Diferenciação Numérica

Introdução aos Métodos Discretos

Prof. Ruy Freitas Reis - ruy.reis@ufjf.br
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Polinômio de Taylor

Teorema (Polinômio de Taylor)

Suponha $f(t)$ ser uma função tal que $f(a)$ e suas derivadas $f'(a), f''(a), \cdots, f^{(n)}(a)$ existam e a é um valor real, então o **Polinômio de Taylor de grau** *n que aproxima $f(t)$ em torno de $t = a$ é expresso por:*

$$P_n(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}$$

Polinômio de Taylor

O mesmo Teorema anterior pode ser reescrito da seguinte forma. Basta tomar $x - a = h$. Desta forma o teorema fica da seguinte forma:

Teorema (Polinômio de Taylor)

Suponha f ser uma função tal que $f(x)$ e suas derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ existam e x é um valor real, então o **Polinômio de Taylor de grau** *n que aproxima $f(x+h)$ em torno de x é expresso por:*

$$P_n(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$$

Exemplos

Exercício Resolvido

Encontrar o polinômio de Taylor de grau 1 (linear) que aproxima a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = 0$.

Exemplos

Exercício Resolvido

Encontrar o polinômio de Taylor de grau 1 (linear) que aproxima a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = 0$.

Solução:

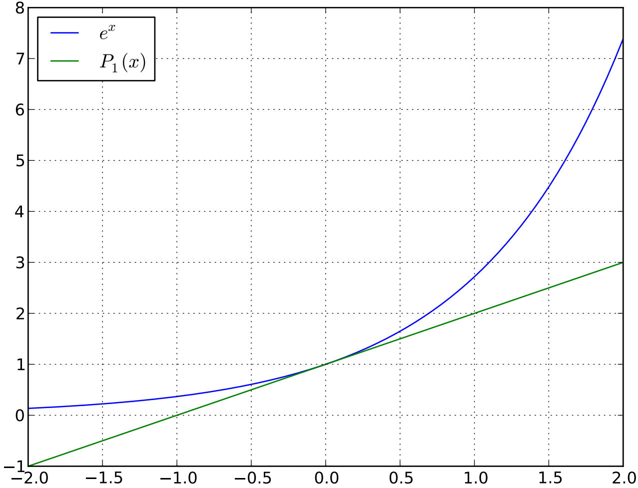
Temos

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

portanto o polinômio de Taylor linear é dado por

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= e^0 + e^0(x-0) \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

Representação gráfica da solução



Podemos generalizar?

Generalizando $P_n(x)$ para $f(x) = e^x$

Determinar o polinômio de Taylor de grau n (n-ésimo) para $f(x) = e^x$ em torno do ponto $a = 0$.

Podemos generalizar?

Generalizando $P_n(x)$ para $f(x) = e^x$

Determinar o polinômio de Taylor de grau n (n-ésimo) para $f(x) = e^x$ em torno do ponto $a = 0$.

Solução

Temos

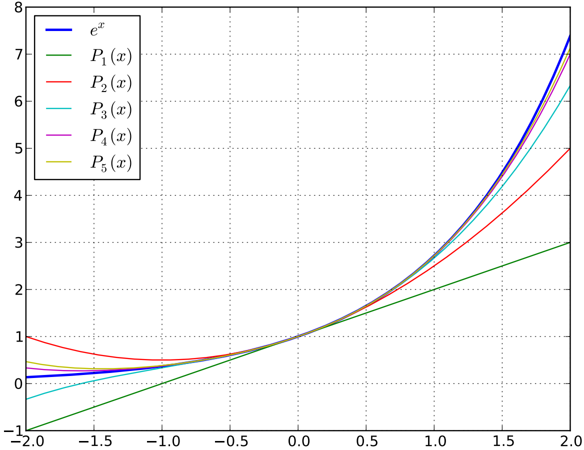
$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x \Rightarrow \cdots \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$$

então

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\tfrac{(x-a)^n}{n!} \\ &= f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\tfrac{(x-0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\tfrac{(x-0)^n}{n!} \\ &= e^0 + e^0(x-0) + e^0\tfrac{(x-0)^2}{2!} + \cdots + e^0\tfrac{(x-0)^n}{n!} \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

Exemplos

Aproximações para $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$



Exercícios

Para todos os exercícios enviar o arquivo Notebook (Colab) para a tarefa que será disponibilizada no Classroom

