高中数学

第一章-集合

考试内容：

集合、子集、补集、交集、并集．

逻辑联结词．四种命题．充分条件和必要条件．

考试要求：

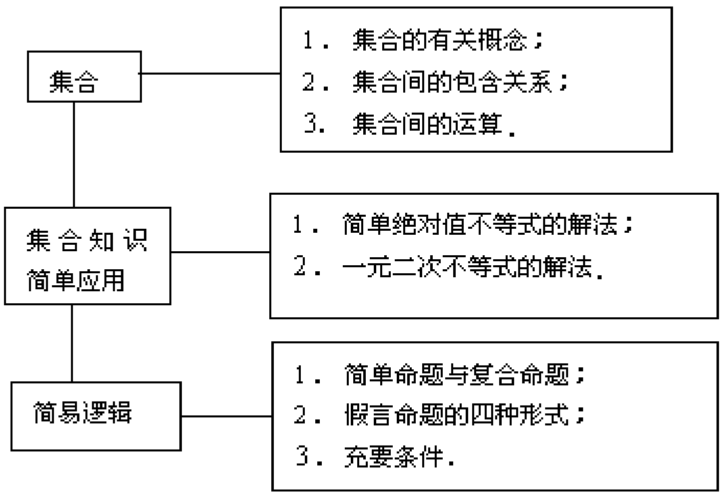
（1）理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合．

（2）理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义理解四种命题及其相互关系；掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义．

§01. 集合与简易逻辑　知识要点

一、知识结构：

本章知识主要分为集合、简单不等式的解法（集合化简）、简易逻辑三部分：



二、知识回顾：

（一） 集合

1. 基本概念：集合、元素；有限集、无限集；空集、全集；符号的使用．
2. 集合的表示法：列举法、描述法、图形表示法．

集合元素的特征：确定性、互异性、无序性．

集合的性质：

①任何一个集合是它本身的子集，记为 $A\subseteq A$；

②空集是任何集合的子集，记为 $\phi\subseteq A$；

③空集是任何非空集合的真子集；

如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

[注]：①Z= {整数}（√）　Z ={全体整数}　（×）

②已知集合 S 中 A 的补集是一个有限集，则集合 A 也是有限集.（×）（例：S=N；　A=

N^+，则 C_sA= {0}）

③空集的补集是全集.

④若集合 A=集合 B，则 $C_B A=\varnothing$，$C_A B=\varnothing$　C_S（$C_A B$）=D　（注：$C_A B=\varnothing$）.

3. ①{（x，y）|xy =0，$x\in R$，$y\in R$}坐标轴上的点集.

②{（x，y）|xy＜0，$x\in R$，$y\in R$ }二、四象限的点集.

③{（x，y）|xy＞0，$x\in R$，$y\in R$} 一、三象限的点集.

[注]：①对方程组解的集合应是点集.

例：$\begin{cases}x+y=3\\2x-3y=1\end{cases}$ 解的集合{(2，1)}.

②点集与数集的交集是ϕ.（例：A ={(x，y)| y =x+1}　B={y|y =x^2+1}　则 $A\cap B=\varnothing$）

4. ①n 个元素的子集有 2^n 个. ②n 个元素的真子集有 2^n －1 个. ③n 个元素的非空真子集有 2^n－2 个.

5. ⑴①一个命题的否命题为真，它的逆命题一定为真. 否命题$\Leftrightarrow$逆命题.

②一个命题为真，则它的逆否命题一定为真. 原命题$\Leftrightarrow$逆否命题.

例：①若$a+b\neq 5$，则$a\neq 2$或$b\neq 3$应是<u>真命题</u>.

解：逆否：a = 2 且 b = 3，则 a+b = 5，成立，所以此命题为真.

②$x\neq 1$且$y\neq 2$，$\underline{\not\Rightarrow}$ $x+y\neq 3$.

解：逆否：x + y =3 $\not\Rightarrow$ x = 1 或 y = 2.

$\therefore x\neq 1$且$y\neq 2$ $\not\Rightarrow$ $x+y\neq 3$，故$x+y\neq 3$是$x\neq 1$且$y\neq 2$的既不是充分，又不是必要条件.

⑵小范围推出大范围；大范围推不出小范围.

3. 例：若$x\succ 5$，$\Rightarrow x\succ 5$或$x\prec 2$.

4. 集合运算：交、并、补.

交：$A\bigcap B\Leftrightarrow\{x\mid x\in A,且x\in B\}$

并：$A\bigcup B\Leftrightarrow\{x\mid x\in A或x\in B\}$

补：$C_U A\Leftrightarrow\{x\in U,且x\notin A\}$

5. 主要性质和运算律

（1） 包含关系：

$$A\subseteq A,\Phi\subseteq A,A\subseteq U,C_U A\subseteq U,$$
$$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C;A\bigcap B\subseteq A,A\bigcap B\subseteq B;A\bigcup B\supseteq A,A\bigcup B\supseteq B.$$

（2） 等价关系：$A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow C_U A\bigcup B=U$

（3） 集合的运算律：

交换律：$A\bigcap B=B\bigcap A;A\bigcup B=B\bigcup A.$

结合律：$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C);(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$

分配律:. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

0-1 律：$\Phi\cap A=\Phi,\Phi\cup A=A,U\cap A=A,U\cup A=U$

等幂律：$A\cap A=A,A\cup A=A.$

求补律：$A\cap C_UA=\phi$　$A\cup C_UA=U$　▪ $C_UU=\phi$　▪ $C_U\phi=U$

反演律：$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$　$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$

6. 有限集的元素个数

定义：有限集 A 的元素的个数叫做集合 A 的基数，记为 card(A)规定 card(φ) =0.

基本公式:

$$(1)card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$$

$$\begin{aligned}(2)card(A\cup B\cup C)=&card(A)+card(B)+card(C)\\&-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(C\cap A)\\&+card(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

(3) card(▪ $_U$A)= card(U)- card(A)

(二)含绝对值不等式、一元二次不等式的解法及延伸

1.整式不等式的解法

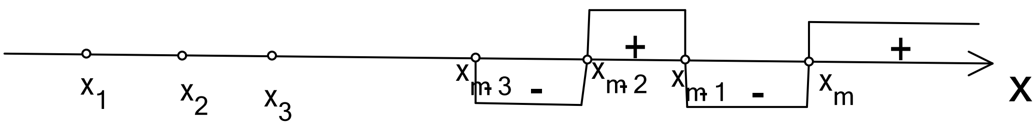
根轴法（零点分段法）

①将不等式化为 $a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)>0(<0)$形式，并将各因式 x 的系数化“+”；(为了统一方便)

②求根，并在数轴上表示出来；

③由右上方穿线，经过数轴上表示各根的点（为什么？）；

④若不等式（x 的系数化“+”后）是“>0”,则找“线”在 x 轴上方的区间；若不等式是“<0”,则找“线”在 x 轴下方的区间.

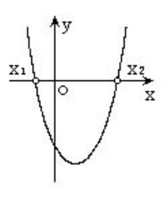
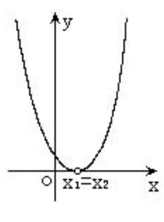
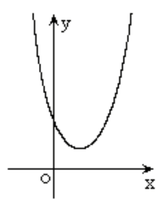


（自右向左正负相间）

则不等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n>0(<0)(a_0>0)$ 的解可以根据各区间的符号确定.

特例① 一元一次不等式 ax>b 解的讨论;

②一元二次不等式 $ax^2+box>0(a>0)$解的讨论.

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a>0$）的图象			

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2. 分式不等式的解法

（1）标准化：移项通分化为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$>0(或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$<0)； $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ≥0(或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ≤0)的形式，

（2）转化为整式不等式（组）

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)g(x)>0;\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

3. 含绝对值不等式的解法

（1）公式法：$|ax+b|<c$，与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型的不等式的解法.

（2）定义法：用“零点分区间法”分类讨论.

（3）几何法：根据绝对值的几何意义用数形结合思想方法解题.

4. 一元二次方程根的分布

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

（1）根的“零分布”：根据判别式和韦达定理分析列式解之.

（2）根的“非零分布”：作二次函数图象，用数形结合思想分析列式解之.

（三）简易逻辑

1、命题的定义：可以判断真假的语句叫做命题。

2、逻辑联结词、简单命题与复合命题：

“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词；不含有逻辑联结词的命题是简单命题；由简单命题和逻辑联结词“或”、“且”、“非”构成的命题是复合命题。

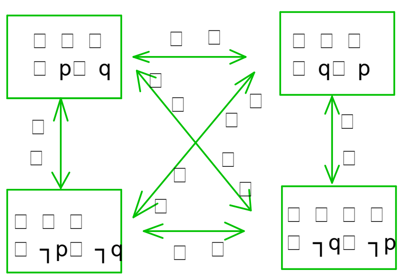
构成复合命题的形式：p 或 q(记作“p∨q”)；p 且 q(记作“p∧q”)；非 p(记作“┓q”)。

3、“或”、“且”、“非”的真值判断

（1）“非 p”形式复合命题的真假与 F 的真假相反；

（2）“p 且 q”形式复合命题当 P 与 q 同为真时为真，其他情况时为假；

（3）“p 或 q”形式复合命题当 p 与 q 同为假时为假，其他情况时为真.



4、四种命题的形式：

原命题：若 P 则 q；　逆命题：若 q 则 p；

否命题：若$\neg$ P 则$\neg$ q；逆否命题：若$\neg$ q 则$\neg$ p。

(1)交换原命题的条件和结论，所得的命题是逆命题；

(2)同时否定原命题的条件和结论，所得的命题是否命题；

(3)交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题是逆否命题.

5、四种命题之间的相互关系：

一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三条关系：(原命题$\Leftrightarrow$逆否命题)

①、原命题为真，它的逆命题不一定为真。

②、原命题为真，它的否命题不一定为真。

③、原命题为真，它的逆否命题一定为真。

6、如果已知 $p\Rightarrow q$ 那么我们说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。

若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则称 p 是 q 的充要条件，记为 $p\Leftrightarrow q$.

7、反证法：从命题结论的反面出发（假设），引出(与已知、公理、定理…)矛盾，从而否定假设证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法。

高中数学第二章-函数

考试内容：

映射、函数、函数的单调性、奇偶性.

反函数．互为反函数的函数图像间的关系.

指数概念的扩充．有理指数幂的运算性质．指数函数.

对数．对数的运算性质．对数函数.

函数的应用.

考试要求：

（1）了解映射的概念，理解函数的概念.

（2）了解函数单调性、奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性、奇偶性的方法.

（3）了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数.

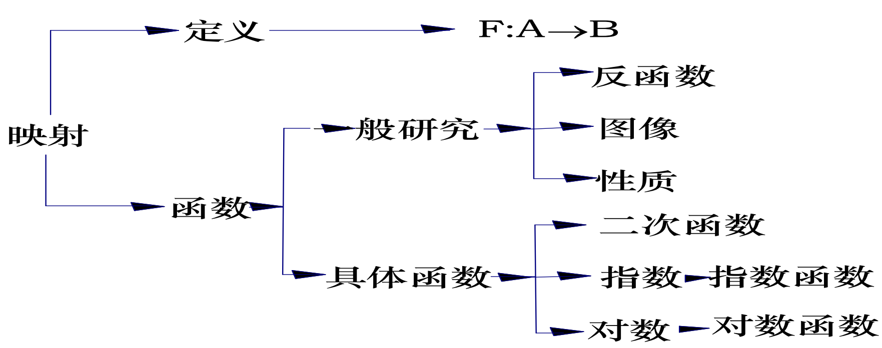
（4）理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像和性质.

（5）理解对数的概念，掌握对数的运算性质；掌握对数函数的概念、图像和性质.

（6）能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

§02. 函数　知识要点

一、本章知识网络结构：



二、知识回顾：

（一） 映射与函数

1. 映射与一一映射

2.函数

函数三要素是定义域，对应法则和值域，而定义域和对应法则是起决定作用的要素，因为这二者确定后，值域也就相应得到确定，因此只有定义域和对应法则二者完全相同的函数才是同一函数.

3.反函数

反函数的定义

设函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的值域是 C，根据这个函数中 x,y 的关系，用 y 把 x 表示出，得到 x=φ(y). 若对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 x=φ(y)，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么，x=φ(y)就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数，这样的函数 x=φ(y) (y$\in$C)叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$,习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$

（二）函数的性质

1.函数的单调性

定义：对于函数 f(x)的定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 $x_1,x_2,$

⑴若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则说 f(x)在这个区间上是增函数；

⑵若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则说 f(x) 在这个区间上是减函数.

若函数 y=f(x)在某个区间是增函数或减函数，则就说函数 y=f(x)在这一区间具有（严格的）单调性，这一区间叫做函数 y=f(x)的单调区间.此时也说函数是这一区间上的单调函数.

2.函数的奇偶性

□□□□□□□□□□□□□□**f(x)**□□□□□□□□□□**x,**□□
f(-x)=f(x),□□□□**f(x)**□□□□□□.

$$f(x)\text{是偶函数}\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$$

□□□□□□□□□□□□□□□**f(x)**□□□□□□□□□□□**x,**□□
f(-x)=-f(x),□□□□**f(x)**□□□□□□.

$$f(x)\text{是奇函数}\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq 0)$$

正确理解奇、偶函数的定义。必须把握好两个问题：（1）定义域在数轴上关于原点对称是函数 $f(x)$ 为奇函数或偶函数的必要不充分条件；（2）$f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$ 是定义域上的恒等式。
2．奇函数的图象关于原点成中心对称图形，偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形。反之亦真，因此，也可以利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性。
3.奇函数在对称区间同增同减；偶函数在对称区间增减性相反.
4．如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)=f(|x|)$，反之亦成立。若奇函数在 $x=0$ 时有意义，则 $f(0)=0$。

7. 奇函数，偶函数：

⑴偶函数：$f(-x)=f(x)$

设（a,b）为偶函数上一点，则（$-a,b$）也是图象上一点.
偶函数的判定：两个条件同时满足

①定义域一定要关于 y 轴对称，例如：$y=x^2+1$ 在 $[1,-1)$ 上不是偶函数.

②满足 $f(-x)=f(x)$，或 $f(-x)-f(x)=0$，若 $f(x)\neq 0$ 时，$\frac{f(x)}{f(-x)}=1$.

⑵奇函数：$f(-x)=-f(x)$

设（a,b）为奇函数上一点，则（$-a,-b$）也是图象上一点.
奇函数的判定：两个条件同时满足

①定义域一定要关于原点对称，例如：$y=x^3$ 在 $[1,-1)$ 上不是奇函数.

②满足 $f(-x)=-f(x)$，或 $f(-x)+f(x)=0$，若 $f(x)\neq 0$ 时，$\frac{f(x)}{f(-x)}=-1$.

8. 对称变换：①$y=f(x)\xrightarrow{y\text{轴对称}}y=f(-x)$

②$y=f(x)\xrightarrow{x\text{轴对称}}y=-f(x)$

③$y=f(x)\xrightarrow{\text{原点对称}}y=-f(-x)$

9. 判断函数单调性（定义）作差法：对带根号的一定要分子有理化，例如：

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+b^2}-\sqrt{x_2^2+b^2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_x^2+b^2}+\sqrt{x_1^2+b^2}}$$

在进行讨论.

10. 外层函数的定义域是内层函数的值域.

例如：已知函数 f（x）$=1+\dfrac{x}{1-x}$ 的定义域为 A，函数 $f[f$（x）$]$的定义域是 B，则集合 A 与集合 B 之间的关系是__________.

解：$f(x)$ 的值域是 $f(f(x))$ 的定义域 B，$f(x)$ 的值域 $\in R$，故 $B\in R$，而 $A=\{x\mid x\neq 1\}$，故 $B\supset A$.

11. 常用变换：

① $f(x+y)=f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.

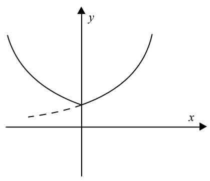
证：$f(x-y)=\dfrac{f(y)}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)=f[(x-y)+y]=f(x-y)f(y)$

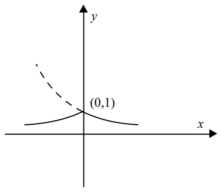
② $f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y)\Leftrightarrow f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$

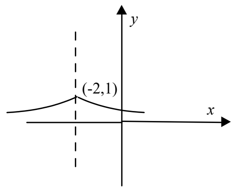
证：$f(x)=f(\dfrac{x}{y}\cdot y)=f(\dfrac{x}{y})+f(y)$

12. ⑴熟悉常用函数图象：

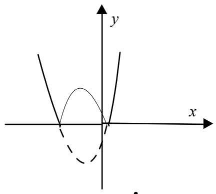
例：$y=2^{|x|}\to |x|$ 关于 y 轴对称.　　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+2|}\to y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}\to y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+2|}$







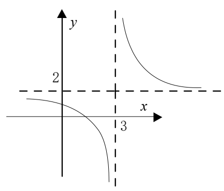
$y=|2x^2+2x-1|\to |y|$ 关于 x 轴对称.



⑵熟悉分式图象：

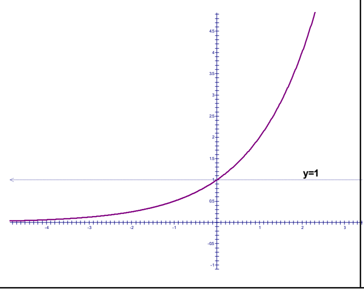
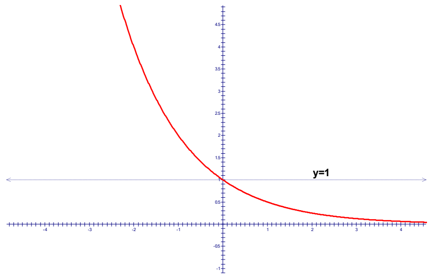
例：$y=\dfrac{2x+1}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}\Rightarrow$ 定义域 $\{x\mid x\neq 3,x\in R\}$，

值域 $\{y\mid y\neq 2,y\in R\}\to$ 值域 $\neq x$ 前的系数之比.



（三）指数函数与对数函数

指数函数 $y=a^x(a>0且a\neq 1)$ 的图象和性质

<table>
<tr><td></td><td>a>1</td><td colspan="2">0<a<1</td></tr>
<tr><td></td><td>a>1</td><td colspan="2">0<a<1</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="3">(1)定义域：R</td></tr>
<tr><td colspan="3">（2）值域：（0，+∞）</td></tr>
<tr><td colspan="3">（3）过定点（0，1），即 x=0 时，y=1</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4)x>0 时，y>1;x<0 时，0<y<1</td><td>(4)x>0 时，0<y<1;x<0 时，y>1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">（5）在 R 上是增函数</td><td>（5）在 R 上是减函数</td></tr>
</table>

对数函数 $y=log_ax$ 的图象和性质：

对数运算：

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N^{(1)}$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^n=n\log_a(\pm M)^{12)}$$

$$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

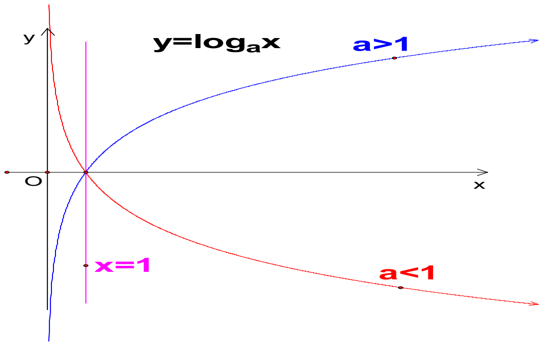
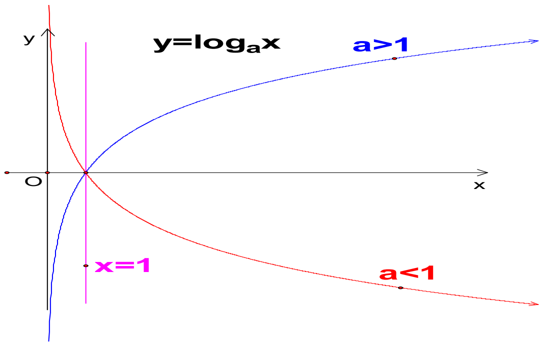
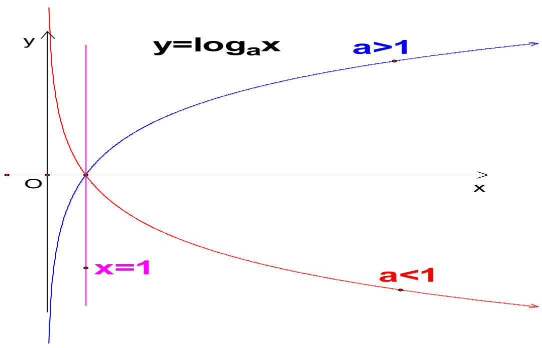
$$a^{\log_a N}=N$$

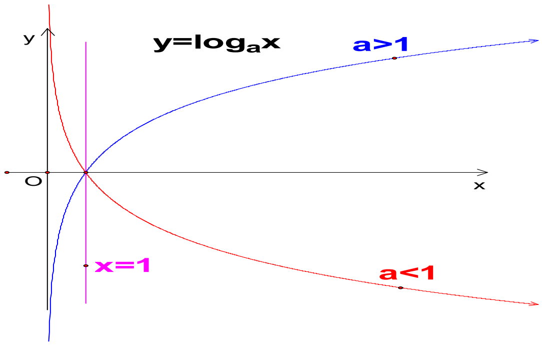
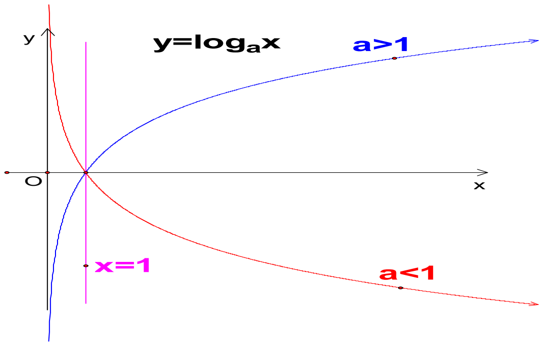
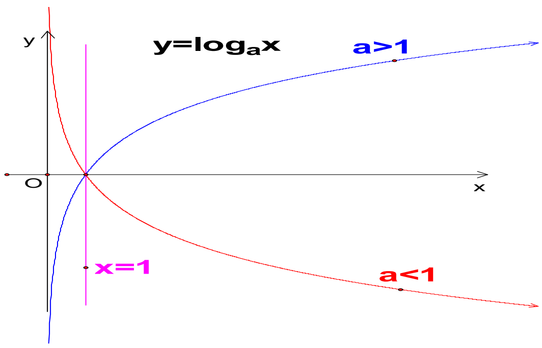
$$\text{换底公式:}\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

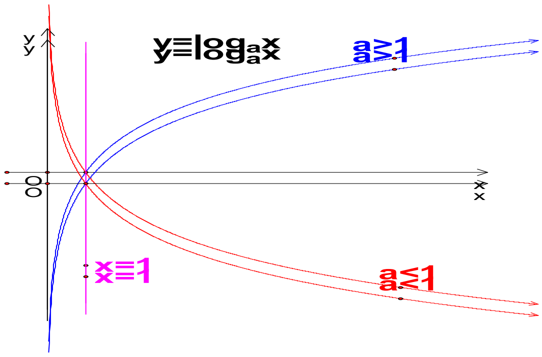
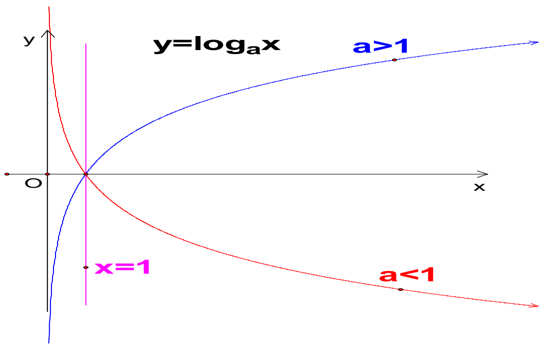
$$\text{推论:}\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$$

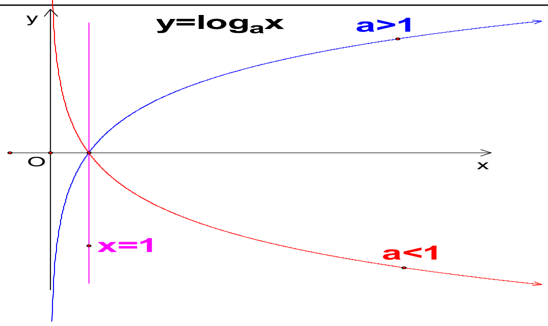
$$\Rightarrow\log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdot\ldots\cdot\log_{a_{n-1}}a_n=\log_{a_1}a_n$$

（以上 $M\succ 0,N\succ 0,a\succ 0,a\neq 1,b\succ 0,b\neq 1,c\succ 0,c\neq 1,a_1,a_2...a_n\succ 0$□ $\neq 1$）

图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	

	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	

	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	a>1	0<a<1
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	

性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	a>1	0<a<1
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
图象		
性质	（1）定义域：（0，+∞）	
	（2）值域：R	
	（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0	
	（4）$x\in(0,1)$ 时 $y<0$ $x\in(1,+\infty)$ 时 y>0	$x\in(0,1)$ 时 $y>0$ $x\in(1,+\infty)$ 时 $y<0$
	（5）在（0，+∞）上是增函数	在（0，+∞）上是减函数

注(1)：当 $a,b\prec 0$ 时，$\log(a\cdot b)=\log(-a)+\log(-b)$.

