Рассмотрим обобщенный случай поворота объекта вокруг произвольной оси в пространстве, что встречается довольно часто, например, в робототехнике, мультипликации, моделировании. Следуя логике предыдущего обсуждения, поворот вокруг произвольной оси в пространстве выполняется с помощью переноса и простых поворотов вокруг координатных осей. Так как метод поворота вокруг координатной оси известен, то основная идея заключается в том, чтобы совместить произвольную ось вращения с одной из координатных осей.

Пусть в системе координат (СК) XYZ заданы (рис. 1):

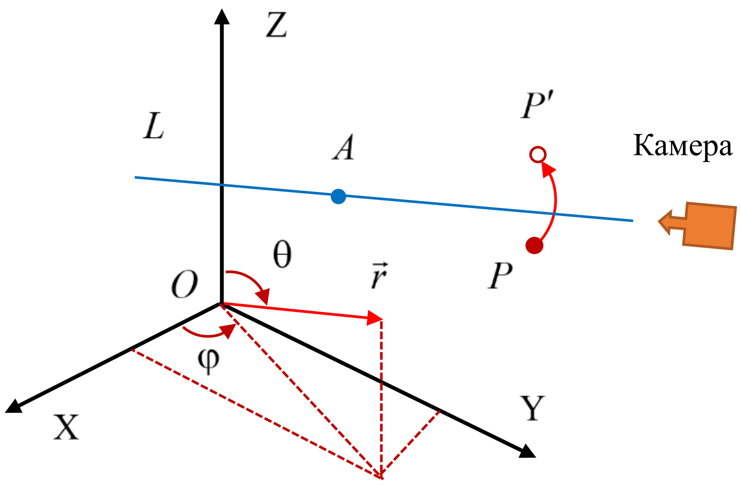

Рис.1

- прямая L, проходящая через точку $A = A(x_0, y_0, z_0)$;
- единичный вектор $\vec{r} = \vec{r}(r_x, r_{y,} r_z) = \vec{r}(r, \varphi, \theta,)$, задающий направление вдоль прямой L, $|\vec{r}| = r = 1$;
- точка P с координатами $P = P(x^P, y^P, z^P) = (x^P \quad y^P \quad z^P \quad 1)^T$.

Будем считать, что направляющий вектор $\vec{r}$ имеет направление на точку наблюдения (камеру), рис. 1.

Прямая L может быть определена двумя точками: $A = A(x_0, y_0, z_0)$ и $B = B(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 2). Тогда единичный направляющий вектор $\vec{r}$ будет иметь вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(r_x, r_{y,} r_z) = \vec{r}\left(\frac{x_1 - x_0}{|\vec{r}_{AB}|}, \frac{y_1 - y_0}{|\vec{r}_{AB}|}, \frac{z_1 - z_0}{|\vec{r}_{AB}|}\right), \qquad (1)$$

где

$$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\ . \qquad (2)$$

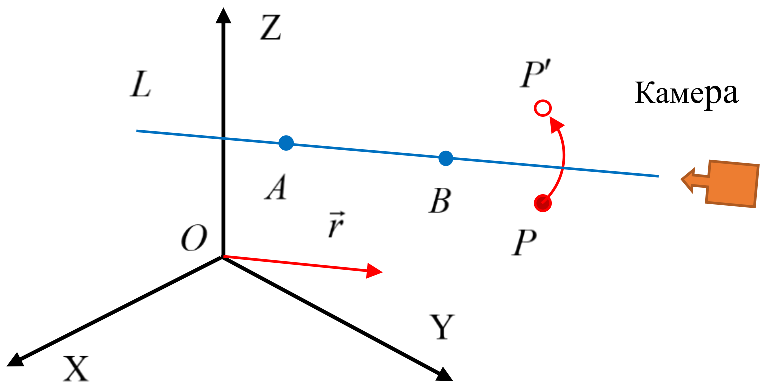

Рис. 2

Задача. *Выполнить поворот точки* P *(объекта) вокруг оси* L *с направлением* $\vec{r}$ *на угол* ϕ *(преобразование объекта* $P \to P'$*). Угол* ϕ *считается положительным при вращении объекта против часовой стрелки относительно точки наблюдения (камеры).*

Для этой цели выполним ряд действий, описываемых ниже.