1) Descubra os seguintes polinômios de Taylor, plote e aproxime os seguintes valores:
   a) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ obter $P_1(x)$ (linear). Qual o gráfico e o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ usando $P_1(x)$? Use $a = 1$.
   b) $f(x) = e^x$ obter $P_2(x)$ (quadrático). Qual o gráfico e o valor de $e^{0.2}$ usando $P_2(x)$? Use $a = 0$.
2) Produza uma fórmula geral para o polinômio de Taylor expandido em torno de $a = 0$ de grau n, além disso tomando $n = 20$ gere os gráficos dos polinômio obtidos.
   a) $1/(1 - x)$
   b) $\sqrt{1 + x}$

Conteúdo

Teorema de Taylor

Teorema (Teorema de Taylor)

Seja uma função $f(x)$ assumindo que as $(n+1)$ primeiras derivadas $f^{(n+1)}(x)$ são contínuas para $x_E < x < x_D$. Neste caso se x e $x+h$ são pontos no intervalo (x_E, x_D) então:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \cdots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) + R_n,$$

em torno do ponto x onde o resíduo na forma de Lagrange é dado por:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta)$$

e η é um ponto entre x e $x+h$

Exemplo

Exercício Resolvido

Obtenha o limitante superior do erro para $e^{0.5}$ quando esta expressão é aproximada por um polinômio de Taylor de grau 4 para e^x em torno do ponto 0.

Exemplo

Exercício Resolvido

Obtenha o limitante superior do erro para $e^{0.5}$ quando esta expressão é aproximada por um polinômio de Taylor de grau 4 para e^x em torno do ponto 0.

Solução:

Utilizando o resíduo temos o seguinte erro:

$$R_4(x) = f^{(5)}(\eta)\frac{(x-0)^5}{5!} = e^\eta \frac{x^5}{120}, \quad \text{para algum } \eta \in [0, 0.5]$$

assim quando aproximamos $e^{0.5}$ o erro está limitado por

$$|R_4(x)| \leq \max \left|\frac{e^\eta x^5}{120}\right| \leq \left|\frac{e^{0.5}0.5^5}{120}\right| \leq 2\frac{0.5^5}{120} = 0.00052$$

Exercícios

3) Encontre e plote os seguintes polinômios de Taylor, além disso calcule os limitantes superiores de erro como se pede:
   a) Encontre um limitante superior para o erro ao aproximar $f(x) = e^x$, para $x \in [-1, 1]$, pelo polinômio de Taylor de grau 3 expandido em torno de $a = 0$. Calcule o erro absoluto de $P_3(x = 1)$ com $f(x = 1)$ e compare com o limitante obtido
   b) Encontre o polinômio de Taylor de grau 2 para a função $f(x) = e^x sin(x)$ em torno do ponto $a = 0$. Determine um limitante superior do erro para essa aproximação para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. Calcule o erro absoluto de $P_2(x = 0)$ com $f(x = 0)$ e compare com o limitante obtido

Conteúdo

Polinômio de Taylor no R_n

Teorema (Teorema de Taylor no R_n)

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na classe C^{k+1} em um conjunto convexo aberto $\mathbb{S}$. Se $\boldsymbol{a} \in \mathbb{S}$ e $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in \mathbb{S}$, então:

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{\alpha} f(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{h}^{\alpha} + R_{\boldsymbol{x},k}(\boldsymbol{h})$$

onde o resíduo na forma de Lagrange é dado por

$$R_{\boldsymbol{x},k}(\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha| = k+1} \partial^{\alpha} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}) \frac{\boldsymbol{h}^{\alpha}}{\alpha!}$$

para $c \in (0, 1)$.

Polinômio de Taylor no R_n

A fim de simplificar o entendimento, vamos tomar a versão de duas variáveis do Polinômio de Taylor, ou seja, $P_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x+h, t+k) = f(x,t) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + k\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,t) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x,t) + \frac{1}{2}k^2 f\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}(x,t) + \cdots$$

Exemplo

Exercício Resolvido

Encontre o polinômio de Taylor de 2^a ordem, P_2 de $f(x, y) = e^{x^2+y}$ próximo a $(0, 0)$.

Exemplo

Exercício Resolvido

Encontre o polinômio de Taylor de 2^a ordem, P_2 de $f(x,y) = e^{x^2+y}$ próximo a $(0,0)$.