(2)：当 $M\succ 0$ 时，取“+”，当 n 是偶数时且 $M\prec 0$ 时，$M^n\succ 0$，而 $M\prec 0$，故取“—”.

例如：$\log_a x^2\neq 2\log_a x$ ∵($2\log_a x$ 中 x>0 而 $\log_a x^2$ 中 x∈R）.

⑵ $y=a^{x}$（$a\succ 0,a\neq 1$）与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

当 $a\succ 1$ 时，$y=\log_a x$ 的 a 值越大，越靠近 x 轴；当 $0\prec a\prec 1$ 时，则相反.

（四）方法总结

⑴.相同函数的判定方法：定义域相同且对应法则相同.

⑴对数运算：

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$ (1)

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^{n}=n\log_a\left(\pm M\right)$$ (2)

$$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

$$a^{\log_a N}=N$$

换底公式：$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

推论：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

$$\Rightarrow\log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdot\ldots\cdot\log_{a_{n-1}}a_n=\log_{a_1}a_n$$

（以上 $\mathrm{M}\succ 0,\mathrm{N}\succ 0,\mathrm{a}\succ 0,\mathrm{a}\neq 1,\mathrm{b}\succ 0,\mathrm{b}\neq 1,\mathrm{c}\succ 0,\mathrm{c}\neq 1,\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}\succ 0$□ $\neq 1$）

注⑴：当 $a,b\prec 0$ 时，$\log(a\cdot b)=\log(-a)+\log(-b)$.

⑵：当 $M\succ 0$ 时，取“+”，当 n 是偶数时且 $M\prec 0$ 时，$M^{n}\succ 0$，而 $M\prec 0$，故取“—”.

例如：$\log_a x^{2}\neq 2\log_a x$ ∵($2\log_a x$ 中 $x>0$ 而 $\log_a x^{2}$ 中 $x\in\mathrm{R}$）.

⑵ $y=a^{x}$（$a\succ 0,a\neq 1$）与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

当 $a\succ 1$ 时，$y=\log_a x$ 的 a 值越大，越靠近 x 轴；当 $0\prec a\prec 1$ 时，则相反.

⑵.函数表达式的求法：①定义法；②换元法；③待定系数法.

⑶.反函数的求法：先解 x,互换 x、y，注明反函数的定义域(即原函数的值域).

⑷.函数的定义域的求法：布列使函数有意义的自变量的不等关系式，求解即可求得函数的定义域.常涉及到的依据为①分母不为 0；②偶次根式中被开方数不小于 0；③对数的

真数大于 0，底数大于零且不等于 1；④零指数幂的底数不等于零；⑤实际问题要考虑实际意义等.

⑸. 函数值域的求法：①配方法(二次或四次)；②“判别式法”；③反函数法；④换元法；⑤不等式法；⑥函数的单调性法.

⑹. 单调性的判定法：①设 x_1, x_2 是所研究区间内任两个自变量，且 $x_1 < x_2$；②判定 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小；③作差比较或作商比较.

⑺. 奇偶性的判定法：首先考察定义域是否关于原点对称，再计算 f(-x)与 f(x)之间的关系：①f(-x)=f(x)为偶函数；f(-x)=-f(x)为奇函数；②f(-x)-f(x)=0 为偶；f(x)+f(-x)=0 为奇；③f(-x)/f(x)=1 是偶；f(x)÷f(-x)=-1 为奇函数.

⑻. 图象的作法与平移：①据函数表达式，列表、描点、连光滑曲线；②利用熟知函数的图象的平移、翻转、伸缩变换；③利用反函数的图象与对称性描绘函数图象.

高中数学 第三章　数列

考试内容：

数列.

等差数列及其通项公式．等差数列前 n 项和公式.

等比数列及其通项公式．等比数列前 n 项和公式.

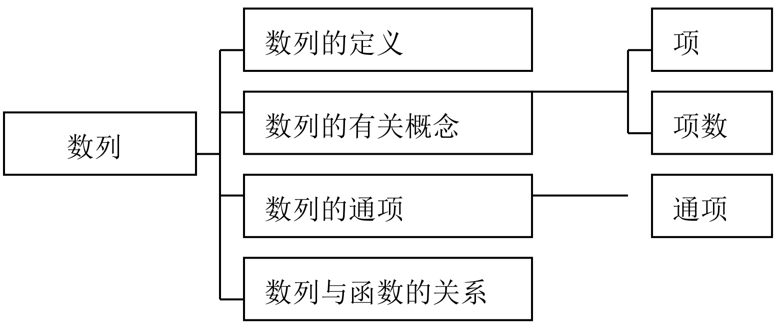
考试要求：

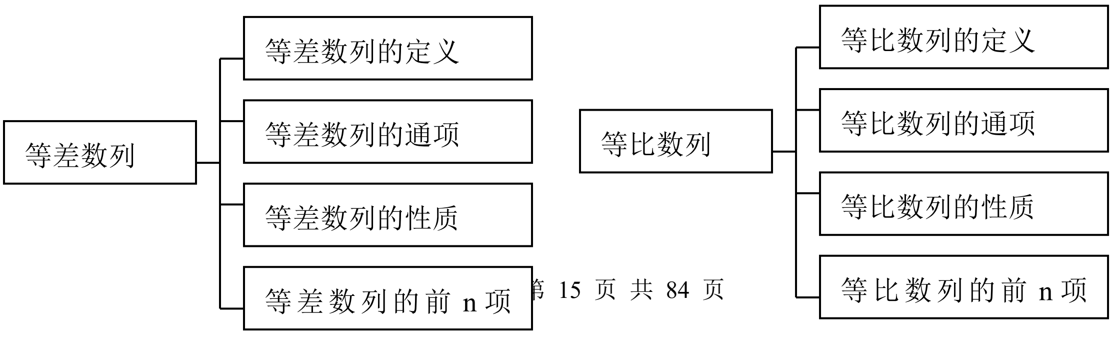
（1）理解数列的概念，了解数列通项公式的意义了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

（2）理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题.

（3）理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式，井能解决简单的实际问题.

§03. 数 列　知识要点





1．⑴等差、等比数列：

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$
递推公式	$a_n=a_{n-1}+d$；$a_n=a_{m-n}+md$	$a_n=a_{n-1}q$；$a_n=a_mq^{n-m}$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$（$a_1,q\neq 0$）
中项	$A=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$（$n,k\in N^*,n\succ k\succ 0$）	$G=\pm\sqrt{a_{n-k}a_{n+k}}(a_{n-k}a_{n+k}\succ 0)$（$n,k\in N^*,n\succ k\succ 0$）
前 n 项和	$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\geq 2)\end{cases}$
重要性质	$a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in N^*,$ $m+n=p+q)$	$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q(m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q)$

		等差数列	等比数列
定义		$\{a_n\}为A\cdot P\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d(常数)$	$\{a_n\}为G\cdot P\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=q(常数)$
通项公式		$a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=dn+a_1-d$	$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}$
求和公式		$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ $=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$	$s_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1\end{cases}$
中项公式		A=$\frac{a+b}{2}$ 推广：$2a_n=a_{n-m}+a_{n+m}$	$G^2=ab$。推广：$a_n^{\ 2}=a_{n-m}\times a_{n+m}$
性	1	若 m+n=p+q 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$	若 m+n=p+q，则 $a_ma_n=a_pa_q$。

	2	若 $\{k_n\}$ 成 A.P（其中 $k_n \in N$）则 $\{a_{k_n}\}$ 也为 A.P。	若 $\{k_n\}$ 成等比数列（其中 $k_n \in N$），则 $\{a_{k_n}\}$ 成等比数列。
	3	. $s_n, s_{2n}-s_n, s_{3n}-s_{2n}$ 成等差数列。	$s_n, s_{2n}-s_n, s_{3n}-s_{2n}$ 成等比数列。
	4	$d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}(m \neq n)$	$q^{n-1}=\dfrac{a_n}{a_1}$，$q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$ $(m \neq n)$
	5		

⑵看数列是不是等差数列有以下三种方法：

① $a_n-a_{n-1}=d(n \geq 2, d\text{为常数})$

② $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n \geq 2)$

③ $a_n=kn+b$ (n, k 为常数).

⑶看数列是不是等比数列有以下四种方法：

① $a_n=a_{n-1}q(n \geq 2, q\text{为常数}, \text{且} \neq 0)$

② $a_n^2=a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ ($n \geq 2$， $a_n a_{n+1} a_{n-1} \neq 0$)①

注①：i. $b=\sqrt{ac}$，是 a、b、c 成等比的双非条件，即 $b=\sqrt{ac} \not\rightleftarrows a$、$b$、$c$ 等比数列.

ii. $b=\sqrt{ac}$ （ac>0）→为 a、b、c 等比数列的充分不必要.

iii. $b=\pm\sqrt{ac}$ →为 a、b、c 等比数列的必要不充分.

iv. $b=\pm\sqrt{ac}$ 且 $ac \succ 0$ →为 a、b、c 等比数列的充要.

注意：任意两数 a、c 不一定有等比中项，除非有 ac>0，则等比中项一定有两个.

③ $a_n=cq^n$ (c, q 为非零常数).

④正数列 $\{a_n\}$ 成等比的充要条件是数列 $\{\log_x a_n\}$（$x \succ 1$）成等比数列.

⑷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系：$a_n=\begin{cases} s_1=a_1(n=1) \\ s_n-s_{n-1}(n \geq 2) \end{cases}$

[注]： ① $a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d)$（ d 可为零也可不为零→为等差数列充要条件（即常

数列也是等差数列）→若 d 不为 0，则是等差数列充分条件）.

②等差{ a_n }前 n 项和 $S_n=An^2+Bn=\left(\frac{d}{2}\right)n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ → $\frac{d}{2}$ 可以为零也可不为零→为等差的充要条件→若 d 为零，则是等差数列的充分条件；若 d 不为零，则是等差数列的充分条件.

③非零常数列既可为等比数列，也可为等差数列.（不是非零，即不可能有等比数列）

2. ①等差数列依次每 k 项的和仍成等差数列，其公差为原公差的 k^2 倍 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k}\ldots$；

②若等差数列的项数为 $2n\left(n\in N^+\right)$，则 $S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

③若等差数列的项数为 $2n-1\left(n\in N^+\right)$，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，且 $S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$

$\Rightarrow$ 代入 n 到 $2n-1$ 得到所求项数.

3. 常用公式：①$1+2+3\ \cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

②$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③$1^3+2^3+3^3\cdots n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

[注]：熟悉常用通项：9，99，999，$\ldots\Rightarrow a_n=10^n-1$； 5，55，555，$\ldots\Rightarrow a_n=\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)$.

4. 等比数列的前 n 项和公式的常见应用题：

⑴生产部门中有增长率的总产量问题. 例如，第一年产量为 a，年增长率为 r，则每年的产量成等比数列，公比为 $1+r$. 其中第 n 年产量为 $a(1+r)^{n-1}$，且过 n 年后总产量为：

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\ldots+a(1+r)^{n-1}=\frac{a[a-(1+r)^n]}{1-(1+r)}.$$

⑵银行部门中按复利计算问题. 例如：一年中每月初到银行存 a 元，利息为 r，每月利息按复利计算，则每月的 a 元过 n 个月后便成为 $a(1+r)^n$ 元. 因此，第二年年初可存款：

$$a(1+r)^{12}+a(1+r)^{11}+a(1+r)^{10}+\ldots+a(1+r)=\frac{a(1+r)[1-(1+r)^{12}]}{1-(1+r)}.$$

⑶分期付款应用题：a 为分期付款方式贷款为 a 元；m 为 m 个月将款全部付清；r 为年利率.

$$a(1+r)^m=x(1+r)^{m-1}+x(1+r)^{m-2}+\ldots\ldots x(1+r)+x\Rightarrow a(1+r)^m=\frac{x(1+r)^m-1}{r}\Rightarrow x=\frac{ar(1+r)^m}{(1+r)^m-1}$$

5. 数列常见的几种形式：

⑴ $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p、q 为二阶常数）$\rightarrow$ 用特证根方法求解.

具体步骤：①写出特征方程 $x^2=Px+q$（x^2 对应 a_{n+2}，x 对应 a_{n+1}），并设二根 x_1,x_2 ②若 $x_1\neq x_2$ 可设 $a_{n.}=c_1x_1^n+c_2x_2^n$，若 $x_1=x_2$ 可设 $a_n=(c_1+c_2n)x_1^n$；③由初始值 a_1,a_2 确定 c_1,c_2.

⑵ $a_n=Pa_{n-1}+r$（P、r 为常数）$\to$ 用①转化等差，等比数列；②逐项选代；③消去常数 n 转化为 $a_{n+2}=Pa_{n+1}+qa_n$ 的形式，再用特征根方法求 a_n；④ $a_n=c_1+c_2P^{n-1}$（公式法），c_1,c_2 由 a_1,a_2 确定.

①转化等差，等比：$a_{n+1}+x=P(a_n+x)\Rightarrow a_{n+1}=Pa_n+Px-x\Rightarrow x=\dfrac{r}{P-1}$.

②选代法：$a_n=Pa_{n-1}+r=P(Pa_{n-2}+r)+r=\cdots\Rightarrow a_n=(a_1+\dfrac{r}{P-1})P^{n-1}-\dfrac{r}{P-1}=(a_1+x)P^{n-1}-x$

$=P^{n-1}a_1+P^{n-2}\cdot r+\cdots+\Pr+r$.

③用特征方程求解：$\left.\begin{array}{l}a_{n+1}=Pa_n+r\\ a_n=Pa_{n-1}+r\end{array}\right\}$相减，$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=Pa_n-Pa_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}=(P+1)a_n-Pa_{n-1}$.

④由选代法推导结果：$c_1=\dfrac{r}{1-P}$，$c_2=a_1+\dfrac{r}{P-1}$，$a_n=c_2P^{n-1}+c_1=(a_1+\dfrac{r}{P-1})P^{n-1}+\dfrac{r}{1-P}$.

6. 几种常见的数列的思想方法：

⑴等差数列的前 n 项和为 S_n，在 $d\prec 0$ 时，有最大值. 如何确定使 S_n 取最大值时的 n 值，有两种方法：

一是求使 $a_n\geq 0, a_{n+1}\prec 0$，成立的 n 值；二是由 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$ 利用二次函数的性质求 n 的值.

⑵如果数列可以看作是一个等差数列与一个等比数列的对应项乘积，求此数列前 n 项和可依照等比数列前 n 项和的推倒导方法：错位相减求和. 例如：$1\cdot\dfrac{1}{2},3\dfrac{1}{4},\ldots(2n-1)\dfrac{1}{2^n},\ldots$

⑶两个等差数列的相同项亦组成一个新的等差数列，此等差数列的首项就是原两个数列的第一个相同项，公差是两个数列公差 d_1，d_2 的最小公倍数.

2. 判断和证明数列是等差（等比）数列常有三种方法：(1)定义法:对于 n≥2 的任意自然数,验证 $a_n-a_{n-1}(\dfrac{a_n}{a_{n-1}})$ 为同一常数。(2)通项公式法。(3)中项公式法:验证 $2a_{n+1}=a_n+a_{n-2}$ $(a_{n+1}^2=a_na_{n+2})n\in N$ 都成立。

3. 在等差数列｛a_n｝中,有关 S_n 的最值问题：(1)当 a_1>0,d<0 时，满足 $\begin{cases}a_m\geq 0\\ a_{m+1}\leq 0\end{cases}$ 的项数

m 使得 s_m 取最大值. (2)当 a_1 <0,d>0 时，满足 $\begin{cases} a_m \le 0 \\ a_{m+1} \ge 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 s_m 取最小值。在解含绝对值的数列最值问题时,注意转化思想的应用。

（三）、数列求和的常用方法

1. 公式法:适用于等差、等比数列或可转化为等差、等比数列的数列。

2.裂项相消法:适用于 $\left\{\dfrac{c}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 其中{ a_n }是各项不为 0 的等差数列，c 为常数；部分无理数列、含阶乘的数列等。

3.错位相减法:适用于 $\{a_n b_n\}$ 其中{ a_n }是等差数列，$\{b_n\}$ 是各项不为 0 的等比数列。

4.倒序相加法: 类似于等差数列前 n 项和公式的推导方法.

5.常用结论

1）: 1+2+3+...+n = $\dfrac{n(n+1)}{2}$

2） 1+3+5+...+(2n-1) = n^2

3）$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

4） $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5） $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2})$

6） $\dfrac{1}{pq} = \dfrac{1}{q-p}(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}) \quad (p < q)$

高中数学第四章-三角函数

考试内容：

角的概念的推广．弧度制．

任意角的三角函数．单位圆中的三角函数线．同角三角函数的基本关系式.正弦、余弦的诱导公式．

两角和与差的正弦、余弦、正切．二倍角的正弦、余弦、正切．

正弦函数、余弦函数的图像和性质．周期函数．函数 y=Asin(ωx+φ)的图像．正切函数的图像和性质．已知三角函数值求角．

正弦定理．余弦定理．斜三角形解法．

考试要求：

（1）理解任意角的概念、弧度的意义能正确地进行弧度与角度的换算．

（2）掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义；了解余切、正割、余割的定义；掌握同角三角函数的基本关系式；掌握正弦、余弦的诱导公式；了解周期函数与最小正周期的意义．

（3）掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式.

（4）能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

（5）理解正弦函数、余弦函数、正切函数的图像和性质，会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 y=Asin(ωx+φ)的简图，理解 A.ω、φ的物理意义.

（6）会由已知三角函数值求角，并会用符号 arcsinx\arc-cosx\arctanx 表示.

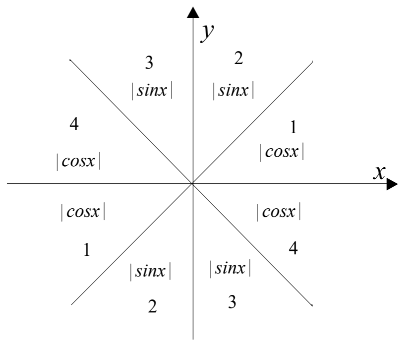
（7）掌握正弦定理、余弦定理，并能初步运用它们解斜三角形.

（8）“同角三角函数基本关系式：sin2α+cos2α=1，sinα/cosα=tanα,tanα•cosα=1”.

§04. 三角函数　知识要点

1. ①与 α（$0°\le\alpha<360°$）终边相同的角的集合（角 α 与角 β 的终边重合）：

$\{\beta\mid\beta=k\times360^\circ+\alpha,k\in Z\}$



SIN\COS三角函数值大小关系图

1¡ 2¡ 3¡ 4表示第一、二、三、四象限一半所在区域

②终边在 x 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ,k\in Z\}$

③终边在 y 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ+90^\circ,k\in Z\}$

④终边在坐标轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times90^\circ,k\in Z\}$

⑤终边在 $y=x$ 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ+45^\circ,k\in Z\}$

⑥终边在 $y=-x$ 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ-45^\circ,k\in Z\}$

⑦若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha=360^\circ k-\beta$

⑧若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha=360^\circ k+180^\circ-\beta$

⑨若角 α 与角 β 的终边在一条直线上，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha=180^\circ k+\beta$

⑩角 α 与角 β 的终边互相垂直，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha=360^\circ k+\beta\pm90^\circ$

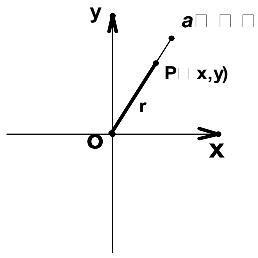
2. 角度与弧度的互换关系：$360°=2\pi$　$180°=\pi$　$1°=0.01745$　$1=57.30°=57°18'$

注意：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零.

