第四章

立体几何初步

6.3 平面与平面垂直

内　容　标　准	学　科　素　养
1.理解二面角的有关概念，会作二面角的平面角，能求简单二面角的平面角的大小. 2.了解面面垂直的定义，掌握面面垂直的判定定理，初步学会用定理证明垂直关系. 3.掌握平面与平面垂直的性质，并能运用性质定理解决一些简单问题.	直观想象 逻辑推理 数学计算

课前・自主探究

[教材提炼]

知识点一　二面角

预习教材，思考问题

在平面几何中，我们先定义了角的概念，利用角刻画两条相交直线的位置关系，进而研究直线与直线互相垂直这种特殊情况，那么两个相交平面的位置关系如何刻画呢？

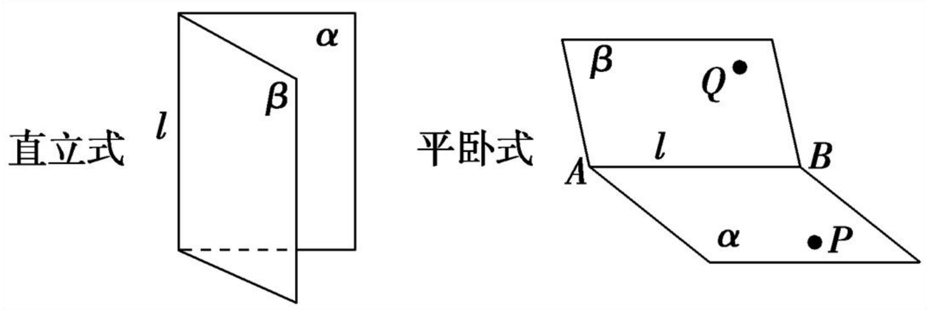
[提示]　这里我们需要引入二面角的概念，进而刻画两个相交平面的位置关系．

知识梳理 (1)定义：从一条直线出发的<u>两个半平面</u>所组成的图形.

(2)相关概念：

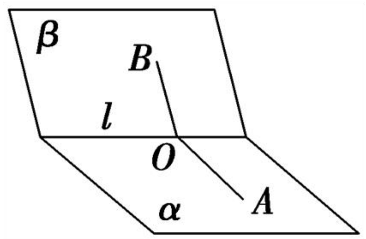
①这条直线叫二面角的<u>棱</u>，②两个半平面叫二面角的<u>面</u>.

(3)画法：



(4)记法：二面角 α-l-β 或 α-AB-β 或 P-l-Q.

(5)二面角的平面角：



若有①$O\in l$；②$OA\subset\alpha$，$OB\subset\beta$；③$OA\perp l$，$OB\perp l$，

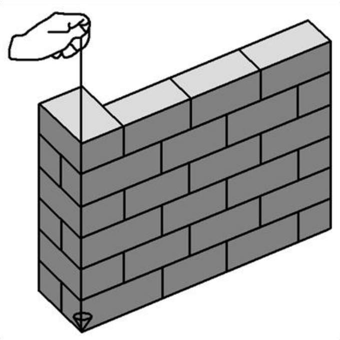
则二面角 α-l-β 的平面角是$\angle AOB$.

(6)二面角的平面角的取值范围：$\underline{0°\leqslant\alpha\leqslant180°}$.平面角是直角的叫做直二面角.

知识点二　平面与平面垂直

预习教材，思考问题

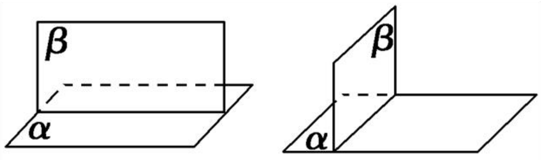
如图，建筑工人在砌墙时，常用铅锤来检测所砌的墙面与地面是否垂直．如果系有铅锤的细线紧贴墙面，工人师傅就认为墙面垂直于地面，否则他就认为墙面不垂直于地面．这种方法说明了什么道理？



[提示]　这种方法告诉我们，如果墙面经过地面的垂线，那么墙面和地面垂直．

知识梳理 (1)定义：如果两个平面相交，且它们所成的二面角是<u>直二面角</u>，就说这两个平面互相垂直.

