Método dos Elementos Finitos

Introdução aos Métodos Discretos

Prof. Joventino de Oliveira Campos - joventino.campos@ufjf.br
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Problema de Valor de Contorno

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L]$$
$$u(0) = u(L) = 0$$

Como encontrar $u(x)$?
$\circ$ Se $f = 1 \Rightarrow u(x) = x(L-x)/2$ (solução analítica)

- Em geral, para qualquer f, difícil ou impossível de encontrar uma solução analítica.

Formulação Variacional

O primeiro passo para o método dos elementos finitos é reescrever a equação diferencial como uma equação variacional. Esta é obtida multiplicando-se $f = -u''$ por uma função teste v e usando integração por partes.

$$\int_0^L fvdx = -\int_0^L u''vdx = \int_0^L u'v'dx - u'v\Big|_0^L$$

É necessário que v e v' sejam quadrado integráveis em I. O espaço das funções quadrado integráveis é denotado por

$$L^2(I) = \left\{u : I \to \mathbb{R}, \int u(x)^2 < \infty\right\}$$

Formulação Variacional

Considere também

$$V_0 = \left\{ v : \|v\|_{L^2(I)} < \infty, \left\|v'\right\|_{L^2(I)} < \infty, v(0) = v(L) = 0 \right\}.$$

Formulação variacional do problema: encontrar $u \in V_0$ tal que

$$\int_I u'v'dx = \int_I fvdx, \quad \forall v \in V_0.$$

Conteúdo

Aproximação por elementos finitos

Aproximar u por uma função linear contínua por partes.

- Malha no intervalo I com n subintervalos.
- Espaço V_h das funções lineares contínuas por partes.
- $V_{h,0}$ é o subespaço de V_h que satisfaz as condições de contorno

$$V_{h,0} = \{v : v \in V_h, v(0) = v(L) = 0\}.$$

Encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$\int_I u_h' v' dx = \int_I fv dx, \quad \forall v \in V_{h,0}$$

Derivação do sistema de equações lineares

ϕ_i, para $i =, 1, 2, \ldots, n-1$ são as funções base que geram $V_{h,0}$

$$\int_I u_h' \phi_i' dx = \int_I f \phi_i dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Como u_h pertence a $V_{h,0}$,

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \phi_j$$

Coeficientes desconhecidos $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\int_I f \phi_i dx = \int_I \left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \phi_j' \right) \phi_i' dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \int_I \phi_j' \phi_i' dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Forma matricial

Definindo

$$A_{ij} = \int_I \phi_j' \phi_i' dx$$

$$b_i = \int_I f \phi_i dx, \quad i,j = 1, 2, \ldots, n-1$$

Sistema de equações lineares $(n-1) \times (n-1)$ para as incógnitas ξ_j

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} \xi_j = b_i, \quad i,j = 1, 2, \ldots, n-1$$

ou $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$, onde

- A é a matriz de rigidez (stiffness matrix)
- b é o vetor de carga (load vector)

Algoritmo básico do MEF

1. Criar uma malha com n elementos no intervalo I e definir o espaço correspondente das funções lineares contínuas por partes $V_{h,0}$
2. Calcular a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$:

$$A_{ij} = \int_I \phi_j' \phi_i' dx, \quad b_i = \int_I f \phi_i dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-1$$

3. Resolver:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$$

4. Solução:

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \phi_j$$

Cálculo da matriz e vetor globais

- Calcular a matriz A e o vetor **b** :

$$A_{ij} = \int_I \phi_j' \phi_i' dx, \quad b_i = \int_I f \phi_i dx.$$

- Lembrando as funções base (chapéu):

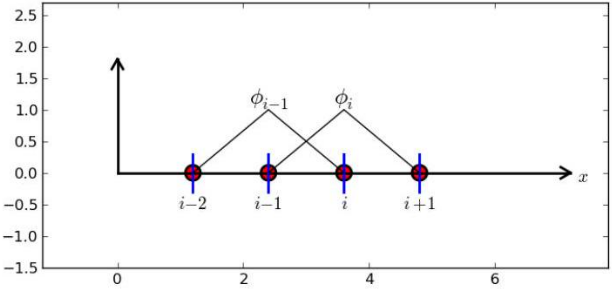
$$\phi_i = \begin{cases} (x - x_i)/h_i, & \text{se } x \in I_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1}, & \text{se } x \in I_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Calculando a sua derivada

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \begin{cases} 1/h_i, & \text{se } x \in I_i \\ -1/h_{i+1}, & \text{se } x \in I_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Cálculo da matriz e vetor globais

- A matriz A é simétrica: $A_{ij} = A_{ji}$
- Funções chapéu: suporte compacto



- $A_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$
- Matriz A é tridiagonal
- Só é preciso calcular os elementos $A_{i,i}$ e $A_{i,i+1}$.

