Integração Numérica

Análise Numérica

Prof. Joventino de Oliveira Campos - joventino.campos@ufjf.br
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Conteúdo

Introdução

- Estamos interessados em estudar métodos numéricos para calcular de forma aproximada a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$.
- O problema consiste em: *encontrar*

$$I = I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

onde $f(x)$ é uma função contínua com derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$.

- Seja $F(x)$ a função primitiva de $f(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) sabemos que o valor da integral é dado por

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Introdução

Exemplo

Calcular $\int_0^2 x^4\ dx$. Como $F(x) = \frac{x^5}{5}$ satisfaz $F'(x) = x^4 = f(x)$, pelo TFC, temos

$$I = \int_0^2 x^4\ dx = \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$

Algumas observações:

- nem sempre conseguimos determinar a primitiva $F(x)$

$$\int_a^b e^{x^2}\ dx$$

- em algumas situações a manipulação de $F(x)$ pode ser complexa
- em outros casos, podemos não conhecer de forma analítica a função $f(x)$ que se deseja integrar e só temos os valores de $f(x)$ em pontos x_i do intervalo (ex: experimentos)

Introdução

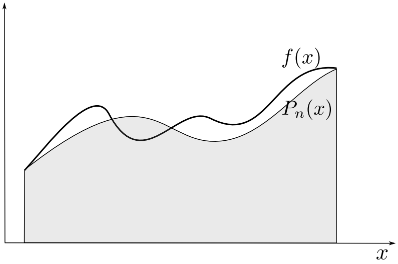
- De forma geral, a integração numérica consiste em integrar o polinômio $P_n(x)$ que interpola os pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

onde $x_0, \ldots, x_n \in [a; b]$

- Ou seja,

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\mathrm{d}x$$



Conteúdo

Conteúdo

Introdução

- Considera-se inicialmente as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechada, isto é, quando $x_0 = a$ e $x_n = b$
- Serão adotados aqui polinômios interpoladores $P_n(x)$ sobre nós igualmente espaçados no intervalo $[a; b]$
- Assim,

$$x_i = \left(\frac{b-a}{n}\right) i + a; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

- Além disso,

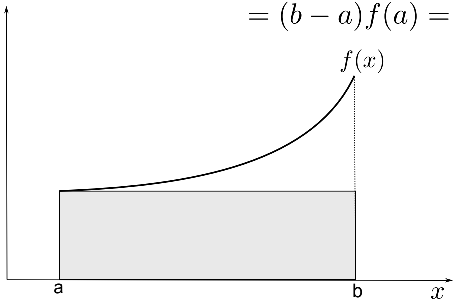
$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_i = x_0 + ih; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

- A **Forma de Lagrange** do polinômio interpolador será utilizada

Regra do Retângulo

- O polinômio mais simples é uma constante
- $f(x)$ é aproximada pelo seu valor em $x_0 = a$ (ou em $x_1 = b$), de tal forma que

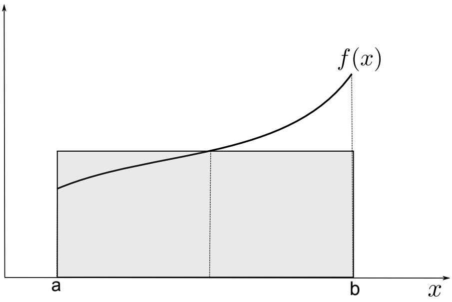
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f(a)dx$$
$$= xf(a)\Big|_a^b$$
$$= (b-a)f(a) = \boxed{hf(a) = I_R}$$



Regra do Ponto Médio

- Também pode-se aproximar $f(x)$ por uma outra constante tomada ao avaliar $f(x)$ em algum outro ponto do intervalo $[a;b]$
- Uma escolha comum é o ponto médio do intervalo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \boxed{hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = I_M}$$



Regra do Trapézio

- Seja $P_1(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, com $x_0 = a$ e $x_1 = b$, então