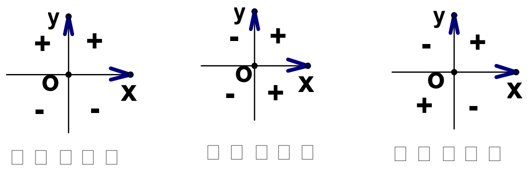
、弧度与角度互换公式：　$1\text{rad}=\frac{180}{\pi}^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'$.　　$1^\circ=\frac{\pi}{180}\approx0.01745$（rad）

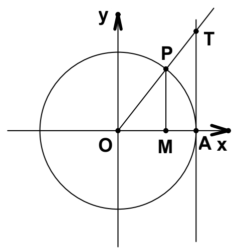
3、弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$． 扇形面积公式：$s_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$

4、三角函数：设α是一个任意角，在α的终边上任取（异于原点的）一点 P（x,y）P 与原点的距离为 r，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；$\tan\alpha=\frac{y}{x}$；$\cot\alpha=\frac{x}{y}$；$\sec\alpha=\frac{r}{x}$；．$\csc\alpha=\frac{r}{y}$．



5、三角函数在各象限的符号：（一全二正弦，三切四余弦）



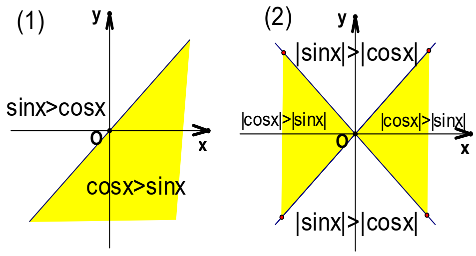


6、三角函数线

正弦线：MP； 余弦线：OM； 正切线： AT.

7. 三角函数的定义域：

16.



(3) o<x<$\frac{\pi}{2}$, sinx<x<tanx

三角函数	定义域
$f(x)=\sin x$	$\{x\mid x\in R\}$
$f(x)=\cos x$	$\{x\mid x\in R\}$
$f(x)=\tan x$	$\left\{x\mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi,k\in Z\right\}$
$f(x)=\cot x$	$\{x\mid x\in R且x\neq k\pi,k\in Z\}$
$f(x)=\sec x$	$\left\{x\mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi,k\in Z\right\}$
$f(x)=\csc x$	$\{x\mid x\in R且x\neq k\pi,k\in Z\}$

8、同角三角函数的基本关系式：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ $\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$ $\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$ $\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

9、诱导公式：

把$\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数化为α的三角函数，概括为：

“奇变偶不变，符号看象限”

三角函数的公式：（一）基本关系

公式组一

$\sin x \cdot \csc x=1$　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos x \cdot \sec x=1$　$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$\tan x \cdot \cot x=1$　$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

公式组二

$\sin(2k\pi+x)=\sin x$

$\cos(2k\pi+x)=\cos x$

$\tan(2k\pi+x)=\tan x$

$\cot(2k\pi+x)=\cot x$

公式组三

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

$\tan(-x)=-\tan x$

$\cot(-x)=-\cot x$

公式组四

$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\tan(\pi+x)=\tan x$

$\cot(\pi+x)=\cot x$

公式组五

$\sin(2\pi-x)=-\sin x$

$\cos(2\pi-x)=\cos x$

$\tan(2\pi-x)=-\tan x$

$\cot(2\pi-x)=-\cot x$

公式组六

$\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\tan(\pi-x)=-\tan x$

$\cot(\pi-x)=-\cot x$

（二）角与角之间的互换

公式组一

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

公式组二

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

公式组三

$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

公式组四

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

公式组五

$\cos(\dfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\sin(\dfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(\dfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\cot\alpha$

$\cos(\dfrac{1}{2}\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(\dfrac{1}{2}\pi+\alpha)=-\cot\alpha$

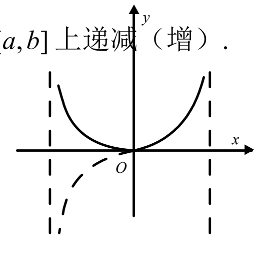
$\sin(\dfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\tan 15^\circ=\cot 75^\circ=2-\sqrt{3}$, $\tan 75^\circ=\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$.

10. 正弦、余弦、正切、余切函数的图象的性质：

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（A、$\omega>0$）
定义域	R	R	$\{x\mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi,k\in Z\}$	$\{x\mid x\in R且x\neq k\pi,k\in Z\}$	R
值域	$[-1,+1]$	$[-1,+1]$	R	R	$[-A,A]$
周期性	2π	2π	π	π	$\frac{2\pi}{\omega}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数	当$\varphi\neq 0$, 非奇非偶 当$\varphi=0$, 奇函数
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$上为增函数；$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$上为减函数（$k\in Z$）	$[(2k-1)\pi,2k\pi]$；上为增函数$[2k\pi,(2k+1)\pi]$上为减函数（$k\in Z$）	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$上为增函数（$k\in Z$）	$(k\pi,(k+1)\pi)$上为减函数（$k\in Z$）	$\left[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}(A),\frac{2k\pi+\frac{1}{2}\pi-\varphi}{\omega}(-A)\right]$上为增函数；$\left[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}(A),\frac{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-\varphi}{\omega}(-A)\right]$上为减函数（$k\in Z$）

注意：① $y=-\sin x$与$y=\sin x$的单调性正好相反；$y=-\cos x$与$y=\cos x$的单调性也同样相反.一般地，若$y=f(x)$在$[a,b]$上递增（减），则$y=-f(x)$在$[a,b]$上递减（增）.



② $y=|\sin x|$与$y=|\cos x|$的周期是π.

③ $y=\sin(\omega x+\varphi)$或$y=\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega\neq 0$）的周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

$y=\left|\tan\frac{x}{2}\right|$的周期为$2\pi$（$T=\frac{\pi}{|\omega|}\Rightarrow T=2\pi$，如图，翻折无效）.

④ $y=\sin(\omega x+\varphi)$的对称轴方程是$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$），对称中心（$k\pi,0$）；$y=\cos(\omega x+\varphi)$的对称轴方程是$x=k\pi$（$k\in Z$），对称中心（$k\pi+\frac{1}{2}\pi,0$）；$y=\tan(\omega x+\varphi)$的对称中心（$\frac{k\pi}{2},0$）.

$y=\cos 2x \xrightarrow{\text{原点对称}} y=-\cos(-2x)=-\cos 2x$

⑤当 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1,\ \alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$； $\tan\alpha\cdot\tan\beta=-1,\ \alpha-\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

⑥ $y=\cos x$ 与 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 是同一函数,而 $y=(\omega x+\varphi)$ 是偶函数，则

$y=(\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+k\pi+\dfrac{1}{2}\pi)=\pm\cos(\omega x)\cdot$

⑦函数 $y=\tan x$ 在 R 上为增函数.（×） [只能在某个单调区间单调递增. 若在整个定义域，$y=\tan x$ 为增函数，同样也是错误的].

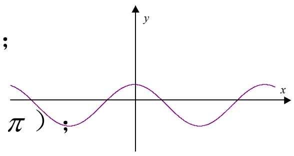
⑧定义域关于原点对称是 $f(x)$ 具有奇偶性的<u>必要不充分条件.</u>（奇偶性的两个条件：一是定义域关于原点对称（奇偶都要），二是满足奇偶性条件，偶函数：$f(-x)=f(x)$，奇函数：$f(-x)=-f(x)$）

奇偶性的单调性：奇同偶反. 例如：$y=\tan x$ 是奇函数，$y=\tan(x+\dfrac{1}{3}\pi)$ 是非奇非偶.（定义域不关于原点对称）

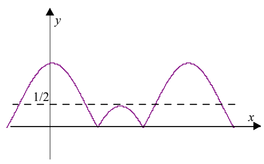
奇函数特有性质：若 $0\in x$ 的定义域，则 $f(x)$ 一定有 $f(0)=0$.（$0\notin x$ 的定义域，则无此性质）

⑨ $y=\sin|x|$ 不是周期函数；$y=|\sin x|$ 为周期函数（$T=\pi$）；

$y=\cos|x|$ 是周期函数（如图）；$y=|\cos x|$ 为周期函数（$T=\pi$）；



y=cos|x|图象



y=|cos2x+1/2|图象

$y=\left|\cos 2x+\dfrac{1}{2}\right|$ 的周期为 π（如图），并非所有周期函数都有最小正周期，例如：

$y=f(x)=5=f(x+k),k\in R$.

⑩ $y=a\cos\alpha+b\sin\beta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)+\cos\varphi=\dfrac{b}{a}$ 有 $\sqrt{a^2+b^2}\ge|y|$.

11、三角函数图象的作法：

1）、几何法：

2）、描点法及其特例——五点作图法（正、余弦曲线），三点二线作图法（正、余切曲线）.

3）、利用图象变换作三角函数图象.

三角函数的图象变换有振幅变换、周期变换和相位变换等.

函数 y＝Asin（ωx＋φ）的振幅|A|，周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，频率 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{|\omega|}{2\pi}$，相位 $\omega x+\varphi$; 初相 φ（即当 x＝0 时的相位）.（当 A＞0，ω＞0 时以上公式可去绝对值符号），

由 y＝sinx 的图象上的点的横坐标保持不变，纵坐标伸长（当|A|＞1）或缩短（当 0＜|A|＜1）到原来的|A|倍，得到 y＝Asinx 的图象，叫做**振幅变换**或叫沿 y 轴的伸缩变换．（用 y/A 替换 y）

由 y＝sinx 的图象上的点的纵坐标保持不变，横坐标伸长（0＜|ω|＜1）或缩短（|ω|＞1）到原来的$|\frac{1}{\omega}|$倍，得到 y＝sinω x 的图象，叫做**周期变换**或叫做沿 x 轴的伸缩变换．(用 ωx 替换 x)

由 y＝sinx 的图象上所有的点向左（当 φ＞0）或向右（当 φ＜0）平行移动∣φ∣个单位，得到 y＝sin（x＋φ）的图象，叫做**相位变换**或叫做沿 x 轴方向的平移．(用 x＋φ 替换 x)

由 y＝sinx 的图象上所有的点向上（当 b＞0）或向下（当 b＜0）平行移动∣b∣个单位，得到 y＝sinx＋b 的图象叫做沿 y 轴方向的平移．（用 y+(-b)替换 y）

由 y＝sinx 的图象利用图象变换作函数 y＝Asin（ωx＋φ）（A＞0，ω＞0）（x∈R）的图象，要特别注意：当周期变换和相位变换的先后顺序不同时，原图象延 x 轴量伸缩量的区别。

4、反三角函数：

函数 y＝sin$x$，$\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数叫做**反正弦函数**，记作 y＝arcsin$x$，它的定义域是［－1，1］，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$．

函数 y＝cos$x$，（x∈［0，π］）的反应函数叫做**反余弦函数**，记作 y＝arccos$x$，它的定义域是［－1，1］，值域是［0，π］．

函数 y＝tan$x$，$\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做**反正切函数**，记作 y＝arctan$x$，它的定义域是（－∞，＋∞），值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$．

函数 y＝ctg$x$，［x∈（0，π）］的反函数叫做**反余切函数**，记作 y＝arcctg$x$，它的定义域是（－∞，＋∞），值域是（0，π）．

II. 竞赛知识要点

一、反三角函数.

1. 反三角函数：⑴反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是奇函数，故 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$

（一定要注明定义域，若 $x\in(-\infty,+\infty)$，没有 x 与 y 一一对应，故 $y=\sin x$ 无反函数）

注：$\sin(\arcsin x)=x$，$x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

⑵反余弦函数 $y=\arccos x$ 非奇非偶，但有 $\arccos(-x)+\arccos(x)=\pi+2k\pi$，$x\in[-1,1]$.

注：① $\cos(\arccos x)=x$，$x\in[-1,1]$，$\arccos x\in[0,\pi]$.

② $y=\cos x$ 是偶函数，$y=\arccos x$ 非奇非偶，而 $y=\sin x$ 和 $y=\arcsin x$ 为奇函数.

⑶反正切函数：$y=\arctan x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$），$y=\arctan x$是奇函数，

$\arctan(-x)=-\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

注：$\tan(\arctan x)=x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

⑷反余切函数：$y=arc\cot x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$），$y=arc\cot x$是非奇非偶.

$arc\cot(-x)+arc\cot(x)=\pi+2k\pi$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

注：①$\cot(arc\cot x)=x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

② $y=\arcsin x$与$y=\arcsin(1-x)$互为奇函数，$y=\arctan x$同理为奇而$y=\arccos x$与$y=arc\cot x$非奇非偶但满足$\arccos(-x)+\arccos x=\pi+2k\pi, x\in[-1,1]arc\cot x+arc\cot(-x)=\pi+2k\pi, x\in[-1,1]$.

⑵ 正弦、余弦、正切、余切函数的解集：

a的取值范围	解集	a的取值范围	解集
①$\sin x=a$的解集		**②$\cos x=a$的解集**	
$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a, k\in Z\}$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arccos a, k\in Z\}$
$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a, k\in Z\}$	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi\pm\arccos a, k\in Z\}$

③$\tan x=a$**的解集**：$\{x\mid x=k\pi+\arctan a, k\in Z\}$

③$\cot x=a$**的解集**：$\{x\mid x=k\pi+\mathrm{arc}\cot a, k\in Z\}$

二、三角恒等式.

组一

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\ldots\cos2^n\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

组二

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+kd)=\cos x+\cos(x+d)+\cdots+\cos(x+nd)=\frac{\sin((n+1)d)\cos(x+nd)}{\sin d}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(x+kd)=\sin x+\sin(x+d)+\cdots+\sin(x+nd)=\frac{\sin((n+1)d)\sin(x+nd)}{\sin d}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$$

组三 三角函数不等式

$\sin x < x < \tan x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$　　　　$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数

若 $A+B+C=\pi$，则 $x^2+y^2+z^2\ge 2yz\cos A+2xz\cos B+2xy\cos C$

高中数学第五章-平面向量

考试内容：

向量．向量的加法与减法．实数与向量的积．平面向量的坐标表示．线段的定比分点．平面向量的数量积．平面两点间的距离、平移．

考试要求：

（1）理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念．

（2）掌握向量的加法和减法．

（3）掌握实数与向量的积，理解两个向量共线的充要条件．

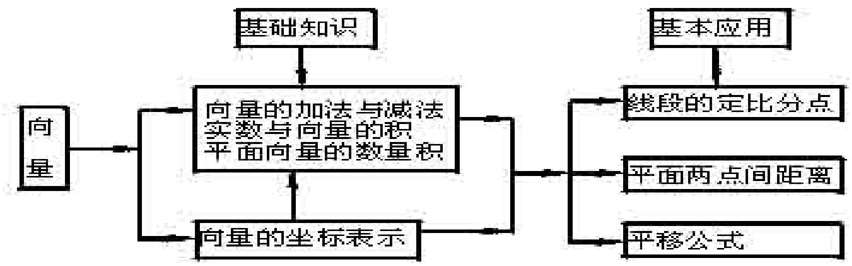
（4）了解平面向量的基本定理，理解平面向量的坐标的概念，掌握平面向量的坐标运算．

（5）掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件．

（6）掌握平面两点间的距离公式，以及线段的定比分点和中点坐标公式，并且能熟练运用掌握平移公式．

§05. 平面向量　知识要点

1. 本章知识网络结构



2. 向量的概念

(1) 向量的基本要素：大小和方向．　(2) 向量的表示：几何表示法 $\overrightarrow{AB}$；字母表示：$\boldsymbol{a}$；

　　坐标表示法 $\boldsymbol{a}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}=(x,\ y)$．

(3) 向量的长度：即向量的大小，记作 $|\boldsymbol{a}|$．

(4) 特殊的向量：零向量 $\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=0$．

　　单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 为单位向量 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}_0|=1$．

(5) 相等的向量：大小相等，方向相同　$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$

(6) 相反向量：$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(7)平行向量(共线向量)：方向相同或相反的向量，称为平行向量.记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.平行向量也称为共线向量.

3.向量的运算

运算类型	几何方法	坐标方法	运算性质
向量的加法	1.平行四边形法则 2.三角形法则	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
向量的减法	三角形法则	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
数乘向量	1. $\lambda\vec{a}$ 是一个向量,满足：$\lvert\lambda\vec{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\vec{a}\rvert$ 2. $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向； $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$异向； $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.	$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$
向量的数量积	$\vec{a}\bullet\vec{b}$ 是一个数 1. $\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$时，$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$. 2. $\vec{a}\neq\vec{0}$且$\vec{b}\neq\vec{0}$时，$\vec{a}\bullet\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(a,b)$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\bullet\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}$ $\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2$ 即$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert\vec{a}\bullet\vec{b}\rvert\leq\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

4.重要定理、公式

(1)平面向量基本定理

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，那么，对于这个平面内任一向量，有且仅有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

(2)两个向量平行的充要条件

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}) \Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(3)两个向量垂直的充要条件

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(4)线段的定比分点公式

设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 λ，即 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$ （线段的定比分点的向量公式）

$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$ （线段定比分点的坐标公式）

当 $\lambda=1$ 时，得中点公式：

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}$（$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$）或 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$

(5)平移公式

设点 $P(x, y)$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h, k)$ 平移后得到点 $P'(x', y')$，

则 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\boldsymbol{a}$ 或 $\begin{cases} x'=x+h, \\ y'=y+k. \end{cases}$

曲线 $y=f(x)$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h, k)$ 平移后所得的曲线的函数解析式为：

$y-k=f(x-h)$

(6)正、余弦定理

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

（7）三角形面积计算公式：

设△ABC 的三边为 a，b，c，其高分别为 h_a，h_b，h_c，半周长为 P，外接圆、内切圆的半径为 R，r.

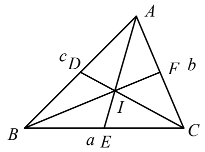
①$S_\triangle=1/2ah_a=1/2bh_b=1/2ch_c$　　②$S_\triangle=Pr$　　③$S_\triangle=abc/4R$

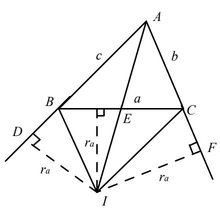
④$S_\triangle=1/2\sin C\cdot ab=1/2ac\cdot\sin B=1/2cb\cdot\sin A$　　⑤$S_\triangle=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ *[海伦公式]*

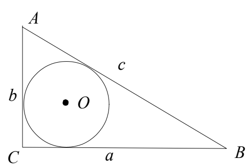
⑥$S_\triangle=1/2(b+c-a)r_a$*[如下图]*$=1/2(b+a-c)r_c=1/2(a+c-b)r_b$

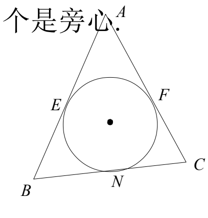
[注]：到三角形三边的距离相等的点有 4 个，一个是内心，其余 3 个是旁心.

如图：









I图　　　　图2　　　　图3　　　　图4

图 1 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的内心，　$S_{\triangle}=Pr$

图 2 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的一个旁心，$S_{\triangle}=1/2$（$b+c-a$）r_a

附：三角形的五个“心”；

重心：三角形三条中线交点.

外心：三角形三边垂直平分线相交于一点.

内心：三角形三内角的平分线相交于一点.

垂心：三角形三边上的高相交于一点.

旁心：三角形一内角的平分线与另两条内角的外角平分线相交一点.

⑸已知⊙O 是△ABC 的内切圆，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$ [注：s 为△ABC 的半周长,即 $\frac{a+b+c}{2}$]

则：①$AE=s-a=1/2$（$b+c-a$）

②$BN=s-b=1/2$（$a+c-b$）

③$FC=s-c=1/2$（$a+b-c$）

综合上述：由已知得，一个角的邻边的切线长，等于半周长减去对边（如图 4）.

特例：已知在 $Rt\triangle ABC$，c 为斜边，则内切圆半径 $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$（如图 3）.

⑹在△ABC 中，有下列等式成立 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

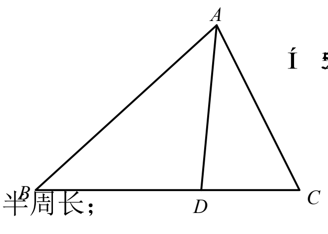
证明：因为 $A+B=\pi-C$, 所以 $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$，所以 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$，$\therefore$ 结论！

⑺在△ABC 中，D 是 BC 上任意一点，则 $AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$.

证明：在△$ABCD$ 中，由余弦定理，有 $AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cos B\cdots$①

在△ABC 中，由余弦定理有 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}\cdots$②，②代入①，化简

可得，$AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$（斯德瓦定理）



Í 5⁄4

①若 AD 是 BC 上的中线，$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$；

②若 AD 是∠A 的平分线，$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$，其中 p 为半周长；

③若 AD 是 BC 上的高，$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 p 为半周长.

⑻△ABC 的判定：

$c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为直角△ $\Leftrightarrow$ ∠A + ∠B $=\frac{\pi}{2}$

$c^2<a^2+b^2\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为钝角△ $\Leftrightarrow$ ∠A + ∠B $<\frac{\pi}{2}$

$c^2 > a^2+b^2 \Leftrightarrow \triangle ABC$ 为锐角△ $\Leftrightarrow \angle$A + $\angle$B$>\frac{\pi}{2}$

附：证明：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得在钝角△$ABC$ 中，$\cos C \prec 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2 \prec 0, \Leftrightarrow a^2+b^2 \prec c^2$

⑼平行四边形对角线定理：对角线的平方和等于四边的平方和.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

空间向量

1．空间向量的概念：

具有大小和方向的量叫做向量.

注：⑴空间的一个平移就是一个向量.

⑵向量一般用有向线段表示.同向等长的有向线段表示同一或相等的向量.

⑶空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示.

