UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - PPG EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
PROF. RUY FREITAS REIS - 219013 - INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DISCRETOS - LISTA EXERCÍCIOS

MATRICULA: ____________ ALUNO(A): ____

1 Diferenciação Numérica

1) Encontre os polinômios de Taylor linear e quadrático em torno do ponto a para as seguintes funções:

   a) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 1$

   b) $f(x) = \sin x,\ a = \pi/4$

2) Utilizando a expansão em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$, mostre que:

   a) $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

3) Seja $f(x) = e^{3x}$ e $a = 0$. Determine n para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor de grau n seja menor do que 10^{-4} no intervalo $[0, 1]$.

4) Demostre a fórmula da diferença centrada e seu erro para aproximar a derivada 1^a ordem.

5) Encontre o polinômio de Taylor de 2^a ordem, P_2 de $f(x, y) = e^{2x} + e^y$ próximo a $(0, 0)$. Aproxime o valor de (x,y)=(0.5, 0.1) e calcule o erro absoluto.

6) Você estava observando o movimento do voo de uma pomba no sitio de um amigo, e anotou o tempo e a altura que a ave estava. Lembrando que a velocidade é $v(t) = \frac{d(h(t))}{dt}$, calcule a velocidade, nos instantes de tempo anotados, utilizando a mais precisa dentre diferença progressiva, regressiva ou centrada. Além disso, em quais pontos é possível fazer o cálculo de modo mais preciso e por quê?

t	**h(t)**	**v(t)**
0,0	1,001	?
0,1	1,353	?
0,2	1,821	?
0,3	2,465	?
0,4	3,318	?

2 Problema de Valor Inicial

1) Demonstre os métodos de Euler implícito e explicito. Descreva seus erros de aproximação. Aponte vantagens e desvantagens de cada um deles.

2) Considere o PVI

$$\begin{cases} u'(t) = -2\,u(t) + t, \\ u(0) = 1, \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

   A solução exata é$u(t) = \frac{5}{4}\,e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$.

   Use $N = 4$ passos uniformes no intervalo $[0, 1]$ (logo, $h = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$ e $t_n = nh$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$) para:

   a) Calcular u_1, u_2, u_3, u_4 usando **Euler explícito**

   b) Calcular u_1, u_2, u_3, u_4 usando **Euler implícito**

   c) Comparar, para cada método, o **erro absoluto** em $t = 1 i.e.$ $|u(1) - u_4|$, comparando com a solução exata.

3) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) = -\,y + t^2, \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad t \in [0,\ 0{,}5].$$

Use $N = 2$ passos uniformes no intervalo $[0, 0{,}5]$, isto é, $h = \dfrac{0{,}5 - 0}{2} = 0{,}25$ e $t_0 = 0,\ t_1 = 0{,}25,\ t_2 = 0{,}5$. Deste modo, aplique **duas iterações** do método de Runge–Kutta clássico de 4^a ordem usando as fórmulas abaixo:

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_n, \\ Y_2 &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n, Y_1), \\ Y_3 &= y_n + \frac{h}{2} f(t_{n+\frac{1}{2}}, Y_2), \\ Y_4 &= y_n + h f(t_{n+\frac{1}{2}}, Y_3), \end{aligned} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\big[f(t_n, Y_1) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, Y_2) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, Y_3) + f(t_n, Y_4)\big].$$

a) Calcule y_1 e y_2

b) Compare com a solução exata do PVI e reporte os erros absolutos em $t_1 = 0{,}25$ e $t_2 = 0{,}5$: $y_{\mathrm{ex}}(t) = t^2 - 2t + 2 - e^{-t}$

3 Problema de Valor de Contorno

1) Considere o problema de valor de contorno (PVC)

$$\begin{cases} u''(x) = -2, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \end{cases}$$

a) Discretize o intervalo $[0, 1]$ com 5 pontos igualmente espaçados

b) Usando o esquema de diferenças finitas simples monte e resolva o sistema linear para obter os valores aproximados de u_1, u_2, u_3, com as condições de Dirichlet $u_0 = 0$ e $u_4 = 0$. (veja exemplo página 25 do slide de PVC)

c) Sabendo que a solução exata do PVC é

$$u_{\mathrm{ex}}(x) = x(1 - x).$$

Compare u_i com $u_{\mathrm{ex}}(x_i)$ e calcule os **erros absolutos** $|u_i - u_{\mathrm{ex}}(x_i)|$ para $i = 1, 2, 3$.