Solução:

Temos

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = e^{x^2+y} &\Rightarrow & f(0,0) = 1 \\
f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y} &\Rightarrow & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) = e^{x^2+y} &\Rightarrow & f_x(0,0) = 1 \\
f_{xx}(x,y) = 2(1+2x^2)e^{x^2+y} &\Rightarrow & f_{xx}(0,0) = 2 \\
f_{xy}(x,y) = 2xe^{x^2+y} &\Rightarrow & f_{xy}(0,0) = 0 \\
f_{yy}(x,y) = e^{x^2+y} &\Rightarrow & f_{yy}(0,0) = 1
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exercício Resolvido

Encontre o polinômio de Taylor de 2^a ordem, P_2 de $f(x, y) = e^{x^2+y}$ próximo a $(0, 0)$.

Solução:

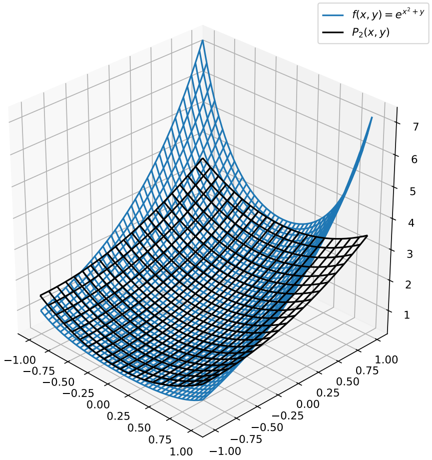
Substituindo os termos

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = {} & f(0,0) + (x-0)f_x(0,0) + (y-0)f_y(0,0) \\ & + \frac{(x-0)^2}{2} f_{xx}(0,0) + (x-0)(y-0)f_{xy}(0,0) \\ & + \frac{(y-0)^2}{2} f_{yy}(0,0) \end{aligned}$$

$$P_2(x,y) = 1 + y + x^2 + \frac{y^2}{2}$$

Exemplos

Aproximação P_2 para $f(x, y) = e^{x^2+y}$ em torno de $(0, 0)$



Exercícios

4) Encontre o polinômio de Taylor de 2^a ordem, P_2 de $f(x, y) = e^{2x+3y}$ próximo a $(0, 0)$. Além disso, plote o polinômio obtido junto da função $f(x, y)$. Aproxime o valor de (x,y)=(0.5, 0.1) e calcule o erro absoluto.

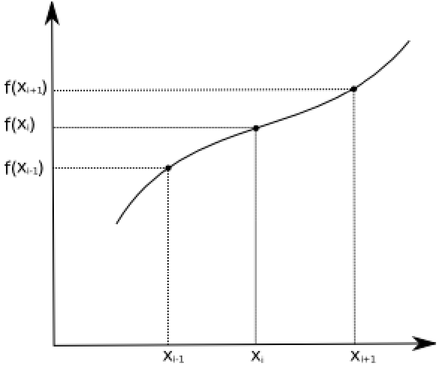
Conteúdo

Aproximação de Derivada

- Considere que uma função $f(x)$, cuja **expressão é desconhecida**, seja fornecida por meio de um conjunto de pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$.
- Como calcular $f'(x_i)$ e $f''(x_i)$?
- Qual a precisão?

Aproximação de Derivada

- Podemos usar polinômio de Taylor para aproximar as derivadas da função.
- Suponha pontos igualmente espaçados: $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots$
- Ou seja $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1} = h$



Derivadas de Primeira Ordem

Diferença Progressiva

Para calcular a derivada $f'(x_i)$ em cada ponto x_i, vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno do ponto x_i.
Tomando $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h} + O(h^2)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Derivadas de Primeira Ordem

Diferença Regressiva

Para calcular a derivada $f'(x_i)$ em cada ponto x_i, vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno do ponto x_i.
Tomando $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)\overbrace{(x_{i-1} - x_i)}^{-h} + O(h^2)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

Derivadas de Primeira Ordem

Diferença Centrada

Para calcular a derivada $f'(x_i)$ em cada ponto x_i, vamos usar um polinômio de Taylor quadrático em torno do ponto x_i.

Tomando $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + O(h^3) \qquad (1)$$

Tomando $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + O(h^3) \qquad (2)$$

Subtraindo Eq. (1) de Eq. (2)

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) &= 2f'(x_i)h + O(h^3) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

Derivadas de Primeira Ordem

Diferença Unilateral à Direita

Para calcular a derivada $f'(x_i)$ em cada ponto x_i, vamos usar um polinômio de Taylor quadrático em torno do ponto x_i.