2．空间向量的运算

定义：与平面向量运算一样，空间向量的加法、减法与数乘向量运算如下

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$

运算律：⑴加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

⑵加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

⑶数乘分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

3 .共线向量

表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量．$\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ 记作 $\vec{a}//\vec{b}$．

当我们说向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线（或 $\vec{a}//\vec{b}$）时，表示 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的有向线段所在的直线可能是同一直线，也可能是平行直线.

4．共线向量定理及其推论：

共线向量定理：空间任意两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$），$\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$．

推论：如果 l 为经过已知点 ***A*** 且平行于已知非零向量 $\vec{a}$ 的直线，那么对于任意一点 ***O***，点 ***P*** 在直线 l 上的充要条件是存在实数 ***t*** 满足等式

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\vec{a}.$$

其中向量$\vec{a}$叫做直线l的方向向量.

5．向量与平面平行：

已知平面α和向量$\vec{a}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，如果直线$OA$平行于$\alpha$或在$\alpha$内，那么我们说向量$\vec{a}$平行于平面$\alpha$，记作：$\vec{a}//\alpha$．

通常我们把平行于同一平面的向量，叫做共面向量．

说明：空间任意的两向量都是共面的．

6．共面向量定理：

如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，$\vec{p}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在实数x,y使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$．

推论：空间一点P位于平面MAB内的充分必要条件是存在有序实数对x,y，使$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$或对空间任一点$O$，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$ ①

①式叫做平面MAB的向量表达式．

7．空间向量基本定理：

如果三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，那么对空间任一向量$\vec{p}$，存在一个唯一的有序实数组x,y,z，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$．

推论：设O,A,B,C是不共面的四点，则对空间任一点P，都存在唯一的三个

有序实数x,y,z，使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$．

8．空间向量的夹角及其表示：

已知两非零向量$\vec{a},\vec{b}$，在空间任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作$<\vec{a},\vec{b}>$；且规定$0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$，显然有$<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$；若$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{2}$，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$互相垂直，记作：$\vec{a}\perp\vec{b}$．

9．向量的模：

设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，则有向线段$\overrightarrow{OA}$的长度叫做向量$\vec{a}$的长度或模，记作：$|\vec{a}|$.

10．向量的数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$．

已知向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$和轴$l$，$\vec{e}$是$l$上与$l$同方向的单位向量，作点$A$在$l$上的射影$A'$，作点$B$在$l$上的射影$B'$，则$\overrightarrow{A'B'}$叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上或在$\vec{e}$上的正射影.

可以证明$\overrightarrow{A'B'}$的长度$|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos<\vec{a},\vec{e}>=|\vec{a}\cdot\vec{e}|$．

11．空间向量数量积的性质：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{e}>$．（2）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．（3）$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$．

12．空间向量数量积运算律：

（1） $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$． （2） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（**交换律**） （3）

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ **（分配律）．**

空间向量的坐标运算

一．知识回顾：

（1）空间向量的坐标：空间直角坐标系的 x 轴是横轴（对应为横坐标），y 轴是纵轴（对应为纵轴），z 轴是竖轴（对应为竖坐标）．

①令 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$ $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ (用到常用的向量模与向量之间的转化：$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$．

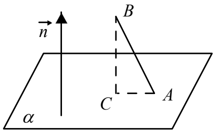
（2）法向量：若向量 $\vec{a}$ 所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{a}\perp\alpha$，如果 $\vec{a}\perp\alpha$ 那么向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量.

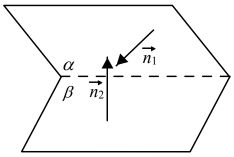
（3）用向量的常用方法：

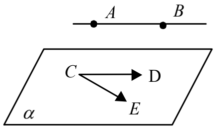
①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面 α 的法向量，AB 是平面 α 的一条射线，其中 $A\in\alpha$，则点 B 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$.

②利用法向量求二面角的平面角定理：设 $\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 中平面 α,β 的法向量，则 $\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 方向相同，则为补角，$\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 反方，则为其夹角）．

③证直线和平面平行定理：已知直线 $a\neq\not\subset$ 平面 α，$A\cdot B\in a,C\cdot D\in\alpha$，且 CDE 三点不共线，则 a// α 的充要条件是存在有序实数对 $\lambda\cdot\mu$ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$．(常设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$ 求解 λ,μ 若 λ,μ 存在即证毕，若 λ,μ 不存在，则直线 AB 与平面相交）．


$\vec{n}$
B
C
A
α


α
β
$\vec{n}_1$
$\vec{n}_2$


A
B
C
D
E
α

高中数学第六章-不等式

考试内容：

不等式．不等式的基本性质．不等式的证明．不等式的解法．含绝对值的不等式．

考试要求：

（1）理解不等式的性质及其证明．

（2）掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用．

（3）掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式．

（4）掌握简单不等式的解法．

（5）理解不等式｜a｜-｜b｜≤｜a+b｜≤｜a｜+｜b｜

§06. 不 等 式 知识要点

1. 不等式的基本概念

（1） 不等（等）号的定义：$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; a-b=0 \Leftrightarrow a=b; a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$

（2） 不等式的分类：绝对不等式；条件不等式；矛盾不等式.

（3） 同向不等式与异向不等式.

（4） 同解不等式与不等式的同解变形.

2. 不等式的基本性质

（1）$a>b \Leftrightarrow b<a$（对称性）

（2）$a>b, b>c \Rightarrow a>c$（传递性）

（3）$a>b \Rightarrow a+c>b+c$（加法单调性）

（4）$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$（同向不等式相加）

（5）$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$（异向不等式相减）

（6）$a.>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

（7）$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$（乘法单调性）

（8）$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$（同向不等式相乘）

(9) $a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$（异向不等式相除）

(10) $a>b, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（倒数关系）

（11）$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in Z, 且 n>1)$（平方法则）

（12）$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in Z, 且 n>1)$（开方法则）

3. 几个重要不等式

（1）若$a \in R$,则$|a| \geq 0, a^2 \geq 0$

（2） 若a、$b\in R^{+}$,则$a^{2}+b^{2}\geq 2ab$(或$a^{2}+b^{2}\geq 2|ab|\geq 2ab$)（当仅当 a=b 时取等号）

（3）如果 a,b 都是正数，那么 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.（当仅当 a=b 时取等号）

极值定理：若$x,y\in R^{+},x+y=S,xy=P$,则：

①如果 P 是定值, 那么当 $x=y$ 时，S 的值最小；
②如果 S 是定值, 那么当 $x=y$ 时，P 的值最大.
利用极值定理求最值的必要条件： 一正、二定、三相等.

(4) 若a、b、$c\in R^{+}$,则$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$（当仅当 a=b=c 时取等号）

(5) 若$ab>0$,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$（当仅当 a=b 时取等号）

(6)$a>0$时,$|x|>a\Leftrightarrow x^{2}>a^{2}\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;　　$|x|<a\Leftrightarrow x^{2}<a^{2}\Leftrightarrow -a<x<a$

（7） 若a、$b\in R$,则$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

4. 几个著名不等式

（1）平均不等式： 如果 a,b 都是正数，那么 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}$.（当仅当 a=b 时取等号）即：平方平均≥算术平均≥几何平均≥调和平均（a、b 为正数）：

特别地，$ab\leq(\frac{a+b}{2})^{2}\leq\frac{a^{2}+b^{2}}{2}$（当 $a=b$ 时，$(\frac{a+b}{2})^{2}=\frac{a^{2}+b^{2}}{2}=ab$）

$\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{3}\geq\left(\frac{a++b+c}{3}\right)^{2}(a,b,c\in R,a=b=c\text{时取等})$

$\Rightarrow$幂平均不等式：$a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+...+a_{n}^{2}\geq\frac{1}{n}(a_{1}+a_{2}+...+a_{n})^{2}$

注：例如：$(ac+bd)^{2}\leq(a^{2}+b^{2})(c^{2}+d^{2})$.

常用不等式的放缩法：①$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\prec\frac{1}{n^{2}}\prec\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geq 2)$

②$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\prec\frac{1}{2\sqrt{n}}\prec\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geq 1)$

（2）柯西不等式： 若$a_{1},a_{2},a_{3},\cdots,a_{n}\in R,b_{1},b_{2},b_{3}\cdots,b_{n}\in R$;则
$(a_{1}b_{1}+a_{2}b_{2}+a_{3}b_{3}+\cdots+a_{n}b_{n})^{2}\leq(a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+a_{3}^{2}+\cdots+a_{n}^{2})(b_{1}^{2}+b_{2}^{2}+b_{3}^{2}+\cdots b_{n}^{2})$
当且仅当$\frac{a_{1}}{b_{1}}=\frac{a_{2}}{b_{2}}=\frac{a_{3}}{b_{3}}=\cdots=\frac{a_{n}}{b_{n}}$时取等号

（3）琴生不等式（特例）与凸函数、凹函数

若定义在某区间上的函数 f(x), 对于定义域中任意两点$x_{1},x_{2}(x_{1}\neq x_{2})$,有

$f(\frac{x_{1}+x_{2}}{2})\leq\frac{f(x_{1})+f(x_{2})}{2}$或　$f(\frac{x_{1}+x_{2}}{2})\geq\frac{f(x_{1})+f(x_{2})}{2}$.

则称 f(x)为凸（或凹）函数.

5.不等式证明的几种常用方法

比较法、综合法、分析法、换元法、反证法、放缩法、构造法.

6.不等式的解法

（1）整式不等式的解法（根轴法）.

步骤：正化，求根，标轴，穿线（偶重根打结），定解.

特例① 一元一次不等式 $ax>b$ 解的讨论；

②一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\,(a\neq 0)$ 解的讨论.

（2）分式不等式的解法：先移项通分标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0;\quad \frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geq 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$$

（3）无理不等式：转化为有理不等式求解

① $$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}\left.\begin{matrix}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{定义域}\\ f(x)>g(x)\end{cases}$$

② $$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)<0\end{cases}$$

③ $$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$$

（4）.指数不等式：转化为代数不等式

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>1)\Leftrightarrow f(x)>g(x);\quad a^{f(x)}>a^{g(x)}(0<a<1)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$$
$$a^{f(x)}>b(a>0,b>0)\Leftrightarrow f(x)\cdot\lg a>\lg b$$

（5）对数不等式：转化为代数不等式

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)(a>1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases};\quad \log_a f(x)>\log_a g(x)(0<a<1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$$

（6）含绝对值不等式

①应用分类讨论思想去绝对值； ②应用数形思想；

③应用化归思想等价转化

$$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ -g(x)<f(x)<g(x)\end{cases}$$
$$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow g(x)\leq 0(f(x),g(x)\text{不同时为}0)\text{或}\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)<-g(x)\text{或}f(x)>g(x)\end{cases}$$

注：常用不等式的解法举例（x 为正数）：

① $x(1-x)^2=\frac{1}{2}\cdot 2x(1-x)(1-x)\leq\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{27}$

② $y=x(1-x^2)\Rightarrow y^2=\frac{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}{2}\leq\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{27}\Rightarrow y\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}$

类似于 $y=\sin x\cos^2 x=\sin x(1-\sin^2 x)$，③ $|x+\frac{1}{x}|=|x|+|\frac{1}{x}|$ (x与$\frac{1}{x}$同号，故取等) ≥ 2

高中数学第七章-直线和圆的方程

考试内容：

直线的倾斜角和斜率，直线方程的点斜式和两点式．直线方程的一般式．

两条直线平行与垂直的条件．两条直线的交角．点到直线的距离．

用二元一次不等式表示平面区域．简单的线性规划问题．

曲线与方程的概念．由已知条件列出曲线方程．

圆的标准方程和一般方程．圆的参数方程．

考试要求：

（1）理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线的斜率公式，掌握直线方程的点斜式、两点式、一般式，并能根据条件熟练地求出直线方程．

（2）掌握两条直线平行与垂直的条件，两条直线所成的角和点到直线的距离公式能够根据直线的方程判断两条直线的位置关系．

（3）了解二元一次不等式表示平面区域．

（4）了解线性规划的意义，并会简单的应用．

（5）了解解析几何的基本思想，了解坐标法．

（6）掌握圆的标准方程和一般方程，了解参数方程的概念。理解圆的参数方程．

§07. 直线和圆的方程　知识要点

一、直线方程.

1. 直线的倾斜角：一条直线向上的方向与x轴正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角，其中直线与x轴平行或重合时，其倾斜角为0，故直线倾斜角的范围是$0^\circ \le \alpha \prec 180^\circ (0 \le \alpha \prec \pi)$.

注：①当$\alpha = 90^\circ$或$x_2=x_1$时，直线l垂直于x轴，它的斜率不存在.

②每一条直线都存在惟一的倾斜角，除与x轴垂直的直线不存在斜率外，其余每一条直线都有惟一的斜率，并且当直线的斜率一定时，其倾斜角也对应确定.

2. 直线方程的几种形式：点斜式、截距式、两点式、斜切式.

特别地，当直线经过两点$(a,0),(0,b)$，即直线在x轴，y轴上的截距分别为$a,b(a \ne 0,b \ne 0)$时，直线方程是：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

注：若$y=-\frac{2}{3}x-2$是一直线的方程，则这条直线的方程是$y=-\frac{2}{3}x-2$，但若$y=-\frac{2}{3}x-2(x \ge 0)$则不是这条线.

附：直线系：对于直线的斜截式方程$y=kx+b$，当k,b均为确定的数值时，它表示一条确定的直线，如果k,b变化时，对应的直线也会变化.①当b为定植，k变化时，它们表示过定点（0，b）的直线束.②当k为定值，b变化时，它们表示一组平行直线.

3. ⑴两条直线平行：

$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$两条直线平行的条件是：①$l_1$和$l_2$是两条不重合的直线. ②在$l_1$和$l_2$的斜率

都存在的前提下得到的. 因此，应特别注意，抽掉或忽视其中任一个“前提”都会导致结论的错误.

（一般的结论是：对于两条直线l_1,l_2，它们在y轴上的纵截距是b_1,b_2，则$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$，

且$b_1 \neq b_2$或l_1,l_2的斜率均不存在，即$A_1B_2 = B_1A_2$是平行的必要不充分条件，且$C_1 \neq C_2$）

推论：如果两条直线l_1,l_2的倾斜角为α_1,α_2则$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

⑵两条直线垂直：

两条直线垂直的条件：①设两条直线l_1和l_2的斜率分别为k_1和k_2，则有$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$

这里的前提是l_1,l_2的斜率都存在. ②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = 0$，且$l_2$的斜率不存在或$k_2 = 0$，且$l_1$的斜率不存在. （即$A_1B_2 + A_2B_1 = 0$是垂直的充要条件）

4. 直线的交角：

⑴直线l_1到l_2的角（方向角）；直线l_1到l_2的角，是指直线l_1绕交点依逆时针方向旋转到与l_2重合时所转动的角θ，它的范围是$(0,\pi)$，当$\theta \neq 90^\circ$时$\tan\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

⑵两条相交直线l_1与l_2的夹角：两条相交直线l_1与l_2的夹角，是指由l_1与l_2相交所成的四个角中最小的正角θ，又称为l_1和l_2所成的角，它的取值范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，当$\theta \neq 90^\circ$，则有

$$\tan\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

5. 过两直线$\begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$的交点的直线系方程$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$（$\lambda$为参数，$A_2x + B_2y + C_2 = 0$不包括在内）

6. 点到直线的距离：

⑴点到直线的距离公式：设点$P(x_0,y_0)$，直线$l: Ax + By + C = 0, P$到l的距离为d，则有

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

注：

1. 两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的距离公式：$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

   特例：点$P(x,y)$到原点O的距离：$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. 定比分点坐标分式。若点 P(x,y)分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为λ即$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,其中 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$.则 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

特例，中点坐标公式；重要结论，三角形重心坐标公式。

3. 直线的倾斜角（0°≤α＜180°）、斜率:$k=\tan\alpha$

4. 过两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$的直线的斜率公式：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. $(x_1\neq x_2)$

当$x_1=x_2,y_1\neq y_2$（即直线和 x 轴垂直）时，直线的倾斜角α＝90°，没有斜率。

⑵两条平行线间的距离公式：设两条平行直线$l_1:Ax+By+C_1=0,l_2:Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$，它们之间的距离为$d$，则有$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

注；直线系方程

1. 与直线：Ax+By+C= 0 平行的直线系方程是：Ax+By+m=0.(m∈R, C≠m).

2. 与直线：Ax+By+C= 0 垂直的直线系方程是：Bx-Ay+m=0.(m∈R)

3. 过定点（x_1,y_1）的直线系方程是： A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 (A,B 不全为 0)

4. 过直线 l_1、l_2 交点的直线系方程：（$A_1x+B_1y+C_1$）+λ($A_2x+B_2y+C_2$）=0 (λ∈R) 注：该直线系不含 l_2.

7. 关于点对称和关于某直线对称：

⑴关于点对称的两条直线一定是平行直线，且这个点到两直线的距离相等.

⑵关于某直线对称的两条直线性质：若两条直线平行，则对称直线也平行，且两直线到对称直线距离相等.

若两条直线不平行，则对称直线必过两条直线的交点，且对称直线为两直线夹角的角平分线.

⑶点关于某一条直线对称，用中点表示两对称点，则中点在对称直线上（方程①），过两对称点的直线方程与对称直线方程垂直（方程②）①②可解得所求对称点.

注：①曲线、直线关于一直线（$y=\pm x+b$）对称的解法：y 换 x，x 换 y. 例：曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x-2$ 对称曲线方程是 $f(y+2,x-2)=0$.

②曲线 C: $f(x,y)=0$ 关于点(a ,b)的对称曲线方程是 $f(a-x, 2b-y)=0$.

二、圆的方程.

1. ⑴曲线与方程：在直角坐标系中，如果某曲线C上的 与一个二元方程$f(x,y)=0$的实数建立了如下关系：

①曲线上的点的坐标都是这个方程的解.

②以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么这个方程叫做曲线方程；这条曲线叫做方程的曲线（图形）.

⑵曲线和方程的关系，实质上是曲线上任一点 $M(x,y)$ 其坐标与方程 $f(x,y)=0$ 的一种关系，曲线上任一点 (x,y) 是方程 $f(x,y)=0$ 的解；反过来，满足方程 $f(x,y)=0$ 的解所对应的点是曲线上的点.

注：如果曲线 C 的方程是 $f(x,y)=0$，那么点 $P_0(x_0,y)$线 C 上的充要条件是 $f(x_0,y_0)=0$

2. 圆的标准方程：以点 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的标准方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

特例：圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的方程是：$x^2+y^2=r^2$.

注：特殊圆的方程：①与 x 轴相切的圆方程 $(x-a)^2+(y\pm b)^2=b^2$ $\quad [r=|b|,\text{圆心}(a,b)\text{或}(a,-b)]$

②与 y 轴相切的圆方程 $(x\pm a)^2+(y-b)^2=a^2$ $\quad [r=|a|,\text{圆心}(a,b)\text{或}(-a,b)]$

③与 x 轴 y 轴都相切的圆方程 $(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2$ $\quad [r=|a|,\text{圆心}(\pm a,\pm a)]$

3. 圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

当 $D^2+E^2-4F\succ 0$ 时，方程表示一个圆，其中圆心 $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

当 $D^2+E^2-4F\prec 0$ 时，方程无图形（称虚圆）.

注：①圆的参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

②方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件是：$B=0$ 且 $A=C\neq 0$ 且 $D^2+E^2-4AF\succ 0$.

③圆的直径或方程：已知 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$（用向量可征）.

4. 点和圆的位置关系：给定点 $M(x_0,y_0)$ 及圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

①M 在圆 C 内 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2\prec r^2$

②M 在圆 C 上 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

③M 在圆 C 外 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2\succ r^2$

5. 直线和圆的位置关系：

设圆圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r\succ 0)$； 直线 l：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$；

圆心 $C(a,b)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

①$d=r$ 时，l 与 C 相切；

附：若两圆相切，则 $\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0\\x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}\Rightarrow$ 相减为公切线方程.

②$d\prec r$ 时，l 与 C 相交；

附：公共弦方程：设 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

有两个交点，则其公共弦方程为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$.

③$d\succ r$ 时，l 与 C 相离.

附：若两圆相离，则 $\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0\\x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}\Rightarrow$ 相减为圆心 O_1O_2 的连线的中与线方程.

由代数特征判断：方程组 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\Ax+Bx+C=0\end{cases}$ 用代入法，得关于 x（或 y）的一元二次方程，其判别式为 Δ，则：

$\Delta=0\Leftrightarrow l$ 与 C 相切；

$\Delta\succ 0\Leftrightarrow l$ 与 C 相交；

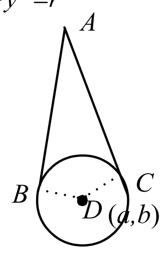
$\Delta\prec 0\Leftrightarrow l$ 与 C 相离.

注：若两圆为同心圆则 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相减，不表示直线.

6. 圆的切线方程：圆 $x^2+y^2=r^2$ 的斜率为 k 的切线方程是 $y=kx\pm\sqrt{1+k^2}r$ 过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$x_0x+y_0y+D\dfrac{x+x_0}{2}+E\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$.

①一般方程若点 (x_0,y_0) 在圆上，则 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$. 特别地，过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.



②若点 (x_0,y_0) 不在圆上，圆心为 (a,b) 则 $\begin{cases}y_1-y_0=k(x_1-x_0)\\R=\dfrac{|b-y_1-k(a-x_1)|}{\sqrt{R^2+1}}\end{cases}$，联立求出 $k\Rightarrow$ 切线方程.

7. 求切点弦方程：方法是构造图，则切点弦方程即转化为公共弦方程. 如图：ABCD 四类共圆. 已知 ΘO 的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ldots$① 又以 ABCD 为圆为方程为 $(x-x_A)(x-a)+(y-y_A)(x-b)=k^2\ldots$②

$R^2=\frac{(x_A-a)^2+(y_A-b)^2}{4}$…③，所以 BC 的方程即③代②，①②相切即为所求.

三、曲线和方程

1.曲线与方程：在直角坐标系中，如果曲线 C 和方程 f(x,y)=0 的实数解建立了如下的关系：

1） 曲线 C 上的点的坐标都是方程 f(x,y)=0 的解（纯粹性）；

2） 方程 f(x,y)=0 的解为坐标的点都在曲线 C 上（完备性）。则称方程 f(x,y)=0 为曲线 C 的方程，曲线 C 叫做方程 f(x,y)=0 的曲线。

2.求曲线方程的方法：.

