Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais

Introdução aos Métodos Discretos

Prof. Ruy Freitas Reis - `ruy.reis@ufjf.br`
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Classificação das EDP's Lineares de Segunda Ordem

Forma geral

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Pode ser classificada em:

- Parabólica
  - $B^2 - 4AC = 0$
  - Descreve um processo de difusão
  - Exemplo: $u_t = u_{xx}$
- Hiperbólica
  - $B^2 - 4AC > 0$
  - Descreve a propagação de ondas
  - Exemplo: $u_{tt} = u_{xx}$
- Elíptica
  - $B^2 - 4AC < 0$
  - Descreve problemas estacionários
  - Exemplo: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Equações Diferenciais Parciais
Classificação
Método das Diferenças Finitas
Elíptica
Condição de Dirichlet
Condição de Neumann
Métodos Iterativos Simples
Parabólica
Problema difusivo 1D
Problema multidimensional
Hiperbólica
Equação de Advecção
Mistas
Advecção-Difusão
Referencias

Conteúdo

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

A equação de Poisson em 2D é dada por:

$$-\nabla^2 u = f \text{ em } \Omega$$

Formulando em um problema de Dirichlet bem-posto, temos as seguintes condições de contorno:

$$u = \alpha \text{ em } \partial\Omega$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

- Vamos tentar obter a solução de $u(x, y)$ em pontos discretos denominados
  $u_{0,0}, u_{1,0}, \cdots, u_{m+1,0}, u_{0,1}, u_{1,1}, \cdots, u_{m+1,1}, \cdots, u_{m+1,n+1}$
  onde $u_{i,j}$ é uma aproximação para a solução $u(x_i, y_j)$.
- Considere
  - $x_i = ih + x_0$ e $h_x = \frac{1}{m+1}$ é a distância entre os pontos da malha no eixo-x.
  - $y_j = jh + y_0$ e $h_y = \frac{1}{n+1}$ é a distância entre os pontos da malha no eixo-y.

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Nos pontos internos vamos fazer uma aproximação em diferenças finitas centrada de segunda ordem, com convergência $O(h^2)$. Então temos:

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}$$

$$u_{yy} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2}$$

Desta forma, considerando $h_x = h_y = h$

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= u_{xx} + u_{yy} \\ &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \\ &\approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}\end{aligned}$$

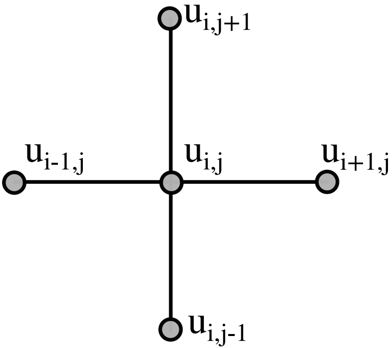
EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Então a aproximação

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

é conhecida como *stencil* 5-pontos devido a sua forma poder ser representada da seguinte maneira:



EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Usando esta aproximação discreta no problema de Poisson 2D, temos

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2 u &= f \\
-\frac{(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})}{h^2} &= f_{i,j}
\end{aligned}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

O seguinte sistema linear

$$-\frac{(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})}{h^2} = f_{i,j} \qquad (1)$$

deve ser transformado no formato matriz vetor

$$\boldsymbol{A}U = F,$$

onde as incógnitas $u_{i,j}$ é uma matriz 2D que vamos ordenar dentro de um vetor 1D

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

- Embora seja convencional representar os sistemas lineares no formato de matriz vetor, não é sempre necessário fazer isto.
- O formato matriz vetor é essencial para resolução direta de sistemas lineares, *i.e.* fatoração de Gauss, decomposição LU, etc..
- Para sistemas muito grandes, particularmente, métodos iterativos são mais eficientes.
- Nos métodos iterativos, geralmente, não é necessário a construção da matriz de coeficientes, pois pode-se trabalhar diretamente com a aproximação (1).

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

- As equações devem ser ordenadas da mesma maneira que as incógnitas
- De modo geral, cada linha da matriz contém 5 elementos não nulos com o 4 aparecendo na diagonal
- Quando a aproximação (1) é aplicada nos pontos adjacentes ao contorno, deve-se mover os pontos correspondentes ao contorno para o lado direito da equação. Por exemplo para $i = j = 1$ temos:

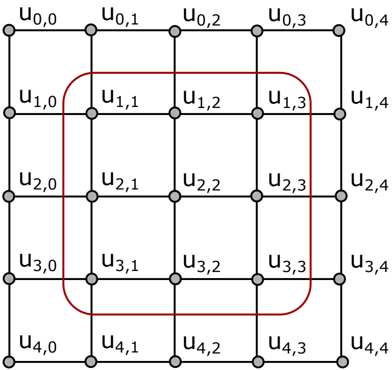
$$4u_{1,1} - u_{1,2} - u_{2,1} = h^2 f_{1,1} + u_{1,0} + u_{0,1}$$

os valores de $u_{1,0}$ e $u_{0,1}$ são conhecidos pela condição de contorno

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Assim, os pontos internos que devem ser aproximados são:



$$U_1 = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix}$$

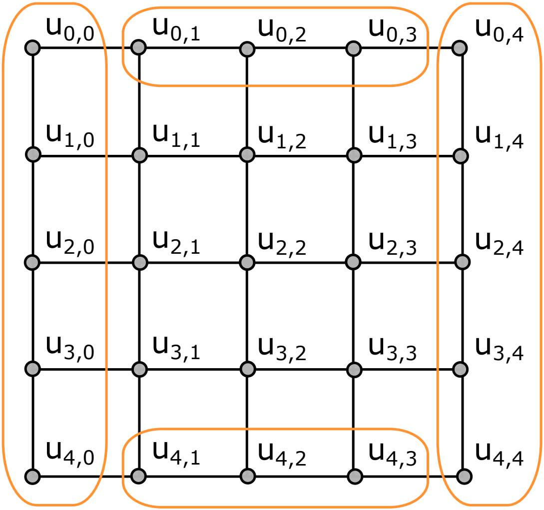
Arranjando em forma de vetor, temos:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Os outros pontos da malha são conhecidos pela condição de contorno



EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Desenvolvendo o sistema linear

$$i=1, j=1: 4u_{1,1}-u_{1,2}-u_{2,1}=h^2 f_{1,1}+u_{1,0}+u_{0,1}$$

$$i=2, j=1: 4u_{2,1}-u_{1,1}-u_{3,1}-u_{2,2}=h^2 f_{2,1}+u_{2,0}$$

$$i=3, j=1: 4u_{3,1}-u_{2,1}-u_{3,2}=h^2 f_{3,1}+u_{3,0}+u_{4,1}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Adicionando ao sistema $\boldsymbol{A}U = F$, temos:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{20} \\ u_{30} + u_{41} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas
Problema de Dirichlet

Continuando o desenvolvimento do sistema linear

$$i = 1, j = 2 : 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{1,1} - u_{1,3} = h^2 f_{1,2} + u_{0,2}$$
$$i = 2, j = 2 : 4u_{2,2} - u_{1,2} - u_{3,2} - u_{2,1} - u_{2,3} = h^2 f_{2,2}$$
$$i = 3, j = 2 : 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} - u_{3,3} = h^2 f_{3,2} + u_{4,2}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{20} \\ u_{30} + u_{41} \\ u_{02} \\ 0 \\ u_{42} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Continuando o desenvolvimento do sistema linear

$$i=1, j=3: 4u_{1,3}-u_{2,3}-u_{1,2}=h^2 f_{1,3}+u_{0,3}+u_{1,4}$$
$$i=2, j=3: 4u_{2,3}-u_{1,3}-u_{3,3}-u_{2,2}=h^2 f_{2,3}+u_{2,3}$$
$$i=3, j=3: 4u_{3,3}-u_{2,3}-u_{3,2}=h^2 f_{3,3}+u_{4,3}+u_{3,4}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{20} \\ u_{30} + u_{41} \\ u_{02} \\ 0 \\ u_{42} \\ u_{14} + u_{03} \\ u_{24} \\ u_{34} + u_{43} \end{bmatrix}$$

Destacando os pontos do contorno esquerdo, direito, topo, base

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix}
= h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{20} \\ u_{30} + u_{41} \\ u_{02} \\ 0 \\ u_{42} \\ u_{14} + u_{03} \\ u_{24} \\ u_{34} + u_{43} \end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Para generalizar, vamos focar na equação da i-ésima coluna da malha. Uma vez que as incógnitas desta coluna estão relacionadas somente com as incógnitas das duas colunas vizinhas.

$$-\boldsymbol{U_{i-1}} + B\boldsymbol{U_i} - \boldsymbol{U_{i+1}} = h^2\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{\alpha_i},$$

onde B é a seguinte matriz tridiagonal $(M-2) \times (M-2)$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{(M-2)\times(M-2)}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

O vetor

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{M,i} \end{bmatrix}$$

representa os contornos do topo e base.
Além disso, quando $i = 1$ ou $i = M - 1$ as condições de contorno da esquerda e direita devem ser aplicadas, então

$$\boldsymbol{U_0} = \boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,0} \\ \alpha_{2,0} \\ \vdots \\ \alpha_{M-1,0} \end{bmatrix} \boldsymbol{U_M} = \boldsymbol{\alpha}_M = \begin{bmatrix} \alpha_{1,M} \\ \alpha_{2,M} \\ \vdots \\ \alpha_{M-1,M} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

Finalmente, o método das diferenças finitas para este problema pode ser expressado da forma

$$A\boldsymbol{U} = F,$$

onde A é uma matriz $(M-2)^2 \times (M-2)^2$ e as incógnitas e o lado direito da equação $U, F \in \mathbb{R}^{(M-2)^2}$
A tem o seguinte formato tridiagonal

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & B \end{bmatrix}_{(M-2)^2\times(M-2)^2}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $(M-2) \times (M-2)$.

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet

O vetor **F** é dado por:

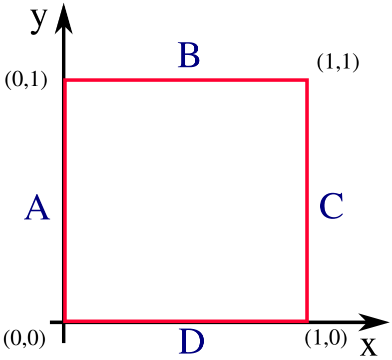
$$F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1)/h^2 \\ \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2/h^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{M-2} + \boldsymbol{\alpha}_{M-2}/h^2 \\ \boldsymbol{f}_{M-1} + (\boldsymbol{\alpha}_{M-1} + \boldsymbol{\alpha}_M)/h^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet

Resolver o seguinte problema de Laplace

$$
\begin{cases}
\nabla^2 U = 0 & \text{para } \Omega \\
U = 0 & \text{para } \partial\Omega_{A,B,C} \\
U = sen(2\pi x) & \text{para } \partial\Omega_D
\end{cases}
$$



Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet

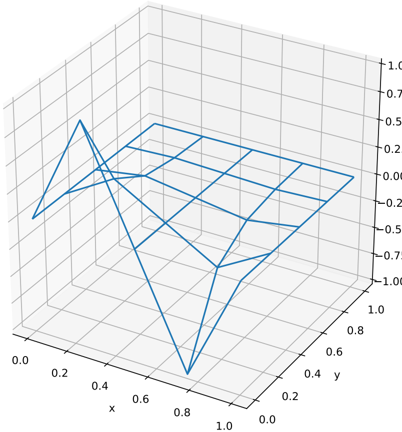
Montando o sistema linear $AU = F$ para $h = 0.25$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet

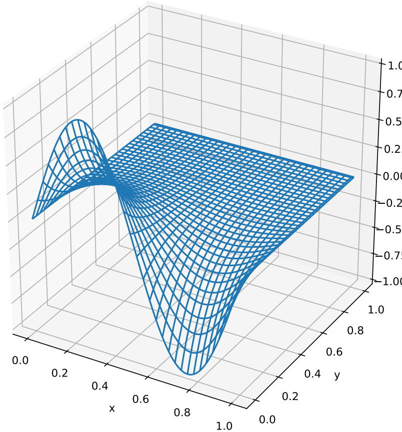
Solução do problema considerando $h = 0.25$



Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet

Ao refinar a malha para $h = 0.01$, obtemos a seguinte solução



EDPs Elípticas

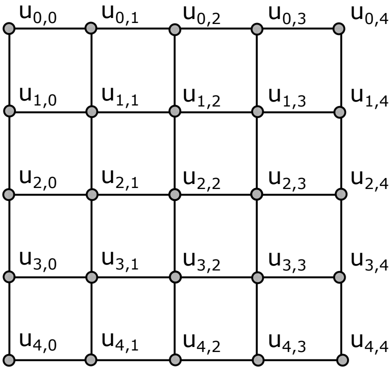
Problema de Dirichlet matriz completa

- Outro modo de montar o sistema $AU = F$ é considerar todos os nós da malha como incógnitas do sistema.
- Teremos um sistema linear com M^2 incógnitas, *i.e.* a matriz A será $M^2 \times M^2$
- Deste modo, basta adicionar uma equação para cada nó do contorno que satisfaça condição de contorno
- Resumidamente, essa aproximação não muda a estrutura da matriz, apenas adiciona linhas com um 1, ou h^2, na diagonal a depender da forma que o sistema for escrito.

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Assim, todos os pontos devem ser aproximados:



$$U_0 = \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \end{bmatrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_{0,2} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} u_{0,3} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ u_{4,3} \end{bmatrix} \quad U_4 = \begin{bmatrix} u_{0,4} \\ u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \end{bmatrix}$$

Arranjando em forma de vetor, temos:

$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Desenvolvendo o sistema linear

$$i = 0, j = 0 : u_{0,0} = \hat{u}_{0,0}$$
$$i = 1, j = 0 : u_{1,0} = \hat{u}_{1,0}$$
$$i = 2, j = 0 : u_{2,0} = \hat{u}_{2,0}$$
$$i = 3, j = 0 : u_{3,0} = \hat{u}_{3,0}$$
$$i = 4, j = 0 : u_{4,0} = \hat{u}_{4,0}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_{00}\\\hat{u}_{10}\\\hat{u}_{20}\\\hat{u}_{30}\\\hat{u}_{40} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Continuando o desenvolvimento do sistema linear

$$i = 0, j = 1 : u_{0,1} = \hat{u}_{0,1}$$
$$i = 1, j = 1 : 4u_{1,1} - u_{1,2} - u_{2,1} - u_{1,0} - u_{0,1} = h^2 f_{1,1}$$
$$i = 2, j = 1 : 4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{3,1} - u_{2,2} - u_{2,0} = h^2 f_{2,1}$$
$$i = 3, j = 1 : 4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} - u_{4,1} = h^2 f_{3,1}$$
$$i = 4, j = 1 : u_{4,1} = \hat{u}_{4,1}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
= h^2 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\\0\end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix}\hat{u}_{00}\\\hat{u}_{10}\\\hat{u}_{20}\\\hat{u}_{30}\\\hat{u}_{40}\\\hat{u}_{01}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{41}\end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Continuando o desenvolvimento do sistema linear

$$\begin{aligned}
i = 0, j = 2 &: u_{0,2} = \hat{u}_{0,2} \\
i = 1, j = 2 &: 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{1,1} - u_{1,3} - u_{0,2} = h^2 f_{1,2} \\
i = 2, j = 2 &: 4u_{2,2} - u_{1,2} - u_{3,2} - u_{2,1} - u_{2,3} = h^2 f_{2,2} \\
i = 3, j = 2 &: 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} - u_{3,3} - u_{4,2} = h^2 f_{3,2} \\
i = 4, j = 2 &: u_{4,2} = \hat{u}_{4,2}
\end{aligned}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

$$
\left[\begin{matrix}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{matrix}\right]
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
= h^2
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\\0\\0\\f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\\0\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}\hat{u}_{00}\\\hat{u}_{10}\\\hat{u}_{20}\\\hat{u}_{30}\\\hat{u}_{40}\\\hat{u}_{01}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{41}\\\hat{u}_{02}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{42}\end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Continuando o desenvolvimento do sistema linear

$$i = 0, j = 3 : u_{0,3} = \hat{u}_{0,3}$$
$$i = 1, j = 3 : 4u_{1,3} - u_{2,3} - u_{1,2} - u_{0,3} - u_{1,4} = h^2 f_{1,3}$$
$$i = 2, j = 3 : 4u_{2,3} - u_{1,3} - u_{3,3} - u_{2,2} - u_{2,3} = h^2 f_{2,3}$$
$$i = 3, j = 3 : 4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} - u_{4,3} - u_{3,4} = h^2 f_{3,3}$$
$$i = 4, j = 3 : u_{4,3} = \hat{u}_{4,3}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
= h^2
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\\0\\0\\f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\\0\\0\\f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\\0\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}\hat{u}_{00}\\\hat{u}_{10}\\\hat{u}_{20}\\\hat{u}_{30}\\\hat{u}_{40}\\\hat{u}_{01}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{41}\\\hat{u}_{02}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{42}\\\hat{u}_{03}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{43}\end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Desenvolvendo o sistema linear

$$i = 0, j = 4 : u_{0,4} = \hat{u}_{0,4}$$
$$i = 1, j = 4 : u_{1,4} = \hat{u}_{1,4}$$
$$i = 2, j = 4 : u_{2,4} = \hat{u}_{2,4}$$
$$i = 3, j = 4 : u_{3,4} = \hat{u}_{3,4}$$
$$i = 4, j = 4 : u_{4,4} = \hat{u}_{4,4}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&0\\0&-1&4&-1&0\\0&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
= h^2
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\\0\\0\\f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\\0\\0\\f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}\hat{u}_{00}\\\hat{u}_{10}\\\hat{u}_{20}\\\hat{u}_{30}\\\hat{u}_{40}\\\hat{u}_{01}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{41}\\\hat{u}_{02}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{42}\\\hat{u}_{03}\\0\\0\\0\\\hat{u}_{43}\\\hat{u}_{04}\\\hat{u}_{14}\\\hat{u}_{24}\\\hat{u}_{34}\\\hat{u}_{44}\end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Para generalizar, vamos focar na equação da i-ésima coluna da malha. Uma vez que as incógnitas desta coluna estão relacionadas somente com as incógnitas das duas colunas vizinhas.

