Problemas de Valor de Contorno

Introdução aos Métodos Discretos

Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Computacional

Prof. Ruy Freitas Reis - ruy.reis@ufjf.br
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

Introdução

- Os problemas de valor de contorno (PVC) são semelhantes aos problemas de valor inicial (PVI).
- Um PVC e tem condições especificadas nos extremos ("limites") da variável independente na equação, enquanto um problema de valor inicial tem todas as condições especificadas no mesmo valor da variável independente (e esse valor está no contorno inicial do domínio, daí o termo valor "inicial").

Pássaros em um fio

- Uma corda, ou fio, amarrado entre dois pontos é o que ocorre efetivamente com os fios telefônicos passando entre dois postes de telefone.
- O cabo se flexiona devido ao seu peso e outras forças às quais é submetido, *e.g.*, pássaros sentados no fio.

Pássaros em um fio

- Assumindo que os polos estão localizados em $x = 0$ e $x = l$, e deixando y (x) modelar a deflexão vertical do cabo, o problema pode ser definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x) & x \in \Omega \\ y(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega = (0, l)$ e $\partial\Omega$ representa o contorno do domínio Ω, neste caso $x = 0$ e $x = l$. Além disso, $f(x)$ modela as várias forças sobre a o fio.

Conteúdo

Um método das diferenças finitas simples

Como um primeiro exemplo de um método de diferença finita para resolver uma equação diferencial, considere a seguinte EDO:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{para } x \in (0,1) \\ u(x) = \alpha & \text{para } x = 0, \\ u(x) = \beta & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

onde $f(x)$ é uma função especificada e desejamos determinar a função $u(x)$ para o intervalo $x \in (0,1)$. Esta tipo de condição de contorno imposta sobre a solução de $u(x)$ é conhecida por Dirichlet.

Um método das diferenças finitas simples

- Vamos tentar obter a solução de $u(x)$ em pontos discretos denominados $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m$ e u_{m+1} onde u_i é uma aproximação para a solução $u(x_i)$.
- Considere $x_i = ih + x_0$ e $h = \frac{x_f - x_0}{m+1} = \frac{1}{m+1}$ é a distância entre os pontos da malha.
- Quanto ao contorno, sabemos que $u_0 = \alpha$ e $u_{m+1} = \beta$.
- Então temos m valores a serem determinados, $u_1, u_2, u_3 \cdots, u_{m-1}$ e u_m.

Um método das diferenças finitas simples

Vamos substituir $u''(x)$ pela seguinte aproximação em diferenças finitas centrada:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

Então obtemos:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = f(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \cdots, m$$

Note que a primeira equação do sistema ($i = 1$) envolve o valor $u_0 = \alpha$ e a última ($i = m$) envolve o valor $u_{m+1} = \beta$.

Um método das diferenças finitas simples

Deste modo temo um sistema de equações lineares na seguinte forma:

$$\boldsymbol{A}u = F,$$

onde u é o vetor de incógnitas $u = [u_1, u_2, \cdots, u_m]$ e

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Analise de Erro

Considere o mesmo problema proposto anteriormente:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{para } x \in (0,1) \\ u(x) = \alpha & \text{para } x = 0, \\ u(x) = \beta & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Suponha

$$E_i = u_i - \hat{u}_i,$$

onde $\hat{u}_i$ é a solução exata do problema no ponto $u(x_i)$.

Analise de Erro

Podemos considerar que a solução exata do problema dado pela solução em diferenças finitas mais o erro de truncamento da serie de Taylor da diferença, isto é:

$$\frac{1}{h^2}(\hat{u}_{i+1} - 2\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1}) - f(x_i) = \tau_i$$

onde, neste caso de diferença centrada, temos

$$\begin{aligned}\tau_i &= -\frac{1}{12}h^2 u''''(\eta) \\ &= O(h^2)\end{aligned}$$

Analise de Erro

Assim, temos solução exata $\hat{u}_i$ dada por:

$$\hat{u}_{i+1} - 2\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1} - h^2\tau_i = h^2 f(x_i)$$

e a aproximada

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

Subtraindo a aproximada da exata temos

$$E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1} = -h^2\tau_i,$$

onde $E_0 = E_{m+1} = 0$.