2) Considere o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} u''(x) = -2, \qquad x \in (0,1), \\ u(0) = 0 \quad \text{(Dirichlet)}, \\ u'(1) = -1 \quad \text{(Neumann)}. \end{cases}$$

a) Discretize $[0, 1]$ com **4 pontos** igualmente espaçados

b) Usando o esquema de diferenças finitas simples monte e resolva o sistema linear para obter os valores aproximados de u_1, u_2, u_3, com as condições de Dirichlet e Neumann. Use aproximação em ponto fantasma para resolver a condição de Neumann (veja exemplo página 47 do slide de PVC)

c) A solução exata é

$$u_{\mathrm{ex}}(x) = x(1 - x).$$

Compare u_i com $u_{\mathrm{ex}}(x_i)$ e calcule os **erros absolutos** $|u_i - u_{\mathrm{ex}}(x_i)|$ para $i = 1, 2, 3$.

4 Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais

1. Considere o problema de Laplace no quadrado unitário:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0, & (x,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ U(x,0) = 0, \quad U(0,y) = 0, & \text{(contornos inferior e esquerdo nulos)} \\ U(x,1) = x(1-x), & \text{(contorno superior)} \\ U(1,y) = \sin(\pi y), & \text{(contorno direito).} \end{cases}$$

Discretize Ω por uma malha cartesiana uniforme com passo $h = 0{,}25$ (pontos $x_i = i\,h$, $y_j = j\,h$, $i,j = 0,1,2,3,4$). Isto é, os *nove* pontos interiores são

$$(x_i, y_j) \in \{0{,}25, 0{,}50, 0{,}75\} \times \{0{,}25, 0{,}50, 0{,}75\},$$

e denotamos

$$\begin{aligned} &u_{11} = U(0{,}25, 0{,}25), \quad u_{21} = U(0{,}50, 0{,}25), \quad u_{31} = U(0{,}75, 0{,}25), \\ &u_{12} = U(0{,}25, 0{,}50), \quad u_{22} = U(0{,}50, 0{,}50), \quad u_{32} = U(0{,}75, 0{,}50), \\ &u_{13} = U(0{,}25, 0{,}75), \quad u_{23} = U(0{,}50, 0{,}75), \quad u_{33} = U(0{,}75, 0{,}75). \end{aligned}$$

   (a) Usando o stencil de 5 pontos centrado para o Laplaciano escreva as nove equações discretas incorporando os valores de contorno. *Veja exemplo da pagina 27 do slide de EDPs.*

   (b) monte o sistema linear $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ com a ordem $\mathbf{u} = [u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33}]^\top$. *Não é necessário resolver o sistema.*

2. Considere o problema difusivo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,1),\ t \in (0,1], \\ u(0,t) = 100, & t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 20, & x \in [0,1], \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}05.$$

Use uma malha uniforme no espaço com $h_x = 0{,}25$ e um passo no tempo $h_t > 0$ (a ser escolhido).

   (a) Determine um h_t que satisfaça o critério de estabilidade (CFL) do método explícito.

   (b) Usando um esquema FTCS (**Euler explícito no tempo** e **diferenças centradas de 2ª ordem** para u_{xx}), derive as fórmulas de avanço para $i = 1, 2, 3$. *Veja exemplo da pagina 123 do slide de EDPs.*

3. Considere a equação de advecção linear 1D

$$u_t + a\,u_x = 0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Comece do esquema FTCS (Forward Time, Central Space):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right), \qquad \lambda = \frac{a\,\Delta t}{\Delta x}.$$

   Este esquema é conhecido por ser instável para o problema de advecção.

   (b) Mostre que, substituindo o valor central u_j^n por uma *média dos vizinhos* $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$, obtém-se o esquema de **Lax–Friedrichs**.

   (c) Reordene os termos e mostre que o Lax–Friedrichs é equivalente a resolver, além da advecção, uma equação com *difusão artificial*. Determine a taxa de difusão e discuta as implicações deste resultado.

   (d) Para $a = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta t = 0{,}05$, calcule o valor da tada de difusão artificial (ν_{num}).