Métodos de Resíduos Ponderados

Material do Professor Luis Paulo da Silva Barra

Prof. Joventino de Oliveira Campos - joventino.campos@ufjf.br
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Resíduos Ponderados

Considere o PVC:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 4u(x) = 4x \quad \text{com} \quad u(0) = u(1) = 0$$

Pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}(u) - f = 0$$

onde o operador diferencial linear, $\mathcal{L}$, e o termo forçado, f, são dados por:

$$\mathcal{L}() = \frac{d^2()}{dx^2} - 4()$$

$$f = 4x$$

Resíduos Ponderados

Utilizando uma solução aproximada $\tilde{u}(x)$:

$$\varepsilon(x) \equiv \mathcal{L}(\tilde{u}) - f \neq 0$$

onde $\varepsilon(x)$ é uma função de x que expressa o erro (ou resíduo) da aproximação.

Métodos de Resíduos Ponderados:

determina-se os parâmetros de uma função $\tilde{u}(x)$, de uma família previamente escolhida, de modo que a função resíduo se anule, em um sentido médio, ao longo do domínio.

Isto é:

$$\int_{\Omega} \omega(x)\varepsilon(x)dx = 0$$

onde a função $\omega(x)$ pondera o erro ao longo do domínio Ω.

Resíduos Ponderados

Funções de Aproximação

- combinações lineares de funções, $\tilde{u}(x) = \sum \alpha_j \Phi_j(x)$.
- formam uma base para o espaço de soluções.
- satisfazem as condições de contorno.

Funções de Ponderação

- funções de peso ou test functions, $\omega_i(x)$.

Resíduos Ponderados

Lembrando que o operador $\mathcal{L}$ é linear, e escolhidas as funções de aproximação, a sentença de resíduos ponderados fica:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \omega(x)\varepsilon(x)dx &= \int_\Omega \omega(x)\{\mathcal{L}[\tilde{u}(x)] - f(x)\}dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \omega(x)\left\{\mathcal{L}\left[\Phi_j(x)\right]\right\}\alpha_j dx - \int_\Omega \omega(x)f(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} A_j\alpha_j - b
\end{aligned}$$

onde A_j e b são valores algébricos:

$$A_j = \int_\Omega \omega(x)\mathcal{L}\left[\Phi_j(x)\right]dx$$

$$b = \int_\Omega \omega(x)f(x)dx$$

Resíduos Ponderados

Igualando a zero o resíduo, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \alpha_j = b$$

Utilizando N funções de ponderação, linearmente independentes, $\omega_i(x)$:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \alpha_j = b_i, \quad \text{com} \quad i = 1, N$$

onde:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i(x) \mathcal{L}\left[\Phi_j(x)\right] dx \quad \text{e} \quad b_i = \int_{\Omega} \omega_i(x) f(x) dx$$

A solução do sistema de equações algébricas lineares acima fornece os valores dos α_j que determinam a solução desejada.

Métodos de Resíduos Ponderados

Serão exemplificados a seguir os seguintes métodos:

- Momentos, $\omega_i = x^{i-1}$
- Colocação, $\omega_i = \delta\left(\xi_i - x\right)$
- Galerkin, $\omega_i = \Phi_i$

Exemplos

Tendo em vista o PVC modelo:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 4u(x) = 4x \quad \text{com} \quad u(0) = u(1) = 0$$

São utilizadas como funções de interpolação:

$$\Phi_j(x) = x^j(1-x) \quad \text{uma vez que} \quad \Phi_j(0) = \Phi_j(1) = 0$$

Conteúdo

Método dos Momentos

(N = 1)

Solução aproximada da forma: $\tilde{u}_1 = \alpha_1 x(1-x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\Phi_1(x)\right] &= \frac{d^2}{dx^2}(x(1-x)) - 4x(1-x) \\ &= -2 - 4x(1-x) \\ &= -2 - 4x + 4x^2\end{aligned}$$