Analise de Erro

Podemos interpretar o seguinte sistema de equações

$$\frac{1}{h^2}(E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) = -\tau_i,$$
$$E_0 = 0$$
$$E_{m+1} = 0$$

como uma discretização da seguinte EDO:

$$\begin{cases} e''(x) = -\tau(x) & \text{para } x \in (0,1) \\ \\ e(x) = 0 & \text{para } x = 0, \\ e(x) = 0 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Analise de Erro

Uma vez que $\tau_i = -\frac{1}{12}h^2 u''''(x)$, integrando duas vezes a EDO, obtemos:

$$e(x) = -\frac{1}{12}h^2 u''(x) + \frac{1}{12}h^2(u''(0) + x(u''(1) - u''(0)))$$

Ou seja o erro será $O(h^2)$

Medindo Erro

Erro em funções

O erro dado por uma função é dado por:

$$e(x) = u(x) - \hat{u}(x),$$

onde $u(x)$ é a solução aproximada e $\hat{u}(x)$ a solução exata definidas em um intervalo $x \in [a, b]$.

Medindo Erro

Erro em funções

Podemos medir a magnitude desse erro usando normas do espaço de funções padrão, na qual é bem similar as normas vetoriais. Por exemplo a norma do máximo (ou norma infinito) é dada por

$$||e||_\infty = \max_{x \in [a,b]} |e(x)|.$$

Medindo Erro

Erro em funções

A norma-1 e norma-2 são dadas pelas integrais sobre o intervalo $[a, b]$, ao invés da soma dos elementos do vetor.

$$||e||_1 = \int_a^b |e(x)| dx,$$

$$||e||_2 = \left(\int_a^b |e(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

Estes são casos podem ser generalizados por norma-q, definida por:

$$||e||_q = \left(\int_a^b |e(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Medindo Erro

Erro em funções discretas

O erro dado por uma função discreta é dado por:

$$e_i = u_i - \hat{u}(x_i),$$

onde u_i é a solução aproximada em um ponto x_i e $\hat{u}(x_i)$ a solução exata no mesmo ponto. Definidas em um intervalo $x \in [a, b]$ em pontos igualmente espaçados de tamanho h.

Medindo Erro

Erro em funções discretas

No entanto, por e_i ser um vetor de N elementos, podemos nos deixar **levar ao erro** de acreditar que a norma-1, por exemplo, é definida pela norma-1 tradicional de vetores, isto é:

$$||e||_1 = \sum_{i=1}^{N} |e_i|$$

Medindo Erro

Erro em funções discretas

Ao invés disto, a norma-1 e norma-2 em funções discretas são dadas pelas discretização das integrais das normas de funções apresentadas anteriormente, ou seja:

$$||e||_1 = h \sum_{i=1}^{N} |e_i|$$

neste caso o fator h substitui o dx da integral.
Similarmente todas as outras normas podem ser derivadas do caso geral, norma-q, definida por:

$$||e||_q = \left(h \sum_{i=1}^{N} |e_i|^q \right)^{1/q}.$$

Medindo Erro

Erro em funções discretas

Uma vez que $h^{1/q} \to 1$ quando $q \to \infty$

$$||e||_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_i|.$$

Medindo Erro

Funções bidimensionais

Para funções definidas em domínio bidimensional, temos normas análogas para funções contínuas e discretas:

$$||e||_q = \left(\iint |e(x,y)|^q dxdy \right)^{1/q} \text{para funções contínuas}$$

$$||e||_q = \left(h_x h_y \sum_i \sum_j |e_{ij}|^q \right)^{1/q} \quad \text{para funções contínuas}$$

A mesma ideia pode ser generalizada para funções definidas no R_n

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D

Vamos construir um problema para o qual sabemos a solução:

- Vamos supor uma função

$$u(x) = 1 + x^2$$

- Inserir na equação e Poisson:

$$f = -\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$f = -\frac{d^2(1+x^2)}{dx^2}$$
$$f = -2$$

- Assim temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2$$

Essa técnica é chamada de **método de soluções fabricadas**

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D

Para deixar o problema bem posto precisamos definir o domínio e as condições de contorno. Então seja um dominio $x \in (-1, 1)$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = 2 & \text{para } x \in (-1, 1) \\ u(x) = 2 & \text{para } x = -1 \\ u(x) = 2 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D