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\mathrm{d}x$$

- A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Assim,

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)\right]\mathrm{d}x$$

Regra do Trapézio

Então

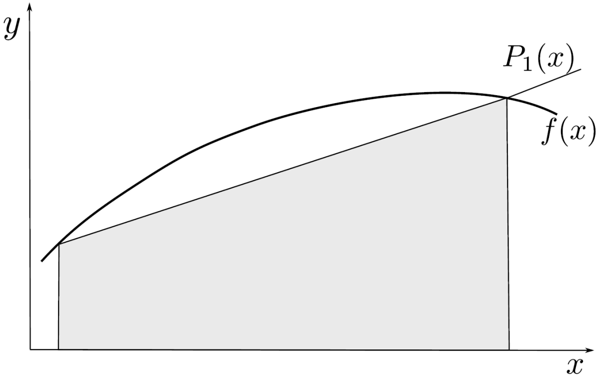
$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\mathsf{d}x$$

$$= f(x_0)\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{L_0(x)}\mathsf{d}x + f(x_1)\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{L_1(x)}\mathsf{d}x$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)$$

Regra do Trapézio

$$\boxed{I_T = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)}$$



Regra 1/3 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_2(x)$, então

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x$$

- A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Regra 1/3 de Simpson

- Assim,

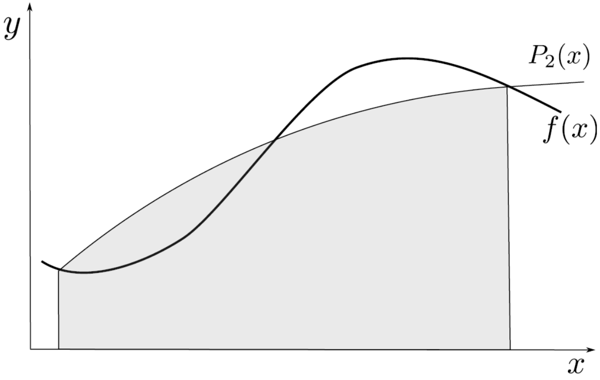
$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x = f(x_0)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x + f(x_1)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x + f(x_2)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx$$

- Obtém-se então

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x = f(x_0)\frac{h}{3} + f(x_1)\frac{4h}{3} + f(x_2)\frac{h}{3} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\boxed{I_{1/3S} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$



Exemplo

Exemplo - Regra 1/3 de Simpson

Vamos calcular o valor da integral $\int_0^{1.2} e^x \cos x \; dx$.
Temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

Pela fórmula é preciso calcular o valore de $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 \cos(0) = 1$$
$$f(x_1) = f(0.6) = e^{0.6} \cos(0.6) = 1.50$$
$$f(x_2) = f(1.2) = e^{1.2} \cos(1.2) = 1.20$$

assim

$$I = \frac{0.6}{3}\left[1 + 4(1.50) + 1.2\right] = 0.2(8.2) = 1.64$$

Regra 3/8 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_3(x)$, então

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\mathrm{d}x$$

- A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Regra 3/8 de Simpson

- Novamente, pode-se utilizar o polinômio interpolador na Forma de Lagrange
- A Regra 3/8 de Simpson é definida como

$$\boxed{I_{3/8S} = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}$$

Resumo

- Regra Retângulo

$$I_R = h * f(a)$$

- Regra Ponto-Médio

$$I_M = h * f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- Regra Trapézio

$$I_T = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

- Regra 1/3 Simpson

$$I_{1/3S} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

- Regra 3/8 Simpson

$$I_{3/8S} = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)$$

Conteúdo

Introdução

- Vamos considerar agora o erro cometido ao usar as regras de quadratura apresentadas até agora.
- Em todos os casos aproximamos $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_n(x)$ de grau n no intervalo $[a, b]$
- Calculamos a integral de P_n como aproximação para a integral.
- Erro cometido é dado por

$$E = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]\, dx$$

- Como vimos no estudo de interpolação, o erro é dado por

$$f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}\ (\eta(x))}{(n+1)!}$$

onde $\eta(x)$ é um ponto entre $[a, b]$ e $x_0, \ldots, x_n$ são os pontos de interpolação.

