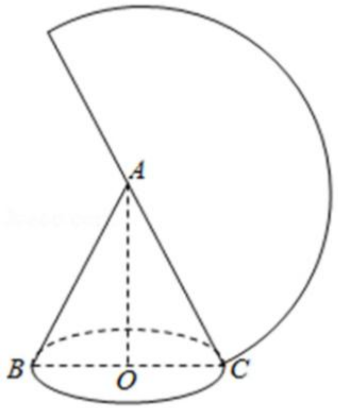
# 真题提升课

# 考点一　空间几何体的侧面积和表面积

6.（2020•浙江）已知圆锥的侧面积（单位：$cm^2$）为 $2\pi$，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面半径（单位：$cm$）是____.

【详细解析】∵圆锥侧面展开图是半圆，面积为 $2\pi\, cm^2$，




设圆锥的母线长为 $acm$，则 $\frac{1}{2}\times a^2\pi=2\pi$，$\therefore a=2cm$，

$\therefore$侧面展开扇形的弧长为 $2\pi\, cm$，

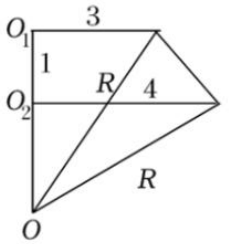
设圆锥的底面半径 $OC=rcm$，则 $2\pi r=2\pi$，解得 $r=1cm$．

故答案为：$1cm$．

7.（2022•新高考Ⅱ）已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为(　　)

A．$100\pi$　　B．$128\pi$　　C．$144\pi$　　D．$192\pi$

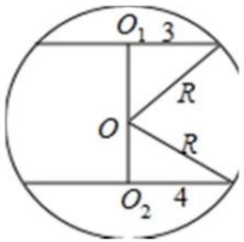
【详细解析】当球心在台体外时，由题意得，上底面所在平面截球所得圆的半径为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=3$，下底面所在平面截球所得圆的半径为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=4$，如图，




设球的半径为 $R$，则轴截面中由几何知识可得 $\sqrt{R^2-3^2}-\sqrt{R^2-4^2}=1$，解得 $R=5$，

$\therefore$ 该球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times 25=100\pi$．

当球心在台体内时，如图，




此时 $\sqrt{R^2-3^2}+\sqrt{R^2-4^2}=1$，无解．

综上，该球的表面积为 $100\pi$．

故选：$A$．

# 考点二  空间几何体的体积

10.（2022•新高考Ⅰ）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库．已知该水库水位为海拔 $148.5m$ 时，相应水面的面积为 $140.0km^2$；水位为海拔 $157.5m$ 时，相应水面的面积为 $180.0km^2$．将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 $148.5m$ 上升到 $157.5m$ 时，增加的水量约为 $(\sqrt{7}\approx 2.65)$(　　)

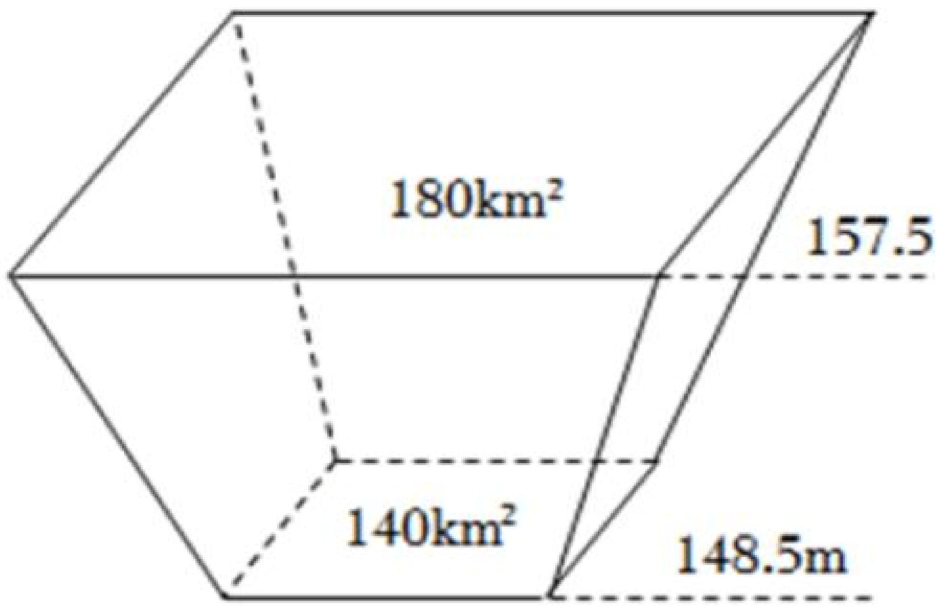
A．$1.0\times 10^9m^3$　　B．$1.2\times 10^9m^3$　　C．$1.4\times 10^9m^3$　　D．$1.6\times 10^9m^3$

