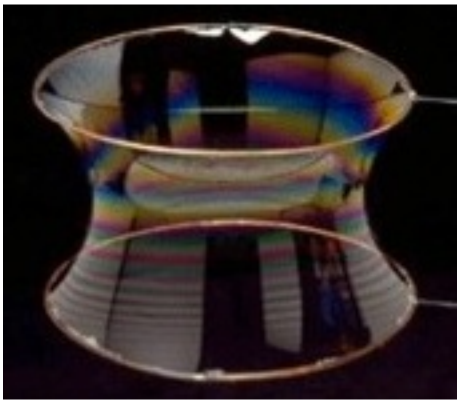
La forma de equilibrio que adopta la superficie libre de un fluido es aquella que minimiza la energía total del sistema con las restricciones que, en su caso, deban imponerse. En esta energía deben tenerse en cuenta, entre otras, la energía debida a la tensión superficial (proporcional al área) y la energía potencial (debida a la gravedad y/o a la rotación como sólido rígido).

La solución de este problema en los casos más sencillos (la catenoide) es conocida desde 1744 (fue estudiada por Euler) y es fácilmente reproducible experimentalmente mediante una pompa de jabón que se apoya en dos circunferencias paralelas y coaxiales, que actúan como soporte.



Suponiendo una superficie axilsimétrica, con un radio dado por $r = F(z)$, la energía superficial es proporcional (la constante de proporcionalidad es la tensión superficial, la energía por unidad de área) a la superficie que a su vez es proporcional a

$$A = \int_0^1 F\sqrt{1+\left(\frac{dF}{dx}\right)^2}\, dz \ ,$$

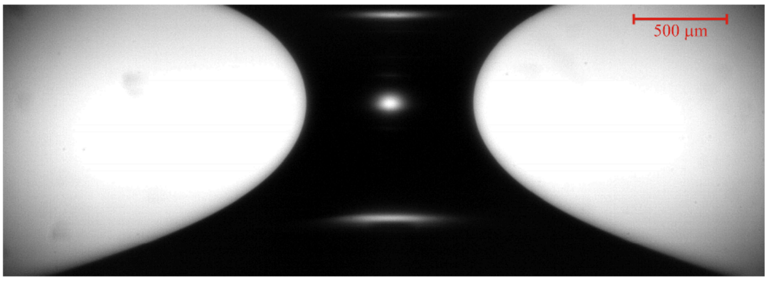
expresión que se obtiene después de adimensionalizar el problema adecuadamente, para que la distancia entre las circunferencias sea la unidad. Además, la superficie debe estar apoyada en ambas circunferencias. Si las dos circunferencias tienen igual radio, las condiciones de contorno son

$$F(z=0) = F(z=1) = F_0$$

Una ligadura fácil de reproducir experimentalmente es fijar el volumen encerrado por la superficie y los planos que contienen a las circunferencias, que es proporcional a

$$V = \int_0^1 F^2\, dz$$

En este caso el problema corresponde, físicamente, al equilibrio de una gota líquida anclada a dos soportes circulares sólidos paralelos, iguales o no.



Suponga que no conoce la solución analítica (aunque ésta, la catenoide cuando no se impone la restricción de volumen dado, pueda ser utilizada para ir comparando las diferentes soluciones que vayan obteniendo) y que se trata de obtener la solución $F(z)$ numéricamente. Para empezar, se considera el caso en que no se impone la restricción de volumen, y que los dos soportes tienen igual radio. Luego, se irán considerando casos más generales. A modo de índice, siga los siguientes pasos:

1.- Para el problema de minimizar el área A, con soportes iguales, es decir,

$$\min A, F(0) = F_0, F(1) = F_0,$$

discretice la función F en N valores de z, ($F_i(z_i)$), en principio equiespaciados (la solución puede exhibir comportamientos que hagan interesante utilizar diferentes espaciados o diferentes esquemas para el cálculo de la derivada).

2.- Elija, al menos, un método basado en el gradiente y encuentre la forma de equilibrio de la pompa analizando su variación con el radio F_0, el número de puntos en que se ha discretizado, la elección del esquema de espaciado y la forma de discretizar las derivadas.

3.- Repita el apartado 2 pero ahora eligiendo un método heurístico. Compare la eficiencia de unos y otros métodos en términos de la calidad de la solución obtenida y el esfuerzo de cálculo necesario.

4.- Calcule la ecuación de Euler asociada al problema continuo y resuélvala numéricamente. Compare esta solución con las obtenidas al optimizar el problema numéricamente (apartados 2 y 3) y la analítica (la catenoide). Este apartado es opcional y no es necesario para obtener nota máxima.

5.- Suponga ahora que la solución tiene que cumplir la restricción adicional (volumen dado):

$$\int_0^1 F^2\, dz = V$$

(donde V no debe ser muy diferente del valor correspondiente a la solución que se había obtenido anteriormente sin imponer la restricción. Si es demasiado diferente la solución puede ser inestable o no existir).

Repita los análisis anteriores estudiando la influencia de la restricción de volumen.

6.- Suponga ahora que la solución cumple ahora que los discos son desiguales, es decir, que las condiciones de contorno consideradas anteriormente se sustituyen por

$$F(0) = F_0 - \varepsilon$$
$$F(1) = F_0 + \varepsilon$$

(nuevamente, si ε es demasiado grande, la solución puede ser inestable o no existir). Repita los análisis anteriores estudiando la influencia del valor de ε.