1）直接法：建系设点，列式表标,简化检验； 2）参数法； 3）定义法， 4）待定系数法.

高中数学第八章-圆锥曲线方程

考试内容：

椭圆及其标准方程．椭圆的简单几何性质．椭圆的参数方程．

双曲线及其标准方程．双曲线的简单几何性质．

抛物线及其标准方程．抛物线的简单几何性质．

考试要求：

（1）掌握椭圆的定义、标准方程和椭圆的简单几何性质，了解椭圆的参数方程．

（2）掌握双曲线的定义、标准方程和双曲线的简单几何性质．

（3）掌握抛物线的定义、标准方程和抛物线的简单几何性质．

（4）了解圆锥曲线的初步应用．

§08. 圆锥曲线方程　知识要点

一、椭圆方程.

1. 椭圆方程的第一定义：

$|PF_1|+|PF_2|=2a\succ|F_1F_2|$方程为椭圆,

$|PF_1|+|PF_2|=2a\prec|F_1F_2|$无轨迹,

$|PF_1|+|PF_2|=2a=|F_1F_2|$以$F_1,F_2$为端点的线段

⑴①椭圆的标准方程：

i. 中心在原点，焦点在 x 轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$. ii. 中心在原点，焦点在 y 轴上：

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$.

②一般方程：$Ax^2+By^2=1(A\succ 0,B\succ 0)$.③椭圆的标准参数方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为

$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（一象限$\theta$应是属于$0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$）.

⑵①顶点：$(\pm a,0)(0,\pm b)$或$(0,\pm a)(\pm b,0)$.②轴：对称轴：x轴，y轴；长轴长$2a$，短轴长$2b$

.③焦点：$(-c,0)(c,0)$或$(0,-c)(0,c)$.④焦距：$|F_1F_2|=2c,c=\sqrt{a^2-b^2}$.⑤准线：$x=\pm\frac{a^2}{c}$或

$y=\pm\frac{a^2}{c}$.⑥离心率：$e=\frac{c}{a}(0\prec e\prec 1)$.⑦焦点半径：

i. 设$P(x_0,y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$上的一点，$F_1,F_2$为左、右焦点，则$|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0\Rightarrow$

由椭圆方程的第二定义可以推出.

ii.设$P(x_0,y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a\succ b\succ 0)$上的一点，$F_1,F_2$为上、下焦点，则$|PF_1|=a+ey_0,|PF_2|=a-ey_0\Rightarrow$

由椭圆方程的第二定义可以推出.

由椭圆第二定义可知：$|pF_1|=e(x_0+\frac{a^2}{c})=a+ex_0(x_0\prec 0),|pF_2|=e(\frac{a^2}{c}-x_0)=ex_0-a(x_0\succ 0)$归结起来为

“左加右减”.

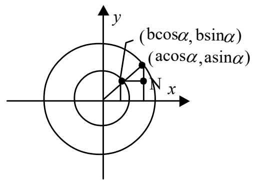
注意：椭圆参数方程的推导：得$N(a\cos\theta,b\sin\theta)\rightarrow$方程的轨迹为椭圆.

⑧通径：垂直于 x 轴且过焦点的弦叫做通经.坐标： $d=\frac{2b^2}{a^2}$ $(-c,\frac{b^2}{a})$ 和 $(c,\frac{b^2}{a})$

⑶共离心率的椭圆系的方程：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$ 的离心率是 $e=\frac{c}{a}(c=\sqrt{a^2-b^2})$，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t(t$ 是大于 0 的参数，$a\succ b\succ 0)$ 的离心率也是 $e=\frac{c}{a}$ 我们称此方程为共离心率的椭圆系方程.

⑸若 P 是椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点.F_1,F_2 为焦点，若 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 ΔPF_1F_2 的面积为 $b^2\tan\frac{\theta}{2}$（用余弦定理与 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 可得）. 若是双曲线，则面积为 $b^2\cdot\cot\frac{\theta}{2}$.

二、双曲线方程.



N的轨迹是椭圆

1. 双曲线的第一定义：

$||PF_1|-|PF_2||=2a\prec|F_1F_2|$ 方程为双曲线

$||PF_1|-|PF_2||=2a\succ|F_1F_2|$ 无轨迹

$||PF_1|-|PF_2||=2a=|F_1F_2|$ 以 F_1,F_2 的一个端点的一条射线

⑴①双曲线标准方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\succ 0),\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a,b\succ 0)$. 一般方程：$Ax^2+Cy^2=1(AC\prec 0)$.

⑵①i. 焦点在 x 轴上：

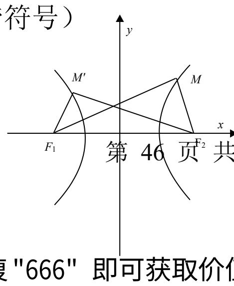
顶点：$(a,0),(-a,0)$　焦点：$(c,0),(-c,0)$　准线方程 $x=\pm\frac{a^2}{c}$ 渐近线方程：$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

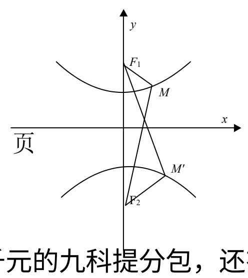
ii. 焦点在 y 轴上：顶点：$(0,-a),(0,a)$. 焦点：$(0,c),(0,-c)$. 准线方程：$y=\pm\frac{a^2}{c}$. 渐近线方程：$\frac{y}{a}\pm\frac{x}{b}=0$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$，参数方程：$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=b\tan\theta\\y=a\sec\theta\end{cases}$.

②轴 x,y 为对称轴，实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$，焦距 2c. ③离心率 $e=\frac{c}{a}$. ④准线距 $\frac{2a^2}{c}$（两准线的距离）；通径 $\frac{2b^2}{a}$. ⑤参数关系 $c^2=a^2+b^2,e=\frac{c}{a}$. ⑥焦点半径公式：对于双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$F_1,F_2$ 分别为双曲线的左、右焦点或分别为双曲线的上下焦点）

"长加短减"原则：

$\begin{matrix}|MF_1|=ex_0+a\\|MF_2|=ex_0-a\end{matrix}$ 构成满足 $|MF_1|-|MF_2|=2a$　$\begin{matrix}|M'F_1|=-ex_0-a\\|M'F_2|=-ex_0+a\end{matrix}$（与椭圆焦半径不同，椭圆焦半径要带符号计算，而双曲线不带符号）





$|MF_1| = ey_0 - a$

$|MF_2| = ey_0 + a$

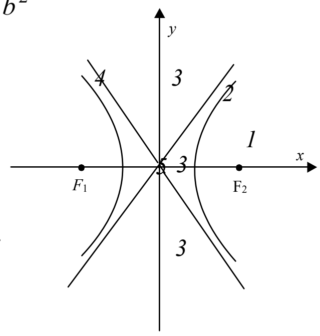
$|M'F_1| = -ey_0{}' + a$

$|M'F_2| = -ey_0{}' - a$

⑶等轴双曲线：双曲线 $x^2 - y^2 = \pm a^2$ 称为等轴双曲线，其渐近线方程为 $y = \pm x$，离心率 $e = \sqrt{2}$.

⑷共轭双曲线：以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线，叫做已知双曲线的共轭双曲线.$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ 与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\lambda$ 互为共轭双曲线，它们具有共同的渐近线：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

⑸共渐近线的双曲线系方程：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda(\lambda \neq 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 如果双曲线的渐近线为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 时，它的双曲线方程可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda(\lambda \neq 0)$.



例如：若双曲线一条渐近线为 $y = \frac{1}{2}x$ 且过 $p(3, -\frac{1}{2})$，求双曲线的方程？

解：令双曲线的方程为：$\frac{x^2}{4} - y^2 = \lambda(\lambda \neq 0)$，代入 $(3, -\frac{1}{2})$ 得 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.

⑹直线与双曲线的位置关系：

区域①：无切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；

区域②：即定点在双曲线上，1 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 3 条；

区域③：2 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 4 条；

区域④：即定点在渐近线上且非原点，1 条切线，1 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；

区域⑤：即过原点，无切线，无与渐近线平行的直线.

小结：过定点作直线与双曲线有且仅有一个交点，可以作出的直线数目可能有 0、2、3、4 条.

（2）若直线与双曲线一支有交点，交点为二个时，求确定直线的斜率可用代入“Δ”法与渐近线求交和两根之和与两根之积同号.

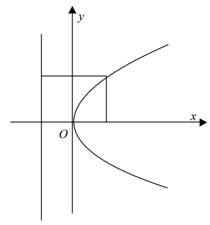
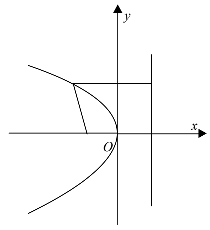
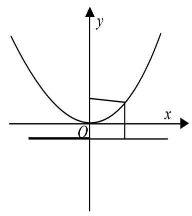
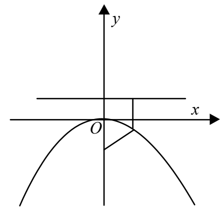
⑺若 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，则常用结论 1：P 到焦点的距离为 m = n，则 P 到两准线的距离比为 m∶n.

简证：$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{|PF_1|}{e}}{\frac{|PF_2|}{e}} = \frac{m}{n}$.

常用结论 2：从双曲线一个焦点到另一条渐近线的距离等于 b.

三、抛物线方程.

3. 设 $p \succ 0$，抛物线的标准方程、类型及其几何性质：

	$y^2=2px$	$y^2=-2px$	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
图形				
焦点	$F(\frac{p}{2},0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$F(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\ge 0, y\in R$	$x\le 0, y\in R$	$x\in R, y\ge 0$	$x\in R, y\le 0$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	（0，0）			
离心率	$e=1$			
焦点	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+x_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+\lvert x_1\rvert$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+y_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+\lvert y_1\rvert$

注：① $ay^2+by+c=x$ 顶点 $(\frac{4ac-b^2}{4a}-\frac{b}{2a})$.

② $y^2=2px(p\ne 0)$ 则焦点半径 $\lvert PF\rvert=\left|x+\frac{P}{2}\right|$；$x^2=2py(p\ne 0)$ 则焦点半径为 $\lvert PF\rvert=\left|y+\frac{P}{2}\right|$.

③通径为 2p，这是过焦点的所有弦中最短的.

④ $y^2=2px$ （或 $x^2=2py$ ）的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ （或 $\begin{cases}x=2pt\\y=2pt^2\end{cases}$ ）（t 为参数）.

四、圆锥曲线的统一定义..

4. 圆锥曲线的统一定义：平面内到定点 F 和定直线 l 的距离之比为常数 e 的点的轨迹.
当 $0\prec e\prec 1$ 时，轨迹为椭圆；
当 $e=1$ 时，轨迹为抛物线；
当 $e\succ 1$ 时，轨迹为双曲线；
当 $e=0$ 时，轨迹为圆（$e=\frac{c}{a}$，当 $c=0, a=b$ 时）.

5. 圆锥曲线方程具有对称性. 例如：椭圆的标准方程对原点的一条直线与双曲线的交点是关于原点对称的.
因为具有对称性，所以欲证 AB=CD, 即证 AD 与 BC 的中点重合即可.

注：椭圆、双曲线、抛物线的标准方程与几何性质

		椭圆	双曲线	抛物线
定义		1．到两定点 F_1,F_2 的距离之和为定值 $2a(2a>\|F_1F_2\|)$ 的点的轨迹	1．到两定点 F_1,F_2 的距离之差的绝对值为定值 $2a(0<2a<\|F_1F_2\|)$ 的点的轨迹	
		2．与定点和直线的距离之比为定值 e 的点的轨迹.（0<e<1）	2．与定点和直线的距离之比为定值 e 的点的轨迹.（e>1）	与定点和直线的距离相等的点的轨迹.
图形				
方程	标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0,b>0)	$y^2=2px$
	参数方程	$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ (参数θ为离心角）	$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$ (参数θ为离心角）	$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ (t 为参数)
范围		$-a\le x\le a$，$-b\le y\le b$	$\|x\|\ge a$，$y\in R$	$x\ge0$
中心		原点 O（0，0）	原点 O（0，0）	
顶点		(a,0)，(−a,0)，(0,b)，(0,−b)	(a,0)，(−a,0)	(0,0)
对称轴		x 轴，y 轴； 长轴长 2a,短轴长 2b	x 轴，y 轴； 实轴长 2a，虚轴长 2b.	x 轴
焦点		$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$	$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$	$F(\frac{p}{2},0)$
焦距		2c （$c=\sqrt{a^2-b^2}$）	2c （$c=\sqrt{a^2+b^2}$）	
离心率		$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	$e=\frac{c}{a}(e>1)$	e=1
准线		$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线			$y=\pm\frac{b}{a}x$	
焦半径		$r=a\pm ex$	$r=\pm(ex\pm a)$	$r=x+\frac{p}{2}$
通径		$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	2p
焦参数		$\frac{a^2}{c}$	$\frac{a^2}{c}$	P

1. 椭圆、双曲线、抛物线的标准方程的其他形式及相应性质.
2. 等轴双曲线
3. 共轭双曲线

5. 方程 $y^2=ax$ 与 $x^2=ay$ 的焦点坐标及准线方程.

6.共渐近线的双曲线系方程.

高中数学第九章-立体几何

考试内容

平面及其基本性质．平面图形直观图的画法．

平行直线．对应边分别平行的角．异面直线所成的角．异面直线的公垂线．异面直线的距离．

直线和平面平行的判定与性质．直线和平面垂直的判定与性质．点到平面的距离．斜线在平面上的射影．直线和平面所成的角．三垂线定理及其逆定理．

平行平面的判定与性质．平行平面间的距离．二面角及其平面角．两个平面垂直的判定与性质．

多面体．正多面体．棱柱．棱锥．球．

考试要求

（1）掌握平面的基本性质，会用斜二测的画法画水平放置的平面图形的直观图;能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形，能够根据图形想像它们的位置关系．

（2）掌握两条直线平行与垂直的判定定理和性质定理，掌握两条直线所成的角和距离的概念，对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线时的距离．

（3）掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理；掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离的概念掌握三垂线定理及其逆定理．

（4）掌握两个平面平行的判定定理和性质定理，掌握二面角、二面角的平面角、两个平行平面间的距离的概念，掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理．

（5）会用反证法证明简单的问题．

（6）了解多面体、凸多面体的概念，了解正多面体的概念．

（7）了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会画直棱柱的直观图．

（8）了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质，会画正棱锥的直观图．

（9）了解球的概念，掌握球的性质，掌握球的表面积、体积公式．

9（B）．直线、平面、简单几何体

考试内容：

平面及其基本性质．平面图形直观图的画法．

平行直线．

直线和平面平行的判定与性质．直线和平面垂直的判定．三垂线定理及其逆定理．

两个平面的位置关系．

空间向量及其加法、减法与数乘．空间向量的坐标表示．空间向量的数量积．

直线的方向向量．异面直线所成的角．异面直线的公垂线．异面直线的距离．

直线和平面垂直的性质．平面的法向量．点到平面的距离．直线和平面所成的角．向量在平面内的射影．

平行平面的判定和性质．平行平面间的距离．二面角及其平面角．两个平面垂直的判定和性质．

多面体．正多面体．棱柱．棱锥．球．

考试要求：

（1）掌握平面的基本性质。会用斜二测的画法画水平放置的平面图形的直观图：能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形.能够根据图形想像它们的位置关系．

（2）掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；理解直线和平面垂直的概念.掌握直线和平面垂直的判定定理；掌握三垂线定理及其逆定理．

（3）理解空间向量的概念，掌握空间向量的加法、减法和数乘．

（4）了解空间向量的基本定理；理解空间向量坐标的概念.掌握空间向量的坐标运算．

（5）掌握空间向量的数量积的定义及其性质：掌握用直角坐标计算空间向量数量积的公式；掌握空间两点间距离公式．

（6）理解直线的方向向量、平面的法向量、向量在平面内的射影等概念．

（7）掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面所成的角、距离的概念.对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线或在坐标表示下的距离掌握直线和平面垂直的性质定理掌握两个平面平行、垂直的判定定理和性质定理．

（8）了解多面体、凸多面体的概念。了解正多面体的概念．

（9）了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会画直棱柱的直观图．

（10）了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质。会画正棱锥的直观图．

（11）了解球的概念.掌握球的性质.掌握球的表面积、体积公式．

（考生可在 9（A）和 9（B）中任选其一）

§09. 立体几何　知识要点

一、　　平面.

1. 经过不在同一条直线上的三点确定一个面.

注：两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

2. 两个平面可将平面分成<u>3 或 4</u>部分.（①两个平面平行，②两个平面相交）

3. 过三条互相平行的直线可以确定<u>1 或 3</u>个平面.（①三条直线在一个平面内平行，②三条直线不在一个平面内平行）

[注]：三条直线可以确定三个平面，三条直线的公共点有<u>0 或 1</u>个.

4. 三个平面最多可把空间分成<u> 8 </u>部分.（X、Y、Z 三个方向）

二、　　空间直线.

1. 空间直线位置分三种：相交、平行、异面. 相交直线—共面有反且有一个公共点；平行直线—共面没有公共点；异面直线—不同在任一平面内

[注]：①两条异面直线在同一平面内射影一定是相交的两条直线.（×）（可能两条直线平行，也可能是点和直线等）

②直线在平面外，指的位置关系：平行或相交

③若直线 a、b 异面，a 平行于平面 α，b 与 α 的关系是相交、平行、在平面 α 内.

④两条平行线在同一平面内的射影图形是<u>一条直线或两条平行线或两点</u>.

⑤在平面内射影是直线的图形一定是直线.（×）（射影不一定只有直线，也可以是其他图形）

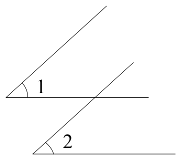
⑥在同一平面内的射影长相等，则斜线长相等.（×）（并非是从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段）

⑦ a,b 是夹在两平行平面间的线段，若 $a=b$，则 a,b 的位置关系为<u>相交或平行或异面</u>.

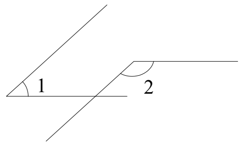
2. 异面直线判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.（不在任何一个平面内的两条直线）

3. 平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

4. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等（如下图）.



方向相同



方向不相同

（二面角的取值范围$\theta\in\left[0^\circ,180^\circ\right)$）

（直线与直线所成角$\theta\in\left(0^\circ,90^\circ\right]$）

（斜线与平面成角$\theta\in\left(0^\circ,90^\circ\right)$）

（直线与平面所成角$\theta\in\left[0^\circ,90^\circ\right]$）

（向量与向量所成角$\theta\in[0^\circ,180^\circ]$)

推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成锐角（或直角）相等.

5. 两异面直线的距离：公垂线的长度.

空间两条直线垂直的情况：相交（共面）垂直和异面垂直.

l_1,l_2是异面直线，则过l_1,l_2外一点 P，过点 P 且与l_1,l_2都平行平面有一个或没有，但与l_1,l_2距离相等的点在同一平面内.（L_1或L_2在这个做出的平面内不能叫L_1与L_2平行的平面）

三、　　直线与平面平行、直线与平面垂直.

1. 空间直线与平面位置分三种：相交、平行、在平面内.

2. 直线与平面平行判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.（“线线平行，线面平行”）

[注]：①直线a与平面α内一条直线平行，则$a\parallel\alpha$.（×）（平面外一条直线）

②直线a与平面α内一条直线相交，则a与平面α相交.（×）（平面外一条直线）

③若直线a与平面α平行，则α内必存在无数条直线与a平行.（√）（不是任意一条直线，可利用平行的传递性证之）

④两条平行线中一条平行于一个平面，那么另一条也平行于这个平面.（×）（可能在此平面内）

⑤平行于同一直线的两个平面平行.（×）（两个平面可能相交）

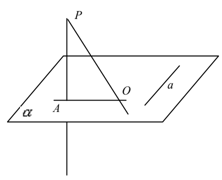
⑥平行于同一个平面的两直线平行.（×）（两直线可能相交或者异面）

⑦直线l与平面α、β所成角相等，则$\alpha\parallel\beta$.（×）（α、β可能相交）

3. 直线和平面平行性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.（“线面平行，线线平行”）

4. 直线与平面垂直是指直线与平面任何一条直线垂直，过一点有且只有一条直线和一个平面垂直，过一点有且只有一个平面和一条直线垂直.

- 若$PA\perp\alpha$，$a\perp AO$，得$a\perp PO$（三垂线定理），得不出$\alpha\perp PO$. 因为$a\perp PO$，但PO不垂直OA.



● 三垂线定理的逆定理亦成立.

直线与平面垂直的判定定理一：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这两条直线垂直于这个平面.（“线线垂直，线面垂直”）

直线与平面垂直的判定定理二：如果平行线中一条直线垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

推论：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

[注]：①垂直于同一平面的两个平面平行.（×）（可能相交，垂直于同一条直线的两个平面平行）

②垂直于同一直线的两个平面平行.（√）（一条直线垂直于平行的一个平面，必垂直于另一个平面）

③垂直于同一平面的两条直线平行.（√）

5. ⑴垂线段和斜线段长定理：从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，①射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段较长；②相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段射影较长；③垂线段比任何一条斜线段短.

[注]：垂线在平面的射影为一个点. [一条直线在平面内的射影是一条直线.（×）]

⑵射影定理推论：如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等，那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上

四、 平面平行与平面垂直.

1. 空间两个平面的位置关系：相交、平行.

2. 平面平行判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，哪么这两个平面平行.（“线面平行，面面平行”）

推论：垂直于同一条直线的两个平面互相平行；平行于同一平面的两个平面平行.

[注]：一平面间的任一直线平行于另一平面.

3. 两个平面平行的性质定理：如果两个平面平行同时和第三个平面相交，那么它们交线平行.（“面面平行，线线平行”）

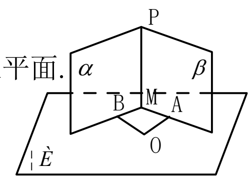
4. 两个平面垂直性质判定一：两个平面所成的二面角是直二面角，则两个平面垂直.

两个平面垂直性质判定二：如果一个平面与一条直线垂直，那么经过这条直线的平面垂直于这个平面.（“线面垂直，面面垂直”）

注：如果两个二面角的平面对应平面互相垂直，则两个二面角没有什么关系.

5. 两个平面垂直性质定理：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线也垂直于另一个平面.