$$-\boldsymbol{U_{i-1}} + B\boldsymbol{U_i} - \boldsymbol{U_{i+1}} = h^2\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{\alpha_i},$$

onde B é a seguinte matriz tridiagonal $M \times M$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{M\times M}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

O vetor

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{M,i} \end{bmatrix}$$

representa os contornos do topo e base.
Além disso, quando $i = 0$ ou $i = M$ as condições de contorno da esquerda e direita devem ser aplicadas, então

$$\boldsymbol{U_0} = \boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} \\ \alpha_{1,0} \\ \vdots \\ \alpha_{M,0} \end{bmatrix} \boldsymbol{U_M} = \boldsymbol{\alpha}_M = \begin{bmatrix} \alpha_{0,M} \\ \alpha_{1M} \\ \vdots \\ \alpha_{M,M} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

Finalmente, o método das diferenças finitas para este problema pode ser expressado da forma

$$A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F},$$

onde A é uma matriz $M^2 \times M^2$ e as incógnitas e o lado direito da equação $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M^2}$
A tem o seguinte formato tridiagonal

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} I & & & & & \\ -I^* & B & -I^* & & & \\ & -I^* & B & -I^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I^* & B & -I^* \\ & & & & & I \end{bmatrix}_{M^2 \times M^2}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $M^2 \times M^2$, e I^* possui a primeira e última linha nula.

EDPs Elípticas

Problema de Dirichlet matriz completa

O vetor **F** é dado por:

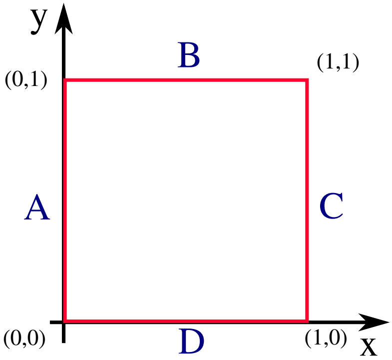
$$F = \begin{bmatrix} \alpha_0/h^2 \\ \boldsymbol{f}_1 + \alpha_1/h^2 \\ \boldsymbol{f}_2 + \alpha_2/h^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{M-2} + \alpha_{M-2}/h^2 \\ \boldsymbol{f}_{M-1} + \alpha_{M-1}/h^2 \\ \alpha_M/h^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet matriz completa

Resolver o seguinte problema de Laplace

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0 & \text{para } \Omega \\ U = 0 & \text{para } \partial\Omega_{A,B,C} \\ U = sen(2\pi x) & \text{para } \partial\Omega_D \end{cases}$$



Exemplo Resolvido

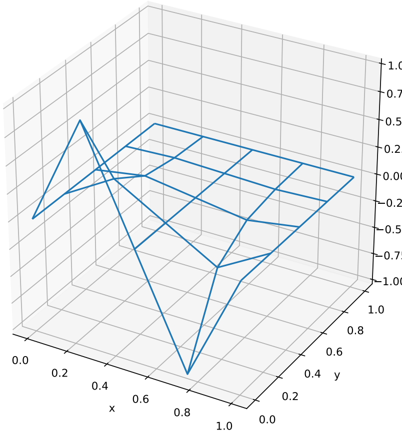
Problema de Dirichlet matriz completa

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet matriz completa

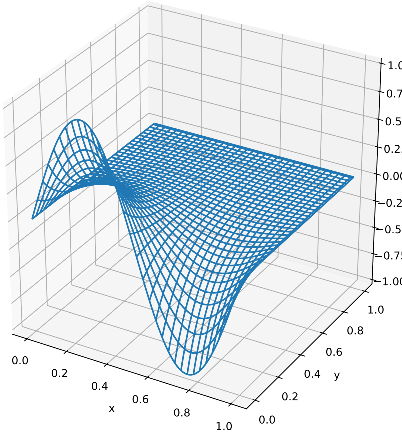
Solução do problema considerando $h = 0.25$



Exemplo Resolvido

Problema de Dirichlet matriz completa

Ao refinar a malha para $h = 0.01$, obtemos a seguinte solução



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

A equação de Poisson em 2D dada por:

$$-\nabla^2 u = f \text{ em } \Omega$$

Formulando em um problema de Neumann, temos as seguintes condições de contorno:

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \sigma \text{ em } \partial\Omega$$

Note que este problema está mal-posto, pois para uma equação elíptica é necessário ao menos 1 ponto do contorno com condição de Dirichlet, esta equação será desenvolvida apenas para mostrar como tratar, em cada pronto da fronteira, condição do tipo Neumann.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

- Para gerar uma aproximação em diferenças finitas iremos utilizar a mesma malha do problema de Dirichlet
- A discretização também será desenvolvida através do mesmo esquema com *stencil* de 5-pontos
- Será necessário uma aproximação em diferenças finitas, também, para o termo $\nabla u \cdot \vec{n}$, portanto será necessário incluir os pontos da fronteira como incógnitas do sistema linear.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para discretizar a condição de contorno

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \sigma$$

Vamos aplicar uma diferença centrada de $O(h^2)$ para manter a ordem de convergência do método numérico em $O(h^2)$. Portanto temos:

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \vec{n} \approx \begin{bmatrix} \pm \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \\ \pm \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \end{bmatrix}$$

O sinal $+$ ou - deve ser escolhido a depender do vetor normal $\vec{n}$.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Ao longo do do topo do contorno, onde $\partial_n = -\partial_x$

- Note o sinal negativo apropriado para o vetor normal em direção para fora do domínio
- Esta condição será aplicada nos pontos $(0, y_j)$
- Vamos considerar $h_x = h_y = h$

$$\frac{(u_{0-1,j} - u_{0+1,j})}{2h} = \sigma_{0,j} \text{ para } j = 0, 1, 2, \cdots N$$
$$\frac{(u_{-1,j} - u_{1,j})}{2h} = \sigma_{0,j}$$

Esta aproximação utiliza de pontos fictícios fora do domínio $(-1, j)$, também conhecidos como pontos fantasmas.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Então obtemos a seguinte aproximação nos pontos do topo do domínio:

$$4u_{0,j} - u_{-1,j} - u_{1,j} - u_{0,j+1} - u_{0,j-1} = h^2 f_{0,j}$$

O termo fictício $u_{-1,j}$ pode ser eliminado pela aproximação da derivada da condição de contorno, rearranjando os termos:

$$\frac{(u_{-1,j} - u_{1,j})}{2h} = \sigma_{0,j}$$

$$u_{-1,j} = 2h\sigma_{0,j} + u_{1,j}$$

Substituindo na relação anterior, obtemos um *stencil* de 4 pontos:

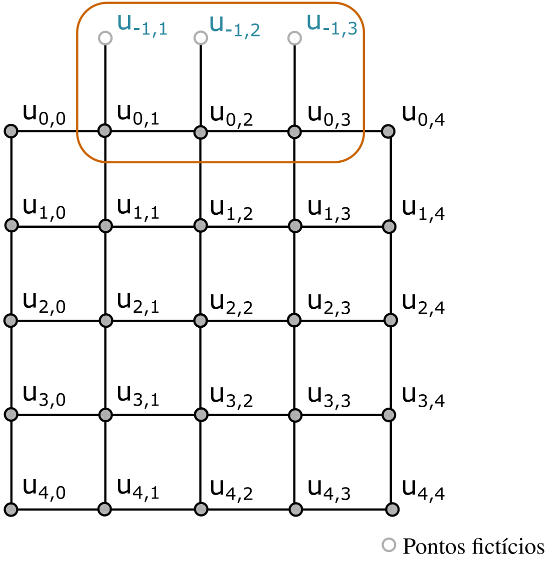
$$4u_{0,j} - (2h\sigma_{0,j} + u_{1,j}) - u_{1,j} - u_{0,j+1} - u_{0,j-1} = h^2 f_{0,j}$$

$$4u_{0,j} - 2u_{1,j} - u_{0,j+1} - u_{0,j-1} = h^2 f_{0,j} + 2h\sigma_{0,j}$$

considerando $j = 1, 2, \cdots N-1$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Ao longo da base do contorno, onde $\partial_n = \partial_x$

- Note o sinal positivo apropriado para o vetor normal em direção para fora do domínio
- Esta condição será aplicada nos pontos (M, y_j)
- Vamos considerar $h_x = h_y = h$

$$\frac{(u_{M+1,j} - u_{M-1,j})}{2h} = \sigma_{M,j} \text{ para } j = 0, 1, 2, \cdots N$$

Esta aproximação também utiliza de pontos fictícios fora do domínio $(M + 1, j)$.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Então obtemos a seguinte aproximação nos pontos da base do domínio:

$$4u_{M,j} - u_{M+1,j} - u_{M-1,j} - u_{M,j+1} - u_{M,j-1} = h^2 f_{M,j}$$

O termo fictício $u_{M+1,j}$ pode ser eliminado pela aproximação da derivada da condição de contorno, rearranjando os termos:

$$\frac{(u_{M+1,j} - u_{M-1,j})}{2h} = \sigma_{M,j}$$

$$u_{M+1,j} = 2h\sigma_{M,j} + u_{M-1,j}$$

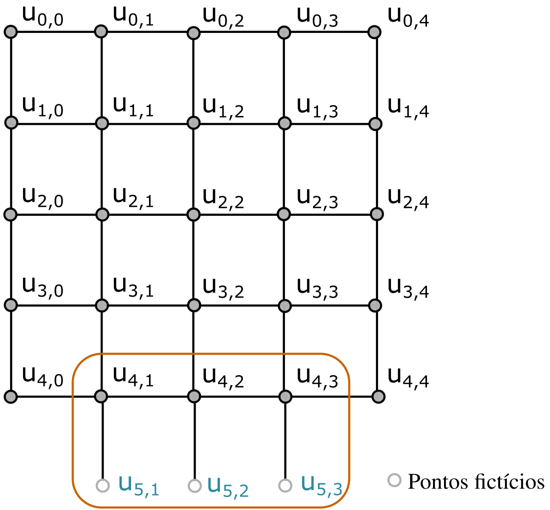
Substituindo na relação anterior, obtemos um *stencil* de 4 pontos:

$$4u_{M,j} - (2h\sigma_{M,j} + u_{M-1,j}) - u_{M-1,j} - u_{M,j+1} - u_{M,j-1} = h^2 f_{M,j}$$

$$4u_{M,j} - 2u_{M-1,j} - u_{M,j+1} - u_{M,j-1} = h^2 f_{M,j} + 2h\sigma_{M,j}$$

considerando $j = 1, 2, \cdots N - 1$

EDPs Elípticas
Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Ao longo do contorno direito, onde $\partial_n = \partial_y$

- Note o sinal positivo apropriado para o vetor normal em direção para fora do domínio
- Esta condição será aplicada nos pontos (x_i, N)
- Vamos considerar $h_x = h_y = h$

$$\frac{(u_{i,N+1} - u_{i,N-1})}{2h} = \sigma_{i,N} \text{ para } i = 0, 1, 2, \cdots M$$

Esta aproximação também utiliza de pontos fictícios fora do domínio $(i, N+1)$.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Então obtemos a seguinte aproximação nos pontos do lado direito do domínio:

$$4u_{i,N} - u_{i+1,N} - u_{i-1,N} - u_{i,N+1} - u_{i,N-1} = h^2 f_{i,N}$$

O termo fictício $u_{i,N+1}$ pode ser eliminado pela aproximação da derivada da condição de contorno, rearranjando os termos:

$$\frac{(u_{i,N+1} - u_{i,N-1})}{2h} = \sigma_{i,N}$$

$$u_{i,N+1} = 2h\sigma_{i,N} + u_{i,N-1}$$

Substituindo na relação anterior, obtemos um *stencil* de 4 pontos:

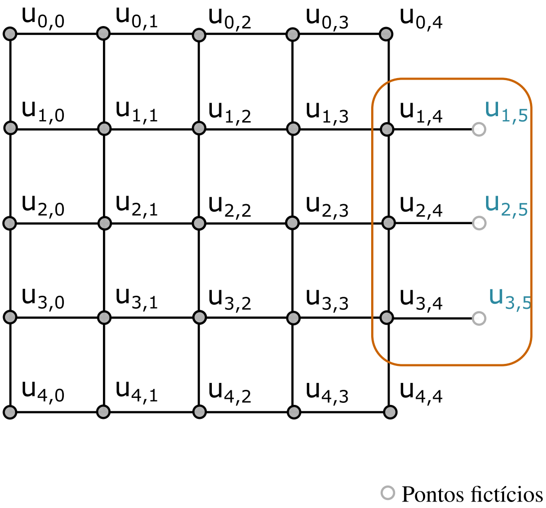
$$4u_{i,N} - u_{i+1,N} - u_{i-1,N} - (2h\sigma_{i,N} + u_{i,N-1}) - u_{i,N-1} = h^2 f_{i,N}$$

$$4u_{i,N} - u_{i+1,N} - u_{i-1,N} - 2u_{i,N-1} = h^2 f_{i,N} + 2h\sigma_{i,N}$$

considerando $i = 1, 2, \cdots M - 1$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Ao longo do contorno esquerdo, onde $\partial_n = -\partial_y$

- Note o sinal negativo apropriado para o vetor normal em direção para fora do domínio
- Esta condição será aplicada nos pontos $(x_i, 0)$
- Vamos considerar $h_x = h_y = h$

$$\frac{(u_{i,-1} - u_{i,1})}{2h} = \sigma_{i,0} \text{ para } i = 0, 1, 2, \cdots M$$

Esta aproximação também utiliza de pontos fictícios fora do domínio $(i, -1)$.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Então obtemos a seguinte aproximação nos pontos do lado direito do domínio:

$$4u_{i,0} - u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - u_{i,1} - u_{i,-1} = h^2 f_{i,0}$$

O termo fictício $u_{i,-1}$ pode ser eliminado pela aproximação da derivada da condição de contorno, rearranjando os termos:

$$\frac{(u_{i,-1} - u_{i,1})}{2h} = \sigma_{i,0}$$

$$u_{i,-1} = 2h\sigma_{i,0} + u_{i,1}$$

Substituindo na relação anterior, obtemos um *stencil* de 4 pontos:

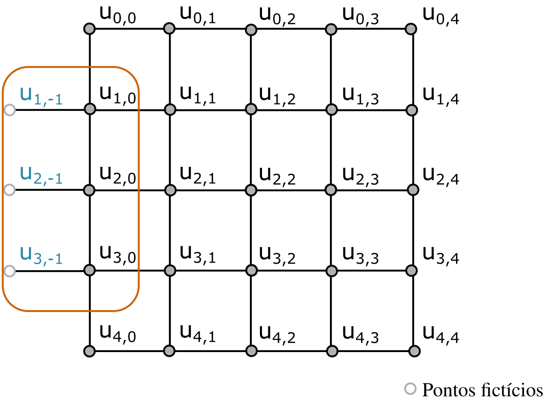
$$4u_{i,0} - u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - u_{i,1} - (2h\sigma_{i,0} + u_{i,1}) = h^2 f_{i,0}$$

$$4u_{i,0} - u_{i+1,0} - u_{i-1,0} - 2u_{i,1} = h^2 f_{i,0} + 2h\sigma_{i,0}$$

considerando $i = 1, 2, \cdots M - 1$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para os pontos dos cantos, precisamos de tratar tanto u_x quanto u_y. Tomando o caso geral:

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j}$$

Então, para cada quina do contorno, temos:

$$\begin{aligned}
(0,0) :& 4u_{0,0} - u_{1,0} - u_{-1,0} - u_{0,1} - u_{0,-1} = h^2 f_{0,0} \\
(0,N) :& 4u_{0,N} - u_{1,N} - u_{-1,N} - u_{0,N+1} - u_{i,N-1} = h^2 f_{0,N} \\
(M,0) :& 4u_{M,0} - u_{M+1,0} - u_{M-1,0} - u_{M,1} - u_{M,-1} = h^2 f_{M,0} \\
(M,N) :& 4u_{M,N} - u_{M+1,N} - u_{M-1,N} - u_{M,N+1} - u_{M,N-1} = h^2 f_{M,N}
\end{aligned}$$

Deste modo temos de tratar 8 pontos fictícios
$u_{-1,0}, u_{0,-1}, u_{-1,N}, u_{0,N+1}, u_{M+1,0}, u_{M,-1}, u_{M+1,N}, u_{M,N+1}$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para o ponto $(0,0)$ temos

$$4u_{0,0} - u_{1,0} - u_{-1,0} - u_{0,1} - u_{0,-1} = h^2 f_{0,0}$$

onde $u_{-1,0}$ e $u_{0,-1}$ devem ser aproximados com as relações já obtidas anteriormente:

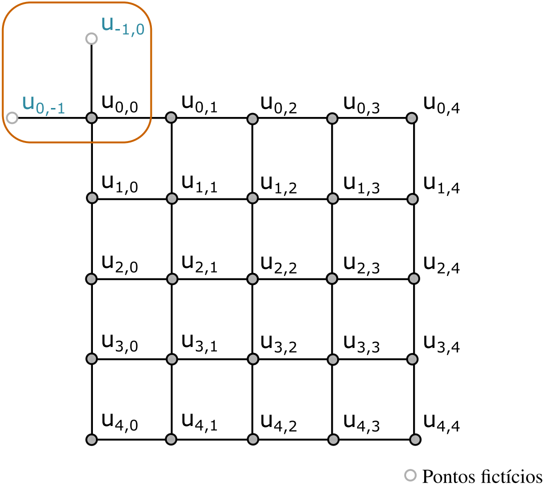
$$u_{-1,0} = 2h\sigma_{0,0} + u_{1,0}$$
$$u_{0,-1} = 2h\sigma_{0,0} + u_{0,1}$$

Substituindo os pontos fictícios, temos um *stencil* com 3 pontos

$$4u_{0,0} - u_{1,0} - (2h\sigma_{0,0} + u_{1,0}) - u_{0,1} - (2h\sigma_{0,0} + u_{0,1}) = h^2 f_{0,0}$$
$$4u_{0,0} - 2u_{1,0} - 2u_{0,1} = h^2 f_{0,0} + 4h\sigma_{0,0}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para o ponto $(0, N)$ temos

$$4u_{0,N} - u_{1,N} - u_{-1,N} - u_{0,N+1} - u_{i,N-1} = h^2 f_{0,N}$$

onde $u_{-1,N}$ e $u_{0,N+1}$ devem ser aproximados com as relações já obtidas anteriormente:

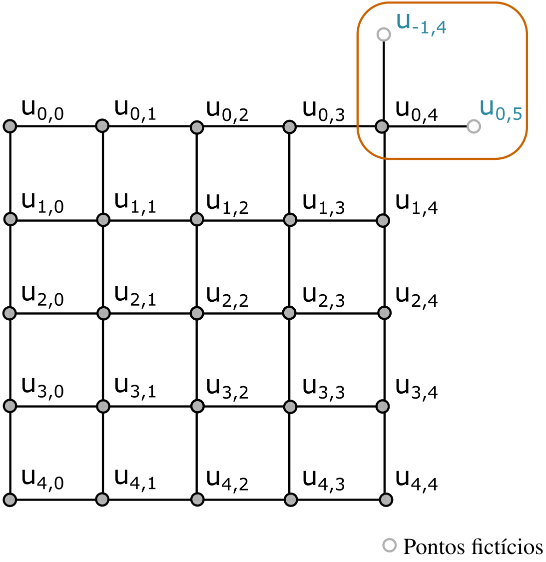
$$\begin{aligned} u_{-1,N} &= 2h\sigma_{0,N} + u_{1,N} \\ u_{0,N+1} &= 2h\sigma_{0,N} + u_{0,N-1} \end{aligned}$$

Substituindo os pontos fictícios, temos um *stencil* com 3 pontos

$$\begin{aligned} 4u_{0,N} - u_{1,N} - (2h\sigma_{0,N} + u_{1,N}) - (2h\sigma_{0,N} + u_{0,N-1}) - u_{i,N-1} &= h^2 f_{0,N} \\ 4u_{0,N} - 2u_{1,N} - 2u_{i,N-1} &= h^2 f_{0,N} + 4h\sigma_{0,N} \end{aligned}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para o ponto $(M, 0)$ temos

$$4u_{M,0} - u_{M+1,0} - u_{M-1,0} - u_{M,1} - u_{M,-1} = h^2 f_{M,0}$$

onde $u_{M+1,0}$ e $u_{M,-1}$ devem ser aproximados com as relações já obtidas anteriormente:

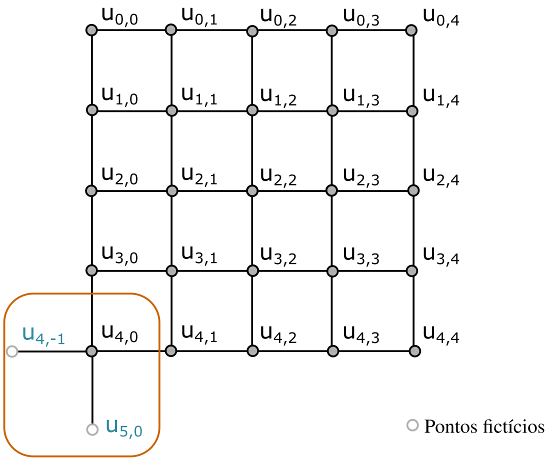
$$u_{M+1,0} = 2h\sigma_{M,0} + u_{M-1,0}$$
$$u_{M,-1} = 2h\sigma_{M,0} + u_{M,1}$$

Substituindo os pontos fictícios, temos um *stencil* com 3 pontos

$$4u_{M,0} - (2h\sigma_{M,0} + u_{M-1,0}) - u_{M-1,0} - u_{M,1} - (2h\sigma_{M,0} + u_{M,1}) = h^2 f_{M,0}$$
$$4u_{M,0} - 2u_{M-1,0} - 2u_{M,1} = h^2 f_{M,0} + 4h\sigma_{M,0}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para o ponto (M, N) temos

$$4u_{M,N} - u_{M+1,N} - u_{M-1,N} - u_{M,N+1} - u_{M,N-1} = h^2 f_{M,N}$$

onde $u_{M+1,N}$ e $u_{M,N+1}$ devem ser aproximados com as relações já obtidas anteriormente:

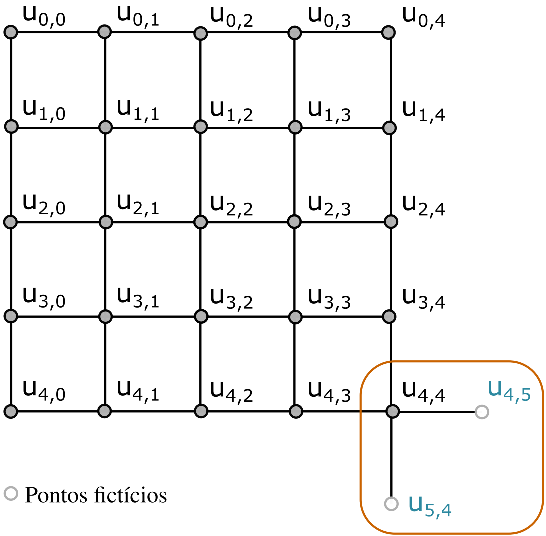
$$\begin{aligned} u_{M+1,N} &= 2h\sigma_{M,N} + u_{M-1,N} \\ u_{M,N+1} &= 2h\sigma_{M,N} + u_{M,N-1} \end{aligned}$$

Substituindo os pontos fictícios, temos um *stencil* com 3 pontos

$$\begin{aligned} 4u_{M,N} - (2h\sigma_{M,N} + u_{M-1,N}) - u_{M-1,N} - (2h\sigma_{M,N} + u_{M,N-1}) - u_{M,N-1} &= h^2 f_{M,N} \\ 4u_{M,N} - 2u_{M-1,N} - 2u_{M,N-1} &= h^2 f_{M,N} + 4h\sigma_{M,N} \end{aligned}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Desenvolvendo o sistema linear para a primeira coluna:

$$i = 0, j = 0 : 4u_{0,0} - 2u_{1,0} - 2u_{0,1} = h^2 f_{0,0} + 4h\sigma_{0,0}$$
$$i = 1, j = 0 : 4u_{1,0} - u_{0,0} - 2u_{1,1} - u_{2,0} = h^2 f_{1,0} + 2h\sigma_{1,0}$$
$$i = 2, j = 0 : 4u_{2,0} - u_{1,0} - 2u_{2,1} - u_{3,0} = h^2 f_{2,0} + 2h\sigma_{2,0}$$
$$i = 3, j = 0 : 4u_{3,0} - u_{2,0} - 2u_{3,1} - u_{4,0} = h^2 f_{3,0} + 2h\sigma_{3,0}$$
$$i = 4, j = 0 : 4u_{4,0} - 2u_{3,0} - 2u_{4,1} = h^2 f_{4,0} + 4h\sigma_{4,0}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ u_{40} \\ u_{01} \\ u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ u_{02} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ u_{03} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \\ u_{04} \\ u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{2,0} \\ f_{3,0} \\ f_{4,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4h\sigma_{0,0} \\ 2h\sigma_{1,0} \\ 2h\sigma_{2,0} \\ 2h\sigma_{3,0} \\ 4h\sigma_{4,0} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Desenvolvendo o sistema linear para a segunda coluna:

$$i = 0, j = 1 : 4u_{0,1} - u_{0,0} - 2u_{1,1} - u_{0,2} = h^2 f_{0,1} + 2h\sigma_{0,1}$$
$$i = 1, j = 1 : 4u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} - u_{2,1} - u_{1,2} = h^2 f_{1,1}$$
$$i = 2, j = 1 : 4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{2,0} - u_{3,1} - u_{2,2} = h^2 f_{2,1}$$
$$i = 3, j = 1 : 4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,0} - u_{4,1} - u_{3,2} = h^2 f_{3,1}$$
$$i = 4, j = 1 : 4u_{4,1} - 2u_{3,1} - u_{4,0} - u_{4,2} = h^2 f_{4,1} + 2h\sigma_{4,1}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ u_{40} \\ u_{01} \\ u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ u_{02} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ u_{03} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \\ u_{04} \\ u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{bmatrix}
= h^2 \begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{2,0} \\ f_{3,0} \\ f_{4,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{4,1} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 4h\sigma_{0,0} \\ 2h\sigma_{1,0} \\ 2h\sigma_{2,0} \\ 2h\sigma_{3,0} \\ 4h\sigma_{4,0} \\ 2h\sigma_{0,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2h\sigma_{4,1} \end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

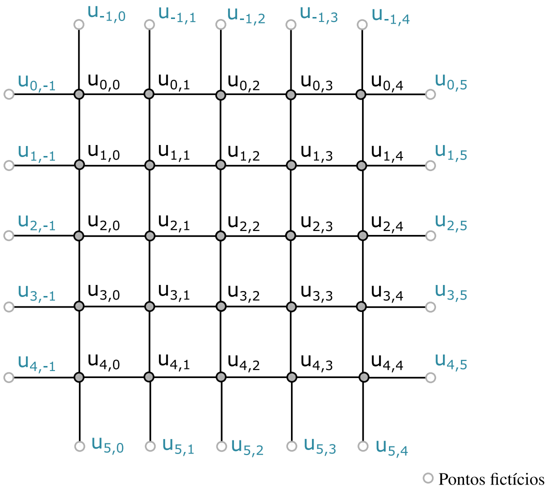
Problema de Neumann

Procedendo de maneira análoga para cada coluna do domínio

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4&-2&0&0&0\\ -1&4&-1&0&0\\ 0&-1&4&-1&0\\ 0&0&-1&4&-1\\ 0&0&0&-2&4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -2&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0\\ 0&0&-2&0&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&-2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 4&-2&0&0&0\\ -1&4&-1&0&0\\ 0&-1&4&-1&0\\ 0&0&-1&4&-1\\ 0&0&0&-2&4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 4&-2&0&0&0\\ -1&4&-1&0&0\\ 0&-1&4&-1&0\\ 0&0&-1&4&-1\\ 0&0&0&-2&4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 4&-2&0&0&0\\ -1&4&-1&0&0\\ 0&-1&4&-1&0\\ 0&0&-1&4&-1\\ 0&0&0&-2&4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -2&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0\\ 0&0&-2&0&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&-2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 4&-2&0&0&0\\ -1&4&-1&0&0\\ 0&-1&4&-1&0\\ 0&0&-1&4&-1\\ 0&0&0&-2&4 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ u_{30}\\ u_{40}\\ u_{01}\\ u_{11}\\ u_{21}\\ u_{31}\\ u_{41}\\ u_{02}\\ u_{12}\\ u_{22}\\ u_{32}\\ u_{42}\\ u_{03}\\ u_{13}\\ u_{23}\\ u_{33}\\ u_{43}\\ u_{04}\\ u_{14}\\ u_{24}\\ u_{34}\\ u_{44} \end{bmatrix}
= h^2
\begin{bmatrix} f_{0,0}\\ f_{1,0}\\ f_{2,0}\\ f_{3,0}\\ f_{4,0}\\ f_{0,1}\\ f_{1,1}\\ f_{2,1}\\ f_{3,1}\\ f_{4,1}\\ f_{0,2}\\ f_{1,2}\\ f_{2,2}\\ f_{3,2}\\ f_{4,2}\\ f_{0,3}\\ f_{1,3}\\ f_{2,3}\\ f_{3,3}\\ f_{4,3}\\ f_{0,4}\\ f_{1,4}\\ f_{2,4}\\ f_{3,4}\\ f_{4,4} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 4h\sigma_{0,0}\\ 2h\sigma_{1,0}\\ 2h\sigma_{2,0}\\ 2h\sigma_{3,0}\\ 4h\sigma_{4,0}\\ 2h\sigma_{0,1}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 2h\sigma_{4,1}\\ 2h\sigma_{0,2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 2h\sigma_{4,2}\\ 2h\sigma_{0,3}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 2h\sigma_{4,3}\\ 4h\sigma_{0,4}\\ 2h\sigma_{1,4}\\ 2h\sigma_{2,4}\\ 2h\sigma_{3,4}\\ 4h\sigma_{4,4} \end{bmatrix}
$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann



EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Para generalizar, vamos focar na equação da i-ésima coluna da malha. Uma vez que as incógnitas desta coluna estão relacionadas somente com as incógnitas das duas colunas vizinhas.

$$-\boldsymbol{U_{i-1}} + B\boldsymbol{U_i} - \boldsymbol{U_{i+1}} = h^2\boldsymbol{f_i} + h\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{i},$$

onde B é a seguinte matriz tridiagonal $M \times M$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -2 & 4 \end{bmatrix}_{M\times M}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

O vetor

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 2\sigma_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\sigma_{M,i} \end{bmatrix}$$

representa os contornos do topo e base.
Além disso, quando $i = 0$ ou $i = M$ as condições de contorno da esquerda e direita devem ser aplicadas, então

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 4\alpha_{0,0} \\ 2\alpha_{1,0} \\ \vdots \\ 2\alpha_{M-1,0} \\ 4\alpha_{M,0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_M = \begin{bmatrix} 4\alpha_{0,M} \\ 2\alpha_{1,M} \\ \vdots \\ 2\alpha_{M-1,M} \\ 4\alpha_{M,M} \end{bmatrix}$$

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

Finalmente, o método das diferenças finitas para este problema pode ser expressado da forma

$$A\boldsymbol{U} = h^2\boldsymbol{F} + h\boldsymbol{\sigma},$$

onde A é uma matriz $M^2 \times M^2$ e as incógnitas e o lado direito da equação $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M^2}$
A tem o seguinte formato tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} B & -2I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -2I & B \end{bmatrix}_{M^2 \times M^2}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $M \times M$.

