Interpolação Polinomial

Introdução aos Métodos Discretos

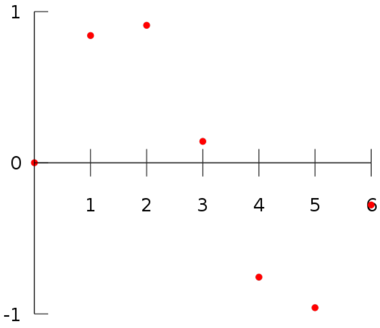
Prof. Joventino de Oliveira Campos - joventino.campos@ufjf.br
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Introdução

Suponha que temos um conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e os valores de uma função $f(x)$ nestes pontos $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$.

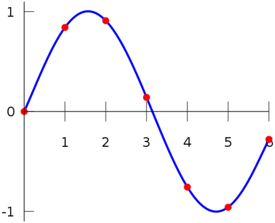


Interpolar a função $f(x)$ nos pontos $x_1, \ldots, x_n$ consiste em aproximá-la por uma função $g(x)$ tal que:

$$g(x_0) = y_0$$

$$\ldots$$

$$g(x_2) = y_2$$



Introdução

- Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio**.
- Porque polinômios? Polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, e etc.
- A interpolação polinomial é usada para aproximar uma função $f(x)$, principalmente, nas seguintes situações:
  - Não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$. Isto é, somente conhecemos o valor da função em um conjunto de pontos (isso ocorre frequentemente quando se trabalha com dados experimentais).
  - $f(x)$ é complicada e de difícil manejo.
    - Interpolação será usada também para calcular a integral numérica de $f(x)$.
    - Veremos mais sobre isso em **Integração Numérica**.

Introdução

- O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, **dados** $n+1$ pontos distintos

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_n$$

e $n+1$ números $y_0,\ y_1,\ \ldots\ ,\ y_n$, valores de uma função $y = f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots \quad y_n = f(x_n)$$

- Determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que:

$$\boxed{P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \ldots \quad P_n(x_n) = y_n}$$

Veremos que tal polinômio existe e é único, desde que os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sejam distintos.

Introdução

- Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- Para isso é preciso encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ de tal forma que $P_n(x)$ satifaça

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}$$

que pode ser visto como um sistema de equações lineares $(n+1) \times (n+1)$ onde as incógnitas são $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Introdução

- Escrevendo de forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- A matriz de coeficientes é chamada de Matriz de Vandermonde. Sabe-se que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam **distintos**.

Teorema

Dados $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seus valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Exemplo: Interpolação linear

Este exemplo consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) \quad & P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{aligned}$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$. Substituindo em (ii) temos que

$$\begin{aligned} y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 &= y_1 \\ a_1(x_1 - x_0) &= y_1 - y_0 \\ a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Exemplo: Interpolação linear

Como

$$a_0 = y_0 - a_1 x_0$$
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

temos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$
$$P_1(x) = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$
$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Basta avaliar $P_1(x)$ em $x = x_0$ e $x = x_1$ para verificar que de fato este é o polinômio interpolador de (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exemplo

Exemplo de interpolação linear

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

Assim

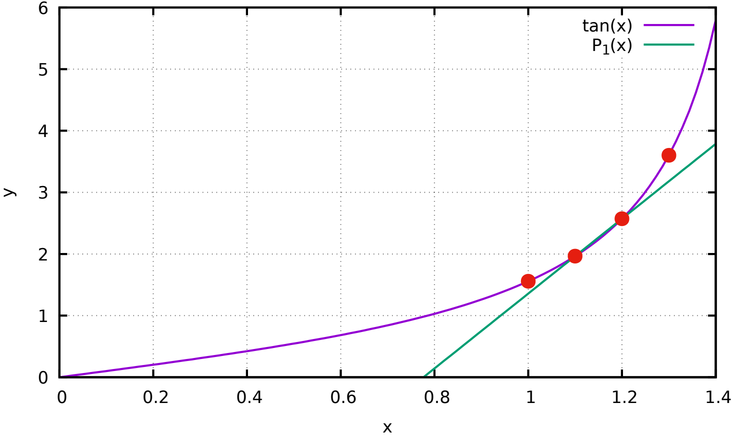
$$(x_0, y_0) = (1.1, 1.9648), \quad (x_1, y_1) = (1.2, 2.5722)$$

e portanto

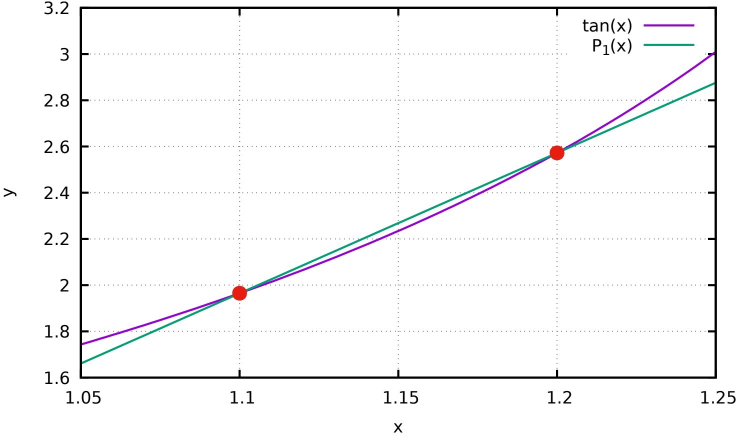
$$\tan(1.15) \approx 1.9648 + \frac{(2.5722 - 1.9648)}{(1.2 - 1.1)}(1.15 - 1.1) = 2.2685$$

Valor exato: $\tan(1.15) = 2.2345$.