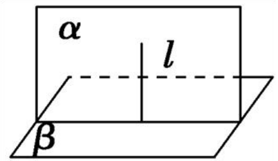
(2)画法：



记作：$\alpha\perp\beta$.

(3)判定定理：如果一个平面过另一个平面的<u>垂线</u>，那么这两个平面垂直.

图形表示：



符号表示：$l\subset\alpha$，$l\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

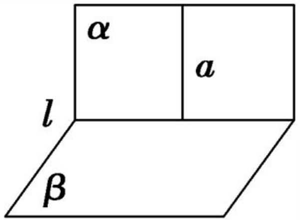
知识点三　平面与平面垂直的性质定理

预习教材，思考问题

如果两个平面垂直，那么一个平面内的直线与另一个平面有什么位置关系呢？如果直线和它们的交线垂直，那么这条直线和另一个平面垂直吗？

[提示]　平行或相交；如果直线和交线垂直，则这条直线和另一个平面垂直．

知识梳理 文字叙述：两个平面垂直，则__一个平面内__垂直于__交线__的直线与另一个平面__垂直__.

图形表示：

符号表示：$\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$.

[自主检测]

1．已知平面 α、β 和直线 m、l，则下列命题中正确的是(　　)

A．若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\perp m$，则 $l\perp\beta$

B．若 $\alpha\cap\beta=m$，$l\subset\alpha$，$l\perp m$，则 $l\perp\beta$

C．若 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则 $l\perp\beta$

D．若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\subset\alpha$，$l\perp m$，则 $l\perp\beta$

解析： 选项 A 缺少了条件：$l\subset\alpha$；选项 B 缺少了条件：$\alpha\perp\beta$；选项 C 缺少条件 $\alpha\cap\beta=m$，$l\perp m$；选项 D 具备了面面垂直的性质定理的全部条件．

答案： D

2．设 l 是直线，α，β 是两个不同的平面(　　)

A．若 $l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

B．若 $l/\!/\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C．若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则 $l\perp\beta$

D．若 $\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$，则 $l\perp\beta$

解析： 对于选项 A，两平面可能平行也可能相交；对于选项 C，直线 l 可能在 β 内也可能平行于 β；对于选项 D，直线 l 可能在 β 内或平行于 β 或与 β 相交．

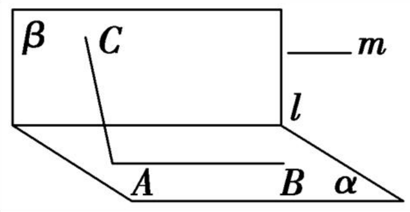
答案： B

3．已知平面 $\alpha\perp$平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，点 $A\in\alpha$，$A\notin l$，直线 $AB\parallel l$，直线 $AC\perp l$，直线 $m\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则下列四种位置关系中，不一定成立的是(　　)

A．$AB\parallel m$　　B．$AC\perp m$

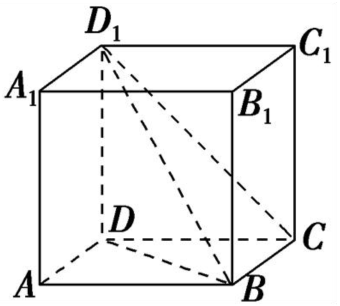
C．$AB\parallel\beta$　　D．$AC\perp\beta$

解析：如图所示．$AB\parallel l\parallel m$；$AC\perp l$，$m\parallel l\Rightarrow AC\perp m$；$AB\parallel l\Rightarrow AB\parallel\beta$，故选 D.



答案：D

4．如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $D_1\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角的大小为________．



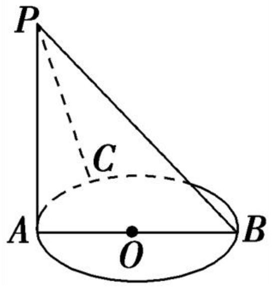
解析：在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp CD$，$BC\perp CC_1$，$CD\cap CC_1=C$，$\therefore BC\perp$平面 D_1C.