【详细解析】$140km^2=140\times10^6m^2$，$180km^2=180\times10^6m^2$，

根据题意，增加的水量约为$\dfrac{140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times10^6\times180\times10^6}}{3}\times(157.5-148.5)$

$=\dfrac{(140+180+60\sqrt{7})\times10^6}{3}\times9$

$\approx(320+60\times2.65)\times10^6\times3=1437\times10^6\approx1.4\times10^9m^3$．故选：$C$．



12.【多选】（2023•新高考Ⅰ）下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：$m$)的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有(　　)

A. 直径为 $0.99m$ 的球体

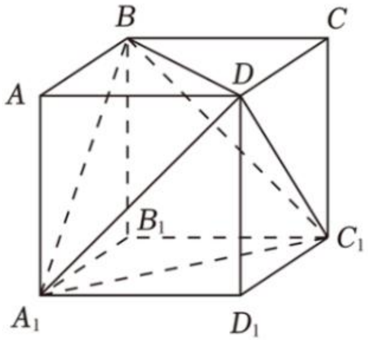
B. 所有棱长均为 $1.4m$ 的四面体

C. 底面直径为 $0.01m$，高为 $1.8m$ 的圆柱体

D. 底面直径为 $1.2m$，高为 $0.01m$ 的圆柱体

【详细解析】对于 $A$，棱长为 1 的正方体内切球的直径为$1>0.99$，选项 $A$ 正确；

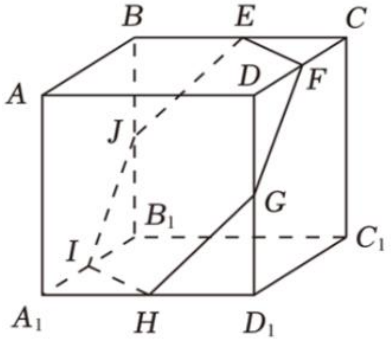
对于 $B$，如图，

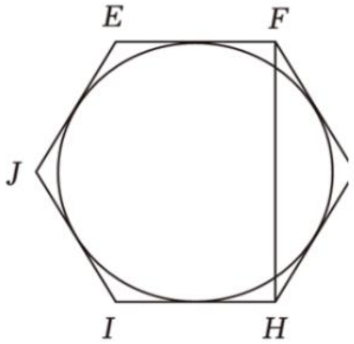



正方体内部最大的正四面体 $D-A_1BC_1$ 的棱长为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}>1.4$，选项 $B$ 正确；

对于 $C$，棱长为 1 的正方体的体对角线为 $\sqrt{3}<1.8$，选项 $C$ 错误；

对于 $D$，如图，六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形，$E$，$F$，$G$，$H$，$I$，$J$ 为棱的中点，




高为 0.01 米可忽略不计，看作直径为 1.2 米的平面圆，

六边形 $EFGHIJ$ 棱长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 米，$\angle GFH=\angle GHF=30^\circ$，