Logo, com $\omega_1 = x^{1-1} = 1$:

$$A_{11} = \int_0^1 1\left(-2-4x+4x^2\right)dx = -\frac{8}{3}$$

$$b_1 = \int_0^1 1(4x)dx = 2$$

Portanto:

$$\frac{8}{3}\alpha_1 = 2 \rightarrow \alpha_1 = -\frac{3}{4} \quad \rightarrow \tilde{u}_1 = -\frac{3}{4}x(1-x)$$

Método dos Momentos

(N = 2)

Solução aproximada da forma: $\tilde{u}_2 = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\Phi_2(x)\right] &= \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2(1-x)\right) - 4x^2(1-x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(2x(1-x) + x^2\right) - 4x^2(1-x) \\
&= 2 - 6x - 4x^2 + 4x^3
\end{aligned}$$

Método dos Momentos
$(\mathrm{N} = 2)$

Logo, com $\omega_2(x) = x^{2-1} = x$, tem-se:

$$A_{21} = \int_0^1 x\left(-2 - 4x + 4x^2\right) dx = -\frac{4}{3}$$

$$A_{12} = \int_0^1 1\left(2 - 6x - 4x^2 + 4x^3\right) dx = -\frac{4}{3}$$

$$A_{22} = \int_0^1 x\left(2 - 6x - 4x^2 + 4x^3\right) dx = -\frac{6}{5}$$

$$b_2 = \int_0^1 x(4x)dx = \frac{4}{3}$$

Método dos Momentos

$(\mathrm{N} = 2)$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \end{Bmatrix}$$

Cuja solução fornece: $\alpha_1 = -\frac{7}{16}$ e $\alpha_2 = -\frac{10}{16}$.

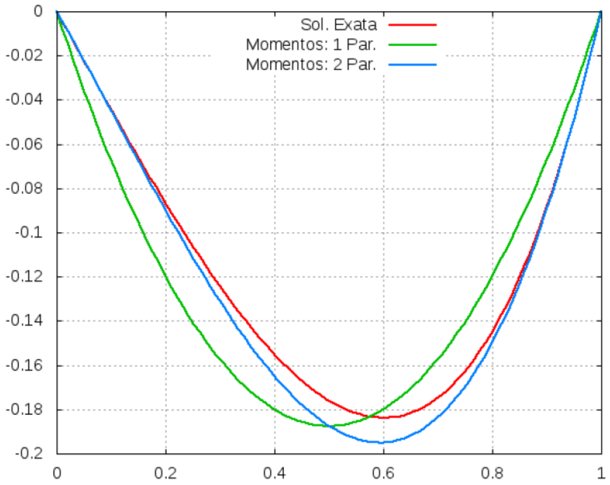
$$\tilde{u}_2 = -\frac{7}{16}\left(x - x^2\right) - \frac{10}{16}x\left(x - x^2\right)$$

Os resultados obtidos são comparados com a solução exata:

$$u(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^2 - e^{-2}} - x$$

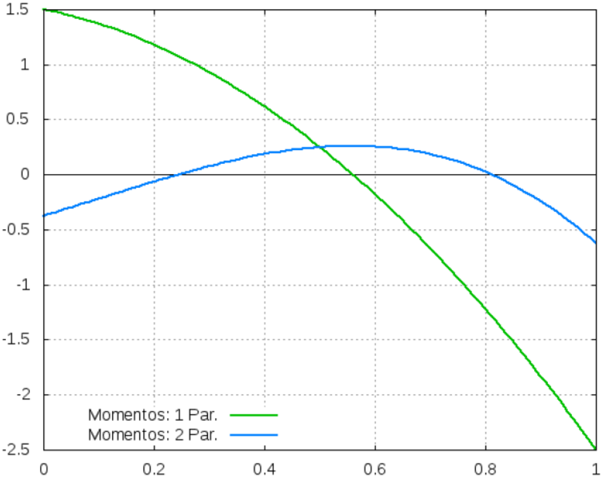
Método dos Momentos

Soluções



Método dos Momentos

Resíduos



Conteúdo

Método da Colocação

Função de ponderação:
É a função Delta de Dirac, $\delta(x-\xi)$, definida como:

$$\int_{\Omega} \delta(x-\xi) f(x) dx = \begin{cases} f(\xi), & \text{se} \quad \xi \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad \xi \notin \Omega \end{cases}$$