又 $D_1C\subset$ 平面 D_1C，$\therefore BC\perp D_1C$，$\therefore \angle D_1CD$ 是二面角 $D_1\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角.

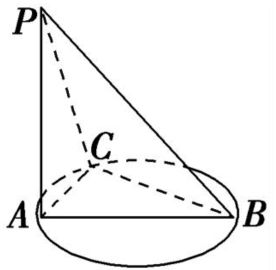
在$\triangle D_1CD$ 中，$D_1D\perp CD$，$D_1D=CD$，$\therefore \angle D_1CD=45°$，即二面角 $D_1\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角的大小是 45°.

答案：45°

5．如图，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O 所在的平面，C 是圆周上异于 A、B 的任意一点，求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.



证明： 如图，连接 AC，BC，则 $BC\perp AC$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，



$\therefore PA\perp BC$，而 $PA\cap AC=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC，

又 $BC\subset$ 平面 PBC，

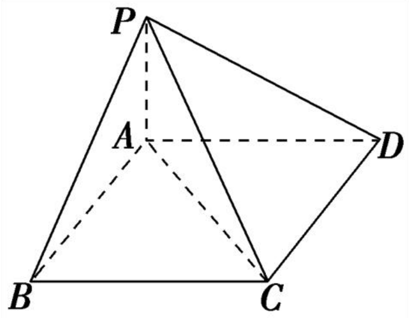
$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 面 PBC.

课堂 · 互动探究

以例示法 核心突破

探究一 二面角

[例 1] 如图，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$平面 $ABCD$.



(1)求二面角 B-PA-D 平面角的度数；

(2)求二面角 B-PA-C 平面角的度数.

[解析] (1)∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$AB\perp PA$，$AD\perp PA$.

∴$\angle BAD$为二面角B-PA-D的平面角.

又由题意$\angle BAD=90°$，

∴二面角B-PA-D平面角的度数为$90°$.

(2)∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$AB\perp PA$，$AC\perp PA$.

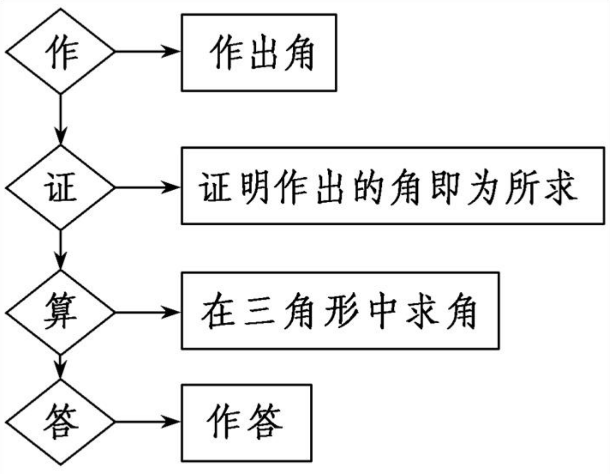
∴$\angle BAC$为二面角B-PA-C的平面角.

又四边形$ABCD$为正方形，∴$\angle BAC=45°$.

即二面角B-PA-C平面角的度数为$45°$.

方法提升

1.求二面角同求异面直线所成的角及斜线与平面所成的角一样，步骤如下：

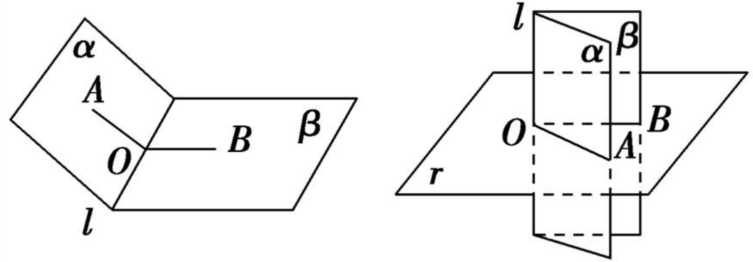


2．作二面角平面角的常用方法

(1)定义法：在二面角的棱上找一个特殊点，在两个半平面内分别作垂直于棱的射线．如图①，则$\angle AOB$为二面角$\alpha\text{-}l\text{-}\beta$的平面角．

