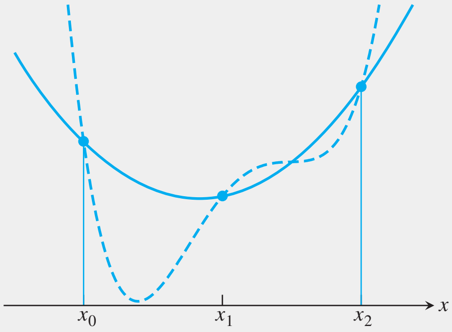
Численное интегрирование

Вычислительная математика. Лекция 8

Исупов К.С.

November 9, 2020



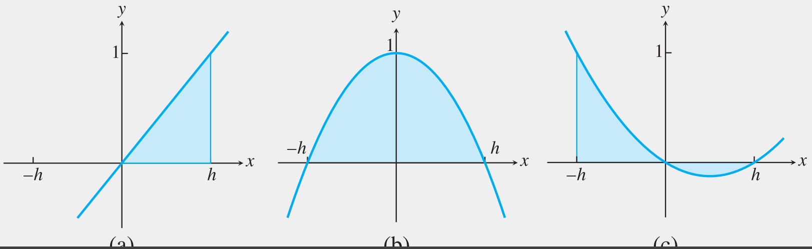
Введение и постановка задачи

ВикипедиЯ

Определённый интеграл

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Определённый интеграл — одно из основных понятий математического анализа, один из видов интеграла. Определённый интеграл является числом, равным пределу сумм особого вида (интегральных сумм). Геометрически определённый интеграл выражает площадь «криволинейной трапеции», ограниченной графиком функции.[1] В терминах функционального анализа, определённый интеграл — аддитивный монотонный функционал, заданный на множестве пар, первая компонента которых есть интегрируемая функция или функционал, а вторая — область в множестве задания этой функции (функционала)[2].



Введение

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$

Примеры вычислений

Далее приведены примеры расчёта определенных интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

1. $\int\limits_8^9 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_8^9 = \frac{729}{3} - \frac{512}{3} = \frac{217}{3} = 72{,}(3) \approx 72{,}3$
2. $\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b$
3. $\int\limits_1^4 \frac{2dx}{x} = 2\ln x\Big|_1^4 \approx 2{,}8$

Постановка задачи численного интегрирования

Задача численного интегрирования заключается в вычислении значений определенного интеграла на основании ряда значений подинтегральной функции $f(x)$. Обычно заменяют $f(x) \sim \varphi(x, a)$ такой, чтобы интеграл от нее легко вычислялся.

Чаще всего $f(x)$ заменяют обобщенным интерполяционным многочленом:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x) + r(x)$$

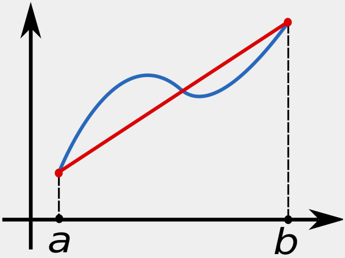
Подставив $f(x)$ под знак интеграла получим *квадратурную формулу*:

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + R, \qquad c_i = \int_a^b \varphi_i(x)dx, \qquad R = \int_a^b r(x)dx \qquad (1)$$

- x_i — узлы
- c_i — веса
- R — погрешность

Формула трапеций

Искомый интеграл (площадь криволинейной трапеции) заменяется площадью прямолинейной трапеции:



Формула трапеций

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

Формула трапеций

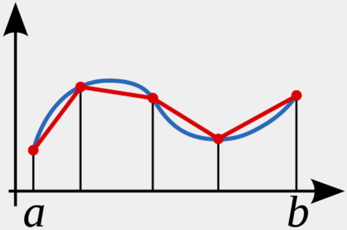
Главный остаточный член погрешности

$$|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}$$

Формула трапеций

Для повышения точности на интервале $[a, b]$ вводят густую сетку:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$



Обобщенная формула трапеций

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Формула трапеций

Формула трапеций для равномерной сетки

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

Главный остаточный член погрешности

$$|R| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{12}$$

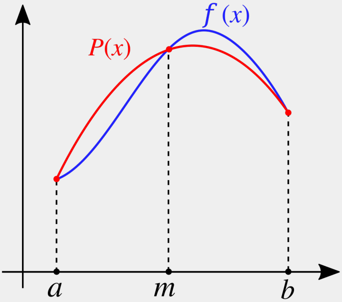
Формула трапеций:

- точна для многочленов первой степени
- имеет второй порядок точности относительно шага сетки

Формула Симпсона

Формула Симпсона

Искомый интеграл (площадь криволинейной трапеции) заменяется площадью фигуры, ограниченной параболой:



Формула Симпсона для равномерной сетки

$$F \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Формула Симпсона

Главный остаточный член погрешности

$$|R| \leq \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)h^4}{2880}$$

Формула парабол Симпсона:

- точна для многочленов второй и третей степени
- имеет четвертый порядок точности относительно шага сетки

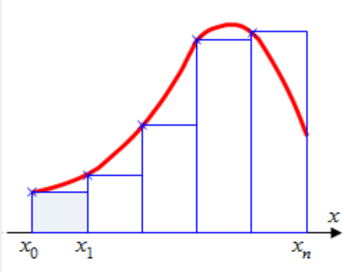
Формулы прямоугольников

Формулы прямоугольников

Искомый интеграл (площадь криволинейной трапеции) заменяется площадью прямоугольника:

- формула левых прямоугольников
- формула правых прямоугольников
- формула средних прямоугольников

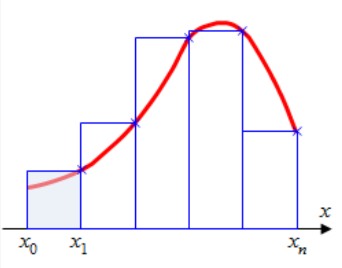
Формула левых прямоугольников



Формула левых прямоугольников для равномерной сетки

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

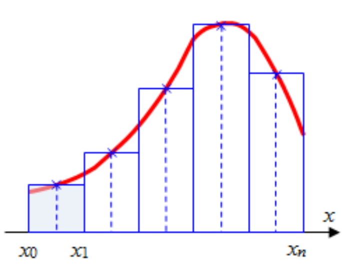
Формула правых прямоугольников



Формула правых прямоугольников для равномерной сетки

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Формула средних прямоугольников



Формула средних прямоугольников для равномерной сетки

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + h/2)$$

Формула средних прямоугольников

Формулы прямоугольников

Погрешность метода левых и правых прямоугольников

$$|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)h}{2}$$

Погрешность метода средних прямоугольников

$$|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{24}$$

Формула средних прямоугольников:

- точна для многочленов первой степени
- имеет второй порядок точности относительно шага сетки
- в два раза точнее формулы трапеций

Метод двойного просчета для оценки погрешностей (метод Рунге)

Метод двойного просчета

Задача

Вычислить определенный интеграл I с заданной точностью ε.

- I_n — интеграл, вычисленный на сетке с шагом h
- I_{2n} — интеграл, вычисленный на сетке с шагом $h/2$

Правило Рунге для оценки погрешностей

1. Если $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$, то $I = I_{2n}$
2. Если $|I_n - I_{2n}| \geq \varepsilon$, то расчет повторяют с шагом $h/4$

Выбор начального шага интегрирования: $h \approx \sqrt[m]{\varepsilon}$, где

- $m = 2$ для формулы трапеций
- $m = 4$ для формулы парабол Симпсона

Обобщённая формула Ньютона-Котеса

Обобщённая квадратурная формула Ньютона-Котеса

Постановка задачи

Некоторая функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih$ $(1 \leq i \leq n)$ на отрезке $[a, b]$ таблицей значений $y_i = f(x_i)$:

x_i	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$	$\ldots$	$x_0 + nh$
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Требуется вычислить

$$F = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Обобщённая квадратурная формула Ньютона-Котеса

Многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(q-i)} y_i, \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$

Подставим его в интеграл вместо $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} \int_{x_0}^{x_n} \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(q-i)} dx.$$

Заметим, что $dq = dx/h$, $x = x_0 \to q = 0$, $x = x_n \to q = n$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \times \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} h \int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)dq$$

Обобщённая квадратурная формула Ньютона-Котеса

Заменим $h = (b-a)/n$ и введем обозначения:

$$H_i = \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\frac{1}{n}\int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)dq$$

Получим финальную формулу Ньютона-Котеса:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_i H_i$$

где H_i — коэффициенты Ньютона-Котеса.

Так как H_i не зависят от $f(x)$, то их вычисляют заранее и заносят в специальные справочные таблицы.

Обобщённая квадратурная формула Ньютона-Котеса

Коэффициенты формул Ньютона-Котеса положительны при $1 \leq n \leq 8$ и $n = 10$,а при $n = 9$ и $n \geq 11$ среди коэффициентов имеются как положительные так и отрицательные.

При вычислении интегральной суммы влияние погрешностей округления на точность результата тем сильнее, чем больше $\sum_{i=0}^{n} H_i$. Для формул Ньютона-Котеса эта сумма неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Поэтому при больших n формулы Ньютона-Котеса оказываются практически непригодными.

Квадратурные формулы Гаусса

Квадратурные формулы Гаусса

Постановка задачи

Зафиксируем число разбиений отрезка интегрирования и потребуем уменьшения погрешностей за счет рационального выбора абсцисс точек разбиения.

Метод Гаусса — метод численного интегрирования, позволяющий повысить алгебраический порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования без увеличения числа используемых значений подынтегральной функции.

Формулы Гаусса

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(x_i),$$

где a_i — веса, x_i — специально подобранные узлы

Метод Гаусса для двух ординат

Формула Гаусса для двух ординат на отрезке $[a, b]$ имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)$$

Данная формула точна для полиномов 3-ей степени.

Общий случай

Для n точек можно получить формулу точности $2n-1$, где

- Значения узлов являются корнями полинома Лежандра степени n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

- Значения весов вычисляются по формуле:

$$a_i = \frac{2}{(1-x_i^2)\left[P_n'(x_i)\right]^2},$$

где P_n' - первая производная полинома Лежандра.

end