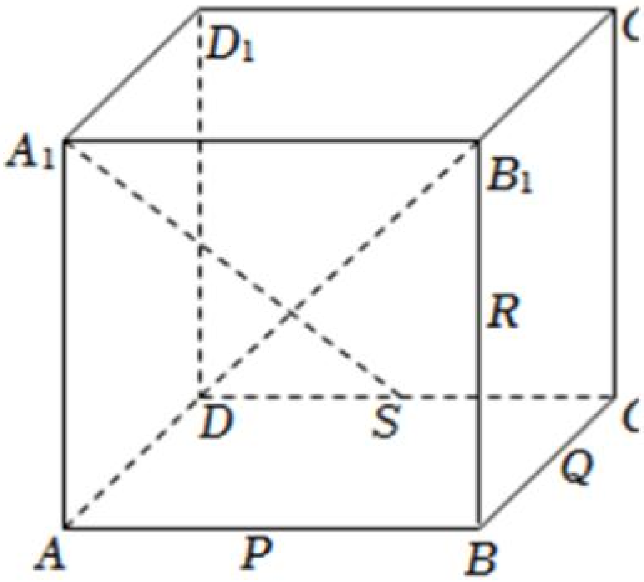
所以 $FH=\sqrt{3}FG=\sqrt{3}GH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 米，故六边形 $EFGHIJ$ 内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 米，

而 $(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2=\dfrac{3}{2}>(1.2)^2=1.44$，选项 $D$ 正确.

故选：$ABD$.

# 考点三 空间中直线与直线之间的位置关系

20.（2022•上海）如图正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$P$、$Q$、$R$、$S$ 分别为棱 $AB$、$BC$、$BB_1$、$CD$ 的中点，联结 $A_1S$，$B_1D$．空间任意两点 $M$、$N$，若线段 $MN$ 上不存在点在线段 $A_1S$、$B_1D$ 上，则称 $MN$ 两点可视，则下列选项中与点 $D_1$ 可视的为（　　）

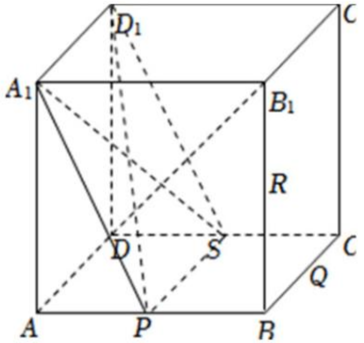



A．点 $P$　　B．点 $B$　　C．点 $R$　　D．点 $Q$

【详细解析】线段 $MN$ 上不存在点在线段 $A_1S$ 、$B_1D$ 上，即直线 $MN$ 与线段 $A_1S$ 、$B_1D$ 不相交，因此所求与 $D_1$ 可视的点，即求哪条线段不与线段 $A_1S$ 、$B_1D$ 相交，

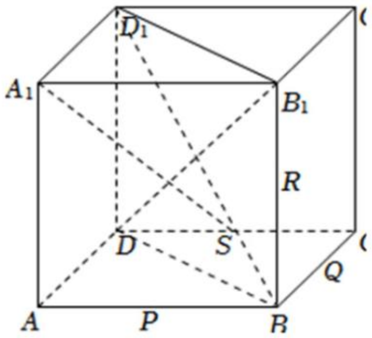
对 $A$ 选项，如图，连接 $A_1P$ 、$PS$ 、$D_1S$ ，因为 $P$ 、$S$ 分别为 $AB$ 、$CD$ 的中点，

$\therefore$ 易证 $A_1D_1//PS$ ，故 $A_1$ 、$D_1$ 、$P$ 、$S$ 四点共面，$\therefore D_1P$ 与 $A_1S$ 相交，$\therefore A$ 错误；




对 $B$ 、$C$ 选项，如图，连接 $D_1B$ 、$DB$ ，易证 $D_1$ 、$B_1$ 、$B$ 、$D$ 四点共面，

故 $D_1B$ 、$D_1R$ 都与 $B_1D$ 相交，$\therefore B$ 、$C$ 错误；




对 $D$ 选项，连接 $D_1Q$ ，由 $A$ 选项分析知 $A_1$ 、$D_1$ 、$P$ 、$S$ 四点共面记为平面 $A_1D_1PS$ ，

$\because D_1 \in$ 平面 $A_1D_1PS$ ，$Q \notin$ 平面 $A_1D_1PS$ ，且 $A_1S \subset$ 平面 $A_1D_1PS$ ，点 $D_1 \notin A_1S$ ，