推论：如果两个相交平面都垂直于第三平面，则它们交线垂直于第三平面.



证明：如图，找 O 作 OA、OB 分别垂直于 l_1, l_2，

因为 $PM \subset \beta, OA \perp \beta, PM \subset \alpha, OB \perp \alpha$ 则 $PM \perp OA, PM \perp OB$.

6. 两异面直线任意两点间的距离公式：$l = \sqrt{m^2 + n^2 + d^2 + 2mn\cos\theta}$（$\theta$ 为锐角取加，θ 为钝取减，综上，都取加则必有 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$）

7. ⑴最小角定理：$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2$（$\theta_1$ 为最小角，如图）

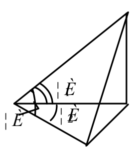


图1

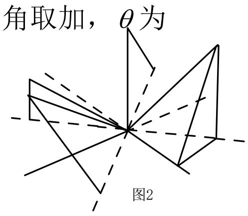


图2

⑵最小角定理的应用（∠PBN 为最小角）

简记为：成角比交线夹角一半大，且又比交线夹角补角一半长，一定有 4 条.

成角比交线夹角一半大，又比交线夹角补角小，一定有 2 条.
成角比交线夹角一半大，又与交线夹角相等，一定有 3 条或者 2 条.
成角比交线夹角一半小，又与交线夹角一半小，一定有 1 条或者没有.

五、　　棱锥、棱柱.

1. 棱柱.

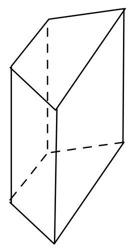
⑴①直棱柱侧面积：$S=Ch$（C 为底面周长，h 是高）该公式是利用直棱柱的侧面展开图为矩形得出的.

②斜棱住侧面积：$S=C_1 l$（C_1 是斜棱柱直截面周长，l 是斜棱柱的侧棱长）该公式是利用斜棱柱的侧面展开图为平行四边形得出的.

⑵{四棱柱}$\supset${平行六面体}$\supset${直平行六面体}$\supset${长方体}$\supset${正四棱柱}$\supset${正方体}.
{直四棱柱}$\cap${平行六面体}={直平行六面体}.

四棱柱 $\xrightarrow[\text{平行四边形}]{\text{底面是}}$ 平行六面体 $\xrightarrow[\text{底面}]{\text{侧棱垂直}}$ 直平行六面体 $\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面是}}$ 长方体 $\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面是}}$ 正四棱柱 $\xrightarrow[\text{底面边长相等}]{\text{侧面与}}$ 正方体

⑶棱柱具有的性质：
①棱柱的各个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的各个侧面都是矩形；正棱柱的各个侧面都是全等的矩形.
②棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形.
③过棱柱不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.
注：①棱柱有一个侧面和底面的一条边垂直可推测是直棱柱.　（×）
（直棱柱不能保证底面是钜形可如图）



②（直棱柱定义）棱柱有一条侧棱和底面垂直.
⑷平行六面体：
定理一：平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分.
[注]：四棱柱的对角线不一定相交于一点.
定理二：长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

推论一：长方体一条对角线与同一个顶点的三条棱所成的角为 α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

推论二：长方体一条对角线与同一个顶点的三各侧面所成的角为 α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

[注]：①有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱.（×）（斜四面体的两个平行的平面可以为矩形）
②各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱.（×）（应是各侧面都是正方形的直棱柱才行）
③对角面都是全等的矩形的直四棱柱一定是长方体.（×）（只能推出对角线相等，推不出底面为矩形）
④棱柱成为直棱柱的一个必要不充分条件是<u>棱柱有一条侧棱与底面的两条边垂直</u>.（两条边可能相交，可能不相交，若两条边相交，则应是充要条件）

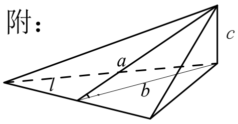
2. 棱锥：棱锥是一个面为多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形.
[注]：①一个棱锥可以四各面都为直角三角形.

②一个棱柱可以分成等体积的三个三棱锥；所以 $V_{\square\square} = Sh = 3V_{\square\square}$.

⑴①正棱锥定义：底面是正多边形；顶点在底面的射影为底面的中心.
[注]：i. 正四棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形.（不是等边三角形）
ii. 正四面体是各棱相等，而正三棱锥是底面为正△侧棱与底棱不一定相等
iii. 正棱锥定义的推论：若一个棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形（即侧棱相等）；底面为正多边形.

②正棱锥的侧面积：$S = \frac{1}{2}Ch'$（底面周长为 C，斜高为 h'）

③棱锥的侧面积与底面积的射影公式：$S_{侧} = \frac{S_{底}}{\cos\alpha}$（侧面与底面成的二面角为 α）

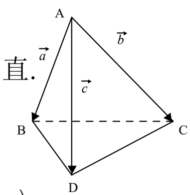
附：

以知 $c \perp l$，$\cos\alpha \cdot a = b$，α 为二面角 $a-l-b$.

则 $S_1 = \frac{1}{2}a \cdot l$ ①，$S_2 = \frac{1}{2}l \cdot b$ ②，$\cos\alpha \cdot a = b$ ③ $\Rightarrow$①②

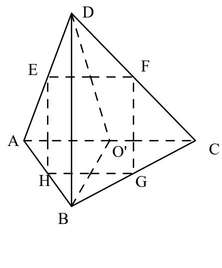
③得 $S_{侧} = \frac{S_{底}}{\cos\alpha}$.

注：S 为任意多边形的面积（可分别多个三角形的方法）.
⑵棱锥具有的性质：
①正棱锥各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等（它叫做正棱锥的斜高）.
②正棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形，正棱锥的高、侧棱、侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形.
⑶特殊棱锥的顶点在底面的射影位置：
①棱锥的侧棱长均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.
②棱锥的侧棱与底面所成的角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.
③棱锥的各侧面与底面所成角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.
④棱锥的顶点到底面各边距离相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.
⑤三棱锥有两组对棱垂直，则顶点在底面的射影为三角形垂心.
⑥三棱锥的三条侧棱两两垂直，则顶点在底面上的射影为三角形的垂心.
⑦每个四面体都有外接球，球心 0 是各条棱的中垂面的交点，此点到各顶点的距离等于球半径；
⑧每个四面体都有内切球，球心 I 是四面体各个二面角的平分面的交点，到各面的距离等于半径.
[注]：i. 各个侧面都是等腰三角形，且底面是正方形的棱锥是正四棱锥.（×）（各个侧面的等腰三角形不知是否全等）
ii. 若一个三角锥，两条对角线互相垂直，则第三对角线必然垂直.



简证：AB⊥CD，AC⊥BD⇒ BC⊥AD. 令 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

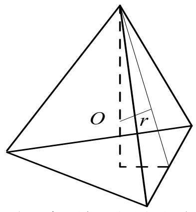
得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c}$，已知 $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$



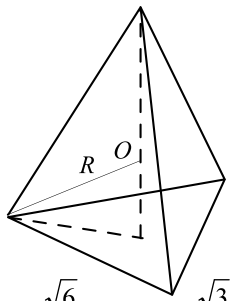
$\Rightarrow \vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}=0$ 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

iii. 空间四边形 OABC 且四边长相等，则顺次连结各边的中点的四边形一定是矩形.
iv. 若是四边长与对角线分别相等，则顺次连结各边的中点的四边是一定是正方形.
简证：取 AC 中点 O'，则 $oo'\perp AC, BO'\perp AC\Rightarrow AC\perp$ 平面 $OO'B\Rightarrow AC\perp BO\Rightarrow \angle FGH=90°$
易知 EFGH 为平行四边形 $\Rightarrow$ EFGH 为长方形. 若对角线等，则 $EF=FG\Rightarrow EFGH$ 为正方形.

3. 球：⑴球的截面是一个圆面.



①球的表面积公式：$S=4\pi R^2$.
②球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
⑵纬度、经度：
①纬度：地球上一点 P 的纬度是指经过 P 点的球半径与赤道面所成的角的度数.
②经度：地球上 A,B 两点的经度差，是指分别经过这两点的经线与地轴所确定的二个半平面的二面角的度数，特别地，当经过点 A 的经线是本初子午线时，这个二面角的度数就是 B 点的经度.
附：①圆柱体积：$V=\pi r^2 h$（r 为半径，h 为高）
②圆锥体积：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$（r 为半径，h 为高）
③锥形体积：$V=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为高）



4. ①内切球：当四面体为正四面体时，设边长为 a，$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$S_{底}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_{侧}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R\Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{4}a/\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

注：球内切于四面体：$V_{B-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\square}\cdot R\cdot 3+\frac{1}{3}S_{\square}\cdot R=S_{\square}\cdot h$

②外接球：球外接于正四面体，可如图建立关系式.

六. 空间向量.

1. （1）共线向量：共线向量亦称平行向量，指空间向量的有向线段所在直线互相平行或重合.

注：①若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线.（×） [当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，不成立]

②向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面即它们所在直线共面.（×） [可能异面]

③若 $\vec{a}$ // $\vec{b}$，则存在小任一实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.（×）[与 $\vec{b}=\vec{0}$ 不成立]

④若 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.（√）[这里用到 $\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$ 之积仍为向量]

（2）共线向量定理：对空间任意两个向量 $\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}$ // $\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ（具有唯一性），使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

（3）共面向量：若向量$\vec{a}$使之平行于平面α或$\vec{a}$在α内，则$\vec{a}$与α的关系是平行，记作$\vec{a}$ // α.

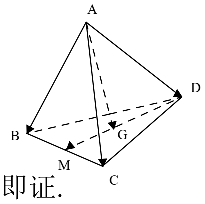
（4）①共面向量定理：如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，则向量$\vec{P}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在实数对x、y使$\vec{P}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

②空间任一点O和不共线三点A、B、C，则$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$是$PABC$四点共面的充要条件.（简证：$\overrightarrow{OP}=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}\to P$、$A$、$B$、$C$四点共面）

注：①②是证明四点共面的常用方法.

2. 空间向量基本定理：如果三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，那么对空间任一向量$\vec{P}$，存在一个唯一的有序实数组x、y、z，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

推论：设O、A、B、C是不共面的四点，则对空间任一点P, 都存在唯一的有序实数组x、y、z使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(这里隐含 x+y+z≠1).



注：设四面体ABCD的三条棱，$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, 其中Q是△BCD的重心，则向量$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$用$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}$即证.

3. （1）空间向量的坐标：空间直角坐标系的x轴是横轴（对应为横坐标），y轴是纵轴（对应为纵轴），z轴是竖轴（对应为竖坐标）.

①令$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$ $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ (用到常用的向量模与向量之间的转化：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

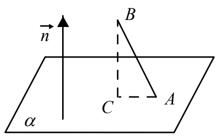
（2）法向量：若向量$\vec{a}$所在直线垂直于平面α，则称这个向量垂直于平面α，记作$\vec{a}\perp\alpha$，如果$\vec{a}\perp\alpha$那么向量$\vec{a}$叫做平面α的法向量.

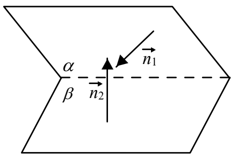
（3）用向量的常用方法：

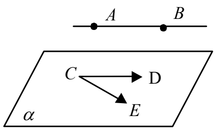
①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面α的法向量，AB 是平面α的一条射线，其中$A\in\alpha$，则点 B 到平面α的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$.

②利用法向量求二面角的平面角定理：设$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$分别是二面角$\alpha-l-\beta$中平面$\alpha,\beta$的法向量，则$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$方向相同，则为补角，$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$反方，则为其夹角）.

③证直线和平面平行定理：已知直线$a\neq\subset$平面α，$A\cdot B\in a, C\cdot D\in\alpha$，且 CDE 三点不共线，则 a// α的充要条件是存在有序实数对$\lambda\cdot\mu$使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$.（常设$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$求解$\lambda,\mu$若$\lambda,\mu$存在即证毕，若$\lambda,\mu$不存在，则直线 AB 与平面相交）.



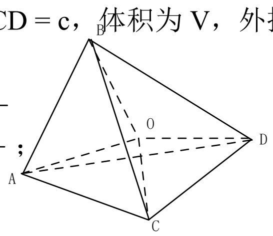




II. 竞赛知识要点

一、四面体.

1. 对照平面几何中的三角形，我们不难得到立体几何中的四面体的类似性质：
①四面体的六条棱的垂直平分面交于一点，这一点叫做此四面体的外接球的球心；
②四面体的四个面组成六个二面角的角平分面交于一点，这一点叫做此四面体的内接球的球心；
③四面体的四个面的重心与相对顶点的连接交于一点，这一点叫做此四面体的重心，且重心将每条连线分为 3∶1；
④12 个面角之和为 720°，每个三面角中任两个之和大于另一个面角，且三个面角之和为 180°.
2. 直角四面体：有一个三面角的三个面角均为直角的四面体称为直角四面体，相当于平面几何的直角三角形.（在直角四面体中，记 V、l、S、R、r、h 分别表示其体积、六条棱长之和、表面积、外接球半径、内切球半径及侧面上的高），则有空间勾股定理：$S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle BCD}+S^2_{\triangle ABD}=S^2_{\triangle ACD}$.
3. 等腰四面体：对棱都相等的四面体称为等腰四面体，好象平面几何中的等腰三角形.根据定义不难证明以长方体的一个顶点的三条面对角线的端点为顶点的四面体是等腰四面体，反之也可以将一个等腰四面体拼补成一个长方体.
（在等腰四面体 ABCD 中，记 BC = AD =a，AC = BD = b，AB = CD = c，体积为 V，外接球半径为 R，内接球半径为 r，高为 h），则有



①等腰四面体的体积可表示为$V=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}$；

②等腰四面体的外接球半径可表示为$R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

③等腰四面体的四条顶点和对面重心的连线段的长相等，且可表示为$m=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

④h = 4r.

二、空间正余弦定理.

空间正弦定理：sin∠ABD/sin∠A-BC-D=sin∠ABC/sin∠A-BD-C=sin∠CBD/sin∠C-BA-D

空间余弦定理：cos∠ABD=cos∠ABCcos∠CBD+sin∠ABCsin∠CBDcos∠A-BC-D

立体几何知识要点

一、知识提纲

（一）空间的直线与平面

1.平面的基本性质　⑴三个公理及公理三的三个推论和它们的用途．　⑵斜二测画法．

2.空间两条直线的位置关系：相交直线、平行直线、异面直线．

⑴公理四（平行线的传递性）．等角定理．

⑵异面直线的判定：判定定理、反证法．

⑶异面直线所成的角：定义（求法）、范围．

3.直线和平面平行　直线和平面的位置关系、直线和平面平行的判定与性质．

4.直线和平面垂直

⑴直线和平面垂直：定义、判定定理．

⑵三垂线定理及逆定理．

5. 平面和平面平行

两个平面的位置关系、两个平面平行的判定与性质．

6. 平面和平面垂直

互相垂直的平面及其判定定理、性质定理．

（二）直线与平面的平行和垂直的证明思路（见附图）

（三）夹角与距离

7. 直线和平面所成的角与二面角

⑴平面的斜线和平面所成的角：三面角余弦公式、最小角定理、斜线和平面所成的角、直线和平面所成的角．

⑵二面角：①定义、范围、二面角的平面角、直二面角．

②互相垂直的平面及其判定定理、性质定理．

8. 距离

⑴点到平面的距离．

⑵直线到与它平行平面的距离．

⑶两个平行平面的距离：两个平行平面的公垂线、公垂线段．

⑷异面直线的距离：异面直线的公垂线及其性质、公垂线段．

（四）简单多面体与球

9. 棱柱与棱锥

⑴多面体．

⑵棱柱与它的性质：棱柱、直棱柱、正棱柱、棱柱的性质．

⑶平行六面体与长方体：平行六面体、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体；平行六面体的性质、长方体的性质．

⑷棱锥与它的性质：棱锥、正棱锥、棱锥的性质、正棱锥的性质．

⑸直棱柱和正棱锥的直观图的画法.

10. 多面体欧拉定理的发现

⑴简单多面体的欧拉公式.

⑵正多面体.

11. 球

⑴球和它的性质：球体、球面、球的大圆、小圆、球面距离.

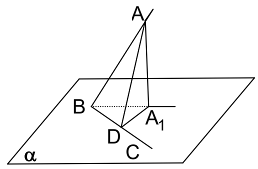
⑵球的体积公式和表面积公式.

二、常用结论、方法和公式

1.从一点 O 出发的三条射线 OA、OB、OC，若∠AOB=∠AOC，则点 A 在平面∠BOC 上的射影在∠BOC 的平分线上；

2. 已知:直二面角 M－AB－N 中，AE ⊂ M，BF⊂ N,∠EAB=θ_1,∠ABF=θ_2，异面直线 AE 与 BF 所成的角为θ，则$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$;

3.立平斜公式：如图，AB 和平面所成的角是θ_1，AC 在平面内，BC 和 AB 的射影 BA_1 成θ_2，设∠ABC=θ_3,则 $\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos\theta_3$；



4.异面直线所成角的求法：

（1）平移法：在异面直线中的一条直线中选择一特殊点，作另一条的平行线；

（2）补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如正方体、平行六面体、长方体等，其目的在于容易发现两条异面直线间的关系；

5.直线与平面所成的角

斜线和平面所成的是一个直角三角形的锐角，它的三条边分别是平面的垂线段、斜线段及斜线段在平面上的射影。通常通过斜线上某个特殊点作出平面的垂线段，垂足和斜足的连线，是产生线面角的关键；

6.二面角的求法

（1）定义法：直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性；

（2）三垂线法：已知二面角其中一个面内一点到一个面的垂线，用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角；

（3）垂面法：已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个半平面的交线所成的角即为平面角，由此可知，二面角的平面角所在的平面与棱垂直；

（4）射影法：利用面积射影公式 $S_{射}=S_{原}\cos\theta$,其中θ为平面角的大小，此法不必在图形中画出平面角；

特别:对于一类没有给出棱的二面角，应先延伸两个半平面，使之相交出现棱，然后再选用上述方法（尤其要考虑射影法）。

7.空间距离的求法

（1）两异面直线间的距离，高考要求是给出公垂线，所以一般先利用垂直作出公垂线，然后再进行计算；

（2）求点到直线的距离，一般用三垂线定理作出垂线再求解；

（3）求点到平面的距离，一是用垂面法，借助面面垂直的性质来作，因此，确定已知面的垂面是关键；二是不作出公垂线，转化为求三棱锥的高，利用等体积法列方程求解；

8.正棱锥的各侧面与底面所成的角相等，记为θ，则 S 侧 $\cos\theta$=S 底；

9.已知:长方体的体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为$\alpha,\beta,\gamma,$因此有 $\cos^2\alpha$ $+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; 若长方体的体对角线与过同一顶点的三侧面所成的角分别为$\alpha,\beta,\gamma,$则有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$;

10.正方体和长方体的外接球的直径等与其体对角线长；

11.欧拉公式：如果简单多面体的顶点数为 V,面数为 F,棱数为 E.那么 V+F－E=2；并且棱数 E＝各顶点连着的棱数和的一半＝各面边数和的一半；

12. 柱体的体积公式：柱体（棱柱、圆柱）的体积公式是 $V_{柱体}=Sh$. 其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

13.直棱柱的侧面积和全面积

$S_{直棱柱侧}=c\ell$ (c 表示底面周长，ℓ 表示侧棱长)　　$S_{棱柱全}=S_{底}+S_{侧}$

14．棱锥的体积:$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是棱锥的底面积，h 是棱锥的高。

15.球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积公式 $S=4\pi R^2$；掌握球面上两点 A、B 间的距离求法：（1）计算线段 AB 的长，（2）计算球心角∠AOB 的弧度数；(3)用弧长公式计算劣弧 AB 的长；

高中数学第十章-排列组合二项定理

考试内容：

分类计数原理与分步计数原理．

排列．排列数公式．

组合．组合数公式．组合数的两个性质．

二项式定理．二项展开式的性质．

考试要求：

（1）掌握分类计数原理与分步计数原理，并能用它们分析和解决一些简单的应用问题．

（2）理解排列的意义，掌握排列数计算公式，并能用它解决一些简单的应用问题．

（3）理解组合的意义，掌握组合数计算公式和组合数的性质，并能用它们解决一些简单的应用问题．

（4）掌握二项式定理和二项展开式的性质，并能用它们计算和证明一些简单的问题．

§10. 排列组合二项定理 知识要点

一、两个原理.

1. 乘法原理、加法原理.

2. 可以有重复元素的排列.

从 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素，元素可以重复出现，按照一定的顺序排成一排，那么第一、第二……第 n 位上选取元素的方法都是 m 个，所以从 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素可重复排列数 m·m·… m = m^n.. 例如：n 件物品放入 m 个抽屉中，不限放法，共有多少种不同放法？ （解：m^n 种）

二、排列.

1. ⑴对排列定义的理解.

定义：从 n 个不同的元素中任取 $m(m\le n)$个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

⑵相同排列.

如果；两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序也必须完全相同.

⑶排列数.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\le n)$个元素排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列数，用符号 A_n^m 表示.

⑷排列数公式：

$$A^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}(m\le n, n, m\in N)$$

注意：$n\cdot n! = (n+1)! - n!$ 规定 0! = 1

$A_{n+1}^{m} = A_n^m + A_m^m\cdot C_n^{m-1} = A_n^m + mA_n^{m-1}$ $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$ 规定 $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. 含有可重元素的排列问题.

对含有相同元素求排列个数的方法是：设重集 S 有 k 个不同元素 a_1，a_2,…...a_n 其中限重复

数为 n_1、n_2……n_k，且 $n=n_1+n_2+$……n_k，则 S 的排列个数等于 $n=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

例如：已知数字 3、2、2，求其排列个数 $n=\dfrac{(1+2)!}{1!2!}=3$ 又例如：数字 5、5、5、求其排列个数？其排列个数 $n=\dfrac{3!}{3!}=1$.

三、组合.

1. ⑴组合：从 n 个不同的元素中任取 $m(m\le n)$个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

⑵组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

⑶两个公式：① $C_n^m=C_n^{n-m}$； ② $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$

①从 n 个不同元素中取出 m 个元素后就剩下 n-m 个元素，因此从 n 个不同元素中取出 n-m 个元素的方法是一一对应的，因此是一样多的就是说从 n 个不同元素中取出 n-m 个元素的唯一的一个组合.