EDPs Elípticas

Problema de Neumann

O vetor **F** é dado por:

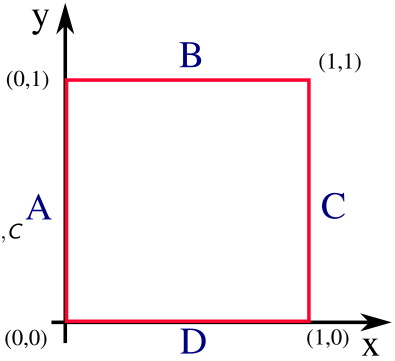
$$F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_0 \\ \boldsymbol{f}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{M-1} \\ \boldsymbol{f}_M \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Problema de condição de contorno mista

Resolver o seguinte problema de Poisson

$$\begin{cases} \nabla^2 u = cos(2\pi x) & \text{para } \Omega \\ u = 0 & \text{para } \partial\Omega_D \\ \nabla u \cdot \vec{n} = 0 & \text{para } \partial\Omega_{A,B,C} \end{cases}$$



EDPs Elípticas

Problema de condição de contorno mista

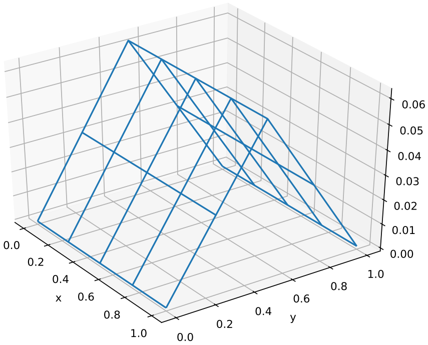
Tomando $h = 0.25$ obtemos o seguinte sistema linear

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-4&2&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&2&-4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-4&2&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&2&-4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-4&2&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&2&-4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-4&2&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\0&1&-4&1&0\\0&0&1&-4&1\\0&0&0&2&-4\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\\u_{40}\\u_{01}\\u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{41}\\u_{02}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{42}\\u_{03}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\\u_{43}\\u_{04}\\u_{14}\\u_{24}\\u_{34}\\u_{44}\end{bmatrix}
= (0.25)^2
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}
$$

Exemplo Resolvido

Problema de condição de contorno mista

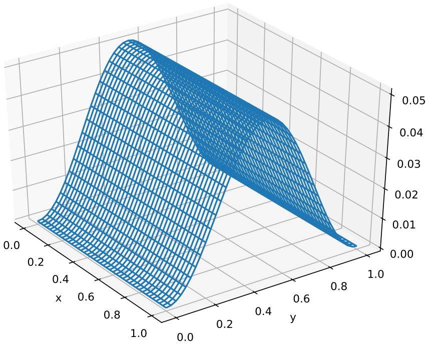
Solução do problema considerando $h = 0.25$



Exemplo Resolvido

Problema de condição de contorno mista

Ao refinar a malha para $h = 0.025$, obtemos a seguinte solução



EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

- Conforme discutido anteriormente, embora seja convencional representar os sistemas lineares no formato de matriz vetor, não é sempre necessário fazer isto.
- Podemos notar que para o caso geral a matriz A é de tamanho $M^2 \times M^2$, *i.e.* conforme o domínio é refinado essa matriz cresce quadraticamente.
- Em alguns métodos iterativos, nos quais não é obrigatório montar a matriz A, podemos trabalhar apenas com os termos não nulos das equações do sistema linear.

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

- O sistema de equações lineares $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pode ser resolvido por um processo que gera a partir de um vetor inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ uma sequência de vetores $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$, $\boldsymbol{x}^{(3)}$, ..., $\boldsymbol{x}^{(k)}$ que deve convergir para a solução.
- Existem muitos métodos iterativos para a solução de sistemas lineares, entretanto só iremos estudar os chamados **métodos iterativos estacionários**.
- Algumas perguntas importantes são:
  - Como construir a sequência $\{\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}\}$?
  - Ele converge para a solução, ou seja, $\boldsymbol{x}^{(k)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}$?
  - Quais são as condições para convergência?
  - Como saber se $\boldsymbol{x}^{(k)}$ está próximo de $\hat{\boldsymbol{x}}$?
  - Critério de parada?

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

- Um método iterativo escrito na forma

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

  é dito *estacionário* quando a matriz $\boldsymbol{B}$ for fixa durante o processo iterativo.
- Veremos como construir a matriz $\boldsymbol{B}$ para cada um dos métodos que iremos estudar: **Jacobi** e **Gauss-Seidel**.
- Antes, é preciso rever alguns conceitos como norma de vetores e matrizes, os quais serão importantes no desenvolvimento do critério de parada e na análise de convergência dos métodos.

Normas de Vetores

Para discutir o erro envolvido nas aproximações é preciso associar a cada vetor e matriz um valor escalar não negativo que de alguma forma mede sua magnitude. As normas para vetores mais comuns são:

- Norma euclideana (ou norma L_2)

$$||\boldsymbol{x}||_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

- Norma infinito (ou norma do máximo)

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Normas vetoriais devem satisfazer às seguintes propriedades:

1. $||\boldsymbol{x}|| > 0$ se $\boldsymbol{x} \neq 0$, $||\boldsymbol{x}|| = 0$ se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $||\alpha\boldsymbol{x}|| = |\alpha|||\boldsymbol{x}||$, onde α é um escalar
3. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$

Critério de Parada

- A distância entre dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pode ser calculada como

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2 \quad \text{ou} \quad ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_\infty$$

- Para o caso da norma infinita podemos adotar o seguinte critério de parada

$$\frac{||\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}||_\infty}{||\boldsymbol{x}^{(k+1)}||_\infty} = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|} < \varepsilon$$

  onde $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})}$ e $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}$ são duas aproximações consecutivas para o vetor solução $\hat{\boldsymbol{x}}$ de um sistema de equações lineares, ε é a precisão desejada (Ex: 10^{-3}).

- Por outro lado, também é conveniente adotar um número máximo de iterações para evitar que o programa execute indefinidamente, caso o método não convirja para um determinado problema.

$$k < k_{max}$$

Método de Jacobi

Vamos ilustrar a ideia do método de Jacobi através de um exemplo.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}$$

o qual pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}\\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}\\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}
\end{aligned}$$

A partir de uma aproximação inicial

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi

Calculamos uma nova aproximação $\boldsymbol{x}^{(1)}$ através de

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)/a_{11}\\
x_2^{(1)} &= \left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)/a_{22}\\
x_3^{(1)} &= \left(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right)/a_{33}
\end{aligned}
$$

Após obter $\boldsymbol{x}^{(1)}$, calculamos $\boldsymbol{x}^{(2)}$ substituindo $\boldsymbol{x}^{(1)}$ no lugar de $\boldsymbol{x}^{(0)}$ na expressão anterior e assim procedemos até que o critério de parada seja satisfeito.

Método de Jacobi

Para um sistema de n equações e n incógnitas, a cada passo k, temos:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii} \qquad (2)$$

Convergência do método de Jacobi

Seja o sistema linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, podemos verificar o critério de convergência do método por 2 maneiras equivalentes:

- Critério das Linhas
  Seja $\alpha_k = \displaystyle\sum_{j=1, i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$, para $k = 1 \cdots n$.
  Se $\alpha = \max\{\alpha_k\} < 1$, então o método de Jacobi converge independentemente da aproximação inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$.
- Diagonal dominante:
  Se $\boldsymbol{A}$ é estritamente diagonalmente dominante o método de Jacobi converge independentemente da aproximação inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1 \cdots n$$

Maiores detalhes sobre o critério de convergência pode ser encontrados em Franco (2006).

Método de Gauss-Seidel

- Observe que o método de Jacobi, não usa os valores atualizados de $\boldsymbol{x}^{(k)}$ até completar por inteiro a iteração do passo k.
- O método de Gauss-Seidel pode ser visto como uma modificação do método de Jacobi. Nele usaremos a mesma forma de iterar que o método de Jacobi, entretanto vamos aproveitar os cálculos já atualizados, de outras componentes, para atualizar a componente que está sendo calculada.
- Dessa forma o valor de $x_1^{(k+1)}$ será usado para calcular $x_2^{(k+1)}$, os valores de $x_1^{(k+1)}$ e $x_2^{(k+1)}$ serão usados para calcular $x_3^{(k+1)}$, e assim por diante.

Método de Gauss-Seidel

Para um sistema 3×3 temos o seguinte esquema:

$$x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \right) / a_{11}$$
$$x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \right) / a_{22}$$
$$x_3^{(k+1)} = \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \right) / a_{33}$$

Generalizando, obtemos:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) \Bigg/ a_{ii}$$

Convergência do método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel converge se satisfazer o **critério das linhas (ou seu equivalente diagonal dominante)** ou

- **Critério de Sassenfeld**

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

onde β_i são calculados como

$$\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right)$$

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Novamente, seja a equação de Poisson em 2D

$$-\nabla^2 u = f \text{ em } \Omega$$

Formulando em um problema bem-posto com condição de contorno mista de Dirichlet e Neunann, temos as seguintes condições de contorno:

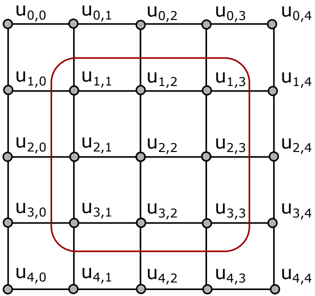
$$u = \alpha \text{ em } \partial\Omega_A$$
$$\nabla u \cdot \vec{n} = \sigma \text{ em } \partial\Omega_B$$

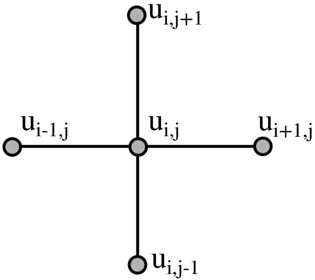
EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Os pontos internos podem ser aproximados por um *stencil* de 5-pontos

$$-(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) = h^2 f_{i,j}$$





EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Para evitar a necessidade de montar a matriz A, podemos aplicar diretamente a ideia do método de Jacob (ou Gauss-Seidel) na forma discreta da equação de Poisson, isto é:

$$-(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) = h^2 f_{i,j}$$

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + h^2 f_{i,j}}{4}$$

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Deste modo, podemos reescrever esta equação na forma de um método iterativo

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j}^{(k)}}{4}$$

Este é o método de Jacob para resolver o problema de Poisson descrito anteriormente. Para este problema ele irá convergir para qualquer estimativa inicial $\boldsymbol{u}^{\mathbf{0}}$

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Um trecho de uma implementação em Python do método de Jacob para resolver este problema

```
while (k < k_max):
  for i in range(tam):
    for j in range(tam):
      ...
      u_new[i,j] = (u[i+1,j]+ u[i-1,j] + u[i,j+1] + u[i,j
    -1] + f[i,j]*h**2)/4.0
  k=k+1
  u = np.copy(u_new)
```

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

Note que, ao implementar este código, alguém poderia se esquecer de incluir a variável `u_new`, resultando na seguinte implementação

```
while (k < k_max):
  for i in range(tam):
    for j in range(tam):
      ...
      u[i,j] = (u[i+1,j]+ u[i-1,j] + u[i,j+1] + u[i,j-1]
    + f[i,j]*h**2)/4.0
  k=k+1
```

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos

- Esta implementação não dará o mesmo resultado que a anterior, pois no método de Jacob nós devemos calcular os novos valores de `u` baseado exclusivamente nos dados da última iteração.
- Nesta segunda implementação os valores de `u[i-1,j]` e `u[i,j-1]` já estão atualizados antes de atualizar o valor de `u[i,j]`
- O segundo código corresponde a seguinte implementação

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j}^{(k)}}{4}$$

- E este é o **método de Gauss-Seidel**, este programador teria a sorte de seu erro resultar em um método com convergência até 2 vezes mais rápida

EDPs Elípticas

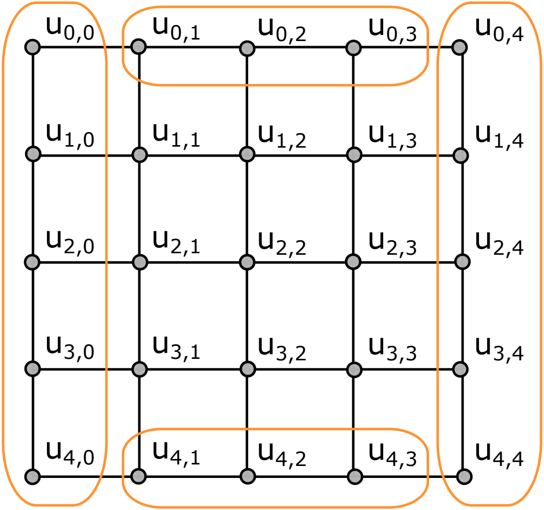
Métodos Iterativos - Dirichlet

Note que que as condições de contorno do tipo Dirichlet são diretamente implementadas

$$
\begin{aligned}
u_{0,j} &= \hat{u}_{0,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{M,j} &= \hat{u}_{M,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{i,0} &= \hat{u}_{i,0} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M \\
u_{i,N} &= \hat{u}_{i,N} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M
\end{aligned}
$$

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos - Dirichlet



EDPs Elípticas

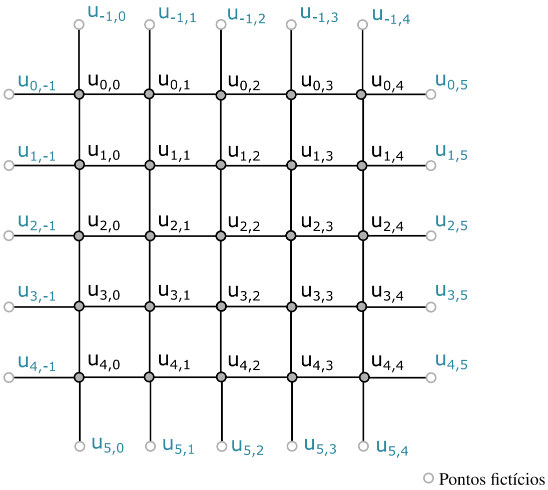
Métodos Iterativos - Neumann

E as condições de contorno do tipo Neumann, conforme discutidas anteriormente, podem ser obtidas pela a aproximação em pontos fictícios com as expressões abaixo:

$$
\begin{aligned}
u_{-1,j} &= 2h\sigma_{0,j} + u_{1,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{M+1,j} &= 2h\sigma_{M,j} + u_{M-1,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{i,N+1} &= 2h\sigma_{i,N} + u_{i,N-1} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M \\
u_{i,-1} &= 2h\sigma_{i,0} + u_{i,1} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M
\end{aligned}
$$