(2)垂面法：过棱上一点作棱的垂直平面，该平面与二面角的两个半平面产生交线，这两条交线所成的角，即为二面角的平面角．如图②，$\angle AOB$为二面角$\alpha\text{-}l\text{-}\beta$的平面角．

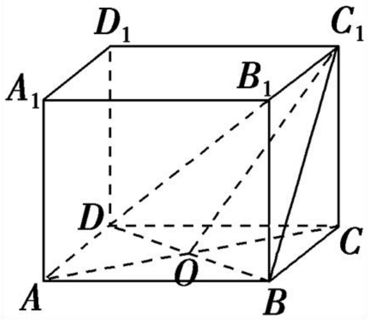
(3)垂线法：过二面角的一个面内异于棱上的 A 点向另一个平面作垂线，垂足为 B，由点 B 向二面角的棱作垂线，垂足为 O，连接 AO，则$\angle AOB$ 为二面角的平面角或其补角．如图③，$\angle AOB$ 为二面角 α-l-β 的平面角．



图①　　图②　　图③

同源异考　重在触类旁通

1．在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2\sqrt{3}$，$CC_1=\sqrt{2}$，则二面角 $C_1\text{-}BD\text{-}C$ 的大小为________.



解析： 如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 C_1O，

$\because C_1D=C_1B$，O 为 BD 中点，

$\therefore C_1O\perp BD$，$\because AC\perp BD$，

$\therefore \angle C_1OC$ 是二面角 $C_1\text{-}BD\text{-}C$ 的平面角，

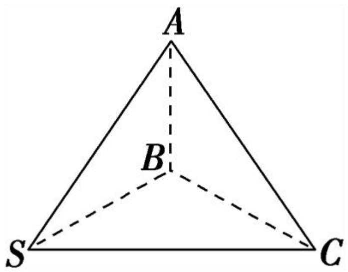
在 $\text{Rt}\triangle C_1CO$ 中，$C_1C=\sqrt{2}$，可以计算 $C_1O=2\sqrt{2}$，

$\therefore \sin\ \angle C_1OC=\dfrac{C_1C}{C_1O}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle C_1OC=30°$.

答案：30°

探究二　平面与平面垂直的判定

[例 2]　如图，已知$\angle BSC=90°$，$\angle BSA=\angle CSA=60°$，又 $SA=SB=SC$.求证：平面 $ABC\perp$ 平面 SBC.



[证明] ∵$SA=SB=SC$，且$\angle BSA=\angle CSA=60°$，

∴$SA=AB=AC$，

∴点 A 在平面 SBC 上的射影为$\triangle SBC$ 的外心.

∵$\triangle SBC$ 为直角三角形，

∴点 A 在$\triangle SBC$ 上的射影 D 为斜边 BC 的中点，

∴$AD\perp$平面 SBC.

又∵$AD\subset$平面 ABC，∴平面 $ABC\perp$平面 SBC.

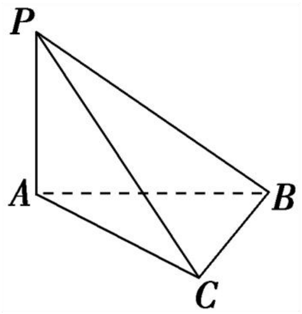
方法提升

证明平面与平面垂直的方法有两个

(1)利用定义：证明二面角的平面角为直角；

(2)利用面面垂直的判定定理：要证面面垂直，只要证线面垂直．即在其中一个平面内寻找一条直线与另一个平面垂直．这是证明面面垂直的常用方法．

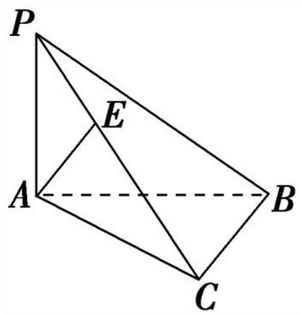
探究三　平面与平面垂直的性质



[例 3]　如图，P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点，且 $PA\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，

求证：$BC\perp AC$.