Сместим в СК XYZ (рис. 1) точки A и P на расстояние $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (-x_0, -y_0, -z_0)$. В результате точка A окажется в начале СК XYZ $(A \to A_1)$, а точка P займет положение P_1 $(P \to P_1)$ (рис. 3).

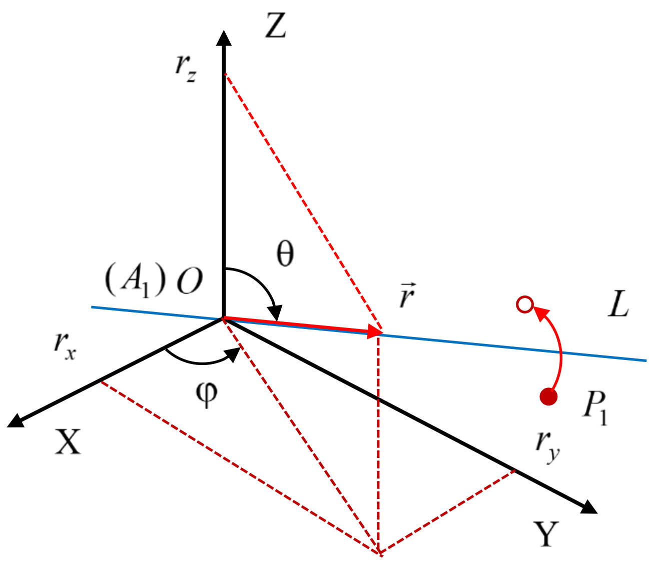

Рис. 3

$$P_1 = T^O P = T^O(-x_0, -y_0, -z_0)P\,. \tag{3}$$

где ()

$$T^O = T^O(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{4}$$

матрица преобразования координат объекта при его смещении в декартовой СК XYZ на $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ относительно исходного положения.

В нашем случае матрица T^O примет вид

$$T^O = T^O(-x_0, -y_0, -z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$P = P(x^P, y^P, z^P) = (x^P \quad y^P \quad z^P \quad 1)^T, \tag{6}$$

$$P_1 = P_1(x_1^P, y_1^P, z_1^P) = (x_1^P \quad y_1^P \quad z_1^P \quad 1)^T. \tag{7}$$

Пусть $OE = d$, где $E = E(0, \quad r_y \quad r_z)$, есть проекция вектора $\vec{r}$ на плоскость ZY (рис.4).

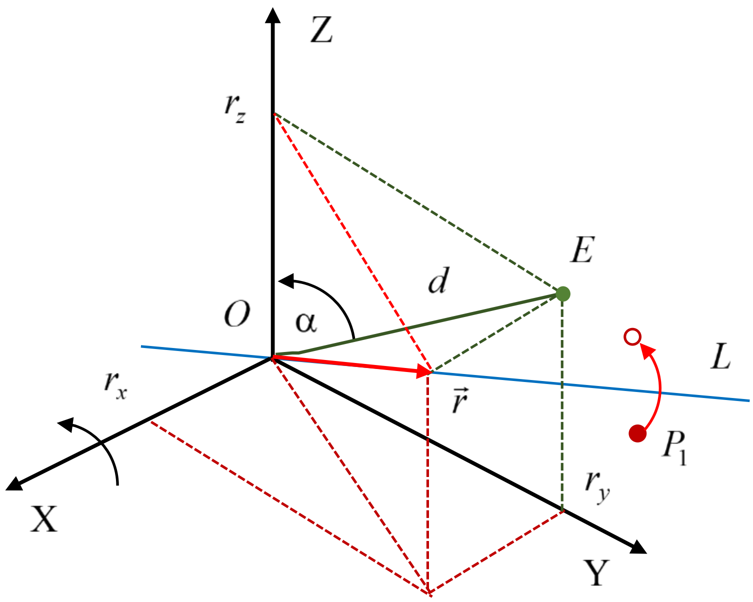

Рис. 4

Из рисунка 4 получаем

$$d = \sqrt{r_z^2 + r_y^2}\ . \tag{8}$$

и

$$\cos\alpha = \frac{r_z}{d},\quad \sin\alpha = \frac{r_y}{d}. \tag{9}$$

Повернем теперь вектор $\vec{r}$, определяющий прямую L, и точку P_1 (рис. 4) вокруг оси OX против часовой стрелки (в положительном направлении) на угол α, преобразование объектов $P_1 \to P_2$ и $\vec{r} \to \vec{r}_1$. Результат поворота показан на рис. 5.