EDPs Elípticas

Métodos Iterativos - Neumann

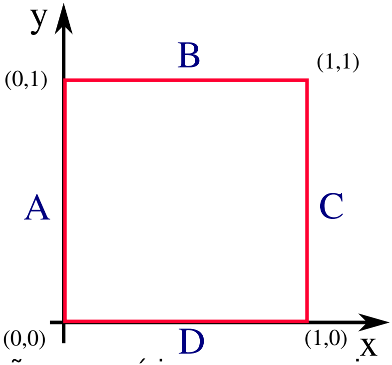


EDPs Elípticas

Exercício

1) Utilizando os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \text{para } \Omega \\ u = 75 & \text{para } \partial\Omega_A \\ u = 100 & \text{para } \partial\Omega_B \\ u = 50 & \text{para } \partial\Omega_C \\ \nabla u \cdot \vec{n} = 0 & \text{para } \partial\Omega_D \end{cases}$$



Compare o número de iterações necessárias para convergir com um erro relativo de 10^{-8} e $h = 0.1$

Conteúdo

EDPs Parabólicas

Introdução

Seja a seguinte EDP conhecida por equação de reação-difusão (ou equação de calor quando $f = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \kappa \nabla u + f \text{ em } \Omega \times I$$

em um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$ Para formular em um problema bem-posto é necessário incluir condição inicial e de contorno, *i.e.*:

$$\begin{cases} \delta u + \eta \nabla u \cdot \vec{n} = \alpha \text{ em } \partial\Omega \times I \\ u(.,0) = \gamma \text{ em } \Omega \end{cases}$$

onde $\alpha : \Omega \times I \to \mathbb{R}^+$ é a solução prescrita (Dirichlet) ou fluxo (Neumann ou Robin), dependendo da escolha de δ e η, com $\vec{n}$ sendo o vetor normal à Ω

EDPs Parabólicas

Problema difusivo

Para iniciar a abordagem sobre EDPs parabólicas, vamos discretizar a equação de reação-difusão em um domínio unidimensional no espaço. Além disso, por simplicidade vamos tomar $\kappa = 1$, mas também vamos discutir como o problema se adéqua para outros valores.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo

- Conforme já discutimos anteriormente, na pratica vamos aplicar regras aproximações em diferenças finitas para obter um conjunto de equações discretas
- Para resolver este primeiro exemplo, vamos tomar uma grade com pontos (x_i, t_n), onde:

$$x_i = ih_x + x_0 \quad t_n = nh_t + t_0$$

  onde h_x é a distância entre pontos igualmente espaçados no eixo x e h_t é o passo de tempo.
- Vamos adotar aqui a seguinte notação para representar a aproximação numérica:

$$u_i^n \approx u(x_i, t_n)$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo - Explícito

Assim como no problema elíptico, vamos tomar uma diferença centrada na deriva de 2ª ordem em relação ao espaço, ou seja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}$$

Para discretizar a derivada em relação ao tempo, vamos tomar inicialmente uma diferença progressiva. Deste modo poderemos obter um esquema explicito. Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{h_t}$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo - Explícito

Aplicando as relações anteriores no problema em questão, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2} + f_i^n$$

Reorganizando os termos, podemos obter um esquema explicito:

$$u_i^{n+1} = h_t \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2} + f_i^n \right) + u_i^n$$

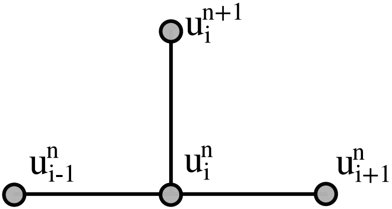
EDPs Parabólicas

Problema difusivo - Explícito

A fim de simplificar a notação iremos omitir sobrescrito n, destacando apenas o $n+1$, ou seja:

$$u_i^{n+1} = h_t \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} + f_i \right) + u_i$$

Este esquema explicito possui ordem de convergência $O(h_x^2, h_t)$ e é comumente representado pelo seguinte *stencil*:



EDPs Parabólicas

Estabilidade - Condição de CFL

Para garantir que este método numérico seja estável, precisamos garantir a seguinte restrição

$$\kappa \frac{h_t}{h_x^2} \leq \frac{1}{2},$$

onde κ é a taxa de difusão e foi considerada 1 por simplicidade.

Está é uma restrição severa, o tamanho do passo de tempo precisa decrescer a uma taxa de h_x^2 conforme refinamos a malha para garantir que este método seja estável. Maiores detalhes sobre isto podem ser encontrados em LeVeque (2007)

EDPs Parabólicas

Condição de Dirichlet

Note que que as condições de contorno do tipo Dirichlet são diretamente implementadas

$$u_0 = \hat{u}_0$$
$$u_M = \hat{u}_M$$

onde $\hat{u}_{0,j}$ e $\hat{u}_{M,j}$ são os valores das condições nos 2 pontos do contorno unidimensional.

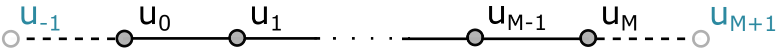
EDPs Parabólicas

Condição de Neumann

E as condições de contorno do tipo Neumann, conforme discutidas anteriormente, podem ser obtidas pela a aproximação em pontos fictícios com as expressões abaixo:

$$u_{-1} = 2h\sigma_0 + u_1$$
$$u_{M+1} = 2h\sigma_M + u_{M-1}$$

onde σ_0 e σ_M são os valores das condições nos 2 pontos do contorno unidimensional, e u_{-1} e u_{M+1} são os pontos fictícios.



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Resolva o seguinte problema difusivo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ u(x,0) = \begin{cases} 50 \text{ para } x \in [0.4, 0.6] \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

considerando $t \in (0,1]$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Discretizando o problema proposto, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} = 0.1\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_1^n - 2u_0^n + 2h_x\sigma_0 + u_1^n) + u_0^n & \text{para } i = 0 \\ \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n & \text{para } i = 1 \cdots M-1 \\ \frac{0.1h_t}{h_x^2}(2h_x\sigma_M + u_{M-1}^n - 2u_M^n + u_{M-1}^n) + u_M^n & \text{para } i = M \end{cases}$$

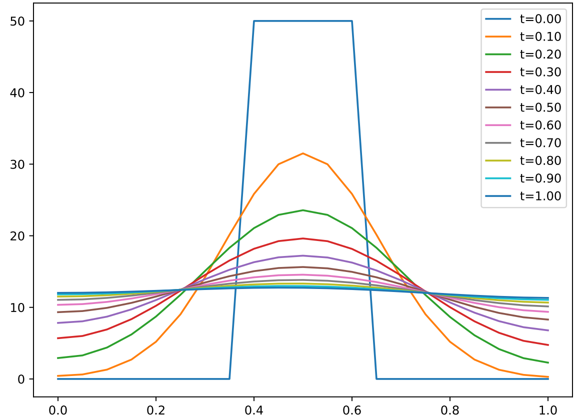
Considerando $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$:

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_1^n - 2u_0^n + u_1^n) + u_0^n & \text{para } i = 0 \\ \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n & \text{para } i = 1 \cdots M-1 \\ \frac{0.1h_t}{h_x^2}(u_{M-1}^n - 2u_M^n + u_{M-1}^n) + u_M^n & \text{para } i = M \end{cases}$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Considerando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.001$ temos:



EDPs Parabólicas

Exercício

1) Resolva o seguinte problema difusivo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.001(50 - u) \text{ para } x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ u = 75 \text{ para } x = 1 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

considerando $t \in (0,1]$, $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.001$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo

- Essa abordagem possui a vantagem de ser uma estratégia explícita de obtenção da solução deste tipo de EDP
- Por outro lado é um método condicionalmente estável e muita vezes demanda um h_t muito pequeno para garantir a solução correta
- Além disso, possui ordem de convergência $O(h_t)$, ou seja linear no tempo.

EDPs Parabólicas

Problema difusivo - Crank–Nicolson

Outro método de passo único que, na prática, acaba sendo muito mais utilizado é o *Crank–Nicolson*

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2[u]^n + \delta^2[u]^{n+1}}{h_x^2} + f_i^n + f_i^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + f_i^n + f_i^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita na seguinte forma:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{h_t}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + f_i^n + f_i^{n+1}\right)$$

EDPs Parabólicas

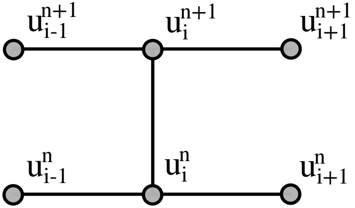
Problema difusivo - Crank–Nicolson

Podemos, ainda, reescrever separando as incógnitas dos valores conhecidos da seguinte forma

$$-ru_{i-1}^{n+1}+(1+2r)u_i^{n+1}-ru_{i+1}^{n+1}=ru_{i-1}^{n}+(1-2r)u_i^{n}+ru_{i+1}^{n}+f^*,$$

onde $r=h_t/(2h_x^2)$ e $f^*=\frac{1}{2}(f_i^n+f_i^{n+1})$ e o termo f_i^{n+1} deve ser reorganizado na equação conforme for a dependência de u.

Este é um método implícito com convergência $O(h_x^2,h_t^2)$ e é geralmente representando pelo seguinte *stencil*



EDPs Parabólicas

Problema difusivo - Crank–Nicolson

- O método de Crank–Nicolson é baseado na regra do trapézio (ou ponto médio) o que lhe dá ordem de convergência quadrática no tempo.
- Aplicando uma diferença centrada da derivada em relação ao espaço podemos garantir um método de ordem $O(h_x^2, h_t^2)$
- Para uma equação de calor (ou de difusão) pode ser mostrado que ele é um método incondicionalmente estável (LeVeque, 2007)

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Vamos tomar como exemplo a equação de calor unidimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \Omega \times I \\ u = \sigma \text{ em } \partial\Omega \times I \\ u(.,0) = \gamma \text{ em } \Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Aplicando a estratégia de Crank–Nicolson neste modelo matemático, obtemos:

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^{n} + (1-2r)u_i^{n} + ru_{i+1}^{n},$$

onde $r = \kappa h_t/(2h_x^2)$.

Este é um método implícito e resulta em um sistema linear tridiagonal para os valores de u_i^{n+1}.

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Na forma matricial $\boldsymbol{A}u = F$ possui o seguinte caso geral

$$
\begin{bmatrix}
(1+2r) & -r & & & & \\
-r & (1+2r) & -r & & & \\
 & -r & (1+2r) & -r & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & -r & (1+2r) & -r \\
 & & & & -r & (1+2r)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{m-1}^{n+1} \\ u_m^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r(\sigma_A^n + \sigma_A^{n+1}) + (1-2r)u_1^n + ru_2^n \\
ru_1^n + (1-2r)u_2^n + ru_3^n \\
ru_2^n + (1-2r)u_3^n + ru_4^n \\
\vdots \\
ru_{m-2}^n + (1-2r)u_{m-1}^n + ru_m^n \\
ru_{m-1}^n + (1-2r)u_1^n + r(\sigma_B^n + \sigma_B^{n+1})
\end{bmatrix}
$$

onde σ_A e σ_B as condições nos 2 contornos do domínio.

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Vale notar que

$$\delta^2[u]_h = \frac{\delta^2[u]}{h^2} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

Então o método de Crank–Nicolson, na forma matricial, pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\left(I - \frac{\kappa h_t}{2}\delta^2[u]_{h_x}\right) u_i^{n+1} = \left(I + \frac{\kappa h_t}{2}\delta^2[u]_{h_x}\right) u_i^n$$

Ou seja a matriz A deste método pode ser obtida a partir da matriz para $\delta^2[u]_h$ (Caso Elíptico) da seguinte maneira

$$A = I - \frac{\kappa h_t}{2}\delta^2[u]_{h_x}$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Então definindo valores para κ e para as condições inicial e de contorno, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \Omega \times I \\ u = 10 \text{ em } \partial\Omega_A \times I \\ u = 70 \text{ em } \partial\Omega_B \times I \\ u(.,0) = 0 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Discretizando o problema proposto utilizando Crank–Nicolson, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^{n} + (1-2r)u_i^{n} + ru_{i+1}^{n},$$

onde $r = 0.1h_t/(2h_x^2)$.
Podemos montar a matriz e resolver o sistema ou utilizar alguma estrategia iterativa.

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

- Podemos montar a matriz e resolver o sistema ou utilizar alguma estrategia iterativa.
- Resolvendo utilizando o método de Gauss-Seidel, precisamos reescrever a equação na forma iterativa.

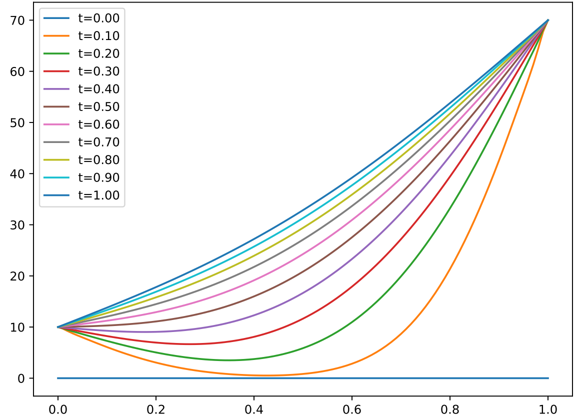
$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^{n} + (1-2r)u_i^{n} + ru_{i+1}^{n}$$

$$u_i^{n+1} = (ru_{i-1}^{n} + (1-2r)u_i^{n} + ru_{i+1}^{n} + ru_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})/(1+2r)$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Considerando $h_x = 0.01$ e $h_t = 0.01$ obtemos a seguinte solução



EDPs Parabólicas

Exercício

1) Resolva o seguinte problema difusivo utilizando a estratégia de Crank–Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ u(x,0) = \begin{cases} 50 \text{ para } x \in [0.4, 0.6] \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

considerando $t \in (0,1]$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional

Em um domínio multidimensional a equação de reação-difusão toma a seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \kappa \nabla u + f \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional

Para iniciar a abordagem sobre EDPs parabólicas multidimensionais, vamos discretizar a equação de reação-difusão em um domínio bidimensional no espaço. Além disso, por simplicidade vamos tomar $\kappa = 1$, mas também vamos discutir como o problema se adéqua para outros valores.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional

- Conforme já discutimos no caso unidimensional, na pratica vamos aplicar regras aproximações em diferenças finitas para obter um conjunto de equações discretas
- Para resolver este primeiro exemplo, vamos tomar uma grade com pontos (x_i, y_j, t_n), onde:

$$x_i = ih_x \quad y_j = jh_y \quad t_n = nh_t$$

  onde h_x e h_y são as distâncias entre pontos igualmente espaçados nos eixo x e y, respectivamente; e h_t é o passo de tempo.
- Vamos adotar aqui a seguinte notação para representar a aproximação numérica:

$$u_{i,j}^n \approx u(x_i, y_j, t_n)$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional

Assim como no problema elíptico, vamos tomar uma diferença centrada na deriva de 2^a ordem em relação ao espaço, ou seja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

Considerando $h_x = h_y = h$ e aplicando estas relações para discretizar o operador laplaciano bidimensional, temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\ &\approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}\end{aligned}$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional - Explícito

Para discretizar a derivada em relação ao tempo, vamos tomar inicialmente uma diferença progressiva. Deste modo poderemos obter um esquema explicito. Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^{n}}{h_t}$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional - Explícito

Aplicando as relações anteriores no problema em questão, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{h_t} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} + f_{i,j}^{n}$$

Reorganizando os termos, podemos obter um esquema explicito:

$$u_{i}^{n+1} = h_t \left(\frac{u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n} - 4u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{h^2} + f_{i,j}^{n} \right) + u_{i,j}^{n}$$

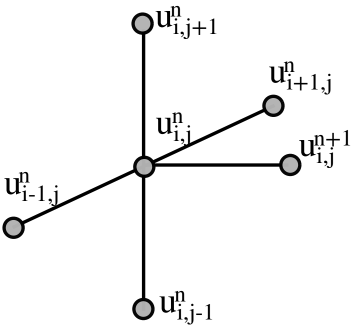
EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional - Explícito

A fim de simplificar a notação iremos omitir sobrescrito n, destacando apenas o $n+1$, ou seja:

$$u_i^{n+1} = h_t \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} + f_{i,j} \right) + u_{i,j}$$

Este esquema explicito possui ordem de convergência $O(h^2, h_t)$ e é comumente representado pelo seguinte *stencil* de 6-pontos



EDPs Parabólicas

Estabilidade 2D - Condição de CFL

Para garantir que este método numérico seja estável, precisamos garantir a seguinte restrição

$$\kappa h_t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \leq \frac{1}{2},$$

onde κ é a taxa de difusão que foi considerada 1 por simplicidade. Maiores detalhes sobre isto podem ser encontrados em LeVeque (2007)

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional - Crank–Nicolson

Se considerarmos a discretização no tempo pelo método trapezoidal, iremos obter a versão bidimensional do método de Crank–Nicolson

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{h_t} = \frac{1}{2}\left(\delta^2[u]_h^n + \delta^2[u]_h^{n+1} + f_{i,j}^{n} + f_{i,j}^{n+1}\right)$$

onde $\delta^2[u]$ é o operador de diferença centrada em um domínio bidimensional, dado por:

$$\delta^2[u]_h = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

EDPs Parabólicas

Problema difusivo multidimensional - Crank–Nicolson

Podemos reescrever a equação na seguinte forma:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \frac{h_t}{2}\left(\delta^2[u]_h^n + \delta^2[u]_h^{n+1} + f_{i,j}^{n} + f_{i,j}^{n+1}\right)$$

Ou ainda na forma matricial de um sistema linear

$$\left(I - \frac{h_t}{2}\delta^2[u]_h\right)u_{i,j}^{n+1} = \left(I + \frac{h_t}{2}\delta^2[u]_h\right)u_{i,j}^{n} + f_{i,j}^{*}$$

onde $\delta^2[u]_h$ é uma matriz com o mesmo padrão do caso elíptico, $f_{i,j}^{*} = f_{i,j}^{n} + f_{i,j}^{n+1}$ podendo $f_{i,j}^{n+1}$ ficar do lado esquerdo da equação caso f seja uma função dependente de u.