Erro na Integração

- Regra do Retângulo

$$\boxed{E_R = \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2 \quad \text{ou} \quad E_R = \frac{f'(c)}{2}h^2}$$

- Regra do Trapézio

$$\boxed{E_T = \frac{-f''(c)}{12}(b-a)^3 \quad \text{ou} \quad E_T = \frac{-f''(c)}{12}h^3}$$

- Regra do Ponto Médio

$$\boxed{E_M = \frac{f''(c)}{24}(b-a)^3 \quad \text{ou} \quad E_M = \frac{f''(c)}{24}h^3}$$

- Regra 1/3 de Simpson

$$\boxed{E_{1/3S} = \frac{-f^{(4)}(c)}{2880}(b-a)^5 \quad \text{ou} \quad E_{1/3S} = \frac{-f^{(4)}(c)}{90}h^5}$$

- Regra 3/8 de Simpson

$$\boxed{E_{3/8S} = \frac{-f^{(4)}(c)}{6480}(b-a)^5 \quad \text{ou} \quad E_{3/8S} = \frac{-3f^{(4)}(c)}{80}h^5}$$

Conteúdo

Conteúdo

Introdução

- Quando o intervalo é grande, pode não ser conveniente aumentar o grau do polinômio interpolador
- Uma ideia é dividir o intervalo original em diversos subintervalos e aplicar uma regra de integração em cada subintervalo
- Essas são as chamadas regras repetidas
    - generalizadas
    - compostas

Regra do Retângulo Generalizada

- Dividindo o intervalo $[a; b]$ em m subintervalos, com $x_0 = a$, $x_m = b$ e $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, m$, então

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$$

- Sendo a Regra do Retângulo dada por

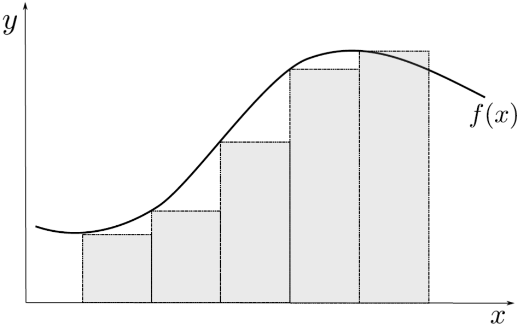
$$I_R = hf(a)$$

- Então a regra generalizada fica como

$$I_{RR} = \sum_{i=1}^{m} hf(x_{i-1})$$

Regra do Retângulo Generalizada

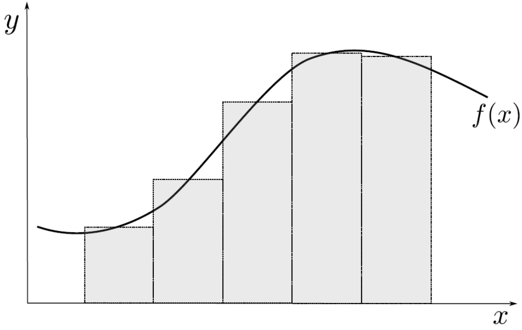
$$\boxed{I_{RR} = \sum_{i=1}^{m} h f(x_{i-1})}$$



Regra do retângulo generalizada

Regra do Ponto Médio Generalizada

$$\boxed{I_{MR} = \sum_{i=1}^{m} hf\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}$$

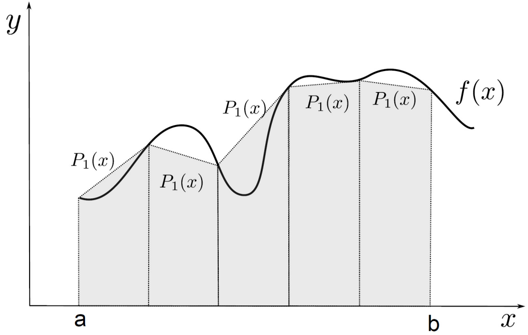


Regra do ponto médio generalizada

Regra do Trapézio Generalizada

$$\boxed{I_{TR} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m} c_i f(x_i)}$$

$c_0 = c_m = 1$ e $c_i = 2$, para $i = 1, \ldots, m-1$



Exemplo

Exemplo: Aplicar a regra do trapézio generalizada para calcular:

$$\int_0^{1,2} e^x \cos(x) dx,$$

utilizando os dados da tabela a seguir:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$e^x \cos(x)$	1	1,197	1,374	1,503	1,552	1,468	1,202