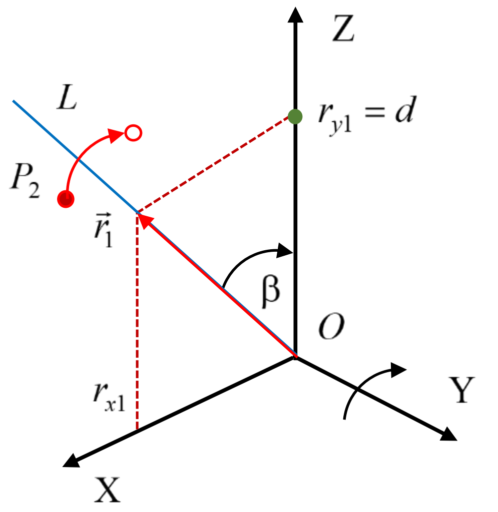

Рис. 5

В результате получим координаты точки P в новом положении (точка P_2, рис. 5).

$$P_2 = R_X^O P_1 = R_X^O(\alpha) T^O(-x_0, -y_0, -z_0) P, \tag{10}$$

где

$$R_X^O = R_X^O(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{11}$$

матрица преобразования координат объекта при его повороте на угол φ в декартовой СК XYZ вокруг оси X в положительном направлении (против часовой стрелки).

С учетом (9) и (11) матрица R_X^O приобретает вид

$$R_X^O = R_X^O(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_z/d & -r_y/d & 0 \\ 0 & r_y/d & r_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{12}$$

Как видно из рис. 4 и рис. 5

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(r_{x1}, r_{y1}, r_{z1}) = \vec{r}_1(r_x, 0, d), \tag{13}$$

где $|\vec{r}_1| = r_1 = 1$.

Из рисунка 5 получаем

$$\cos\beta = \frac{r_{y1}}{r_1} = \frac{d}{r} = d\,, \quad \sin\beta = \frac{r_{x1}}{r_1} = \frac{r_x}{r} = r_x\,, \tag{14}$$

так как $r = 1$.

Повернем теперь вектор $\vec{r}_1$ и точку P_2 (рис. 5) вокруг оси OY по часовой стрелке (в отрицательном направлении) на угол β, преобразование объектов $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$ и $P_2 \to P_3$. В результате прямая L совмещается с осью OZ (рис. 6).

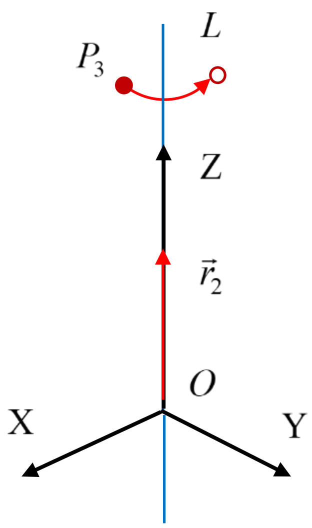

Рис. 6

После поворота новые координаты точки P (точка P_3, рис. 6) будут иметь вид

$$P_3 = R_Y^O P_2 = R_Y^O(-\beta) R_X^O(\alpha) T^O(-x_0, -y_0, -z_0) P\,, \tag{15}$$

где

$$R_Y^O = R_Y^O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{16}$$

матрица преобразования координат объекта при его повороте вокруг оси Y СК XYZ на угол φ в положительном направлении (против часовой стрелки). С учетом (14) и (16) матрица R_Y^O приобретает вид

$$R_Y^O = R_Y^O(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & -r_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{17}$$

Координаты вектора $\vec{r}_2$ имеют вид

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(r_{x2}, r_{y2}, r_{z2}) = \vec{r}_2(0, 0, r) = \vec{r}_2(0, 0, 1), \tag{18}$$

Далее, повернем точку P_3 (объект) вокруг оси OZ против часовой стрелки (в положительном направлении) на заданный угол ϕ, преобразование объекта $P_3 \to P_4$ (рис. 7).