[证明]　过 A 作 $AE\perp PC$ 于 E，由平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，可知 $AE\perp$ 平面 PBC.



又 $BC\subset$ 平面 PBC，故 $AE\perp BC$.

又 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，故 $PA\perp BC$.

$\because PA\cap AE=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.

又 $AC\subset$ 平面 PAC，故 $BC\perp AC$.

方法提升

1.在运用面面垂直的性质定理时，若没有与交线垂直的直线，一般需作辅助线，基本作法是过其中一个平面内一点作交线的垂线，这样便把面面垂直问题转化为线面垂直问题，进而转化为线线垂直问题.

2．平面与平面垂直的其他性质

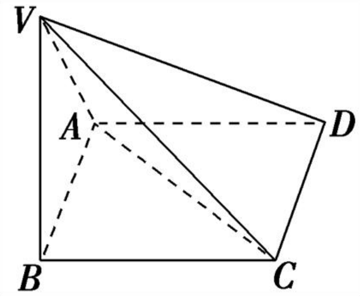
(1)如果两个平面垂直，那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

(2)如果两个平面垂直，那么与其中一个平面平行的平面垂直于另一个平面.

(3)如果两个平面垂直，那么其中一个平面的垂线平行于另一个平面或在另一个平面内.

同源异考 重在触类旁通

2. 如图，四棱锥 V-$ABCD$ 的底面是矩形，侧面 $VAB\perp$底面 $ABCD$，又 $VB\perp$平面 VAD.



求证：平面 $VBC\perp$平面 VAC.

证明： $\because$平面 $VAB\perp$平面 $ABCD$，且 $BC\perp AB$.

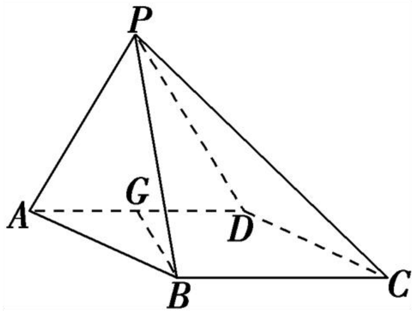
$\therefore BC\perp$平面 VAB，$\therefore BC\perp VA$，

又 $VB\perp$平面 VAD，$\therefore VB\perp VA$，又 $VB\cap BC=B$，$\therefore VA\perp$平面 VBC，

$\because VA\subset$平面 VAC.$\therefore$平面 $VBC\perp$平面 VAC.

探究四　线线、线面、面面垂直的综合应用

[例 4]　如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 的菱形，且 $\angle DAB=60°$，侧面 PAD 为正三角形，其所在的平面垂直于底面 $ABCD$.



(1)若 G 为 AD 边的中点，求证：$BG\perp$平面 PAD；

(2)求证：$AD\perp PB$.

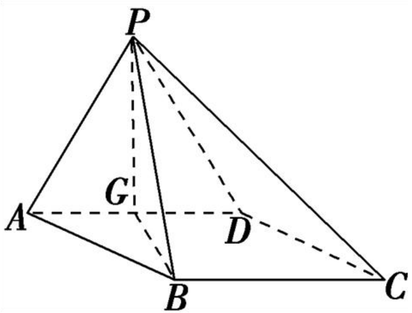
[证明] (1)∵在菱形 $ABCD$ 中，G 为 AD 的中点，$\angle DAB=60°$，

∴$BG\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，

∴$BG\perp$平面 PAD.

(2)连接 PG，如图，



∵$\triangle PAD$ 为正三角形，G 为 AD 的中点，

∴$PG\perp AD$.