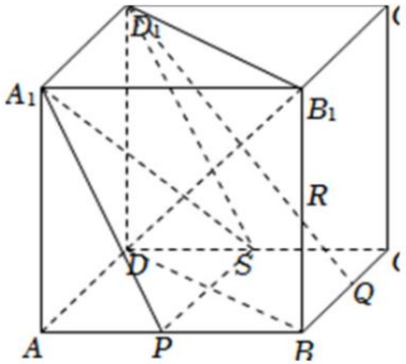
$\therefore D_1Q$ 与 $A_1S$ 为异面直线，

同理由 $B$ ，$C$ 选项的分析知 $D_1$ 、$B_1$ 、$B$ 、$D$ 四点共面记为平面 $D_1B_1BD$ ，

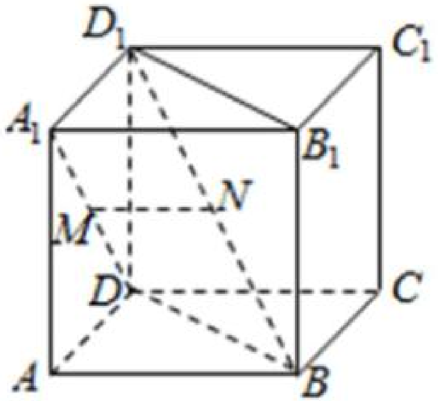
$\because D_1 \in$ 平面 $D_1B_1BD$ ，$Q \notin$ 平面 $D_1B_1BD$ ，且 $B_1D \subset$ 平面 $D_1B_1BD$ ，点 $D_1 \notin B_1D$ ，

$\therefore D_1Q$ 与 $B_1D$ 为异面直线，

故 $D_1Q$ 与 $A_1S$ ，$B_1D$ 都没有公共点，$\therefore D$ 选项正确．



21.（2021•浙江）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$M$，$N$ 分别是 $A_1D$，$D_1B$ 的中点，则(　　)




A. 直线 $A_1D$ 与直线 $D_1B$ 垂直，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

B. 直线 $A_1D$ 与直线 $D_1B$ 平行，直线 $MN\perp$ 平面 $BDD_1B_1$

C. 直线 $A_1D$ 与直线 $D_1B$ 相交，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

D. 直线 $A_1D$ 与直线 $D_1B$ 异面，直线 $MN\perp$ 平面 $BDD_1B_1$

【详细解析】连接 $AD_1$，如图：

由正方体可知 $A_1D \perp AD_1$， $A_1D \perp AB$， $\therefore A_1D \perp$ 平面 $ABD_1$，

$\therefore A_1D \perp D_1B$，由题意知 $MN$ 为 $\triangle D_1AB$ 的中位线，$\therefore MN // AB$，

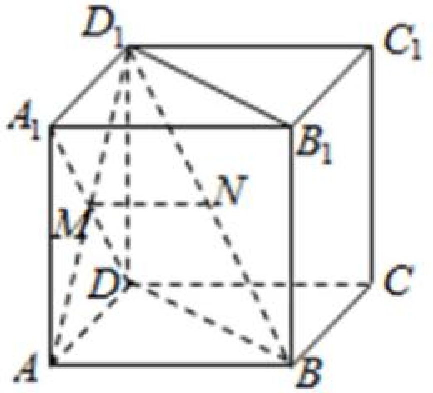
又 $\because AB \subset$ 平面 $ABCD$， $MN \not\subset$ 平面 $ABCD$， $\therefore MN //$ 平面 $ABCD$． $\therefore A$ 对；

由正方体可知 $A_1D$ 与平面 $BDD_1$ 相交于点 $D$， $D_1B \subset$ 平面 $BDD_1$， $D \notin D_1B$，

$\therefore$ 直线 $A_1D$ 与直线 $D_1B$ 是异面直线，$\therefore B$、$C$ 错；

$\because MN // AB$， $AB$ 不与平面 $BDD_1B_1$ 垂直，$\therefore MN$ 不与平面 $BDD_1B_1$ 垂直，$\therefore D$ 错．