Resultado da interpolação linear



Resultado da interpolação linear (*zoom*)



Matriz de interpolação

De forma geral, dados (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar o polinômio $P_n(x)$, precisamos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

usando algum método que já estudamos (Eliminação Gaussiana, Decomposição LU, etc).

Exemplo

Exemplo

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola estes pontos.

Exemplo

Exemplo

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola estes pontos.

Solução

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 &= 0.54 \\ a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 &= 1.00 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 0.54 \end{aligned}$$

Exemplo

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 1 \\ 0.54 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontramos que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = -0.46$ e portanto

$$P_2(x) = 1 - 0.46x^2$$

Observações Importantes

- Veremos formas mais simples de se obter o polinômio interpolante, sem a necessidade de resolver um sistema de equações lineares.
- Além disso, a matriz de Vandermonde costuma ser mal condicionada, o que leva a perda de precisão na solução quando temos que resolver o sistema.

Conteúdo

Forma de Lagrange

Para ilustrar a idéia vamos começar com um exemplo onde temos três pontos distintos (x_0, y_0),(x_1, y_1) e (x_2, y_2). Queremos encontrar o polinômio

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

que satisfaz

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

para os dados fornecidos.

Forma de Lagrange

Uma fórmula para encontrar tal polinômio é a seguinte:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

As funções $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são chamadas de *funções de base de Lagrange* para interpolação quadrática.

Forma de Lagrange

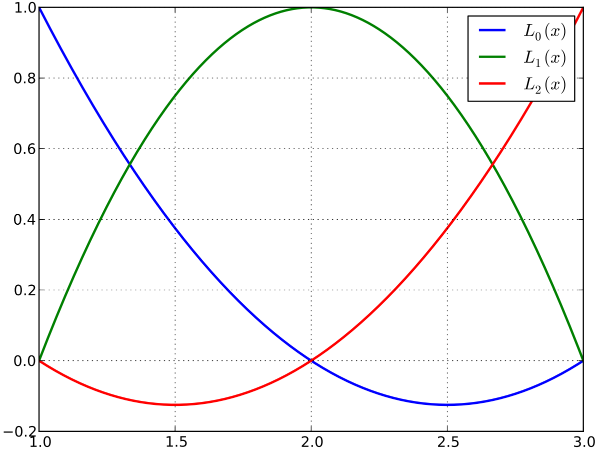


Figura: Exemplo das funções de base de Lagrange quadráticas.

Forma de Lagrange

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda, cada uma possui grau 2. Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2 e assim fica claro que este polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_0) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_0 L_0(x_2) + y_1 L_1(x_2) + y_2 L_2(x_2) = y_2$$

Forma de Lagrange

Interpolação Quadrática

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Assim

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Forma de Lagrange

Interpolação Quadrática

Exemplo - Forma de Lagrange - Interpolação Quadrática

Obtemos então

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= \frac{0.54}{2}x(x-1+x+1) + 1 - x^2 \\
&= 0.54x^2 + 1 - x^2 \\
&= 1 - 0.46x^2
\end{aligned}
$$

Observe que este é o mesmo polinômio obtido anteriormente, pois como vimos este polinômio é único.

Forma de Lagrange

Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n+1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima. Definindo os polinômios de Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

logo o polinômio interpolador (na forma de Lagrange!) é dado por:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Conteúdo

Espaço dos Polinômios Lineares

Base dos monômios

- Seja $I = [x_0, x_1]$ algum intervalo no domínio dos números reais e seja $P_1(I)$ o espaço vetorial das funções lineares em I, definido por

$$P_1(I) = \{v : v(x) = c_0 + c_1 x, x \in I, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}$$

- $P_1(I)$ contém todas as funções da forma $v(x) = c_0 + c_1 x$ em I.
- Uma função linear pode ser unicamente determinada pela exigência de que ela passe em dois pontos fornecidos $\alpha_0 = v(x_0)$ e $\alpha_1 = v(x_1)$ nos extremos x_0 e x_1 de I, resultando no sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $x_1 - x_0$, igual ao tamanho do intervalo.