由(1)知 $BG\perp AD$，$PG\cap BG=G$，

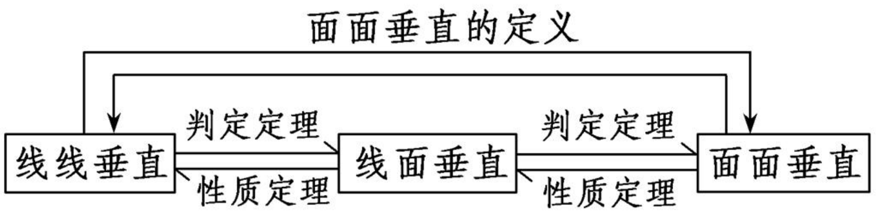
∴$AD\perp$平面 PGB，

∵$PB\subset$平面 PGB，∴$AD\perp PB$.

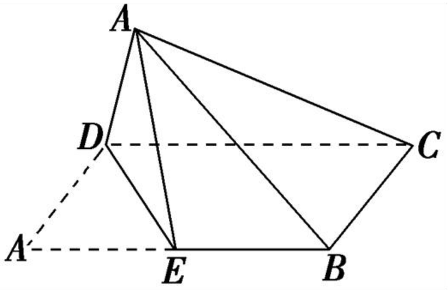
方法提升

1．证明线面垂直，一种方法是利用线面垂直的判定定理，另一种方法是利用面面垂直的性质定理.

2．面面垂直的性质定理揭示了“面面垂直、线面垂直及线线垂直”间的内在联系，体现了数学中的化归转化思想，其转化关系如下：



同源异考 重在触类旁通



3．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，E 是 AB 的中点，沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起.

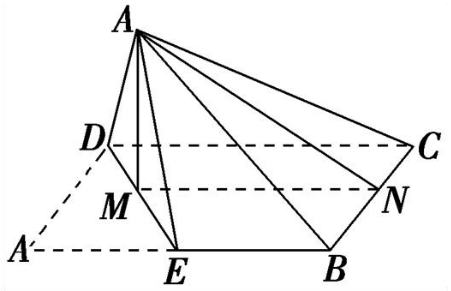
(1)如果二面角 A-DE-C 是直二面角，求证：$AB=AC$；

(2)如果 $AB=AC$，求证：平面 $ADE\perp$ 平面 $BCDE$.

证明：(1)过点 A 作 $AM\perp DE$ 于点 M，则 $AM\perp$平面 $BCDE$,

$\therefore AM\perp BC$.又 $AD=AE$，

$\therefore M$ 是 DE 的中点，取 BC 中点 N，连接 MN，AN，则 $MN\perp BC$.



$\therefore BC\perp$平面 AMN，$\therefore AN\perp BC$.

又$\because N$ 是 BC 中点，$\therefore AB=AC$.

(2)$\because AB=AC$，$\therefore AN\perp BC$.

取 DE 的中点 M，连接 MN，AM，$\therefore MN\perp BC$.又 $AN\cap MN=N$，

$\therefore BC\perp$平面 AMN，$\therefore AM\perp BC$.

又 M 是 DE 的中点，$AD=AE$，$\therefore AM\perp DE$.

又$\because DE$ 与 BC 是平面 $BCDE$ 内的相交直线，$\therefore AM\perp$平面 $BCDE$.

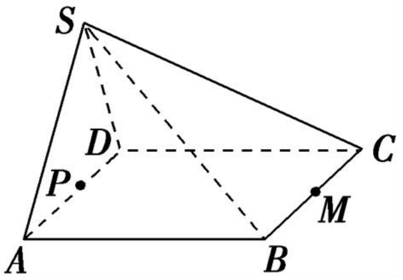
$\because AM\subset$ 平面 ADE，$\therefore$平面 $ADE\perp$平面 $BCDE$.

课后·素养培优

素养拓展 能力提升

一、立体几何中的探索性问题 ►直观想象、逻辑推理、数学运算

[典例 1] 如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$. 四边形 $ABCD$ 为正方形，且 P 为 AD 的中点.



(1)求证：$CD\perp$平面 SAD.