（或者从 n+1 个编号不同的小球中，n 个白球一个红球，任取 m 个不同小球其不同选法，分二类，一类是含红球选法有 $C_n^{m-1}\cdot C_1^1=C_n^{m-1}$ 一类是不含红球的选法有 C_n^m）

②根据组合定义与加法原理得；在确定 n+1 个不同元素中取 m 个元素方法时，对于某一元素，只存在取与不取两种可能，如果取这一元素，则需从剩下的 n 个元素中再取 m-1 个元素，所以有 C_n^{m-1}，如果不取这一元素，则需从剩余 n 个元素中取出 m 个元素，所以共有 C_n^m 种，依分类原理有 $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$.

⑷排列与组合的联系与区别.

联系：都是从 n 个不同元素中取出 m 个元素.

区别：前者是“排成一排”，后者是“并成一组”，前者有顺序关系，后者无顺序关系.

⑸①几个常用组合数公式

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots \ell_n^n=2^n$$

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$$

$$C_n^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m\cdots C_{m+n}^m=C_{m+n+1}^{m+1}$$

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

②常用的证明组合等式方法例.

i. 裂项求和法. 如：$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$（利用 $\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$）

ii. 导数法. iii. 数学归纳法. iv. 倒序求和法.

v. 递推法（即用 $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$ 递推）如：$C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots C_n^3=C_{n+1}^4$.

vi. 构造二项式. 如：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

证明：这里构造二项式 $(x+1)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ 其中 x^n 的系数，左边为

$C_n^0\cdot C_n^n+C_n^1\cdot C_n^{n-1}+C_n^2\cdot C_n^{n-2}+\cdots+C_n^n\cdot C_n^0=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$，而右边 $=C_{2n}^n$

四、排列、组合综合.

1. I. 排列、组合问题几大解题方法及题型：

①直接法.　②排除法.

③捆绑法：在特定要求的条件下，将几个相关元素当作一个元素来考虑，待整体排好之后再考虑它们“局部”的排列.它主要用于解决“元素相邻问题”，例如，一般地，n 个不同元素排成一列，要求其中某 $m(m\le n)$ 个元素必相邻的排列有 $A_{n-m+1}^{n-m+1}\cdot A_m^m$ 个.其中 A_{n-m+1}^{n-m+1} 是一个“整体排列”，而 A_m^m 则是“局部排列”.

又例如①有 n 个不同座位，A、B 两个不能相邻，则有排列法种数为 $A_n^2-A_{n-1}^1\cdot A_2^2$.

②有 n 件不同商品，若其中 A、B 排在一起有 $A_{n-1}^{n-1}\cdot A_2^2$.

③有 n 件不同商品，若其中有二件要排在一起有 $A_n^2\cdot A_{n-1}^{n-1}$.

注：①③区别在于①是确定的座位，有 A_2^2 种；而③的商品地位相同，是从 n 件不同商品任取的 2 个，有不确定性.

④插空法：先把一般元素排列好，然后把待定元素插排在它们之间或两端的空档中，此法主要解决“元素不相邻问题”.

例如：n 个元素全排列，其中 m 个元素互不相邻，不同的排法种数为多少？$A_{n-m}^{n-m}\cdot A_{n-m+1}^m$（插空法），当 n – m+1≥m, 即 m≤$\frac{n+1}{2}$时有意义.

⑤占位法：从元素的特殊性上讲，对问题中的特殊元素应优先排列，然后再排其他一般元素；从位置的特殊性上讲，对问题中的特殊位置应优先考虑，然后再排其他剩余位置.即采用“先特殊后一般”的解题原则.

⑥调序法：当某些元素次序一定时，可用此法.解题方法是：先将 n 个元素进行全排列有 A_n^n 种，$m(m\prec n)$ 个元素的全排列有 A_m^m 种，由于要求 m 个元素次序一定，因此只能取其中的某一种排法，可以利用除法起到去调序的作用，即若 n 个元素排成一列，其中 m 个元素次序一定，共有 $\frac{A_n^n}{A_m^m}$ 种排列方法.

例如：n 个元素全排列，其中 m 个元素顺序不变，共有多少种不同的排法？

解法一：（逐步插空法）（m+1）（m+2）…n = n！/ m！；解法二：（比例分配法）

A_n^n/A_m^m.

⑦平均法：若把 kn 个不同元素平均分成 k 组，每组 n 个，共有 $\frac{C_{kn}^{n}\cdot C_{(k-1)n}^{n}\cdots C_{n}^{n}}{A_k^k}$.

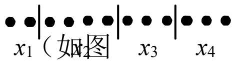
例如：从 1，2，3，4 中任取 2 个元素将其平均分成 2 组有几种分法？有 $\frac{C_4^2}{2!}=3$（平均分组就用不着管组与组之间的顺序问题了）又例如将 200 名运动员平均分成两组，其中两名种子选手必在一组的概率是多少？

（$P=\frac{C_{18}^{8}C_2^2}{C_{20}^{10}/2!}$）

注意：分组与插空综合. 例如：n 个元素全排列，其中某 m 个元素互不相邻且顺序不变，共有多少种排法？有 $A_{n-m}^{n-m}\cdot A_{n-m+1}^{m}/A_m^m$，当 n – m+1 ≥m, 即 m≤$\frac{n+1}{2}$时有意义.

⑧隔板法：常用于解正整数解组数的问题.

例如：$x_1+x_2+x_3+x_4=12$的正整数解的组数就可建立组合模型将 12 个完全相同的球排成一列，在它们之间形成 11 个空隙中任选三个插入 3 块摸板，把球分成 4 个组.每一种方法所得球的数目依次为x_1,x_2,x_3,x_4显然$x_1+x_2+x_3+x_4=12$，故（x_1,x_2,x_3,x_4）是方程的一组解.反之，方程的任何一组解(y_1,y_2,y_3,y_4)，对应着惟一的一种在 12 个球之间插入隔板的方式



（如图所示）故方程的解和插板的方法一一对应. 即方程的解的组数等于插隔板的方法数C_{11}^{3}.

注意：若为非负数解的 x个数，即用 $a_1,a_2,\ldots a_n$中 a_i等于 x_i+1，有 $x_1+x_2+x_3\ldots+x_n=A\Rightarrow a_1-1+a_2-1+\ldots a_n-1=A$，进而转化为求 a 的正整数解的个数为 C_{A+n}^{n-1} .

⑨定位问题：从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列规定某 r 个元素都包含在内，并且都排在某 r 个指定位置则有 $A_r^rA_{n-r}^{k-r}$.

例如：从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素的排列，其中某个元素必须固定在（或不固定在）某一位置上，共有多少种排法？

固定在某一位置上：A_{n-1}^{m-1}；不在某一位置上：$A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$或$A_{n-1}^{m}+A_{m-1}^{1}\cdot A_{n-1}^{m-1}$（一类是不取出特殊元素 a，有 A_{n-1}^{m}，一类是取特殊元素 a，有从 m-1 个位置取一个位置，然后再从 n-1 个元素中取 m-1，这与用插空法解决是一样的）

⑩指定元素排列组合问题.

i. 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同的元素作排列（或组合），规定某 r 个元素都包含

在内 。先 C 后 A 策略，排列 $C_r^rC_{n-r}^{k-r}A_k^k$；组合 $C_r^rC_{n-r}^{k-r}$.

ii. 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列（或组合），规定某 r 个元素都不包含在内。先 C 后 A 策略，排列 $C_{n-r}^{k}A_k^k$；组合 C_{n-r}^{k}.

iii 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列（或组合），规定每个排列（或组合）都只包含某 r 个元素中的 s 个元素。先 C 后 A 策略，排列 $C_r^sC_{n-r}^{k-s}A_k^k$；组合 $C_r^sC_{n-r}^{k-s}$

.

II. 排列组合常见解题策略：

①特殊元素优先安排策略；②合理分类与准确分步策略；③排列、组合混合问题先选后排的策略（处理排列组合综合性问题一般是先选元素，后排列）；④正难则反，等价转化策略；⑤相邻问题插空处理策略；

⑥不相邻问题插空处理策略；⑦定序问题除法处理策略；⑧分排问题直排处理的策略；⑨“小集团”排列问题中先整体后局部的策略；⑩构造模型的策略.

2. 组合问题中分组问题和分配问题.

①均匀不编号分组：将 n 个不同元素分成不编号的 m 组，假定其中 r 组元素个数相等，不管是否分尽，其分法种数为 A/A_r^r（其中 A 为非均匀不编号分组中分法数）.如果再有 K 组均匀分组应再除以 A_k^k.

例：10 人分成三组，各组元素个数为 2、4、4，其分法种数为 $C_{10}^2C_8^4C_4^4/A_2^2=1575$.若分成六组，各组人数分别为 1、1、2、2、2、2，其分法种数为 $C_{10}^1C_9^1C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2/A_2^2\cdot A_4^4$

②非均匀编号分组: n 个不同元素分组，各组元素数目均不相等，且考虑各组间的顺序，其分法种数为 $A\cdot A_m^m$

例：10 人分成三组，各组人数分别为 2、3、5，去参加不同的劳动，其安排方法为：$C_{10}^2\cdot C_8^3\cdot C_5^5\cdot A_3^3$ 种.

若从 10 人中选 9 人分成三组，人数分别为 2、3、4，参加不同的劳动，则安排方法有 $C_{10}^2C_8^3C_5^4\cdot A_3^3$ 种

③均匀编号分组：n 个不同元素分成 m 组，其中 r 组元素个数相同且考虑各组间的顺序，其分法种数为 $A/A_r^r\cdot A_m^m$.

例：10 人分成三组，人数分别为 2、4、4，参加三种不同劳动，分法种数为 $\dfrac{C_{10}^2C_8^4C_4^4}{A_2^2}\cdot A_3^3$

④非均匀不编号分组：将 n 个不同元素分成不编号的 m 组，每组元素数目均不相同，且不考虑各组间顺序，不管是否分尽，其分法种数为 $\mathrm{A}=\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}_1}\ \mathrm{C}_{\mathrm{n}-\mathrm{m}_1}^{\mathrm{m}_2}\cdots\mathrm{C}_{\mathrm{n}-(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2+\ldots+\mathrm{m}_{k-1})}^{\mathrm{m}_k}$

例：10 人分成三组，每组人数分别为 2、3、5，其分法种数为 $C_{10}^{2}C_{8}^{3}C_{5}^{5}=2520$ 若从 10 人中选出 6 人分成三组，各组人数分别为 1、2、3，其分法种数为 $C_{10}^{1}C_{9}^{2}C_{7}^{3}=12600$.

五、二项式定理.

1. ⑴二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$.

展开式具有以下特点：

① 项数：共有 $n+1$ 项；

② 系数：依次为组合数 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^r,\cdots,C_n^n$；

③ 每一项的次数是一样的，即为 n 次，展开式依 a 的降幂排列，b 的升幂排列展开.

⑵二项展开式的通项.

$(a+b)^n$ 展开式中的第 $r+1$ 项为：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(0\le r\le n,r\in Z)$.

⑶二项式系数的性质.

①在二项展开式中与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等；

②二项展开式的中间项二项式系数最大.

I. 当 n 是偶数时，中间项是第 $\frac{n}{2}+1$ 项，它的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；

II. 当 n 是奇数时，中间项为两项，即第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项，它们的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 最大.

③系数和：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$
$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$$

附：一般来说 $(ax+by)^n$（a,b 为常数）在求系数最大的项或最小的项时均可直接根据性质二求解. 当 $|a|\ne1$ 或 $|b|\ne1$ 时，一般采用解不等式组 $\begin{cases}A_k\ge A_{k+1},\\A_k\ge A_{k-1}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A_k\le A_{k+1}\\A_k\le A_{k-1}\end{cases}$（$A_k$ 为 T_{k+1} 的系数或系数的绝对值）的办法来求解.

⑷如何来求 $(a+b+c)^n$ 展开式中含 $a^pb^qc^r$ 的系数呢？其中 $p,q,r\in N$, 且 $p+q+r=n$ 把 $(a+b+c)^n=[(a+b)+c]^n$ 视为二项式，先找出含有 C^r 的项 $C_n^r(a+b)^{n-r}C^r$，另一方面在 $(a+b)^{n-r}$ 中含有 b^q 的项为 $C_{n-r}^qa^{n-r-q}b^q=C_{n-r}^qa^pb^q$，故在 $(a+b+c)^n$ 中含 $a^pb^qc^r$ 的项为 $C_n^rC_{n-r}^qa^pb^qc^r$.其系数为 $C_n^rC_{n-r}^q=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{q!(n-r-q)!}=\frac{n!}{r!q!p!}=C_n^pC_{n-p}^qC_r^r$.

2. 近似计算的处理方法.

当 a 的绝对值与 1 相比很小且 n 不大时，常用近似公式 $(1+a)^n \approx 1+na$，因为这时展开式的后面部分 $C_n^2a^2+C_n^3a^3+\cdots+C_n^na^n$ 很小，可以忽略不计。类似地，有 $(1-a)^n \approx 1-na$ 但使用这两个公式时应注意 a 的条件，以及对计算精确度的要求.

高中数学第十一章-概率

考试内容：

随机事件的概率．等可能性事件的概率．互斥事件有一个发生的概率．相互独立事件同时发生的概率．独立重复试验.

考试要求：

（1）了解随机事件的发生存在着规律性和随机事件概率的意义.

（2）了解等可能性事件的概率的意义，会用排列组合的基本公式计算一些等可能性事件的概率。

（3）了解互斥事件、相互独立事件的意义，会用互斥事件的概率加法公式与相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率.

（4）会计算事件在 n 次独立重复试验中恰好发生 κ 次的概率.

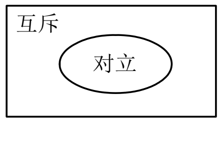
§11. 概率　知识要点

1. 概率：随机事件 A 的概率是频率的稳定值，反之，频率是概率的近似值.

2. 等可能事件的概率：如果一次试验中可能出现的结果有年 n 个，且所有结果出现的可能性都相等，那么，每一个基本事件的概率都是 $\frac{1}{n}$，如果某个事件 A 包含的结果有 m 个，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

3. ①互斥事件：不可能同时发生的两个事件叫互斥事件. 如果事件 A、B 互斥，那么事件 A+B 发生(即 A、B 中有一个发生)的概率，等于事件 A、B 分别发生的概率和，即 P(A+B)=P(A)+P(B)，推广：$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

②对立事件：两个事件必有一个发生的互斥事件叫对立事件. 例如：从 1～52 张扑克牌中任取一张抽到“红桃”与抽到“黑桃”互为互斥事件，因为其中一个不可能同时发生，但又不能保证其中一个必然发生，故不是对立事件.而抽到“红色牌”与抽到黑色牌“互为对立事件，因为其中一个必发生.



注意：i.对立事件的概率和等于 1：$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=1$.

ii.互为对立的两个事件一定互斥，但互斥不一定是对立事件.

③相互独立事件：事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响.这样的两个事件叫做相互独立事件. 如果两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即 P(A·B)=P(A)·P(B). 由此，当两个事件同时发生的概率 P（AB）等于这两个事件发生概率之和，这时我们也可称这两个事件为独立事件.例如：从一副扑克牌（52 张）中任抽一张设 A：“抽到老 K”；B：“抽到红牌”则 A 应与 B 互为独立事件[看上去 A 与 B 有

关系很有可能不是独立事件，但$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2},P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{26}$.又事件 AB 表示“既抽到老 K 对抽到红牌”即“抽到红桃老 K 或方块老 K”有$P(A\cdot B)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$，因此有$P(A)\cdot P(B)=P(A\cdot B)$.

推广：若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则$P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$.

注意：i. 一般地，如果事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与$\overline{B},\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都相互独立.

ii. 必然事件与任何事件都是相互独立的.

iii. 独立事件是对任意多个事件来讲，而互斥事件是对同一实验来讲的多个事件，且这多个事件不能同时发生，故这些事件相互之间必然影响，因此互斥事件一定不是独立事件.

④独立重复试验：若 n 次重复试验中，每次试验结果的概率都不依赖于其他各次试验的结果，则称这 n 次试验是独立的. 如果在一次试验中某事件发生的概率为 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率：$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$.

4. 对任何两个事件都有$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

第十二章-概率与统计

考试内容：

抽样方法. 总体分布的估计.

总体期望值和方差的估计.

考试要求：

（1）了解随机抽样了解分层抽样的意义，会用它们对简单实际问题进行抽样.

（2）会用样本频率分布估计总体分布.

（3）会用样本估计总体期望值和方差.

§12. 概率与统计　知识要点

一、随机变量.

1. 随机试验的结构应该是不确定的.试验如果满足下述条件：

①试验可以在相同的情形下重复进行；②试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；③每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

它就被称为一个随机试验.

2. 离散型随机变量：如果对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.若 ξ 是一个随机变量，a，b 是常数.则$\eta=a\xi+b$也是一个随机变量.一般地，若 ξ 是随机变量，$f(x)$是连续函数或单调函数，则$f(\xi)$也是随机变量.也就是说，随机变量的某些函数也是随机变量.

设离散型随机变量 ξ 可能取的值为：$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$

ξ 取每一个值$x_1(i=1,2,\cdots)$的概率$P(\xi=x_i)=p_i$，则表称为随机变量 ξ 的概率分布，简称 ξ 的

分布列.

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

有性质① $p_1 \geq 0, i=1,2,\cdots$；　② $p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots=1$.

注意：若随机变量可以取某一区间内的一切值，这样的变量叫做连续型随机变量.例如：$\xi \in [0,5]$ 即 ξ 可以取 0～5 之间的一切数，包括整数、小数、无理数.

3. ⑴二项分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是：$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ [其中 $k=0,1,\cdots,n, q=1-p$]

于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下：我们称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 ξ～B（n·p），其中 n，p 为参数，并记 $C_n^k p^k q^{n-k}=b(k;n\cdot p)$.

⑵二项分布的判断与应用.

①二项分布，实际是对 n 次独立重复试验.关键是看某一事件是否是进行 n 次独立重复，且每次试验只有两种结果，如果不满足此两条件，随机变量就不服从二项分布.

②当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小，而每次抽取时又只有两种试验结果，此时可以把它看作独立重复试验，利用二项分布求其分布列.

4. 几何分布："$\xi=k$"表示在第 k 次独立重复试验时，事件第一次发生，如果把 k 次试验时事件 A 发生记为 A_k，事 A 不发生记为 $A_k, P(A_k)=q$，那么 $P(\xi=k)=P(\overline{A}_1\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)$.根据相互独立事件的概率乘法分式：$P(\xi=k)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=q^{k-1}p\ \ (k=1,2,3,\cdots)$ 于是得到随机变量 ξ 的概率分布列.

ξ	1	2	3	…	k	…
P	q	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

我们称 ξ 服从几何分布，并记 $g(k,p)=q^{k-1}p$，其中 $q=1-p.\ \ k=1,2,3\cdots$

5. ⑴超几何分布：一批产品共有 N 件，其中有 M（M＜N）件次品，今抽取 $n(1\leq n\leq N)$ 件，则其中的次品数 ξ 是一离散型随机变量，分布列为 $P(\xi=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\cdot(0\leq k\leq M, 0\leq n-k\leq N-M)$.〔分子是从 M 件次品中取 k 件，从 N-M 件正品中取 n-k 件的取法数，如果规定 $m<r$ 时 $C_m^r=0$，则 k 的范围可以写为 k=0，1，…，n.〕

⑵超几何分布的另一种形式：一批产品由 a 件次品、b 件正品组成，今抽取 n 件（1≤n≤a+b），则次品数 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{C_a^k\cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}\quad k=0,1,\cdots,n.$.

⑶超几何分布与二项分布的关系.

设一批产品由 a 件次品、b 件正品组成，不放回抽取 n 件时，其中次品数 ξ 服从超几何分布.若放回式抽取，则其中次品数 η 的分布列可如下求得：把 $a+b$ 个产品编号，则抽取 n 次共有 $(a+b)^n$ 个可能结果，等可能：$(\eta=k)$ 含 $C_n^k a^k b^{n-k}$ 个结果，故 $P(\eta=k)=\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}=C_n^k(\frac{a}{a+b})^k(1-\frac{a}{a+b})^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$，即 $\eta\sim B(n\cdot\frac{a}{a+b})$.[我们先为 k 个次品选定位置，共 C_n^k 种选法；然后每个次品位置有 a 种选法，每个正品位置有 b 种选法] 可以证明：当产品总数很大而抽取个数不多时，$P(\xi=k)\approx P(\eta=k)$，因此二项分布可作为超几何分布的近似，无放回抽样可近似看作放回抽样.

二、数学期望与方差.

1. 期望的含义：一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望或平均数、均值.数学期望又简称期望.数学期望反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2. ⑴随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的数学期望：$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$

①当 $a=0$ 时，$E(b)=b$，即常数的数学期望就是这个常数本身.

②当 $a=1$ 时，$E(\xi+b)=E\xi+b$，即随机变量 ξ 与常数之和的期望等于 ξ 的期望与这个常数的和.

③当 $b=0$ 时，$E(a\xi)=aE\xi$，即常数与随机变量乘积的期望等于这个常数与随机变量期望的乘积.

⑵单点分布：$E\xi=c\times1=c$ 其分布列为：$P(\xi=1)=c$.

ξ	0	1
P	q	p

⑶两点分布：$E\xi=0\times q+1\times p=p$，其分布列为：（p + q = 1）

⑷二项分布：$E\xi=\sum k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}=np$ 其分布列为 $\xi\sim B(n,p)$.（P 为发生 ξ 的概率）

⑸几何分布：$E\xi=\frac{1}{p}$ 其分布列为 $\xi\sim q(k,p)$.（P 为发生 ξ 的概率）

3.方差、标准差的定义：当已知随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$ 时，则称 $D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$ 为 ξ 的方差. 显然 $D\xi\ge0$，故 $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$. $\sigma\xi$ 为 ξ 的根方差或标准差.随机变量 ξ 的方差与标准差都反映了随机变量 ξ 取值的稳定与波动，集中

与离散的程度.$D\xi$ 越小，稳定性越高，波动越小.

4.方差的性质.

⑴随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的方差 $D(\eta)=D(a\xi+b)=a^2D\xi$.（a、b 均为常数）

⑵单点分布：$D\xi=0$　其分布列为 $P(\xi=1)=p$

⑶两点分布：$D\xi=pq$　其分布列为：（p + q = 1）

ξ	0	1
P	q	p

⑷二项分布：$D\xi=npq$

⑸几何分布：$D\xi=\frac{q}{p^2}$

5. 期望与方差的关系.