故选： $A$．



# 考点四　异面直线以及所成角

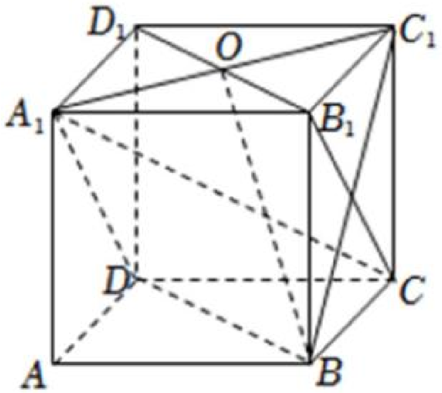
24.【多选】（2022•新高考Ⅰ）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A．直线 $BC_1$ 与 $DA_1$ 所成的角为 $90°$

B．直线 $BC_1$ 与 $CA_1$ 所成的角为 $90°$

C．直线 $BC_1$ 与平面 $BB_1D_1D$ 所成的角为 $45°$

D．直线 $BC_1$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$




连接 $B_1C$，由 $A_1B_1//DC$， $A_1B_1=DC$，得四边形 $DA_1B_1C$ 为平行四边形，

可得 $DA_1//B_1C$， $\because BC_1\perp B_1C$， $\therefore$ 直线 $BC_1$ 与 $DA_1$ 所成的角为 $90°$，故 $A$ 正确；

$\because A_1B_1\perp BC_1$， $BC_1\perp B_1C$， $A_1B_1\cap B_1C=B_1$， $\therefore BC_1\perp$ 平面 $DA_1B_1C$，而 $CA_1\subset$ 平面 $DA_1B_1C$，

$\therefore BC_1\perp CA_1$，即直线 $BC_1$ 与 $CA_1$ 所成的角为 $90°$，故 $B$ 正确；

设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，连接 $BO$，可得 $C_1O\perp$ 平面 $BB_1D_1D$，即 $\angle C_1BO$ 为直线 $BC_1$ 与平面 $BB_1D_1D$ 所成的角，

$\because \sin\angle C_1BO=\dfrac{OC_1}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore$ 直线 $BC_1$ 与平面 $BB_1D_1D$ 所成的角为 $30°$，故 $C$ 错误；

$\because CC_1\perp$ 底面 $ABCD$， $\therefore \angle C_1BC$ 为直线 $BC_1$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，故 $D$ 正确．

故选： $ABD$．

# 考点五 空间中直线与平面之间的位置关系

25.（2019•上海）已知平面α、β、γ两两垂直，直线$a$、$b$、$c$满足：$a\subseteq\alpha$，$b\subseteq\beta$，$c\subseteq\gamma$，则直线$a$、$b$、$c$不可能满足以下哪种关系（　　）