Tomando $x = x_{i+2}$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + O(h^3) \tag{3}$$

Tomando $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2 f''(x_i)}{2} + O(h^3) \tag{4}$$

Multiplicando Eq. (4) por -4 e somando com Eq. (3):

$$f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) = -3f(x_i) - 2hf'(x_i) + O(h^3)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Derivadas de Primeira Ordem

Diferença Unilateral à Esquerda

Analogamente a diferença unilateral à direita pode-se obter a seguinte relação:

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2)$$

Derivadas de Segunda Ordem

Diferença Centrada

Para calcular a derivada $f''(x_i)$ em cada ponto x_i, vamos usar um polinômio de Taylor quadrático em torno do ponto x_i.

Tomando $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + O(h^3) \tag{5}$$

Tomando $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + O(h^3) \tag{6}$$

Somando Eq. (5) com Eq. (6):

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 + O(h^3)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Aproximações de Derivadas

Resumo

Tipo	Fórmula de Diferença	Ordem
Progressiva	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
Regressiva	$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
Centrada	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
Unilateral	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Unilateral	$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Centrada	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$

Exemplo

Exemplo Resolvido

Calcule $f'(1.3)$ para $f(x) = ln(x)$ usando diferença progressiva e central para $h = 0.01$ e $h = 0.001$.

Exemplo

Exemplo Resolvido

Calcule $f'(1.3)$ para $f(x) = ln(x)$ usando diferença progressiva e central para $h = 0.01$ e $h = 0.001$.

Solução:

Usando $h = 0.01$, com diferença progressiva temos

$$f'(1.3) \approx \frac{ln(1.31) - ln(1.30)}{0.01} = 0.76628$$

Com diferença central temos

$$f'(1.3) \approx \frac{ln(1.31) - ln(1.29)}{2 \cdot 0.01} = 0.76924$$

Exemplo

Cont. Exemplo Resolvido

Usando $h = 0.001$, com diferença progressiva temos

$$f'(1.3) \approx \frac{ln(1.301) - ln(1.300)}{0.001} = 0.76893$$

com diferença central temos

$$f'(1.3) \approx \frac{ln(1.301) - ln(1.299)}{2 \cdot 0.001} = 0.76923$$

Podemos calcular o valor real usando a derivada de $f(x)$, pois neste caso conhecemos a expressão da função. O resultado é

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1.3) = 0.76923$$

Exemplo

Exercício Resolvido

Seja a função $f(x) = cos(x)$ aproxime sua derivada para $x \in [0, 1]$ utilizando $h = 0.1$ utilizando método $O(h)$. Calcule o erro absoluto em cada ponto.

Exemplo

Exercício Resolvido

Seja a função $f(x) = cos(x)$ aproxime sua derivada para $x \in [0, 1]$ utilizando $h = 0.1$ utilizando método $O(h)$. Calcule o erro absoluto em cada ponto.

x	Numérica	Analítica	Erro	Tipo
0.0	-0.049958	-0.000000	0.049958	Progressiva
0.1	-0.149376	-0.099833	0.049542	Progressiva
0.2	-0.247301	-0.198669	0.048632	Progressiva
0.3	-0.342755	-0.295520	0.047235	Progressiva
0.4	-0.434784	-0.389418	0.045366	Progressiva
0.5	-0.522469	-0.479426	0.043044	Progressiva
0.6	-0.604934	-0.564642	0.040292	Progressiva
0.7	-0.681355	-0.644218	0.037137	Progressiva
0.8	-0.750967	-0.717356	0.033611	Progressiva
0.9	-0.813077	-0.783327	0.029750	Progressiva
1.0	-0.813077	-0.841471	0.028394	Regressiva

Exercícios

1) Demostre a fórmula da diferença unilateral à esquerda.
2) Aproxime a derivada de primeira ordem da função $f(x) = sen(x)$ utilizando a diferenças finitas $O(h^2)$ utilizando $h = 0.1$ e $h = 0.01$ para $x \in [0, 1]$. Plote a derivada analítica e as aproximadas para comparar os resultados.
3) Utilizando a função $f(x) = sen(x)$, mostre que o erro diferença progressiva e diferença centrada decrescem em $O(h)$ e $O(h^2)$, respectivamente. Para isso faça o que se pede:
   a) Tomando $h \in [10^{-5}, 10^0]$, plote, em escala log-log, o gráfico de h versus erro absoluto e calcule a inclinação destas retas.
   b) Tomando $h \in [10^{-20}, 10^0]$, plote, em escala log-log, o gráfico de h versus erro absoluto. O que aconteceu e por que?

