, temos a seguinte matriz de massa

$$m^e_{i,j} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \phi^e_0 \phi^e_0 dx & \int_{\Omega^e} \phi^e_0 \phi^e_1 dx \\ \int_{\Omega^e} \phi^e_1 \phi^e_0 dx & \int_{\Omega^e} \phi^e_1 \phi^e_1 dx \end{bmatrix}$$

Somando sobre todos os elementos Ω^e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m^1_{11} & m^1_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m^1_{21} & m^1_{22} + m^2_{11} & m^2_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m^2_{21} & m^2_{22} + m^3_{11} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^{N-1}_{21} & m^{N-1}_{22} + m^N_{11} & m^N_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^N_{21} & m^N_{22} \end{bmatrix}$$

Problema Local

Para cada elemento Ω^e temos o seguinte vetor de carga

$$b_j^e = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \phi_0^e u dx \\ \int_{\Omega^e} \phi_1^e u dx \end{bmatrix}$$

Somando sobre todos os elementos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^2 + b_1^3 \\ \vdots \\ b_2^{N-1} + b_1^N \\ b_2^N \end{bmatrix}$$

Elemento de Referência

Como estamos interessados em utilizar o método de integração numérica de Gauss, devemos definir o elemento de referência no intervalo fechado $[-1, 1]$.
Dessa forma, supondo um elemento de intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ a mudança de variável para o intervalo $[-1, 1]$ do elemento de referência obedece a seguinte relação

$$x(t) = \frac{h}{2}t + \frac{x_2^e + x_1^e}{2}, \quad t \in [-1, 1]$$

onde $h = x_2^e - x_1^e$. Isolando t na equação acima, obtemos

$$t(x) = \frac{2x - x_1^e - x_2^e}{h}$$

a relação acima é conhecida como transformação isoparamétrica (para elementos 1D).

Elemento de Referência

Logo, o problema

$$m_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \phi_i^e \phi_j^e dx$$

pode ser reescrito no intervalo $[-1, 1]$ em termos da variável t, tomamos

$$dx = \frac{h}{2} dt$$

para obter

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^{1} \phi_i \phi_j \frac{h}{2} dt = \int_{-1}^{1} F(t) dt$$

onde ϕ_i e ϕ_j denotam as funções de base definidas no intervalo $[-1, 1]$.

Elemento de Referência

Como

$$F(t) = \phi_i \phi_j \frac{h}{2}$$

a aplicação do método de Gauss com 2 pontos para obtenção do valor da integral de $F(t)$ é dada por:

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = w_0 F\left(t_0\right) + w_1 F\left(t_1\right) = F\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Analogamente para o termo fonte local b_j^e, temos que

$$b_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} u(x)\phi_j^e dx = \int_{-1}^{1} u(x(t))\phi_j \frac{h}{2} dt = \int_{-1}^{1} G(t)dt$$

Logo

$$\int_{-1}^{1} G(t)dt = G\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \text{com } G(t) = u(x(t))\phi_j \frac{h}{2}$$

Elemento de Referência

No domínio de referência $[-1, 1]$, podemos definir os seguintes polinômios lineares (interpolando os pontos -1 e 1):

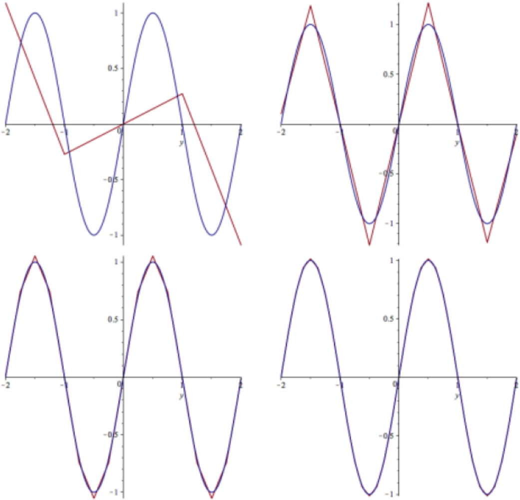
$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}(1 - t), \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}(1 + t), \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\phi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall x \notin [-1, 1]$$

Exemplo

Aproximação da função $u(x) = sen(\pi x)$ para 4, 8, 16, 32 elementos.



Implementação

A implementação deste tipo de metodologia pode seguir os seguintes passos:

- Definir um elemento de referência (comumente definido no intervalo de $[-1, 1]$ para aplicar o método de integração numérica de Gauss)
- Definir as funções de base no elemento de referência
- Calcular a integração numérica das funções de forma no elemento de referência
- Construir as matrizes e vetores locais
- Montar o problema global (matriz de massa e vetor de carga)
- Resolver o sistema linear formado pela matriz e o vetor globais

Montagem da Matriz

- Alocar matriz $(n+1 \times n+1)$ $\mathbf{M}$
- Para cada elemento i
    - Calcular matriz local (2×2) $\mathbf{M}^e$
    - Adicionar $\mathbf{M}^e_{11}$ em $\mathbf{M}_{i,i}$
    - Adicionar $\mathbf{M}^e_{12}$ em $\mathbf{M}_{i,i+1}$
    - Adicionar $\mathbf{M}^e_{21}$ em $\mathbf{M}_{i+1,i}$
    - Adicionar $\mathbf{M}^e_{22}$ em $\mathbf{M}_{i+1,i+1}$

Montagem do Vetor

- Alocar vetor $(n+1 \times 1)$ $\mathbf{b}$
- Para cada elemento i
  - Calcular vetor local (2×2) $\mathbf{b}^e$
  - Adicionar $\mathbf{b}_1^e$ em $\mathbf{b}_i$
  - Adicionar $\mathbf{b}_2^e$ em $\mathbf{b}_{i+1}$