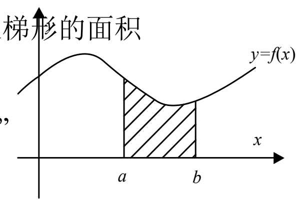
⑴如果 $E\xi$ 和 $E\eta$ 都存在，则 $E(\xi\pm\eta)=E\xi\pm E\eta$

⑵设 ξ 和 η 是互相独立的两个随机变量，则 $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta, D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

⑶期望与方差的转化：$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$　　⑷ $E(\xi-E\xi)=E(\xi)-E(E\xi)$（因为 $E\xi$ 为一常数）$=E\xi-E\xi=0$.

三、正态分布.（基本不列入考试范围）

1.密度曲线与密度函数：对于连续型随机变量 ξ，位于 x 轴上方，ξ 落在任一区间 $[a,b)$ 内的概率等于它与 x 轴.直线 $x=a$ 与直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积（如图阴影部分）的曲线叫 ξ 的密度曲线，以其作为图像的函数 $f(x)$ 叫做 ξ 的密度函数，由于"$x\in(-\infty,+\infty)$"是必然事件，故密度曲线与 x 轴所夹部分面积等于 1.



2. ⑴正态分布与正态曲线：如果随机变量 ξ 的概率密度为：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.（$x\in R,\mu,\sigma$ 为常数，且 $\sigma\succ0$），称 ξ 服从参数为 μ,σ 的正态分布，用 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 表示.

$f(x)$ 的表达式可简记为 $N(\mu,\sigma^2)$，它的密度曲线简称为正态曲线.

⑵正态分布的期望与方差：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 ξ 的期望与方差分别为：$E\xi=\mu, D\xi=\sigma^2$.

⑶正态曲线的性质.

①曲线在 x 轴上方，与 x 轴不相交.

②曲线关于直线 $x=\mu$ 对称.

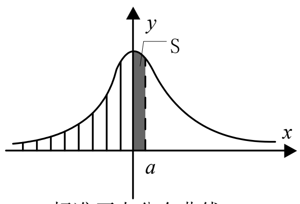
③当 $x=\mu$ 时曲线处于最高点，当 x 向左、向右远离时，曲线不断地降低，呈现出“中间高、两边低”的钟形曲线.

④当 $x<\mu$ 时，曲线上升；当 $x>\mu$ 时，曲线下降，并且当曲线向左、向右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线，向 x 轴无限的靠近.

⑤当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定，σ 越大，曲线越“矮胖”.表示总体的分布越分散；σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中.

3. ⑴标准正态分布：如果随机变量ξ的概率函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty\prec x\prec+\infty)$，则称ξ服从标准正态分布. 即 $\xi\sim N(0,1)$ 有 $\varphi(x)=P(\xi\le x)$，$\varphi(x)=1-\varphi(-x)$ 求出，而 P（a＜ξ≤b）的计算则是 $P(a\prec\xi\le b)=\varphi(b)-\varphi(a)$.

注意：当标准正态分布的 $\Phi(x)$ 的 X 取 0 时，有 $\Phi(x)=0.5$ 当 $\Phi(x)$ 的 X 取大于 0 的数时，有 $\Phi(x)\succ0.5$.比如 $\Phi(\frac{0.5-\mu}{\sigma})=0.0793\prec0.5$ 则 $\frac{0.5-\mu}{\sigma}$ 必然小于 0，如图.



标准正态分布曲线

S阴=0.5　Sa=0.5+S

⑵正态分布与标准正态分布间的关系：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则ξ的分布函数通常用 $F(x)$ 表示，且有 $P(\xi\le x)=F(x)=\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

4.⑴“3σ”原则.

假设检验是就正态总体而言的，进行假设检验可归结为如下三步：①提出统计假设，统计假设里的变量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.②确定一次试验中的取值 a 是否落入范围 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$.③做出判断：如果 $a\in(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，接受统计假设. 如果 $a\notin(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，由于这是小概率事件，就拒绝统计假设.

⑵“3σ”原则的应用：若随机变量ξ服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 则 ξ落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 99.7% 亦即落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.3%，此为小概率事件，如果此事件发生了，就说明此种产品不合格（即ξ不服从正态分布）.

高中数学第十三章-极 限

考试内容：

教学归纳法．数学归纳法应用．

数列的极限．

函数的极限．根限的四则运算．函数的连续性．

考试要求：

（1）理解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题．

（2）了解数列极限和函数极限的概念．

（3）掌握极限的四则运算法则；会求某些数列与函数的极限．

（4）了解函数连续的意义，了解闭区间上连续函数有最大值和最小值的性质．

§13．极 限　知识要点

1. ⑴第一数学归纳法：①证明当 n 取第一个 n_0 时结论正确；②假设当 $n=k$（$k\in N^+,k\geq n_0$）时，结论正确，证明当 $n=k+1$ 时，结论成立.

⑵第二数学归纳法：设 $P(n)$ 是一个与正整数 n 有关的命题，如果

①当 $n=n_0$（$n_0\in N^+$）时，$P(n)$ 成立；

②假设当 $n\leq k$（$k\in N^+,k\geq n_0$）时，$P(n)$ 成立，推得 $n=k+1$ 时，$P(n)$ 也成立.

那么，根据①②对一切自然数 $n\geq n_0$ 时，$P(n)$ 都成立.

2. ⑴数列极限的表示方法：

① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

②当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$.

⑵几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$（$C$ 为常数）

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0 \quad (k\in N, k\text{是常数})$

③对于任意实常数，

当 $|a|\prec 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

当 $|a|=1$ 时，若 a = 1，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$；若 $a=-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在

当 $|a|\succ 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ 不存在

⑶数列极限的四则运算法则：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_b = b$，那么

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=a\cdot b$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$

特别地，如果 C 是常数，那么

$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=Ca$.

⑷数列极限的应用：

求无穷数列的各项和，特别地，当$|q|\prec 1$时，无穷等比数列的各项和为$S=\frac{a_1}{1-q}(|q|\prec 1)$.

（化循环小数为分数方法同上式）

注：并不是每一个无穷数列都有极限.

3. 函数极限；

⑴当自变量 x 无限趋近于常数 x_0（但不等于 x_0）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋进于一个常数 a，就是说当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限为 a.记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to a$.

注：当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是否存在极限与 $f(x)$ 在 x_0 处是否定义无关，因为 $x\to x_0$ 并不要求 $x=x_0$.（当然，$f(x)$ 在 x_0 是否有定义也与 $f(x)$ 在 x_0 处是否存在极限无关.$\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的既不充分又不必要条件.）

如 $P(x)=\begin{cases}x-1 & x\succ 1\\ -x+1 & x\prec 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to 1}P(x)$ 存在，因为在 $x=1$ 处左右极限均等于零.

⑵函数极限的四则运算法则：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，那么

① $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=a\pm b$

② $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b$

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$

特别地，如果 C 是常数，那么

$\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x))=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$（$n\in N^+$）

注：①各个函数的极限都应存在.

②四则运算法则可推广到任意有限个极限的情况，但不能推广到无限个情况.

⑶几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}=0$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$（0＜$a$＜1）； $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$（$a$＞1）

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$， $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$（$e=2.71828183$）

4. 函数的连续性：

⑴ 如果函数 f（x），g（x）在某一点 $x=x_0$ 连续，那么函数 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq0)$ 在点 $x=x_0$ 处都连续.

⑵函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处连续必须满足三个条件：

①函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；③函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处的极限值等于该点的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

⑶函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处不连续（间断）的判定：

如果函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处有下列三种情况之一时，则称 x_0 为函数 f（x）的不连续点.

①f（x）在点 $x=x_0$ 处没有定义，即 $f(x_0)$ 不存在；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

5. 零点定理，介值定理，夹逼定理：

⑴零点定理：设函数 f（x）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)\prec0$.那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ（$a<\xi<b$）使 $f(\xi)=0$.

⑵介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同函数值，$f(a)=A,f(b)=B$，那么对于 A,B 之间任意的一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$（$a<\xi<b$）.

⑶夹逼定理：设当 $0\prec|x-x_0|\prec\delta$ 时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注：$|x-x_0|$：表示以 x_0 为的极限，则 $|x-x_0|$ 就无限趋近于零.（ξ 为最小整数）

6. 几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0, |q| \prec 1$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0(a \succ 0)$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0(a \succ 1, k$ 为常数）

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^\varepsilon} = 0(\varepsilon \succ 0, k$ 为常数）

高中数学第十四章 **导 数**

考试内容：

导数的背影.

导数的概念.

多项式函数的导数.

利用导数研究函数的单调性和极值．函数的最大值和最小值.

考试要求：

（1）了解导数概念的某些实际背景.

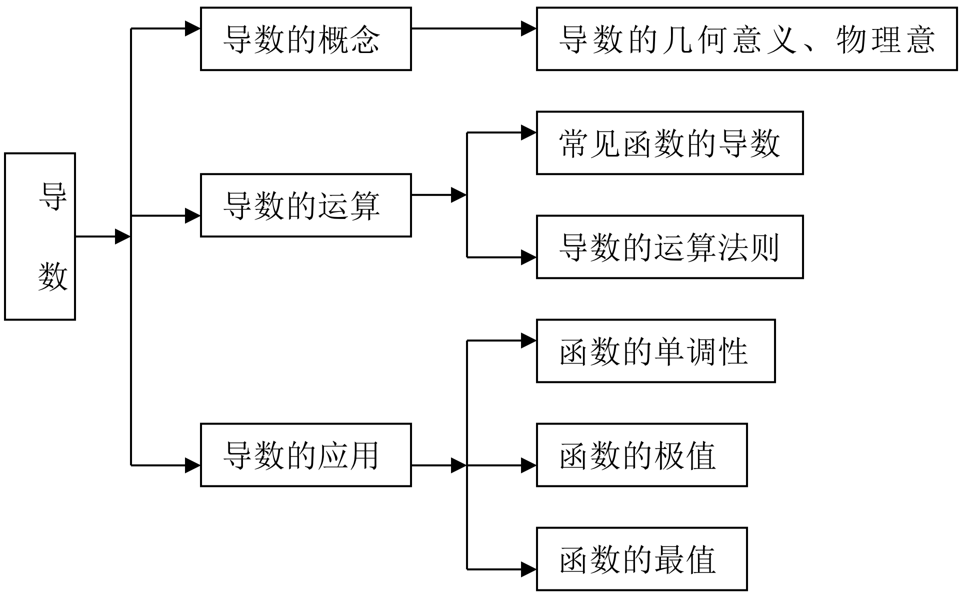
（2）理解导数的几何意义.

（3）掌握函数，y=c(c 为常数)、y=xn(n∈N+)的导数公式，会求多项式函数的导数.

（4）理解极大值、极小值、最大值、最小值的概念，并会用导数求多项式函数的单调区间、极大值、极小值及闭区间上的最大值和最小值.

（5）会利用导数求某些简单实际问题的最大值和最小值.

§14. 导 数　知识要点



1. 导数（导函数的简称）的定义：设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 定义域的一点，如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，则函数值 y 也引起相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率；如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个极限叫做 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

注：① Δx 是增量，我们也称为"改变量"，因为 Δx 可正，可负，但不为零.

②以知函数 $y=f(x)$ 定义域为 A， $y=f^{'}(x)$ 的定义域为 B，则 A 与 B 关系为 $A\supseteq B$.

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续与点 x_0 处可导的关系：

⑴函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的必要不充分条件.

可以证明，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么 $y=f(x)$ 点 x_0 处连续.

事实上，令 $x=x_0+\Delta x$，则 $x\to x_0$ 相当于 $\Delta x\to 0$.

于是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+x_0)-f(x_0)+f(x_0)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x+f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0)=f^{'}(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0).$

⑵如果 $y=f(x)$ 点 x_0 处连续，那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，是不成立的.

例：$f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处连续，但在点 $x_0=0$ 处不可导，因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$，当 Δx ＞0 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$；当 Δx ＜0 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在.

注：①可导的奇函数函数其导函数为偶函数.
②可导的偶函数函数其导函数为奇函数.

3. 导数的几何意义：

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x))$ 处的切线的斜率，也就是说，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x))$ 处的切线的斜率是 $f^{'}(x_0)$，切线方程为 $y-y_0=f^{'}(x)(x-x_0)$.

4. 求导数的四则运算法则：

$(u\pm v)^{'}=u^{'}\pm v^{'}\Rightarrow y=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\Rightarrow y^{'}=f_1^{'}(x)+f_2^{'}(x)+...+f_n^{'}(x)$

$(uv)^{'}=vu^{'}+v^{'}u\Rightarrow(cv)^{'}=c^{'}v+cv^{'}=cv^{'}$（$c$ 为常数）

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'}=\frac{vu^{'}-v^{'}u}{v^2}(v\neq 0)$$

注：① u,v 必须是可导函数.
②若两个函数可导，则它们和、差、积、商必可导；若两个函数均不可导，则它们的和、差、积、商不一定不可导.

例如：设 $f(x)=2\sin x+\dfrac{2}{x}$，$g(x)=\cos x-\dfrac{2}{x}$，则 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导，但它们和

$f(x)+g(x)=$

$\sin x+\cos x$ 在 $x=0$ 处均可导.

5. 复合函数的求导法则：$f_x{}'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

复合函数的求导法则可推广到多个中间变量的情形.

6. 函数单调性：

⑴函数单调性的判定方法：设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)$ ＞0，则 $y=f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)$ ＜0，则 $y=f(x)$ 为减函数.

⑵常数的判定方法；

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内恒有 $f'(x)$ =0，则 $y=f(x)$ 为常数.

注：① $f(x)\succ 0$ 是 f（x）递增的充分条件，但不是必要条件，如 $y=2x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不是都有 $f(x)\succ 0$，有一个点例外即 x=0 时 f（x） ＝0，同样 $f(x)\prec 0$ 是 f（x）递减的充分非必要条件.

②一般地，如果 f（x）在某区间内有限个点处为零，在其余各点均为正（或负），那么 f（x）在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）的.

7. 极值的判别方法：（极值是在 x_0 附近所有的点，都有 $f(x)$ ＜ $f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值，极小值同理）

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，

①如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)$ ＞0，右侧 $f'(x)$ ＜0，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

②如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)$ ＜0，右侧 $f'(x)$ ＞0，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

也就是说 x_0 是极值点的充分条件是 x_0 点两侧导数异号，而不是 $f'(x)$ =0①. 此外，函数不可导的点也可能是函数的极值点②. 当然，极值是一个局部概念，极值点的大小关系是不确定的，即有可能极大值比极小值小（函数在某一点附近的点不同）.

注①： 若点 x_0 是可导函数 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x)$ =0. 但反过来不一定成立. 对于可导函数，其一点 x_0 是极值点的必要条件是若函数在该点可导，则导数值为零.

例如：函数 $y=f(x)=x^3$，$x=0$ 使 $f'(x)$ =0，但 $x=0$ 不是极值点.

②例如：函数 $y=f(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 是函数的极小值点.

8. 极值与最值的区别：极值是在局部对函数值进行比较，最值是在整体区间上对函数值进行比较.

注：函数的极值点一定有意义.

9. 几种常见的函数导数：

I. $C^{'}=0$ （C 为常数）　　$(\sin x)^{'}=\cos x$　　$(\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(x^n)^{'}=nx^{n-1}$ （$n\in R$）　　$(\cos x)^{'}=-\sin x$　　$(\arccos x)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

II. $(\ln x)^{'}=\frac{1}{x}$　　$(\log_a x)^{'}=\frac{1}{x}\log_a e$　　$(\arctan x)^{'}=\frac{1}{x^2+1}$

$(e^x)^{'}=e^x$　　$(a^x)^{'}=a^x\ln a$　　$(arc\cot x)^{'}=-\frac{1}{x^2+1}$

III. 求导的常见方法：

①常用结论：$(\ln|x|)^{'}=\frac{1}{x}$.

②形如 $y=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ 或 $y=\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)}$ 两边同取自然对数，可转化求代数和形式.

③无理函数或形如 $y=x^x$ 这类函数，如 $y=x^x$ 取自然对数之后可变形为 $\ln y=x\ln x$，对两边求导可得 $\frac{y^{'}}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y^{'}=y\ln x+y\Rightarrow y^{'}=x^x\ln x+x^x$.

高中数学第十五章 复数

考试内容：

复数的概念.

复数的加法和减法.

复数的乘法和除法.

数系的扩充.

考试要求：

（1）了解复数的有关概念及复数的代数表示和几何意义.

（2）掌握复数代数形式的运算法则，能进行复数代数形式的加法、减法、乘法、除法运算.

（3）了解从自然数系到复数系的关系及扩充的基本思想.

§15. 复 数　知识要点

1. ⑴复数的单位为 i，它的平方等于－1，即 $i^2=-1$.

⑵复数及其相关概念：

① 复数—形如 $a+b$i 的数（其中 a，$b\in R$）；

② 实数—当 b = 0 时的复数 $a+b$i，即 a;

③ 虚数—当 $b\neq 0$ 时的复数 $a+b$i;

④ 纯虚数—当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时的复数 $a+b$i，即 bi.

⑤ 复数 $a+b$i 的实部与虚部—a 叫做复数的实部，b 叫做虚部（注意 a，b 都是实数）

⑥ 复数集C—全体复数的集合，一般用字母C表示.

⑶两个复数相等的定义：

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$且$b=d$（其中，$a$，$b$，$c$，$d$，$\in R$）特别地$a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

⑷两个复数，如果不全是实数，就不能比较大小.

注：①若z_1,z_2为复数，则1°若$z_1+z_2 \succ 0$，则$z_1 \succ -z_2$.（×）[z_1,z_2为复数，而不是实数]

2°若$z_1 \prec z_2$，则$z_1-z_2 \prec 0$.（√）

②若$a,b,c \in C$，则$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$是$a=b=c$的必要不充分条件.（当

$(a-b)^2=i^2$，

$(b-c)^2=1,(c-a)^2=0$时，上式成立）

2. ⑴复平面内的两点间距离公式：$d=|z_1-z_2|$.

其中z_1，z_2是复平面内的两点z_1和z_2所对应的复数，d表示z_1和z_2间的距离.

由上可得：复平面内以z_0为圆心，r为半径的圆的复数方程：$|z-z_0|=r$（$r \succ 0$）.

⑵曲线方程的复数形式：

①$|z-z_0|=r$表示以z_0为圆心，r为半径的圆的方程.

②$|z-z_1|=|z-z_2|$表示线段z_1z_2的垂直平分线的方程.

③$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$（$a \succ 0$且$2a \succ |z_1z_2|$）表示以Z_1，Z_2为焦点，长半轴长为a的椭圆的方程（若$2a=|z_1z_2|$，此方程表示线段Z_1，Z_2）.

④$||z-z_1|-|z-z_2||=2a$（$0 \prec 2a \prec |z_1z_2|$），表示以$Z_1$，$Z_2$为焦点，实半轴长为$a$的双曲线方程（若$2a=|z_1z_2|$，此方程表示两条射线）.

⑶绝对值不等式：

设z_1，z_2是不等于零的复数，则

①$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，且$\lambda \prec 0$），右边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \succ 0$）.

②$||z_1|-|z_2|| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \succ 0$），右边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \prec 0$）.

注：$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

3. 共轭复数的性质：

$\overline{\overline{z}}=z$ $\qquad\qquad$ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2b\mathrm{i}$（$z=a+b\mathrm{i}$）$\qquad\qquad$ $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ $\qquad\qquad$ $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$（$z_2\neq 0$） $\qquad\qquad$ $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

注：两个共轭复数之差是纯虚数.（×）[之差可能为零，此时两个复数是相等的]

4. ⑴①复数的乘方：$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n}(n\in N^+)$

②对任何z，$z_1,z_2\in C$及$m,n\in N_+$有

③ $z^m\cdot z^n=z^{m+n},(z^m)^n=z^{m\cdot n},(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n$

注：①以上结论不能拓展到分数指数幂的形式，否则会得到荒谬的结果，如$i^2=-1,i^4=1$若由$i^2=(i^4)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$就会得到$-1=1$的错误结论.

②在实数集成立的$|x|=x^2$. 当x为虚数时，$|x|\neq x^2$，所以复数集内解方程不能采用两边平方法.

⑵常用的结论：

$$i^2=-1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^{4n}=1$$

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0,(n\in Z)$$

$$(1\pm i)^2=\pm 2i,\frac{1+i}{1-i}=i,\frac{1-i}{1+i}=-i$$

若ω是1的立方虚数根，即$\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$\omega^3=1,\omega^2=\overline{\omega},\omega=\frac{1}{\omega},1+\omega+\omega^2=0,\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0(n\in Z)$.

5. ⑴复数z是实数及纯虚数的充要条件：

①$z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

②若$z\neq 0$，z是纯虚数$\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$.

⑵模相等且方向相同的向量，不管它的起点在哪里，都认为是相等的，而相等的向量表示同一复数. 特例：零向量的方向是任意的，其模为零.

注：$|z|=|\overline{z}|$.

6. ⑴复数的三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

辐角主值：θ适合于 0≤θ＜2π的值，记作$\arg z$.

注：①z为零时，$\arg z$可取$[0,2\pi)$内任意值.

②辐角是多值的，都相差2π的整数倍.

③设$a\in R^{+}$, 则$\arg a=0,\arg(-a)=\pi,\arg ai=\frac{\pi}{2},\arg(-ai)=\frac{3}{2}\pi$.

⑵复数的代数形式与三角形式的互化：

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\frac{a}{r},\sin\theta=\frac{b}{r}$.

⑶几类三角式的标准形式：

$$r(\cos\vartheta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

$$-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$$

$$r(-\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$$

$$r(\sin\theta+i\cos\theta)=r[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$$

7. 复数集中解一元二次方程：

在复数集内解关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$时，应注意下述问题：

①当$a,b,c\in R$时，若Δ＞0，则有二不等实数根$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；若$\Delta$=0，则有二相等实数根$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$；若$\Delta$＜0，则有二相等复数根$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$（$x_{1,2}$为共轭复数）.

②当a,b,c不全为实数时，不能用Δ方程根的情况.

③不论a,b,c为何复数，都可用求根公式求根，并且韦达定理也成立.

8. 复数的三角形式运算：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

棣莫弗定理：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$