Espaço dos Polinômios Lineares

Base nodal

- Sabendo que podemos especificar qualquer função em $P_1(I)$ através de seus valores nodais α_0 e α_1, podemos introduzir uma nova base $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ para $P_1(I)$. Esta nova base é chamada de base noda e é definida como

$$\lambda_j\left(x_i\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1$$

- Desta definição vemos que cada função base $\lambda_j, j = 0, 1$, é uma função linear, assumindo o valor 1 em x_j, e 0 no outro nó.
- Então podemos expressar qualquer função v em $P_1(I)$ como combinação linear de λ_0 e λ_1 com α_0 e α_1 como coeficientes:

$$v(x) = \alpha_0\lambda_0(x) + \alpha_1\lambda_1(x)$$

Espaço dos Polinômios Lineares

Base nodal

- As funções base nodais possuem a seguinte forma em I:

$$\lambda_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \quad \lambda_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

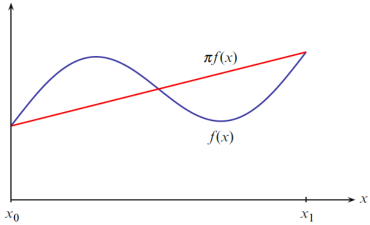
Interpolação Linear

Base nodal

- Considerando o intervalo $I = [x_0, x_1]$.
- Dada uma função contínua f em I, definimos um interpolante linear $\pi f \in P_1(I)$ para f como

$$\pi f(x) = f(x_0)\,\lambda_0 + f(x_1)\,\lambda_1$$

- Observamos que o interpolante aproxima f, no sentido de que πf e f têm os mesmos valores em x_0 e x_1: $\pi f(x_0) = f(x_0)$ e $\pi f(x_1) = f(x_1)$).



Conteúdo

Espaço dos Polinômios Lineares por Partes

- Uma extensão natural das funções lineares são as funções lineares por partes. A ideia básica é dividir o domínio de v em pequenos subintervalos.
- Em cada subintervalo, v será expressa por funções lineares.
- A continuidade é imposta no início e fim de cada subintervalo.
- Seja $I = [0, L]$ um intervalo e considere $n+1$ nós $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, definindo uma discretização

$$\mathcal{I} : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = L$$

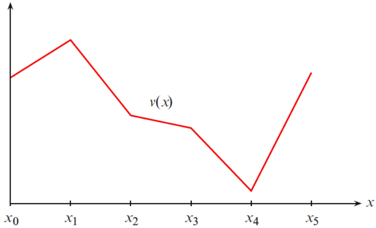
de I em n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]\,, i = 1, 2\ldots, n$, de tamanho $h_i = x_i - x_{i-1}$.
- A discretização $\mathcal{I}$ é chamada de malha.

Espaço dos Polinômios Lineares por Partes

- Na malha $\mathcal{I}$ definimos o espaço V_h das funções lineares contínuas por partes

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(I),\ v|_{I_i} \in P_1\left(I_i\right) \right\}$$

onde $C^0(I)$ denota o espaço das funções contínuas em I e $P_1\left(I_i\right)$ denota o espaço das funções lineares em I_i.
- Por construção, as funções em V_h são lineares em cada subintervalo I_i e contínuas em todo o intervalo I.



Espaço dos Polinômios Lineares por Partes

- Qualquer função v em V_h é determinada por seus valores nodais $\{v(x_i)\}_{i=0}^n$
- Para qualquer conjunto de valores nodais $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ existe uma função v em V_h com estes valores.
- Portanto, podemos introduzir uma base $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ para V_h associada com os nós, tal que

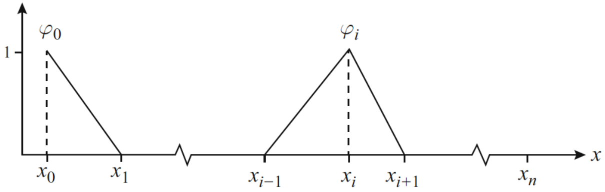
$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n$$

- Assim, qualquer função v em V_h pode ser escrita como combinação linear de $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ e $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ com $\alpha_i = v(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, os valores nodais de v:

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$$

Espaço dos Polinômios Lineares por Partes

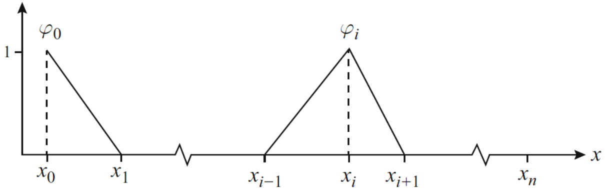
- φ_i é chamada de função chapéu, por sua forma.
- Cada φ_i é contínua, linear por partes, assume o valor 1 em x_i e 0 nos demais nós.
- Portanto, φ_i só é diferente de zero em I_i e I_{i+1}, exceto nos extremos.



Espaço dos Polinômios Lineares por Partes

- As expressões explícitas para as funções chapéu são dadas por

$$\varphi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1})\,/\,h_i, & \text{se } x \in I_i \\ (x_{i+1} - x)\,/\,h_{i+1}, & \text{se } x \in I_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Interpolação Linear por Partes

- Dada uma função contínua f no intervalo $I = [0, L]$, definimos o interpolante linear por partes $\pi f \in V_h$ na malha $\mathcal{I}$ de I por

$$\pi f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \varphi_i(x)$$