Logo:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \delta\left(x-\xi_i\right) \mathcal{L}\left[\Phi_j(x)\right] dx = \mathcal{L}\left[\Phi_j\left(\xi_i\right)\right]$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} \delta\left(x-\xi_i\right) f(x) dx = f\left(\xi_i\right)$$

Método da Colocação

$(\mathrm{N}=1)$

Solução aproximada da forma: $\tilde{u}_1 = \alpha_1 x(1-x)$
Mantendo a mesma função de aproximação, tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\Phi_1(x)\right] = -2 - 4x + 4x^2$$

Logo usando $\xi_1 = 0.5$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 \delta(x-0.5)\left(-2-4x+4x^2\right)dx \\ &= \left[-2-4x+4x^2\right]_{x=0.5} = -3 \\ b_1 &= \int_0^1 \delta(x-0.5)4x dx = [4x]_{x=0.5} = 2 \end{aligned}$$

Igualando a zero a expressão do resíduo:

$$-3\alpha_1 = 2 \rightarrow \alpha_1 = -2/3 \quad \bar{u} = -2\left(x-x^2\right)/3$$

Método da Colocação

(N = 2)

Adotando $\xi_1 = 0.25$ e $\xi_2 = 0.5$, tem-se:

$$A_{11} = \left[4x^2 - 4x - 2\right]_{x=0.25} \qquad A_{21} = \left[4x^2 - 4x - 2\right]_{x=0.5}$$
$$A_{12} = \left[4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right]_{x=0.25} \qquad A_{22} = \left[4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right]_{x=0.5}$$
$$b_1 = [4x]_{x=0.25} \qquad b_2 = [4x]_{x=0.5}$$

Fornecendo:

$$-3\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 = 2$$
$$-\frac{11}{4}\alpha_1 + \frac{5}{16}\alpha_2 = 1$$

Cuja solução é: $\alpha_1 = -0.41975$ e $\alpha_2 = -0.49383$.
Logo a aproximação procurada é:

$$\tilde{u} = -0.41975\left(x - x^2\right) - 0.49383x\left(x - x^2\right)$$

Método da Colocação

(N = 2)

Alternativamente, adotando $\xi_1 = 1/3$ e $\xi_2 = 2/3$, tem-se:

$$A_{11} = \left[4x^2 - 4x - 2\right]_{x=1/3} \qquad A_{21} = \left[4x^2 - 4x - 2\right]_{x=2/3}$$
$$A_{12} = \left[4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right]_{x=1/3} \qquad A_{22} = \left[4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right]_{x=2/3}$$
$$b_1 = [4x]_{x=1/3} \qquad b_2 = [4x]_{x=2/3}$$

Fornecendo:

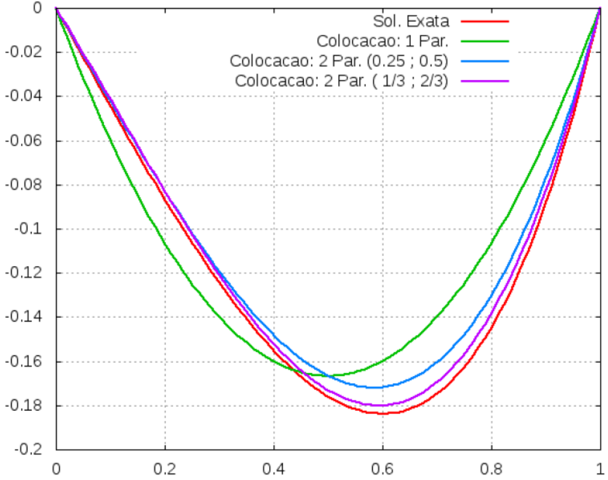
$$-\frac{26}{9}\alpha_1 - \frac{8}{27}\alpha_2 = \frac{4}{3}$$
$$-\frac{26}{9}\alpha_1 - \frac{70}{27}\alpha_2 = -\frac{8}{3}$$