Algoritmo 1: Pseudocódigo do MDF para o problema

Entrada: a e b limites inferior e superior do domínio; h distancia entre pontos da malha; u_a e u_b condição de contorno em a e b, função $f(x)$

```
início
    Montar sistema linear Au = f
    Resolver sistema Au = f
    Aplicar condição de contorno em u
    Plotar a solução aproximada u e a analítica u_exata
    retorna u
```

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D

Deste modo, temos:

$$u_a = 2$$
$$u_b = 2$$
$$f_x = 2$$

Tomando $h = 0.25$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.25^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -30 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D

Resolvendo o sistema $Au = f$, obtemos

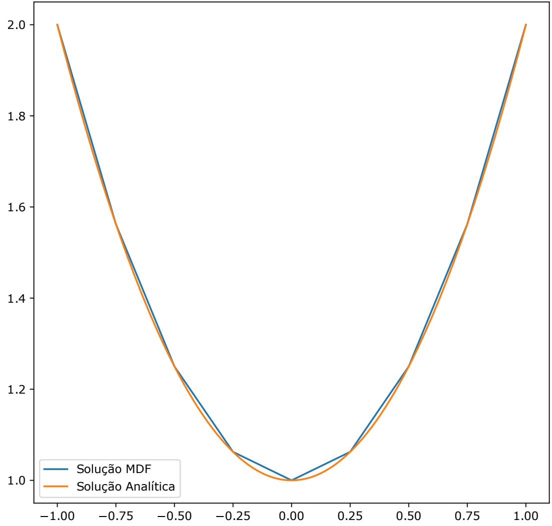
$$u = \begin{bmatrix} 1.5625 \\ 1.2500 \\ 1.0625 \\ 1.0000 \\ 1.0625 \\ 1.2500 \\ 1.5625 \end{bmatrix}$$

Aplicando a condição de contorno

$$u = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.5625 \\ 1.2500 \\ 1.0625 \\ 1.0000 \\ 1.0625 \\ 1.2500 \\ 1.5625 \\ 2.0000 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D



Exercícios

1. Construa uma equação de Poisson que tenha a seguinte solução fabricada:

$$u(x) = sen(x),$$

para $x \in [0,1]$

   a) Utilizando h=0.1 resolva a equação diferencial construída. Plote a solução aproximada e a analítica
   b) Mostre que o MDF utilizado é $O(h^2)$. Tomando $h \in [10^{-4}, 10^{-1}]$, plote, em escala log-log, o gráfico de h versus erro e calcule a inclinação destas retas. Execute esta analise para as normas 1, 2 e infinito.

Conteúdo

Condição de Contorno de Neumann

Definição

- Suponha que temos uma ou mais condições de contorno de Neumann em vez de condições de contorno de Dirichlet
- Isso significa que **a condição de contorno é dada em $\boldsymbol{u'(x)}$**, em vez de uma condição no valor do próprio $u(x)$
- Por exemplo, em uma equação de calor, podemos modelar um dos contornos isolados, ou seja, sem fluxo de calor neste contorno, assim temos $u' = 0$.
- Generalizando, vamos podemos ter um fluxo de calor a uma taxa específica dada por $u' = \sigma$ neste contorno.

Condição de Contorno de Neumann

Definição

- É importante lembrar que em uma equação em problemas de valor de contorno definir **condição de Neumann em todo o contorno resultará em um problema mal-posto**.
- Neste caso, **o problema terá infinitas ou nenhuma solução.**

Condição de Contorno de Neumann

- Seja o problema

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{para } x \in (0,1) \\ u'(x) = \sigma & \text{para } x = 0, \\ u(x) = \beta & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

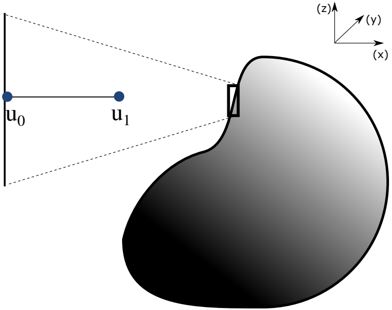
- Para resolver este problema precisamos considerar o u_0 como, também, como uma incógnita.
- Analogamente, no caso de uma condição de Neumann no outro ponto do contorno, u_{m+1}.

Condição de Contorno de Neumann

Primeira aproximação

Como uma primeira tentativa, podemos usar uma diferença progressiva (ou regressiva) para aproximar u'(x)

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \sigma$$



Condição de Contorno de Neumann

Primeira aproximação

Adicionando esta equação na formulação de diferenças finitas, obtemos o seguinte sistema para as incógnitas $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}$.

