Национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6

Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Выполнил:

Немыкин Ярослав Алексеевич
P3122
Преподаватель:
Болдырева Елена Александровна

Санкт-Петербург
2025г.

M1204*. *На плоскости заданы точки А, В, С – центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» – их радиусы уменьшаются до 0 – и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния АВ, ВС, СА – целые числа, то этот процесс будет периодическим? Изучите, как может развиваться этот процес, если треугольник АВС а) равносторонний; б)равнобедренный; в)* прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).*

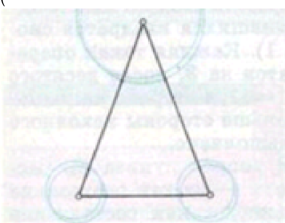

рис 1.

Будем рассматривать общий случай: исходные радиусы пузырей произвольны.

а) *Треугольник* ABC *равносторонний.* После первого хлопка радиусы двух пузырей будут равны нулю. При втором хлопке лопнут все три пузыря. Затем процесс будет периодически повторяться.

б-1) *Треугольник* ABC *равнобедренный, основание* меньше боковой стороны. Тогда при первом или втором хлопке лопнут два пузыря, центры которых лежат в основании треугольника. Далее их радиусы будут равны (рис. 1). Вскоре лопнут одновременно все три пузыря, после чего начнется периодический процесс. Количество хлопков в периоде (цикле) зависит от отношения длин боковой стороны и основания.

Теперь рассмотрим с более общих позиций оставшиеся случаи: б-2) *(основание больше боковой стороны)* и в). Мы увидим, что в этих случаях процесс, как правило, не будет периодическим.

Обозначим длины отрезков BC, AC и AB через a, b и c соответственно. Пусть для определенности $a \le b \le c$. (Вариант б-с мы уже рассмотрели.) Заметим, что пузыри с центрами в точках A и B (короче: пузыри A и в) могут соприкоснуться разве лишь в самом начале процесса. После этого в каждом хлопке участвует пузырь C. Таким образом, конкретное значение величины c не играет никакой роли. (лишь бы выполнялось условие bc). Понятно также, что важны не сами по себе длины a и b, а их отношение r=b/a. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать треугольник ABC с боковыми сторонами $=1, AC \geq r1$ и основанием ABr.

Обозначим через x и y радиусы пузырей A и B сразу после произвольного хлопка. Одна из этих двух величин заведомо равна нулю. Каким будет следующий хлопок, зависит от того, что больше длина стороны, противолежащей уцелевшему пузырю, или разность между другой боковой стороной и радиусом этого пузыря. Таким образом, преобразование величин x и y происходит по правилу, указанному в таблице 1.

Таблица 1.

	Текущее состояние	Преобразование
1	y=0,r-x1	x $= x + \frac{1}{2}, y = 0$
2	y=0,r-x= 1	y $= 0, x = 0$
3	y=0,r-x1	y $= (r - x)/2, x = 0$
4	y=0,1-y1,y$\neq$ 0	x $= (1 - y)/2, y = 0$

Здесь x_{new} и y_{new} - новые значениях и y сразу после очередного хлопка. Вариант x=0, 1-y > r не вошел в таблицу, так как он невозможен при r>1, а в случае r=1 возможен лишь второй вариант x=0, 1-y=r (т. е. y=0), который описывается строкой 2.

Изучение таблицы показывает, что из состояния 3 (и только из него) мы всегда попадаем в состояние 4. Поэтому строки 3 и 4 можно объединить в одну (помня, что ей соответствует два хлопка). Теперь рассмотрение сосредоточивается на состояниях с y=0 (см. таблицу 2). Таблица 2.

	Текущее состояние	Преобразование	Число хлопков
1	$x < r - 1$	$x_{\text{нов}} = x + \frac{1}{2}$	1
2	$x = r - 1$	$x_{\text{нов}} = 0$	1
3	$x > r - 1$	$x_{\text{нов}} = (2 - r + x)/4$	2

Таким образом, последовательность значений переменной x, фиксируемых в моменты хлопков пузырей B и C, определяется рекуррентно по формуле $x = f(x)$, где функция f определена на интервале [0; r] в соответствии с таблицей 2:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1/2, & \text{если } x < r - 1, \\ 0, & \text{если } x = r - 1, \\ (2 - r + x)/4, & \text{если } x > r - 1. \end{cases}$$

Для случая r=1 (пункт 6—2) задачи) график функции f приведен на рисунке 2. Из рисунка видно, что итерационный процесс периодичен при исходных значениях x=0 и x=$\frac{1}{3}$ (в периоде соответственно один двойной хлопок или два одинарных). В остальных случаях процесс стремится к «устойчивому» состоянию x $= \frac{1}{3}$,и тем самым он непериодичен. Поскольку исходные расстояния a, b и c (при сделанных предположениях a=bc) вполне могут быть целыми, ответ на первый вопрос задачи отрицательный.

Для пункта в) r равно 4/3. График соответствующей функции / изображен на рисунке 3. На графике выделен единственный цикл, включающий 5 хлопков. Конкретные значения чисел $_1, _2, _3$ (см. рис. 2) могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{x_2}{4} + \frac{1}{6} \\ x_1 = \frac{x_3}{4} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Они равны $x_1 = \frac{23}{90}, x_2 = \frac{34}{45}, x_3 = \frac{16}{45}$,
Рассмотрев несколько случаев выбора исходного значения x, нетрудно показать, что любая «траектория» процесса приближается к описанному циклу. Если,

		Values				Total
		A	B	C	D	
Range	min	4	8	15	16	43
	max	23	42	25	34	124
Another total		27	50	40	50	**167**

k / n	**0**	1	*2*	3	4
0	**1**	0	*0*	0	0
1	**1**	1	*0*	0	0
2	**1**	2	*1*	0	0
3	**1**	3	*3*	1	0
4	**1**	4	*6*	4	1
5	**1**	5	*10*	10	5