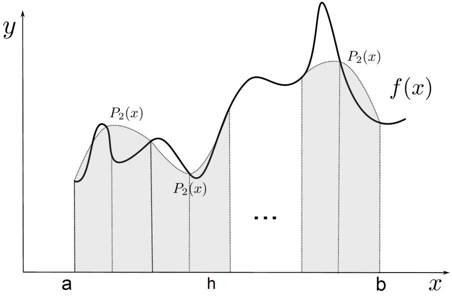
$$\begin{aligned}
\int_0^{1,2} e^x \cos(x) dx \\
&= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)) + f(x_6)] \\
&= \frac{0,2}{2}[1 + 2(1,197 + 1,374 + 1,503 + 1,552 + 1,468) + 1,202] \\
&= 0,1[1 + 2(7,094) + 1,202] \\
&= 0,1[1 + 14,188 + 1,202] = 0,1[16,39] = 1,639
\end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson Generalizada

$$\boxed{I_{1/3SR} = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m} c_i f(x_i)}$$

$$c_0 = c_m = 1$$

$i = 1, \ldots, m-1$: $c_i = 4$, se i for ímpar, $c_i = 2$, se i for par



Conteúdo

Erro nas Fórmulas Generalizadas

- Regra do Retângulo

$$\boxed{|E_{RR}| \leq \frac{|b-a|h}{2} \max_{c\in[a;b]} |f'(c)|}$$

- Regra do Trapézio

$$\boxed{|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{12} \max_{c\in[a;b]} |f''(c)|}$$

- Regra do Ponto Médio

$$\boxed{|E_{MR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{24} \max_{c\in[a;b]} |f''(c)|}$$

- Regra 1/3 de Simpson

$$\boxed{|E_{1/3SR}| \leq \frac{|b-a|h^4}{180} \max_{c\in[a;b]} \left|f^{(4)}(c)\right|}$$

Conteúdo

Introdução

Como vimos, as regras de integração de Newton-Cotes são simples e efetivas, mas possuem algumas desvantagens:

- Uso de muitos pontos para interpolação de alta ordem pode gerar alguns problemas
- As regras de Newton-Cotes fechadas requerem a avaliação de $f(x)$ nos pontos do extremo do intervalo, onde geralmente ocorrem singularidades
- As regras do tipo Newton-Cotes, não possuem um grau de precisão tão alto quanto poderiam

Veremos que algumas dessas desvantagens são contornadas pela Quadratura Gaussiana).

Quadratura Gaussiana

- Estamos interessados em obter uma fórmula de integração na forma

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$$

  onde agora os coeficientes w_i **assim como os pontos** x_i para $i = 0, \ldots, n$ **devem ser determinados** de forma a obter a melhor precisão possível.

- Temos as seguintes incógnitas:
  - $x_0, x_1, \ldots, x_n$
  - $w_0, w_1, \ldots, w_n$

  isto é, um total de $2n + 2$ incógnitas a serem determinadas.

Quadratura Gaussiana

- Sendo assim, podemos esperar que as regras que iremos obter sejam capazes de integrar exatamente polinômios de grau $\leq 2n+1$ uma vez que estes são definidos por $2n+2$ parâmetros.
- Vamos apresentar a ideia do método para o **caso com 2 pontos**

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

- Vamos considerar o intervalo $[-1,1]$ para as regras de Quadratura Gaussiana, sem perda de generalidade, já que sempre podemos fazer uma mudança de variável para mudar do intervalo $[a,b]$ para $[-1,1]$ para realizar a integração.
- Antes de continuar, vejamos como podemos fazer essa mudança de intervalo.