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -h & h & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \\ u_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) \\ \beta \end{bmatrix}$$

Condição de Contorno de Neumann

Primeira aproximação

- O problema desta aproximação é que ao verificar o erro, percebe-se que ela é apenas $O(h)$
- Isso de deve ao fato que, ao aproximar o ponto u_0 no contorno utiliza-se uma diferença progressiva
- Porém diferença progressiva tem o seguinte erro e truncamento:

$$\tau = -\frac{h}{2}u''(\eta),$$

ou seja $O(h)$.

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann

Resolva pelo MDF a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = 2 & \text{para } x \in (0,1) \\ u'(x) = 1 & \text{para } x = 0 \\ u(x) = 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

utilizando diferença progressiva para aproximar a condição de contorno.
Sabendo que a solução exata desta equação é:

$$u(x) = x^2 + x + 1$$

Compare os resultados

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann

Algoritmo 2: Pseudocódigo do MDF para o problema

Entrada: a e b limites inferior e superior do domínio; h distancia entre pontos da malha; u'_a e u_b condição de contorno em a e b, função $f(x)$

início
- Montar sistema linear $Au = f$ considerando as condições de contorno
- Resolver sistema $Au = f$
- Plotar a solução aproximada u e a analítica u_{exata}
- **retorna** u

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann

Deste modo, temos:

$$u'_a = 1$$
$$u_b = 3$$
$$f_x = 2$$

Tomando $h = 0.2$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.2^2}\begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

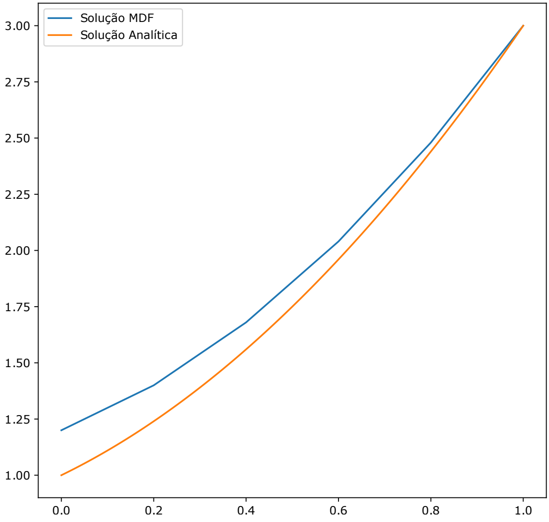
Equação de Poisson 1D - Neumann

Resolvendo o sistema $Au = f$, obtemos

$$u = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.4 \\ 1.68 \\ 2.04 \\ 2.48 \\ 3. \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

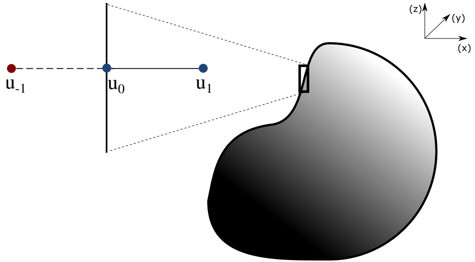
Equação de Poisson 1D - Neumann



Condição de Contorno de Neumann

Segunda aproximação

Como uma segunda tentativa, podemos usar uma diferença centrada para aproximar $u'(x) = \sigma$. Para isto é necessário incluir a incógnita u_{-1} (fora do domínio) o que pode, a priori, soar estranho.



Condição de Contorno de Neumann

Segunda aproximação

Deste modo a primeira equação do sistema linear fica:

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{-1} - 2u_0 + u_1\right) = f(x_0)$$

Aplicando a diferença centrada para aproximar $u'(x) = \sigma$, temos:

$$\frac{1}{2h}\left(u_1 - u_{-1}\right) = \sigma$$
$$u_{-1} = u_1 - 2h\sigma$$

Substituindo u_{-1} na primeira equação do sistema obtemos:

$$\frac{1}{h}\left(-u_0 + u_1\right) = \sigma + \frac{h}{2}f(x_0)$$

Condição de Contorno de Neumann

Primeira aproximação

Assim, obtemos exatamente a mesma matriz A no sistema Au=f, porém com uma pequena alteração no vetor f

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -h & h & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \\ u_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma + \frac{h}{2} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) \\ \beta \end{bmatrix}$$

Condição de Contorno de Neumann

Primeira aproximação

- Nesta aproximação o erro diminui em $O(h^2)$
- Isso de deve ao fato que, ao aproximar o ponto u_0 no contorno utiliza-se uma diferença centrada
- Esta relação de diferença tem o seguinte erro de truncamento:

$$\tau = -\frac{h^2}{6} u'''(\eta),$$

ou seja $O(h^2)$.

