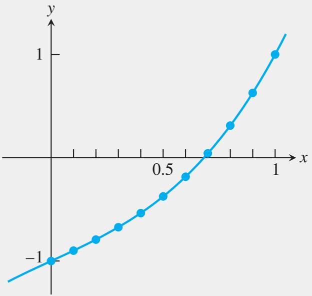
Численные методы решения нелинейных уравнений

Вычислительная математика. Лекция 2. v.2

Исупов К.С.

October 26, 2019



Постановка задачи

Определение

Нелинейное уравнение с одним неизвестным можно записать в виде:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — некоторая функция аргумента x.

Корень уравнения

Корнем уравнения называется значение r аргумента x, при котором равенство (1) выполняется, т.е.

$$f(r) = 0.$$

Решить нелинейное уравнение означает найти его корень, то есть найти значение аргумента x, при котором значение функции равно нулю.

Типы и методы решения нелинейных уравнений

Типы нелинейных уравнений

1. Алгебраические: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$.
2. Трансцендентные: $2^x - 2\cos(x) = 0, \lg(x+5) = \cos(x)$.

Методы решения нелинейных уравнений

1. Аналитические. Позволяют записать решение в виде формулы.
2. Численные. Позволяют получить приближения корней с любой заданной точностью.

Этапы численного решения нелинейных уравнений

1. Локализация, т.е. отделение корней (Bracketing a root).
2. Уточнение корней, т.е. вычисление их приближенных значений.

Локализация корней

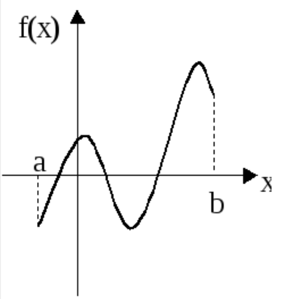
Задачи локализации (отделения) корней

1. Определить, что на заданном отрезке $[a, b]$ существуют корни.
2. Определить, что на заданном отрезке $[a, b]$ корень единственный.

Существование корней

Теорема о существовании корней

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка существует один или нечетное число корней уравнения $f(x) = 0$.



Функция имеет разные знаки на концах интервала, поэтому на данном интервале содержатся один или несколько корней уравнения $f(x) = 0$, т.е. точки, в которых функция пересекает ось абсцисс.

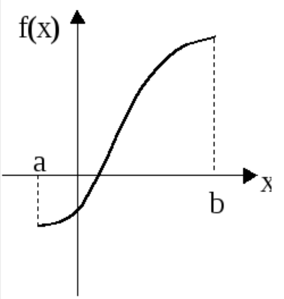
Единственность корня

Теорема о единственности корня

Если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка содержится корень уравнения $f(x) = 0$ и притом только один.

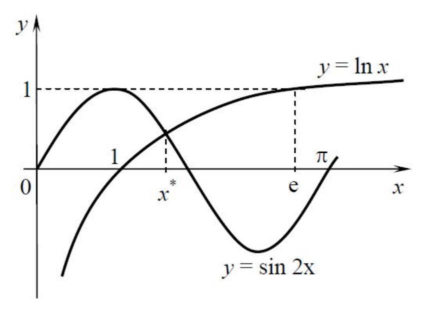
Теорема о единственности корня

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то на отрезке существует корень уравнения $f(x) = 0$ и притом только один.



Способы отделения корней

1. Аналитический (нахождение интервалов монотонности функции).
2. Графический (построение графика функции $y = f(x)$ и поиск пересечения y с осью абсцисс, либо построение графика $f(x_1) = f(x_2)$ и поиск точки пересечения этих функций).



Графическое отделение корней уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$

Уточнение корней

Задача уточнения корней

На данном этапе получается приближенное значение корня, принадлежащего отрезку $[a, b]$, с заданной точностью ε. Т.е. вычисленное значение корня x должно отличаться от точного r не более, чем на величину ε:

$$|r - x| \leq \varepsilon.$$

Этапы уточнения корней

1. Выбор начального приближения к корню $x_0 \in [a, b]$.
2. Вычисление по некоторой формуле последующих приближений $x_1, x_2, x_3...$ (итерационный процесс).

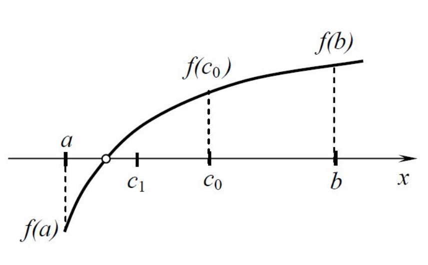
Метод половинного деления

Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0.$$

Считаем, что отделение корней проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень, который нужно уточнить с погрешностью ε.



Делим отрезок пополам до тех пор, пока не достигнем заданной точности.

Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

Алгоритм

1. В качестве начального приближения корня примем середину отрезка: $c_0 = (a+b)/2$.
2. Исследуем значение $f(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$: тот из отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, содержит искомый корень, принимаем его в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$.
3. В качестве следующего приближения корня принимаем середину нового отрезка: $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, и повторяем пункт 2. Таким образом, k-е приближение вычисляется как:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}. \tag{2}$$

4. Условия прекращения итерационного процесса:

$$|b_k - a_k| < 2\varepsilon. \tag{3}$$

Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

Преимущества

1. Безусловная сходимость.
2. Простота, применим для любых уравнений.

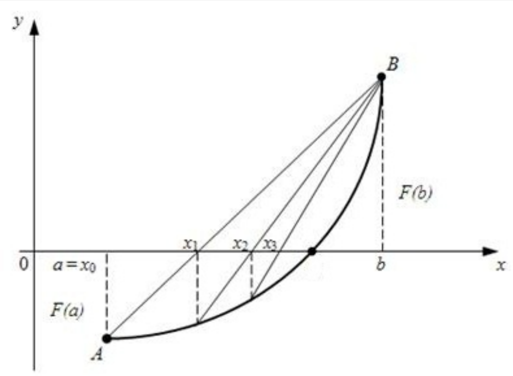
Недостатки

Медленный (линейная сходимость): с каждым шагом погрешность уменьшается в два раза:

$$|r - c_{k+1}| \leq \frac{1}{2}|r - c_k|.$$

Метод хорд

Метод хорд



Очередное приближение в отличие от метода дихотомии берем не в середине отрезка, а в точке x_0, где пересекает ось абсцисс прямая линия (хода), проведенная через точки A и B.

Метод хорд

Расчетные формулы

В зависимости от вида функции, неподвижной может быть точка a (левый конец интервала) или точка b (правый конец интервала).

1. Когда неподвижен правый конец (b), а $x_0 = a$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)}. \tag{4}$$

2. Когда неподвижен левый конец (a), а $x_0 = b$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)}. \tag{5}$$

Неподвижным будет тот конец интервала изоляции, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$, а последовательные приближения лежат по другую сторону корня.

Метод хорд

Оценка погрешности

$$m = \min_{[a,b]} |f'(x)|; \qquad M = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

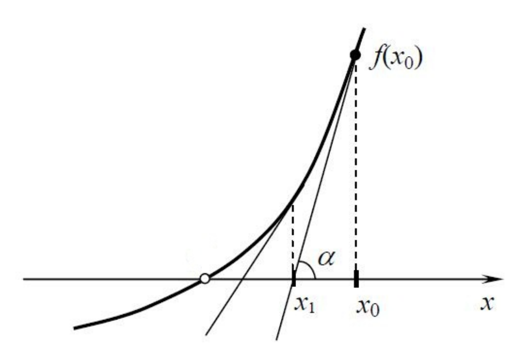
Если не накладывается ограничений на длину интервала изоляции, то погрешность оценивается по формуле:

$$|r - x_k| \leq f(x_k)/m. \tag{6}$$

Чаще стремятся сузить интервал изоляции корня до выполнения неравенства: $M \leq 2m$. Тогда погрешность оценивают по формуле:

$$|r - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}|. \tag{7}$$

Метод касательных Ньютона



Очередное приближение берем в точке x_1, где пересекает ось абсцисс касательная, проведенная через точку x_0.

Расчетные формулы

Значение x_1 находится из уравнения:

$$tg\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0). \tag{8}$$

Выражая x_1, имеем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{9}$$

В общем случае:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{10}$$

В качестве начального приближения x_0 следует выбрать ту границу отрезка $[a, b]$, где совпадают знаки функции $f(x)$ и ее второй производной $f''(x)$.

Условия окончания итерационного процесса те же, что и для метода хорд.

Скорость сходимости

- Скорость сходимости метода определяется модулем первой производной функции в окрестности корня: чем больше крутизна графика, тем меньше поправка, которую надо прибавить к n-у приближению, чтобы получить $(n+1)$-е приближение.
- На каждом шаге погрешность пропорциональна квадрату погрешности на предыдущем шаге. Следовательно, сходимость квадратичная.

Комбинированный метод хорд и касательных

Комбинированный метод

Основная суть метода — сузить интервал изоляции с двух сторон.

В зависимости от неподвижного конца интервала изоляции используются две пары формул, и на каждом шаге вычисляются приближенное значение корня по недостатку x_{k+1} и по избытку $\widetilde{x}_{k+1}$.

Расчетные формулы

1. Если неподвижна точка a:
   - значение по недостатку вычисляется методом касательных:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad x_0 = a;$$

   - значение пои избытку вычисляется методом хорд:

$$\widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{x}_k - f(\widetilde{x}_k)\frac{\widetilde{x}_k - x_k}{f(\widetilde{x}_k) - f(x_k)}, \qquad \widetilde{x}_0 = b;$$

Комбинированный метод

Расчетные формулы

2. Если неподвижна точка b:
   - значение по недостатку вычисляется методом хорд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\widetilde{x}_k - x_k}{f(\widetilde{x}_k) - f(x_k)}, \qquad x_0 = a;$$

   - значение пои избытку вычисляется методом касательных:

$$\widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{x}_k - \frac{f(\widetilde{x}_k)}{f'(\widetilde{x}_k)}, \qquad \widetilde{x}_0 = b;$$

На каждом новом шаге расчета используют суженный с двух сторон интервал $[x_k, \widetilde{x}_k]$.

Метод простых итераций (Fixed-point iteration)

Неподвижные точки функции

Определение

Вещественное число ξ называется неподвижной точкой функции ϕ, если $\phi(\xi) = \xi$.

Пример

1. Выберем произвольный аргумент, например $x = 1.85$.
2. Посчитаем значение функции $\cos x = \cos(1.85) \approx -0.275590$.
3. Посчитаем значение функции $\cos(-0.275590) \approx 0.962265$.
4. Посчитаем значение функции $\cos(0.962265) \approx 0.571663$.
5. ... В результате придем к числу 0.73908513322:

$$\cos\cos\ldots\cos x \to 0.73908513322, \qquad x \text{ — произвольное число.}$$

Таким образом, если $\xi = 0.73908513322$, то $\cos(\xi) = \xi$, и ξ — это *неподвижная точка* для cos.

Применение

Пусть, например, дано уравнение

$$\cos x - x = 0. \tag{11}$$

С точки зрения неподвижных точек это уравнение может быть записано в виде:

$$x = \cos x. \tag{12}$$

Очевидно, что если значение функции совпадает со значением аргумента, то есть ξ — неподвижная точка функции $\cos x$, то ξ и есть корень уравнения (12).

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0.$$

Пусть отделение корней проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень ξ, который нужно уточнить с погрешностью ε.

Алгоритм простых итераций

Алгоритм

1. Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$f(x) = 0 \to x = \phi(x). \tag{13}$$

2. Выберем начальное приближение x_0 — любую точку из интервала $[a, b]$.
3. Итерационный процесс осуществляем в соответствии с рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

   В развернутом виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x_0), \\ x_2 &= \phi(x_1), \\ x_3 &= \phi(x_2), \\ &\ldots \text{profit!} \end{aligned}$$

Условия сходимости

? Вопрос

При каких условиях итерационный процесс (14) будет сходиться?

Теорема о сходимости итерационного процесса

Итерационный процесс сходится при условии, что первая производная итерационной функции $\phi(x)$ по модулю меньше единицы:

$$|\phi'(x)| < 1.$$

Доказательство условий сходимости

1. Представим n-е и $(n+1)$-е приближения в форме
$$x_n = \xi + \varepsilon_n, \qquad x_{n+1} = \xi + \varepsilon_{n+1}, \tag{15}$$
где $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}$ — отклонения от корня.
2. Функцию $\phi(x)$ в окрестности точки ξ заменим двумя первыми членами ряда Тейлора:
$$\phi(x) \approx \phi(\xi) + \varepsilon\phi'(\xi). \tag{16}$$
3. Тогда итерационная формула $x_{n+1} = \phi(x_n)$ примет вид
$$\xi + \varepsilon_{n+1} = \phi(\xi) + \varepsilon_n\phi'(\xi). \tag{17}$$
4. Поскольку ξ — корень уравнения, то $\xi = \phi(\xi)$, откуда следует, что
$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\phi'(\xi). \tag{18}$$
5. Для сходимости итерационного процесса необходимо и достаточно, чтобы
$$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|, \tag{19}$$
следовательно, для любого x в окрестности точки ξ должно выполняться условие
$$|\phi'(x)| < 1,$$
что непосредственно следует из (18). □

Выбор начального приближения и скорость сходимости

Если условие

$$|\phi'(x)| < 1 \tag{20}$$

выполняется, то на отрезке $[a, b]$, на котором локализован корень, в качестве начального приближения можно взять любую точку

$$x_0 \in [a, b].$$

Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной: чем меньше $|\phi'(x)|$, тем быстрее сходится процесс, что непосредственно следует из формулы (18):

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \phi'(\xi). \tag{21}$$

Преобразование уравнения к каноническому виду

Для заданного уравнения $f(x) = 0$ построить функцию $\phi(x)$ так, чтобы выполнялось условие $|\phi'(x)| < 1$.

Пример

Пусть дано уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ и известно, что один корень расположен на $I = [1, 2]$.

1. Преобразуем уравнение следующим образом:
$$x = x^3 - 1. \tag{22}$$
Проверим условие сходимости для точки $x_0 = mid(I) = 1.5$:
$$\phi(x) = x^3 - 1, \qquad \phi'(x) = 3x^2, \qquad |\phi(1.5)| = 6.75 > 1.$$

2. Преобразуем уравнение другим способом:
$$x^3 = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x+1}. \tag{23}$$
Проверим условие сходимости для точки $x_0 = mid(I) = 1.5$:
$$\phi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad \phi'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}, \qquad |\phi(1.5)| = 0.133 < 1.$$

Преобразование уравнения к каноническому виду

Алгоритм преобразования

1. Умножить левую и правую части уравнения $f(x) = 0$ на произвольную константу $k \neq 0$:

$$k \cdot f(x) = 0 \cdot k.$$

2. Добавить к обоим частям уравнения неизвестное x:

$$k \cdot f(x) + x = 0 \cdot k + x \Leftrightarrow x = x + k \cdot f(x).$$

3. Полученное уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению

$$x = \phi(x)$$

с функцией $\phi(x) = x + k \cdot f(x)$. Произвольный выбор k позволяет обеспечить выполнение условия сходимости $|\phi'(x)| < 1$.

Алгоритм преобразования

4. Поскольку $\phi'(x) = 1 + k \cdot f'(x)$, то значение k следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$|\phi'(x)| = |1 + k \cdot f'(x)| < 1. \tag{24}$$

Раскрывая это, получаем условия

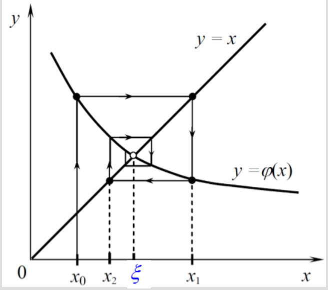
$$-2 < k \cdot f'(x) < 0. \tag{25}$$

Нужно стремиться получить такую постоянную k, которая бы больше отличалась от нуля, и тогда будет реализовываться более быстрая сходимость.

Критерий останова

Двусторонняя сходимость

Если $\phi'(x) < 0$, то сходимость двусторонняя:



В этом случае

$$|x_{n+1} - x_n| > |xn + 1 - \xi|, \qquad (26)$$

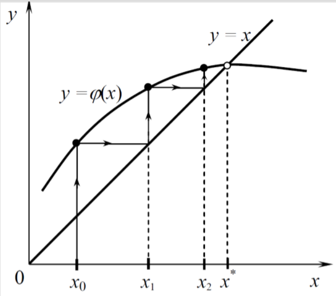
и критерий окончания итерационного процесса

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon \qquad (27)$$

является объективным.

Монотонная сходимость

Если $\phi'(x) > 0$, то сходимость односторонняя:



Контроль достигнутой точности осуществлять по неравенству:

$$\frac{1}{1-q}|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon, \qquad (28)$$

где

$$q = \max_{[a,b]} |\phi'(x)|.$$

Наибольшая скорость сходимости

Наибольшая скорость сходимости итерационного процесса:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

достигается при

$$\phi'(x) = 1 + k \cdot f'(x) = 0$$

Этого можно добиться, если выбрать параметр k в уравнении

$$\phi(x) = x + k \cdot f(x) \tag{30}$$

зависящим от x в виде

$$k = -\frac{1}{f'(x)}. \tag{31}$$

При этом итерационная формула (29) переходит в формулу метода касательных Ньютона:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

end

For details: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=
metody-resheniya-nelineynykh-uravneniy