Quadratura Gaussiana

Mudança de Variável

- Seja $x \in [a, b]$. Podemos fazer a seguinte mudança de variável

$$x(t) = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2}, \qquad t \in [-1, 1]$$

- Qualquer que seja $x \in [a, b]$, existe $t \in [-1, 1]$ tal que $x = x(t)$. Sendo assim

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \frac{b-a}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2} dt$$

- logo usando $x = x(t)$ e $dx = x'(t)\ dt$ temos

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x(t))\ x'(t)\ dt = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt$$

onde $F(t) = f(x(t))\ x'(t) = f\left(t\frac{(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2}$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Assim vamos trabalhar com

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt \approx w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1)$$

onde t_0, t_1, w_0 e w_1 devem ser determinados de modo que a regra seja exata para polinômios de grau ≤ 3, pois

  - 2 pontos $\rightarrow$ determinar t_0, t_1, w_0 e w_1

- Uma fórmula de Quadratura Gaussiana com os pontos $t_0, t_1, \ldots, t_n$, tem grau de precisão polinomial dado por:

$$2n + 1$$

- Por exemplo, se tivermos 2 pontos, isto é, t_0 e t_1, a Quadratura Gaussiana tem precisão $2n + 1 = 2(1) + 1 = 3$.

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Vamos deduzir o caso

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1)$$

usando o método dos coeficientes indeterminados. Queremos encontrar w_0, w_1, t_0 e t_1, isto é, 4 parâmetros, logo, a regra de integração que vamos deduzir deve integrar exatamente um polinômio de grau ≤ 3.

- Sendo assim, podemos escrever

$$F(t) = c_0\phi_0(t) + c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t)$$

onde as funções base são: $\phi_j(t) = t^j$.

- Agora basta exigir que a regra que queremos encontrar, i.e., $w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1)$ integre exatamente cada uma das funções base.

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Considerando que a regra é

$$w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt$$

- Temos que exigir que a regra integre $\phi_0(t)$ exatamente. Neste caso como $F(t) = \phi_0(t)$, e assim

$$w_0 \phi_0(t_0) + w_1 \phi_0(t_1) = \int_{-1}^{1} \phi_0(t)\ dt$$

como $\phi_0(t) = 1$ temos

$$w_0 1 + w_1 1 = \int_{-1}^{1} 1\ dt$$

- De forma similar, repetimos o processo para ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3.

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\phi_0(t) = 1 \Rightarrow w_0\ 1 + w_1\ 1 = \int_{-1}^{1} dt$$

$$\phi_1(t) = t \Rightarrow w_0 t_0 + w_1 t_1 = \int_{-1}^{1} t\ dt$$

$$\phi_2(t) = t^2 \Rightarrow w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt$$

$$\phi_3(t) = t^3 \Rightarrow w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 = \int_{-1}^{1} t^3\ dt$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\phi_0(t) = 1 \Rightarrow w_0\ 1 + w_1\ 1 = \int_{-1}^{1} dt = t\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\phi_1(t) = t \Rightarrow w_0 t_0 + w_1 t_1 = \int_{-1}^{1} t\ dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\phi_2(t) = t^2 \Rightarrow w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\phi_3(t) = t^3 \Rightarrow w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 = \int_{-1}^{1} t^3\ dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Temos o seguinte **sistema de equações não-lineares**

$$
\begin{aligned}
w_0 + w_1 &= 2 \\
w_0 t_0 + w_1 t_1 &= 0 \\
w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 &= 2/3 \\
w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 &= 0
\end{aligned}
$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Em geral precisamos recorrer a método numéricos para resolver sistemas de **equações não-lineares** (Método de Newton).
- Fazendo $t_0 = -t_1$, temos

$$-w_0 t_1 + w_1 t_1 = 0 \Rightarrow t_1(w_1 - w_0) = 0 \Rightarrow w_0 = w_1$$

assim $w_0 + w_1 = 2 \Rightarrow \boxed{w_0 = w_1 = 1}$ e ainda temos que

$$t_0^2 + t_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

e como $t_0 = -t_1$ temos

$$\boxed{t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 2 pontos

- Logo como

$$w_0 = 1, \quad w_1 = 1, \quad t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- obtemos a seguinte regra de integração numérica

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1} F(t)\, dt &= w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) \\ &= F\left(-\sqrt{3}/3\right) + F\left(\sqrt{3}/3\right) \end{aligned}$$

  que é chamada de **Quadratura Gaussiana**. Essa fórmula é exata para polinômios de grau ≤ 3.