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann

Resolva pelo MDF a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = 2 & \text{para } x \in (0,1) \\ u'(x) = 1 & \text{para } x = 0 \\ u(x) = 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

utilizando diferença centrada para aproximar a condição de contorno.
Sabendo que a solução exata desta equação é:

$$u(x) = x^2 + x + 1$$

Compare os resultados

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann

Deste modo, temos:

$$u'_a = 1$$
$$u_b = 3$$
$$f_x = 2$$

Tomando $h = 0.2$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.2^2}\begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

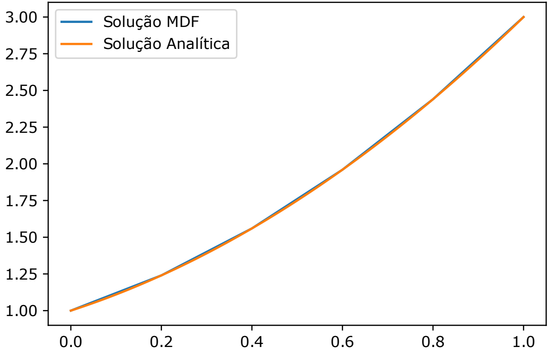
Equação de Poisson 1D - Neumann

Resolvendo o sistema $Au = f$, obtemos

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.24 \\ 1.56 \\ 1.96 \\ 2.44 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

Equação de Poisson 1D - Neumann



Exercícios

1. Resolva pelo MDF a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = cos(x) & \text{para } x \in (0,1) \\ u'(x) = 1 & \text{para } x = 0 \\ u(x) = 1 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Sabendo que a solução exata desta equação é:

$$u(x) = -cos(x) + x + cos(1)$$

a) Utilizando a diferença progressiva na condição de contorno, mostre que o MDF utilizado é $O(h)$. Tomando $h \in [10^{-4}, 10^{-1}]$, plote, em escala log-log, o gráfico de h versus erro e calcule a inclinação da reta. Execute utilizando uma das normas (1, 2 ou inf)

b) Utilizando a diferença centrada na condição de contorno, mostre que o MDF utilizado é $O(h^2)$. Tomando $h \in [10^{-4}, 10^{-1}]$, plote, em escala log-log, o gráfico de h versus erro e calcule a inclinação da reta. Execute utilizando uma das normas (1, 2 ou inf)

Conteúdo

Caso Geral
Definição

Agora vamos considerar o caso mais geral de equação linear geral de segunda ordem:

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

juntamente com 2 condições de contorno, por exemplo, Dirichlet:

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

Caso Geral

Discretização

Esta equação pode ser discretizada com uma aproximação $O(h^2)$ por:

$$a_i \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \right) + b_i \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + c_i u_i = f_i,$$

onde, por exemplo, $a_i = a(x_i)$.

Caso Geral

Sistema Linear

Esta discretização resulta no sistema linear $\boldsymbol{A}u = f$, onde $\boldsymbol{A}$ é dado pela seguinte matriz:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} (h^2c_1 - 2a_1) & (a_1 + hb_1/2) & & \\ (a_2 - hb_2/2) & (h^2c_2 - 2a_2) & (a_2 + hb_2/2) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (a_{m-1} - hb_{m-1}/2) & (h^2c_{m-1} - 2a_{m-1}) & (a_{m-1} + hb_{m-1}/2) \\ & & (a_m - hb_m/2) & (h^2c_m - 2a_m) \end{bmatrix}$$

Caso Geral
Sistema Linear

Além disso, u e f é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} \quad , \quad f = \begin{bmatrix} f_1 - (a_1/h^2 - b_1/2h)\alpha \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m - (a_m/h^2 + b_m/2h)\beta \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido

Caso geral

Vamos construir uma equação diferencial na forma:

$$xu''(x) + 2xu'(x) + 3xu(x) = f(x)$$

Supondo $u(x) = x^2 + 1$, temos:

$$\begin{aligned} x(x^2+1)'' + 2x(x^2+1)' + 3x(x^2+1) &= f(x) \\ x(2) + 2x(2x) + 3x(x^2+1) &= f(x) \\ 3x^3 + 4x^2 + 5x &= f(x) \end{aligned}$$

Incluindo condições de contorno para deixar o problema bem-posto, temos:

$$\begin{cases} xu''(x) + 2xu'(x) + 3xu(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x & \text{para } x \in (1,2) \\ u(x) = 2 & \text{para } x = 1 \\ u(x) = 5 & \text{para } x = 2 \end{cases}$$

Exercício Resolvido

Caso geral

Deste modo, temos:

$$u_a = 2$$
$$u_b = 5$$
$$f_i = 3x_i^3 + 4x_i^2 + 5x_i$$

Tomando $h = 0.2$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.2^2}\begin{bmatrix} -2.256 & 1.44 & 0 & 0 \\ 1.12 & -2.632 & 1.68 & 0 \\ 0 & 1.28 & -3.008 & 1.92 \\ 0 & 0 & 1.44 & -3.384 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -31.056 \\ 23.072 \\ 30.528 \\ -230.544 \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido

Caso geral

Resolvendo o sistema $Au = f$, obtemos

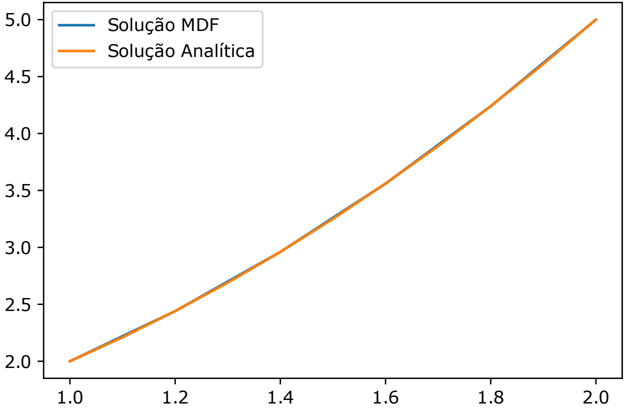
$$u = \begin{bmatrix} 2.44 \\ 2.96 \\ 3.56 \\ 4.24 \end{bmatrix}$$

Aplicando a condição de contorno

$$u = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.44 \\ 2.96 \\ 3.56 \\ 4.24 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido

Caso geral



Conteúdo

Meio Heterogêneo

Caso específico

Considere a equação de condução de calor, onde a condutividade do meio pode variar

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x)$$

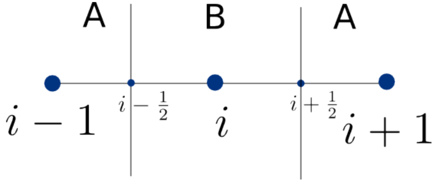
juntamente com 2 condições de contorno, por exemplo, Dirichlet:

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

Meio Heterogêneo

Caso específico

Neste caso, deve-se, inicialmente discretizar o termo mais interno $\kappa(x)u'(x)$ em pontos fictícios entre os pontos do domínio, usando diferença centrada:



$$\kappa(x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) \approx \kappa_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)$$

$$\kappa(x_{i-1/2})u'(x_{i-1/2}) \approx \kappa_{i-1/2}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

Meio Heterogêneo

Caso específico

Aplicando novamente uma diferença centrada para o termo $(\kappa(x)u'(x))'$, agora no ponto x_i, temos:

$$
\begin{aligned}
(\kappa(x)u'(x))' &\approx \frac{1}{h}\left(\kappa(x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) - \kappa(x_{i-1/2})u'(x_{i-1/2})\right) \\
&\approx \frac{1}{h}\left(\kappa_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right) - \kappa_{i-1/2}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)\right) \\
&\approx \frac{1}{h^2}\left(\kappa_{i-1/2}u_{i-1} - (\kappa_{i-1/2}+\kappa_{i+1/2})u_i + \kappa_{i+1/2}u_i\right)
\end{aligned}
$$