Cálculo da matriz e vetor globais

- Cálculo dos elementos da matriz

$$A_{i,i} = \int_I \phi_i' \phi_i' dx = \ldots = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}$$
$$A_{i,i+1} = \int_I \phi_i' \phi_{i+1}' dx = \ldots = -\frac{1}{h_{i+1}}$$

- Em particular, se o mesmo espaçamento for utilizado $h_i = h_{i+1} = h$, tem-se que $A_{i,i} = 2/h$ e $A_{i,i+1} = -\frac{1}{h}$
- O cálculo do vetor de carga é similar ao que foi feito para o problema da projeção L^2, isto é, usando a regra do trapézio obtêm-se

$$b_i = \int_I f \phi_i \approx \frac{h_i}{2} f(x_i) + \frac{h_{i+1}}{2} f(x_i) = f(x_i)(h_i + h_{i+1})/2$$

Exemplo

Considerando 4 ($n = 5$ nós) elementos e as condições de contorno, temos $u_0 = 0$ e $u_1 = 0$. Os demais valores de u são dados pelo sistema $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$:

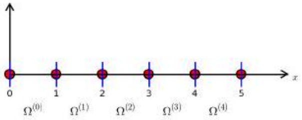
$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Algumas observações

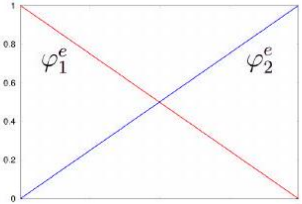
- Problema 1D MEF: montar matriz de rigidez e o vetor de carga globais e resolver o sistema.
- Porém, a forma como os coeficientes da matriz A e do vetor de carga foram calculados não é usual no MEF.
- Veremos uma outra abordagem.
- Matriz e vetor locais $\rightarrow$ contribuição para a matriz e vetor globais.
- Em 1D não tem muita vantagem
- Muito mais simples para problemas 2D/3D.

Matriz e vetor locais

- $\Omega = [0, 1] \rightarrow$ discretização não necessariamente uniforme



- $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n_e$.
- Para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, elemento finito com coordenadas locais $[x_1^e, x_2^e] = [x_i, x_{i+1}]$



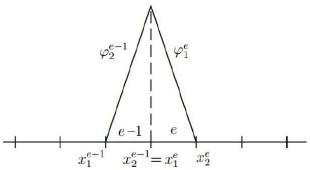
Matriz e vetor locais

- Para cada intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ define-se a função de base local por

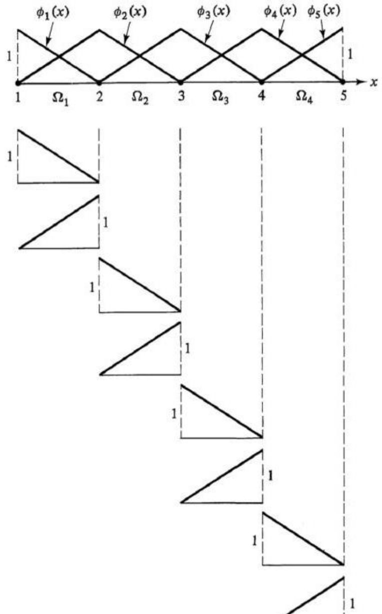
$$\phi_a^e = \begin{cases} \phi_1^e = \frac{x_2^e - x}{h_e}, & \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \phi_2^e = \frac{x - x_1^e}{h_e}, & \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A função base global ϕ_i é a junção das funções locais ϕ_2^{e-1} e ϕ_1^e.