cuja solução é $\alpha_1 = -0.40198$ e $\alpha_2 = -0.58064$.
Resultando na aproximação:

$$\tilde{u} = -0.40198\left(x - x^2\right) - 0.58064x\left(x - x^2\right)$$

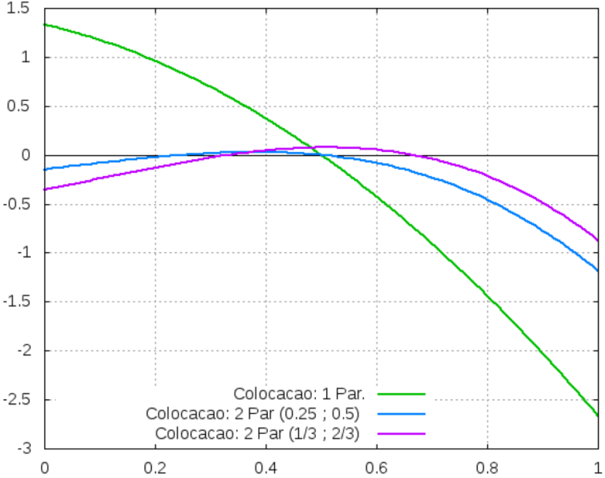
Método da Colocação

Soluções



Método da Colocação

Resíduos



Conteúdo

Método de Galerkin

$(\mathrm{N} = 1)$

São utilizadas como funções de ponderação as funções de aproximação.

Logo, com a mesma função de aproximação

$\omega_1 = \Phi_1 = \left(x - x^2\right)$

$$A_{11} = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\left[-2 - 4x + 4x^2\right] dx = -\frac{7}{15}$$

e

$$b_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right) 4x dx = \frac{1}{3}$$

que resulta em

$$-\frac{7}{15}\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

de onde $\alpha_1 = -5/7$ e $\bar{u} = -5\left(x - x^2\right)/7$.

Método de Galerkin

(N = 2)

$$A_{11} = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\left(4x^2 - 4x - 2\right) dx$$

$$A_{12} = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\left(4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right) dx$$

$$b_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right)(4x) dx$$

$$A_{21} = \int_0^1 x\left(x - x^2\right)\left(4x^2 - 4x - 2\right) dx$$

$$A_{22} = \int_0^1 x\left(x - x^2\right)\left(4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\right) dx$$

$$b_2 = \int_0^1 x\left(x - x^2\right)(4x) dx$$

Método de Galerkin

$(\mathrm{N} = 2)$

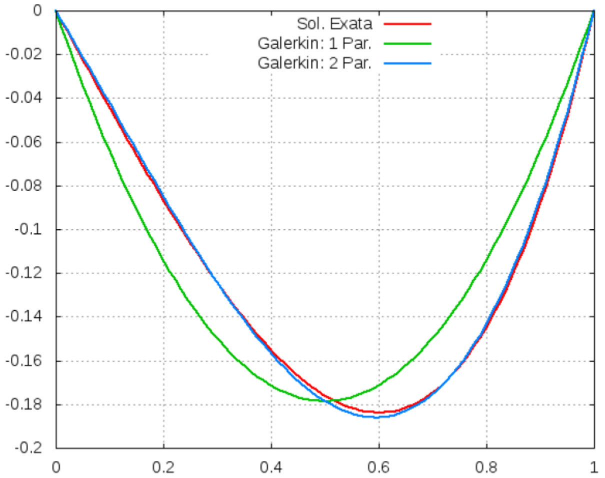
Fornecendo:

$$-\frac{7}{15}\alpha_1 - \frac{7}{30}\alpha_2 = \frac{1}{3}$$
$$-\frac{7}{30}\alpha_1 - \frac{6}{35}\alpha_2 = \frac{1}{5}$$