Meio Heterogêneo

Caso específico

O que resulta na seguinte matriz $\boldsymbol{A}$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -(\kappa_{1/2}+\kappa_{3/2}) & \kappa_{3/2} & & & \\ \kappa_{3/2} & -(\kappa_{3/2}+\kappa_{5/2}) & \kappa_{5/2} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \kappa_{m-3/2} & -(\kappa_{m-3/2}+\kappa_{m-1/2}) & \kappa_{m-1/2} \\ & & \kappa_{m-1/2} & -(\kappa_{m-1/2}+\kappa_{m+1/2}) \end{bmatrix}$$

Quando $\kappa(x)$ é descrito por funções descontínuas, os pontos nas interfaces são aproximados por uma média harmônica, isto e:

$$\kappa_{i+1/2} = \frac{2\kappa_i \kappa_{i+1}}{\kappa_i + \kappa_{i+1}}$$

Caso Geral

Sistema Linear

Além disso, u e f é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} \quad , \quad f = \begin{bmatrix} f_1 - \kappa_{1/2}\alpha \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m - \kappa_{m+1/2}\beta \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido

Meio Heterogêneo

Vamos construir uma equação diferencial na forma:

$$(\frac{1}{2}(x+1)u'(x))' = f(x)$$

Supondo $u(x) = x^2 - 1$, temos:

$$(\frac{1}{2}(x+1)(x^2-1)')' = f(x)$$

$$(\frac{1}{2}(x+1)2x)' = f(x)$$

$$2x + 1 = f(x)$$

Incluindo condições de contorno para deixar o problema bem-posto, temos:

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}(x+1)u'(x))' = 2x+1 & \text{para } x \in (0,1) \\ u(x) = -1 & \text{para } x = 0 \\ u(x) = 0 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Exercício Resolvido
Meio Heterogêneo

Deste modo, temos:

$$
\begin{aligned}
u_a &= -1 \\
u_b &= 0 \\
f_i &= 2x_i + 1 \\
\kappa_i &= \frac{1}{2}(x_i + 1)
\end{aligned}
$$

Tomando $h = 0.2$

$$
\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.2^2}\begin{bmatrix} -1.19 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0.65 & -1.39 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 & -1.59 & 0.85 \\ 0 & 0 & 0.85 & -1.79 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 15.04 \\ 1.8 \\ 2.2 \\ 2.6 \end{bmatrix}
$$

Exercício Resolvido

Meio Heterogêneo

Resolvendo o sistema $Au = f$, obtemos

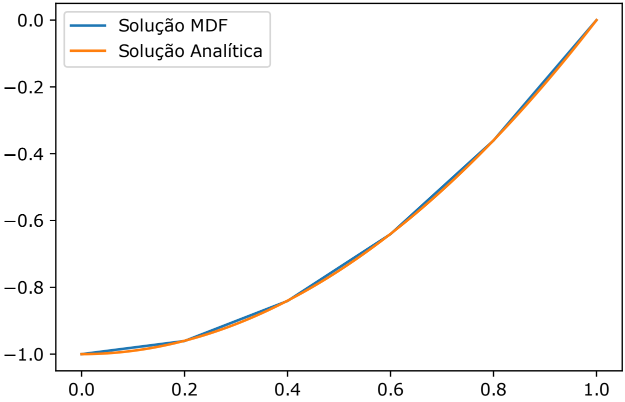
$$u = \begin{bmatrix} -0.96069785 \\ -0.84085405 \\ -0.64071449 \\ -0.36040629 \end{bmatrix}$$

Aplicando a condição de contorno

$$u = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -0.96069785 \\ -0.84085405 \\ -0.64071449 \\ -0.36040629 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido

Meio Heterogêneo



Exercícios

1. Resolva pelo MDF a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{k(x)du}{dx} + (37 - u) + g(x) = 0 & \text{para } x \in (0,1) \\ u(x) = 37 & \text{para } x = 0 \\ u(x) = 37 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

onde

$$k(x) = \begin{cases} 0.55 & \text{para } x \in [0.4, 0.6] \\ 0.45 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 4000 & \text{para } x \in [0.4, 0.6] \\ 400 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Considerando o caso geral e o meio heterogêneo. Tome $h = 0.1$ e $h = 0.01$ e compare os resultados

Referencias

Mark Hayden Holmes.
Introduction to numerical methods in differential equations.
Springer: Berlin, Germany, 2011.

Randall J LeVeque.
Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems.
SIAM, 2007.