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_2^{e-1}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \phi_1^e, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Matriz e vetor locais



Matriz e vetor locais

- Restringindo A e b (globais) ao elemento finito e, tem-se a matriz local e o vetor de carga local.

$$A^e_{ab} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \phi'_a \phi'_b dx, \quad b^e_a = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \phi_a dx$$

- A matriz e o vetor globais são obtidos da seguinte forma para os n_e elementos:

$$A = \sum_{e=1}^{n_e} A^e, \quad b = \sum_{e=1}^{n_e} b^e$$

Matriz e vetor locais

- No intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ as únicas funções de interpolação não-nulas são ϕ_1^e e ϕ_2^e.
- Nas matrizes A^e os únicos elementos não-nulos são:

$$A^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^e_{aa} & A^e_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^e_{ba} & A^e_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- E de forma similar para o vetor de carga b^e.

Matriz e vetor locais

- Na prática as matrizes A^e e vetores b^e nunca são formados como mostrado anteriormente.
- Essas matrizes e vetores são armazenados em submatrizes e subvetores de ordem 2 , isto é

$$A^e = \begin{bmatrix} A_{11}^e & A_{12}^e \\ A_{21}^e & A_{22}^e \end{bmatrix}, \quad b^e = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix}.$$

- Se $h_e = h$ não mudar (disc. uniforme), então A^e é padrão para todos elementos.

$$A^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

- b^e dependerá do valor de f. Usando regra do Trapézio, temos

$$b^e = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} f\left(x_i\right) \\ f\left(x_{i+1}\right) \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
-u'' &= 1, \quad x \in I = [0,1] \\
u(0) &= \alpha \\
u(1) &= \beta
\end{aligned}
$$

- $u_h \in U_{h,0} = \{u : u \in V_h, u(0) = \alpha, u(1) = \beta\}$.
- $v \in V_{h,0} = \{v : v \in V_h, v(0) = v(1) = 0\}$.
- Matriz e vetor globais para malha com 4 elementos.:

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Exemplo

A imposição das condições de Dirichlet

$$u(0) = \alpha \text{ e } u(1) = \beta$$

é feita diretamente na matriz e no vetor global, como segue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 2/h & -1/h & 0 & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 2/h & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ h + \boldsymbol{\alpha}/\mathbf{h} \\ h \\ h + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{h} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

Dessa forma devemos resolver o sistema linear para encontrar os u_i que satisfazem a combinação linear

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i$$

Conteúdo

Elemento de Referência

Transformação isoparamétrica

Como estamos interessados em utilizar o método de integração numérica de Gauss, devemos definir o elemento de referência no intervalo fechado $[-1, 1]$.
Dessa forma, supondo um elemento de intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ a mudança de variável para o intervalo $[-1, 1]$ do elemento de referência obedece a seguinte relação

$$x(t) = \frac{h}{2}t + \frac{x_2^e + x_1^e}{2}, \quad t \in [-1, 1]$$

onde $h = x_2^e - x_1^e$. Isolando t na equação acima, obtemos

$$t(x) = \frac{2x - x_1^e - x_2^e}{h}$$

a relação acima é conhecida como transformação isoparamétrica.

Elemento de Referência

Bases lagrangianas

No domínio de referência $[-1, 1]$, podemos definir os seguintes polinômios lineares

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}(1 - t), \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}(1 + t), \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\phi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall x \notin [-1, 1]$$

Elemento de Referência

Mudança de variável

Logo, o problema

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx}dx$$

pode ser reescrito no intervalo $[-1, 1]$ em termos da variável t aplicando a relação

$$\frac{d\phi_i^e}{dx} = \frac{d\phi_i}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\phi_i}{dt}\frac{2}{h}$$

onde t é a transformação isoparamétrica, e

$$dx = \frac{h}{2}dt$$

para obter

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^{1}\left(\frac{d\phi_i}{dt}\frac{2}{h}\right)\left(\frac{d\phi_j}{dt}\frac{2}{h}\right)\frac{h}{2}dt = \int_{-1}^{1} F(t)dt$$

Elemento de Referência

Mudança de variável

Como

$$F(t) = \left(\frac{d\phi_i}{dt}\frac{2}{h}\right)\left(\frac{d\phi_j}{dt}\frac{2}{h}\right)\frac{h}{2}$$

a aplicação do método de Gauss com 2 pontos para obtenção do valor da integral de $F(t)$ é dada por:

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = w_0 F\left(t_0\right) + w_1 F\left(t_1\right) = F\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Analogamente para o termo fonte local F_j^e, temos que

$$F_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f\phi_j^e dx = \int_{-1}^{1} f\phi_j \frac{h}{2} dt = \int_{-1}^{1} G(t)dt$$

Logo,

$$\int_{-1}^{1} G(t)dt = G\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \text{com } G(t) = f\phi_j \frac{h}{2}$$

Conteúdo

Exemplo

Resolver o problema Encontrar $u \in [0,1]$, tal que

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 \quad \text{em} \quad [0,1]$$
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0.5$$

pelo método de elementos finitos utilizando uma aproximação polinomial linear e integração numérica de Gauss com 2 pontos em uma malha de 4 elementos.

Para o problema acima uma aproximação conforme pode ser apresentada como

Achar $u_h \in U_{h,0}$, tal que

$$a\left(u_h, v\right) = f\left(v\right), \quad \forall v \in V_{h,0}$$

onde

$$a\left(u_h, v\right) = \int_\Omega \frac{du_h}{dx}\frac{dv}{dx}dx \quad \text{e} \quad f\left(v\right) = \int_\Omega v dx$$

Exemplo

Matrizes e Vetores locais

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \text{ onde } K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx}dx, \quad i,j = 1,2.$$

$$F_j^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} \text{ onde } F_j^e = \int_{\Omega^e} \phi_j^e dx, \quad j = 1,2.$$

A matriz K_{ij}^e é montada utilizando as contribuições do elemento de referência, como segue

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx}dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{d\phi_i}{dt}\frac{2}{h}\right)\left(\frac{d\phi_j}{dt}\frac{2}{h}\right)\frac{h}{2}dt$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{d\phi_i}{dt}\frac{d\phi_j}{dt}\frac{2}{h}dt$$

e as contribuições do vetor F_j^e vindas do elemento de referência, são

$$F_j^e = \int_{\Omega^e} \phi_j^e dx = \int_{-1}^{1} \phi_j \frac{h}{2}dt$$

Exemplo

Montagem da matriz local

Os valores da matriz local K_{ij}^e são calculados como segue

$$K_{11}^e = \int_{-1}^{1} \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_1}{dt}\frac{2}{h}dt = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{h}dt = \frac{1}{2h}+\frac{1}{2h} = \frac{1}{h}$$

$$K_{12}^e = \int_{-1}^{1} \frac{d\phi_1}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\frac{2}{h}dt = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{h}dt = -\frac{1}{2h}-\frac{1}{2h} = -\frac{1}{h}$$

$$K_{21}^e = \int_{-1}^{1} \frac{d\phi_2}{dt}\frac{d\phi_1}{dt}\frac{2}{h}dt = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{h}dt = -\frac{1}{2h}-\frac{1}{2h} = -\frac{1}{h}$$

$$K_{22}^e = \int_{-1}^{1} \frac{d\phi_2}{dt}\frac{d\phi_2}{dt}\frac{2}{h}dt = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{h}dt = \frac{1}{2h}+\frac{1}{2h} = \frac{1}{h}$$

Logo, a matriz local K_{ij}^e é dada por

$$K_{ij}^e = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Montagem do vetor local

Os valores do vetor local F_j^e são calculados como segue

$$F_1^e = \int_{-1}^{1} \phi_1 \frac{h}{2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-t)\frac{h}{2} dt$$

$$= \frac{h}{4}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \frac{h}{2}$$

$$F_2^e = \int_{-1}^{1} \phi_2 \frac{h}{2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1+t)\frac{h}{2} dt$$

$$= \frac{h}{4}\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \frac{h}{2}$$

Assim, o vetor local é dado por

$$F_j^e = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Motagem do problema global

A partir das contribuições locais montamos a matriz de rigidez e o vetor força

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Incluindo as condições de contorno, geramos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 2/h & -1/h & 0 & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 2/h & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ h + \mathbf{0/h} \\ h \\ h + \mathbf{0.5/h} \\ \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

cuja solução é dada por

$$\mathbf{u} = [0, 0.2188, 0.3750, 0.4688, 0.50]^T$$

Conteúdo

Problema

Seja o domínio espacial $\Omega = [a, b]$, dada a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \text{em} \quad \Omega$$

suplementado por condições de contorno do tipo Dirichlet

$$u(a) = \bar{u}$$

e Neumann

$$\frac{du}{dx}(b) = g$$

Formulação Fraca

Integrando no domínio Ω e multiplicando o problema modelo por uma função v, obtemos:

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+f\right)vdx=0.$$

Integrando por partes o problema acima, obtemos

$$\int_{\Omega}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx-\left.\frac{du}{dx}v\right|_a^b=\int_{\Omega}fvdx$$

Supondo que u está no espaço

$$\mathcal{U}=\left\{u:\|u\|_{L^2(\Omega)}<\infty,\left\|u'\right\|_{L^2(\Omega)}<\infty,u(a)=\bar{u}\right\}$$

e v pertence ao espaço

$$\mathcal{V}=\left\{v:\|v\|_{L^2(\Omega)}<\infty,\left\|v'\right\|_{L^2(\Omega)}<\infty,v(a)=0\right\}$$

Problema Fraco

Dessa forma, considerando os espaços definidos e a condição de Neumann imposta sobre o ponto b, temos

$$\int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - \frac{du}{dx}(b)v(b) - \frac{du}{dx}(a)v(a) = \int_\Omega fvdx.$$

Assim podemos enunciar o seguinte problema variacional:
Encontrar $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

com

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \quad \text{e} \quad f(v) = \int_\Omega fvdx + gv(b)$$

Problema Aproximado

Dessa forma, podemos reescrever o problema aproximado como:
Achar $u_i \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} a\left(u_i\phi_i, \phi_j\right) = f\left(\phi_j\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

que é equivalente a forma matricial:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{u} = \{u_i\}$ vetor de incógnitas e

$$K_{ij} = a\left(\phi_i, \phi_j\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$
$$F_j = f\left(\phi_j\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

Problema Local

No contexto do problema modelo que está sendo abordado, a matriz de rigidez **K** e o vetor fonte **F** são dados por:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$F_j = \int_{\Omega} f\phi_j dx + \phi(b)g, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

A montagem de **K** e **F** é feita adicionando-se adequadamente as contribuições locais, definidas no nível do elemento por

$$K^e_{ij} = \int_{\Omega^e} \frac{d\phi^e_i}{dx}\frac{d\phi^e_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$F^e_j = \int_{\Omega^e} f\phi^e_j dx + \phi^e(b)g, \quad j = 1, \ldots, n,$$

onde $\Omega = \bigcup \Omega^e, \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e, \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^e$ e n o número de nós do elemento Ω^e.

Problema Local

Assim, a matriz local K_{ij}^e para o caso linear é dada por:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx} dx, \quad i,j = 1,2$$

e

$$\frac{d\phi_1^e}{dx} = \frac{1}{h}; \quad \frac{d\phi_2^e}{dx} = -\frac{1}{h}$$

O vetor local F_j^e é dado por

$$F_j^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad F_j^e = \int_{\Omega^e} f\phi_j^e dx + \phi^e(b)g, \quad j = 1,2$$

Montagem da Matriz de Rigidez

A montagem da matriz de rigidez **K** e do vetor fonte global **F** é feita através da soma em blocos das matrizes e vetores locais, respectivamente. Ou seja:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K^1_{21} & K^1_{22}+K^2_{11} & K^2_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & K^2_{21} & K^2_{22}+K^3_{11} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & K^{N-1}_{22}+K^N_{11} & K^N_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^N_{21} & K^N_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F^1_1 \\ F^1_2+F^2_1 \\ F^2_2+F^3_1 \\ \vdots \\ F^{N-1}_2+F^N_1 \\ F^N_2 \end{bmatrix}$$

Condições de Contorno

A imposição das condições de contorno do problema estudado geram as seguintes modificações na matriz e no vetor de carga.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & K_{22}^{N-1} + K_{11}^N & K_{12}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^N & K_{22}^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ F_2^1 + F_1^2 - \bar{\mathbf{u}}\mathbf{K}_{\mathbf{21}}^1 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ \vdots \\ F_2^{N-1} + F_1^N \\ F_2^N + \mathbf{g} \end{bmatrix}$$