EDPs Parabólicas

Condição de Dirichlet

Note que que as condições de contorno do tipo Dirichlet são diretamente implementadas

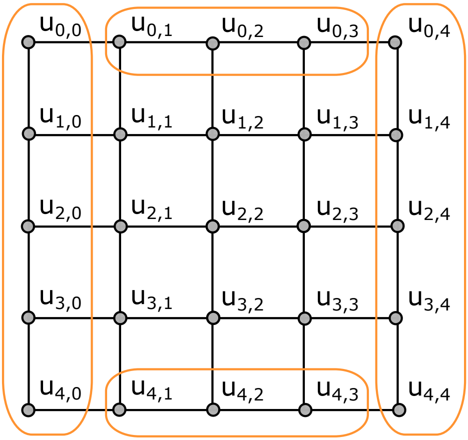
$$
\begin{aligned}
u_{0,j} &= \hat{u}_{0,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{M,j} &= \hat{u}_{M,j} && \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{i,0} &= \hat{u}_{i,0} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M \\
u_{i,N} &= \hat{u}_{i,N} && \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M
\end{aligned}
$$

onde $\hat{u}_{0,j}$, $\hat{u}_{M,j}$, $\hat{u}_{i,0}$ $\hat{u}_{i,N}$ são os valores das condições nos pontos do contorno do domínio.

EDPs Parabólicas

Condição de Dirichlet multidimensional

Para um domínio tomando $N = M = 4$



EDPs Parabólicas

Condição de Neumann multidimensional

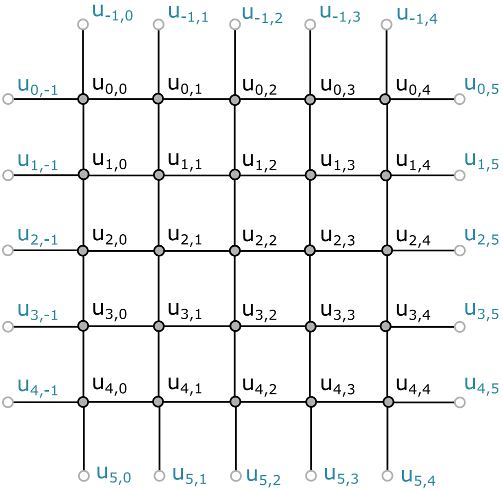
E as condições de contorno do tipo Neumann, conforme discutidas anteriormente, podem ser obtidas pela a aproximação em pontos fictícios com as expressões abaixo:

$$
\begin{aligned}
u_{-1,j} &= 2h\sigma_{0,j} + u_{1,j} & \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{M+1,j} &= 2h\sigma_{M,j} + u_{M-1,j} & \text{para } j = 0, 1, 2, \cdots N \\
u_{i,N+1} &= 2h\sigma_{i,N} + u_{i,N-1} & \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M \\
u_{i,-1} &= 2h\sigma_{i,0} + u_{i,1} & \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots M
\end{aligned}
$$

EDPs Parabólicas

Condição de Neumann multidimensional

Para um domínio tomando $N = M = 4$



○ Pontos fictícios

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Resolva o seguinte problema difusivo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.1\nabla^2 u \text{ em } \Omega \times I \\ 0.1\nabla u \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \begin{cases} 50 \text{ para } (x,y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 0.6] \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

onde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e $I = (0,1]$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Discretizando o problema proposto, temos:

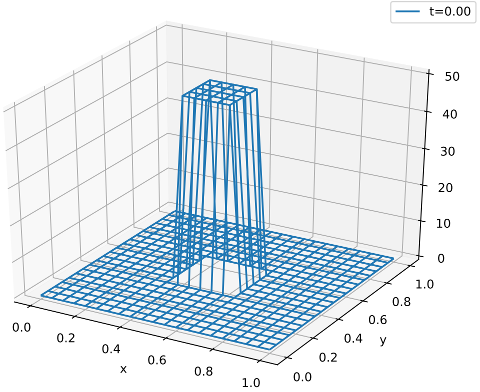
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1\nabla^2 u$$

$$u_i^{n+1} = u_{i,j}^n + 0.1h_t\left(\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2}\right)$$

EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

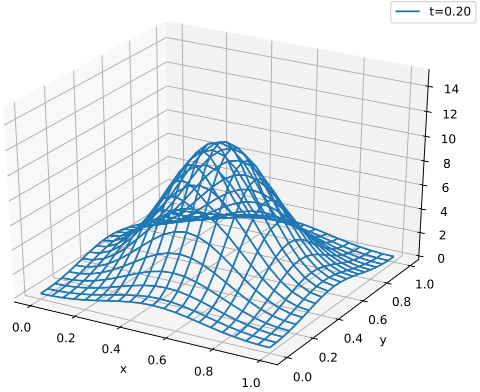
Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

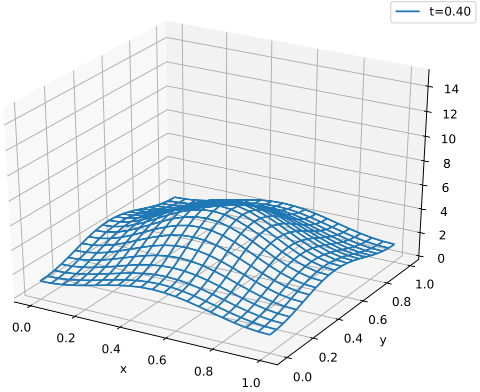
Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

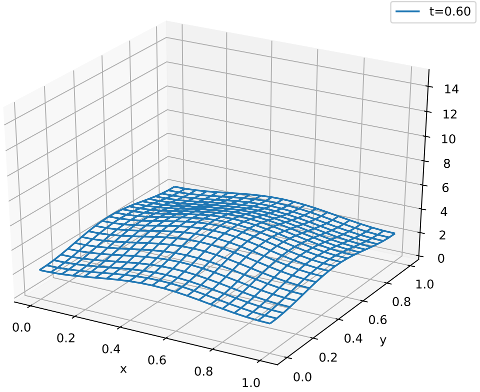
Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

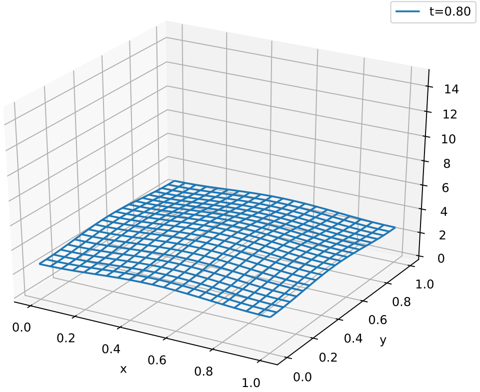
Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

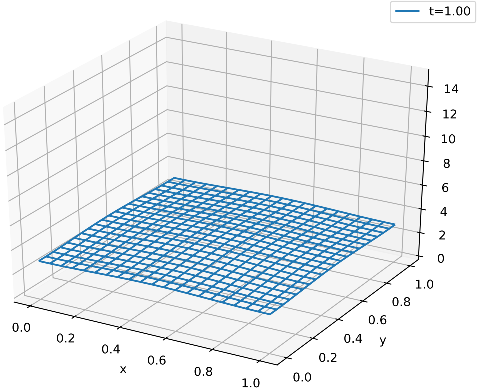
Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exemplo Resolvido

Considerando $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$



EDPs Parabólicas

Exercício

1) Resolva o seguinte problema de difusão-reação:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.1\nabla^2 u + 0.01(50 - u) \text{ para } \Omega \times I \\ 0.1\nabla u \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega_N \times I \\ u = 75 \text{ em } \partial\Omega_D \times I \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

considerando Ω_D o contorno onde $x = 0$, Ω_N os demais contornos, $t \in (0, 1]$, $h = 0.05$ e $h_t = 0.001$

Conteúdo

EDPs Hiperbólicas

Equação de Advecção

Considere o seguinte problema advectivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

onde a é uma constante. Para o problema de Cauchy o problema também precisa de uma condição inicial

$$u(x,0) = \eta(x)$$

EDPs Hiperbólicas

Equação de Advecção

Está é a equação hiperbólica mais simples, e é tão simples que podemos encontrar a soluçao exata.

$$u(x,t) = \eta(x - at)$$

Vamos usar esta equação para demonstrar os problemas mais comuns que podem ser observados ao discretizar uma equação hiperbólica.

Equação de Advecção

FTCS

A primeira tentativa de obter esquema para encontrar uma solução do problema advectivo será a FTCS (*Forward-Time Central-Space*), ou progressivo no tempo centrado no espaço. Deste modo, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} + \frac{a}{2h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = 0$$

Reescrevendo esta relação de maneira explícita:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

Porém este método é **incondicionalmente instável**, conforme pode ser visto no exemplo a seguir

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - FTCS

Resolva o seguinte problema advectivo

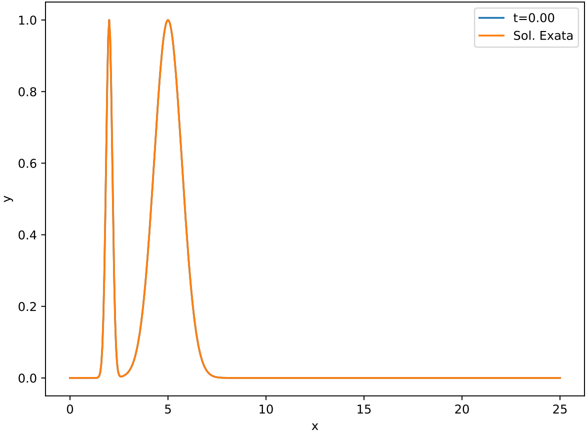
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - FTCS

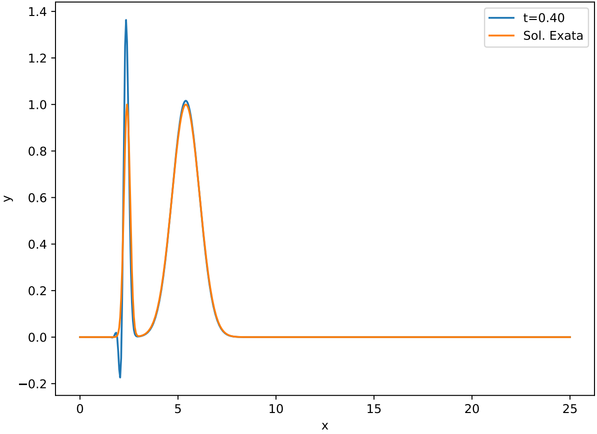
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - FTCS

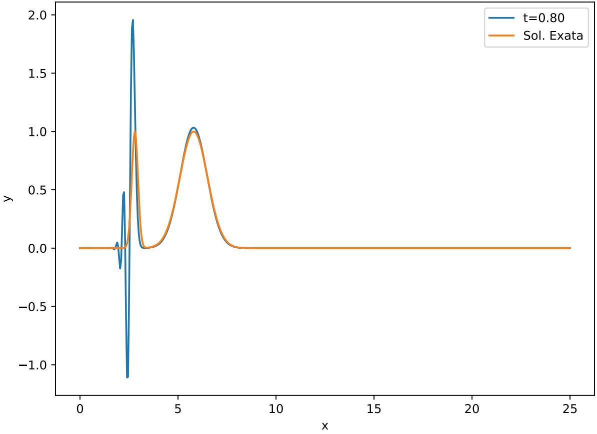
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - FTCS

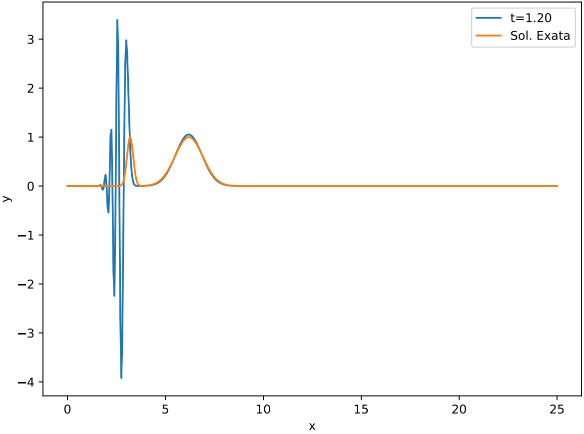
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8 h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - FTCS

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Método de Lax-Friedrichs

Tomando a aproximação FTCS novamente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

Conforme vimos anteriormente, este método é **incondicionalmente instável**. Porém, podemos resolver este problema de estabilidade se tomarmos a seguinte aproximação:

$$u_i^n = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}$$

Equação de Advecção

Método de Lax-Friedrichs

Deste modo obtemos a seguinte aproximação

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{a h_t}{2 h_x} \left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \right)$$

Esta aproximação é conhecida por Método de Lax-Friedrichs. Por outro lado, esta aproximação utilizada em u_i^{n+1} resulta na inclusão de uma "difusão artificial". Este método é estável se $|a h_t / h_x| < 1$.

Equação de Advecção
Método de Lax-Friedrichs

Para visualizar a "difusão artificial" vamos reescrever o método usando o fato que

$$\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} = u_i^n + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2}$$

para obter

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2}$$

Equação de Advecção

Método de Lax-Friedrichs

Esta relação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} + a\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h_x}\right) = \frac{h_x^2}{2h_t}\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2}\right)$$

Esta relação é consistente como uma aproximação da equação de advecção, porém ela se parece mais com a aproximação da seguinte equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $\epsilon = h_x^2/(2h_t)$.