- Como vimos, uma fórmula de Quadratura Gaussiana com apenas 2 pontos é capaz de integrar polinômios de grau até 3, enquanto que as fórmulas de Newton-Cotes com 2 pontos (Regra do Trapézio) integram apenas polinômios de grau 1.

Quadratura Gaussiana

Utilizando 3 pontos

Para o caso com 3 pontos $(t_0, t_1, t_2 \to n = 2)$ temos $2n + 1 = 5$ e portanto essa quadratura de Gauss é capaz de integrar exatamente polinômios de grau ≤ 5.

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) + w_2 F(t_2)$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 3 pontos

Considerando $\phi_0 = 1, \phi_1 = t, \phi_2 = t^2, \phi_3 = t^3, \phi_4 = t^4$ e $\phi_5 = t^5$

$$w_0 + w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$w_0 t_0 + w_1 t_1 + w_2 t_2 = \int_{-1}^{1} t\ dt = 0$$

$$w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = 2/3$$

$$w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = \int_{-1}^{1} t^3\ dt = 0$$

$$w_0 t_0^4 + w_1 t_1^4 + w_2 t_2^4 = \int_{-1}^{1} t^4\ dt = 2/5$$

$$w_0 t_0^5 + w_1 t_1^5 + w_2 t_2^5 = \int_{-1}^{1} t^5\ dt = 0$$

Quadratura Gaussiana

Utilizando 3 pontos

- A solução do sistema fornece

pesos		pontos	
w_0	$5/9$	t_0	$-\sqrt{3/5}$
w_1	$8/9$	t_1	0
w_2	$5/9$	t_2	$\sqrt{3/5}$

- Em geral as fórmulas de Quadratura Gaussiana são dadas em forma de tabelas com os coeficientes (pesos) w_i e pontos t_i a serem usados na fórmula

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt \approx \sum_{i=0}^{n} w_i F(t_i)$$

- E como vimos essas regras de integração tem grau de precisão $2n+1$ por construção.

Exemplos

Exemplo com 2 pontos

Calcule $I = \int_1^3 3e^x \; dx$ usando a Quadratura Gaussiana com 2 pontos.

Solução do Exemplo 1

1. Mudança de intervalo

$$x(t) = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2} = t + 2$$

logo

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$$

assim

$$\int_1^3 3e^x \; dx = \int_{-1}^1 3e^{(t+2)} \; 1 \; dt$$

Exemplos

Cont. Solução

Precisamos avaliar $F(t) = 3e^{(t+2)}$ em $t = -\sqrt{3}/3$ e $t = \sqrt{3}/3$:

$$F(-0.577350) = 3e^{(-0.577350+2)} = 12.444292$$
$$F(0.577350) = 3e^{(0.577350+2)} = 39.486647$$

Assim calculamos a integral de forma aproximada como

$$I = F(-0.577350) + F(0.577350) = 51.930938$$

Se usarmos uma regra com 3 pontos temos

$$I = \frac{5}{9}F(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F(\sqrt{\frac{3}{5}}) = 52.1004$$

Obs: compare com o valor exato da integral:
$3[e^3 - e] = 52.1018$

Exemplos

Exemplo polinomio

Calcular a integral $I = \int_{-2}^{0}(x^2 - 1)\ dx$ com a Quadratura Gaussiana de 2 pontos.

Solução do Exemplo 2

Mudança de intervalo

$$x(t) = \frac{(0-(-2))t}{2} + \frac{(0-2)}{2} = t - 1$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$$

e portanto

$$\int_{-2}^{0}(x^2-1)\ dx = \int_{-1}^{1}[(t-1)^2 - 1]\ 1\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 - 2t + 1 - 1\ dt = \int_{-1}^{1}[t^2 - 2t]\ dt$$

Exemplos

Cont. Solução

A aproximação da integral é dada por

$$I = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1.488 - 0.821 = 0.66666$$

a qual pode ser comparada com o valor exato que é

$$\int_{-1}^{1} [t^2 - 2t]\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} - \left.t^2\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = 0.66666$$

De onde podemos ver que de fato a Quadratura Gaussiana de 2 pontos integra polinômios de grau ≤ 3 de forma exata.