Conteúdo

Operadores Δ, ∇ e δ

- Diferença progressiva:

$$\Delta[f](x) = f(x+h) - f(x)$$

- Diferença regressiva:

$$\nabla[f](x) = f(x) - f(x-h)$$

- Diferença centrada:

$$\delta[f](x) = f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$$

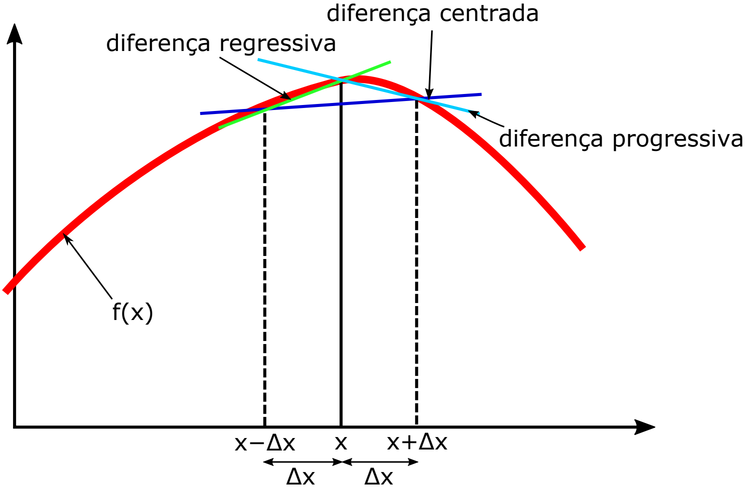
Operadores Δ, ∇ e δ

Assim as diferenças que vimos anteriormente podem ser reescritas da seguinte forma:

- Diferença progressiva: $f'(x_i) = \frac{\Delta[f](x)}{h} + O(h)$
- Diferença regressiva $f'(x_i) = \frac{\nabla[f](x)}{h} + O(h)$
- Diferença centrada: $f'(x_i) = \frac{\delta[f](x)}{h} + O(h^2)$

Operadores de Diferença

Então, os três tipos básicos são: diferenças progressivas, regressivas e centradas. Elas podem ser visualizados pela seguinte imagem

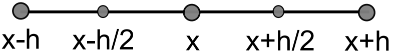


Derivadas de Segunda Ordem

Diferença Centrada

Assim a diferença centrada pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f''(x) \approx \frac{\delta^2[f](x)}{h^2}$$



Ou seja

$$\frac{\delta^2[f](x)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Derivadas de Segunda Ordem

Diferença progressiva

Analogamente a diferença progressiva pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2[f](x)}{h^2}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^2[f](x)}{h^2} &= \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.\end{aligned}$$

Derivadas de Segunda Ordem

Diferença regressiva

Analogamente a diferença regressiva pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f''(x) \approx \frac{\nabla^2[f](x)}{h^2}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\frac{\nabla^2[f](x)}{h^2} &= \frac{\frac{f(x)-f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}\end{aligned}$$

Derivadas de ordens superiores

Generalizando, esta mesma ideia pode ser recursivamente aplicada para obter a n-ésima diferença.

- Diferença progressiva:

$$\Delta^n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f\left(x + ih\right)$$

- Diferença regressiva:

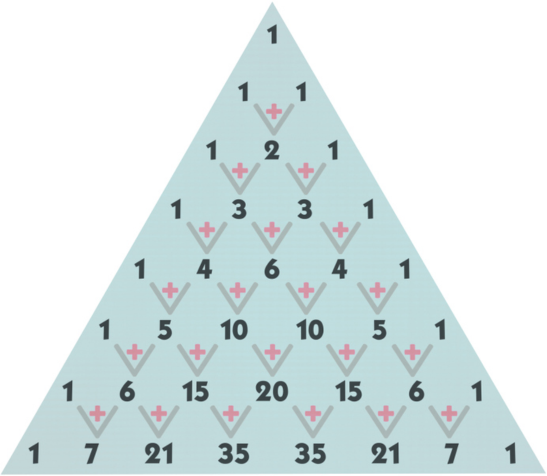
$$\nabla^n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} f(x - ih)$$

- Diferença centrada:

$$\delta^n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} f\left(x + \left(\frac{n}{2} - i\right) h\right)$$

Onde $\binom{n}{i}$ é o coeficiente binomial, ou cada linha do triangulo de pascal fornece o coeficiente de cada i-ésimo termo do somatório.