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

Resolva o seguinte problema advectivo

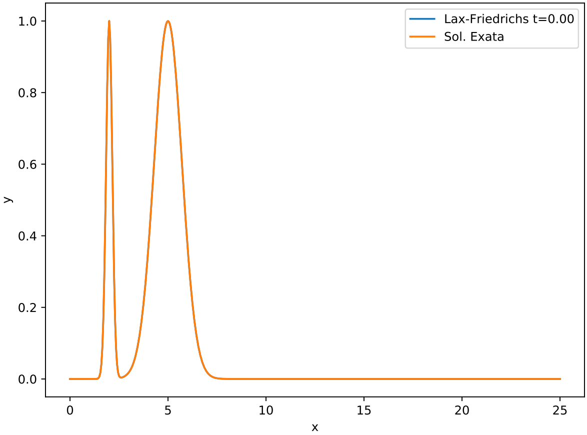
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x, 0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

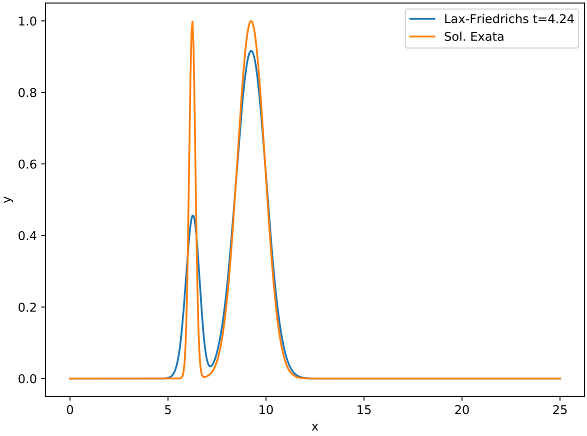
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

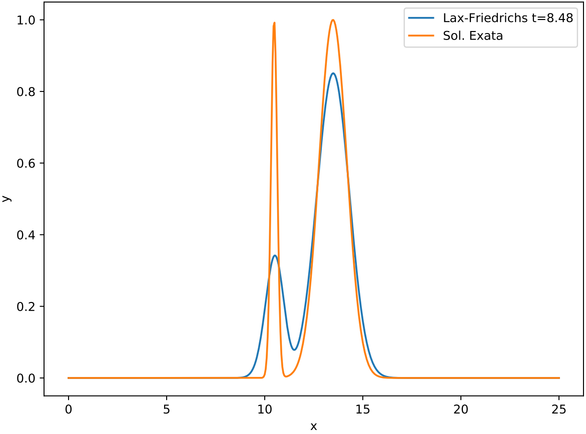
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

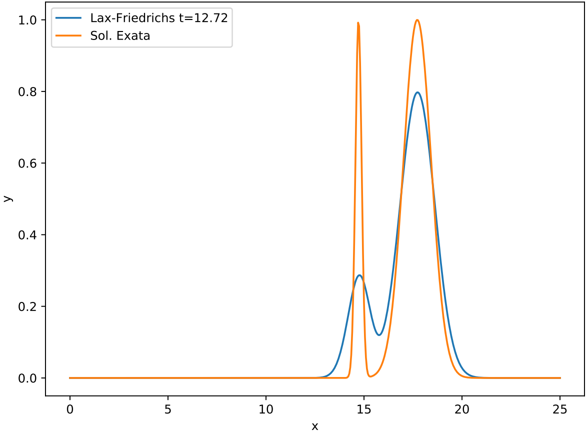
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

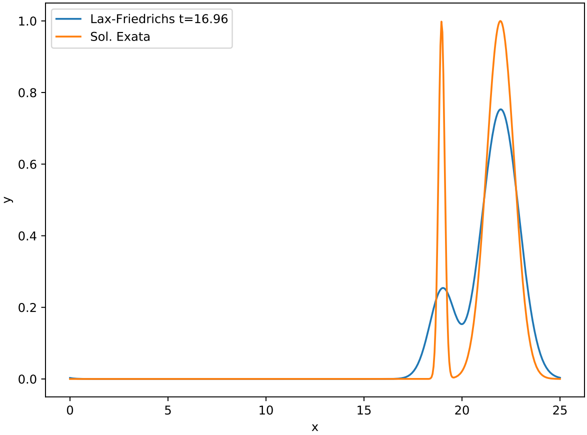
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8 h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Friedrichs

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Método *Leapfrog*

Uma maneira de tentar obter outra aproximação para o problema advectivo é aplicando um diferença centrada no termo $\frac{\partial u}{\partial t}$ e no termo $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2h_t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2h_x}$$

Equação de Advecção

Método *Leapfrog*

Substituindo na equação advectiva e rearranjando os temos para obter um esquema explicito, temos:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2h_t} + a\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h_x}\right)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{ah_t}{h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

Equação de Advecção

Método *Leapfrog*

- Este é um método explicito de 3 níveis no tempo.
- Sua estabilidade pode ser obtida se

$$|\frac{ah_t}{h_x}| < 1$$

- Contudo, este método é marginalmente estável. A e equação em diferença finita é dita não dissipativa, ou seja ela translada a condição inicial sem perdas, não importando o quanto a solução fique oscilando. Porém, apesar de ser não dissipativo - o que é uma característica interessante para uma equação de advecção - ela não propaga com velocidade correta, além de com condição inicial em forma de degrau(subida e/ou caída brusca) pode resultar em uma solução numérica altamente oscilada.

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Leapfrog*

Resolva o seguinte problema advectivo

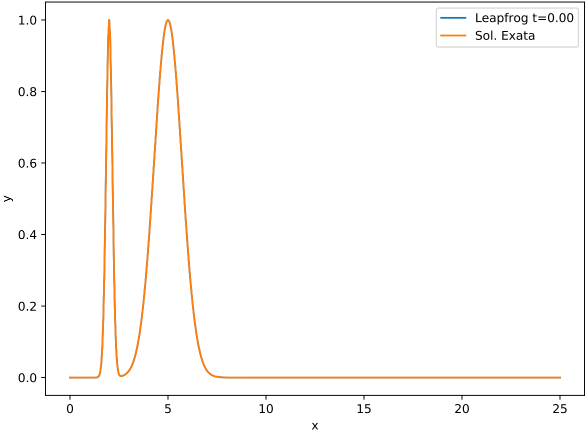
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Leapfrog*

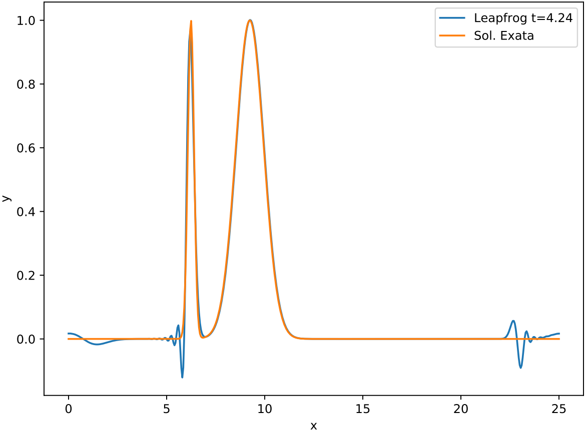
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Leapfrog*

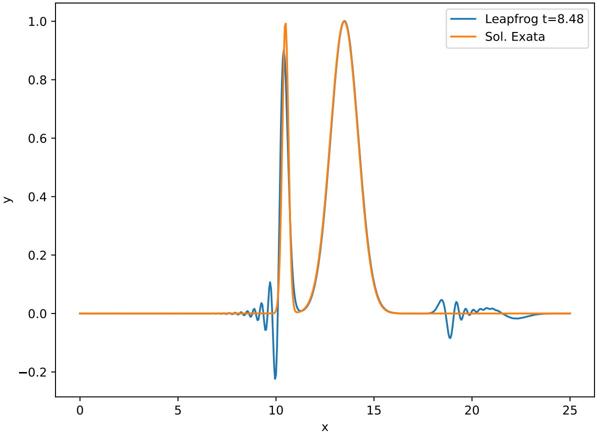
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Leapfrog*

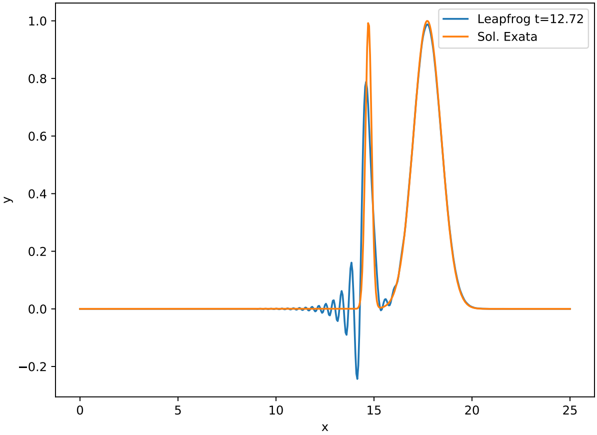
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Leapfrog*

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Método Lax-Wendroff

Para obter o método de Lax-Wendroff, devemos expandir a variável u em Série de Taylor e truncar os termos até a segunda ordem:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + h_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{h_t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

Relacionando as derivadas do tempo e do espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Substituindo no polinômio de Taylor de 2^a ordem, obtemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a h_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + a^2 \frac{h_t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Equação de Advecção

Método Lax-Wendroff

Considerando as relações de diferenças finitas centradas de 1^a e 2^a ordem, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2}$$

Finalmente, aplicando as relações de diferenças centradas no espaço no polinômio, obtemos o método de Lax-Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{a^2h_t^2}{2h_x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

Resolva o seguinte problema advectivo

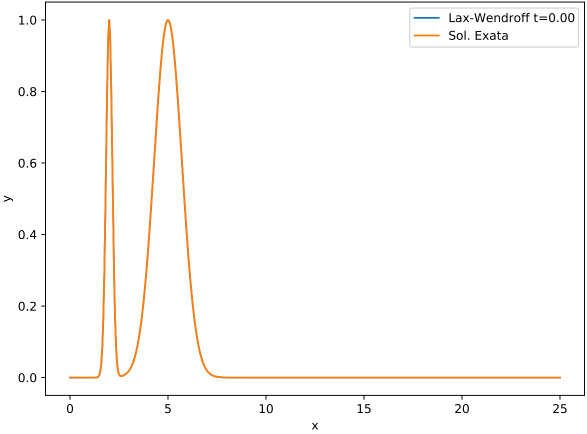
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

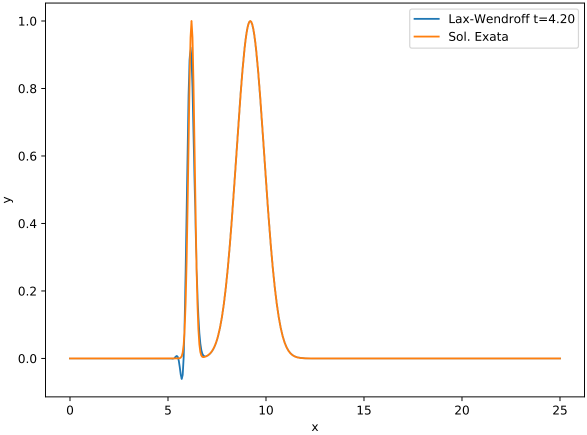
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8 h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

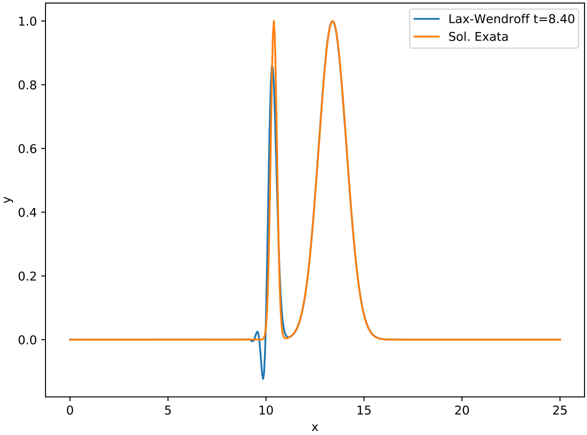
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

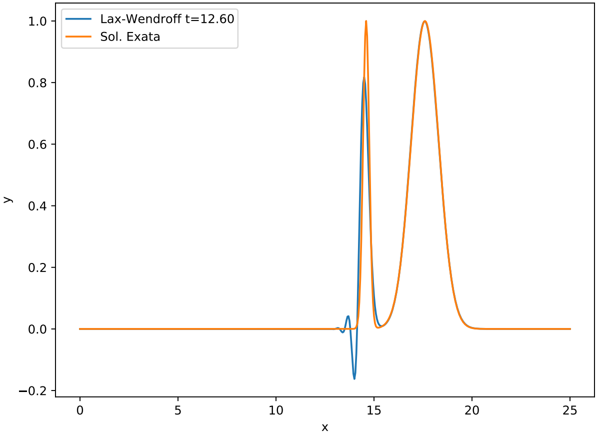
Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção
Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

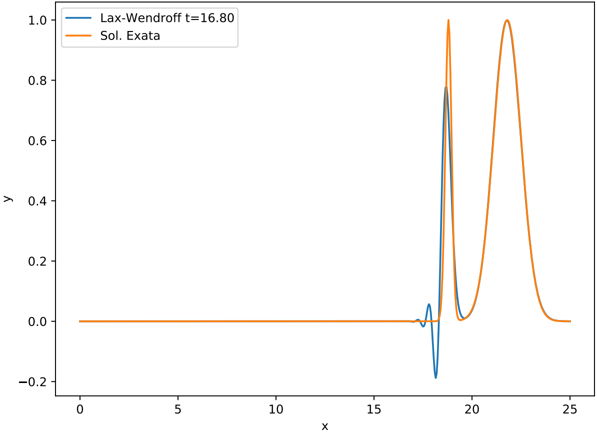
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Lax-Wendroff

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

Os métodos *upwind* utilizam de aproximações assimétricas para obter aproximações em diferenças finitas. Então, tomando as diferenças progressivas e regressivas para aproximar o termo $\frac{\partial u}{\partial x}$, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(u_i - u_{i-1}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(u_{i+1} - u_i\right)$$

Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

Agora utilizando estas aproximações na derivada em relação ao espaço e uma diferença progressiva no tempo, obtemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{h_x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{h_x}\left(u_{i+1} - u_i\right)$$

Estes métodos são $O(h_x, h_t)$.

Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

A escolha entre os métodos deve ser feita de acordo com o sinal de a. Primeiramente, vale observar que a solução exata desta equação depois de um passo de tempo pode ser relacionada da seguinte maneira com o espaço:

$$u(x_i, t + h_t) = u(x_i - ah_t, t)$$

Assim, a solução em x_i do proximo passo de tempo é dada pelo valor de à esquerda x_i se $a > 0$, analogamente a solução em x_i é dada pelo valor de à direta quando $a < 0$. Portanto, sugere a diferença regressiva seja uma boa escolha para $a > 0$ e progressiva para $a < 0$.

Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

De fato, a analise de estabilidade do método confirma esta escolha, pois aplicando a diferença regressiva o método será estável apenas para:

$$0 \leq \frac{ah_t}{h_x} \leq 1$$

Uma vez que h_t e h_x são sempre positivos, podemos concluir que somente para $a > 0$ o método poderá ser aplicado. Esta aproximação é conhecida por esquema *upwind*

Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

Por outro lado, ao aplicar a diferença progressiva o método será estável apenas para:

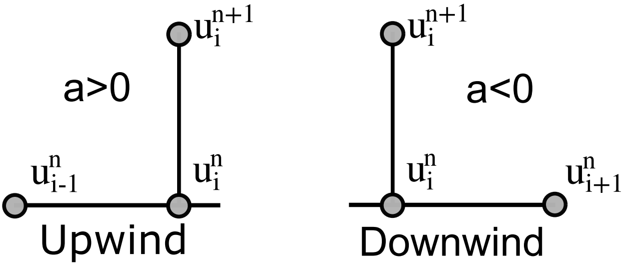
$$-1 \leq \frac{ah_t}{h_x} \leq 0$$

Portanto, somente se $a < 0$. Esta aproximação é conhecida por esquema *downwind*.