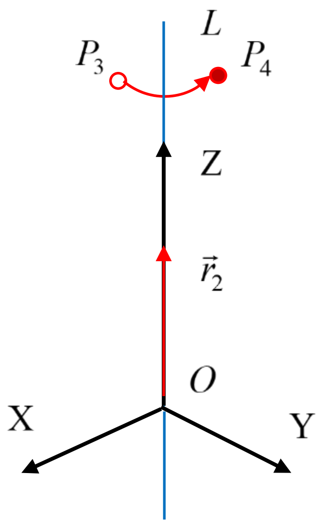

Рис. 7

После поворота новые координаты точки P (точка P_4, рис. 7) будут иметь вид

$$P_4 = R_Z^O P_3 = R_Z^O(\phi) R_Y^O(-\beta) R_X^O(\alpha) T^O(-x_0, -y_0, -z_0) P, \tag{19}$$

где

$$R_Z^O = R_Z^O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \qquad (20)$$

матрица преобразования координат объекта при его повороте вокруг оси Z СК XYZ на угол φ в положительном направлении (против часовой стрелки). С учетом (20) имеем

$$R_Z^O = R_Z^O(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Далее необходимо выполнить преобразование координат объекта (точка P_4, рис. 7) в СК XYZ, обратное тому, что позволило совместить ось вращения (прямую L) с осью Z.

Для решения поставленной задачи необходимо:

- повернуть точку P_4 (рис. 8) вокруг оси OY против часовой стрелки (в положительном направлении) на угол β (рис. 5), преобразование координат объекта $P_4 \to P_5$ (рис. 9),

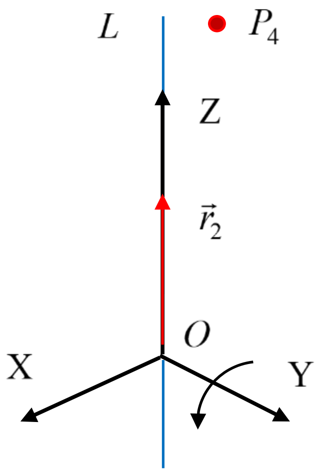

Рис. 8

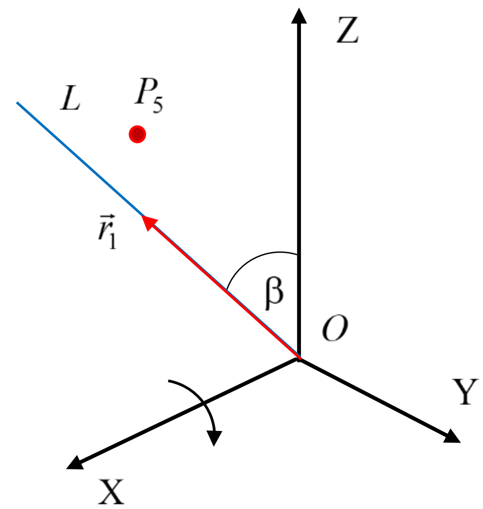

Рис. 9

$$P_5 = R_Y^O(\beta)P_4 = R_Y^O(\beta)R_Z^O(\phi)R_Y^O(-\beta)R_X^O(\alpha)T^O(-x_0, -y_0, -z_0)P\,; \qquad (22)$$

- повернуть точку P_5 (рис. 9) вокруг оси OX по часовой стрелке (в отрицательном направлении) на угол α, преобразование координат объекта $P_5 \to P_6$ (рис. 10),

$$P_6 = R_X^O(-\alpha)P_5 = R_X^O(-\alpha)R_Y^O(\beta)R_Z^O(\phi)R_Y^O(-\beta)R_X^O(\alpha)T^O(-x_0, -y_0, -z_0)P; \qquad (23)$$

- сместить в СК XYZ (рис. 10) точки A_1 и P_6 на расстояние $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_0, y_0, z_0)$ (рис. 11).