A. 两两垂直　　B. 两两平行　　C. 两两相交　　D. 两两异面

【详细解析】如图 1，可得$a$、$b$、$c$可能两两垂直；

如图 2，可得$a$、$b$、$c$可能两两相交；

如图 3，可得$a$、$b$、$c$可能两两异面；

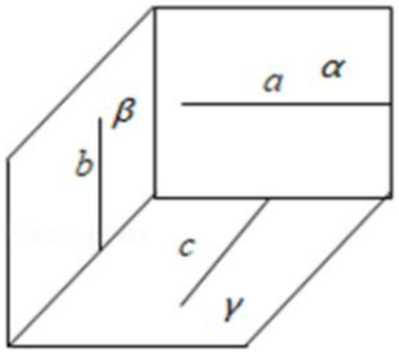


图1

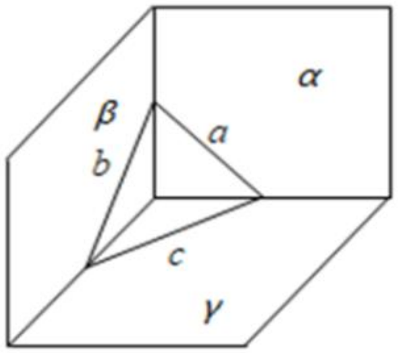


图2

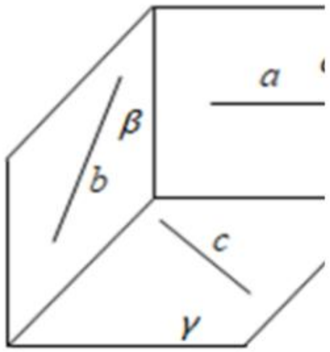


图3

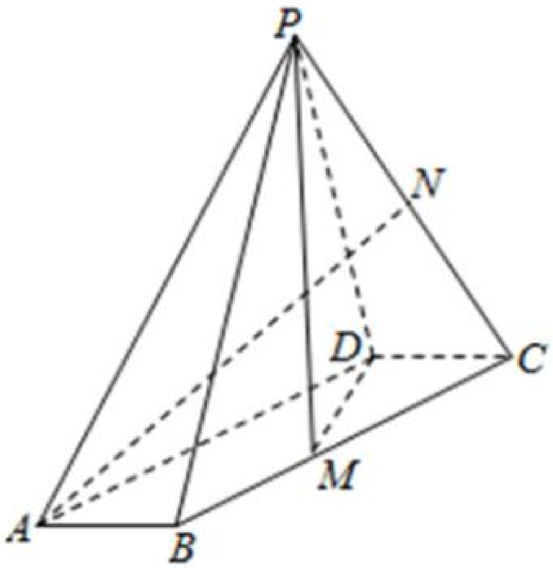
故选：$B$.

# 考点六 直线与平面所成的角

29.（2021•浙江）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120^{\circ}$，$AB=1$，$BC=4$，$PA=\sqrt{15}$，$M$，$N$ 分别为 $BC$，$PC$ 的中点，$PD\perp DC$，$PM\perp MD$.

（Ⅰ）证明：$AB\perp PM$；

（Ⅱ）求直线 $AN$ 与平面 $PDM$ 所成角的正弦值.



【详细解析】（Ⅰ）证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，由已知可得，$CD=AB=1$，

$CM=\frac{1}{2}BC=2$，$\angle DCM=60^{\circ}$，

$\therefore$ 由余弦定理可得，$DM^{2}=CD^{2}+CM^{2}-2CD\times CM\times\cos60^{\circ}$

$=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

则 $CD^{2}+DM^{2}=1+3=4=CM^{2}$，即 $CD\perp DM$，

又 $PD\perp DC$，$PD\bigcap DM=D$，$\therefore CD\perp$ 平面 $PDM$，

而 $PM\subset$ 平面 $PDM$，$\therefore CD\perp PM$，

$\because CD//AB$，$\therefore AB\perp PM$；

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知，$CD\perp$平面$PDM$，

又$CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore$平面$ABCD\perp$平面$PDM$，

且平面$ABCD\cap$平面$PDM=DM$，

$\because PM\perp MD$，且$PM\subset$平面$PDM$，$\therefore PM\perp$平面$ABCD$，

连接$AM$，则$PM\perp MA$，

在$\Delta ABM$中，$AB=1$，$BM=2$，$\angle ABM=120^{\circ}$，

可得$AM^2=1+4-2\times1\times2\times(-\dfrac{1}{2})=7$，

又$PA=\sqrt{15}$，在RtΔPMA中，求得$PM=\sqrt{PA^2-MA^2}=2\sqrt{2}$，

取$AD$中点$E$，连接$ME$，则$ME//CD$，可得$ME$、$MD$、$MP$两两互相垂直，

以$M$为坐标原点，分别以$MD$、$ME$、$MP$为$x$、$y$、$z$轴建立空间直角坐标系，

则$A(-\sqrt{3}，2，0)$，$P(0，0，2\sqrt{2})$，$C(\sqrt{3},-1,0)$，

又$N$为$PC$的中点，$\therefore N(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AN}=(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2},\sqrt{2})$，

平面$PDM$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，

设直线$AN$与平面$PDM$所成角为$\theta$，

则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AN},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{25}{4}+2\times1}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

故直线$AN$与平面$PDM$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.