Triangulo de Pascal



Derivadas de ordens superiores

A relação destas diferenças de ordem superior com suas respectivas derivadas é direta:

- Diferença progressiva: $\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{\Delta_h^n[f](x)}{h^n} + O(h)$
- Diferença regressiva $\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{\nabla_h^n[f](x)}{h^n} + O(h)$
- Diferença centrada: $\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{\delta_h^n[f](x)}{h^n} + O\left(h^2\right)$

Exemplo

Exercício Resolvido

Obtenha uma aproximação de derivada de terceira ordem usando diferença progressiva.

Exemplo

Exercício Resolvido

Obtenha uma aproximação de derivada de terceira ordem usando diferença progressiva.

Seja a generalização apresentada anteriormente:

$$\Delta^n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f\left(x + ih\right)$$

Tomando $n = 3$ temos:

$$\Delta^3[f](x) = \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3}{i} f\left(x + ih\right)$$

Exemplo

Calculando os coeficientes binomiais necessários:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1, \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$
$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3, \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

Exemplo

Assim

$$\Delta^3[f](x) = (-1)^3 1 f(x) + (-1)^2 3 f(x+h) + (-1)^1 3 f(x+2h) + (-1)^0 1 f(x+3h)$$
$$\Delta^3[f](x) = -f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)$$

Então a aproximação da 3^a derivada fica:

$$\frac{d'''f}{dx'''} \approx \frac{\Delta^3[f](x)}{h^3} = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + O(h)$$

Conteúdo

Diferenças finitas Multivariadas

- Assim como no calculo, as diferenças finitas podem ser aplicadas à funções com mais de uma variável.
- Alguns exemplos de aplicação de diferença centrada em derivadas parciais são:

$$f_x(x,y) \approx \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$f_y(x,y) \approx \frac{f(x,y+k) - f(x,y-k)}{2k}$$

$$f_{xx}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x,y) \approx \frac{f(x,y+k) - 2f(x,y) + f(x,y-k)}{k^2}$$

$$f_{xy}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y-k) - f(x-h,y+k) + f(x-h,y-k)}{4hk}$$

Exemplo

Exercício Resolvido

Seja a função $f(x,y) = cos(x+y)$ aproxime $f_x(x,y)$ para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ utilizando $h_x = 0.1$ utilizando uma aproximação $O(h)$. Plote o resultado da aproximação junto da solução analítica.

Exemplo

Exercício Resolvido

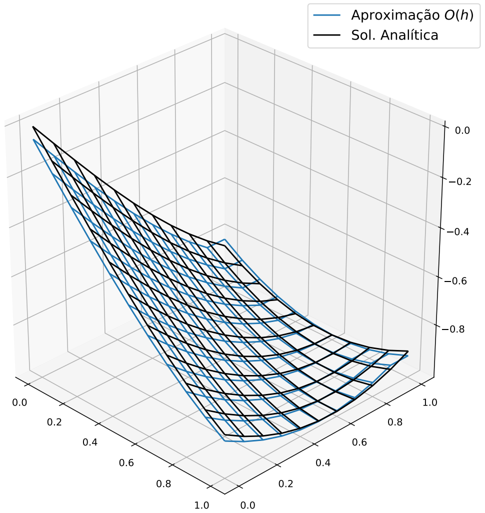
Seja a função $f(x, y) = cos(x + y)$ aproxime $f_x(x, y)$ para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ utilizando $h_x = 0.1$ utilizando uma aproximação $O(h)$. Plote o resultado da aproximação junto da solução analítica.

Sol.:

- Uma opção para resolver este exercício é utilizar uma diferença progressiva nos pontos onde $x < 1$ e uma diferença regressiva caso contrário.
- Deste modo obtemos a seguinte aproximação:

$$f_x(x, y) \approx \begin{cases} \dfrac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} & \text{para } x < 1 \\ \dfrac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x} & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo


Aproximação $O(h)$
Sol. Analítica
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Exercícios

1) Obtenha a diferença regressiva da derivada de 3^a ordem.
2) Seja a função $f(x, y) = exp(x + 2y)$ aproxime $f_y(x, y)$ para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ utilizando $h_y = 0.1$ utilizando uma aproximação $O(h^2)$. Plote o resultado da aproximação junto da solução analítica.

Referencias

Randall J LeVeque.
Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems.
SIAM, 2007.

H Mark.
Introduction to numerical methods in differential equations.
Springer: Berlin, Germany, 2011.