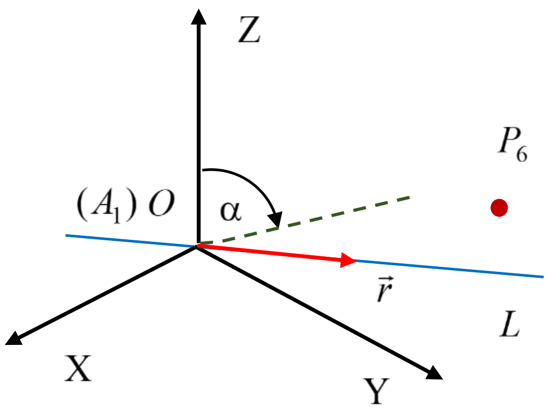

Рис. 10

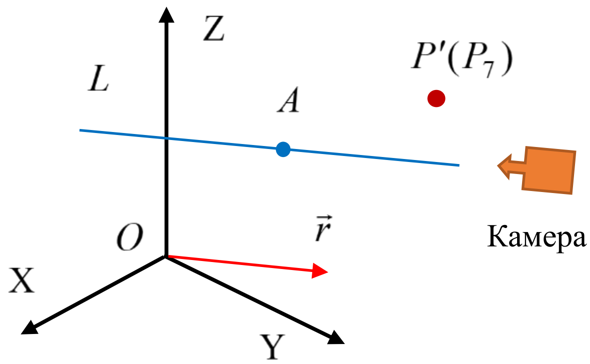

Рис. 11

$$\begin{aligned} P_7 &= T^O(x_0, y_0, z_0)P_6 = \\ &= T^O(x_0, y_0, z_0)R_X^O(-\alpha)R_Y^O(\beta)R_Z^O(\phi)R_Y^O(-\beta)R_X^O(\alpha)T^O(-x_0, -y_0, -z_0)P. \end{aligned} \qquad (24)$$

Заменяя в выражении (24) обозначение $P_7 \to P'$, представим его в виде

$$\begin{aligned} P' &= T^O(x_0, y_0, z_0)R_X^O(-\alpha)R_Y^O(\beta)R_Z^O(\phi)R_Y^O(-\beta)R_X^O(\alpha)T^O(-x_0, -y_0, -z_0)P = \\ &= M(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \phi)P, \end{aligned} \qquad (25)$$

где

$$M(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \phi) = \\ = T^O(x_0, y_0, z_0) R_X^O(-\alpha) R_Y^O(\beta) R_Z^O(\phi) R_Y^O(-\beta) R_X^O(\alpha) T^O(-x_0, -y_0, -z_0) \tag{26}$$

Подставляя в (26) выражение (5) для матрицы смещения и выражения (12), (17) и (21) для матриц вращения, получаем

$$M(x_0, y_0, z_0, r_x, r_y, r_z, \phi) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_z/d & r_y/d & 0 \\ 0 & -r_y/d & r_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & -r_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & r_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_z/d & -r_y/d & 0 \\ 0 & r_y/d & r_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Заметим, что в частном случае, когда ось вращения L проходит через начало координат СК XYZ точка A будет иметь координаты $A = A(x_0, y_0, z_0) = A(0\,0, 0)$ и согласно (5)

$$T^O = T^O(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ - \tag{28}$$

единичная матрица.

Тогда выражения (26) и (27) примут вид

$$M(\alpha, \beta, \phi) = R_X^O(-\alpha) R_Y^O(\beta) R_Z^O(\phi) R_Y^O(-\beta) R_X^O(\alpha) \tag{29}$$

и

$$
\begin{aligned}
&M(r_x, r_y, r_z, \phi) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_z/d & r_y/d & 0 \\ 0 & -r_y/d & r_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & -r_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & r_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_z/d & -r_y/d & 0 \\ 0 & r_y/d & r_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{30}
$$