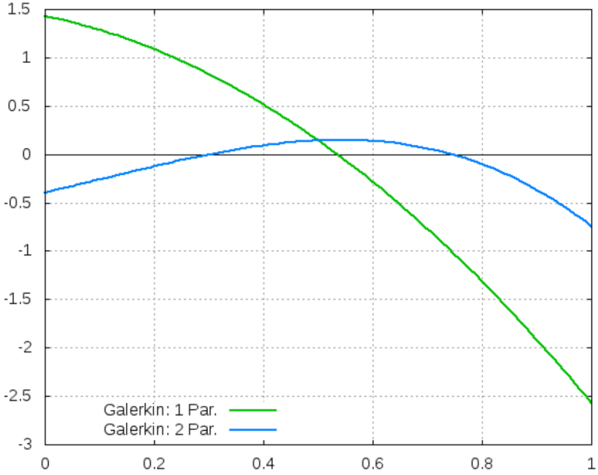
cuja solução é $\alpha_1 = -0.40994$ e $\alpha_2 = -0.60870$.
Resultando na aproximação:

$$\tilde{u} = -0.40994\left(x - x^2\right) - 0.60870x\left(x - x^2\right)$$

Método de Galerkin

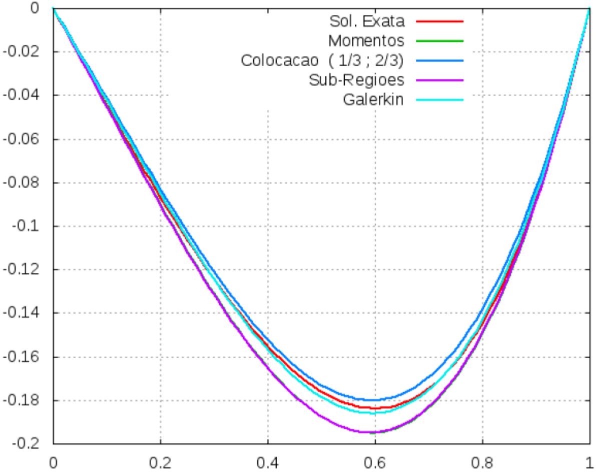


Método de Galerkin



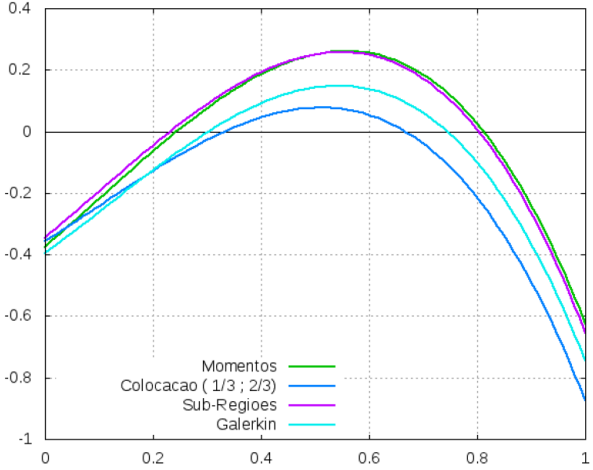
Comparação entre os métodos (N=2)

Soluções



Comparação entre os métodos (N=2)

Resíduos



Características

- Funções de aproximação globais.
- Sistemas de equaçõoes algébricas com matrizes cheias.
- Matrizes, de maneira geral, não simétricas.
- Matrizes simétricas no método de Galerkin, dependendo do operador diferencial $\mathcal{L}$.