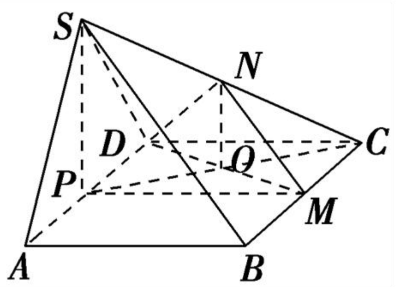
(2)若 $SA=SD$，M 为 BC 的中点，在棱 SC 上是否存在点 N，使得平面 $DMN\perp$平面 $ABCD$，并证明你的结论.

[解析] (1)证明：因为四边形$ABCD$为正方形，所以$CD\perp AD$.

又平面$SAD\perp$平面$ABCD$，且平面$SAD\cap$平面$ABCD=AD$，所以$CD\perp$平面SAD.

(2)存在点N为SC的中点，使得平面$DMN\perp$平面$ABCD$.

连接PC、DM交于点O，连接PM、SP、NM、ND、NO.



因为$PD\parallel CM$，且$PD=CM$，

所以四边形$PMCD$为平行四边形，所以$PO=CO$.

又因为N为SC的中点，所以$NO\parallel SP$.

易知$SP\perp AD$，因为平面$SAD\perp$平面$ABCD$，平面$SAD\cap$平面$ABCD=AD$，并且$SP\perp AD$，

所以$SP\perp$平面$ABCD$，

所以$NO\perp$平面$ABCD$.

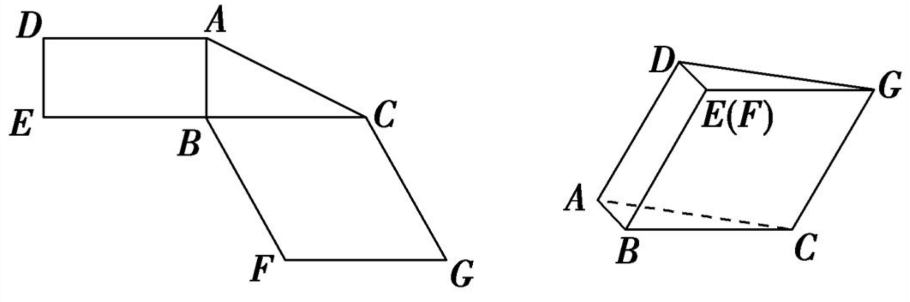
又因为$NO\subset$平面DMN，

所以平面$DMN\perp$平面$ABCD$.

[素养提升] 解决探究性问题一般要采用执果索因的方法，假设求解的结果存在，从这个结果出发，寻找使这个结论成立的充分条件.

二、立体几何中的折叠问题 ►数学抽象、直观想象、逻辑推理

[典例 2] (2019·高考全国卷Ⅲ) 图①是由矩形 $ADEB$，$Rt\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，$BE=BF=2$，$\angle FBC=60°$.将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连接 DG，如图②.



图①　　图②

(1)证明：图②中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC\perp$平面 $BCGE$；

(2)求图②中的四边形 $ACGD$ 的面积.

[解析] (1)证明：由已知得$AD\parallel BE$，$CG\parallel BE$，所以$AD\parallel CG$，

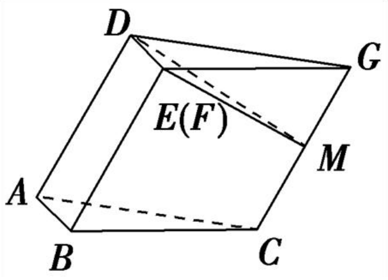
故AD，CG确定一个平面，从而A，C，G，D四点共面.

由已知得$AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

(2)取CG的中点M，连接EM，DM.

因为$AB\parallel DE$，$AB\perp$平面$BCGE$，所以$DE\perp$平面$BCGE$，故$DE\perp CG$.



由已知，四边形$BCGE$是菱形，且$\angle EBC=60°$，得$EM\perp CG$，故$CG\perp$平面DEM.

因此$DM\perp CG$.

在Rt△DEM中，$DE=1$，$EM=\sqrt{3}$，

故$DM=2$.

所以四边形$ACGD$的面积为4.

[素养提升]　折叠问题的关键是抓住折叠前后的变量和不变量，转化为立体图形求解.