Equação de Advecção

Métodos *Upwind*

Resumidamente estes método pode ser representado da seguinte maneira:



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

Resolva o seguinte problema advectivo

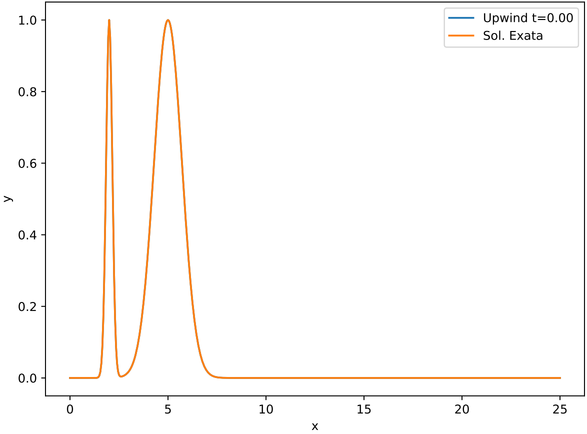
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

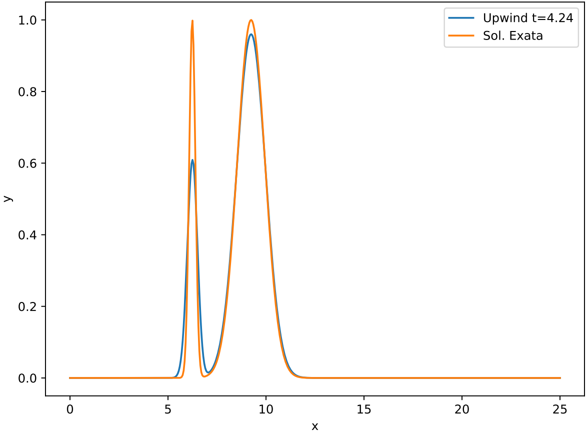
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8 h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

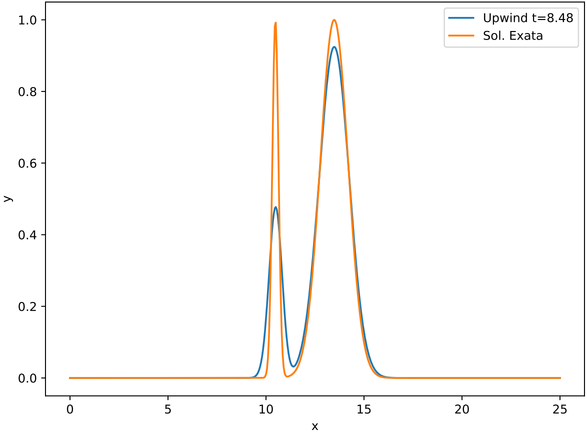
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

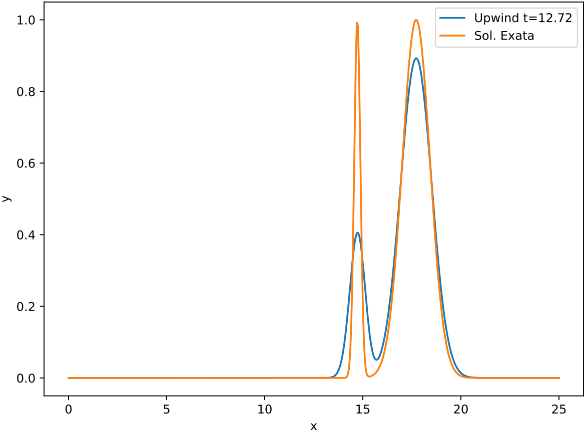
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

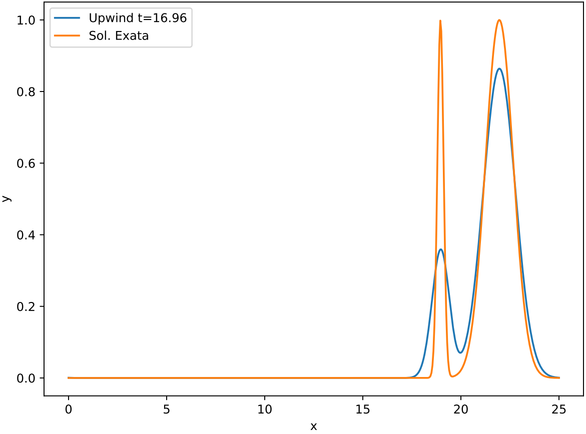
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8 h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - *Upwind*

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Método de Beam-Warming

O método *upwind* tradicional utiliza diferenças de 1ª ordem de precisão. Podemos obter uma aproximação de 2ª ordem utilizando a mesma estratégia aplicada ao método de Lax-Wendroff, porém com a característica assimétrica do *upwind*.

Seja a serie de Taylor expandida até a 2ª ordem e seguindo a mesma estratégia do método de Lax-Wendroff, temos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - ah_t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + a^2\frac{h_t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Equação de Advecção

Método de Beam-Warming

Deste modo para $a > 0$ tomamos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2h_x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h_x^2}$$

Substituindo no polinômio de Taylor, obtemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}(3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) + \frac{a^2 h_t^2}{2h_x^2}(u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})$$

Este método é estável para $0 \leq ah_t/h_x \leq 2$

Equação de Advecção

Método de Beam-Warming

Por outro lado, quando $a < 0$ deve-se utilizar as derivadas laterais a direita, ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h_x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h_x^2}$$

Substituindo no polinômio de Taylor, obtemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ah_t}{2h_x}\left(-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}\right) + \frac{a^2 h_t^2}{2h_x^2}\left(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}\right)$$

Este método é estável para $-2 \leq ah_t/h_x \leq 0$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

Resolva o seguinte problema advectivo

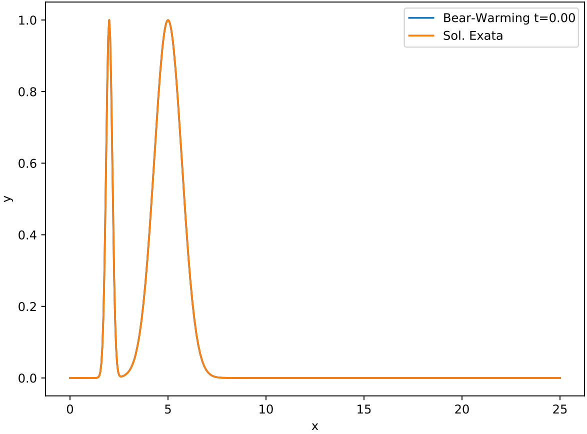
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Tomando $a = 1$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$

Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

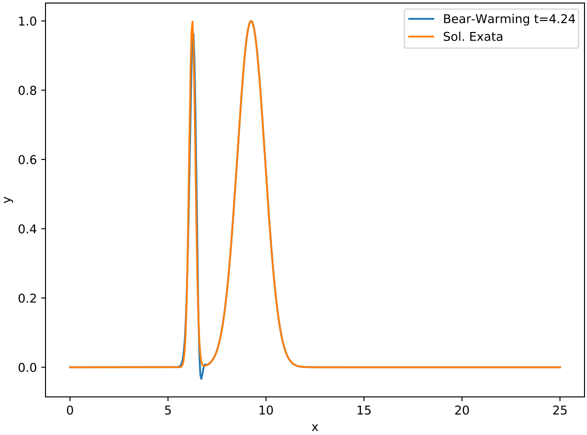
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

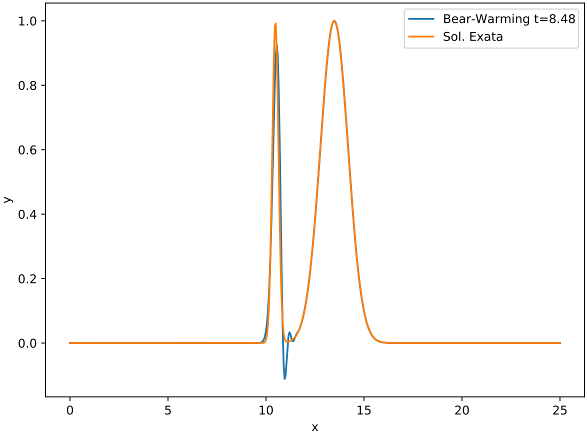
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

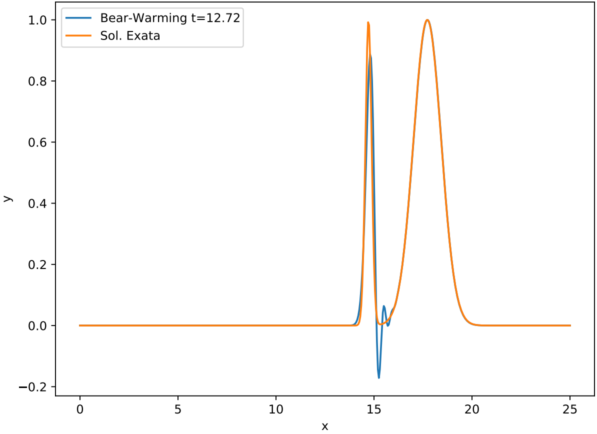
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

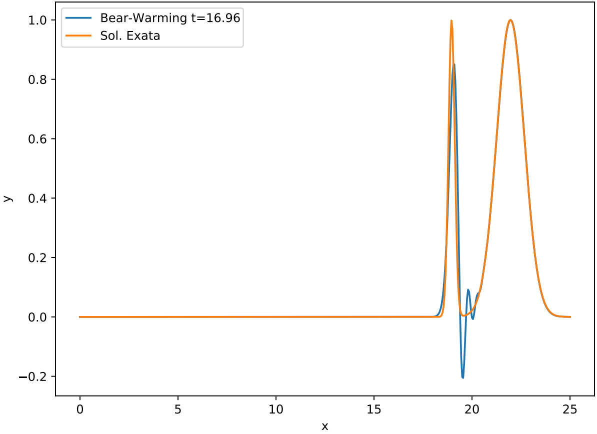
Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exemplo Resolvido - Beam-Warming

Tomando $h_x = 0.05$ e $h_t = 0.8h_x$



Equação de Advecção

Exercícios

1) Considere o seguinte problema advectivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \Omega \times I$$

Tomando $\Omega = [0, 20]$, $I = (0, 15]$ e considerando condição de contorno periódica e condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [1, 5] \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

a) Resolva pelo método *Leapfrog* e compare com a solução exata.
b) Compare, exibindo no mesmo gráfico, a resolução deste problema pelos métodos Lax–Friedrichs, Upwind e a solução exata
c) Compare, exibindo no mesmo gráfico, a resolução deste problema pelos métodos Lax–Wendroff, Bear-Warming e a solução exata

Conteúdo

EDPs Mistas

Advecção-Difusão

Vamos tomar o seguinte problema de advecção-difusão em um domínio unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$. Além disso, a é a velocidade da advecção e κ a taxa de difusão.

EDPs Mistas

Advecção-Difusão

- Na verdade, para este problema já temos todas as ferramentas prontas para resolve-lo em separado, agora precisamos juntar tudo em apenas um problema.
- Conforme já discutimos anteriormente, na pratica vamos aplicar regras aproximações em diferenças finitas para obter um conjunto de equações discretas
- Para resolver este primeiro exemplo, vamos tomar uma grade com pontos (x_i, t_n), onde:

$$x_i = ih_x \quad t_n = nh_t$$

  onde h_x é a distância entre pontos igualmente espaçados no eixo x e h_t é o passo de tempo.
- Vamos adotar aqui a seguinte notação para representar a aproximação numérica:

$$u_i^n \approx u(x_i, t_n)$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão - Explícito

Assim como no problema elíptico e parabólico, vamos tomar uma diferença centrada na deriva de 2^a ordem em relação ao espaço, ou seja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}$$

Para discretizar a derivada em relação ao tempo, vamos tomar inicialmente uma diferença progressiva. Deste modo poderemos obter um esquema explicito. Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{h_t}$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão - Explícito

Por não incluir oscilações na solução, os métodos do tipo *upwind* são amplamente utilizados em equações de Advecção-Difusão. Deste modo, tomando as diferenças progressivas e regressivas para aproximar o termo $\frac{\partial u}{\partial x}$, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(u_i - u_{i-1}\right) \text{ para } a > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(u_{i+1} - u_i\right) \text{ para } a < 0$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão - Explícito

Juntando todas as aproximações, podemos reescrever esta discretização da equação de advecção-difusão na forma de um método explícito.

Para $a > 0$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - r_{adv}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + r_{dif}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Para $a < 0$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - r_{adv}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) + r_{dif}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

onde $r_{adv} = ah_t/h_x$ e $r_{dif} = \kappa h_t/h_x^2$.

Advecção-Difusão

Exercícios

1) Considere o seguinte problema de advecção-difusão

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \Omega \times I \\ 0.1\nabla u \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0.4, 0.6] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

Tomando $\Omega = [0,1]$, $I = (0,1]$, $h_x = 0.01$ e $h_t = 0.0001$

a) Resolva este problema tomando a=0.1
b) Resolva este problema tomando a=-0.2

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional

Vamos tomar o seguinte problema de advecção-difusão em um domínio multidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a} \cdot \nabla u = \kappa \nabla^2 u \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$. Além disso, $\vec{a}$ é o vetor velocidade da advecção e κ a taxa de difusão.

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional

Afim, de simplificar, vamos tomar o problema de advecção-difusão em um domínio bidimensional, mas a mesma ideia pode ser expandita para diversas dimensões:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a} \cdot \nabla u = \kappa \nabla^2 u \text{ em } \Omega \times I$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$. Além disso, $\vec{a} = (a_x, a_y)^T$ é o vetor velocidade da advecção e κ a taxa de difusão.

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional

- Novamente, para este problema já temos todas as ferramentas prontas para resolve-lo em separado, agora precisamos juntar tudo em apenas um problema.
- Conforme já discutimos anteriormente, na pratica vamos aplicar regras aproximações em diferenças finitas para obter um conjunto de equações discretas
- Para resolver este primeiro exemplo, vamos tomar uma grade com pontos (x_i, y_j, t_n), onde:

  $$x_i = ih_x \quad y_j = jh_y \quad t_n = nh_t$$

  onde h_x e h_y são as distâncias entre pontos igualmente espaçados nos eixos x e y, respectivamente, e h_t é o passo de tempo.
- Vamos adotar aqui a seguinte notação para representar a aproximação numérica:

  $$u_{i,j}^n \approx u(x_i, y_j, t_n)$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional - Explícito

Assim como no problema elíptico e parabólico, vamos tomar uma diferença centrada na deriva de 2^a ordem em relação ao espaço, ou seja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h_y^2}$$

Deste modo, considerando $h_x = h_y = h$, temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\ &\approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} u_{i,j-1}}{h^2}\end{aligned}$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional - Explícito

Para discretizar a derivada em relação ao tempo, vamos tomar inicialmente uma diferença progressiva. Deste modo poderemos obter um esquema explicito. Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{h_t}$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional - Explícito

Por não incluir oscilações na solução, os métodos do tipo *upwind* são amplamente utilizados em equações de Advecção-Difusão. Deste modo, tomando as diferenças progressivas e regressivas para aproximar o termo $\frac{\partial u}{\partial x}$, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h_x}\left(u_i - u_{i-1}\right) \text{ para } a_x > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h_x}\left(u_{i+1} - u_i\right) \text{ para } a_x < 0$$

Analogamente para a derivada em relação a y

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{h_y}\left(u_j - u_{j-1}\right) \text{ para } a_y > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{h_y}\left(u_{j+1} - u_j\right) \text{ para } a_y < 0$$

EDPs Mistas

Advecção-Difusão Multidimensional- Explícito

Juntando todas as aproximações, podemos reescrever esta discretização da equação de advecção-difusão na forma de um método explícito.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \phi_x(u^n) - \phi_y(u^n) + r_{dif}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} u_{i,j-1}\right)$$

$$\phi_x(u^n) = \begin{cases} r_{adv}^x\left(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n\right) & \text{para } a_x > 0 \\ r_{adv}^x\left(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right) & \text{para } a_x < 0 \end{cases}$$

$$\phi_y(u^n) = \begin{cases} r_{adv}^y\left(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n\right) & \text{para } a_y > 0 \\ r_{adv}^y\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right) & \text{para } a_y < 0 \end{cases}$$

onde $r_{adv}^x = a_x h_t/h$, $r_{adv}^y = a_y h_t/h$ e $r_{dif} = \kappa h_t/h^2$.

Referencias

Franco, N. B. (2006). *Cálculo numérico*. Pearson.

Holmes, M. H. (2011). *Introduction to numerical methods in differential equations*. Springer: Berlin, Germany.

LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM.