

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Институт математики и информационных систем
Факультет автоматики и вычислительной техники
Кафедра электронных вычислительных машин**

В.С. Ростовцев

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Киров

2021

УДК 519.83(07)

P785

Рекомендовано к изданию кафедрой электронных вычислительных машин факультета автоматики и вычислительной техники ВятГУ

Допущено редакционно-издательской комиссией методического совета ВятГУ в качестве учебного пособия для студентов направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.03 «Прикладная информатика» всех профилей подготовки

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент,
зав. кафедрой систем автоматического управления ВятГУ

Ю. В. Ланских

Кандидат технических наук, доцент,
заместитель директора ООО «Линк инжиниринг»
Н. А. Чарушин

Ростовцев, В. С. Теория принятия решений: учебное пособие /

В. С. Ростовцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киров: ВятГУ, 2021. – 200 с.

В учебном пособии рассмотрены основы теории принятия решений и ее место в теории систем и системного анализа, теория полезности, теория игр, теория календарного планирования, теория Марковских цепей и сетей Петри, принципы разработки экспертных систем поддержки принятия решений и многокритериальных оценок.

УДК 519.83(07)

© ВятГУ, 2021

Оглавление

<i>1 Введение в теорию принятия решений</i>	<i>5</i>
<i>1.1 Основные понятия в теории принятия решений</i>	<i>5</i>
<i>1.2 Психологическая и нормативная теория решений</i>	<i>8</i>
<i>1.3 Возникновение новой научной дисциплины — теории принятия решений</i>	<i>11</i>
<i>1.4 Все решения это личные или деловые</i>	<i>15</i>
<i>1.5 Наиболее популярные методы принятия решений</i>	<i>17</i>
<i>1.6 Этапы построения диаграммы</i>	<i>19</i>
<i>1.7 Ошибки при принятии решений</i>	<i>21</i>
<i>1.8 Квадрат Декарта</i>	<i>25</i>
<i>1.9 Классификация видов решений</i>	<i>27</i>
<i>1.10 Системы поддержки принятия решений</i>	<i>29</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>34</i>
<i>2 Теория принятия решений и системный анализ</i>	<i>35</i>
<i>2.1 Возникновение теории систем и системного анализа</i>	<i>35</i>
<i>2.2 Понятие системного подхода</i>	<i>38</i>
<i>2.3 Определение системы</i>	<i>42</i>
<i>2.4 Этапы системного анализа</i>	<i>46</i>
<i>2.4.1 Понятие конфигуратора</i>	<i>47</i>
<i>2.4.2 Определение проблемы</i>	<i>48</i>
<i>2.4.3 Выявление целей</i>	<i>49</i>
<i>2.4.4 Формирование критериев</i>	<i>49</i>
<i>2.4.5 Генерирование альтернатив</i>	<i>50</i>
<i>2.4.6 Построение и использование моделей</i>	<i>50</i>
<i>2.4.7 Оптимизация и выбор</i>	<i>51</i>
<i>2.4.9 Декомпозиция</i>	<i>53</i>
<i>2.4.10 Агрегатирование</i>	<i>54</i>
<i>2.5 Основные закономерности систем</i>	<i>55</i>
<i>2.6 Методика Паттерн</i>	<i>61</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>62</i>
<i>3 Теория полезности в выборе альтернатив</i>	<i>64</i>
<i>3.1 Аксиомы рационального поведения</i>	<i>64</i>
<i>3.2 Задачи с вазами</i>	<i>65</i>
<i>3.3 Деревья решений</i>	<i>67</i>
<i>3.4 Метод построения дерева решений</i>	<i>73</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>75</i>
<i>4 Сетевое планирование в задачах принятия решений</i>	<i>78</i>
<i>4.1 Способы представления комплекса работ</i>	<i>78</i>
<i>4.2 Сводный сетевой график комплекса работ</i>	<i>79</i>
<i>4.3 Правила построения сетевых моделей</i>	<i>83</i>
<i>4.4 Анализ сетевых моделей</i>	<i>84</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>86</i>
<i>5.1 Основные понятия теории Марковских цепей</i>	<i>87</i>
<i>5.2 Марковские цепи и диаграммы переходов</i>	<i>89</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>94</i>
<i>6.1 Основные понятия теории игр</i>	<i>95</i>
<i>6.2 Применение смешанных стратегий</i>	<i>98</i>
<i>6.3 Игры $n \times 2$ и $2 \times m$</i>	<i>101</i>
<i>6.4 Графический метод решения игр $2 \times n$</i>	<i>101</i>
<i>6.5 Графический метод решения игр $m \times 2$</i>	<i>104</i>
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>107</i>

6.6 Принятие решений в условиях риска	108
6.6.1 Критерий ожидаемого значения	108
6.7 Критерий «ожидаемое значение – дисперсия»	110
6.8 Принятие решений в условиях неопределённости	112
6.8.1 Минимаксный критерий	114
6.8.2 Критерий Байеса – Лапласа	114
6.8.3. Критерий Сэвиджа	115
6.8.4 Пример и выводы	116
6.9 Производные критерии	118
6.10 Статические игры с полной информацией	119
6.11 Приближенные методы решения игр	120
Контрольные вопросы	122
7 Задача многокритериального выбора	124
7.1. Основные подходы к решению многокритериальных задач	124
7.2 Методы векторной стратификации	130
7.3 Метод попарных сравнений	131
7.4 Метод Дельфи	133
7.5 Примеры применения множества Эджворда – Парето	133
7.6 Применение теории генетических алгоритмов	136
для поиска многоэкстремальных значений	136
7.7 Пример решения задачи поиска максимума одномерной функции	143
7.8 Пример решения задачи коммивояжера	146
Контрольные вопросы	149
8 Коллективные решения	152
8.1 Парадокс Кондорсе	152
8.2 Правило большинства голосов	153
8.3 Метод Борда	154
8.4 Аксиомы Эрроу	156
8.5 Попытки пересмотра аксиом	158
8. 6 Теорема невозможности и реальная жизнь	159
8.7 Принятие коллективных решений в малых группах	160
8.8 Организация и проведение конференций по принятию решений	163
8.9 Метод организации работы в группе принятия решений	164
8.9.1 Предварительные этапы	166
8.9.2 Проведение конференции по принятию решений	170
Контрольные вопросы	172
9 Принятие решений и сети Петри	173
9.1 Основные понятия теории сетей Петри	173
9.2 Структура сети Петри	174
9.3 Графическое представление сетей Петри	175
9.4 Выполнение сетей Петри и правила запуска	176
9.5 Примеры использования сетей Петри	178
9.6 Свойства сетей Петри	181
9.7 Методы анализа сетей Петри	185
9.7.1 Построение дерева достижимости	185
9.7.2 Алгебраические методы	186
9.8 Разновидности сетей Петри	188
Контрольные вопросы	195
Перечень сокращений и обозначений	198
Библиографический список	199

1 Введение в теорию принятия решений

1.1 Основные понятия в теории принятия решений

Принятие решений — это особый вид человеческой деятельности, направленный на выбор способа достижения поставленной цели. В ряде случаев применяется и такое определение. *Принятие решения* — это выбор лучшего варианта из двух и более возможных с помощью определенных правил [1,5].

Эти правила заключаются в соблюдении последовательности этапов принятия решения. Всего их пять, один из которых (контроль реализации) является сквозным — т.е. он появляется и на всех остальных этапах. Рассмотрим их подробнее.

Каждый день мы принимаем десятки решений, начиная от самых простых (во сколько встать, что приготовить на завтрак и завтракать ли вообще) и до самых сложных (как развивать проект, кого назначить ответственным и как получить финансирование).

Существует точка зрения, что, начиная с сознательного возраста, вся жизнь человека представляет собой непрерывный процесс принятия решений. Еще в доисторические времена древние люди были вынуждены принимать многочисленные решения, чтобы найти себе пищу, спастись от диких животных и стихийных явлений природы, организовать свое нехитрое хозяйство и разрешать возникающие споры. Все наиболее важные решения такого рода принимались вождями племен единолично или путем обсуждения на совете старейшин.

С появлением государств и развитием социальных организаций принятие решений стало более осмысленным и организованным. Возникла

постоянная практика принятия административных решений, и резко повысилась ответственность руководителей за их последствия. Поэтому люди стали задумываться над тем, как они принимают решения и что необходимо сделать, чтобы принимать решения более эффективно.

Теория принятия решений — область исследования, вовлекающая понятия и методы математики, статистики, экономики, менеджмента и психологии с целью изучения закономерностей выбора людьми путей решения проблем и задач, а также способов достижения желаемого результата.

Принятие решения начинается тогда, когда вы понимаете, что текущая ситуация вас не устраивает и ее невозможно изменить с помощью тех средств, знаний и опыта, которые на сегодняшний день имеются в Вашем распоряжении. Как правило, при этом Вы еще и испытываете негативные эмоции.

Для того чтобы перейти к процессу принятия решения, необходимо сформулировать проблему. При этом обычно проблемы описывают с негативной стороны, указывая, что именно не устраивает или препятствует реализации планов. Например, «не могу выучить второй язык. Не получается, не успеваю и т.д.».

Чтобы поставить цель и сформулировать задачу, необходимо определить желаемый результат. Для этого нужно описать желаемое решение, которое реализуется при максимально благоприятных обстоятельствах и отсутствии помех и препятствий. Это идеальное решение будет служить источником критериев для принятия решения. Критерий — это ответ на вопрос: «по какому признаку я узнаю, что проблема решена?».

Например, решение выучить второй язык до разговорного уровня. Критерий – смогу общаться с носителем этого языка в отпуске летом 2021 года.

Определение условий и ограничений. После того как сформулировано желание, необходимо определиться, на что ориентироваться: в соответствии с какими ценностями, нормами и правилами Вы будете принимать решение.

Например, для одной организации ценностью и нормой может быть совместное принятие и обсуждение решений руководством и топ-менеджерами, а в другой единоличное принятие решение руководителем и его беспрекословное исполнение сотрудниками. Здесь нужно и можно учитывать ценности, правила и нормы, разделяемые как организацией, так и непосредственно лицами, принимающими решение.

Например, ценности и нормы: знание второго языка сегодня выгодно подчеркивает мои преимущества перед работодателями, знание второго языка поощряется в нашей организации. Приобретения — конкурентное преимущество, возможность общения с носителями языка и. т. д. Потери — временные затраты и финансовые затраты на обучение.

Залог выбора наилучшего решения — наличие четко сформулированной цели и критериев требуемого результата. Поэтому на следующем этапе нужно сформулировать окончательную задачу (желаемое решение) с учетом всех условий и ограничений в конкретных и реализуемых показателях [1].

Например, цель — выучить второй язык до разговорного уровня, чтобы иметь возможность читать и писать простые фразы, общаться с носителями языка. Задачи: посетить курсы по изучению языка, заниматься самостоятельно два раза в неделю по полчаса.

Этот этап является сквозным и заключается в том, чтобы постоянно проверять, совпадают ли текущее состояние дел и образ цели. Особенно важно отслеживать это соответствие при выделении критериев реализации принятого решения и определении времени для контроля за реализацией решения. Также необходимо помнить, что одна из ведущих компетенций руководителя — способность вовремя переходить от выбора к действию.

Например, отслеживание, как продвигается обучение второму языку — посещаете ли вы занятия, есть ли задуманные успехи, успеваете ли вы выучить его к задуманному сроку. При этом важно будет не затягивать с выбором школы обучения и времени начала обучения [1].

1.2 Психологическая и нормативная теория решений

Наиболее распространённой классификацией способов принятия решения является деление их на *рациональные решения*; *решения, основанные на суждениях и интуитивные решения*.

Рациональные решения — это то, в котором мы стараемся проанализировать и учесть все факторы, которые могут в итоге оказать влияние на принятие решение [1].

Например, принимая решение о покупке нового компьютера в офис, мы просчитываем бюджет, реакцию руководства, пытаемся обосновать необходимость покупки компьютера, вычисляем степень выгоды и окупаемости покупки, степень радости и удовлетворения от нее.

Все люди без исключения познают на практике, что такое принятие решений. Принятия решений не удастся избежать никому. Даже отказ от выбора — это тоже выбор.

1. Принятие решений — это особый вид психической деятельности людей, направленный на выбор способа достижения поставленной цели. Понятие «решение» имеет два смысловых значения. В широком смысле решение означает процесс выбора альтернативы. В узком смысле под решением понимают результат конкретного выбора.

2. Все решения людей можно разделить на личные и деловые. Личные решения направлены на достижение личных целей человека. Деловые решения принимаются в организациях и направлены на достижение целей

организации. Деловые решения подразделяются на экспертные и управленческие.

3. Принятие решений в менеджменте (так же как обмен информацией) представляет собой важный связующий процесс, который осуществляется непрерывно при выполнении каждой функции управления организацией (планирования, организации деятельности, мотивации, контроля).

4. Теория принятия решений — это специальная научная дисциплина, которая решает две взаимосвязанные задачи: исследование того, как человек или группа людей принимают решения, и разработка методов принятия решений, помогающих обосновать выбор альтернативы из нескольких возможных. В связи с этим теория принятия решений разделена на две части — *психологическая и нормативная теория решений*.

5. Психологическая теория решений представляет собой систему утверждений, раскрывающих внутреннее содержание деятельности и поведение людей в процессе принятия решений. Она выполняет функции объяснения и предвидения поведения человека в ситуациях выбора.

Одна из древних мудростей гласит: «Единственная реальная проблема в жизни состоит в том, чтобы решить, что делать дальше». Способность принимать решения, так же как способность к общению и обмену информацией, — это важное качество человеческого разума, которое развивается с опытом¹.

Каждый из нас в течение дня принимает десятки и сотни решений, даже не замечая этого. Большинство повседневных решений мы принимаем автоматически. Другие решения заставляют нас ненадолго задуматься. Но существуют и такие решения, которые захватывают все наше внимание и вынуждают мучиться, терзаться сомнениями, постоянно спрашивать себя: «А что, если?», не спать ночами, взвешивать все «за» и «против» до тех пор, пока проблема не будет решена. Но часто ли мы

¹ <http://www.mental-skills.ru/synopses/73165.html>

задумываемся о том, что означают такие понятия, как «решение» и «принятие решения»?

Американский социолог Рубинштейн предложил 10 правил принятия решений.

Правило 1. Прежде чем вникать в детали, постарайтесь получить представление о проблеме в целом. Надо понять какую именно проблему и какую цель вы преследуете.

Правило 2. Не принимайте решения, пока не рассмотрите все возможные варианты.

Правило 3. Сомневайтесь - даже самые общепринятые истины должны вызывать недоверие, и не нужно бояться отводить их.

Правило 4. Старайтесь взглянуть на стоящую перед вами проблему с самых разных точек зрения, даже если шансы на успех кажутся минимальными.

Правило 5. Ищите модель или аналогию, которая поможет вам лучше понять сущность решаемой проблемы. Так диаграммы и схемы позволяют вам охватить сложную и обширную проблему буквально одним взглядом.

Правило 6. Задавайте как можно больше вопросов. Правильно заданный вопрос порой может радикально изменить содержание ответа.

Правило 7. Не удовлетворяйтесь первым решением, которое придет вам в голову. Постарайтесь найти его слабые места. Попробуйте найти другие решения данной проблемы и сравните их с первым.

Правило 8. Перед принятием окончательного решения поговорите с кем-нибудь о своих проблемах.

Правило 9. Не пренебрегайте своими чувствами. Ведущая роль логического мышления в анализе проблем не подлежит сомнению, но нельзя приуменьшать значение чувств и интуиции.

Правило 10. Помните, что каждый человек смотрит на жизнь и возникающие повседневно проблемы со своей, особой точки зрения.

1.3 Возникновение новой научной дисциплины — теории принятия решений

Ответом человеческой практике на возросшие трудности и ответственность в принятии решений стало возникновение новой научной дисциплины — теории принятия решений.

Теория принятия решений зародилась примерно в середине XX века. Ее главная задача состоит в исследовании того, каким образом человек или группа людей принимают решения, а также в разработке специальных методов принятия решений, помогающих обосновать выбор наилучшего варианта из нескольких возможных [1].

В связи с этим теорию принятия решений можно разделить на две относительно независимые части — *дескриптивную (описательную)* и *прескриптивную (предписывающую)*. Дескриптивная составляющая описывает реальное поведение и мышление людей в процессе принятия решений и называется *психологической теорией решений*. Прескриптивная составляющая, наоборот, предписывает людям, как им следует принимать решения, и называется *нормативной теорией решений*.

Психологическая теория решений — это система утверждений, раскрывающих, внутреннее содержание деятельности и поведение людей в процессе принятия решений. Эти утверждения позволяют ответить на следующие вопросы:

1. *Как у людей возникает представление о ситуации принятия решения?*

Все люди воспринимают и представляют одну и ту же ситуацию по-разному. Такое представление, которое возникает в сознании конкретного человека, является субъективной моделью данной ситуации. Психологи

обнаружили, что при формировании этой модели люди обычно упрощают реальную ситуацию, исключая из рассмотрения многие факторы, возможности и их последствия.

2. Как люди оценивают последствия принимаемых решений?

Различные последствия своих решений люди также оценивают субъективно и приписывают им некоторое «значение» ценности или полезности, которое отражает их личные взгляды и предпочтения. Субъективная полезность альтернатив играет очень важную роль в принятии решений, поскольку именно она определяет окончательный выбор.

3. Как люди оценивают вероятности различных факторов, влияющих на принятие решения?

Установлено, что при оценке вероятностей различных событий люди используют эвристические правила и подвержены влиянию психологических ловушек. Например, психологи обнаружили, что люди часто переоценивают вероятности наступления более понятных и желаемых для них событий, хотя на самом деле эти события могут быть объективно маловероятны.

4. Какие правила и стратегии используют люди для принятия решений в различных ситуациях?

Исследования показали, что при выборе альтернативы люди также пользуются разнообразными эвристиками, которые не имеют строгого обоснования. Например, они часто используют так называемую аддитивную модель, когда каждая альтернатива оценивается в виде суммы полезностей различных последствий, умноженных на их «вес», т.е. важность того или иного результата.

5. Как на людей влияют различные факторы, управляющие процессом принятия решения?

К таким факторам относят влияние внешней среды, личностные качества людей, обеспеченность ресурсами и другие. Например, установлено — чем сильнее у человека выражены потребность в успехе и стремление к превосходству, тем больше он склонен к риску. В психологии также известен

эффект «позитивного сдвига риска», когда коллективное принятие решений приводит к выбору более рискованных альтернатив, чем индивидуальное.

Психологическая теория решений изучает, как в действительности люди принимают решения и какие психологические явления, парадоксы и ловушки сопровождают этот процесс.

В связи с этим психологическая теория решений *выполняет две основные функции — предвидение и объяснение поведения человека в процессе принятия решений.*

Однако людей всегда интересовало не только то, как они принимают решения, но и то, как надо принимать решения. Чтобы ответить на этот вопрос, была разработана и продолжает активно развиваться нормативная теория решений.

Нормативная теория решений — это система методов, обеспечивающих поддержку принятия решений. Эти методы «организуют» мышление человека и предписывают ему, как следует себя вести в процессе принятия решений. В настоящее время разработано большое число разнообразных методов и процедур, которые призваны помочь людям разобраться в сложной ситуации и в своих предпочтениях, грамотно сформулировать цели, ограничения, альтернативы, оценить их последствия и принять качественное решение.

В основе всех этих методов лежит определенная концепция принятия решений человеком. Нормативная теория решений базируется на двух основных концепциях — максимизации полезности и ограниченной рациональности.

В соответствии с этой концепцией рассматривается так называемый *рациональный, или «экономический», человек*, который всегда старается принять оптимальное, т.е. наилучшее из всех возможных, решение. У каждого из нас имеется своя собственная функция полезности, отражающая нашу индивидуальную систему предпочтений. Эта функция может быть задана в форме некоторого аналитического выражения или «скрыта» внутри

наших предпочтений. Оценивая каждое решение, мы явно или неявно сопоставляем ему некоторое значение своей функции полезности, которое показывает степень предпочтительности этого решения по сравнению с остальными. Оптимальным считается решение, обладающее максимальной полезностью. Методы принятия решений, реализующие концепцию максимизации полезности, описаны в работах Дж. Фон Неймана, О. Morgenштерна, Р.Л. Кини, Х. Райфа, П. Фишберна и других ученых [1].

Изучение процессов принятия решений в организациях привело к выводу о том, что в действительности *люди редко ведут себя подобно «рациональному» человеку*.

На самом деле в большинстве реальных ситуаций они, как правило, ограничиваются удовлетворительными решениями, которые обычно уступают оптимальным решениям по качеству, но вполне приемлемы с точки зрения достижения поставленной цели.

Руководитель организации вынужден принимать удовлетворительные решения по нескольким причинам.

Во-первых, из большого числа возможностей он видит лишь несколько альтернатив, и поэтому маловероятно, что его выбор будет оптимальным.

Во-вторых, он не может предвидеть всех возможных последствий каждой альтернативы.

В-третьих, ему часто не хватает знаний, и потому его решения обычно основываются на весьма приблизительных и общих представлениях о тех процессах и объектах, которые нуждаются в управлении.

В-четвертых, руководитель работает в режиме «хронического» дефицита времени и поэтому часто ошибается.

В-пятых, он не обладает всей необходимой информацией, поскольку принимает решения в условиях неопределенности внешней и внутренней среды организации.

В-шестых, он часто руководствуется нечеткими, расплывчатыми или даже противоречивыми целями, что, несомненно, влияет на качество и содержание управленческих решений.

1.4 Все решения это личные или деловые

Личные решения направлены на достижение личных целей и затрагивают интересы только одного человека и, возможно, нескольких близких ему людей. Личные решения, которые принимаются нами ежедневно, как правило, просты. Их простота объясняется, во-первых, очевидностью выбора и, во-вторых, незначительностью последствий большинства решений. Например, обычно очевидны решения о выборе пути следования из одного пункта в другой или о покупке большинства товаров на прилавках магазинов. Также можно сказать, что выбор из меню ресторана мяса или рыбы на обед вряд ли серьезно повлияет на судьбы человечества или состояние нашего здоровья [1].

К *деловым* относят политические, экономические, финансовые, юридические, технические и другие решения, которые принимаются в организациях.

Большинство деловых решений принимается руководителями организаций. В этом случае руководитель обычно должен уметь объяснить другим, почему он принял то или иное решение. При этом он должен обращаться к общим человеческим ценностям, эмоциям и чувствам людей, к их вере, потребностям и ожиданиям, логике и расчетам.

Все деловые решения, принимаемые в организациях, можно, в свою очередь, разделить на два вида: *экспертные и управленческие*.

Экспертные решения носят рекомендательный характер и принимаются экспертами, аналитиками, консультантами, т.е. лицами, которые не обладают линейными полномочиями, связанными с управлением организацией. Например, экспертными можно считать финансовые решения,

которые предлагаются независимыми финансовыми аналитиками и консультантами, или технические решения по внедрению новых технологий, которые советует принять директору главный инженер предприятия.

В отличие от них *управленческие решения* принимаются непосредственно линейными руководителями и представляют собой управляющие воздействия, направленные на достижение цели управления организацией. Как мы увидим в дальнейшем, управленческие решения предназначены для изменения управляемых факторов, влияющих на организацию. После того как управленческое решение принято, оно доводится до исполнителей в устной форме либо предварительно оформляется в виде плана, приказа, постановления или другого документа.

Развитие организаций и человеческой цивилизации привело к появлению новых трудностей *в принятии деловых решений*. Прежде всего, возросли сложность и взаимозависимость решений, принимаемых в разных областях деятельности людей. Резко увеличилось число факторов и критериев, которые необходимо учитывать в процессе решения сложных проблем. Так, в экономике наряду с такими привычными критериями, как прибыль, издержки, окупаемость, появились новые: влияние на окружающую среду, здоровье нации, предупреждение чрезвычайных ситуаций, конкуренция на мировом рынке, социальная ответственность и многие другие. Кроме того, появились новые, исключительно сложные объекты (химические производства, атомные электростанции, ракетно-космические комплексы и т.д.), требующие особо пристального контроля и принятия ответственных решений.

Часто от того или иного решения очень многое зависит. Особенно если речь идет о бизнесе — ведь здесь очень много заинтересованных сторон и различных рисков.

В таких случаях важно соблюдать определенные правила принятия решения. В этой статье мы расскажем об этапах принятия решения,

методах принятия решений и ошибках, которые возникают в процессе принятия решений.

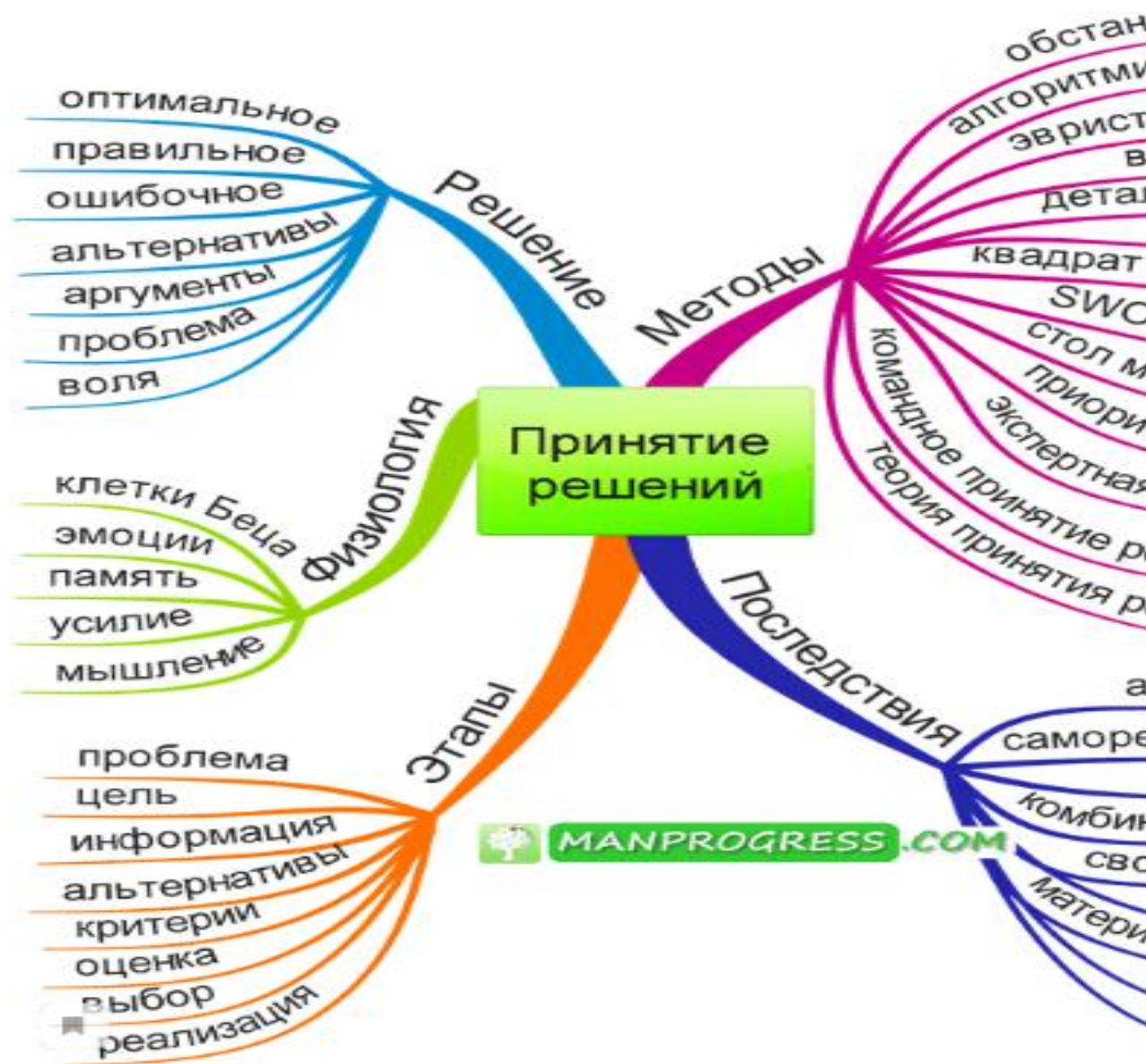


Рис.1.1. Факторы, влияющие на принятие решения

1.5 Наиболее популярные методы принятия решений

SWOT-analysis представляет собой создание матрицы для систематизации информации об объектах и явлениях по категориям:

Strengths, то есть сильные стороны;

Weaknesses, то есть слабые стороны;

Opportunities, то есть возможности;

Threats, то есть угрозы.

В результате получается наглядная матрица, которая позволяет увидеть основные характеристики проблемной ситуации. Используя полученную информацию, можно провести анализ соответствующих решений и сделать выбор. Важно помнить, что сильные стороны находятся во взаимосвязи с возможностями, а не с угрозами.

SWOT-анализ — метод стратегического планирования.

SWOT-анализ — метод стратегического планирования, заключающийся в выявлении факторов внутренней и внешней среды организации и разделении их на четыре категории:

Strengths (сильные стороны),

Weaknesses (слабые стороны),

Opportunities (возможности),

Threats (угрозы).

Сильные (S) и слабые (W) стороны являются факторами внутренней среды объекта анализа, (то есть тем, на что сам объект способен повлиять); возможности (O) и угрозы (T) являются факторами внешней среды (то есть тем, что может повлиять на объект извне и при этом не контролируется объектом). Например, предприятие управляет собственным торговым ассортиментом — это фактор внутренней среды, но законы о торговле не подконтрольны предприятию — это фактор внешней среды

Стоит выпускать продукт на рынок сейчас или сделать это позже? В чем слабости принятой маркетинг-стратегии? Размещать в магазинах синие макинтоши или желтые?

SWOT-анализ — метод стратегического планирования, который нужен, чтобы оценить сильные и слабые стороны компании и определить перспективы развития и угрозы извне

Strengths (сильные стороны). Внутренняя характеристика компании. Факторы, которые обеспечивают устойчивое положение и конкурентные преимущества на рынке. Переменные, за счет которых увеличивается

товарооборот, то, что будете улучшать, укреплять, усиливать. Например, быстрая доставка, красивая упаковка продукции, вежливые сотрудники.

Weaknesses (слабые стороны). Внутренняя характеристика компании. Слабые места компании. То, на что стоит обратить внимание и устранить или модифицировать. Моменты, которые могут привести к снижению объема продаж и потере конкурентоспособности. Например, плохая служба контроля качества, неверное территориальное распределение точек реализации товара, отсутствие клиентоориентированности.

Возможности и угрозы. Opportunities (возможности). Внешний фактор. Возможности – это события на рынке, в государстве, на которые компания не имеет прямого влияния, но они могут как-то положительно сказаться на ее развитии. Например, снижение таможенного сбора, развитие технологий (при условии, что компания открыта для технологического рывка), самоизоляция.

Threats (угрозы). Внешний фактор. Неблагоприятное развитие событий во вне, на которые компания повлиять не может, которые могут привести к проблемам для бизнеса. Например, повышение налогов, изменение в законе о логистике, карантин.

Диаграмма Парето — это инструмент, который позволяет определить проблемные зоны и распределить усилия по степени оптимальной очередности для их решения.

Диаграмма Парето бывает двух видов:

- по результатам деятельности — применяется для выявления главных проблем;
- по причинам — используется для выявления основных причин возникающих проблем.

1.6 Этапы построения диаграммы

1. Формулировка проблемы.
2. Создание перечня причин (факторов), которые создают наибольшие трудности и их ранжирование.
3. Подсчет суммы числа появлений каждой причины за установленный промежуток времени.
4. Формирование таблицы, где данные располагаются в порядке убывания значимости.
5. Перенос данных в систему координат. На оси абсцисс откладывают рассматриваемые факторы, а на оси ординат — величину вклада факторов в решение проблемы.
6. Создание диаграммы с соответствующими каждому отдельному фактору (причине возникновения проблемы) столбиками (уменьшение высоты столбиков происходит слева направо).
7. Анализ диаграммы.

Схема Исикавы («причинно-следственная диаграмма» или «рыбий скелет») — это схематичное изображение основных характеристик проблемы.

Построение начинается со сформулированной и кратко обозначенной проблемы. От нее выстраивается «хребет» диаграммы: горизонтальная линия с ответвлениями — группами факторов, влияющих на возникновение проблемы. В свою очередь для каждой группы факторов обычно указывается 2-3 приводящие к проблеме причины (то есть, факторы 2 уровня). Это повторяется до указания причин базового уровня. Но, как правило, 3-4 уровня достаточно. В итоге каждый параметр оценивается по двум критериям:

А. Локус контроля: 0 — таково устройство мира; 1 — устройство системы;

2 — ответственность решателя (лица принимающего решение).

В. Доля / степень влияния на проблему. Обычно диаграмма Исикавы составляется группой, часто с использованием метода мозгового штурма.

Мозговой штурм — это метод стимулирования творческой активности с помощью специальных правил обсуждения. Этот метод предполагает структуру участников, состоящую из ведущего, минимум 6-ти специалистов-генераторов и двух секретарей, задача которых делать тщательные записи по ходу процесса. Цель — найти как можно больше решений. Все идеи и способы решения задач независимо от их реалистичности формируются в список (чем больше количество идей, тем больше вероятность того, что среди них найдется необходимое решение).

Основное правило — отсутствие критики. Время фазы генерации идей около 10-20 минут. Анализ происходит на следующих этапах. Обычно в начале анализа происходит распределение идей по трем группам: невозможные; банальные; возможные и оригинальные.

Метод ассоциаций и аналогий подразумевает создание альтернатив решений через попытку изменить данные условия.

Для решения задачи формулируется ассоциация с этой задачей. Далее необходимо придумать новую ассоциацию, но уже не на саму задачу, а на первую ассоциацию. Таким образом придумывается ряд последовательных ассоциаций с последующим анализом полученных идей.

Может использоваться следующая схема: 1. Формулировка темы. 2. Выделение ключевого слова. 3. Пять ассоциативных слов с ключевым словом (КС); 4. Пять глаголов на каждое ассоциативное слово (всего 25 глаголов); 5. Пять прилагательных на каждое ассоциативное слово (всего 25 прилагательных); 6. 50 словосочетаний = КС + 25 глаголов + 25 прилагательных.

1.7 Ошибки при принятии решений

В основе большинства ошибок лежат неверно принятые решения. Как правило, выделяют две группы факторов, влияющих на принятие решения: *внутренние и внешние*.

Внутренние: это факторы, связанные с личностью лица, принимающего решение. Это особенности восприятия и переработки информации, особенности личности, ценности и мотивация.

Внешние: это факторы, связанные с условиями принятия решения (например, ограниченность времени) и влиянием других людей.

Для предотвращения ошибок в процессе принятия решения необходимо:

1 Корректное и тщательное целеполагание и выделение критериев принятия решения.

1 Тщательный сбор и анализ информации, условий принятия решения.

2 Соблюдение этапов принятия решения.

3 Выбор способов и методов принятия решения, адекватных поставленным срокам.

4 Использование специальных методов и стратегий принятия решений.

5 Контроль реализации принятого решения на всех этапах принятия решения.

6 Адекватное распределение функций, обязанностей и ответственности, при участии нескольких лиц в принятии решения.

7 Эргономичная организация рабочей среды.

Существует пять основных моделей принятия решения:

1. единолично — руководителем;
2. единолично с получением информации от других лиц;
3. простым большинством голосов;
4. путем достижения консенсуса — согласия каждого поддержать решение команды;

5. с помощью консультативного подхода — менеджер принимает основное решение с помощью членов группы.

Единоличный способ принятия решения. Как понятно из самого названия, решение принимает и объявляет один человек, обычно начальник, а все остальные члены группы должны подчиняться и выполнять приказ. У этой модели есть как достоинства, так и недостатки.

Достоинства модели. Быстрое принятие решений. Если вы готовы взять на себя полную ответственность и не сомневаетесь в своих способностях принимать решения — единоличный способ самый быстрый и удобный.

Недостатки модели. Отсутствие взаимопонимания. Если вы единолично принимаете решение, то существует риск, что другие его не поймут и поэтому не смогут выполнить настолько качественно, как при совместном [принятии управленческого решения](#).

Единоличное решение проблемы на основе консультаций. Этот подход напоминает предыдущий — решения принимает только один человек, но лишь после индивидуальной беседы с другими членами команды, в ходе которой он выслушивает их идеи и получает обратную связь на свои предложения. Вот его достоинства и недостатки.

Достоинства модели. Быстрота принятия решения. Как менеджер, вы можете проконсультироваться с нужным количеством сотрудников и, получив всю необходимую информацию, приступить к действиям.

Большая поддержка и понимание. Люди, с которыми вы консультировались, лучше понимают подоплеку ваших решений и оказывают вам большую поддержку, чем при единоличном принятии решений без консультаций.

Недостатки модели. Отсутствие настоящего обсуждения. Когда в обсуждении участвуете только вы и один-два члена команды, невозможно плодотворное групповое обсуждение, в ходе которого сравниваются разные точки зрения, вспыхивают искры творчества, появляются и оформляются новые эффективные идеи.

Принятие решения простым большинством голосов. Принимать решение простым большинством голосов несложно — если за предложенное решение отдали свой голос 50% группы плюс один человек, значит, вся группа приняла это решение. Например, пять человек из девяти выбирают вариант А, а остальные четыре — вариант В. Таким образом, вариант А становится решением группы. А теперь о достоинствах и недостатках этой модели.

Достоинства модели. Простота процедуры голосования. Все сотрудники знают, как голосовать — они не раз это делали.

Недостатки модели. Создает атмосферу победителей и побежденных. Очень часто люди, оказавшиеся в меньшинстве, чувствуют себя проигравшими. Даже если большинство не злорадствует, проигравшие часто становятся в оппозицию и не поддерживают решение, что порождает большие проблемы в рабочей группе.

Принятие решения с помощью консенсуса. Слово консенсус употребляют часто неправильно. *Консенсус не означает, что с условиями решения согласно большинству или подавляющее большинство.* Он также не означает согласия всех — единодушного согласия. Решение, принятое с помощью консенсуса, — это решение, которое поддерживает каждый. Поддержка здесь ключевое слово. Некоторые участники могут быть лично не согласны с решением группы, но все-таки готовы воплощать его в жизнь. Консенсус достигается коллективным участием. Ниже перечислены достоинства и недостатки этой модели.

Недостатки модели. Отнимает много времени. Решения, принимаемые с помощью консенсуса, часто требуют значительной активности и гибкости участников коллективного обсуждения. Результаты проявляются не сразу. Требуется высшего уровня мастерства общения.

Достоинства модели. Гарантия выполнения.

Консультативный способ принятия решений. При консультативном подходе окончательное решение принимает один человек, то есть менеджер,

но делает он это при помощи членов группы, которые оказывают ему информационную помощь.

Достоинства модели. Глубокое понимание решения. Поскольку все члены команды непосредственно помогают при разработке решения, они четко представляют, каким оно будет в окончательном виде, и могут дать ему логическое обоснование, понять его эволюцию в ходе обсуждения и оценить свой личный вклад. Такая глубина понимания практически гарантирует последующую поддержку решения.

Недостатки модели. Требуем от менеджера хорошо развитых навыков активного слушания. Если менеджер, принимающий решение, уже все для себя решил, ему не следует использовать консультативный подход только для того, чтобы получить «благословение» группы. Это не даст положительного результата. Люди видят эту тактику насквозь. Они почувствуют, что вы не хотите выслушивать различные точки зрения, и будут оскорблены вашей попыткой их обмануть. Лучше сэкономьте время и используйте единоличный подход принятия решений.

1.8 Квадрат Декарта

Квадрат Декарта является предельно простой техникой принятия решений, которая требует для своего использования очень небольшого количества времени. При помощи *Квадрата Декарта* легко установить наиболее значимые критерии выбора, а также оценить последствия любого варианта принимаемого решения (рис.1.2 и 1.3).

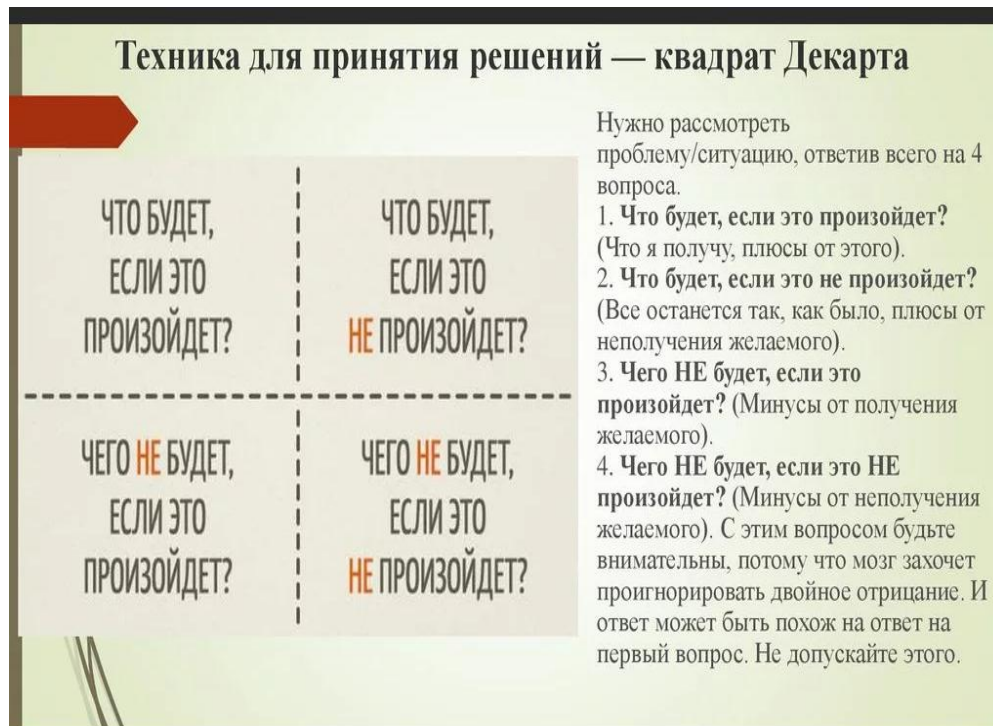


Рис.1.2. Иллюстрация принятия решений с помощью квадрата Декарта



Рис.1.3. Иллюстрация принятия решений с помощью квадрата Декарта

1.9 Классификация видов решений

Анализ литературы [1,2,3] позволяет использовать следующую классификацию решений (таблица 1.1).

Таблица 1.1- Классификация видов решений

Классификационный признак	Вид решения		
1. Степень структуризации исследуемой проблемы	Хорошо структурированное	Плохо структурированное	Не структурированное
2. По количеству этапов реализации решения	Статические (с одним этапом)		Динамические (много этапов)
3. По уровню информированности о состоянии проблемы	В условиях определенности	В условиях риска	В условиях неопределенности
4. По количеству лиц, участвующих в процессе принятия решений	Один участник		Много участников
5. По содержанию	Стратегические		Тактические

На современном этапе развития важнейшей задачей является совершенствование методики и методологии решения в условиях определенности, риска и неопределенности. Условия принятия решений:

1. Выбор решения в условиях определенности предполагает, что результат каждого действия известен.

2. Выбор решения в условиях риска означает, что каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов. При этом

каждый исход имеет известную вероятность появления. Считается, что лицу, принимающему решение (ЛПР) эти вероятности известны.

3. Выбор решения в условиях неопределенности происходит в том случае, когда-то или иное действие имеют своим следствием множество возможных частных исходов, но вероятности этих исходов неизвестны.

Для решения задач в условиях определенности наиболее успешно могут применяться математические модели. Для решения задач в условиях риска лучше использовать методы теории вероятностей и математической статистики. В условиях неопределенности использовать методы математического моделирования крайне затруднительно. Более целесообразным является применение теории игр и "байесовский подход".

Следующим направлением теории ПР является кибернетический подход. Широко применяется логико-математическая формализация и моделирование. Ст. Бир придает большое значение исследованию операций, Д. Форрестер считает, что математическое моделирование полезно, но оно должно быть дополнено суждениями, основанными на интуиции.

Под моделью будем понимать некоторое упрощение реальности. Моделирование помогает лучше понять и описать реальность. В соответствии с целью применения модели можно разделить на следующие виды:

- описательная модель. Она имеет своей целью отождествить структуру системы. Такие модели могут быть построены на трех уровнях детализации: макромодель, микроаналитическая модель, модель микроповедения. К моделям подобным относятся модель процесса Маркова, теория очередей; модель-прогноз, позволяющая предвидеть развитие действующей системы, в зависимости от различных гипотез относительно переменных величин.

- *нормативная или предписательная модель*, содержит рекомендации к действию.

Модель — это представление, как правило, в математических терминах наиболее характерных черт изучаемого объекта или системы. Одним из

самых распространенных инструментов для математического моделирования и исследования информационных процессов и систем являются сети Петри.

Цель представления системы в виде сети Петри и последующего анализа этой сети состоит в получении важной информации о структуре и динамическом поведении моделируемой системы. Эта информация может использоваться для оценки моделируемой системы и выработки предложений по ее усовершенствованию. Впервые сети Петри предложил немецкий математик Карл Адам Петри [1,5,7,8].

1.10 Системы поддержки принятия решений

Система поддержки принятия решений (СППР) ([англ. Decision Support System, DSS](#))—[компьютерная автоматизированная система](#), целью которой является помощь людям, принимающим решение в сложных условиях для полного и объективного анализа предметной деятельности. Это означает, что она выдаёт информацию (в печатной форме, или на экране монитора, или звуком), основываясь на входных данных, помогающую людям быстро и точно оценить ситуацию и принять решение. СППР возникли в результате слияния управленческих [информационных систем](#) и [систем управления базами данных](#).

Для анализа и выработок предложений в СППР используются разные методы. Это могут быть: [информационный поиск](#), [интеллектуальный анализ данных](#), [поиск знаний в базах данных](#), [рассуждение на основе прецедентов](#), [имитационное моделирование](#), [эволюционные вычисления](#) и [генетические алгоритмы](#), [нейронные сети](#), ситуационный анализ, [когнитивное моделирование](#) и других. Некоторые из этих методов были разработаны в рамках [искусственного интеллекта](#). Если в основе работы СППР лежат методы [искусственного интеллекта](#), то говорят об *интеллектуализированной СППР* или ИСППР. Близкие к СППР классы систем — это [экспертные системы](#) [6] и [автоматизированные системы управления](#).

Система поддержки принятия решений предназначена для поддержки многокритериальных решений в сложной информационной среде. При этом под многокритериальностью понимается тот факт, что результаты принимаемых решений оцениваются не по одному, а по совокупности многих показателей (критериев) рассматриваемых одновременно. Информационная сложность определяется необходимостью учета большого объема данных, обработка которых без помощи современной вычислительной техники практически невыполнима. В этих условиях число

возможных решений, как правило, весьма велико, и выбор наилучшего из них "на глаз", без всестороннего анализа может приводить к грубым ошибкам.

Система поддержки принятия решений СППР решает две основные задачи:

1. Выбор наилучшего решения из множества возможных (оптимизация).
2. Упорядочение возможных решений по предпочтительности (ранжирование).

Основная функциональность СППР следует из её определения. Главной функцией является вывод рекомендаций на основании изучения исторического и текущего состояния объекта исследования и сравнения их с информацией, хранящейся в базе знаний системы.

Необходимо всегда помнить, что знания в какой-либо проблемной области всегда являются динамичными. Что-то устаревает, какие-то гипотезы опровергаются, подтверждаются новые теории, исследователи находят новые закономерности и факты. Всё это должно постепенно вноситься в базу знаний СППР, чтобы она была актуальной. Без этого система заостенеет и перестанет отвечать вызовам изменяющейся среды. Ну как это обычно бывает. Другими словами, система должна предоставлять функцию по актуализации знаний.

В процессе актуализации знаний участвуют два человека с ролями «Эксперт» и «Инженер по знаниям» (когнитолог). Первый предоставляет знания зачастую в неструктурированном виде, а второй переносит их в базу знаний СППР в формализованном и полностью структурированном виде и в формате, который используется в самой системе. После этого эксперт верифицирует знания уже в базе знаний, тем самым своим авторитетом подтверждает то, что система может использоваться для поддержки принятия решений, и выдаваемые ею рекомендации основаны на правильных методах вывода и корректных знаниях.

Наконец, поскольку системой будут пользоваться специалисты разных уровней мастерства, то сама система должна иметь механизм объяснения тех рекомендаций, которые она выдаёт. Это очень важная функция в том числе и для процесса верификации знаний.

Перечень основных функций СППР выглядит следующим образом:

1. Извлечение знаний.

2. Верификация знаний.
3. Вывод рекомендаций.
4. Объяснение рекомендаций.

Всё это позволяет нарисовать самую обобщённую функциональную архитектуру СППР в следующем виде (рис.1.4):



Рис.1.4

Основные виды СППР.

Системы СППР интерактивны; пользователь может изменять предположения и включать новые данные.

Процесс принятия решений человеком, как блоком принятия решений в СППР, включает четыре стадии:

1. Распознавание или осмысление- состоит из идентификации и понимания проблем, встречающихся в организации: почему проблемы, возникают, где и с каким результатом. Традиционные управляющие информационные системы, которые поставляют широкое многообразие детальной

информации, могут помогать опознавать проблемы, особенно если системы сообщают об исключениях.

2. Проект или продумывание - в течение принятия решений лицо, принимающее решение, продумывает возможные варианты решения проблем. Малые системы СППР идеальны в этой стадии принятия решений, потому что они оперируют на простых моделях, могут быть быстро развиты и работать с ограниченными данными.

3. Выбор - заключается в подборе решений среди альтернатив. Здесь изготовитель решений мог бы нуждаться в большой системе СППР, чтобы использовать более обширные данные относительно ряда альтернатив и комплексные аналитические модели, чтобы объяснить все затраты, следствия и возможности.

4. Реализация - в течение выполнения решения менеджеры могут использовать систему сообщения, которая поставляет обычные доклады относительно прогресса определенного решения. Системы поддержки выполнения могут быть от полномасштабной управляющей информационной системы до меньших систем, таких, как программное обеспечение планирования проекта, использующего микрокомпьютеры.

СППР помогают находить ответы на следующие типичные вопросы:

$\frac{3}{4}$ Анализ примеров (case analysis) - оценка значений выходных величин для заданного набора значений входных переменных.

$\frac{3}{4}$ Параметрический анализ {«Что, если... ?») - оценка поведения выходных величин при изменении значений входных переменных.

$\frac{3}{4}$ Анализ чувствительности - исследование поведения результирующих переменных в зависимости от изменения значений одной или нескольких входных переменных.

$\frac{3}{4}$ Анализ возможностей - нахождение значений входной переменной, которые обеспечивают желаемый результат (известен также под названием «поиск целевых решений», «анализ значений целей», «управление по целям»).

$\frac{3}{4}$ Анализ влияния - выявление для выбранной результирующей переменной всех входных переменных, влияющих на ее значение, и оценка величины изменения результирующей переменной при заданном изменении входной переменной, скажем, на 1 %.

³/₄ Анализ данных - прямой ввод в модель ранее имевшихся данных и манипулирование ими при прогнозировании.

³/₄ Сравнение и агрегирование - сравнение результатов двух или более прогнозов, сделанных при различных входных предположениях, или сравнение предсказанных результатов с действительными, или объединение результатов, полученных при различных прогнозах или для разных моделей.

³/₄ Командные последовательности (sequences) - возможность записывать, исполнять, сохранять для последующего использования регулярно выполняемые серии команд и сообщений.

³/₄ Анализ риска - оценка изменения выходных переменных при случайных изменениях входных величин.

³/₄ Оптимизация - поиск значений управляемых входных переменных, обеспечивающих наилучшее значение одной или нескольких результирующих переменных.

По взаимодействию с пользователем выделяют три вида СППР:

- пассивные помогают в процессе принятия решений, но не могут выдвинуть конкретного предложения;
- активные непосредственно участвуют в разработке правильного решения;
- кооперативные предполагают взаимодействие СППР с пользователем.

Выдвинутое системой предложение пользователь может доработать, усовершенствовать, а затем отправить обратно в систему для проверки. После этого предложение вновь представляется пользователю, и так до тех пор, пока он не одобрит решение.

По способу поддержки различают:

- модельно-ориентированные СППР, используют в работе доступ к статистическим, финансовым или иным моделям;
- СППР, основанные на коммуникациях, поддерживают работу двух и более пользователей, занимающихся общей задачей;
- СППР, ориентированные на данные, имеют доступ к временным рядам организации. Они используют в работе не только внутренние, но и внешние данные;

- СППР, ориентированные на документы, манипулируют неструктурированной информацией, заключенной в различных электронных форматах;
- СППР, ориентированные на знания, предоставляют специализированные решения проблем, основанные на фактах.

По сфере использования выделяют общесистемные и настольные СППР. Общесистемные работают с большими хранилищами данных и применяются многими пользователями. Настольные являются небольшими системами и подходят для управления с персонального компьютера одного пользователя.

Контрольные вопросы

1. Понятие теории принятия решений.
2. На какие классы можно разделить все принимаемые решения?
3. Какую роль играет лицо, принимающее решение?
4. Классификация видов решений.
5. Принятие решений с помощью квадрата Декарта.
6. Принятие решения с помощью консенсуса.
7. Единоличный способ принятия решения.
8. Как на людей влияют различные факторы, управляющие процессом принятия решения?
9. Рациональные решения; решения, основанные на суждениях и интуитивные решения.
10. Правила принятия решений Рубинштейна.
11. Система поддержки принятия решений.

2 Теория принятия решений и системный анализ

2.1 Возникновение теории систем и системного анализа

В общественно-экономической и политической сферах наблюдается усиление взаимовлияния, взаимозависимости, взаимодействия всех составных частей современного общества: все более тесно переплетаются экономические, политические, социальные, духовные процессы, теснее взаимодействуют государство и общество, производство и наука, культура и бытовая сфера, что порождает трудности в познании, прогнозировании и управлении, требующими принятия решения, часто в условиях неопределенности. Сложные ситуации независимо возникли и в других сферах практической деятельности человека [2,3,4].

Необходимость решения вышеперечисленных проблем вызвала к жизни множество приемов, методов, подходов, которые постепенно накапливались, развивались, обобщались, образуя, в конце концов, определенную технологию преодоления качественных и количественных сложностей в инженерной деятельности: проектирование, инженерное творчество, системотехника;

в военных и экономических вопросах: исследование операций;

в административном и политическом управлении: системный подход, политология, футурология;

в прикладных научных исследованиях: имитационное моделирование, методология эксперимента и т. д.

В результате сопоставления объектов различной природы удалось выявить у них нечто общее, что получило название "система" Системность окружающего мира описывалась в различных науках и теориях на разных уровнях абстракции.

Системные представления не являются открытием XX в. Слово "система" появилось в Древней Греции 2000—2500 лет назад и означало

"сочетание", "организм", "устройство", "организация", "строй", "союз". Первоначально оно было связано с формами социально-исторического бытия, позднее принцип порядка был перенесен на Вселенную. В античной философии термин "система" характеризовал упорядоченность и целостность естественных объектов, а термин "синтагма" — упорядоченность и целостность искусственных объектов.

В первой половине XX в. наука вынуждена была переосмыслить многие фундаментальные понятия и выработать ряд новых, адекватных новым научным данным. Переход к изучению сложных систем практически во всех областях знаний потребовал переосмысления основ научной методологии

и самого понятия "наука". Изучение квантово-механических систем в физике, химических процессов и систем, появление теоретической биологии, формирование геохимии, а также биогеохимии и экологии, изучение высшей нервной деятельности, развитие социологии как реакции на усложняющийся социум, экономики, менеджмента привели к переосмыслению понятий "система", "организация", "порядок", "хаос", "изменчивость", "устойчивость", "причинность", "взаимодействие", "управление", "обратная связь", "часть", "целое", "компонент", "элемент", "иерархия" и т. д. На повестку дня был поставлен вопрос изучения систем любой природы.

В конце XIX — начале XX вв. возникают три варианта нового направления, которое предполагает обобщенное описание организации, поведения систем любой природы и управления ими.

Впервые термин *"теория систем"* использовал биолог-теоретик и философ Людвиг фон Бератланфи на философском семинаре в конце 40-х гг. XX века. Ему обязана своим существованием область знаний под названием "общая теория систем" [2,3,4].

В 1948 г. выходит знаменитая книга Н. Винера "Кибернетика", в которой провозглашается единство принципов управления в биологических и технических системах, а позднее — и в социальных [2,3,4] (в настоящее

время кибернетику чаще квалифицируют как часть теории систем). В дальнейшем вопрос о системности окружающего мира продолжали разрабатывать философы. Для решения практических задач было сформировано понятие *"исследование операций"*. В 50—60 гг. в исследованиях сложных проблем проектирования и управления довольно широкое распространение получил термин *"системотехника"*.

В начале 80-х гг. уже стало очевидным, что все теоретические и прикладные дисциплины образуют как бы единый поток, *"системное движение"*, методологической базой которого стал так называемый *"системный подход"*, широко использовавшийся в первые годы приложения теории систем к практическим задачам, но несколько скомпрометированный большим числом работ неконструктивного характера.

Но системный подход - это не более чем подход, должна была возникнуть некая прикладная наука, являющаяся *"мостом"* между абстрактными теориями и живой системной практикой. Сначала она возникла, как мы видели, в разных областях под разными названиями, но затем оформилась в науку, получившую название *"системный анализ"* — наиболее конструктивное из прикладных направлений системных исследований.

Термин *"системный анализ"* впервые появился в работах корпорации RAND в 1948 г. Как направление кибернетики он стал рассматриваться в начале 50-х гг. при исследовании сложных систем в биологии, макроэкономике и создании автоматизированных экономико-организационных систем управления [2,3,4].

Современный системный анализ является прикладной наукой, нацеленной на выявление причин реальных сложностей, возникших перед "обладателем проблемы" (организация, учреждение, предприятие, коллектив), и на выработку вариантов их устранения.

Цель системного анализа состоит не только в понимании функционирования системы — задачами более высокого уровня выступают проектирование, создание нужной системы и управление ею [2,3,4].

Термины *теория организации* и *системный анализ* или, более кратко — *системный подход*, несмотря на период более 25 лет их использования, все еще не нашли общепринятого, стандартного истолкования.

Причина этого факта заключается, скорее всего, в динамичности процессов в области человеческой деятельности и, кроме того, в принципиальной возможности использовать системный подход практически в любой решаемой человеком задаче.

2.2 Понятие системного подхода

Системный подход — это методология научного познания и практической деятельности, а также объяснительный принцип, в основе которых лежит рассмотрение объекта как системы [2,3,4].

Системный подход заключается в отказе от односторонне аналитических, линейно-причинных методов исследования. Основной акцент при его применении делается на анализ целостных свойств объекта, выявление его различных связей и структуры [2,3,4]. Системный подход представляется наиболее универсальным методом анализа и исследования любых сложных технических, экономических, социальных, экологических, политических, биологических и других систем.

Области применения системного подхода и системного анализа обширны от техники до экономики, от математики до социального планирования, от космических исследований до процессов обучения (в книге [2,3,4] убедительно описывается, чем помогает системный анализ каждому человеку, как в профессиональной деятельности, так и в обычной жизни).

Системный анализ-это наука, занимающаяся проблемой принятия решений в условиях анализа большого количества информации различной природы. В узком смысле системный анализ представляет собой методологию принятия решений, а в широком смысле—синтез методологии общей теории систем, системного подхода и системных методов обоснования и принятия решений.

Системный анализ позволяет разделить сложную задачу на совокупность простых задач, расчленить сложную систему на элементы с учетом их взаимосвязи.

Суть системного анализа заключается в следующем:

1. Системный анализ связан с принятием оптимального решения из многих возможных альтернатив.
2. Каждая альтернатива оценивается с позиции длительной перспективы.
3. Системный анализ рассматривается как методология углубленного понимания и упорядочения (структуризации) проблемы.
4. Системный анализ применяется в первую очередь для решения стратегических проблем.

Системный анализ применяется для решения крупных проблем, связанных с деятельностью многих людей, с большими материальными затратами [6].

Человеческую деятельность можно условно разделить на две области:

- область рутинной деятельности, т.е. регулярных, повседневно решаемых задач;
- область решения новых, впервые возникших задач.

В первой из них способы решения задач обычно хорошо отработаны и почвы для системного анализа не представляют, хотя само наличие рутины в

некоторых случаях составляют проблему (например, тенденция к постоянному увеличению работников аппарата управления).

Во второй области (науке, перспективном планировании) методы системного анализа применимы почти повсеместно.

Потребность в системном анализе возникает, например, в следующих ситуациях:

1. При решении новых проблем, когда с помощью системного анализа формулируется проблема, определяется, что и о чем нужно знать, кто должен знать и понимать.

2. Если решение проблемы предусматривает увязку целей со множеством средств их достижения.

3. Если проблема имеет разветвленные связи, вызывающие отдаленные последствия в разных отраслях народного хозяйства, и принятие решения по ним требует учета полной эффективности и полных затрат.

4. Во всех случаях, когда в народном хозяйстве создаются совершенно новые уникальные системы, совершенствуется производство или методы и формы экономического управления.

5. Во всех проблемах, связанных с автоматизацией производства, а особенно управления, в процессе создания автоматизированных систем управления.

6. Если принимаемые на будущее решения должны учитывать факторы неопределенности и риска.

7. Во всех случаях, когда планирование или выработка ответственных решений о направлениях развития принимается на достаточно отдаленную перспективу.

8. Везде, где требуется выработка критериев оптимальности с учетом целей развития и функционирования системы и т. п.

Области применения системного анализа. Системный анализ применяется для решения крупных проблем, связанных с деятельностью многих людей, с большими материальными затратами [[2,3,4].

Человеческую деятельность можно условно разделить на две области:

- область рутинной деятельности, т.е. регулярных, повседневно решаемых задач;
- область решения новых, впервые возникших задач.

В первой из них способы решения задач обычно хорошо отработаны и почвы для системного анализа не представляют, хотя само наличие рутины в некоторых случаях составляют проблему (например, тенденция к постоянному увеличению работников аппарата управления).

Во второй области (науке, перспективном планировании) методы системного анализа применимы почти повсеместно.

Потребность в системном анализе возникает, например, в следующих ситуациях:

1. При решении новых проблем, когда с помощью системного анализа формулируется проблема, определяется, что и о чем нужно знать, кто должен знать и понимать.
2. Если решение проблемы предусматривает увязку целей со множеством средств их достижения.
3. Если проблема имеет разветвленные связи, вызывающие отдаленные последствия в разных отраслях народного хозяйства, и принятие решения по ним требует учета полной эффективности и полных затрат.
4. Во всех случаях, когда в народном хозяйстве создаются совершенно новые уникальные системы, совершенствуется производство или методы и формы экономического управления.
5. Во всех проблемах, связанных с автоматизацией производства, а особенно управления, в процессе создания автоматизированных систем управления.
6. Если принимаемые на будущее решения должны учитывать факторы неопределенности и риска.

7. Во всех случаях, когда планирование или выработка ответственных решений о направлениях развития принимается на достаточно отдаленную перспективу.

8. Везде, где требуется выработка критериев оптимальности с учетом целей развития и функционирования системы и т. п.

2.3 Определение системы

Главной категорией системных исследований в целом и системного анализа в частности является понятие системы.

Существует множество определений понятия «система». Под *системой*, например, понимается как составленное из частей; соединение – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство;

- комплекс элементов, находящихся во взаимодействии и единстве (Людвиг фон Берталанфи);

- множество элементов с отношениями между ними и между их атрибутами (А. Холл, Р. Фейджин);

- совокупность элементов, организованных таким образом, что изменение, исключение или введение нового элемента закономерно отражаются на остальных элементах (В.Н. Топоров);

- взаимосвязь самых различных элементов; все, состоящее из связанных друг с другом частей (С. Бир);

- отображение входов и состояний объекта в выходах объекта (М. Месарович).

Будем придерживаться следующих определений системы [2,3,4]:

- *система есть средство достижения цели;*

- *система есть совокупность взаимосвязанных элементов, обособленная от среды и взаимодействующая с ней как целое.*

Процессы, происходящие в сложных системах, как правило, сразу не удаётся представить в виде математических соотношений или хотя бы алгоритмов. Поэтому для того чтобы хоть как-то охарактеризовать стабильную ситуацию или её изменения, используются специальные термины, заимствованные теорией систем из теории автоматического регулирования, биологии, философии. Рассмотрим основные из этих терминов.

Состояние. Понятием состояние обычно характеризуют мгновенную фотографию, «срез» системы, остановку в её развитии. Его определяют либо через входные воздействия и выходные сигналы (результаты), либо через макропараметры, макросвойства системы (давление, скорость, ускорение). Так, говорят о состоянии покоя (стабильные входные воздействия и выходные сигналы), о состоянии равномерного прямолинейного движения (стабильная скорость) и т.д.

Состояние системы – совокупность состояний её p элементов и связей между ними (двусторонних связей не может быть более чем $p(p - 1)$ в системе с p элементами). Если связи в системе неизменны, то её состояние можно представить в виде $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k, \dots, Z_m)$. Задание конкретной системы сводится к заданию её состояний, начиная с зарождения и кончая гибелью или переходом в другую систему. Реальная система не может находиться в любом состоянии. Всегда есть известные ограничения – некоторые внутренние и внешние факторы (например, человек не может жить 1000 лет). Возможные состояния реальной системы образуют в пространстве состояний системы некоторую подобласть $Z_{сд}$ (подпространство) – множество допустимых состояний системы.

Поведение. Если система способна переходить из одного состояния в другое (например, $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow \dots$), то говорят, что она обладает поведением. Этим понятием пользуются, когда неизвестны закономерности (правила) перехода из одного состояния в другое. Тогда говорят, что система обладает каким-то поведением и выясняют его характер, алгоритм. С учётом

введённых обозначений поведение можно представить как функцию $s(t) = [s(t - 1), y(t), x(t)]$. Равновесие.

Понятие равновесие определяют, как способность системы в отсутствии внешних возмущающих воздействий (или при постоянных воздействиях) сохранять своё состояние сколь угодно долго. Это состояние называют состоянием равновесия.

Устойчивость. Под устойчивостью понимают способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была из этого состояния выведена под влиянием внешних (а в системах с активными элементами – внутренних) возмущающих воздействий. Эта способность обычно присуща системам при постоянном u только тогда, когда отклонения не превышают некоторого предела. Состояние равновесия, в которое система способна возвращаться, называют устойчивым состоянием равновесия. Возврат в это состояние может сопровождаться колебательным процессом. Соответственно в сложных системах возможны неустойчивые состояния равновесия.

Развитие. Это понятие помогает объяснить сложные термодинамические и информационные процессы в природе и обществе. Исследование процесса развития, соотношения развития и устойчивости, изучение механизмов, лежащих в их основе, – наиболее сложные задачи теории систем. Ниже будет показано, что целесообразно выделять особый класс развивающихся (самоорганизующихся) систем, обладающих особыми свойствами и требующих использования специальных подходов к их моделированию.

Входы системы x_i – это различные точки приложения влияния (воздействия) внешней среды на систему (рис. 1.3). Входами системы могут быть информация, вещество, энергия и т.д., которые подлежат преобразованию. Обобщённым входом (X) называют некоторое (любое) состояние всех r входов системы, которое можно представить в виде вектора $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_r)$.

Выходы системы y_i – это различные точки приложения влияния (воздействия) системы на внешнюю среду. Выход системы представляет собой результат преобразования информации, вещества и энергии. *Обратная связь* – то, что соединяет выход со входом системы и используется для контроля за изменением выхода.

Ограничения системы – то, что определяет условия её функционирования (реализацию процесса). Ограничения бывают внутренними и внешними. Одним из внешних ограничений является цель функционирования системы. Примером внутренних ограничений могут быть ресурсы, обеспечивающие реализацию того или иного процесса.

Движение системы – это процесс последовательного изменения её состояния. Вынужденное движение системы – изменение её состояния под влиянием внешней среды. Примером вынужденного движения может служить перемещение ресурсов по приказу (поступившему в систему извне). Собственное движение – изменение состояния системы без воздействия внешней среды (только под действием внутренних причин). Собственным движением системы «человек» будет его жизнь как биологического (а не общественного) индивида, т.е. питание, сон, размножение.

Процессы системы – это совокупность последовательных изменений состояния системы для достижения цели. К процессам системы относятся: – входной процесс; – выходной процесс; – переходный процесс системы. *Входной процесс* – множество входных воздействий, которые изменяются с течением времени. Входной процесс можно задать, если каждому моменту времени t поставить в соответствие по определённому правилу ω входные воздействия $x \in X$. Моменты времени t определены на множестве T , $t \in T$. В результате этот входной процесс будет представлять собой функцию времени $X[t] = \omega(x)$.

Выходной процесс – множество выходных воздействий на окружающую среду, которые изменяются с течением времени. Воздействие системы на окружающую среду определяется выходными величинами

(реакциями). Выходные величины изменяются с течением времени, образуя выходной процесс, представляющий функцию $Y[X] = \gamma(X)$.

Переходный процесс системы (процесс системы) – множество преобразований начального состояния и входных воздействий в выходные величины, которые изменяются с течением времени по определённым правилам.

2.4 Этапы системного анализа

Системный анализ – с практической стороны есть система методов исследования или проектирования сложных систем. С методической стороны системный анализ отличается междисциплинарным характером и вовлечением в работу как формальных, эвристических, экспертных методов, так и эмпирических, экспериментальных методов и строгих математических методов [2,3,4].

Системный подход рассматривается в настоящее время либо как одна из ранних форм системного анализа, либо как начальная фаза современного системного анализа, этап первоначального, качественного анализа проблемы и постановки задач [2,3,4]. Системный подход требует рассматривать проблему не изолированно, а в единстве связей с окружающей средой, постигать сущность каждой связи и отдельного элемента, проводить ассоциации между общими и частными целями.

Системный подход — это подход к исследованию объекта (проблемы, явления, процесса) как к системе, в которой выделены элементы, внутренние и внешние связи, наиболее существенным образом влияющие на исследуемые результаты его функционирования, а цели каждого из элементов, исходя из общего предназначения объекта.

Можно также сказать, что системный подход — это такое направление методологии научного познания и практической деятельности, в основе

которого лежит исследование любого объекта как сложной целостной социально-экономической системы.

В соответствие с направлениями подготовки студентов предметом системного анализа являются вопросы сбора, хранения и обработки информации об экономических объектах, информационных системах и, возможно, технологических процессах.

Системный анализ возник на требования практики по проектированию сложных систем в условиях ограниченности ресурсов и дефицита времени. Системный анализ представляет собой прикладную диалектику и в современном понимании реализует диалектический метод при рассмотрении прикладных задач.

Этапами системного анализа, приведенными в [2,3,4], являются:

- 1 определение конфигуратора;
- 2 определение проблемы;
- 3 выявление целей;
- 4 формирование критериев;
- 5 генерирование альтернатив;
- 6 построение и использование моделей;
- 7 оптимизация;
- 8 выбор оптимальной альтернативы;
- 9 декомпозиция;
- 10 агрегатирование.

2.4.1 Понятие конфигуратора

Всякое сложное явление требует разностороннего, многопланового описания, рассмотрения с различных точек зрения. Только совместное описание с разных точек зрения позволяет охарактеризовать явление с достаточной полнотой. Например, автомобильная катастрофа должна рассматриваться не только как физическое явление, вызванное

механическими причинами (техническим состоянием автомобиля и дорожного покрытия, силами инерции и т.п.), но и как явление медицинского, социального, экономического, юридического покрытия [2,3,4]. В реальной жизни не бывает проблем чисто физических, химических, экономических, общественных. Многоплановость реальной жизни имеет важные последствия для системного анализа: существует риск неполноты описания явления.

Приведенные соображения приводят к понятию агрегата, состоящего из качественно различных языков описания системы и обладающего тем свойством, что число этих языков минимально, но необходимо для заданной цели. Например, конфигуратором для задания любой точки n -мерного пространства является совокупность ее координат. Конфигуратором для описания прибора является: структурная, функциональная, принципиальная и монтажная схемы электрические. Главное в конфигураторе не то, что анализ системы должен производиться на каждом языке конфигуратора отдельно, а то, что синтез, проектирование, производство и эксплуатация прибора возможны только при наличии всех описаний.

2.4.2 Определение проблемы

Проблема (от греческого – задача), в широком смысле – сложный теоретический или практический вопрос, требующий изучения и разрешения. Примеры проблем: «как улучшить работу медицинских учреждений?», «как повысить активность и самостоятельность студентов при изучении дисциплин?». Любую исходную формулировку проблемы можно считать лишь «нулевым приближением», так как она не является изолированной и монолитной. Проблема, в свою очередь, состоит из частей, подсистем.

Таким образом, к любой реальной проблеме необходимо относиться как к «клубку» взаимосвязанных проблем. Для обозначения этой совокупности применяется термин *проблематика*.

2.4.3 Выявление целей

Как хорошо формализованные, так и слабо структурированные проблемы должны быть приведены к виду, когда они становятся задачами выбора подходящих средств для достижения заданных целей. Цель – это мысленно предвосхищаемый результат деятельности. Цель направляет и регулирует действия человека. В философии Аристотеля - это «то ради чего» совершается нечто. Действительные цели, как правило, шире, чем объявленные. Например, в одном исследовании проблемы», где лучше разместить новую больницу» выяснилось, что действительная цель – улучшение медицинского обслуживания населения, и среди предложенных альтернатив нашлись более эффективные способы использования ресурсов, нежели строительство новой больницы. Это служит примером того, как средства могут приниматься за цели [1].

2.4.4 Формирование критериев

Термин «критерий» рассматривается как способ сравнения альтернатив. Критерии можно рассматривать как количественные модели качественных целей.

В современной науке о принятии решений считается, что варианты решений характеризуются различными показателями их привлекательности для лица, принимающего решение (ЛПР). Эти показатели называют признаками, факторами, атрибутами или критериями. Мы принимаем для последующего изложения термин «критерий».

Будем называть критериями оценки альтернатив показатели их привлекательности (или непривлекательности) для участников процесса выбора.

2.4.5 Генерирование альтернатив

Варианты действий принято называть альтернативами. *Альтернативы* - неотъемлемая часть проблемы принятия решений: если не из чего выбирать, то, нет и выбора. Следовательно, для постановки задачи принятия решений необходимо иметь хотя бы две альтернативы.

Альтернативы бывают независимыми и зависимыми. Независимыми являются те альтернативы, любые действия с которыми (удаление из рассмотрения, выделение в качестве единственно лучшей) не влияют на качество других альтернатив. При зависимых альтернативах оценки одних из них оказывают влияние на качество других. Имеются различные типы зависимости альтернатив. Наиболее простым и очевидным является непосредственная групповая зависимость: если решено рассматривать хотя бы одну альтернативу из группы, то надо рассматривать и всю группу. Так, при планировании развития города решение о сохранении исторического центра влечет за собой рассмотрение всех вариантов его реализации.

Генерирование альтернатив, т.е. идей о возможных способах достижения цели, является творческим процессом. В литературе [2,3,4] описываются способы генерации идей и создания условий решения творческих задач коллективом специалистов в данной предметной области.

2.4.6 Построение и использование моделей

Одной из проблем, с которой сталкиваются почти всегда при проведении системного анализа, является *проблема эксперимента* в системе или над системой. Очень редко это разрешено моральными законами или законами безопасности, но сплошь и рядом связано с материальными затратами и (или) значительными потерями информации.

Опыт всей человеческой деятельности учит — в таких ситуациях надо экспериментировать не над объектом, интересующим нас предметом или системой, а над их *моделями*. Под этим термином надо понимать не обязательно модель *физическую*, т. е. копию объекта в уменьшенном или увеличенном виде. Физическое моделирование очень редко применимо в системах, хоть как-то связанных с людьми. В частности, в социальных системах (в том числе — экономических) приходится прибегать к *математическому моделированию*.

Модель (от латинского «образец») представляет собой отображение: целевое, абстрактное, реальное, статическое или динамическое, упрощенное, приближенное; имеющее наряду с безусловно – истинным условно- истинное и ложное содержание; реализующееся и развивающееся в процессе его практического использования. Различные виды моделей рассмотрены в литературе [2,3,4].

2.4.7 Оптимизация и выбор

Выбор является действием, придающим всей деятельности целенаправленность. Именно выбор реализует подчиненность всей деятельности определенной цели или совокупности целей. Задачи выбора многообразны, различны и методы их решения. Принятие решения понимается как действие над множеством альтернатив, в результате которого получается подмножество выбранных альтернатив.

За признанием важности поиска информации и выделения альтернатив следует понимание того, что эти этапы в высшей степени неформализованы. Способы прохождения этапов зависят не только от содержания задачи принятия решений, но и от опыта, привычек, личного стиля ЛПР и его окружения. Хотя эти же факторы присутствуют при сравнении альтернатив, здесь их роль заметно меньше. Научный анализ проблем принятия решений

начинается с момента, когда хотя бы часть альтернатив и(или) критериев известна.

В современной науке о принятии решений центральное место занимают многокритериальные задачи выбора. Считается, что учет многих критериев приближает постановку задачи к реальной жизни. Традиционно принято различать три основные задачи принятия решений.

Упорядочение альтернатив. Для ряда задач представляется вполне обоснованным требование определить порядок на множестве альтернатив. Так, члены семьи упорядочивают по степени необходимости будущие покупки, руководители фирм упорядочивают по прибыльности объекты капиталовложений и т.д. В общем случае требование упорядочения альтернатив означает определение относительной ценности каждой из альтернатив.

Распределение альтернатив по классам решений. Такие задачи часто встречаются в повседневной жизни. Так, при покупке квартиры или дома, при обмене квартиры люди обычно делят альтернативы на две группы: заслуживающие и не заслуживающие более подробного изучения, требующего затрат сил и средств. Группы товаров различаются по качеству. Абитуриент делит на группы вузы, в которые он стремится поступить. Точно так же люди часто выделяют для себя группы книг (по привлекательности для чтения), туристские маршруты и т.д.

Выделение лучшей альтернативы. Эта задача традиционно считалась одной из основных в принятии решений. Она часто встречается на практике. Выбор одного предмета при покупке, выбор места работы, выбор проекта сложного технического устройства — эти примеры хорошо знакомы. Кроме того, такие задачи распространены в мире политических решений, где альтернатив сравнительно немного, но они достаточно сложны для изучения и сравнения. Например, необходим лучший вариант организации обмена денег, лучший вариант проведения земельной реформы и т.д. Заметим, что

особенностью многих задач принятия политических решений является конструирование новых альтернатив в процессе решения проблем.

При широком применении методов исследования операций аналитики стали сталкиваться с задачами, где имеется не один, а несколько критериев оценки качества решения.

2.4.9 Декомпозиция

Еще в XVII веке Р.Декарт писал: «Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей (...), сколько потребуется, чтобы их было легко решить». Успех и значение аналитического метода состоит не только и не столько в том, что сложное целое расчленяется в конечном счете на простые части, а в том, что, будучи соединены надлежащим образом, эти части снова образуют единое целое. Этот момент агрегирования частей в целое является конечным этапом анализа, поскольку лишь только после этого мы сможем объяснить целое через его части — в виде структуры целого [2,3,4].

Аналитический метод приводит к достижению наивысших результатов, если целое удастся расчленить на независимые друг от друга части, поскольку в этом случае их отдельное рассмотрение позволяет составить правильное представление об их вкладе в общий эффект. Однако случаи, когда система является «суммой» своих частей, не правило, а редчайшее исключение. Правилom же является то, что вклад данной части в общесистемный эффект зависит от вкладов других частей. Если заставить каждую часть функционировать наилучшим образом, то в целом эффект не будет наивысшим. Например, отобрав лучшие в мире двигатель, фары, колеса, карбюратор и т.д. мы не получим самого лучшего автомобиля. При анализе «неаддитивных» систем следует делать акцент на рассмотрение не отдельных частей, а на их взаимодействия. Это существенно более трудная задача.

Основной операцией анализа является разделение целого на части. Задача распадается на подзадачи, система — на подсистемы, цели — на подцели и т.д.

При необходимости этот процесс повторяется, что приводит к иерархическим древовидным структурам. Обычно (если задача не носит чисто учебного характера) объект анализа сложен, слабо структурирован, плохо формализован, поэтому операцию декомпозиции выполняет эксперт. Если поручить анализ одного и того же объекта разным экспертам, то полученные древовидные списки будут различаться. Качество построенных экспертами деревьев зависит как от их компетентности, так и от применяемой методики декомпозиции.

2.4.10 Агрегатирование

Агрегатирование (от лат. aggrego - присоединяю) - принцип создания машин, приборов, оборудования из унифицированных стандартных агрегатов (автономных сборочных единиц), устанавливаемых в изделия в различном числе и комбинациях. Агрегаты должны обладать полной взаимозаменяемостью по всем эксплуатационным показателям и присоединительным размерам.

Конструкции большинства изделий (машин, приборов и оборудования) могут быть расчленены на ряд автономных агрегатов (узлов). Расчленение машин производится на основе структурного анализа их составных частей, позволяющего выделить автономные функциональные узлы (агрегаты) с учётом применения их в ряде других машин. Затем эти агрегаты унифицируются, стандартизуются и могут составлять конструктивно-унифицированные (типоразмерные) ряды. Изготавливаются они независимо друг от друга и обладают полной взаимозаменяемостью по всем эксплуатационным показателям и присоединительным размерам. Унифицированные агрегаты должны иметь оптимальную конструкцию высокого качества и состоять, по возможности, из наименьшего числа наименований деталей. Сборка этих агрегатов должна быть простой и надежной. После сборки машины, оборудования или приборы должны обладать требуемой точностью, прочностью, жесткостью, виброустойчивостью, надежностью, долговечностью и иметь другие оптимальные показатели качества, определяемые их эксплуатационным назначением.

Агрегатирование - это метод создания и эксплуатации машин, приборов и оборудования из отдельных стандартных, унифицированных узлов, многократно используемых при создании различных изделий на основе геометрической и функциональной взаимозаменяемости. Агрегатирование позволяет не создавать каждую машину как оригинальную, единственную в своем роде, а в большинстве случаев перекомпоновывать имеющиеся машины, используя уже спроектированные и освоенные производством узлы и агрегаты.

2.5 Основные закономерности систем

В понятийном аппарате теории систем находят воплощение выработанные практикой и обобщенные наукой общие правила мышления и человеческой деятельности, которые составляют закономерности систем [2,3,4].

Закономерности систем — это общесистемные закономерности, которые характеризуют принципиальные особенности построения, функционирования и развития сложных систем.

В более полной формулировке закономерности систем называют закономерностями функционирования и развития систем.

Л. Фон Берталанфи называл сначала такие закономерности системами параметра или принципами.

Закономерность — это наблюдаемая зависимость между событиями или явлениями.

Закономерность отличается от [закона](#) тем, что Закон или является аксиомой, или имеет доказательство. Закономерность же является наблюдаемым явлением и может не иметь объяснения.

Закон выполняется (при наличии необходимых условий) всегда. Закономерность может быть неточной и выполняться не всегда, а лишь "почти всегда" или "по большей части". Примером закономерностей могут служить [народные приметы](#): "Птицы низко летают — к дождю".

Одну из первых классификаций закономерностей систем предложил наш исследователь В.Г. Афанасьев. Но в настоящее время предложено разделить закономерности систем на четыре группы:

1. Закономерности взаимодействия части и целого.
2. Закономерности иерархической упорядоченности.
3. Закономерности осуществимости систем.
4. Закономерности развития систем.

Закономерности взаимодействия части и целого: целостность или эмерджентность, аддитивность, прогрессирующая систематизация, прогрессирующая факторизация, интегративность.

Закономерности иерархической упорядоченности: коммуникативность, иерархичность.

Закономерности осуществимости систем: закон необходимого разнообразия У.Р. Эшби; эквифинальность, закон потенциальной эффективности Б.С. Флейшмана.

Закономерности развития систем: историчность и самоорганизация.

Закономерности взаимодействия части и целого. Основные из этих закономерностей:

1. эмерджентность (появление в системе новых интегративных качеств, не свойственных ее компонентам)
2. целостность (возникает благодаря связям в системе, которые осуществляют перенос свойств каждого элемента ко всем остальным элементам);
3. аддитивность (проявляется у системы, как бы распавшейся на независимые элементы)
4. интегративность (более глубокие причины, которые обуславливают возникновение этого свойства)
5. синергетизм (проявляется в виде мультипликативного эффекта, когда отдельные эффекты не суммируются, а перемножаются).

Прогрессирующая факторизация (изоляция) – это есть процесс, при котором в системе происходят изменения в направлении уменьшения целостности, то есть это стремление системы к состоянию со все более независимыми элементами. Все реальные системы изменяются во времени, а эти изменения приводят к постепенному переходу от целостности к суммативности.

То есть это соответствует распаду системы на независимые части, после чего система уже не выполняет свои функции (состарившаяся, распавшаяся, вышедшая из строя система, которая в этом случае представляет простосовокупность частей) – это один тип изоляции. Другой тип изоляции соответствует росту системы. Она изменяется в направлении возрастающего деления на подсистемы, подподсистемы и так далее или в направлении возрастающей дифференциации функций. Такие процессы возникают в системах, включающих в себя творческий рост или процессы эволюции и развития.

Прогрессирующая систематизация – это процесс, при котором изменение происходит в направлении увеличения целостности, то есть это стремление системы к уменьшению самостоятельности элементов. Этот процесс может состоять в усилении ранее существовавших отношений между частями системы, в появлении и развитии отношений между элементами или подсистемами, ранее не связанными между собой и т.п.

Прогрессирующая изоляция и систематизация могут проходить в системе одновременно, протекать сравнительно долго и при этом система может находиться в определенном, говорят, сравнительном, состоянии. Эти процессы могут в системе протекать последовательно. Это имело место в истории Америки, когда сначала группы людей из разных стран колонизировали разные ее области, становились все более независимыми, но затем стал усиливаться обмен между этими группами, они образовывали общее правительство, страна становилась все более целостной.

Закономерности иерархической упорядоченности. Это коммуникативность и иерархичность. Закономерность коммуникативности проявляется в том, что система не изолирована от других систем, а связана множеством коммуникаций со средой, представляющей собой сложное и неоднородное образование, содержащее подсистему (одного уровня с рассматриваемой), задающую требования и ограничения исследуемой системе.

Таким образом, коммуникативность характеризует взаимосвязанность системы со средой.

Закономерность иерархичности проявляется в том, что любую систему можно представить в виде иерархического образования.

При этом, на всех уровнях иерархии действует закономерность целостности. Иерархичность заключается в том, что более высокий иерархический уровень оказывает направляющее воздействие на нижележащий уровень, подчиненный ему.

Это воздействие проявляется в приобретении подчиненными членами иерархии новых свойств, отсутствовавших у них в изолированном состоянии. В результате формируется новая целостность, то есть возникшее новое целое приобретает способность осуществлять новые функции, в чем и состоит цель образования иерархии.

Закономерности осуществимости систем, к которым относятся: эквифинальность, закон необходимого разнообразия Эшби, закономерность потенциальной эффективности.

эквифинальность (потенциальная эффективность) характеризует предельные возможности систем. Применительно к открытой системе – это ее способность (в отличие от состояний равновесия в закрытых системах, полностью детерминированных начальными условиями) достигать не зависящего от времени состояния, которое не зависит от ее исходных условий и определяется исключительно параметрами системы.

Закономерность потенциальной эффективности. Развивая идею В.А. Котельникова о потенциальной помехоустойчивости систем, Б.С. Флейшман

связал сложность структуры системы со сложностью ее поведения; предложил количественные выражения предельных законов надежности, помехоустойчивости, управляемости и других качеств систем;

Простой пример потенциальной эффективности технической системы управления кораблем: руль может давать определенную, обусловленную его конструкцией силу, отклоняющую движение всего корабля, гребной винт может давать определенную направляющую силу).

Закон необходимого разнообразия Эшби. Создавая систему, способную справиться с решением проблемы, обладающей определенным известным разнообразием, нужно обеспечить, чтобы система имела еще большее разнообразие, чем разнообразие решаемой проблемы, или была бы способна создать в себе это разнообразие.

Применительно к системам управления закон необходимого разнообразия может быть сформулирован так: разнообразие управляющей системы должно быть больше (или, по крайней мере, равно) разнообразия управляемого процесса или объекта.

Закономерности развития включают историчность, рост и развитие, закономерность самоорганизации.

Историчность. Любая система не может быть неизменной, она не только функционирует, но и развивается. Можно привести примеры становления, расцвета, упадка (старения) биологических, социальных и технических систем. Таким образом, время является неременной характеристикой системы, и каждая система исторична.

Историчность означает, что любая система не может быть неизменной, она не только возникает, функционирует, развивается, но и погибает [2,3,4].

При этом закономерность историчности можно учитывать, не только пассивно фиксируя старение, но и использовать для предупреждения смерти системы, разрабатывая механизмы реконструкции, реорганизации системы, для сохранения ее в новом качестве.

Любая система со временем претерпевает количественные и качественные изменения. Рост – это увеличение в числе и размерах.

Развитие – это изменения процессов в системе во времени, выраженные в количественных и качественных и структурных преобразованиях от низшего к высшему. Пример. Груда мусора может расти без развития, а человек развивается после того, как его рост прекратился.

Закономерность самоорганизации. Во всех явлениях, в том числе и в развивающихся системах имеет место дуализм. С одной стороны, справедлив второй закон термодинамики, то есть стремление к возрастанию энтропии, к распаду, дифференциации, а с другой стороны, наблюдаются негэнтропийные тенденции, лежащие в основе эволюции, развития. При моделировании негэнтропийных тенденций введен термин повышения организованности, порядка, а закономерность негэнтропийных тенденций названа закономерностью самоорганизации.

Закономерность самоорганизации проявляется в способности систем с активными элементами противостоять энтропийным тенденциям, адаптироваться к изменяющимся условиям, преобразуя при необходимости свою структуру.

В любой реальной развивающейся системе сочетаются две противоречивые тенденции: с одной стороны, для всех явлений, в том числе и для развивающихся, открытых систем, справедлив второй закон термодинамики, т.е. стремление к возрастанию энтропии; а с другой стороны, наблюдаются негэнтропийные тенденции. В сложных развивающихся системах закономерность самоорганизации проявляется в том, что в зависимости от преобладания энтропийных или негэнтропийных тенденций система любого уровня может либо развиваться в направлении более высокого уровня эквифинальности и переходить на него, либо, напротив, может происходить энтропийный процесс упадка и перехода системы на более низкий уровень существования.

2.6 Методика Паттерн

Первой методикой системного анализа, в которой были определены порядок, методы формирования и оценки приоритетов элементов структур целей (названных в методике “деревьями целей”), была методика PATTERN [2,3,4]. Английское pattern – а) шаблон, б) прицел. Аббревиатура английского: Planning Assistance Through Technical Evaluation from Relevans Number (помощь планированию посредством относительных показателей технической оценки).

Инициатором создания методики стал Дэвис, вице-президент фирмы “Хонниуэлл” корпорации RAND, одной из так называемых “думающих”, бесприбыльных корпораций, занимающихся разработкой военных доктрин, рекомендаций по выбору проектов новых систем оружия, исследованием военного и научного потенциала “противника”, рынков сбыта оружия и тому подобными проблемами анализа и прогнозирования развития военного потенциала США.

Назначением, конечной целью создания системы ПАТТЕРН была подготовка и реализация планов обеспечения военного превосходства США над всем миром. Перед разработчиками методики ПАТТЕРН была поставлена задача – связать воедино военные и научные планы правительства США.

Практика использования системы ПАТТЕРН показала, что она позволяет проводить анализ сложных проблемных ситуаций, распределять по важности огромное количество данных в любой области деятельности, исследовать взаимное соотношение постоянных и переменных факторов, на которых основывается и на которые влияют принимаемые решения.

Система ПАТТЕРН явилась важным инструментом анализа труднорешаемых проблем с большой неопределенностью, прогнозирования и планирования их выполнения. Основные идеи методики применялись в различных областях: научные исследования, проектирование и создание систем различной сложности в научно–исследовательских организациях и на

предприятиях, расширение рынков сбыта военно-космической продукции и т. п.

Ввиду особой значимости после 1965 года эти работы получили гриф закрытости и публикаций о них не было. В СССР работы подобного рода начались с исследования опыта США.

Главное достоинство методики состоит в том, что в ней определены классы критериев оценки *относительной важности, взаимной полезности, состояния и сроков разработки*. Эти классы до сих пор являются основой при определении системы оценок составляющих структур целей.

Поскольку важным первым шагом является логика формирования структуры целей, принципы и приёмы структуризации, советские учёные с самого начала применения системного анализа основное внимание уделяли разработке принципов и приёмов формирования первоначального варианта структуры целей (“дерева целей”), составляющие которого подлежат затем оценке и анализу.

Первыми отечественными работами, в которых предложены не только принципы формирования “дерева целей”, но и признаки структуризации, были работы Черняка (1973 г.). в частности, им предложена концепция о соответствии двух “шкал” развития сложных систем – пространственной и временной.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое системность. Как Вы понимаете тезис: «системность – всеобщее свойство материи»?
2. Что такое системный подход и системный анализ?
3. Состав задач системного анализа.
4. Назовите принципы системного анализа.
5. Когда применяются методы системного анализа?
6. Состав общей теории систем.
7. Дайте определение понятия «система».

8. Что такое элемент, подсистема и структура системы?
9. Определите понятие «связь». Что такое обратная связь?
10. Понятие состояния и поведения системы.
11. Дайте определение внешней среды.
12. Что такое модель? Модель черного ящика, модель состав системы и модель структуры системы.
13. Дайте классификацию систем по признакам.
14. Привести примеры по закономерностям систем.
15. Достоинства методики Паттерн.

3 Теория полезности в выборе альтернатив

3.1 Аксиомы рационального поведения

В [7,8] вводится пять аксиом и доказывается существование функции полезности. Дадим содержательное представление этих аксиом. Обозначим через x, y, z различные исходы (результаты) процесса выбора, а через p, q вероятности тех или иных исходов. Введем определение лотереи.

Лотереей называется игра с двумя исходами: исходом x , получаемым с вероятностью p , и исходом y , получаемым с вероятностью $1-p$ (рисунок 3.1).

Примером лотереи является подбрасывание монеты. При этом, как известно, с вероятностью $p=0,5$ выпадает орел или решка. Пусть $x=10$ у.е. и $y=10$ у.е. (т. е. мы получаем 10 у.е. при выпадении орла и платим столько же при выпадении решки).

Ожидаемая (или средняя) цена лотереи определяется по формуле

$$p \times x + (1-p) \times y.$$

Приведем аксиомы рационального выбора.

Аксиома 1. Исходы x, y, z принадлежат множеству A исходов.

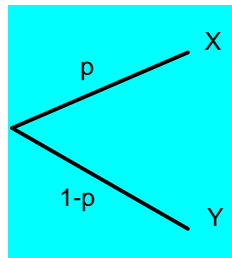


Рис. 3.1

Аксиома 2. Пусть P означает строгое предпочтение (похожее на отношение $>$ в математике); R – нестрогое предпочтение (похожее на отношение \geq); I – безразличие (похожее на отношение $=$). Ясно, что R включает P и I . Аксиома 2 требует выполнения двух условий.

Представление лотереи условий:

- связности: либо xRy , либо yRx , либо то и другое вместе;
- транзитивности: из xRy и yRz следует xRz .

Аксиома 3. Две представленные на рисунке 3.2 лотереи находятся в отношении безразличия. Справедливость этой аксиомы очевидна. Она записывается в стандартном виде как $((x, p, y)q, y) I (x, pq, y)$.

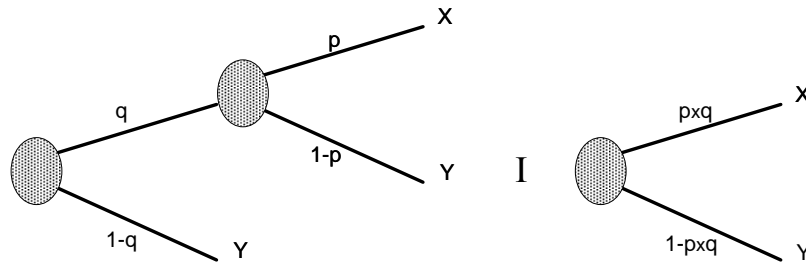


Рис.3.2

Аксиома 4. Если $x I y$, то $(x, p, z) I (y, p, z)$.

Аксиома 5. Если $x P y$, то $x P(x, p, y) P y$.

Аксиома 6. Если $x P y P z$, то существует вероятность p , такая что $y(x, p, z)$.

Все приведенные выше аксиомы достаточно просты для понимания и кажутся очевидными.

В предположении, что аксиомы выполняются, была доказана теорема [1]. Если аксиомы 1 - 6 удовлетворяются, то существует численная функция U , определенная на A (множество исходов) и такая, что:

1. $x R y$ тогда и только тогда, когда $U(x) \geq U(y)$;
2. $U(x, p, y) = p \times U(x) + (1-p) \times U(y)$.

Функция $U(x)$ измеряется на шкале интервалов. Функция $U(x)$ - единственная с точностью до линейного преобразования (например, если $U(x) > U(y)$, то и $a \times U(x) > a \times U(y)$, где a — целое положительное число).

3.2 Задачи с вазами

Теория полезности экспериментально исследовалась в так называемых задачах с вазами (или урнами). Ваза — это непрозрачный сосуд, в котором находится определенное (известное лишь организатору эксперимента) количество шаров различного цвета. Задачи с вазами типичны для группы

наиболее простых задач принятия решений — задач статистического типа. Для решения этих задач надо знать элементарные начала теории вероятностей [7,8]. Человек делает выбор в этих задачах, основываясь на расчетах. Варианты действий выражены в наиболее простом виде.

Типовая задача для испытуемого может быть представлена следующим образом. Перед испытуемым ставится ваза, которая может быть вазой 1-го или 2-го типа. Дается следующая информация: сколько имеется у экспериментатора ваз 1-го и 2-го типов; сколько черных и красных шаров в вазах 1-го и 2-го типов, какие выигрыши ожидают испытуемого, если он угадает, какого типа ваза; какие проигрыши ожидают его, если он ошибется. После получения такой информации испытуемый должен сделать выбор: назвать, к какому типу принадлежит поставленная перед ним ваза.

Пусть, например, экспериментатор случайно выбирает вазу для испытуемого из множества, содержащего 700 ваз 1-го типа и 300 ваз 2-го типа. Пусть в вазе 1-го типа содержится 6 красных шаров и 4 черных. В вазе 2-го типа содержится 3 красных и 7 черных шаров.

Если перед испытуемым находится ваза 1-го типа, и он угадает это, то получит выигрыш 350 условных единиц (у. е.), если не угадает, его проигрыш составит 50 у. е. Если перед ним ваза 2-го типа и он это угадает, то получит выигрыш 500 у. е., если не угадает, его проигрыш составит 100 у. е. Испытуемый может предпринять одно из следующих действий:

d1 — сказать, что ваза 1-го типа;

d2 — сказать, что ваза 2-го типа.

Условия задачи можно представить в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Представление задачи с вазами

Тип вазы	Вероятность выбора вазы данного типа	Выигрыш при действии	
		d1	d2
1	0,7	350	-100
2	0,3	-50	500

Что же делать человеку? Теория полезности отвечает: оценить среднюю (ожидаемую) полезность каждого из действий и выбрать действие с максимальной ожидаемой полезностью. В соответствии с этой рекомендацией можно определить среднее значение выигрыша для каждого из действий:

$$U(d1) = 0,7 * 350 - 0,3 * 50 = 230 \text{ у.е.};$$

$$U(d2) = 0,3 * 500 - 0,7 * 100 = 80 \text{ у.е.}$$

Следовательно, разумный человек выберет действие **d1**, а не действие **d2**.

Из этого примера следует общий рецепт действий для рационального человека: определить исходы, помножить их на соответствующие вероятности, получить ожидаемую полезность и выбрать действие с наибольшей полезностью.

Задачи с вазами помогут нам познакомиться с построением деревьев решений и принятием решений с их помощью.

3.3 Деревья решений

Приведенная таблица 3.1 может быть представлена в виде дерева решений (рис.3.3). На этом дереве квадратик означает место, где решение принимает человек, а светлый кружок — место, где все решает случай. На ветвях дерева написаны уже знакомые нам значения вероятностей, а справа у конечных ветвей — значения исходов (результаты).

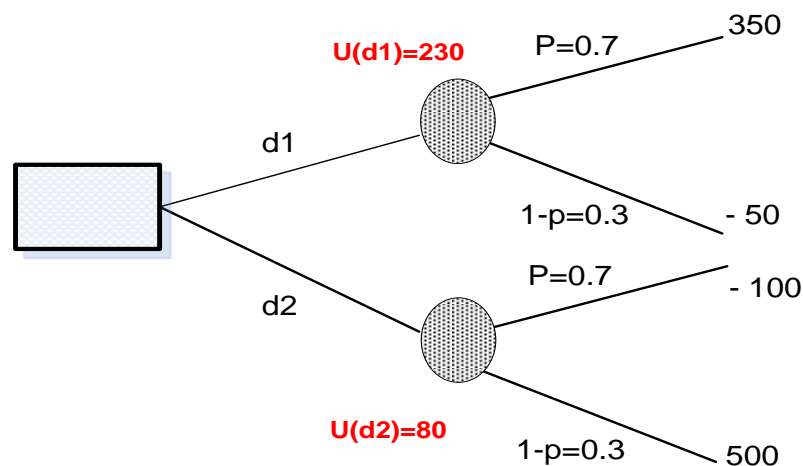


Рис. 3.3

Для чего нужно дерево решений? Мы можем использовать его для представления своих возможных действий и для нахождения последовательности правильных решений, ведущих к максимальной ожидаемой полезности. Чтобы показать это, усложним задачу. Предоставим человеку, выбирающему между действиями $d1$ и $d2$, дополнительные возможности. Пусть он может до своего ответа вытащить за определенную плату один шар из вазы, причем после вытаскивания шар кладется обратно в вазу. Плата за вытаскивание одного шара 60 у.е.

Дерево решений с двумя его основными ветвями представлено на рисунке 3.4. Вот теперь вопрос о том, какое решение следует принимать, стал сложнее: необходимо решить, стоит ли вынимать шар и какой ответ дать после вытаскивания красного или черного шара. При принятии этих решений нам окажет существенную помощь известный в теории вероятностей (и в теории статистических решений) способ подсчета изменения вероятностей событий после получения дополнительной информации.

Вернемся к описанию задачи. Вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа $p_K(B1)=0,6$, а из вазы 2-го типа $p_K(B2)=0,3$. Зная все условные вероятности (зависящие от условия), а также вероятности $P1$ и $P2$ выбора ваз 1-го и 2-го типа (таблица 3.1), можно поставить следующие вопросы.

Первый вопрос: каковы вероятности вытащить красный и черный шары? Для ответа на этот вопрос произведем простые вычисления. Вероятность вытащить красный шар $p_k(B_1) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$, если ваза окажется 1-го типа, $p_k(B_2) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$, если ваза окажется 2-го типа. Следовательно, вероятность вытащить красный шар в общем случае $P_k = 0,51$. Аналогичным образом можно посчитать, что вероятность вытащить черный шар $P_{ч} = 0,49$.

Второй вопрос более сложный. Пусть вытащенный шар оказался красным (черным). Какое действие следует выбрать: d_1 или d_2 ? Для ответа на этот вопрос нужно знать вероятности принадлежности ваз к 1-му и 2-му типам после получения дополнительной информации. Эти вероятности позволяет определить знаменитая формула Байеса.

Например, мы вытащили красный шар. Какова после этого вероятность того, что перед нами стоит ваза 1-го типа?

Приведем все обозначения вероятностей:

$P_k(B_1)$ - вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа;

$P_{ч}(B_1)$ - вероятность вытащить черный шар из вазы 1-го типа;

$P_k(B_2)$ - вероятность вытащить красный шар из вазы 2-го типа;

$P_{ч}(B_2)$ - вероятность вытащить черный шар из вазы 2-го типа;

$P(B_1)$ - вероятность того, что ваза 1-го типа;

$p(B_2)$ - вероятность того, что ваза 2-го типа;

$P(B_1/k)$ - вероятность того, что ваза окажется 1-го типа после вытаскивания красного шара;

$P(B_1/ч)$ - вероятность того, что ваза окажется 1-го типа после вытаскивания черного шара;

$P(B_2/k)$ - вероятность того, что ваза окажется 2-го типа после вытаскивания красного шара;

$P(B_2/ч)$ - вероятность того, что ваза окажется 2-го типа после вытаскивания черного шара.

Формула Байеса позволяет оценить $p(B_i/k)$ и $p(B_i/ч)$, где $i=1,2$, используя все прочие вероятности. Например:

$$P(B1/k) = [P(B1/k) \times P(B1)] / [P(B1/k) \times P(B1) + P_k(B2) \times P(B2)]$$

Для нашей задачи: $P(B1/k)=0,82$; $P(B1/ч)=0,57$; $P(B2/k)=0,18$;
 $P(B2/ч)=0,43$.

Пример решения задачи. Провести «сворачивание дерева решений», приведенного на рисунке 3.4. ЛПР должен выбрать одно из решений: d1 – выбрать вазу 1-го типа; d2 – выбрать вазу 2-го типа. Вытаскивать шар или нет?

Ваз 1-го типа – 60, а ваз 2-го типа – 40. В вазе 1-го типа 2 красных и 3 черных шара. В вазе 2-го типа 3 красных и 2 черных шара. Чтобы определить, какая ваза перед ЛПР, ему предлагается вытащить из вазы шар и снова положить его обратно за плату 100 у.е.

Решение

Вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа $P_k(B1)=0,4$.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 2-го типа $P_k(B2)=0,6$.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 1-го типа с учетом количества ваз $P_k(B1)=2/5 \times 0,6=0,24$.

Вероятность вытащить черный шар из вазы 1-го типа с учетом количества ваз $P_ч(B1)=3/5 \times 0,6=0,36$.

Вероятность вытащить красный шар из вазы 2-го типа $P_k(B2)=3/5 \times 0,4=0,24$.

Вероятность вытащить черный шар из вазы 2-го типа $P_ч(B2)=2/5 \times 0,4=0,16$.

Вероятность вытащить красный шар из ваз $P_k=0,24+0,24=0,48$.

Вероятность вытащить черный шар из ваз $P_ч=0,52$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа $P(B1)=60/100=0,6$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа $P(B2)=40/100=0,4$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа после вытаскивания красного шара $P(B1/к)$.

Вероятность того, что это ваза 1-го типа после вытаскивания черного шара $P(B1/ч)$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа после вытаскивания красного шара $P(B2/к)$.

Вероятность того, что это ваза 2-го типа после вытаскивания черного шара $P(B2/ч)$.

По формуле Байеса находятся вероятности $P(B1/к)$, $P(B1/ч)$, $P(B2/к)$, $P(B2/ч)$.

$$P(B1/к) = [P_к(B1) \times P(B1)] / [P_к(B1) \times P(B1) + P_к(B2) \times P(B2)]$$

$$P(B1/к) = 0,4 \times 0,6 / [0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4] = 0,24 / (0,24 + 0,24) = 0,5 \quad P(B1/ч) = 0,5$$

$$P(B2/к) = [P_к(B2) \times P(B2)] / [P_к(B2) \times P(B2) + P_к(B1) \times P(B1)]$$

$$P(B2/к) = [0,6 \times 0,4] / [0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6] = 0,24 / (0,24 + 0,24) = 0,5 \quad P(B2/ч) = 0,5$$

$$P(B1/ч) = P_ч(B1) \times P(B1) / [P_ч(B1) \times P(B1) + P_ч(B2) \times P(B2)]$$

$$P(B1/ч) = 0,6 \times 0,6 / [0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4] = 0,36 / (0,36 + 0,16) = 0,69$$

$$P(B1/ч) = 0,69 \quad P(B2/ч) = 0,31$$

По дереву решений идти от конечных веток к его корню. Там, где есть случайность (кружок), найти среднее значение функции полезности.

Там, где квадратик (этап принятия решения), выбрать ветку с наибольшей ожидаемой полезностью, а другую отсечь двумя черточками.

Так как полезность верхней ветки выше (100 больше 34,6), то шар вытаскивать нецелесообразно и ЛПР должен выбрать вазу 2-го типа.

Теперь мы имеем всю информацию, необходимую для принятия решений. На рисунке 3.4 показаны две основные ветви дерева решений, причем верхняя ветка повторяет дерево решений на рисунке 3.3. Квадратик 1 слева соответствует первому решению — вытаскивать шар или нет. В случае отказа от вытаскивания шара используется верхняя основная ветвь. Решению

вытаскивать шар соответствует нижняя ветвь, начинающаяся со случайного события (кружок). В квадратах 2, 3, 4 принимаются решения о выборе одной из двух стратегий: d1 или d2. Далее все решает элемент случайности (кружки).

Над кружками и прямоугольниками рассчитываются значения полезности.

$$96 = 0.6 * 200 - 0.4 * 60$$

$$100 = 0.4 * 400 - 0.6 * 100$$

$$70 = 0.5 * 200 - 0.5 * 60$$

$$150 = 0.5 * 400 - 0.5 * 100$$

$$55 = 0.31 * 400 - 0.69 * 100$$

$$119.4 = 0.69 * 200 - 0.31 * 60$$

$$134.6 = 0.48 * 150 + 0.52 * 119.4$$

$$34.6 = 134.6 - 100 \text{ (с учетом платы за вытаскивания шара)}$$

Есть три простых правила выбора оптимальной (по критерию максимума ожидаемой полезности) последовательности решений на основе дерева решений:

- идти от конечных ветвей дерева к его корню;
- там, где есть случайность (кружок), находится среднее значение;
- там, где есть этап принятия решений (квадратик), выбирается ветвь с наибольшей ожидаемой полезностью, а другая отсекается двумя черточками.

На этом рисунке над кружками указаны средние значения полезности, двумя черточками отсечены ветви с меньшим значением ожидаемой полезности. Наилучший вариант действий: шар не вытаскивать и выбирать действие d1. Этот вариант соответствует самому верхнему пути дерева решений на рисунке 3.4. Такая процедура нахождения оптимального пути на деревьях решений получила название «сворачивания» дерева решений.

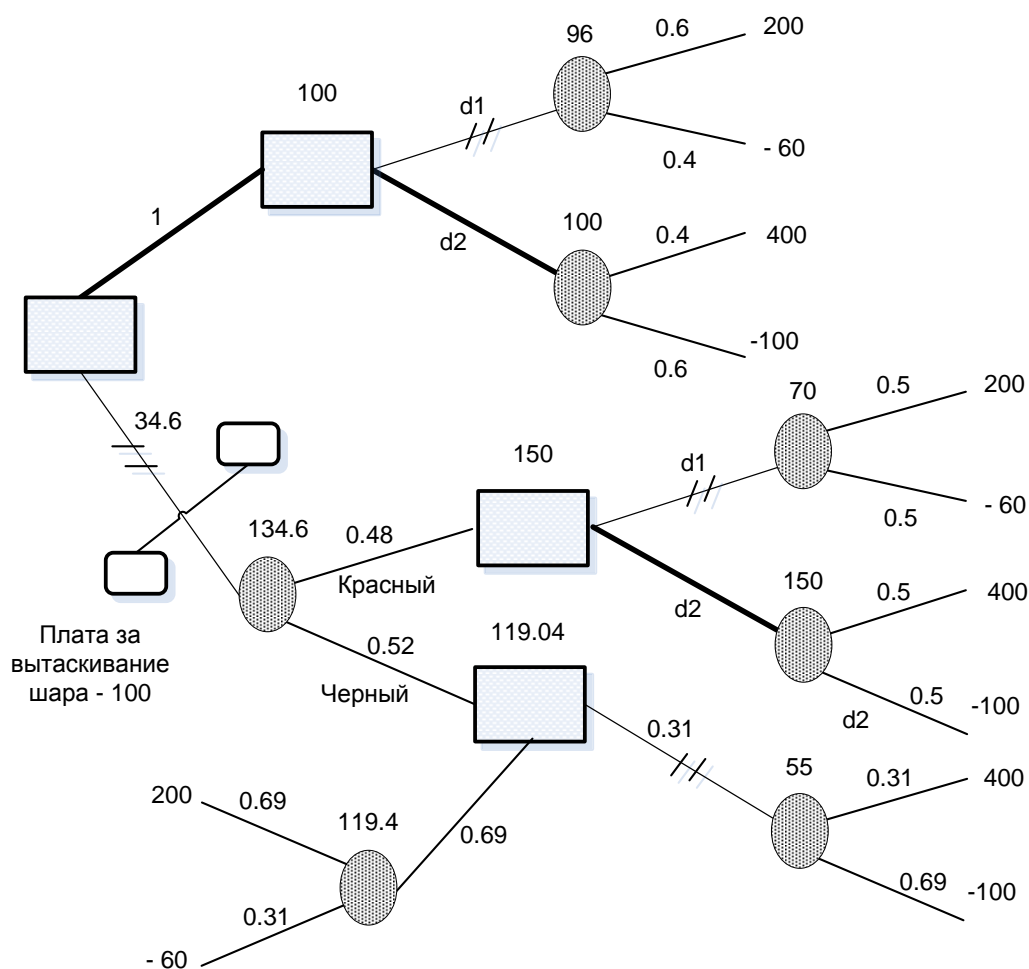


Рис.3.4

Деревья решений при заданных числовых значениях вероятностей и исходов позволяют осуществить выбор той стратегии (последовательности действий), при которой достигается наибольший выигрыш, т.е. достигается максимум функции полезности ЛПР [7,8].

3.4 Метод построения дерева решений

Задача. Перед ЛПР находится 700 ваз 1-го и 300 ваз 2-го типа. Затем ему предъявляется одна из ваз и он должен угадать, к какому типу относится ваза: d1 – ваза 1-го типа; d2 – ваза 2-го типа. Если он угадает вазу 1-го типа, получает 350 у.е., а если не угадает – штраф 50 у.е. Аналогично для второй вазы (таблица 3.2).

Таблица 3.2. Представление задачи с вазами

Тип вазы	Количество	Вероятность выбора	Выигрыш, у.е.	
			d1	d2
1	700	0,7	350	-100
2	300	0,3	-50	500

В соответствии с теорией полезности оценивается ожидаемая полезность по каждому из вариантов:

$$U(d1) = 0.7 \times 350 + 0.3 \times (-50) = 230$$

$$U(d2) = 0.3 \times 500 + 0.7 \times (-100) = 80$$

Следовательно, перед испытуемым ваза 1-го типа, так как $U(d1) > U(d2)$.

Таблицу можно представить в виде дерева решений:

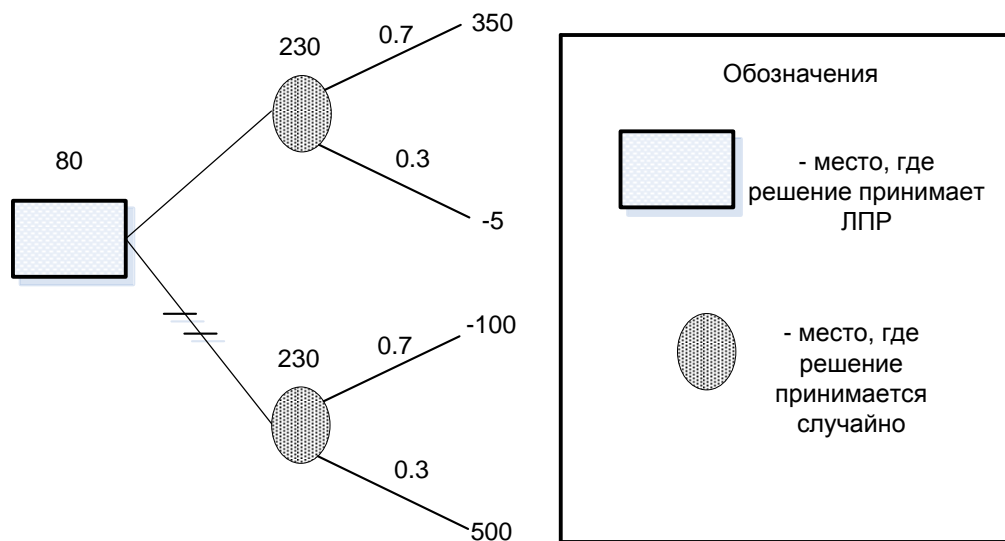


Рис. 3.5

Процесс определения оптимальной ветки называется «*сворачиванием дерева решений*». Отбрасываемая ветка перечеркивается двумя линиями.

Контрольные вопросы

Задача 1. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d_1 или d_2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Формулировка задачи с вазами. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 55 штук, а ваз типа Б – 45. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 300 у.е., а если не угадали – платите штраф 170 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 200 у.е., а если не угадали – платите штраф 120 у.е.

Ответ: в соответствии с теорией полезности определить среднее значение выигрыша каждого из действий.

$$U(A) = 0,55 \times 300 + 0,45 \times (-170) = 165 - 76,5 = 88,5 \text{ у.е.}$$

$$U(B) = 0,45 \times 200 + 0,55 \times (-120) = 90 - 66 = 24 \text{ у.е.}$$

Следовательно, ЛПР должен выбрать вазу типа А.

Задача 2. Существует два проекта реализации информационных систем (ИС), приведённые в таблице 3.3

Таблица 3.3. Представление задачи с вазами

Проект 1		Проект 2	
Прибыль	Вероятность	Прибыль	Вероятность
2000	0,2	1200	0,1
3000	0,25	2000	0,2
1500	0,15	3500	0,25
4000	0,3	4500	0,3
1000	0,1	1500	0,15

Величина планируемого дохода в каждом случае не определена и приведена в виде распределения вероятностей.

Ответ: Для выбора оптимального варианта подсчитывается математическое ожидание дохода от каждого проекта.

$$M (\text{проект } 1) = 2000 \times 0,2 + 3000 \times 0,25 + 1500 \times 0,15 + 4000 \times 0,3 + 1000 \times 0,1 = 400 + 750 + 225 + 1200 + 100 = 2675$$

$$M (\text{проект } 2) = 1200 \times 0,1 + 2000 \times 0,2 + 3500 \times 0,25 + 4500 \times 0,3 + 1500 \times 0,15 = 120 + 400 + 875 + 1350 + 225 = 2970$$

Таким образом, предпочтительнее выбрать проект 2, так как

$$M (\text{проект } 2) > M (\text{проект } 1).$$

Задача 3. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d_1 или d_2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 60 штук, а ваз типа Б – 40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200 у.е., а если не угадали – платите штраф 70 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100 у.е., а если не угадали – платите штраф 20 у.е.

Задача 4. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d_1 или d_2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 200 штук, а ваз типа Б – 400. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 500 у.е., а если не угадали – платите штраф 270 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 600 у.е., а если не угадали – платите штраф 320 у.е.

Задача 5. В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действия d_1 или d_2 для задачи с вазами. Построить дерево решений. Перед Вами 2 вазы (ваза типа А и ваза типа Б). Ваз типа А – 60 штук, а ваз типа Б – 40. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете 200 у.е., а

если не угадали –платите штраф 70 у.е. Если Вы угадали вазу типа Б, то получаете 100 у.е., а если не угадали – платите штраф 80 у.е.

Задача 6. Как нужно изменить поощрения и наказания по угадыванию типа вазы, чтобы ЛПР выбрал нижнюю ветку в предыдущей задаче на рисунке 3.4.

4 Сетевое планирование в задачах принятия решений

На практике приходится сталкиваться с задачами планирования разных работ, процесс выполнения которых нельзя отразить в формульных зависимостях. Например, строительство крупного объекта, разработка сложного радиоэлектронного комплекса и т.п.

Характерная особенность таких проектов – взаимная обусловленность проводимых работ, выраженная в требовании соблюдать определенный порядок выполнения работ. Следовательно, подготовка решений при разработке проектов должна проводиться с учетом многих факторов, отражающих ограниченность сырьевых, денежных, энергетических ресурсов и ограниченного времени, отводимого на предполагаемые работы. Одним из методов, широко применяемых в исследовании проблем, является метод сетевого планирования [7,8].

Метод сетевого планирования позволяет решать, как прямые, так и обратные задачи исследования операций. Первые связаны с оценкой последствий выбора определенного решения, вторые – с поиском наилучших решений.

4.1 Способы представления комплекса работ

Исходными данными в сетевом планировании являются перечни проводимых работ, установленные для каждой из них сроки, а также описания существующих между ними зависимостей, выраженных отношениями предшествования. Эти данные можно представить следующими способами:

- в виде таблицы с последовательностью работ;
- в виде Гантт-карты (рисунок 4.1);
- в виде сводного сетевого графика (ССГ).

В соответствии с теорией расписаний, расписанием можно назвать документ, содержащий сведения о количестве и номенклатуре выполняемых работ, включая их этапы; о моментах начала и окончания каждой работы, о затратах времени и выделяемой трудоемкости. Расписания можно задавать разными способами, среди которых наиболее наглядным является геометрический на базе графика Гантта (Гантт-карты).

Диаграмма Гантта

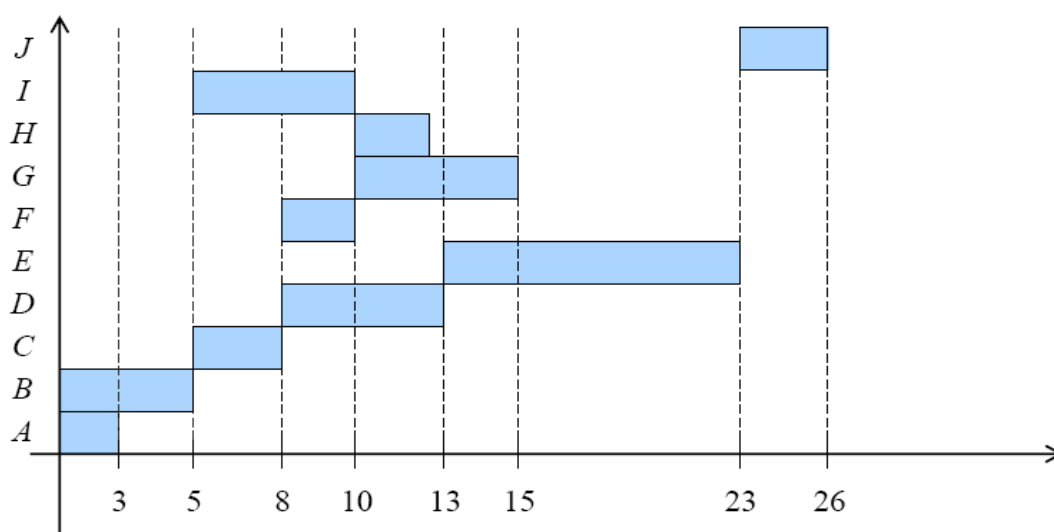


Рис.4.1. Диаграмма Гантта

4.2 Сводный сетевой график комплекса работ

Правила построения ССГ. Работы изображаются сплошными линиями, а связи между событиями изображаются пунктирными линиями (рисунок 4.2).

Фрагмент сетевого графика работ

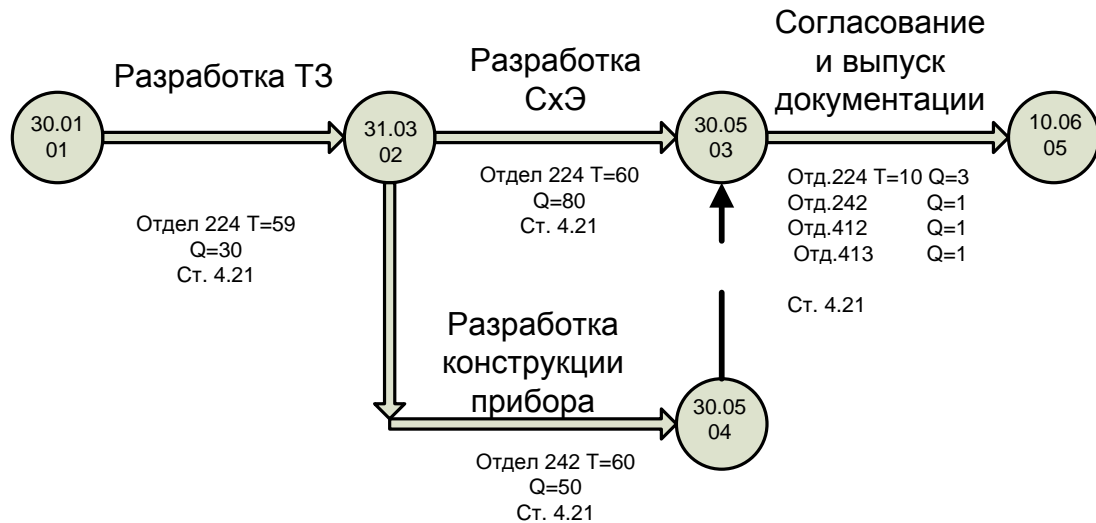


Рис.4.2. Фрагмент сводного сетевого графика

События изображаются кружками. Под линией, соединяющей два события, обозначаются продолжительность, трудоемкость выполнения работы и исполнители. Пример изображения фрагмента ССГ разработки электронного модуля приведен на рисунке 4.2.

При выпуске конструкторской документации задействован отдел нормоконтроля 413 и отдел размножения и учета КД (отдел 412). Номера событий записываются в нижней части кружка, а ее срок начала или окончания — в верхней части кружка. ССГ представляет собой ориентированный граф, дугами которого являются работы. Путем в графе называют последовательность дуг, выбранных таким образом, что конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей.

Последовательными называются работы, лежащие на некотором пути графа. Параллельные работы не могут составить путь и изображаются несколькими дугами, соединяющие вершины, например, события 03 и 04.

Связи между событиями, изображенные пунктирными линиями, еще называют фиктивными работами.

В любом ССГ имеется начальное событие (01) и конечное событие (05).

Каждая работа представляет собой процесс, связанный с затратами труда, материальных ресурсов и времени. Трудоемкость обозначается буквой Q, а продолжительность работы буквой T. Стадия разработки определяются в соответствии со стандартом.

Путь, имеющий в ССГ наибольшую продолжительность, называется критическим, а работы, находящиеся на нем – критическими.

Особенность критических работ определяется необходимостью их четкого выполнения. Срыв таких работ приводит к срыву плана.

Каждый ССГ имеет свой номер, например, подсистема 96.

Стыковка разных графиков производится следующим образом.

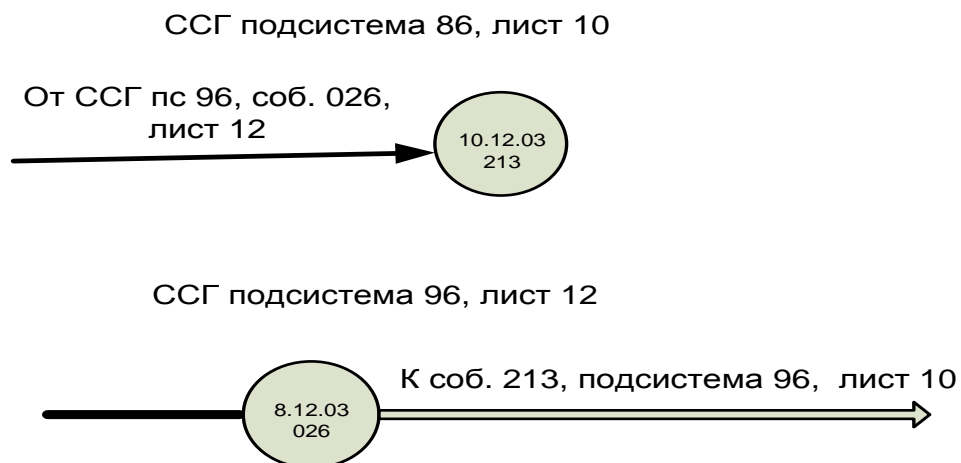


Рис.4.3. Стыковка графиков

Задача 1. В соответствии с директивным сетевым графиком (ДСГ) разработать три ССГ и согласовать их по срокам. Найти критический путь на каждом ССГ. Для этого создаются три группы студентов.

Группа 1 разрабатывает ССГ (подсистема 11) по проектированию системного блока с АЦП

Группа 2 разрабатывает ССГ (подсистема 12) по выбору типа монитора, клавиатуры и мышки

Группа 3 разрабатывает ССГ (подсистема 21) по проектированию программы информационно-измерительного комплекса (ИИК) на базе персонального компьютера.

Перечень работ по подсистемам 11 и 12 приведен в таблице 4.1

Таблица 4.1

Наименование работы	Продолжительность (дней)	Трудоемкость (ИТР/дней)
Разработка ТЗ	45	30
Согласование ТЗ	10	5
Выпуск ТЗ	3	2
Разработка СхЭ блоков, прибора	60	50
Разработка КД блоков, прибора	60	50
Разработка тестов блоков и прибора	60	50
Изготовление макетного образца	40	30
Настройка макетного образца	30	60
Отладка тестов блоков и прибора	40	40
Отладка интерфейса «системный блок-монитор, клавиатура, мышь»	20	40
Испытания прибора с использованием АЦП и имитацией внешней среды	30	60
Доработка СхЭ, КД по результатам испытаний	15	20

4.3 Правила построения сетевых моделей

Между парой событий можно изобразить только одну работу. При необходимости двух параллельных работ вводится промежуточное событие и фиктивная работа с нулевой продолжительностью. Из сети исключают тупиковые события, из которых не начинается ни одна работа, кроме завершающего события. Устраняют пересечения. Нумерацию событий проводят слева направо и сверху вниз.

Таблица 4.2. Задача перевода предприятия на самообслуживание

Работа	Содержание работы	Длительность ь, в днях
0,1	Составление сметы	15
1,2	Приобретение оборудования	16
1,3	Подбор кадров	6
2,4	Монтаж оборудования	6
3,5	Подготовка кадров	5
4,6	Оформление зала	8
5,6	Доставка товаров	6
5,8	Заказ и получение формы	14
5,7	Заказ и получение ценников	8
6,8	Выкладка товаров	2
7,8	Заполнение ценников	4
8,9	Генеральная репетиция	3

График работ, построенный в соответствии с таблицей 4.2, приведен на рисунке 4.4. Длительность выполнения работ указаны на дугах графа.

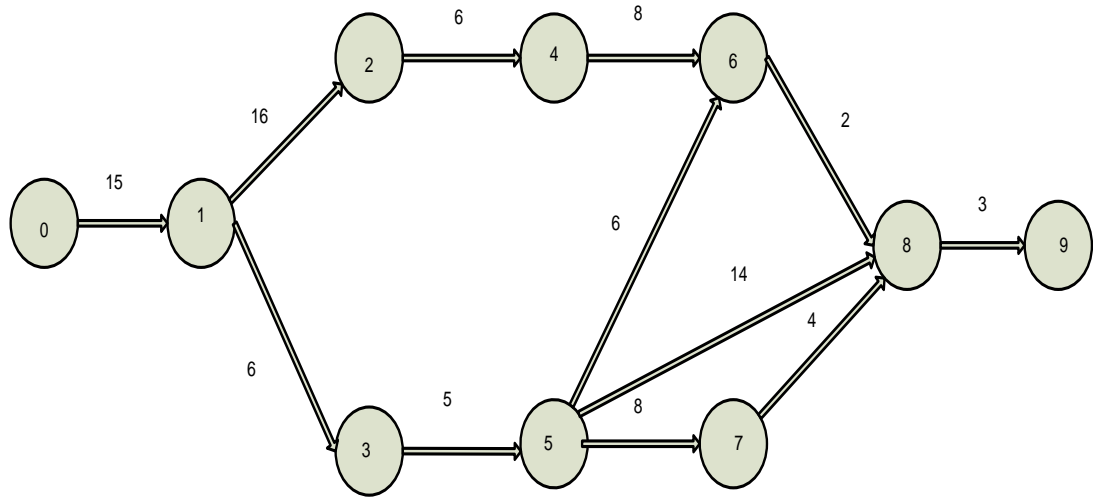


Рис.4.4. Пример графика

4.4 Анализ сетевых моделей

Анализ проводится с целью выявления резервов. Графический метод дает большую наглядность. Обнаруженные резервы позволяют гибко управлять комплексом работ [1].

Определение минимального времени выполнения всего комплекса работ (4 варианта путей):

$$L1=(0,1)(1,2)(2,4)(4,6)(6,8)(8,9)=50,$$

$$L2=(0,1)(1,3)(3,5)(5,6)(6,8)(8,9)=37,$$

$$L3=(0,1)(1,3)(3,5)(5,8)(8,9)=43,$$

$$L4=(0,1)(1,3)(3,5)(5,7)(7,8)(8,9)=41.$$

Поскольку многие работы, лежащие на этих путях, выполняются параллельно, общий срок перевода предприятия на самообслуживание будет определяться путем максимальной продолжительности, называемым *критическим*. $T_{кр}=50$ дней.

Длительность $L2 = 37$ минимальна, но не позволяет выполнить все работы.

Определение полных резервов времени:

$$R(L1) = T_{кр} - T1 = 0,$$

$$R(L2) = T_{кр} - T2 = 13 \text{ дней},$$

$$R(L3) = T_{кр} - T3 = 7 \text{ дней},$$

$$R(L4) = T_{кр} - T4 = 9 \text{ дней}.$$

В пределах этих резервов времени с выполнением некоторых работ можно не спешить, так как общий срок выполнения комплекса работ не увеличивается. Если длительность работ, лежащих на критическом пути увеличилась, то общий срок возрастет.

Оптимизация сетевого графика. Путем решения системы уравнений может быть найден оптимальный сетевой график, приведенный на рисунке 4.5. В этом варианте длительности всех четырех путей стали равными 43,3 дня.

Решение задачи оптимизации состоит в последовательном переносе средств с некритических работ на критические, переходе от одного пути к другому до тех пор, пока все работы не будут критическими и не будут иметь резервов, а длительности всех путей станут равными [1].

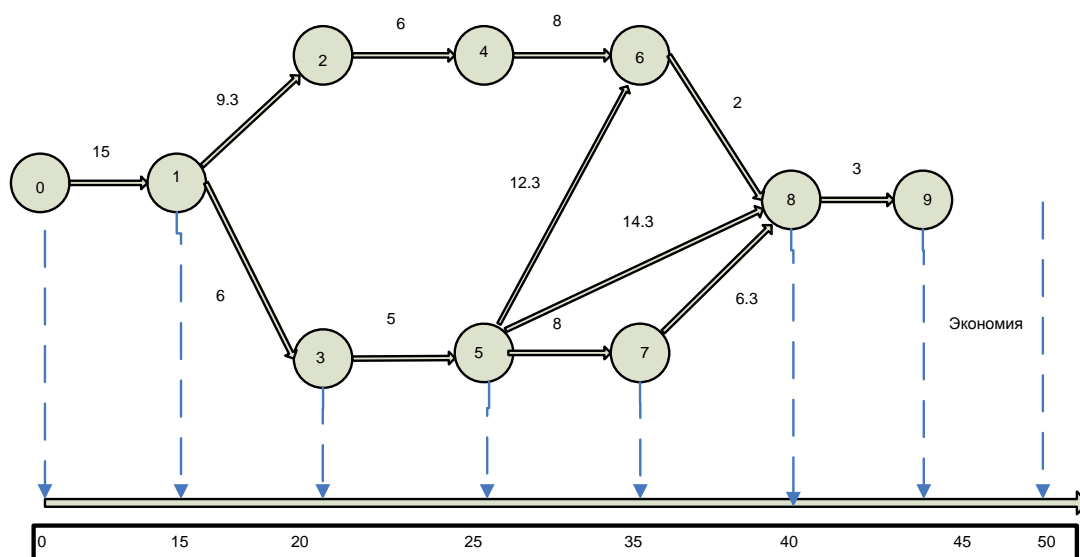


Рис. 4.5

Контрольные вопросы

1. Построить сетевой график выполнения курсового проекта. Найти критический путь.
2. Какие преимущества дает сетевой график?
3. Какой путь называется критическим?
4. Как производится стыковка графиков?
5. Провести оптимизацию графика выполнения проекта.

5 Применение теории цепей Маркова

5.1 Основные понятия теории Марковских цепей

Конечный стохастический процесс полностью описывается деревом логических возможностей и заданием весов всех его ветвей. Одним из типов таких процессов являются Марковские цепи [10,11].

Конечный стохастический процесс с функциями исходов f_1, f_2, \dots, f_n называется *марковской цепью*, если исходное состояние f_0 фиксировано [10,11].

Марковская цепь характеризуется тем, что вероятности перехода P_{ij} , задающие вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j , определяется для всех упорядоченных пар состояний. Кроме того, должно быть задано исходное состояние, в котором, по предположению, находится наша система в начальный момент времени.

На основании этих данных можно построить для любого (конечного) числа шагов Марковской цепи дерево логических возможностей и вероятностную меру на нем.

Пример. В регионе никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня снег (или дождь), то с вероятностью $\frac{1}{2}$ погода не изменится. Если все же она изменяется, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Допустим исходное состояние – в регионе ясная погода. Буквами Д, Я, С обозначаются условно дождь, ясный день, снег. Условия задачи удобно представить в виде квадратной матрицы следующего вида (рис.5.1):

	Д	Я	С
Д	$1/2$	$1/4$	$1/4$
Я	$1/2$	0	$1/2$
С	$1/4$	$1/4$	$1/2$

Рис.5.1

Числа в первой строке матрицы представляют собой вероятности различной погоды после дождя. Числа во второй строке – вероятности различной погоды после ясного дня, а в третьей строке – после снега. Воспользовавшись этой матрицей можно построить дерево логических возможностей для погоды, например, на три последовательных дня, и определить вероятностную меру на нем.

Построенное дерево представлено на рисунке 5.2. Это дерево позволяет сделать прогноз о возможности дождя в каждый из трех последующих дней: $P[f_1=Д]=1/2$, $P[f_2=Д]=3/8$, $P[f_3=Д]=13/32$.

Расчет производится следующим образом. На втором ярусе (второй день) имеется два исхода Д с вероятностными мерами $1/2 \times 1/2 = 1/4$ и $1/2 \times 1/4 = 1/8$. Их сумма дает $3/8$. На третьем ярусе (третий день) имеется шесть исходов Д с вероятностными мерами $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$, $1/2 \times 1/4 \times 1/2 = 1/16$, $1/2 \times 1/4 \times 1/4 = 1/32$, $1/2 \times 1/4 \times 1/2 = 1/16$, $1/2 \times 1/4 \times 1/2 = 1/16$, $1/2 \times 1/2 \times 1/4 = 1/16$. Их сумма дает $13/32$.

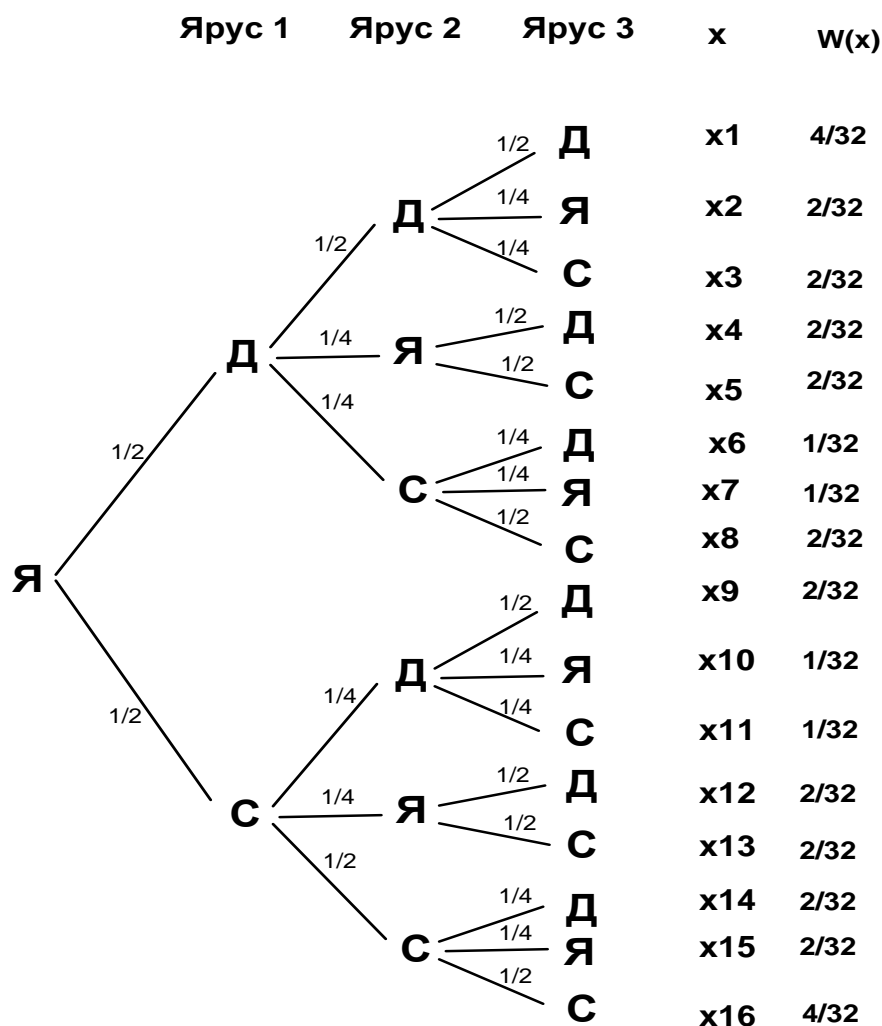


Рис.5.2. Дерево логических возможностей

5.2 Марковские цепи и диаграммы переходов

Исходом каждого эксперимента служит один исход из конечного множества возможных исходов a_1, a_2, \dots, a_n , причем в каждом эксперименте вероятность исхода a_j либо вовсе не зависит от исходов предшествующих экспериментов, либо зависит от исхода эксперимента, непосредственно предшествующего данному исходу. Эта зависимость задается величиной P_{ij} , представляющей вероятность исхода a_j при условии, что предшествующий эксперимент имел исход a_i . Исходы a_1, a_2, \dots, a_n называются состояниями, а числа P_{ij} – вероятностями перехода. Вероятности перехода можно

представить двумя различными способами: матрицей и диаграммой перехода. Для Марковской цепи с состояниями a_1, a_2, \dots, a_n такая матрица перехода системы P имеет вид [10,11].

	1	2		n
1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}
2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}
n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nn}

Пример матрицы вероятностей перехода, и диаграммы перехода приведен на рисунке 5.3. Стрелки, идущие от каждого состояния, указывают состояния, в которое это состояние может переходить в рассматриваемом процессе.

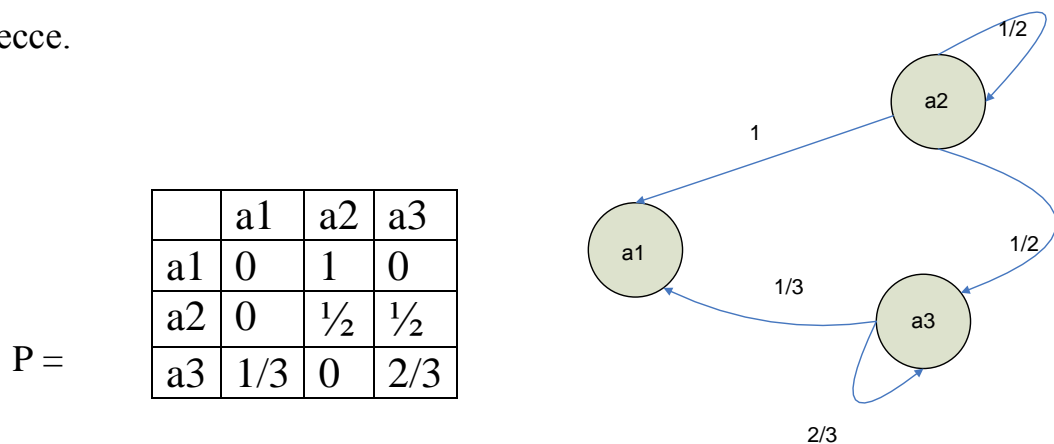


Рис.5.2. Диаграмма перехода

В матрице P сумма элементов каждой строки равна единице. Это должно быть справедливо для любой матрицы вероятностей перехода.

Основной вопрос при изучении марковских цепей состоит в следующем. Пусть процесс начинается из состояния i .

Какова вероятность того, что через n шагов он перейдет в состояние j ? Обозначим эту вероятность $P_{ij}^{(n)}$. Здесь параметр n обозначает не степень числа P , а количество шагов.

Более того, нас интересует эта вероятность для всех возможных начальных состояний i и всех возможных конечных состояний j .

Это удобно представить в виде матрицы. Для Марковской цепи с тремя состояниями матрицу перехода можно представить в следующем виде:

$$P^{(n)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & P_{13}^{(n)} \\ \hline P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & P_{23}^{(n)} \\ \hline P_{31}^{(n)} & P_{32}^{(n)} & P_{33}^{(n)} \\ \hline \end{array}$$

Пример. Для Марковской цепи с вероятностями перехода, приведенными на рисунке 5.2, найти вероятности различных состояний через три шага для случая, когда процесс начинается из состояния $a1$.

Решение. Вначале строится дерево и производится поиск вероятностной меры (см. рисунок 5.4).

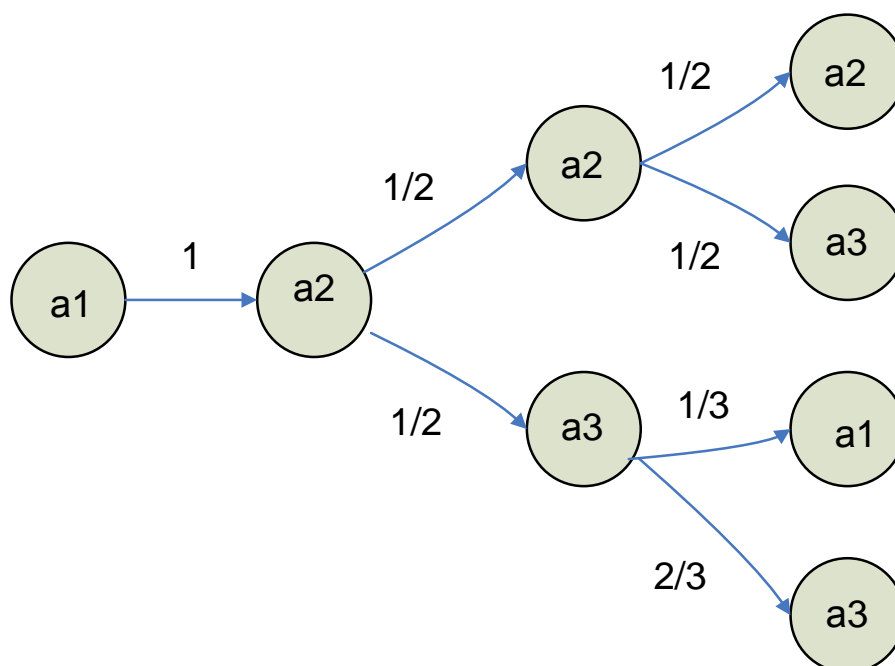


Рис.5.4

Например, вероятность $P_{13}^{(3)}$ есть сумма всех весов, приписанных введенной вероятностной мерой тем путям дерева, которые оканчиваются состоянием a_3 : $P_{13}^{(3)} = 1 \times 1/2 \times 1/2 + 1 \times 1/2 \times 2/3 = 7/12$; $P_{12}^{(3)} = 1 \times 1/2 \times 1/2 = 1/4$;

$P_{11}^{(3)} = 1 \times 1/2 \times 1/3 = 1/6$. Для того, чтобы найти вероятности $P_{21}^{(3)}$, $P_{22}^{(3)}$, $P_{23}^{(3)}$ из состояния a_2 , необходимо построить аналогичное дерево с исходным состоянием a_2 . Аналогично определяются $P_{31}^{(3)}$, $P_{32}^{(3)}$, $P_{33}^{(3)}$. Результаты можно записать в виде матрицы $P^{(3)}$.

	a1	a2	a3
a1	1/6	1/4	7/12
a2	7/36	7/24	37/72
a3	4/27	7/18	25/54

Сумма элементов каждой строки по-прежнему равна единице. Это соответствует тому факту, что из какого бы состояния ни начинать, через три шага мы обязательно достигаем либо первого состояния, либо второго, либо третьего. Все элементы матрицы являются положительными числами.

Матрицу $P^{(3)}$ можно получить и другим способом. В [1] показано, что вероятности удовлетворяют следующим условиям:

$$P_1^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p_{11} + P_2^{(n-1)} \times p_{21} + P_3^{(n-1)} \times p_{31},$$

$$P_2^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p_{12} + P_2^{(n-1)} \times p_{22} + P_3^{(n-1)} \times p_{32},$$

$$P_3^{(n)} = P_1^{(n-1)} \times p_{13} + P_2^{(n-1)} \times p_{23} + P_3^{(n-1)} \times p_{33}.$$

Это условие можно записать в виде произведения вектора на матрицу:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \times P.$$

Используя матрицу P , представленную на рисунке 5.2, сначала находится матрица $P^{(2)}$, а затем $P^{(3)}$. Для этого необходимо перемножить матрицы P . $P^{(2)} = P \times P$. Например, для нахождения второй строки матрицы

$P^{(2)}$ необходимо последовательно перемножить вторую строку матрицы P (см. рисунок 5.2) соответственно на первый, второй и третий столбцы этой матрицы.

$$P^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}$$

$$P_{21}^{(2)} = 0 \times 0 + 1/2 \times 0 + 1/2 \times 1/3 = 1/6$$

$$P_{22}^{(2)} = 0 \times 1 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 0 = 1/4$$

$$P_{23}^{(2)} = 0 \times 0 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 2/3 = 7/12$$

$P^{(2)} =$

	a1	a2	a3
a1	0	1/2	1/2
a2	1/6	1/4	7/12
a3	2/9	1/3	4/9

Используя значения матрицы $P^{(2)}$ и исходной матрицы перехода P , приведенной на рисунке 5.2, можно получить значения матрицы $P^{(3)}$:

$$P^{(3)} = P^{(2)} \times P.$$

Контрольные вопросы

Задача 1. Составить диаграммы состояний для Марковских цепей, вероятности перехода которых заданы следующими матрицами переходов P_1 и P_2 :

$P_1 =$

	a1	a2	a3
a1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
a2	0	1	0
a3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$P_2 =$

	a1	a2	a3
a1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
a2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
a3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Задача 2. Составить матрицу вероятностей перехода, соответствующие диаграмме состояний, приведённой на рисунке 5.4.

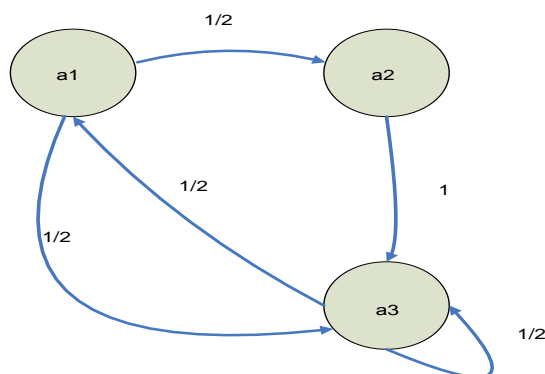


Рис.5.4

Задача 3. Найти матрицу перехода через 2 шага $P^{(2)}$ для Марковской цепи, заданной матрицей вероятностей перехода P .

$P =$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

6 Теория игр и принятие решений

6.1 Основные понятия теории игр

Формализованную модель конфликтной ситуации называют игрой, которая проводится по определенным правилам [9].

Если в игре можно выделить две антагонистические стороны, то игра называется парной. В противном случае игра называется множественной [9].

Игру называют с нулевой суммой, если одна из сторон выигрывает, а другая проигрывает.

Отдельные решения называют ходами. Ход называют личным, если выбор производится сознательно, и случайным, если действует случайный механизм выбора (бросание монеты).

Совокупность правил, определяющих однозначно выбор решения, называют стратегией.

Если у конфликтующих сторон имеется конечное число стратегий, то игру называют конечной.

Исход игры, в которой кроме личных ходов имеются случайные, определяется математическим ожиданием.

Если у одного игрока имеется n стратегий (A_1, A_2, \dots, A_n), а у другого m стратегий (B_1, B_2, \dots, B_m) и игра состоит только из личных ходов, выбор пары $A_j B_i$ единственным образом определяет исход игры a_{ji} . Если известны значения a_{ji} для каждой пары стратегий, то можно составить платежную матрицу.

Рассмотрим пример, заимствованный из книги Е.С. Вентцель «Элементы теории игр». В нашем распоряжении имеется три вида вооружения A_1, A_2, A_3 ; у противника три вида самолетов B_1, B_2, B_3 .

Известно, что при применении вооружения A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются с вероятностями 0,9; 0,4; 0,2; при применении вооружения A_2 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются с вероятностями 0,3; 0,6; 0,8; при

применении вооружения А3 самолеты В1, В2, В3 поражаются с вероятностями 0,5; 0,7; 0,2. Требуется сформулировать конфликтную ситуацию в терминах теории игр.

Решение. Конфликтную ситуацию можно рассматривать как игру 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Личный ход противника – выбор типа самолета. Наш личный ход – выбор типа вооружения. Случайный ход – применение вооружения. Этот ход может закончиться поражением или не поражением самолета. Нашими стратегиями являются три варианта применения типов вооружения. Стратегиями противника – три варианта применения типов самолета. Наш выигрыш равен единице, если самолет поражен, и нулю в противном случае. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть вероятность поражения самолета данным вооружением. Платежная матрица представлена в таблице 6.1.

Решить игру – значит найти для каждого игрока наилучшие стратегии, которые обеспечат ему наибольший выигрыш или наименьший проигрыш.

Таблица 6.1

	В1	В2	В3
А1	0,9	0,4	0,2
А2	0,3	0,6	0,8
А3	0,5	0,7	0,2

Пусть требуется найти оптимальную стратегию для игрока **А**. Проанализируем последовательно каждую из его стратегий, начиная с **А1**.

Если игрок **А** выбрал стратегию **А_j**, то он должен рассчитывать на то, что игрок **В** ответит на нее той из своих стратегий, для которой его (игрока **А**) выигрыш **a_{ji}** будет минимален. Выберем это значение выигрыша, т.е. минимальное из чисел в **j**-й строке:

$$a_j = \min_i a_{ji}.$$

Избегая всякого риска, игрок А должен выбрать из стратегий A_j , для которой значение a_j является максимальным:

$$A = \max_j a_j,$$

$$a = \max_j \min_i a_{ji}.$$

Выражение « a » определяет нижнюю цену игры (максиминный выигрыш) и тот гарантированный минимум, который получит игрок А, придерживаясь наиболее осторожной из своих стратегий. Для нашего примера (см. таблицу 6.1) вначале находятся минимальные значения в каждой строке (0,2; 0,3; 0,2), а затем среди них максимальное значение, $a=0,3$. Это и есть нижняя цена игры. Стратегия, соответствующая нижней цене игры, называется максиминной стратегией.

Игрок В заинтересован в том, чтобы свести выигрыш игрока А к минимуму. Следовательно, он должен проанализировать каждую из своих стратегий с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии:

$$b_i = \max_j a_{ji},$$

$$b = \min_i b_i,$$

$$b = \min_i \max_j a_{ji}.$$

Выражение « b » определяет верхнюю цену игры (минимаксный выигрыш). Для нашего примера (см. таблицу 6.1) вначале находятся максимальные значения в каждом столбце (0,9; 0,7; 0,8), а затем среди них минимальное значение $a=0,7$. Это и есть верхняя цена игры. Стратегия, соответствующая верхней цене игры, называется минимаксной стратегией.

Анализируя платежную матрицу, можно сделать вывод о неустойчивости минимаксных стратегий. Это означает, что если игрок А применит свою наиболее осторожную стратегию **A2**, а игрок В – стратегию **B2**, то средний выигрыш равен 0,6 (см. таблицу 6.1). Как только игроку В становится известно, что игрок А применяет стратегию **A2**, он может ответить на нее стратегией **B1**, уменьшив выигрыш игрока А с 0,6 до 0,3.

Следовательно, выигрыш при использовании минимаксных стратегий является неустойчивым, поскольку зависит от сведений о стратегии антагонистической стороны.

Существуют игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Для таких игр нижняя цена игры равна верхней и это общее значение называется *чистой ценой игры*. Элемент матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, называется *седловой точкой матрицы*. Игра, платежная матрица которой имеет седловую точку, называется игрой с седловой точкой.

Для игр с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих из конфликтующих сторон. Если один из игроков будет придерживаться своей оптимальной стратегии, а другой отклоняться от нее, то он может только проиграть.

6.2 Применение смешанных стратегий

Для игр, не имеющих седловой точки, можно применять не одну чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий с целью гарантировать себе средний выигрыш, больший «а».

Смешанной стратегией называется набор вероятностей применения чистых стратегий.

Рассмотрим игру 2×2 . Пусть игра задана матрицей, приведенной в таблице 6.2.

Таблица 6.2

	B1	B2
A1	a11	a12
A2	a21	a22

Оптимальные смешанные стратегии игроков **A** и **B** определяются вероятностями **P**=(**p1,p2**) и **Q**=(**q1,q2**). Цена игры определяется следующими неравенствами:

$$a_{11} \times p_1 + a_{21} \times p_2 \geq R$$

$$a_{12} \times p_1 + a_{22} \times p_2 \geq R$$

$$p_1 \geq 0; p_2 \geq 0; p_1 + p_2 = 1$$

$$a_{11} \times q_1 + a_{12} \times q_2 \leq R$$

$$a_{21} \times q_1 + a_{22} \times q_2 \leq R$$

$$q_1 \geq 0; q_2 \geq 0; q_1 + q_2 = 1$$

Вероятности **p1,p2, q1,q2** определяются путем решения системы неравенств:

$$p_1 = |a_{22} - a_{21}| / [|a_{12} - a_{11}| + |a_{22} - a_{21}|]$$

$$p_2 = |a_{12} - a_{11}| / [|a_{12} - a_{11}| + |a_{22} - a_{21}|]$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$q_1 = |a_{22} - a_{12}| / |a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}|$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

Матрица игры приведена в таблице 6.3.

Таблица 6.3

	B1	B2
A1	2	3
A2	7	1

Решить игру – значит найти p_1, p_2, q_1, q_2, R , удовлетворяющие соотношениям:

$$2 \times p_1 + 7 \times p_2 = R \tag{6.1}$$

$$3 \times p_1 + p_2 = R \quad p_2 = 1 - p_1$$

$$-5 \times p_1 + 7 = R \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} 2 \times p_1 + 1 &= R & p_1 = 6/7 \quad p_2 = 1/7 \quad R = 19/7 \\ 2 * q_1 + 3 * q_2 &= R \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} 7 \times q_1 + q_2 &= R & q_2 = 1 - q_1 \\ -q_1 + 3 &= R \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$6 \times q_1 + 1 = R \quad q_1 = 2/7 \quad q_2 = 5/7 \quad R = 19/7$$

Графический метод решения игры приведен на рисунке 6.1. Из уравнения 6.2 при $p_1=0$ получаем точку (0; 7), а при $p_1=1$ получаем точку (1; 2). Соединяем отмеченные точки прямой линией.

Анализируя второе уравнение, получаем точки (0; 1) и (1; 3). Строим вторую линию. Точка пересечения этих прямых соответствует решению системы уравнений.

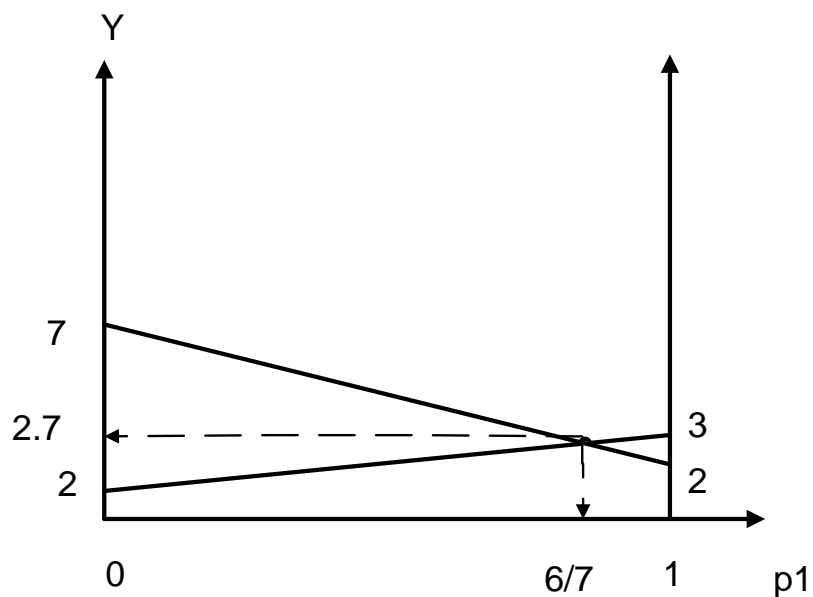


Рис. 6.1

6.3 Игры $n \times 2$ и $2 \times m$

Пусть имеется игра порядка $n \times m$, где n обозначает число стратегий первого игрока (**A**); m – число стратегий второго игрока (**B**).

Если каждый элемент матрицы одной строки (столбца) больше соответствующего элемента другой строки (столбца) или равен ему, то говорят, что первая стратегия доминирует над второй.

Пример игры задан матрицей 3×3 , приведенной в таблице 6.4.

Таблица 6.4

	B1	B2	B3	B4
A1	0	2	3	-1
A2	-3	3	4	9
A3	2	4	4	8

В этой игре стратегия **A3** доминирует над **A1**. Эта стратегия (**A3**) лучше, поэтому ее оставляют в матрице, удаляя доминируемую (**A1**).

Стратегия **B2** доминирует над **B1**; **B3** над **B2**; **B2** над **B1**. Здесь доминирующие стратегии (**B2** и **B3**) хуже, и их следует удалить.

Знание соотношения доминирования позволяет в ряде случаев свести игры $2 \times m$ и $n \times 2$ к играм 2×2 [1].

6.4 Графический метод решения игр $2 \times n$

Пример 1. Игра, задана платёжной матрицей. Первый игрок имеет стратегии A1, A2. Второй игрок имеет стратегии B1, B2, B3.

q1 q2 q3

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 P1 \\
 P2
 \end{array}$$

На плоскости R 0 p_1 введём систему координат и на оси 0 p_1 отложим отрезок единичной длины A_1 , A_2 , каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 (p_1 , $1 - p_1$). В частности, точке A_1 (0;0) отвечает стратегия A_1 , точке A_2 (1;0) – стратегия A_2 и т.д.

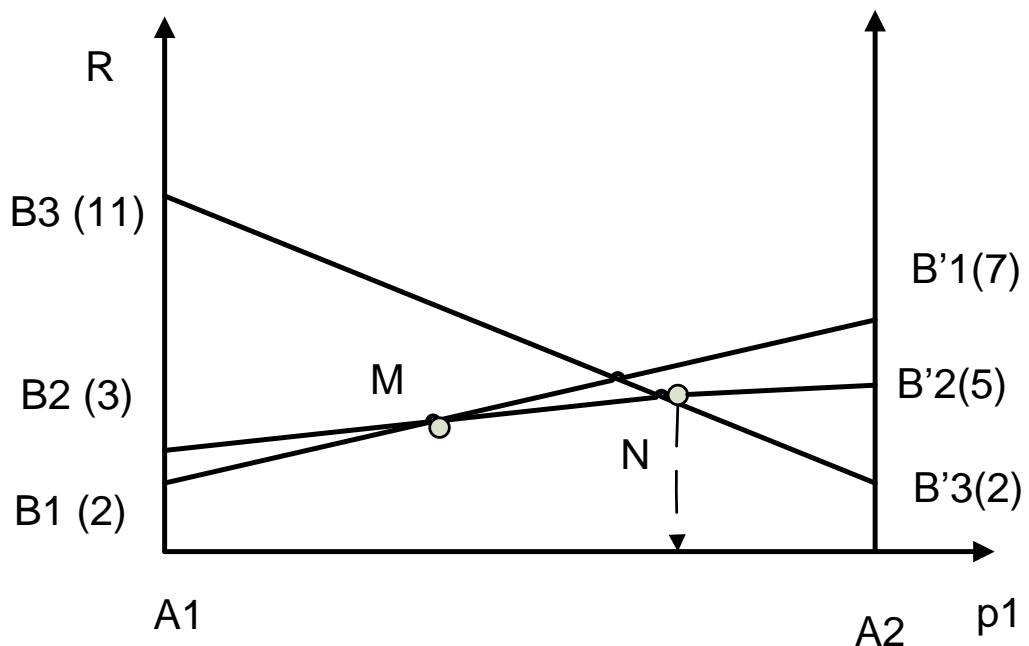


Рис.6.2

В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков (рисунок 6.2). На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью OR) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A_1 , а на втором при стратегии A_2 . Если игрок 1 применит стратегию A_1 , то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – 2, при

стратегии $\mathbf{B}_2 - 3$, а при стратегии $\mathbf{B}_3 - 11$. Числам 2, 3, 11 на оси OR соответствуют точки $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ и \mathbf{B}_3 .

Если же игрок 1 применит стратегию \mathbf{A}_2 , то его выигрыш при стратегии \mathbf{B}_1 равен 7, при $\mathbf{B}_2 - 5$, а при $\mathbf{B}_3 - 2$. Эти числа определяют точки $\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, \mathbf{B}'_3$ на перпендикуляре, восстановленном в точке \mathbf{A}_2 . Соединяя между собой точки \mathbf{B}_1 и $\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}'_2, \mathbf{B}_3$ и \mathbf{B}'_3 получим три прямые, расстояние до которых от оси $(0 \ p1)$ определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка $\mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1$ до оси $0p1$ определяет средний выигрыш \mathbf{R}_1 при любом сочетании стратегий $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ (с частотами $p1$ и $1-p1$) и стратегией \mathbf{B}_1 игрока 2. Это расстояние равно

$$2p1 + 6(1 - p2) = R1$$

(Вспомните планиметрию и рассмотрите трапецию $\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 \mathbf{A}_2$)

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломанной $\mathbf{B}_1 \mathbf{M} \mathbf{N} \mathbf{B}'_3$ определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке \mathbf{N} .

Следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $\mathbf{P}^* = (p1, 1-p1)$, а её ордината равна цене игры $R0$. Координаты точки находим как точку пересечения прямых $\mathbf{B}_2 \mathbf{B}'_2$ и $\mathbf{B}_3 \mathbf{B}'_3$.

Соответствующие два уравнения имеют вид

$$3 \cdot p1 + 5 \cdot (1 - p1) = R$$

$$11 \cdot p1 + 2 \cdot (1 - p1) = R$$

$$p1 = 3/11; \quad p2 = 8/11; \quad R = 49/11$$

Следовательно, $\mathbf{P} = (3/11; 8/11)$, при цене игры $R = \frac{49}{11}$.

Таким образом мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы (B1 не входит в оптимальную смешанную стратегию)

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

$$3 \cdot q_2 + 11 \cdot q_3 = R$$

$$5 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3 = R$$

$$q_2 = 9/11; \quad q_3 = 2/11 \quad R = 49/11$$

и, следовательно, $\mathbf{Q} = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (Из рисунка видно, что стратегия \mathbf{B}_1 не войдёт в оптимальную стратегию.

6.5 Графический метод решения игр $m \times 2$

Пример 1. Игра, задана платёжной матрицей. Первый игрок имеет стратегии $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$. Второй игрок имеет стратегии $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$.

Найти решение игры, заданной матрицей.

$$\begin{matrix} & & \begin{matrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Решение. Матрица имеет размерность 2×4 . Строятся прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. Ломанная $\mathbf{A}_1 \mathbf{K} \mathbf{A}'_4$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1, а отрезок $\mathbf{N K}$ — цене игры (рисунок 6.3).

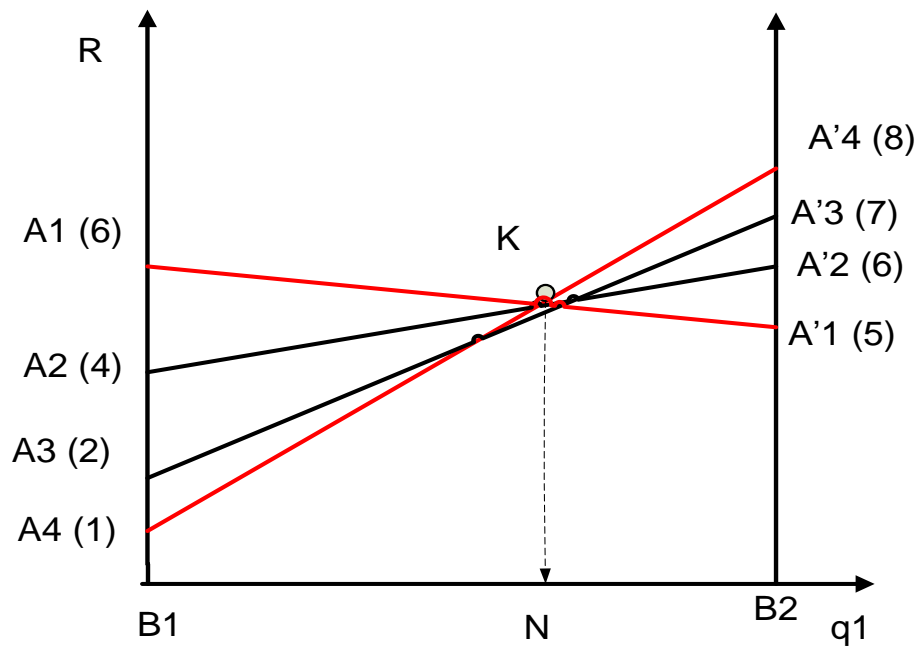


Рис.6.3

Решение игры таково

$$Q = \left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right); \quad P = \left(\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}\right); \quad R = \frac{43}{8}.$$

Пример 2. В магазине имеются 2 зоны **A** и **B**. В зоне **A** большая толпа покупателей, а в зоне **B** - меньше. Администрация имеет 2 полицейских в штатском, и видеокамеру в месте **T** для наблюдения за зонами **A** и **B**.

Полицейские имеют 6 стратегий поведения: **ТТ**, **АВ**, **АА**, **ВВ**, **ТА**, **ТВ**, которые обозначим как **p1**, **p2**, ..., **p6**. В нашей привычной терминологии это игрок **A**, а вор – это игрок **B**.

Вор имеет 2 стратегии красть в зоне **A** (**B1**) или красть в зоне **B** (**B2**). Полицейские ищут такие смешанные стратегии **A1**, **A2**, ..., **A6**, чтобы обеспечить задержание вора с вероятностью **R** независимо от поведения воров. Вор ищет такие стратегии (**B1**, **B2**), чтобы вероятность его задержания не превышала **R**.

Задана матрица игры

Стратегия полицейских	Характеристика стратегии полицейских	Стратегия В1 (зона А)	Стратегия В2 (зона В)
A1	ТТ	0,51	0,75
A2	АА	0,64	0,36
A3	ВВ	0,19	0,91
A4	ТА	0,58	0,60
A5	ТВ	0,37	0,85
A6	АВ	0,46	0,76

Решение

В графическом методе решения задачи строятся прямые, соответствующие стратегиям полицейских.

B1 B2

$$A1 \quad 0,51 \cdot q_1 + 0,75 \cdot q_2 \leq R$$

$$A2 \quad 0,64 \cdot q_1 + 0,36 \cdot q_2 \leq R$$

$$A3 \quad 0,19 \cdot q_1 + 0,91 \cdot q_2 \leq R$$

$$A4 \quad 0,58 \cdot q_1 + 0,60 \cdot q_2 \leq R$$

$$A5 \quad 0,37 \cdot q_1 + 0,85 \cdot q_2 \leq R$$

$$A6 \quad 0,46 \cdot q_1 + 0,76 \cdot q_2 \leq R$$

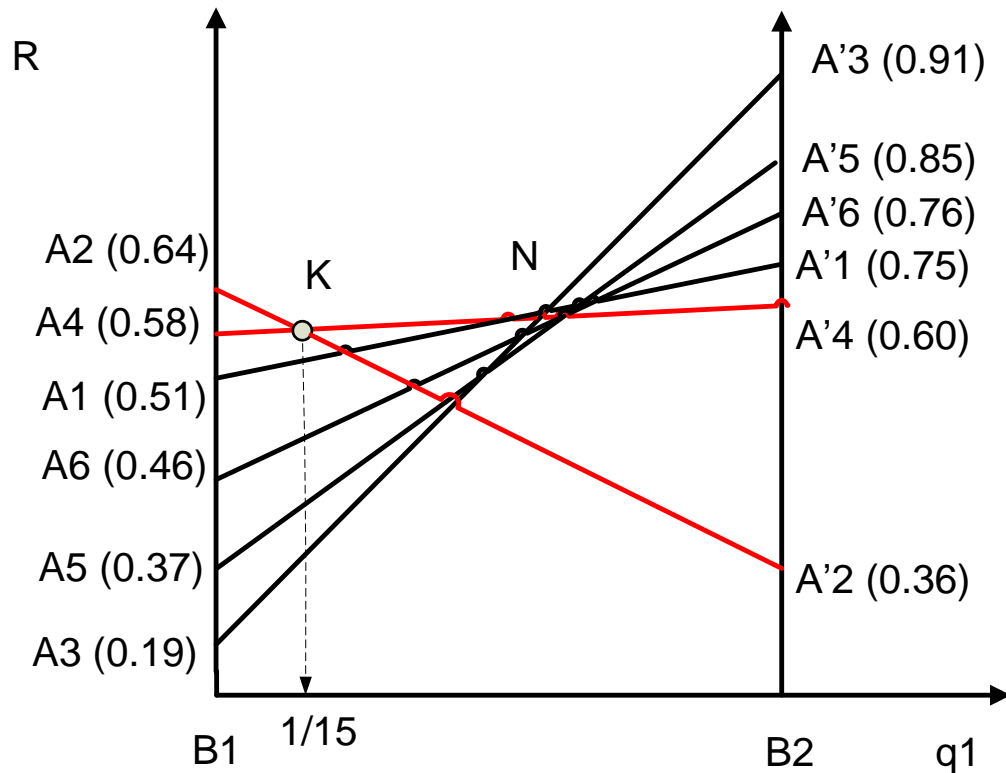


Рис.6.4

Ломанная A2 K N A'3 соответствует верхней границе выигрыша полицейских, а ордината точки **К** — цене игры (рисунок 6.4). В точке K полицейские имеют гарантированный выигрыш, равный 1/15.

Ответ: $P=(0; 1/15; 0; 14/15; 0; 0)$ $x_2=1/15$ (стратегия AA) и $x_4=14/15$ (стратегия ТА); $Q=(0.8; 0.2)$; $R=0.584$

Контрольные вопросы

1. Что такое стратегия игры?
2. Как найти седловую точку?
3. Как найти нижнюю цену игры?
4. Как найти верхнюю цену игры?
5. Что такое смешанные стратегии?
6. Графический метод решения игры.
7. Какие стратегии можно удалять?
8. Что такое равновесие Нэша?

6.6 Принятие решений в условиях риска

6.6.1 Критерий ожидаемого значения

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть X – случайная величина с математическим ожиданием MX и дисперсией DX . Если x_1, x_2, \dots, x_n – значения случайной величины (с.в.) X , то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{DX}{n} \rightarrow 0 \text{ и } \bar{x} \rightarrow MX.$$

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемого значения справедливо только в случае, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае, если ремонт будет производиться слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t . В этом и состоит элемент "риска".

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T , при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и на проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t , а n_t – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$OЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t . Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t) , то $M(n_t) = np_t$. Таким образом,

$$OЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}.$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид

$$OЗ(T^*-1) \geq OЗ(T^*),$$

$$OЗ(T^*+1) \geq OЗ(T^*).$$

Следовательно, начиная с малого значения T , вычисляют $OЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значения p_t приведены в таблице 6.5.

Таблица 6.5

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$OZ(T)$
1	0.05	0	$\frac{50 (100 \cdot 0 + 10)}{1} = 500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$$T^* \rightarrow 3, \quad OZ(T^*) \rightarrow 366.7$$

Следовательно, профилактический ремонт необходимо делать через $T^*=3$ интервала времени, так как этому интервалу соответствуют минимальные ожидаемые затраты 366.7.

6.7 Критерий «ожидаемое значение – дисперсия»

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций.

Если x – случайная величина с дисперсией DX , то среднее арифметическое \bar{x} имеет дисперсию DX/n , где n – число слагаемых в \bar{x} . Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что \bar{x} близко к MX , увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий “ожидаемое значение – дисперсия” для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$z_T = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}.$$

Так как n_t , $t = \overline{1, T-1}$ – случайная величина, то z_T также случайная величина. Параметр n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и

$D(n_t) = np_t(1-p_t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} D(z_T) &= D\left(\frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) = \\ &= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 \right\}, \end{aligned}$$

где $C_2 n = \text{const}$.

Из примера 1 следует, что

$$M(z_T) = M(z(T)).$$

Следовательно, искомым критерием будет минимум выражения

$$M(z(T)) + \kappa D(z_T).$$

Константу “ κ ” можно рассматривать как уровень несклонности к риску, так как константа “ κ ” определяет “степень возможности” дисперсии $D(z_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(z(T))$, то он может выбрать “ κ ” много больше единицы. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $\kappa=1$ получаем задачу

$$M(z(T)) + D(z(T)) = n \left\{ \left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2} \right) \sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T} \right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C_2^2}{T} \right\}$$

По данным примера 1 можно составить таблицу 6.6.

Таблица 6.6

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M(z(T)) + D(z(T))$
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала $T^*=1$.

6.8 Принятие решений в условиях неопределённости

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы возможным состояниям системы.

Пусть, например, из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решения таковы:

E_l – выбор размеров из соображений максимальной долговечности;

E_m – выбор размеров из соображений минимальной долговечности;

E_i – промежуточные решения.

Условия требующие рассмотрения таковы:

F_l – условия, обеспечивающие максимальной долговечность;

F_n – условия, обеспечивающие минимум долговечности;

F_i – промежуточные условия.

Под результатом решения $e_{ij} = e(E_i ; F_j)$ здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующую прибыль, полезность или надёжность. Обычно мы будем называть такой результат полезностью решения. Тогда семейство (матрица) решений $\|e_{ij}\|$ имеет вид, приведенный на рисунке 6.5.

	1	2	• •	n
1	11	12	• •	1n
2	21	22	• •	2n
• •	• • • •	• • • • • • • • • •		
m	m1	m2	• •	mn

Рис.6.5

Чтобы прийти к однозначному и по возможности по выгоднейшему варианту решению необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом матрица решений $\|e_{ij}\|$ сводится к одному столбцу.

Таким образом, каждому варианту E_i приписывается некоторый результат e_{ir} , характеризующий, последствия этого решения.

6.8.1 Минимаксный критерий

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Необходимо выбрать те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения e_{ir} этого столбца.

Выбранные варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

- о возможности появления внешних состояний F_j ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний F_j ;
- решение реализуется только один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск.

6.8.2 Критерий Байеса – Лапласа

Обозначим через q_i вероятность появления внешнего состояния F_j .

Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется ещё одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояния F_j известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Таким образом, критерий Байеса-Лапласа (В-Л-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

6.8.3. Критерий Сэвиджа

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии F_j вместо варианта E_i выбрать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы), возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта на вариант E_i . В последнем случае e_{ir} представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям $F_j, j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта E_i .

Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора трактуется так:

каждый элемент матрицы решений $\|e_{ij}\|$ вычитается из наибольшего результата $\max e_{ij}$ соответствующего столбца.

Разности a_{ij} образуют матрицу остатков $\|e_{ij}\|$. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей e_{ir} . Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию [8].

6.8.4 Пример и выводы

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же, если вирус не будет вовремя обнаружен, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E_1 — полная проверка;

E_2 — минимальная проверка;

E_3 — отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

F_1 — вирус отсутствует;

F_2 – вирус есть, но он не успел повредить информацию;

F_3 – есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации, приведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7

	F_1	F_2	F_3	ММ-критерий		критерий В-Л	
				$e_{ir} = \min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	<u>-25.0</u>	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	<u>-21.33</u>

Согласно ММ-критерию, следует проводить полную проверку. По критерию Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны: $P(F_j) = q_j = 0.33$, рекомендуется отказаться от проверки.

В соответствии с критерием Сэвиджа матрица остатков для этого примера приведена в таблице 6.8.

Таблица 6.8

	F_1	F_2	F_3	Критерий Сэвиджа	
				$e_{ir} = \min_j a_{ij}$	$\min_j e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	<u>+14.0</u>
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать, поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых

принимается решение. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин невелико, лучше пользоваться критериями минимакса или Севиджа [8].

6.9 Производные критерии

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_i e_{ir} = \{ C \min_j e_{ij} + (1 - C) \max_j e_{ij} \},$$

где C – весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица формируется следующим образом:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы e_{ir} этого столбца.

При $C=1$ критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При $C = 0$ он превращается в критерий «азартного игрока» $\max_i e_{ir} = \max_i \max_j e_{ij}$, т.е. мы становимся на точку зрения азартного игрока, делающего ставку на то, что «выпадет» выгоднейший случай.

В технических приложениях сложно выбрать весовой параметр C , так как трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще используют параметр C , равный 0,5.

Критерий Гурвица применяется в следующих случаях:

- о вероятностях появления состояния F_j ничего не известно;

- с появлением состояния F_j необходимо считаться;
- реализуется только малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

6.10 Статические игры с полной информацией

Задача дилемма заключённого. Два заключённых подозреваются как сообщники в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией. Каждому по отдельности предлагается сознаться (С) к определенному сроку, но можно и молчать (М). Если один сознался, другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает максимальный срок (9 лет). Если сознаются оба, то обоим срок снижается до 6 лет. Если оба молчат, то вину по основному преступлению доказать невозможно, и они получают по 1 году за незаконное владение оружием (рисунок 6.6).

	М	С
М	-1 . -1	-9, 0
С	0, -9	-6, -6

Рис. 6.6

В дилемме заключенного у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия. Сознаться лучше, чем молчать, что бы ни делал другой игрок:

$$0 > -1; \quad -6 > -9.$$

Казалось бы исход игры с выбором стратегий очевиден (С,С). Это и есть равновесие Нэша. Однако вектор $(-1; -1)$ превосходит $(-6, -6)$.

Проблема противоречия индивидуального и коллективного выбора состоит в том, что каждый может навязать выгодное для себя равновесие.

Парето-оптимальные решения обладают тем свойством, что улучшать значения целевой функции одного игрока можно только за счёт других игроков.

Устойчивость приобретает важное значение. Другой принцип принятия решений, связан с понятием устойчивости. При выборе устойчивого решения говорят, что достигнута ситуация равновесия.

Неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае её возникновения ей грозит распад, обусловленный возможностями одного из игроков путём изменения только своей стратегии улучшить свое положение за счёт других. На этом основании возник принцип устойчивости Нэша (американский математик Джон Нэш).

Он гласит, что выбор рациональной стратегии должен производиться среди множества точек равновесия. Равновесные решения называются оптимальными по Нэшу. В дилемме заключённого равновесию Нэша соответствует стратегия (С, С).

6.11 Приближенные методы решения игр

При исследовании игровых ситуаций часто нет необходимости в точном решении игры. Для этих целей может быть применен численный метод итераций.

Идея метода сводится к следующему. Мысленно игру проигрывают много раз и вычисляют математическое ожидание обеих выигрышей стратегов, и их среднее арифметическое принимают за цену игры.

К недостаткам итерационного алгоритма можно отнести сравнительно медленную сходимость.

Пример. Решить игру методом Брауна (метод итераций), Выполнить 3 итерации. Игра задана платёжной матрицей, приведённой в таблице 6.9

Таблица 6.9

	B1	B2	B3
A1	8	2	4
A2	4	5	6
A3	1	7	3

n – номер исследуемой пары ходов;

I – номер выбранной стратегии игрока A ;

$B1$ - выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии $B1$;

$B2$ -выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии $B2$;

$B3$ - выигрыш накопленный за первые n игр игроком B при стратегии $B3$;

j – номер стратегии, выбранной противником;

$A1$ - накопленный выигрыш за n игр при стратегии $A1$;

$A2$ - накопленный выигрыш за n игр при стратегии $A2$;

$A3$ - накопленный выигрыш за n игр при стратегии $A3$;

R_{\min} –минимальный средний выигрыш, который равен минимальному накопленному выигрышу, деленному на число игр;

R_{\max} –максимальный средний выигрыш;

$R_{\text{ср}}=(R_{\min}+R_{\max})/2$.

На второй итерации минимальный накопленный выигрыш равен 7 (подчёркивание снизу в таблице 6.10), а максимальный накопленный

выигрыш равен 12. Разделив на число игр получаются следующие значения: $R_{\min}=7/2=3,5$; $R_{\max}=12/2=6$; $R_{\text{ср}}=(3,5+6)/2=4,75$.

Этот метод даёт возможность найти приближённое значение оптимальных смешанных стратегий обоих игроков. Для этого надо подсчитать частоту применения каждой чистой стратегии (i, j) и принять её за приближенное значение вероятности использования этой чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии соответствующего игрока.

Таблица 6.10

n	i	B1	B2	B3	j	A1	A2	A3	Rmin	Rmax	Rcp
1	3	<u>1</u>	7	3	1	<u>8</u>	4	1	1	8	4,5
2	1	9	9	<u>7</u>	3	<u>12</u>	10	4	3,5	6	4,75
3	1	17	11	<u>11</u>	2	14	<u>15</u>	11	3,67	5,0	4,33
4	2	21	<u>16</u>	17	2	16	<u>20</u>	18	4,0	5,0	4,5
5	2	25	<u>21</u>	23	2	18	<u>25</u>	25	4,2	5,0	4,6

При увеличении числа n все три величины $R_{\text{ср}}$, R_{\min} , R_{\max} будут приближаться к цене игры, причём $R_{\text{ср}}$ наиболее быстро.

Контрольные вопросы

Задача 1. Решить игру 2×3 , заданную матрицей, используя аналитический и графический методы. Указать доминирующие стратегии и упростить игру.

	B1	B2	B3
A1	2	4	1
A2	5	1	4

Задача 2. Решить игру 3×3 , заданную матрицей, используя аналитический и графический методы. Указать доминирующие стратегии и упростить игру.

	B1	B2	B3
A1	7	3	5
A2	4	5	6
A3	2	7	4

7 Задача многокритериального выбора

7.1. Основные подходы к решению многокритериальных задач

Задача принятия решения называется *многокритериальной*, если содержит два и более критериев оценки качества решения [1,5].

Основные этапы решения любой задачи – построение модели, выбор критерия оптимальности, нахождение оптимального решения. При решении задачи предполагается, что модели носят объективный характер, а также что в такой модели решение может быть получено единственно возможным способом. Если есть объективная модель, то различные специалисты-аналитики должны получить одинаковые результаты. При таком подходе перед человеком, принимающим решение или аналитиком стоит задача найти при решении задачи единственно верное и научно обоснованное решение. Таким образом, если задача четко сформулирована и критерий оптимальности определен, то аналитическим методом можно показать насколько одно решение лучше другого. Анализ практических проблем, с которыми сталкиваются специалисты привел к появлению класса многокритериальных задач.

Многокритериальные задачи имеют следующие особенности:

- задача может иметь уникальный характер и отсутствуют статистические данные, которые позволяют однозначно обосновать соотношение между критериями;
- на момент принятия решения могут принципиально отсутствовать данные, которые позволяют объективно оценить возможные последствия принятого решения.

Недостаток информации в этом случае может быть восполнен экспертами на основании некоторого опыта. Одной из наиболее типичных многокритериальных задач является задача стоимость-эффективность. В

этом случае на этапе синтеза стоимости или эффективности рекомендуются два основных подхода: фиксированная эффективность при минимально возможной стоимости. Таким образом выбирается самая дешевая альтернатива, обладающая заданной эффективностью.

Второй подход – фиксированная стоимость при максимально возможной эффективности. Смысл обоих подходов состоит в том, что один из критериев оценки альтернатив переводится в ограничение. Сразу же возникает вопрос – на каком уровне установить ограничения. В ряде случаев можно использовать отношение двух указанных критериев. Однако, при этом следует иметь в виду, что отношение стоимости к эффективности может быть одним и тем же при совершенно разных абсолютных значениях числителя и знаменателя.

Третий подход к синтезу критериев стоимости и эффективности приводит к построению множества Парето.

Парето ввел в экономику понятия оптимальности для случая нескольких критериев. Этот подход так и стал называться – *оптимальность по Парето*. Парето оптимальным называется такое состояние экономики, которое не может быть улучшено ни одним из участников без ухудшения состояния другого участника. И в настоящее время принцип Эджворда-Парето является фундаментальным инструментом при решении задач многокритериального выбора. Суть такого подхода можно определить графиком: Вариант А – менее дорогой, чем вариант В, но и менее эффективный. Вариант В – более дорогой, но и более эффективный. Сравнивая варианты, находящиеся во множестве Эджворда-Парето аналитик принимает окончательные выводы.

При решении многокритериальных задач их так же можно классифицировать как структурированные, слабо структурированные и не структурированные. Хорошо структурированные задачи существенные зависимости хорошо определены и могут быть выражены математическими выражениями. В слабо структурированных задачах содержатся как

качественные, так и количественные элементы или критерии, причем качественные имеют тенденцию доминировать. В таких задачах информация необходимая для однозначного решения – отсутствует.

Аналитик, решающий такую многокритериальную задачу, строит адекватную модель, проявляя при этом определенный волюнтаризм. В слабо структурированных задачах недостаток объективной информации. В тех случаях, если структура, которая принимается как совокупность между параметрами не определена, то задача переходит в разряд неструктурированных. Характерной особенностью многокритериальных задач является одновременное рассмотрение двух пространств.

Во-первых, пространство переменных, которое используется для построения модели, а во-вторых пространство критериев. Вариант совместного соединения этих двух пространств для модели с двумя параметрами (для двумерной плоскости) и двух критериев C_1 и C_2 позволяет построить некоторую допустимую область изменения значений критериев. (рисунок) Вид и размер этой области зависит от уравнений связи между параметрами и критериями. В реальных задачах число переменных может быть достаточно велико до нескольких тысяч, число критериев не 2-3 порядка ниже. ЛПР анализирует область допустимых значений C и определяет свои требования качеству решения. При анализе пространства Эджворда-Парето возможны следующие варианты: - первый подход создан на базе визуализации области Эджворда-Парето и предоставляет аналитику возможность проводить анализ на плоскостях по критериям при фиксированных значениях всех других критериев. Этот подход носит название метод достижимых целей.

Другой подход применяется в тех случаях, когда аналитик может создать целостный облик альтернативы о совокупности критериальных оценок и заданных параметров. Он характерен для реконструирования сложных систем.

Способы решения многокритериальных задач. Задача принятия решения называется *многокритериальной*, если содержит два и более критериев оценки качества решения. Задача принятия решения в многокритериальной задаче может быть записана в виде функционала, содержащего T – постановку задачи, A – перечень множества альтернатив, K – множество критериев, X – множество шкал оценок критериев, F – множество предпочтений эксперта, D – множество решающих правил.

Для выбора варианта разрабатываемой системы, которая обеспечивает низкую стоимость, повышенную надежность, высокую реактивность. Одновременное достижение всех перечисленных критериев не представляется возможным.

Например, рассмотрим три конкурирующих варианта архитектуры информационной системы. Каждый из этих вариантов характеризуется количественными показателями стоимости и реактивности.

Анализ приведенных критериев позволяет сделать вывод, что вариант 3 имеет худшие значения по обоим критериям. По отношению к варианту 2 по реактивности и по цене. Следовательно, при такой постановке вопроса вариант 3 может быть исключен из дальнейшего рассмотрения. Для оценки альтернатив вводятся следующие определения: Альтернатива A называется *доминирующей* по отношению к альтернативе B , если по всем критериям альтернатива A не хуже, чем B , а хотя бы по одному критерию лучше. В данном случае альтернатива B называется *доминируемой*. Таким образом, альтернативы являются эффективными, если каждая из них превосходит любую другую по какому-либо критерию.

Эффективные альтернативы не сравнимы между собой на основе только критериальных оценок. Лучшая из альтернатив может быть выбрана только с учетом дополнительной информации, которая отражает предпочтение человека к принимаемому решению. Таким образом, предварительный этап решения многокритериальных задач состоит в попарном сравнении альтернатив и исключении *доминируемых*.

Для задач, которые можно структурировать и описать объективными моделями существует возможность количественно определить значение критериальных оценок.

Для этого используются следующие методы: - метод аддитивной и мультипликативной свертки. Предположим, что структурированная задача характеризуется критериями C_1, C_2, \dots, C_n . Причем первые m критериев необходимо максимизировать, остальные – минимизировать. Тогда *мультипликативный критерий* имеет вид отношения произведения критериев, которые надо максимизировать к произведению критериев, которые надо минимизировать.

Либо используется *аддитивный критерий*, который записывается как сумма с весовыми коэффициентами, характеризующими каждый критерий. Положительные значения соответствуют максимизируемому критерию, отрицательные значения соответствуют минимизируемым критериям. Абсолютное значение отражает степень важности i -того критерия. Перед решением таких задач, как правило производится нормирование критериев с определением диапазона их изменения.

Числитель представляет собой разницу между реальным и минимальным значением критерия. В знаменателе разница между максимальным и минимальным значением критерия показывает допустимый диапазон изменения критерия. Особенность описания мультипликативного и аддитивного методов является то, что неэффективное значение по одному локальному критерию может быть скомпенсировано значением по другому критерию. - метод выбора глобального критерия и перевод остальных критериев в ограничения.

Рассмотрим пример комплексного критерия оценки качества ЭВМ.

$$K = \alpha_1 m_0 + \alpha_2 V_0 + \alpha_3 P_0 + \alpha_4 \lambda_0 + \alpha_5 C_0 + \alpha_6 T_0, \quad \sum_{i=1}^6 \alpha_i = 1,$$

где α_i – весовой коэффициент важности частного критерия;

m_0 – масса;

V_0 – объем;

P_0 – потребляемая мощность;

$\lambda_0 - \lambda$ - характеристика;

C_0 – стоимость;

T_0 – срок разработки.

Индекс 0 у частных критериев свидетельствует о том, что это приведенные значения.

Формула приведения частного критерия:

$$x_0 = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

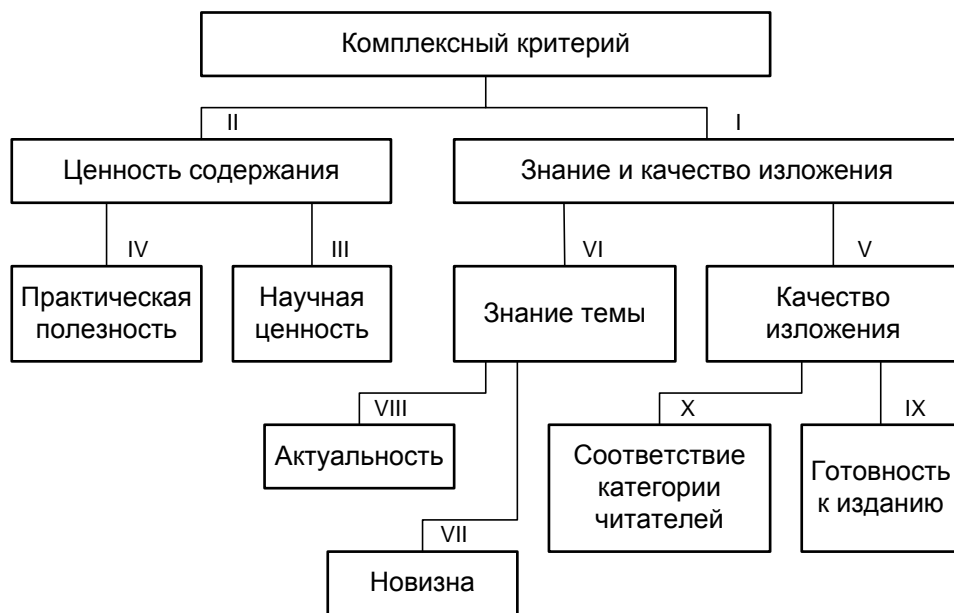
Наиболее часто при решении практических задач один из критериев позиционируется как главный, а остальные переводятся в разряд ограниченных. Например, минимизация стоимости системы при выполнении ограничений на реактивность. Либо максимизация вероятности безотказной работы при выполнении бюджетных ограничений на стоимость - метод уступок и компромиссов. Суть этого метода состоит в том, что в начале решается задача оптимизации по главному критерию без учета значений других критериев. Результат решения – это оптимальное значение главного критерия. После чего производится оптимизация по следующему по степени важности критерию, при условии ограничений на главный критерий. Человек, принимающий решения, определяет величину уступки для критерия C_1 . И далее принимается решение по критерию. - метод последовательного поиска удовлетворительных значений критерия. Метод последовательного анализа ситуаций позволяет разбить многокритериальную задачу на более простые подзадачи. Таких процедур последовательного анализа известно несколько. SIGMOP, Дайера-Джеофреона, STEM. Эти методы отличаются друг от друга.

7.2 Методы векторной стратификации

Построены на базе гипотезы бинарности сравнений, которая гласит: человек устойчиво сравнивает объекты по двум критериям. При увеличении критериев разброс мнений экспертов возрастает.

Существует несколько методов выбора оптимального варианта (решения) на базе векторной стратификации. К ним относится метод дихотомии и метод бинарной композиции.

В начале разрабатывается бинарная критериальная структура с применением последующего выделения главного критериального свойства – принципа последовательной дихотомии.



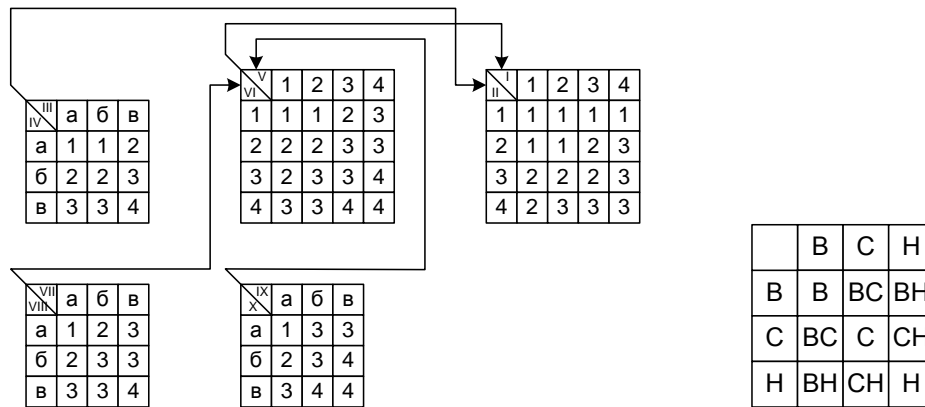
В соответствии с разработанной критериальной структурой разрабатывается алгоритм стратификации, т.е. деление на страты.

Страта первая соответствует 1, т.е. издать рукопись.

Страта вторая соответствует 2, т.е. доработать рукопись.

Страта третья соответствует 3, т.е. отклонить рукопись.

Попарное сравнение разрабатывается с привлечением экспертов.



В некоторых задачах векторной стратификации интенсивность критериальных свойств выражается в словах. Шкалы интенсивности критериальных свойств, выраженные в словах, называются вербальными или лингвистическими.

Недостаток: неравномерность вербальных шкал в понимании различными экспертами. Это приводит к существенным ошибкам при использовании на практике. Поэтому на практике применяется универсальная или укороченная шкала, которая определяется статистическим путем.

Например, вербальная шкала Харрингтона, состоящая из 5 оценок:

- 1) ОВ (очень высокая) $\chi = 1,0 \div 0,8$;
- 2) В (высокая) $\chi = 0,8 \div 0,63$;
- 3) С (средняя) $\chi = 0,63 \div 0,37$;
- 4) Н (низкая) $\chi = 0,37 \div 0,2$;
- 5) ОН (очень низкая) $\chi = 0,2 \div 0$.

7.3 Метод попарных сравнений

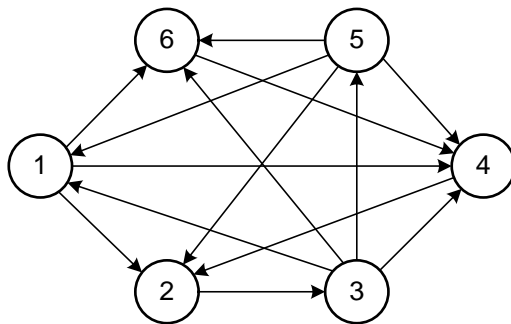
Применяется в тех случаях, когда число объектов больше 10 и экспертам трудно провести ранжировку всей совокупности объектов. В этом

случае эксперты сравнивают объекты попарно друг с другом. Результат сравнения j -го эксперта оформляется матрицей A^j .

		1	2	3	4	5	6
	1	0	1	0	1	0	1
	2	0	0	1	0	0	0
$A^j =$	3	1	0	0	1	1	1
	4	0	1	0	0	0	0
	5	1	1	0	1	0	1
	6	0	0	0	1	0	0

$$a_{nm}^j = \begin{cases} 1, & \text{если по мнению } j\text{-го эксперта объект с индексом } n \\ & \text{предпочтительней объекта с индексом } m; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для каждого эксперта строится матрица A^j и проводится анализ графа на наличие циклов.



В примере существует цикл: 2-3-5-2. Это означает, что в решении j -го эксперта имеются противоречия и указанному графу нельзя поставить в соответствие строгую ранжировку.

7.4 Метод Дельфи

Сущность метода Дельфи состоит в том, что эксперты остаются анонимными и непосредственно не общаются друг с другом. Каждый результат анализируется в несколько туров и на каждом этапе используются результаты предыдущего тура опроса экспертов.

В первом туре эксперты ранжируют те варианты, которые им представили организаторы опроса. Обработка информации сводится к определению медианы, т.е. середины упорядоченного ряда и квартилей (середин отрезков, образовавшихся слева и справа от медианы).

На втором туре экспертам направляются полученные результаты и их просят проанализировать данные. Тех экспертов, чьи оценки выходят за диапазоны верхнего и нижнего квартилей просят обосновать свои суждения. Эти доводы передаются всем экспертам. Может оказаться, что большинство экспертов не учли какой-то фактор.

В третьем туре эксперты снова проводят ранжировку объектов, снова находят медиану и квартили. После третьего тура работа экспертов может быть закончена, если разбросы их мнений незначительны. При существенных разбросах может быть проведено еще несколько туров с анализом и обоснованием квартилей.

Медиана оценок последнего тура принимается за обобщенное мнение.

7.5 Примеры применения множества Эджворда – Парето

Варианты выбора альтернатив представлены в таблице 7.1. При оценке альтернатив использованы два критерия: стоимость и привлекательность.

Введем следующее определение. Назовем альтернативу **А** доминирующей по отношению к альтернативе **В**, если по всем критериям

оценки альтернативы **A** не хуже, чем альтернативы **B**, а хотя бы по одному критерию оценка **A** лучше. При этом альтернатива **B** называется доминируемой [8].

Таблица 7.1 - Оценки альтернативных вариантов туров

Альтернатива	Критерий	
	Стоимость	Привлекательность,
1.Океанские	Небольшая	Малая
2.Скандинавия	Высокая	Большая
3.Египет	Небольшая	Большая

Предположим, что по какой-то причине поездка в Египет оказалась невозможной (например, из-за участившихся нападений на туристов). Туры в Скандинавию и на Океанские острова не находятся в отношении доминирования. По одному из критериев лучше альтернатива 2, а по-другому — альтернатива 1.

Введем следующее определение: альтернативы относятся к множеству Эджворда-Парето (Э-П), если каждая из них превосходит любую другую по какому-то из критериев [1].

Множество Эджворда-Парето названо так по именам ученых, впервые обративших внимание на альтернативы, не уступающие друг другу по критериальным оценкам, т. е. на альтернативы, не находящиеся в отношении доминирования. Альтернативы, принадлежащие множеству Э-П, принято называть несравнимыми. Их действительно невозможно сравнить непосредственно на основе критериальных оценок. Но если решение должно быть принято (например, супруги должны из многих туров выбрать один), то сравнение альтернатив, принадлежащих множеству Э-П, возможно на основе дополнительной информации.

Нетрудно убедиться, что множество Э—П включает в себя наиболее «контрастные» альтернативы, сложные для сравнения. Если стоит задача выбора одной лучшей альтернативы, то она обязательно принадлежит множеству Э-П. Поэтому во многих методах принятия решений очень важен этап выделения множества Э-П из всего множества заданных альтернатив.

Один из возможных способов решения этой задачи состоит в попарном сравнении альтернатив и исключении доминируемых. Задача выделения множества Э—П обычно рассматривается как предварительная. За ней следует наиболее существенный этап принятия решений.

Рассмотрим второй пример. Имеются три альтернативных варианта создания информационных систем (ИС) с различными характеристиками стоимости и надежности.

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ИС1	В	С
ИС2	В	В
ИС3	С	С

К множеству Эджворда-Парето относятся те альтернативы, которые не доминируют по какому-либо критерию, т.е. они являются несравнимыми.

ИС3 доминирует над ИС1 по критерию стоимости. ИС2 и ИС3 не доминируют друг над другом и относятся к множеству Эджворда – Парето.

Поиск оптимального варианта из множества Эджворда – Парето невозможен без дополнительной информации. Например, при ограничении бюджета на стоимость разработки ИС можно выбрать один вариант.

7.6 Применение теории генетических алгоритмов для поиска многоэкстремальных значений

Для решения многоэкстремальных задач могут быть использованы генетические алгоритмы (ГА).

Генетические алгоритмы представляют собой алгоритмы поиска, построенные на принципах, сходных с принципами естественного отбора и генетики. Если говорить обобщенно, они объединяют в себе принцип выживания наиболее перспективных особей – решений и структурированный обмен информацией, в котором присутствует элемент случайности, который моделирует природные процессы наследования и мутации[6,8]. Дополнительным свойством этих алгоритмов является невмешательство человека в развивающийся процесс поиска.

Генетические алгоритмы имеют целью нахождение лучшего, а не оптимального решения задачи. Это связано с тем, что для сложной системы часто требуется найти удовлетворительное решение, а проблема достижения оптимума отходит на второй план. При этом другие методы, ориентированные на поиск именно оптимального решения, вследствие чрезвычайной сложности задачи становятся вообще неприменимыми. В этом кроется причина появления, развития и роста популярности генетических алгоритмов. Хотя, как и всякий другой метод поиска, этот подход не является оптимальным методом решения любых задач.

Преимущества генетических алгоритмов становятся еще более прозрачным, если рассмотреть основные их отличия от традиционных методов. Основных отличий четыре.

1. Генетические алгоритмы работают с кодами, в которых представлен набор параметров, напрямую зависящих от аргументов целевой функции. Причем интерпретация этих кадров производится только перед началом работы алгоритма и после завершения его работы для получения результата. В процессе работы манипуляции с кодами происходят

совершенно независимо от их интерпретации. Код рассматривается просто как битовая строка.

2. Для поиска генетический алгоритм использует несколько точек поискового пространства одновременно, а не переходит от точки к точке, как это делается в традиционных методах. Это позволяет преодолеть один из их недостатков – опасность попадания в локальный экстремум целевой функции, если она не является унимодальной, т.е. имеет несколько таких экстремумов. Использование нескольких точек одновременно значительно снижает такую возможность.

3. Генетические алгоритмы в процессе работы не используют никакой дополнительной информации, что повышает скорость работы. Единственной используемой информацией может быть область допустимых значений параметров и целевой функции в произвольной точке.

4. Генетический алгоритм использует как вероятностные правила для порождения новых точек анализа, так и детерминированные правила для перехода от одних точек к другим. Выше уже говорилось, что одновременное использование элементов случайности и детерминированности дает значительно больший эффект, чем раздельное.

Прежде чем рассматривать непосредственно работу генетического алгоритма, введем ряд терминов, которые широко используются в данной области.

Выше было показано, что генетический алгоритм работает с кодами безотносительно их смысловой интерпретации. Поэтому сам код и его структура описываются понятием генотип, а представляет, по сути, точку пространства поиска. С целью максимального приближения к биологическим терминам экземпляр кода называют хромосомой, особью или индивидуумом. Далее для обозначения строки будет использоваться термин “особь”.

На каждом шаге работы генетический алгоритм использует несколько точек поиска одновременно. Совокупность этих точек является набором особей, который называется популяцией. Количество особей в популяции

называют размером популяции. Поскольку в данном разделе рассматриваются классические генетические алгоритмы, то можно сказать, что размер популяции является фиксированным и представляет одну из характеристик генетического алгоритма. На каждом шаге работы генетический алгоритм обновляет популяцию путем создания новых особей и уничтожения старых. Чтобы отличать популяцию на каждом из шагов и сами эти шаги, их называют поколениями и обычно идентифицируют по номеру. Например, популяция, полученная из исходной популяции после первого шага работы алгоритма, будет первым поколением, после следующего шага - вторым, и т. д.

В процессе работы алгоритма генерация новых особей происходит на основе моделирования процесса размножения. При этом, естественно, порождающие особи называют родителями, а порожденные – потомками. Родительская пара, как правило, порождает пару потомков. Непосредственная генерация новых кодовых строк из двух выбранных происходит за счет работы оператора скрещивания, который также называют кроссинговером (от англ. crossover). При порождении новой популяции оператор скрещивания может применяться и ко всем парам родителей. Часть этих пар может переходить в популяцию следующего поколения непосредственно. Насколько часто будет возникать такая ситуация, зависит от значения вероятности применения оператора скрещивания, который является одним из основных параметров генетического алгоритма.

Моделирование процесса мутации новых особей осуществляется за счет работы оператора мутации. Основным параметром оператора мутации также является вероятность мутации.

Поскольку размер популяции фиксирован, то порождение потомков должно сопровождаться уничтожением других особей. Выбор пар родителей из популяции для порождения потомков производится оператором отбора, а выбор особей для уничтожения – оператором редукции.

Таким образом, можно перечислить основные понятия и термины, используемые в области генетических алгоритмов:

К характеристикам генетического алгоритма относятся:

- размер популяции;
- оператор скрещивания и вероятность его использования;
- оператор мутации и вероятность мутации;
- оператор отбора;
- оператор редукции;
- критерий останова.

Операторы отбора, скрещивания, мутации и редукции называют еще генетическими операторами.

Критерием останова работы генетического алгоритма может быть одно из трех событий:

- сформировано заданное пользователем число поколений;
- популяция достигла заданного пользователем качества (например, значение качества всех особей превысило заданный порог);
- достигается некоторый уровень сходимости, т.е. особи в популяции стали настолько подобными, что дальнейшее их улучшение происходит чрезвычайно медленно.

Характеристики генетического алгоритма выбираются таким образом, чтобы обеспечить малое время работы, с одной стороны, и поиск как можно лучшего решения, с другой.

Рассмотрим теперь непосредственно работу генетического алгоритма.

1. Создание исходной популяции (задается случайным образом).
2. Выбор родителей для процесса размножения (работает оператор отбора).
3. Создание потомков выбранных пар родителей (работает оператор скрещивания).
4. Мутация новых особей (работает оператор мутации).

5. Расширение популяции за счет добавления новых, только что порожденных особей.
6. Сокращение расширенной популяции до исходного размера (работает оператор редукции).
7. Останов работы генетического алгоритма по заданному критерию.
8. Поиск лучшей достигнутой особи в конечной популяции является результатом работы генетического алгоритма.

В основе оператора отбора, который служит для выбора родительских пар и уничтожения особей, лежит принцип “выживает сильнейший”. В качестве примера можно привести следующий оператор. Выбор особи для размножения производится случайно. Вероятность участия особи в процессе размножения вычисляется по формуле

$$P_i = f_i / \sum_{j=1}^n f_j,$$

где n – размер популяции; i – номер особи; P_i – вероятность участия особи в процессе размножения; f_i – значение целевой функции для i -й особи. Очевидно, что одна особь может быть задействована в нескольких родительских парах.

Аналогично может быть решен вопрос уничтожения особей. Только вероятность уничтожения, соответственно, должна быть обратно пропорциональна качеству особей. Однако обычно происходит просто уничтожение особей с наихудшим качеством. Таким образом, выбирая для размножения наиболее качественные особи и уничтожая наиболее слабые, генетический алгоритм постоянно улучшает популяцию, приводя к нахождению все лучших решений.

Оператор скрещивания призван моделировать природный процесс наследования, т.е. обеспечивать передачу свойств родителей потомкам.

Рассмотрим простейший оператор скрещивания. Он выполняется в два этапа. Пусть особь представляет собой строку из n элементов. На первом этапе равновероятно выбирается число k от 1 до $n-1$. Это число называется точкой разбиения. В соответствии с ним обе исходные строки разбиваются на две подстроки. На втором этапе строки обмениваются своими подстроками, лежащими после точки разбиения, то есть элементами с $k+1$ -го по n -й. Так получается две новые строки, которые наследовали частично свойства обоих родителей. Этот процесс проиллюстрирован ниже.

$$\begin{array}{rcc}
 \text{Стока 1} & X_1X_2 \dots X_kX_{k+1} \dots X_n & X_1X_2 \dots X_kY_{k+1} \dots Y_n \\
 & \Downarrow & \\
 \text{Строка 2} & Y_1Y_2 \dots Y_kY_{k+1} \dots Y_n & Y_1Y_2 \dots Y_kX_{k+1} \dots X_n
 \end{array}$$

Вероятность применения оператора скрещивания обычно выбирается достаточно большой, в пределах от 0,9 до 1, чтобы обеспечить постоянное появление новых особей, расширяющих пространство поиска. При значении вероятности менее единицы часто используют элитизм. Это особая стратегия, которая предполагает переход в популяцию следующего поколения элиты, т.е. лучших особей текущей популяции, без всяких изменений. Применение элитизма способствует сохранению общего качества популяции на высоком уровне. При этом элитные особи участвуют еще и в процессе отбора родителей для последующего скрещивания. Количество элитных особей определяется обычно по формуле

$$K = (1-P) \times N,$$

где K - количество элитных особей; P – вероятность применения оператора скрещивания; N - размер популяции.

В случае использования элитизма все выбранные родительские пары подвергаются скрещиванию, несмотря на то, что вероятность применения

оператора скрещивания меньше единицы. Это позволяет сохранять размер популяции постоянным.

Оператор мутации служит для моделирования природного процесса мутации. Его применение в генетических алгоритмах обусловлено следующими соображениями. Исходная популяция, какой бы большой она и была, охватывает ограниченную область пространства поиска. Оператор скрещивания, безусловно, расширяет эту область, но все же до определенной степени, поскольку использует ограниченный набор знаний, заданный исходной популяцией. Внесение случайных изменений в особи позволяет преодолеть это ограничение и иногда значительно сократить время поиска или улучшить качество результата.

Как правило, вероятность мутации, в отличие от вероятности скрещивания, выбирается достаточно малой. Сам процесс мутации заключается в замене одного из элементов строки на другое значение. Это может быть перестановка двух элементов в строке, замена элемента строки значением элемента из другой строки, в случае битовой строки может применяться инверсия одного из битов и т. д.

В процессе работы алгоритма все указанные выше операторы применяются многократно и ведут к постепенному изменению исходной популяции. Поскольку операторы отбора, скрещивания, мутации и редукции по своей сути направлены на улучшения каждой отдельной особи, то результатом их работы является постепенное улучшение популяции. В этом и заключается основной смысл работы генетического алгоритма - улучшить популяцию решений по сравнению с исходной.

После завершения работы генетического алгоритма из конечной популяции выбирается та особь, которая дает максимальное (минимальное) значение целевой функции и является, таким образом, работы генетического алгоритма. За счет того, что конечная популяция лучше исходной, полученный результат представляет собой улучшенное решение.

7.7 Пример решения задачи поиска максимума одномерной функции

Пример поиска максимума одномерной функции. Пусть имеется набор натуральных чисел от 1 до 31 и функция, определенная на этом наборе чисел, $f(x)=x$. Требуется найти максимальное значение функции. Задача тривиальна и не требует применения столь изощренных методов поиска, но ее решение необходимо для иллюстрации функционирования генетического алгоритма.

В качестве кода будем использовать двоичное представление аргументов функции. Это положение представляет собой фенотип нашего алгоритма. Сам код будет представлять собой двоичную строку из 5 бит. Это генотип алгоритма. Целевой функцией будет непосредственно сама рассматриваемая функция, аргументом которой является число, чье двоичное представление использует алгоритм.

Определим некоторые характеристики генетического алгоритма. Пусть размер популяции 4, вероятность мутации 0,001, сам процесс мутации заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно по равномерному закону. Оператор скрещивания и отбора аналогичны описанным выше. Поскольку задача простейшая, будем считать, что алгоритм не использует элитизм.

Пусть на основе равномерного распределения создана исходная популяция из четырех особей, представленная в таблице 7.2

Таблица 7.2

Номер строки	Код генотипа	Значение целевой функции	Вероятность участия в размножении
1	01011	11	11/43
2	10010	18	18/43
3	00010	2	2/43
4	01100	12	12/43
		Сумма 43	

Предположим, что оператор отбора выбрал для производства потомков две пары строк (1, 2) и (2, 4). Работа оператора скрещивания проиллюстрирована в таблице 7.3. При этом в каждой паре разбиение на подстроки происходит независимо. Точка разбиения задана звездочкой.

Пропорциональный простейший отбор (рулетка) выбирает n особей после n запусков. Колесо рулетки содержит по одному сектору для каждого гена популяции. Размер сектора пропорционален вероятности участия.

Таблица 7. 3

№ строки	Родители	Потомки	Значение целевой функции для потомков
1	0*1011	00010	2
2	1*0010	11011	27
3	100*10	10000	16
4	011*00	01110	14

Пусть оператор мутации, несмотря на низкую вероятность, срабатывает для младшего бита потомка в строке 3 и данный код изменил свое значение с 10000 на 10001.

Таким образом, популяция за счет порожденных потомков расширилась до восьми особей, представленных в таблице 7.4. Строки 1-4 соответствуют исходной популяции, а 5-8 – порожденным потомкам.

Таблица 7.4

№ строки	код	Значение целевой функции
1	01011	11
2	10010	18
3	00010	2

4	01100	12
5	00010	2
6	11011	27
7	10001	17
8	01110	14

Оператор редукции далее сокращает популяцию до исходного числа особей, исключив из нее особи с минимальным значением целевой функции. То есть будут исключены строки 1, 3, 4, 5, и популяция первого поколения примет вид, представленный в таблице 7.5.

Таблица 7.5

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1	10010	18	18/ 76
2	11011	27	27/ 76
3	10001	17	17/ 76
4	01110	14	14/ 76

На этом шаг работы генетического алгоритма закончится. Очевидно, что даже за эту одну итерацию качество популяции значительно возросло. Если в исходной популяции среднее значение целевой функции было 10, 75, а ее минимальное значение составляло 2, то в популяции первого поколения среднее значение увеличилось до 19, а минимальное значение составило 14. Лучшее же решение увеличилось с 18 до 27 при оптимальном решении 31.

Таким образом, данный пример наглядно иллюстрирует процесс улучшения как популяции в целом, так и поиск наилучшего решения в результате работы генетического алгоритма [6,8].

7.8 Пример решения задачи коммивояжера

Задача коммивояжера является классической оптимизационной задачей. Суть ее заключается в следующем. Дано множество из n городов и матрица расстояний между ними или стоимостей переезда (в зависимости от интерпретации). Цель коммивояжера – объехать все эти города по кратчайшему пути или с наименьшими затратами на поездку. Причем в каждом городе он должен побывать один раз и свой путь закончить в том же городе, откуда начал [6,8].

Для решения предлагается следующая задача: имеется пять городов, стоимость переезда между которыми представлена матрицей (таблица 7.6).

Таблица 7.6

	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Г 1	0	4	6	2	9
Г 2	4	0	3	2	9
Г 3	6	3	0	5	9
Г 4	2	2	5	0	8
Г 5	9	9	9	8	0

Для решения задачи применим следующий генетический алгоритм. Решение представим в виде перестановки чисел от 1 до 5, отображающей последовательность посещения городов. Значение целевой функции будет равно стоимости всей поездки, вычислений в соответствии с вышеприведенной матрицей. Одним из оптимальных решений задачи является последовательность 51435 стоимостью 25. Из пятого города в первый стоимость равна 9, из первого в четвертый – 2, из четвертого в третий – 5, из третьего в пятый – 9, из пятого в пятый – 0. Таким образом, $9+2+5+9+0=25$.

В качестве оператора отбора будем использовать традиционный оператор, применявшийся в предыдущем примере. При этом заметим, что, чем меньше значение целевой функции, тем лучше.

В качестве оператора скрещивания выберем более изощренную процедуру, похожую на двухточечный оператор скрещивания. Пусть есть две родительские перестановки (1/234/5) и (3/452/1). Случайно и равновероятно выбираются две точки разрыва. Для примера возьмем ситуацию, когда первая точка разрыва находится между первым и вторым элементами перестановки, а вторая точка – между четвертым и пятым: (1/234/5), (3/452/1). На первом этапе перестановки обмениваются фрагментами, заключенными между точками разрыва: (* /452 /*), (* /234 /*).

На втором этапе вместо звездочек вставляются соответствующие числа из исходной родительской перестановки, начиная со второго числа. В данном случае в первой перестановке (1/234/5) таким начальным числом является 3, а за ним идет 4, которое есть в новой перестановке, и мы его пропускаем, также пропускаем число 5, переходим на начало перестановки и выбираем число 1. В итоге вместо (* /452 /*) получаем (34521), аналогично из (/3/452/1) и (* /234 /*) получаем (52341).

Оператор мутации будет представлять собой случайную перестановку двух чисел в хромосоме, также выбранных случайно по равномерному закону. Например, вероятность мутации равна 0,01. Размер популяции выберем равным 4. Исходная популяция представлена в таблице 7.7.

Таблица 7.7

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1	12345	29	32/122 (0,26)
2	21435	29	32/122
3	54312	32	29/122 (0,23)
4	43125	32	29/122

Пусть для скрещивания были выбраны следующие пары: (1,3) и (2,4). В результате были получены потомки, представленные в таблице 7.8.

Таблица 7.8

№ строки	Родители	Потомки	Значение целевой функции для потомков
1 (1)	1 23 45	5 43 12	32
2 (3)	5 43 12	1 23 54	28
3 (2)	2 143 5	4 312 5 мутация 13254	32
4 (4)	4 312 5	2 143 5	29

Пусть для потомка (12345) сработал оператор мутации, и обменялись местами числа 2 и 3. В данном случае строка (12345) изменилась и приняла значение (13254). Популяция первого поколения после отсека «худших» особей в результате работы оператора редукции приняла вид, представленный в таблице 7.9.

Таблица 7.9

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1	12345	29	28/111 29/115
2	21435	29	28/111 28/115
3	13254	28	29/111 29/115
4	21435	29	28/111 28/115

Пусть для получения второго поколения были выбраны следующие пары строк: (1, 4) и (2, 3). В результате были получены потомки, показанные в таблице 7.10.

Таблица 7.10

№ строки	Родители	Потомки	Значение целевой функции для потомков
1	123 45	214 35	29
2	214 35	123 45	29
3	21 435	13 452	32
4	13 254	21 354	29

Популяции второго поколения после отсеечения худших особей приняла вид, показанный в таблице 7.11.

Таблица 7.11

№ строки	Код	Значение целевой функции	Вероятность участия в процессе размножения
1 (1)	12345	28	29/114
2 (2)	21435	29	28/114
3 (3)	13254	28	29/114
4 (н)	21354	29	28/114

Таким образом, после двух итераций значение целевой функции для лучшего решения изменилось с 29 на 28, среднее значение изменилось с 30,5 до 28,75, а общее качество с 122 до 114. Наблюдается улучшение популяции.

Контрольные вопросы

Задача 1. Провести поиск минимума одномерной функции $f(x) = x^2 - 16x + 5$ с помощью генетических алгоритмов. Описать 2 популяции. Генотип

алгоритма представляет собой строку из 5 бит. Размер популяции - 4. Например, строка 01011 соответствует числу $x=11$, а $f(x)=-50$. Использовать одноточечный кроссовер. Мутация заключается в инверсии одного из битов строки, выбираемого случайно. Элитизм необходимо использовать.

Задача 2. Решить задачу коммивояжера с использованием генетических алгоритмов. Коммивояжер должен объехать все города и вернуться в тот же город, откуда выехал первый раз, потратив при этом минимум средств. Затраты на поездки представлены матрицей.

	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Г1	0	3	4	4	5
Г2	3	0	6	5	7
Г3	4	6	0	3	5
Г4	4	5	3	0	4
Г5	5	7	5	4	0

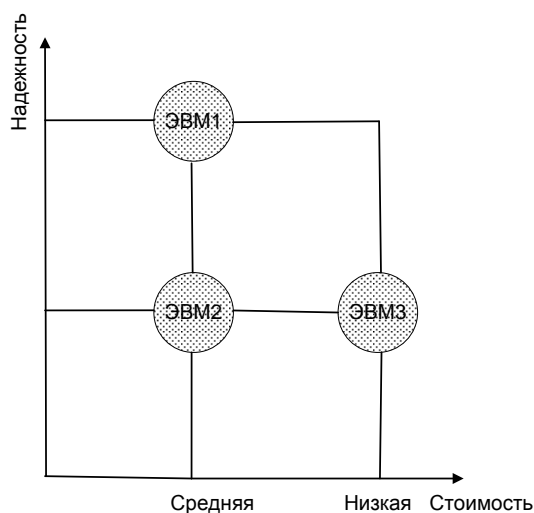
Выполнить формирование двух поколений.

Использовать необходимо элитизм. Мутацию выполнить методом перестановки соседних позиций для случайно выбранного числа.

Применить изоэдренный оператор кроссинговера для размножения особей.

Задача 3. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных ниже, относятся к множеству Эджворта-Парето и почему?

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Средняя	Средняя
ЭВМ3	Низкая	Средняя



Ответ: если требуется выбрать наилучшую альтернативу, то необходимо искать доминирующие альтернативы. ЭВМ3 доминирует над ЭВМ2 и ЭВМ1 доминирует над ЭВМ2. К множеству Эджворта-Парето относятся ЭВМ1 и ЭВМ3. Это несравнимые альтернативы. Для окончательного выбора необходима дополнительная информация.

Задача 4. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных ниже, относятся к множеству Эджворта-Парето и почему?

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Низкая	Высокая
ЭВМ3	Низкая	Средняя

1. Какие альтернативы (ЭВМ), из приведенных ниже, относятся к множеству Эджворта-Парето и почему?

Альтернатива	Стоимость	Надежность
ЭВМ1	Средняя	Высокая
ЭВМ2	Низкая	Высокая
ЭВМ3	Низкая	Средняя

8 Коллективные решения

8.1 Парадокс Кондорсе

В 1996 г. перед первым туром президентских выборов в России по московскому радио передавали выступление избирателя, недовольного системой голосования. Он предлагал разрешить каждому избирателю не только голосовать за одного кандидата, но и упорядочивать всех кандидатов по своему предпочтению от лучшего к худшему. Только после этого, утверждал выступавший, будет ясно истинное отношение населения России к кандидатам в президенты [7,8].

Интересно, что большой интерес к разным системам голосования наблюдался примерно за 200 лет до этого во Франции. При этом ситуации в двух странах были близкими: и тут, и там происходил переход от тоталитаризма к новой системе, позволяющей каждому избирателю голосовать свободно и тайно.

Одним из первых, кто заинтересовался системами голосования, был французский ученый маркиз де Кондорсе (1743— 1794). Он сформулировал принцип или критерий, позволяющий определить победителя в демократических выборах. Принцип де Кондорсе состоит в следующем: *кандидат, который побеждает при сравнении один на один с любым из других кандидатов, является победителем на выборах.*

Система голосования, предложенная де Кондорсе, совпадала с системой, которую предлагал 200 лет спустя избиратель в России. Каждый из голосующих упорядочивал кандидатов по степени своего желания видеть его победителем. Согласно де Кондорсе, справедливое определение победителя возможно путем попарного сравнения кандидатов по числу голосов, поданных за них. Принцип де Кондорсе предлагался как рациональный и демократический. Однако вскоре маркиз де Кондорсе столкнулся с парадоксом, получившим впоследствии его имя. Рассмотрим пример

голосования в собрании представителей из 60 чел. [1]. Пусть на голосование поставлены три кандидата: А, В и С, и голоса распределились, как в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Распределение голосов (парадокс Кондорсе)

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \rightarrow B \rightarrow C$
17	$B \rightarrow C \rightarrow A$
2	$B \rightarrow A \rightarrow C$
10	$C \rightarrow A \rightarrow B$
8	$C \rightarrow B \rightarrow A$

Сравним предпочтения по отношению к парам кандидатов. Берем А и С: тогда А предпочитают $23+2=25$; С по сравнению с А предпочитают: $17+10+8=35$. Следовательно, С предпочтительнее А ($C \rightarrow A$) по воле большинства [7,8].

Сравнивая попарно аналогичным образом А и В, В и С, получаем: $B \rightarrow C$ (42 против 18), $C \rightarrow A$ (35 против 25) и $A \rightarrow B$ (33 против 27). Следовательно, мы пришли к противоречию, к нетранзитивному отношению $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.

Столкнувшись с этим парадоксом, Кондорсе выбрал «наименьшее зло», а именно то мнение, которое поддерживается большинством голосов (избранным следует считать А).

8.2 Правило большинства голосов

Изменим несколько результаты голосования, чтобы избежать парадокса Кондорсе. Предположим, что голоса распределились так, как показано в таблице 8.2. Нетрудно подсчитать, что при этих новых результатах голосования, в соответствии с принципом Кондорсе, избранным

будет кандидат С, который при попарном сравнении побеждает двух других кандидатов.

Таблица 8.2. *Распределение голосов (правило большинства)*

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \rightarrow C \rightarrow B$
17	$B \rightarrow C \rightarrow A$
2	$C \rightarrow B \rightarrow A$
10	$C \rightarrow A \rightarrow B$

Однако если мы используем другой принцип выбора: *большинство голосующих*, которые назвали данного кандидата лучшим, то победителем оказывается кандидат А. Но при этом кандидат А не набрал абсолютного большинства голосов.

Мы видим, что способ определения победителя при демократической системе голосования (один человек — один голос) зависит от процедуры голосования.

8.3 Метод Борда

Отметим еще одну процедуру голосования из множества предложенных: метод Борда [7,8]. Согласно этому методу, результаты голосования выражаются в виде числа баллов, набранных каждым из кандидатов. Пусть число кандидатов равно p . Тогда за первое место присуждается p баллов, за второе — $p-1$, за последнее — один балл.

Применим метод Борда к приведенному выше примеру. Подсчитаем число баллов для каждого из кандидатов:

$$A: 23-3 + 19-1 + 16-1 + 2-2 = 108;$$

$$B: 23-1 + 19-3 + 16-2 + 2-1 = 114;$$

$$C: 23-2 + 19-2 + 16-2 + 2-3 = 138.$$

В соответствии с методом Борда мы должны объявить победителем кандидата С.

Однако с методом Борда, как и с принципом Кондорсе, возникают проблемы. Предположим, что результаты голосования в выборном органе представлены в таблице 8.3 18. Подсчитав баллы в соответствии с методом Борда, получим: А — 124, В — 103, С — 137. В соответствии с методом Борда победителем следует объявить кандидата С. Однако в данном случае явным победителем является кандидат А, набравший абсолютное большинство голосов: 31 из 60.

Таблица 8.3. *Распределение голосов (метод Борда)*

Число голосующих	Предпочтения
31	$A \rightarrow C \rightarrow B$
12	$B \rightarrow C \rightarrow A$
17	$C \rightarrow B \rightarrow A$
2	$C \rightarrow A \rightarrow B$

Приведенные примеры позволяют понять, что парадоксы при голосовании не возникают лишь в случае, когда победитель определяется по принципу абсолютного большинства голосов. Однако такой случай нетипичен для большинства выборов в демократических странах. Обычно число кандидатов больше, чем два, и редки случаи, когда кто-то из них сразу же получает поддержку абсолютного большинства избирателей.

Интересно, что парадоксы голосования сохраняются и при введении двух туров и условии, что во второй тур выходят два кандидата, набравшие большинство голосов. Обратимся к таблице 8.1, составленной Кондорсе. В соответствии с предпочтениями во второй тур выходят А (23 голоса) и В (19 голосов), после чего побеждает А. Однако при небольшом усилении первоначальной позиции А: предпочтения двух избирателей (3-я строка)

выглядят как $A \rightarrow B \rightarrow C$, во второй тур выходят А (25 голосов) и С (20 голосов), после чего побеждает С. Ясно, что такой результат голосования противоречит здравому смыслу.

8.4 Аксиомы Эрроу

Выше мы привели примеры нескольких различных систем голосования. Возможны и другие системы. В качестве примеров можно указать на систему многотурового выбора с вычеркиванием кандидатов, набравших наименьшее число голосов [7,8], на систему вычеркивания нежелаемых кандидатов (approval voting) и т.д.

Систематическое исследование всех возможных систем голосования провел в 1951г. Кеннет Эрроу из Стенфордского университета [7]. Он поставил вопрос в наиболее общем виде: можно ли создать такую систему голосования, чтобы она была одновременно рациональной (без противоречий), демократической (один человек — один голос) и решающей (позволяла осуществить выбор)? Вместо попыток изобретения такой системы Эрроу предложил набор требований, аксиом, которым эта система должна удовлетворять. Эти аксиомы были интуитивно понятны, приемлемы с точки зрения здравого смысла и допускали математическое выражение в виде некоторых условий. На основе этих аксиом Эрроу попытался в общем виде доказать существование системы голосования, удовлетворяющей одновременно трем перечисленным выше принципам: рациональная, демократическая и решающая [7].

Первая аксиома Эрроу требует, чтобы система голосования была достаточно общей для того, чтобы учитывать все возможные распределения голосов избирателей. Интуитивно это требование вполне очевидно. Заранее нельзя предсказать распределение голосов. Совершенно необходимо, чтобы система была действенной при любых предпочтениях избирателей. Эта аксиома получила название *аксиомы универсальности*.

Еще более очевидной с точки зрения здравого смысла является вторая аксиома Эрроу: *аксиома единогласия*. В соответствии с ней необходимо, чтобы коллективный выбор повторял в точности единогласное мнение всех голосующих. Если, например, каждый из голосующих считает, что кандидат А лучше кандидата В, то и система голосования должна приводить к этому результату.

Третья аксиома Эрроу получила название *независимости от несвязанных альтернатив*. Пусть избиратель считает, что из пары кандидатов А и В лучшим является А. Это предпочтение не должно зависеть от отношения избирателя к прочим кандидатам. Третья аксиома достаточно привлекательна, но не столь очевидна с точки зрения каждодневного человеческого поведения. Так, в [7] приводится убедительный пример нарушения этой аксиомы. Посетитель ресторана первоначально сравнивает блюдо А и В и хочет заказать А, потому что приготовление блюда В требует высокой квалификации повара, а, по его мнению, такой повар вряд ли есть в данном ресторане. Вдруг он замечает в меню блюдо С - очень дорогое и также требующее высокого искусства приготовления. Тогда он выбирает блюдо В, считая, что повар умеет хорошо готовить.

Часто третья аксиома Эрроу нарушается судьями в фигурном катании. Давая сравнительные оценки двум сильным фигуристам в одиночном катании, они стараются учесть возможность хорошего выступления третьего сильного кандидата, оставляя ему шансы стать победителем. Отличное выступление в произвольном катании фигуриста С, имевшего ранее не очень высокий результат в обязательной программе, может повлиять на оценки фигуристов А и В. Если А имел отличный результат в обязательной программе, судьи иногда ставят его ниже фигуриста В при примерно равном выступлении, чтобы повысить шансы фигуриста С.

Тем не менее сама возможность предъявления требования независимости к системе голосования в качестве обязательного не вызывает сомнения.

Четвертая аксиома Эрроу носит название *аксиомы полноты*: система голосования должна сравнить любую пару кандидатов, определив, кто из них лучше. При этом имеется возможность объявить двух кандидатов равнопривлекательными. Требование полноты не кажется слишком строгим для системы голосования.

Пятая аксиома Эрроу является уже знакомым *условием транзитивности*: если в соответствии с мнением избирателей кандидат В не лучше кандидата А (хуже или эквивалентен), кандидат С не лучше кандидата В, то кандидат С не лучше кандидата А. Считается, что система голосования, не допускающая нарушения транзитивности, ведет себя рациональным образом.

Определив пять аксиом — желательных свойств системы голосования, Эрроу доказал, что системы, удовлетворяющие этим аксиомам, обладают недопустимым с точки зрения демократических свобод недостатком: каждая из них является правилом диктатора — личности, навязывающей всем остальным избирателям свои предпочтения.

Результаты, выявленные Эрроу, получили широкую известность. Они развеяли надежды многих экономистов, социологов, математиков найти совершенную систему голосования.

Требование исключения диктатора приводит к невозможности создания системы голосования, удовлетворяющей всем аксиомам Эрроу. Поэтому результат Эрроу называют «теоремой невозможности».

8.5 Попытки пересмотра аксиом

Более 70 лет математики и экономисты предпринимают попытки изменить требования Эрроу, «смягчить» аксиомы, чтобы избежать вывода, столь неприятного для демократической системы голосования.

Очень интересное изменение первой аксиомы предложил Д. Блейк [7]. Если каждый избиратель упорядочивает кандидатов в соответствии со своей

политической позицией, вывода Эрроу можно избежать. На практике это означает, что каждый избиратель должен упорядочить кандидатов в соответствии с их политическими взглядами. Если он сторонник рынка и монетаризма и считает, что А лучше В, В лучше С, то это означает, что А ближе всех к его позиции, а С — дальше всех.

Однако на практике при оценке кандидата избиратели чаще всего руководствуются многими критериями. Далеко не все избиратели понимают свою политическую позицию. Результаты голосований, основанных на эмоциях, широко известны.

Другим интересным изменением аксиом Эрроу является правило консенсуса, сформулированное А.Сеном. Он предложил изменить аксиому транзитивности, сохранив правило транзитивности только для случая строгого предпочтения между кандидатами. Согласно правилу А.Сена, если хотя бы один избиратель по-иному сравнивает кандидатов А и В, чем все остальные, то система голосования объявляет кандидатов эквивалентными. Ясно, что такое правило приводит к коллективному безразличию.

8. 6 Теорема невозможности и реальная жизнь

Итак, серьезность результатов К.Эрроу безусловна. Нельзя отказаться от требования рациональности: система голосования не должна приводить к нетранзитивности. Нельзя не потребовать, чтобы система голосования была решающей: коллективное безразличие, неумение сделать выбор ведет в тупик. Нельзя отказаться от требования демократичности выборов: человечество заплатило (и продолжает платить) высокую цену за право каждого человека выражать свое мнение. Кроме того, демократичность в решении социальных проблем особенно важна в наше время, когда меньшинство имеет массу возможностей защищать свою позицию перед большинством.

С точки зрения реальной жизни важно знать, насколько часто нарушаются все эти три условия одновременно. Исследования французских

ученых показали, что при моделировании всех возможных распределений голосов избирателей и сохранении условий демократичной и решающей системы голосования рациональность нарушается примерно в 6—9% случаев [7].

Конечно, каждый раз неизвестны ни распределение голосов избирателей, ни возможности нарушения рациональности. Однако в реальных процедурах выбора есть и многие, не менее существенные недостатки. Известны ситуации манипулирования в процессе выборов, когда преднамеренное искажение предпочтений группой избирателей приводит к желаемому для этой группы результату (см. пример с двумя турами голосования, приведенный выше).

Исключительно сильное воздействие на умы избирателей оказывает так называемая «промывка мозгов» — целенаправленные кампании в пользу какого-то кандидата с искажением фактов, подтасовкой и т. д. Для стран, не имеющих опыта демократических выборов, такие явления приводят к разочарованию избирателей в демократических институтах власти. Как каждый человек, так и народы в целом должны учиться делать свой выбор, различая слова и дела политиков, трезво оценивая обещания, используя разные и независимые источники информации.

Вернемся к парадоксальному результату Эрроу. Примириться с фактом его существования помогут известные слова У. Черчилля о том, что демократия является плохой формой правления, но человечество пока не придумало ничего лучшего.

8.7 Принятие коллективных решений в малых группах

Принятие коллективных решений не сводится только к голосованию избирателей на выборах. Решения принимаются в комиссиях, жюри, коллегиях, словом, в небольших группах. В роли ЛПР в этом случае выступает группа, принимающая решения (ГПР). Как организовать работу

ГПР? Где гарантии, что люди, имеющие различные предпочтения, могут прийти к соглашению?

Традиционным способом решения этих проблем является организация совещаний (заседаний), на которых члены коллективного органа, принимающего решения, выступают как эксперты, оценивая различные варианты решений и убеждая других членов присоединиться к их мнению. Во многих случаях эти обсуждения позволяют прийти к единому мнению, которое иногда отражает компромисс между членами коллективного органа, принимающего решения.

Несомненными преимуществами такого способа принятия коллективных решений являются:

- возможность для каждого из членов ГПР высказать свое мнение и обосновать его;
- возможность для каждого из членов ГПР выслушать мнение всех других членов.

Наряду с указанными достоинствами применение традиционного способа решения задач коллективного выбора в ГПР в ряде случаев сопровождается следующими отрицательными явлениями:

- чрезмерно сильное влияние на ГПР доводов одного или нескольких членов (коалиции), направленных на выпячивание положительных особенностей предпочитаемых ими вариантов решений;
- большая и зачастую неэффективная трата времени членами ГПР, особенно при сильном расхождении мнений у некоторых из них;
- поспешное применение правила большинства, не позволяющего учесть мнения всех членов ГПР.

С попытками преодолеть те или иные отрицательные черты традиционных способов принятия коллективных решений связаны различные направления исследований. Мы остановимся далее на проблемах выбора, решаемых ГПР: даны какие-то объекты (варианты капиталовложений, акции, предприятия и т.д.). Необходимо выделить из них

лучший, разделить на классы, упорядочить, т. е. решить задачи, типичные для принятия индивидуальных решений.

Принятие решений в ГПР разительно отличается от принятия индивидуальных решений. У каждого из членов группы имеется, как правило, свой взгляд на проблему. Если эти взгляды полностью совпадают либо если в группе есть диктатор, навязывающий свои предпочтения, то задача принятия коллективных решений не возникает. В общем же случае основной для ГПР является проблема поиска компромисса, приемлемого для всех членов группы.

Можно выделить три направления исследований по принятию решений в малых группах.

1. Неантагонистические игры. Одно из направлений в теории игр [8], ориентированное на разработку математических моделей, описывающих процесс выработки компромисса — поиск точек равновесия. Работы в данном направлении имеют, как правило, чисто теоретический характер.

2. Групповые системы поддержки принятия решений. Разрабатываются локальные сети для членов ГПР, а также формальные алгоритмы сравнения предпочтений на заданном множестве объектов. Как правило, системы поддержки принятия решений предназначены для ознакомления каждого из членов ГПР с мнениями других. Задача согласования мнений членов ГПР либо не ставится, либо сводится к усреднению мнений. С практической точки зрения данный подход не соответствует задачам принятия ответственных решений.

3. Организация работы ГПР с помощью посредника (аналитика, консультанта). Это направление исследований с практической точки зрения является наиболее перспективным. Ярким примером могут служить так называемые конференции по принятию решений (decision conference). Организация и проведение конференций по принятию решений связаны с именами С. Камерера (США) и Л.Филипса (Англия). Они первыми

разработали методологические основы организации конференций по принятию решений и получили хороший практический результат.

8.8 Организация и проведение конференций по принятию решений

Предположим, что ГПР представляет собой совет директоров крупной фирмы. Фирма переживает трудности: уменьшилась доля рынка изделий, выпускаемых компанией, упали прибыли. Возникла необходимость что-то предпринять. Одни из директоров предлагают перейти к выпуску нового изделия, другие — более активно вести рекламу, третьи — модернизировать выпускаемые изделия.

Для выработки согласованной стратегии президент фирмы решил пригласить консультанта (*facilitator*), специализирующегося на проведении конференций по принятию решений. После получения заказа консультант посещает фирму, беседует с некоторыми из директоров, знакомится с положением дел. Конечно, он не может знать так же глубоко, как директора, все промышленные и финансовые проблемы фирмы. Но он стремится освоить деловой язык, на котором идут обсуждения, понять распределение власти и влияния среди руководителей фирмы.

Через пару недель назначается конференция по принятию решений. Она проводится в специальной комнате, технически подготовленной для этой цели: есть компьютер, есть экраны, на которые проецируются данные, обрабатываемые компьютером, есть проектор, доски, фломастеры и т.д. Конференция продолжается один—два дня (часто суббота и воскресенье), во время которых руководители заняты не текущими задачами, а только разработкой стратегии. Конференцию проводит консультант. Он дает слово участникам, представляющим различные точки зрения на обсуждаемую проблему. Он регулирует процесс обсуждения, направляя его по конструктивному пути, он сам ставит вопросы, пытаясь выяснить сильные и слабые стороны обсуждаемых вариантов решений. Он старается показать

участникам конференции то общее, что объединяет различные варианты, подчеркивая элементы согласия. Он пытается помочь участникам конференции найти смешанные стратегии (если это возможно), достойно, не теряя лица, отказаться от вариантов, недостатки которых стали очевидными. Консультант предлагает совместно оценить варианты решений по различным критериям. Если есть расхождения в оценках, он проверяет чувствительность выбора к этим расхождениям и т. д.

Ясно, что успех конференций по принятию решений в значительной степени зависит от квалификации консультанта. Он должен обладать необходимыми личностными характеристиками: умением быстро схватывать суть обсуждаемой проблемы и имеющихся разногласий, быстро «стать своим» в процессе обсуждения и т.д. Он должен обладать большим практическим опытом, чтобы правильно вести дискуссию. Как опытный дирижер оркестра, он должен вовремя «взмахнуть палочкой», предоставляя слово участнику, который в данный момент наиболее продуктивно влияет на ход дискуссии. Такому набору умений нельзя выучиться по учебнику, да и таких учебников не существует. Есть отдельные публикации [9], в которых на примерах представляют основные идеи конференций по принятию решений.

Успех этих конференций приводит к впечатляющим результатам в деятельности компаний. Даже относительный успех может повлиять на дальнейшую выработку стратегии. Но и 1 неудача оказывает сильное отрицательное воздействие, закрепляя расхождения во взглядах.

8.9 Метод организации работы в группе принятия решений

В 1975 г. был разработан и применен один из возможных методов организации работы группы принятия решений (ГПР) при проведении конференции по принятию решений [7]. В основу метода были положены следующие соображения:

- для эффективного обсуждения проблемы в ГПР полезен предварительный анализ, вскрывающий совпадение или расхождение мнений членов ГПР о достоинствах и недостатках рассматриваемых объектов;
- такой анализ должен определить те конкретные вопросы, по которым совпадают или расходятся мнения членов ГПР, выявить намечающееся единство мнений, а также образующиеся коалиции.

Практический опыт организации и проведения экспертных опросов привел к выводу об исключительной важности разбиения обсуждаемого вопроса на части. При сравнении объектов, при оценке их качества очень важно выделить составляющие этого качества — отдельные критерии, и оценить объекты по каждому из них. Такой подход позволяет:

1. Достичь большей объективности, получаемой информации. При оценке объектов в целом сильнее проявляется возможность субъективных искажений. Определив положительные качества объектов, члены ГПР часто (невольно или преднамеренно) не принимают во внимание его отрицательные качества. При определении оценок объекта по многим критериям член ГПР в значительной степени выступает как квалифицированный специалист, своего рода «измеритель», определяющий оценки объекта по шкалам, общим для группы. Сознательное завышение или занижение этих оценок связано с возможной утратой репутации квалифицированного, знающего специалиста (при проверке и обсуждении этих оценок другими специалистами), в то время как давая оценку в целом, член ГПР почти всегда может объяснить ее учетом определенных качеств объекта.

2. Сделать более конкретным и четким обсуждение полученной информации. При обсуждении вопроса об оценке объекта по одному из критериев расхождения во мнениях членов ГПР, как правило, меньше, чем при обсуждении оценки объекта в целом. По узкому вопросу легче получить дополнительную информацию, легче собрать достаточно бесспорные факты.

8.9.1 Предварительные этапы

Представляется целесообразной следующая последовательность действий.

1. Определение списка критериев. Для рассматриваемого множества объектов ставится вопрос о выделении группы критериев, которые необходимо принимать во внимание при оценке объектов. Список этих критериев образуется в результате опроса каждого из членов ГПР. Перечень критериев, полученных от всех членов ГПР, согласовывается с каждым из ее членов в отдельности. Иногда консультант может предложить предварительный список критериев, которые могли бы учитываться при рассмотрении подобных вопросов.

2. Разработка шкал оценки по критериям. На основе предварительного знакомства с терминологией, применяемой обычно в данной ГПР, консультант разрабатывает для каждого критерия шкалу из нескольких словесных качественных оценок, расположенных от лучшей к худшей. Эти шкалы согласовываются с каждым из членов ГПР. Оценки на шкалах должны быть понятными и исключать неоднозначное толкование.

3. Сбор информации. Членам ГПР раздаются формы, содержащие список критериев со шкалами. Число форм равно числу объектов. Каждый из членов ГПР оценивает рассматриваемые объекты по каждому из критериев — определяет одну из оценок по шкале критерия, характеризующую данный объект. При необходимости каждый из членов ГПР может через консультанта (или самостоятельно) запросить дополнительную информацию, необходимую ему для оценки объектов.

Данные, полученные при индивидуальном опросе членов ГПР, содержат информацию о степени совпадения или расхождения их мнений. Для выявления этой информации требуется специальный анализ.

Желательно иметь такой способ анализа информации, который позволял бы оценивать степень согласия между членами ГПР. Необходимо, чтобы этот способ выявлял объекты, оценки по которым наиболее противоречивы, а также критерии, оценки по которым показывают наибольшую несогласованность мнений между членами ГПР.

На наш взгляд, удовлетворяет этим требованиям способ понижения размерности данных - способ «проецирования» [7]. Методы понижения размерности данных являются одной из групп методов факторного анализа [7]. Основная идея методов проецирования заключается в следующем. Пусть в r -мерном пространстве задана конфигурация из n точек. Необходимо спроецировать эти точки в подпространство меньшей размерности (как правило, двух- или трехмерное), передав при этом с наименьшими (в смысле определенного критерия) возможными искажениями расстояния между объектами в исходном пространстве.

Как и другие методы факторного анализа, методы проецирования основаны на гипотезе о том, что существует небольшое число обобщенных факторов, которыми характеризуются рассматриваемые объекты. Справедливость этой гипотезы проверяется с помощью применения метода и изучения полученных результатов (критерий практики).

В рассматриваемом случае каждый объект может быть представлен точкой в пространстве критериев. В этом же пространстве можно введением определенной метрики расположить точки, характеризующие отношение членов ГПР к рассматриваемым объектам. Далее аналитику предоставляется возможность, применяя методы проецирования, попытаться представить на плоскости объекты и членов ГПР так, чтобы [7]:

- расстояние между членами ГПР характеризовало степень согласия между ними, малые расстояния соответствовали бы совпадению мнений;

- расстояние между членом ГПР и объектом характеризовало ценность этого объекта для данного члена ГПР; малые расстояния соответствовали бы наиболее ценным объектам;
- расстояния между объектами соответствовали бы степени их сходства по оценкам членов ГПР.

Полученное при этом распределение на плоскости точек, соответствующих объектам и экспертам, дает общее представление о степени совпадения мнений членов ГПР в целом и по каждому из объектов.

Анализ информации заключается в последовательном применении метода проецирования при «загрублении» первоначально используемой информации последовательным удалением ряда критериев, объектов, оценок и наблюдении при этом за степенью совпадения мнений членов ГПР при оставшейся информации. Таким образом можно определить те спорные вопросы (критерии, оценки, объекты), на которых необходимо сосредоточить внимание членов ГПР при последующем обсуждении.

Хотя совместное проецирование объектов и экспертов применялось ранее, рассматриваемая задача обладает существенными особенностями: учёт оценок объектов по многим критериям резко увеличивает число связей, накладываемых на объекты и экспертов при проецировании. Поэтому появляется реальная опасность внесения больших искажений в первоначальные расстояния между объектами в многомерном пространстве.

В связи с этим принята следующая процедура.

1. Первоначально вводятся лишь расстояния между точками, соответствующими членам ГПР. Они характеризуют степень совпадения мнений членов ГПР при оценке ими объектов по многим критериям.

2. Задача проецирования решается только для точек, представляющих членов ГПР, в соответствии с введенными расстояниями. Для эффективного отображения используется критерий минимизации суммы относительных разностей исходных расстояний между точками и расстояний на плоскости. Минимизация осуществляется методом сопряженного градиента.

3. Поэтапно производится «загрубление» исходной информации до достижения удовлетворительного совпадения мнений между членами ГПР либо до появления одной или нескольких коалиций. Степень совпадения мнений устанавливается при анализе результата проецирования на соответствующих рисунках.

4. При достижении совпадения мнений между членами ГПР или членами коалиций (ценой удаления части информации) для них вводятся расстояния между экспертом и объектом и решается заново задача проецирования совместно для всех объектов и всех членов ГПР (или членов коалиции). При этом предполагается, что предыдущие этапы (удаление части информации) обеспечили достаточную близость точек, представляющих членов ГПР, и поэтому проецирование не связано с чрезмерными искажениями.

При совместном проецировании используется критерий, аналогичный приведенному выше.

Среднее расстояние объекта от группы членов ГПР с совпадающими мнениями определяет его место в окончательном упорядочении объектов по мнению этой группы.

Определим перечень этапов анализа первоначальной информации («загрубления» информации).

1. Первоначально вводится простое метрическое (евклидово) расстояние между точками, соответствующими экспертам, как относительная сумма разностей между получаемыми от экспертов оценками объектов по многим критериям.

2. Вводится расстояние, учитывающее только совпадение точек зрения экспертов о превосходстве одного объекта над другим по каждому из критериев.

3. Если на шкалах критериев имеется по несколько оценок, то производится операция «объединения оценок», т.е. делается попытка

объединить эти оценки в две, характеризующие наличие и отсутствие качества по данному критерию.

4. Определяются критерии, по которым противоречия между экспертами проявляются в наибольшей степени. Разногласия подсчитываются для каждой пары экспертов, а затем определяется коэффициент T_k , характеризующий степень несогласия экспертов по k -му критерию. Критерии ранжируются в соответствии с значением коэффициента T_k .

На каждом из перечисленных этапов анализируется последовательность рисунков, характеризующих результат проецирования. При установлении достаточного сближения группы точек, представляющих членов ГПР, процесс удаления части информации прекращается. Если такое сближение не достигается после удаления на этапе 4 половины критериев, то результатом анализа является факт глубоких противоречий между членами ГПР. Можно предположить, что такой случай на практике встречается достаточно редко. Если анализ не выявляет общего согласия между членами ГПР, то он позволяет выявить коалиции.

После выделения согласных между собой членов ГПР для этой группы вводятся метрические расстояния между объектом и членом ГПР.

Полученная при проецировании ранжировка объектов характеризует среднее мнение членов данной группы. Степень совпадения взглядов внутри группы можно оценить с помощью коэффициента ранговой корреляции Кэндалла [16], сравнивая ранжировки членов группы и общую ранжировку.

8.9.2 Проведение конференции по принятию решений

Результаты анализа сообщаются всем членам ГПР при первом обсуждении рассматриваемого вопроса. Эти результаты способствуют более эффективной организации работы ГПР: в первую очередь обсуждаются расхождения мнений по оценкам отдельных критериев, в случае

необходимости запрашивается дополнительная информация и т.д. Результаты анализа, представленные в наглядном виде, направляют дискуссию членов ГПР.

Разработанный метод был использован для организации деятельности комиссии, в задачу которой входило разделение представленных на конкурс результатов научно-исследовательских работ на две группы —лучшие (первая премия) и худшие (вторая премия) [7]. Использовались следующие критерии оценок результатов работ: новизна, важность, оригинальность, широта применения, практическое значение, уровень по отношению к другим работам.

Вначале представляются первоначальные результаты «проецирования» на плоскость точек, характеризующих комиссии, при использовании расстояния между их оценками объектов. Например, намечающееся единство среди большой группы членов комиссии (семь из восьми), причем три из них (№ 3, 6, 7) образуют плотную группу. Далее было осуществлено «слияние» оценок объектов по критериям.

При этом было достигнуто практически полное совпадение мнений большинства членов комиссии. Этот результат был доложен консультантом перед началом обсуждения работ, представленных на конкурс. Было сообщено также, что лишь один член ГПР (№ 5) расходится во мнении с остальными в оценке четырех объектов по трем критериям. При обсуждении удалось убедить его пересмотреть первоначальные оценки. Обсуждение продолжалось значительно меньшее время, чем аналогичные заседания подобных комиссий, причем было принято намечавшееся решение большинства.

С учетом вышеизложенного, можно сделать следующие выводы.

1. Существует *множество* систем голосования. Наиболее известные из них - системы Кондорсе, Борда, правило большинства голосующих - кажутся справедливыми и убедительными с точки зрения здравого смысла. Однако

они приводят к нарушению рациональности. Парадоксы не возникают, если один из кандидатов набрал абсолютное большинство голосов.

2. Результаты К. Эрроу показывают, что в принципе невозможно найти систему голосования, которая была бы одновременно решающей, рациональной и демократической. Это означает, что применение демократических процедур голосования требует внимания и тщательного анализа результатов.

3. Широко распространенной на практике является задача принятия коллективных решений в малых группах: комиссиях, жюри и т. д. Эффективность работы таких групп могут существенно повысить методы анализа позиций членов группы и рациональная организация работы группы.

Контрольные вопросы

1. Принцип Кондорсе и Парадокс Кондорсе
2. Правило большинства голосов
3. Метод Борда
4. Аксиомы Эрроу и теорема о невозможности
5. Попытки пересмотра аксиом
6. Принятие решений в малых группах
7. Конференции по принятию решений

9 Принятие решений и сети Петри

9.1 Основные понятия теории сетей Петри

Сети Петри предназначены для моделирования систем, которые состоят из множества взаимодействующих друг с другом компонент. При этом компонента сама может быть системой. Действиям различных компонент системы присущ параллелизм. Примерами таких систем могут служить вычислительные системы, в том числе и параллельные, компьютерные сети, программные системы, обеспечивающие их функционирование, а также экономические системы, системы управления дорожным движением, химические системы, и т. д.

Впервые сети Петри предложил немецкий математик Карл Адам Петри. Одной из областей применения сетей Петри является моделирование параллельных вычислений и многопроцессорных систем. Успешная работа в этом направлении требует хорошего знания сетей Петри и методов сетей Петри. Сети Петри — это математический аппарат моделирования динамических дискретных систем [12,13].

Сеть Петри - инструмент для моделирования динамических систем. Теория сетей Петри делает возможным моделирование системы математическим представлением ее в виде сети Петри, анализ которой помогает получить важную информацию о структуре и динамическом поведении моделируемой системы.

Возможно несколько путей практического применения сетей Петри при проектировании и анализе систем. В одном из подходов сети Петри рассматриваются как вспомогательный инструмент анализа. Здесь для построения системы используются общепринятые методы проектирования, затем построенная система моделируется сетью Петри, и построенная модель анализируется.

В другом подходе весь процесс проектирования и определения характеристик проводится в терминах сетей Петри. В этом случае задача заключается в преобразовании представления сети Петри в реальную информационную систему.

Несомненным достоинством сетей Петри является математически строгое описание модели. Это позволяет проводить их анализ с помощью современной вычислительной техники (в том числе с массово-параллельной архитектурой).

9.2 Структура сети Петри

Сеть Петри представляет собой двухдольный граф, состоящий из двух типов вершин - позиций и переходов, соединённых между собой дугами, вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно. В позициях могут размещаться метки (маркеры), способные перемещаться по сети.

Событием называют срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции. События происходят мгновенно, одновременно при выполнении некоторых условий.

Сеть Петри N состоит из пяти компонентов: множества *позиций* P , множества *переходов* T , множества *входных функций* $I(t)$ и множества *выходных функций* $O(t)$ и начальной *маркировки* $M(P)$. Входная функция $I(t_i)$ отображает связи от множества позиций в переход t_i , а выходная функция $O(t_i)$ отображает связи от перехода t_i в множество позиций [8].

Сеть Петри является пятёркой, $N = \langle P, T, I, O, M \rangle$,

где $P = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ - множество позиций;

$T = \langle t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$ - множество переходов;

$I(t)$ - множество входных функций;

$O(t)$ - множество выходных функций;

$M(P)$ – начальная маркировка.

9.3 Графическое представление сетей Петри

Сеть Петри может быть представлена в аналитическом или графическом виде.

Пример задания сети Петри в аналитическом виде представлен ниже.

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$I(t_1) = p_1$$

$$I(t_2) = p_3$$

$$I(t_3) = p_2, p_3$$

$$I(t_4) = p_4, p_5, p_5, p_5$$

$$I(t_5) = p_2$$

$$O(t_1) = p_2, p_3$$

$$O(t_2) = p_3, p_5, p_5$$

$$O(t_3) = p_4, p_5$$

$$O(t_4) = p_4$$

$$O(t_5) = p_6$$

$$M(P) = \{3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 4 \ 0\}$$

Эта же сеть Петри, представленная в графическом виде, приведена на рисунке 9.1. Граф сети Петри обладает двумя типами узлов. Круг является позицией, а планка – переходом. Ориентированные дуги (стрелки) соединяют позиции и переходы, при этом некоторые дуги направлены от позиций к переходам, а другие – от переходов к позициям. Дуга, направленная от позиции P_i к переходу t_j , определяет позицию, которая является входом для перехода. Кратные входы в переход обозначаются перечёркиванием наклонной чертой соответствующей дуги и указанием количества этих дуг.

Маркировка M есть присвоение фишек (точек внутри позиций) позициям сети. Фишка изображается точкой в кружке, которая представляет позицию сети Петри. Количество и положение фишек при выполнении сетей Петри могут изменяться. Они используются для определения выполнения сети Петри [12,13].

Маркировка M сети Петри есть функция, отображающая множество позиций в множество неотрицательных целых чисел N .

$$M: P \rightarrow N.$$

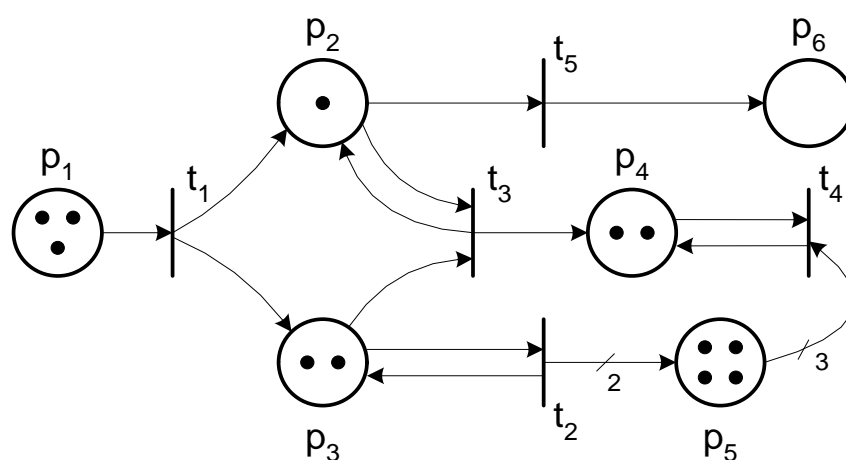
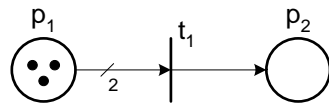


Рис.9.1. Графическое представление сети Петри

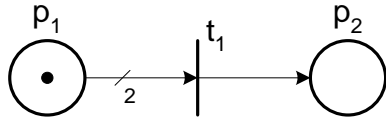
9.4 Выполнение сетей Петри и правила запуска

Под выполнением понимается последовательность путей запусков переходов, в результате которой фишки изымаются из входных позиций и перемещаются в выходные. Переход может запускаться только в том случае, когда он разрешен.

Переход называется *разрешенным к запуску*, если каждая из его входных позиций имеет число фишек по крайней мере равное числу входных дуг из каждой позиции в данный переход.



- запуск перехода **t1** разрешен, так как число фишек в позиции P1 равно трём, а количество входных дуг две.



- запуск перехода **t1** запрещен, так как в позиции P1 имеется одна фишка, а количество входных дуг две.

Переход t_j сети Петри с маркировкой M может быть запущен всякий раз, когда он разрешен. В результате запуска разрешенного перехода t_j образуется новая маркировка M' .

Правила запуска:

- 1) запуск переходов носит случайный характер;
- 2) при запуске перехода из его входных позиций изымается число фишек равное числу входных дуг;
- 3) фишки перемещаются в выходные позиции перехода в количестве равном числу дуг, идущих от перехода в выходные позиции.

Например, при запуске перехода t_1 (рисунок 9.1) из позиции p_1 изымается одна фишка и добавляется по одной фишке в позиции p_2 и p_3 . При запуске перехода t_2 в полученной маркировке из позиции p_2 изымается одна фишка и добавляется две фишки в позицию p_5 и одна фишка в позицию p_3 ;

При запуске перехода t_3 изымается по одной фишке из позиций p_2 и p_3 и добавляется по одной фишке в позиции p_2 и p_4 .

Переход, не имеющий ни одной входной позиции, называется *истоком*. Переход-исток всегда разрешен (рисунок 9.2).

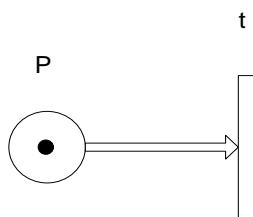


Рис. 9.2

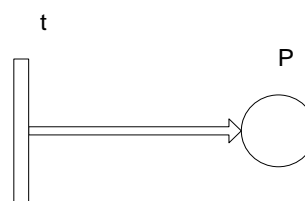


Рис.9.3

Переход, не имеющий ни одной выходной позиции, называется *стоком*. Переход-сток всегда разрешен (рисунок 9.3).

Запуск стока приводит к изъятию фишек без порождения новых.

Пара, состоящая из позиции p и перехода t , называется *петлей*, если позиция P является входной и выходной для перехода t (рисунок 9.4).

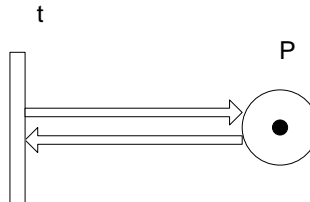


Рис. 9.4

Сеть Петри называется *однородной*, если в ней отсутствуют петли.

Сеть Петри называется *простой*, если в ней используется по одной дуге между позициями и переходами.

9.5 Примеры использования сетей Петри

Сеть Петри, моделирующая работу торгового автомата, приведена на рисунок 9.5. Переходам поставлено в соответствие опускание монеты достоинством 5 руб., 10 руб. в автомат или нажатие кнопки выбора Nuts, Twix.

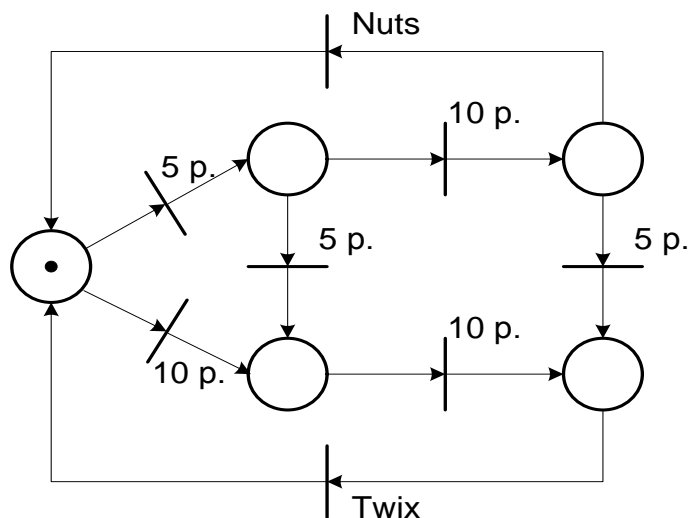


Рис.9.5. Модель торгового автомата

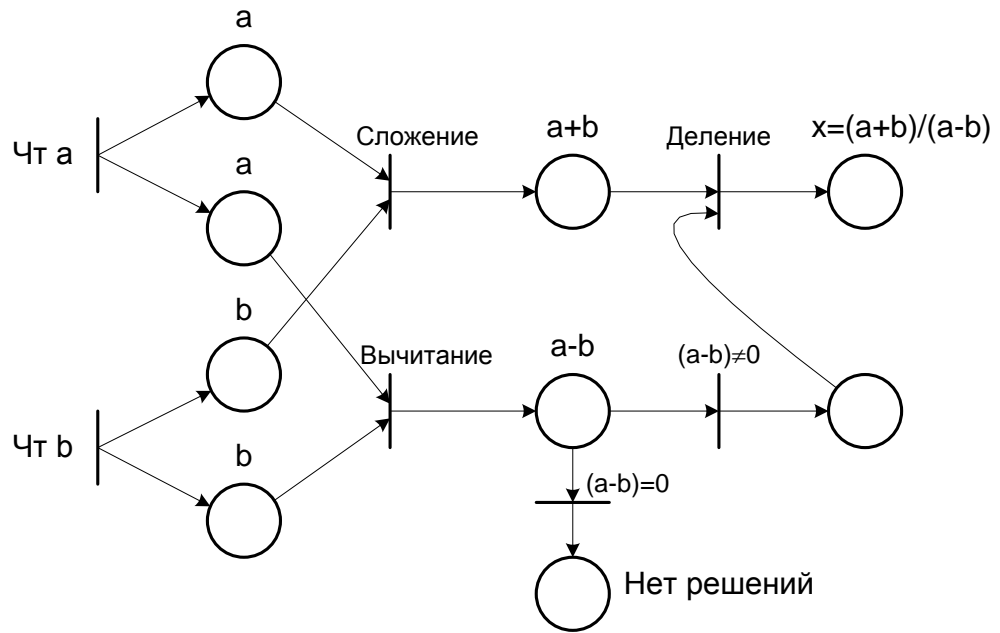


Рис. 9.6. Модель решения алгебраического уравнения

Пример моделирования алгебраического уравнения представлен на рисунок 9.6.

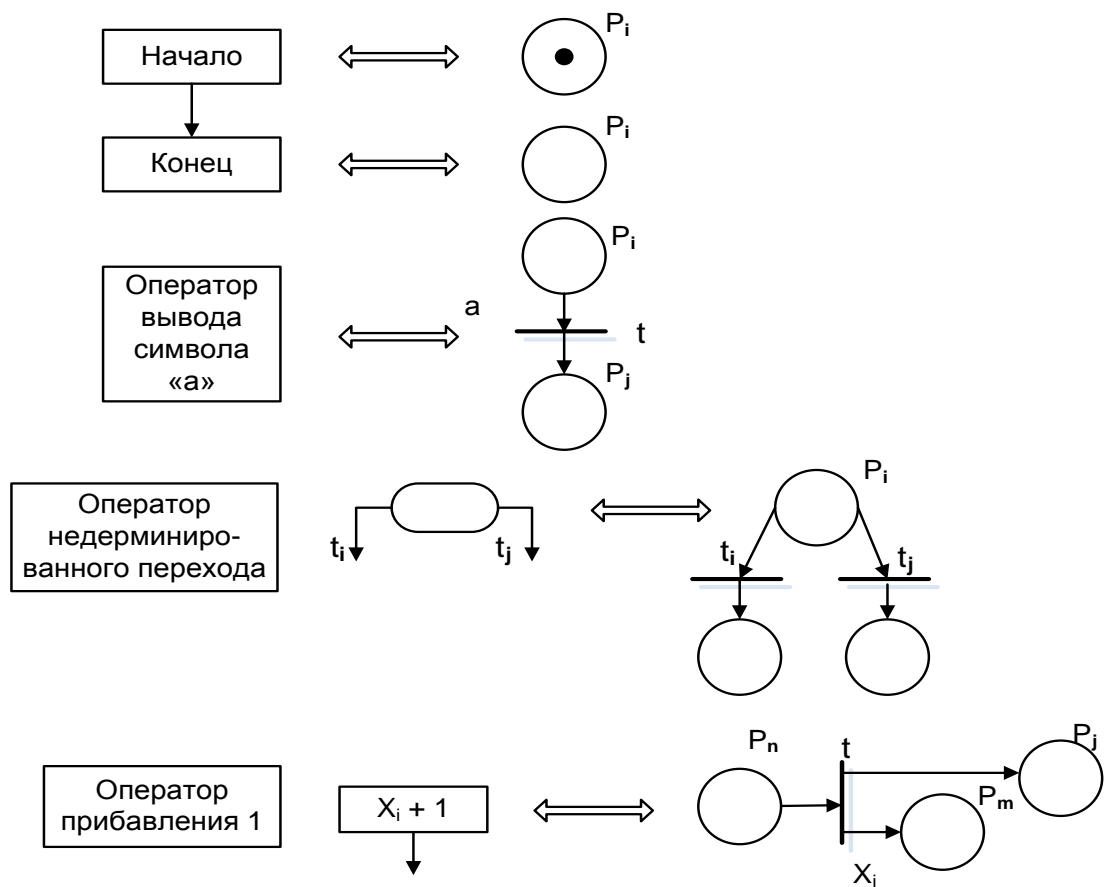


Рис. 9.7. Модели основных операторов

Основные операторы алгоритмов решения задачи могут быть реализованы с помощью сети Петри. На рисунок 9.7 сопоставлены фрагменты сетей Петри и основных операторов.

Оператору начало соответствует позиция без входных дуг, а оператору конец – без выходных дуг.

Оператору вывода символа «а» соответствует переход, помеченный этим символом. Оператор недетерминированного перехода моделируется двумя переходами с общим конфликтным входом и разными выходами [8,12,13].

Оператор прибавления единицы $x_i := x_i + 1$ может быть представлен переходом с одной входной позицией и двумя выходными позициями. Позиция x_i соответствует счётчику, в котором накапливаются фишки.

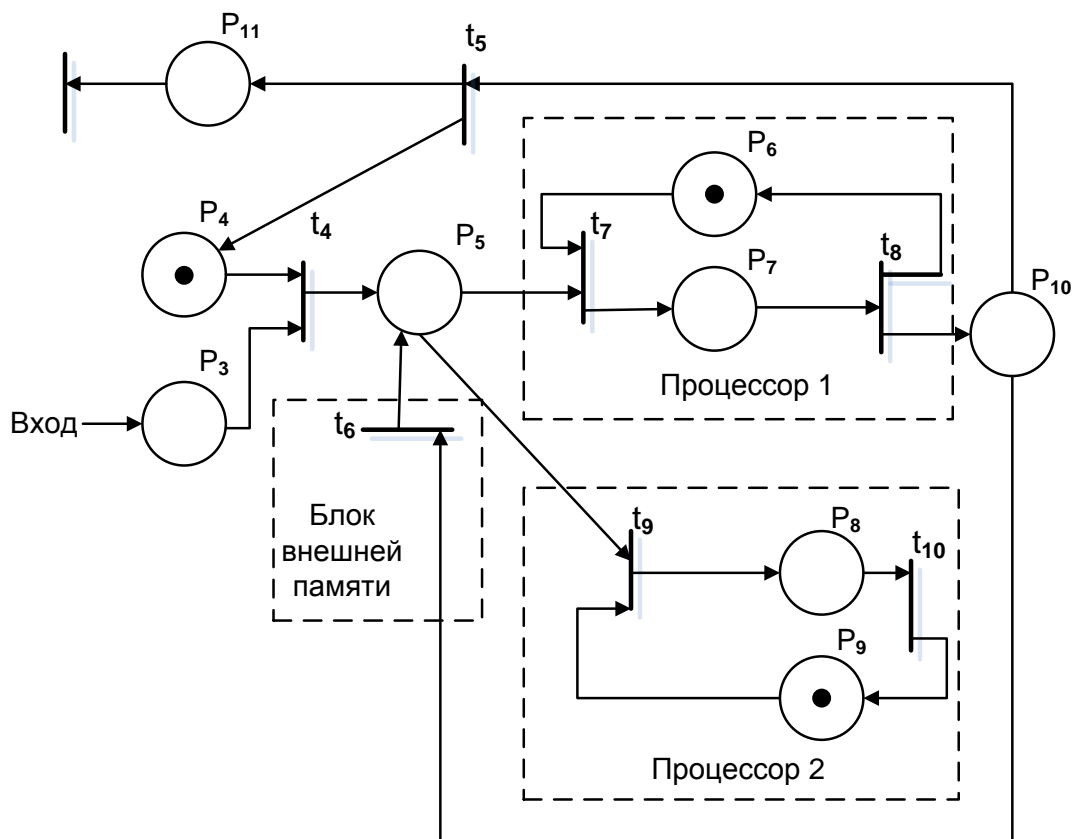


Рис.9.8. Модель двухпроцессорной вычислительной системы

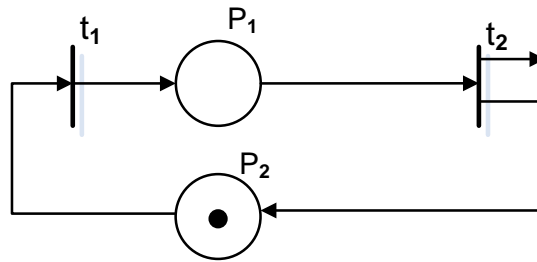


Рис.9.9. Модель блока формирования заданий

Каждой задаче, поступающей в систему, должен выделяться один блок памяти (позиция P4). Количество фишек в позиции P4 соответствует количеству блоков в системе. Например, при наличии 8 блоков памяти, в позиции P4 должно находиться 8 фишек. Во время решения задачи возможно обращение к блоку внешней памяти. При моделировании задаются законы распределения времени обработки порций информации в процессорах и вероятность q выхода задачи из системы между обращениями к к блоку внешней памяти. Задержки на обслуживание в процессорах 1 и 2, а также в блоке внешней памяти реализуются переходами t_8 , t_{10} , t_6 . Вероятность q учитывается при выходах из позиции P10. Формирование задачи, подаваемой на вход (рисунок 9.8) представлено моделью сети Петри на рисунок 9.9.

9.6 Свойства сетей Петри

Ограниченность и безопасность. Сеть Петри называется k -ограниченной, если для любой маркировки, достижимой из M_0 , число фишек в любой позиции не превышает число k . При $k=1$ сеть Петри называется безопасной, т.е. число фишек в любой позиции не превышает единицу. Пример безопасной сети приведён на рисунок 9.10.

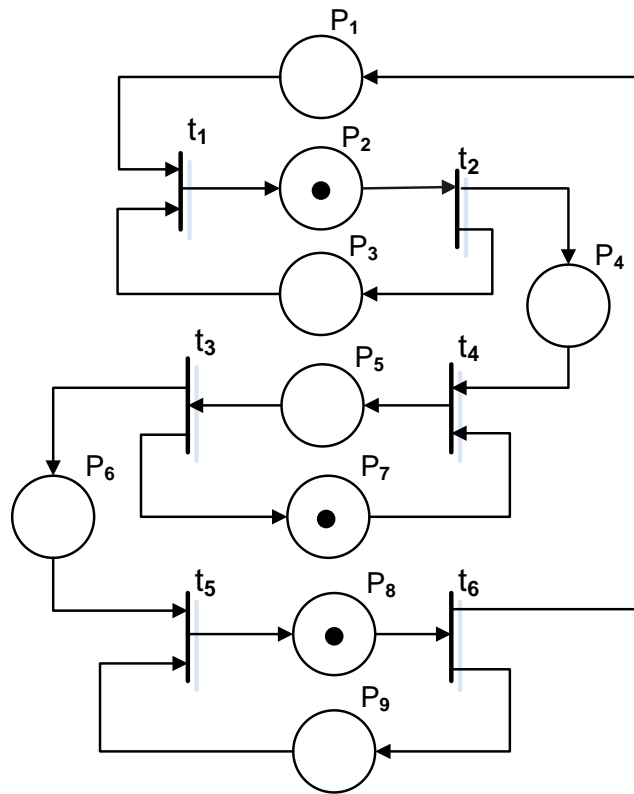


Рис.9.10. Пример безопасной сети Петри

Достижимость. Проблема достижимости является центральной в теории сетей Петри [12,13].

Маркировка M_n достижима из маркировки M_0 , если существует последовательность запусков $\delta = M_0 t_1 M_1 t_2 \dots M_n$, приводящих от M_0 к M_n .

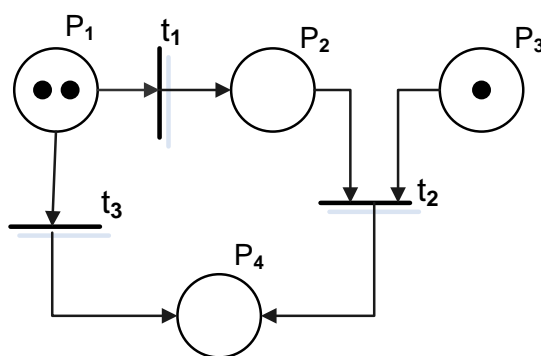


Рис. 9.11

$$M_0 = (2010)$$

$$M_1(t_1) = (1110)$$

$$M_2(t_2) = (1001)$$

$$M_3(t_3) = (0002)$$

В примере (рисунок 9.11) маркировка $M_3(t_3) = (0002)$ достижима из начальной маркировки $M_0 = (2010)$ путём последовательного запуска переходов t_1, t_2, t_3 .

Это свойство можно ослабить. В результате проводится поиск не полной маркировки, а её подмножества (подмаркировки).

Активность. Сеть Петри называется активной, если независимо от достигнутой из M_0 маркировки для любого перехода существует последовательность запусков, приводящая к изменению маркировки.

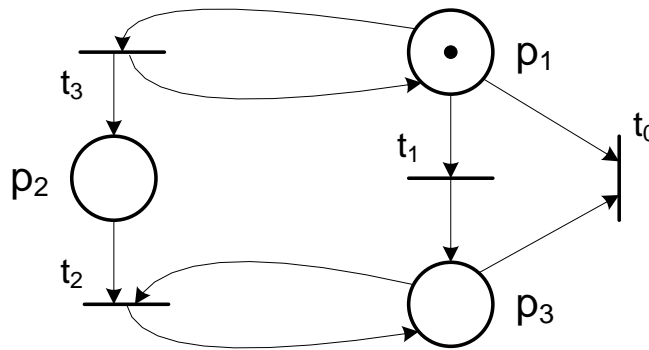


Рис. 9.12

Это жесткое свойство может быть ослаблено. Для этого вводится 5 свойств L – активности: L_0 , L_1 , L_2 , L_3 , L_4 .

L_0 – *активным* называется переход, который не может срабатывать в сети Петри ни в какой последовательности запусков (на рисунок 9.12 переход t_0).

L_1 – *активным* называется переход, который в любой последовательности запусков может сработать только один раз (на рисунок 9.12 переход t_1).

Переход называется L_2 – *активным*, если существует последовательность запусков из M_0 , в которой он может сработать k раз ($k > 1$) (на рисунок 9.12 переход t_2).

Переход называется L_3 – *активным*, если существует последовательность запусков из M_0 , в которой он может сработать бесконечное число раз (на рисунок 9.12 переход t_3).

Переход называется L_4 – *активным*, если это L_1 – активный переход для любой маркировки из M_0 .

В ряде источников литературы указанное свойство называется *живостью* (возможность срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта).

Обратимость и базовое состояние. Сеть Петри *обратима*, если существует последовательность запусков, по которой можно вернуться к M_0 .

Во многих задачах необязательно возвращаться в M_0 , а достаточно вернуться в некоторое базовое состояние M^* .

Маркировка M^* называется *базовым состоянием*, если она достижима из маркировки M_n .

Покрываемость. Маркировка M в сети Петри *покрываема*, если существует маркировка M^* , достижимая из M_0 , такая что выполняется условие $M^*(P) \geq M(P)$ для любой позиции P .

Устойчивость. Сеть Петри называется *устойчивой*, если для двух любых разрешенных переходов запуск одного из них не приводит к запрещению другого.

Сохраняемость. При моделировании систем распределения ресурсов сетями Петри фишки представляют ресурсы. В результате запуска переходов фишки, представляющие ресурсы, не уничтожаются и не создаются, т.е. наблюдается своего рода сохранение.

Сеть Петри с начальной маркировкой M_0 называется *сохраняющей* [12,13] по отношению к вектору взвешивания позиций $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$, если для всех маркировок M' выполняется выражение

$$\sum_{i=1}^T w_i M'(p_i) = \sum_{i=1}^n w_i M_0(p_i)$$

Здесь проведено взвешивание фишек путём присвоения веса позициям и вектор $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ определяет вес w_i для каждой позиции [12,13].

Другими словами – сеть называется строго сохраняющей, если в любой маркировке сумма фишек по всем позициям постоянна; более общим свойством является сохранение по отношению к некоторому ненулевому (и

неединичному) вектору, на который умножается всякий вектор маркирования в целях проверки постоянства этого произведения.

9.7 Методы анализа сетей Петри

Методы анализа сетей Петри можно разбить на три основные группы:

- методы на основе дерева достижимости;
- применение матричного подхода к решению задачи достижимости;
- методы преобразования и декомпозиции.

9.7.1 Построение дерева достижимости

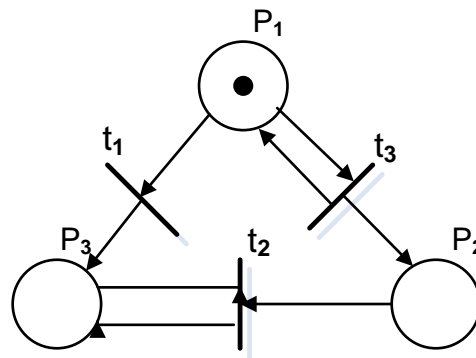


Рис.9.13

Алгоритм построения дерева достижимости для графа сети Петри, приведённой на рисунок 9.13, указан ниже.

1. Обозначим начальную маркировку как корень дерева и присвоим ей метку «новая» (рисунок 9.14).
2. Зарисуем дуги, по которым могут быть произведены запуски переходов.

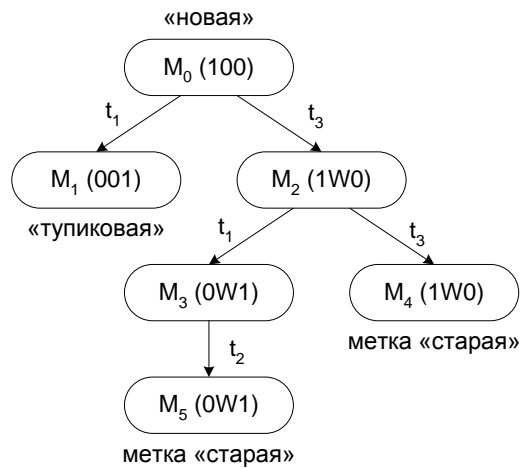


Рис.9.14. Дерево достижимости

Анализируем маркировки, полученные на втором ярусе:

M_1 – тупиковая, присваиваем метку «тупиковая»;

M_2 – при многократном запуске t_3 в p_2 накапливаются фишки, чтобы дерево не разрасталось, количество фишек в p_2 заменяется бесконечно большим числом $W=W+1$.

Анализ продолжается до тех пор, пока не будут просмотрены все возможные ситуации.

9.7.2 Алгебраические методы

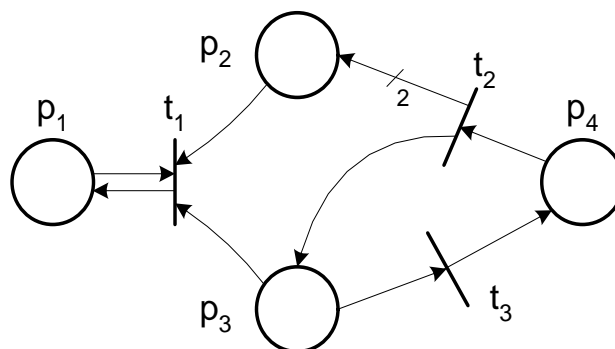


Рис.9.15

Для представления сети Петри в матричной форме используются матрицы входных и выходных функций и матрица инциденции.

Пример формирования матрицы входных и выходных функций для графа, представленного на рисунок 9.15, рассмотрен ниже.

Матрица входных функций:

$$D^+ = \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline t_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Матрица выходных функций:

$$D^- = \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Матрица инциденции вычисляется по формуле: $D = D^- - D^+$

$$D = \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline t_1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ t_2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ t_3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Физический смысл матрицы инциденции состоит в следующем.

Рассмотрим переход t_2 .

-1 означает, что изымается одна фишка из позиции p_4 .

1 – добавляется одна фишка в позицию p_3 .

2 – добавляется две фишки в позицию p_2 .

Для анализа достижимости маркировки M^* из начальной маркировки M_0 требуется решить матричное уравнение вида

$$M^* = M_0 + x * D, \quad (9.1)$$

где x – последовательность запусков переходов сети Петри, приводящая к маркировке M^* из маркировки M_0 ;

D – матрица инциденции.

Пример: Пусть $M^* = (1, 8, 0, 1)$; $M_0 = (1, 0, 1, 0)$.

Подставив в (9.1) числовые значения получим

$$(1, 8, 0, 1) = (1, 0, 1, 0) + x * \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 & -1 \\ & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

После переноса значения $M_0 = (1, 0, 1, 0)$ в левую часть имеем

$$(0,8,-1,1) = x^* \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

В результате решения матричного уравнения находим $x = (0, 4, 5)$.

Это означает, что маркировка M^* достижима из маркировки M_0 ; при этом переход t_1 запускается 0 раз, t_2 - 4 раза, t_3 - 5 раз.

Решение уравнения не дает ответа на вопрос: «в какой последовательности следует запускать переходы?». Если решения нет, то маркировка M^* не достижима из маркировки M_0 . Для графа сети Петри, приведенного на рисунок 1.14, к маркировке M^* приводит следующая последовательность запусков: $\delta = t_3 t_2 t_3 t_2 t_3 t_2 t_3 t_2 t_3$.

9.8 Разновидности сетей Петри

Сети Петри с ингибиторными (запрещающими) дугами

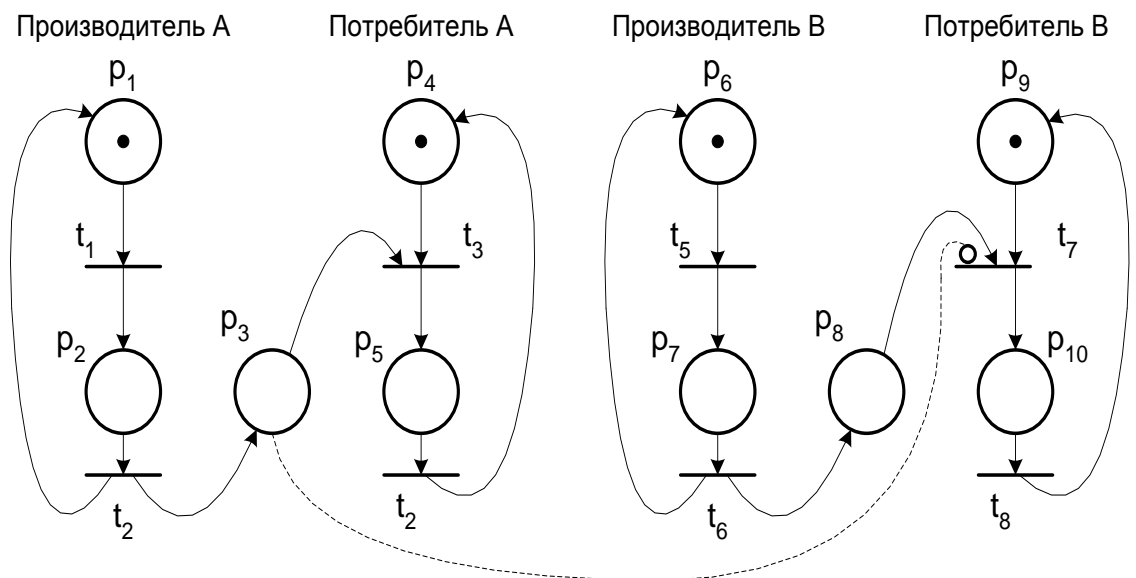


Рис.9.16.Сеть Петри с ингибиторными дугами

В этой модели потребитель А имеет приоритет по сравнению с потребителем В. Если буфер А полон и в позиции p_3 фишка, она блокирует запуск перехода t_7 . Запуск перехода t_7 возможен, если в позиции p_3 нет фишки (рисунок 9.16).

По ингибиторной дуге фишки не передаются, она служит только для управления.

Сети Петри, содержащие ингибиторные дуги, называются *расширенными сетями Петри* или *ингибиторными сетями Петри*.

Приоритетные сети Петри. При описании функционирования сетей Петри отмечался недетерминизм следующего рода: если несколько переходов могут сработать, то срабатывает любой из них [12,13]. В реальных дискретных системах имеют место ситуации, когда из двух готовых работать устройств требуется запустить сначала одно, а затем второе. Другими словами, одно из устройств имеет приоритет на запуск перед другими в том случае, если оба готовы работать. Такие ситуации не моделируются в сетях Петри в силу принятого в них правила срабатывания нескольких готовых к запуску переходов.

Эту задачу решают приоритетные сети Петри. Для этого вводится множество приоритетов PR , элементы которого частично упорядочены некоторым отношением (меньше или равно). Каждому переходу t сети Петри устанавливается его приоритет $pr(t_i) \in PR$.

Правило срабатывания перехода модифицируется и дополняется условием: переход t_i срабатывает в первую очередь, если для любого другого перехода t_j этой сети приоритет срабатывания ниже, $pr(t_j) \leq pr(t_i)$.

Другими словами, если несколько переходов могут сработать, то срабатывает тот переход, приоритет которого выше. Приоритеты срабатывания могут динамически изменяться в процессе моделирования. Такую модификацию сети Петри называют *сетью с приоритетами* или *приоритетной сетью Петри*.

На рисунок 9.17 приведён пример простой сети с приоритетами. В качестве приоритетов можно выбрать множество целых чисел. Здесь могут сработать оба перехода, но поскольку $\text{pr}(t_2) \leq \text{pr}(t_1)$, то срабатывает только переход t_1 .

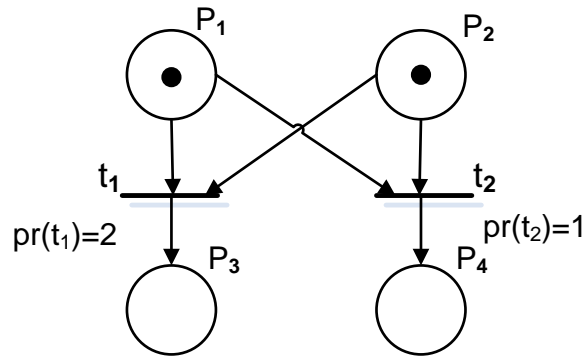


Рис.9.17. Сеть Петри с приоритетами

Временная сеть Петри. Время может быть сопоставлено различным сетевым элементам: местам, переходам, дугам, фишкам, шагам (множествам параллельных переходов). При этом различают временные ограничения, сопоставленные некоторому элементу временной сети Петри, и временные счетчики, введенные в модель для контроля локального или глобального времени. Временная информация может быть представлена как одним числом (что соответствует дискретному представлению времени), так и интервалом (что соответствует непрерывному представлению времени). В модели либо разрешается только одиночное срабатывание перехода, либо предполагается принцип максимального шага срабатывания (т.е. одновременного срабатывания максимально возможного количества параллельных переходов). Отдельным вопросом является наличие в модели автопараллелизма переходов (одновременного срабатывания нескольких экземпляров одного и того же перехода), а также возможность наличия в месте фишек с различными временными характеристиками. Кроме того, в разных моделях либо позволяют, либо запрещают "умирание" фишек по истечении заданного времени и т.п. Наиболее популярными стали модели, в которых временные характеристики связаны с переходами, а именно

дискретно-временная модель Рамхандани-Штарке, и непрерывно-временная модель Мерлина. В модели Рамхандани с каждым переходом связывается некоторое (как правило, целочисленное) значение, соответствующее длительности срабатывания перехода.

Модель Мерлина сопоставляет каждому переходу пару неотрицательных чисел, которые указывают на наиболее раннее и наиболее позднее времена, когда может сработать переход. По сравнению с другими временными сетевыми моделями временные сети Мерлина являются наиболее удобной и выразительной моделью для описания и изучения параллельных систем реального времени.

Временная сеть Петри определяется шестеркой:

$$N = \langle P, T, I, O, M, \beta \rangle$$

Множество β связывает с каждой позицией сети Петри временные параметры. Фишка в позиции p_i становится готовой к запуску ее выходного перехода только после времени τ_i , заданного для данной позиции

$$\tau_i = \beta(p_i).$$

Возможно задание временной сети Петри через задержку переходов

$$\tau_i = \beta(t_i).$$

Переходы t_i обладают весом $\beta(t)_i$, определяющим продолжительность срабатывания (задержку).

Стохастическая сеть Петри. Эта сеть Петри характеризуется случайными задержками.

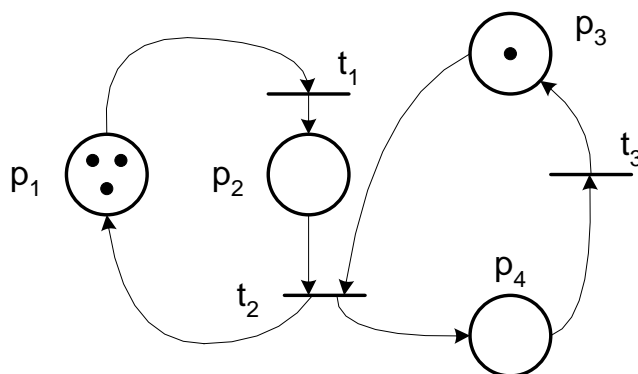


Рис. 9.18

Переход t_1 на рисунок 9.18 имитирует отказ блока, t_2 – замену блока, t_3 – ремонт блока.

$M_0 = (3, 0, 1, 0)$ соответствует наличию в системе трех рабочих блоков и одного запасного. Переходам соответствуют случайные временные задержки:

t_1 – интервал времени между отказами;

t_2 – время замены;

t_3 – время восстановления отказавшего блока.

Функциональная сеть Петри. Такая сеть отражает не только последовательность событий, но и процессы обработки потока данных. Для этого в описание каждого перехода добавляется функция обработки данных.

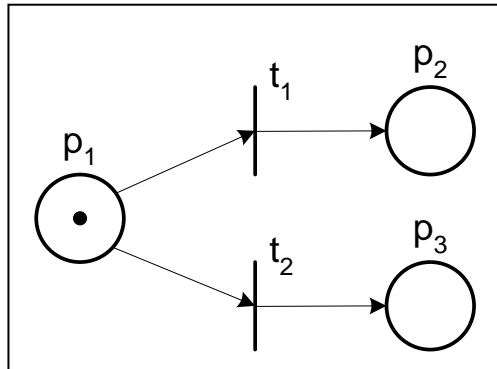
С помощью функциональных сетей Петри можно моделировать разнообразные вычислительные системы, производить статистическую обработку результатов моделирования и отображать различные алгоритмы функционирования.

В функциональных сетях Петри можно использовать задержки, которые определяются как функции некоторых аргументов. Например, количества фишек в каких-либо позициях или состояния некоторых переходов.

Фишки могут быть различных типов, обозначаемых цветами. В этом случае тип метки может быть использован как аргумент в функциональных сетях.

Автоматная сеть Петри. Каждый переход имеет только один вход и один выход. Число маркеров в такой сети постоянно. Такие сети по своим возможностям эквивалентны конечным автоматам.

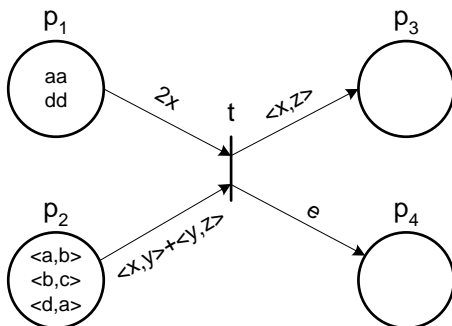
Цветная или раскрашенная сеть Петри. Такая сеть используется в тех случаях, когда требуется отличать друг от друга некоторые группы фишек.



Например, при моделировании гибких производственных систем фишки могут отображать детали разных фишек.

Для разнотипных деталей вводятся разноцветные фишки со своими правилами запуска переходов. Например, красные фишки запускают переход t_1 , а зеленые – t_2 .

Рассмотрим пример цветной сети Петри.



Начальная маркировка:

- p_1 содержит четыре цветных фишки: две цвета a и две цвета d ;
- p_2 содержит три упорядоченных пары цветных фишек: $\langle a,b \rangle$, $\langle b,c \rangle$, $\langle d,a \rangle$;
- p_3 и p_4 не имеют фишек.

Названия дуг определяют сколько фишек и какого цвета будут удалены и появятся вновь:

- p_1 теряет две фишки цвета x ;

- p_2 теряет две фишки цветов $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, z \rangle$;
- p_3 получает одну цветную фишку $\langle x, z \rangle$;
- p_4 получает одну цветную фишку e (константу).

x, y, z – переменные

a, b, c, d, e – константы

Переход t называется разрешенным к запуску, если в каждой входной позиции существует достаточное число фишек правильного цвета. Под *правильным цветом* понимается такой цвет, при котором существуют непротиворечивые варианты подстановок констант в переменные.

Например, существует подстановка $\{a \mid x, b \mid y, c \mid z\}$. Тогда после запуска перехода из p_1 изымаются две фишки a , из p_2 – $\langle a, b \rangle$ и $\langle b, c \rangle$, в p_3 перемещается $\langle a, c \rangle$ и в p_4 – e .

Другая подстановка: $\{d \mid x, a \mid y, b \mid z\}$.

WF-сети. WF-сети – подкласс [сетей Петри](#) называемый также сетями потоков работ. Формализм WF-сетей введен Вил Ван Дер Аальстом ([англ. Wil Van Der Aalst](#)) для [моделирования](#) потоков работ в workflow-системах.

Сеть Петри $P_n = (P, T, F)$ называется сетью потоков работ (WF-сетью), если выполняются следующие условия:

- существует только одна исходная позиция P_{in} , такая что отсутствуют переходы, входящие в P_{in} ;
- существует только одна конечная позиция P_{out} , такая что отсутствуют переходы выходящие из P_{out} ;
- каждый узел данной сети расположен на пути от P_{in} к P_{out} .

WF-сети используются для проверки [графов](#) потоков работ на наличие таких структурных конфликтов, как «тупики» ([англ. deadlocks](#)) и «недостатки синхронизации» ([англ. lack of synchronization](#)).

Структурные конфликты отсутствуют, если WF-сеть является бездефектной. Свойство бездефектности или правильной завершаемости соответствует следующим требованиям:

- конечная позиция P_{out} достижима при любой последовательности запуска переходов от позиции P_{in} ;
- WF-сеть не содержит лишних позиций (которые никогда не будут выполнены);
- при достижении конечной позиции данной сети не должно оставаться фишек в промежуточных позициях.

Свойство бездефектности соответствует двум свойствам сетей Петри — живости и ограниченности, рассмотренным выше.

Контрольные вопросы

1. Сеть Петри может ли быть представлена двудольным ориентированным графом и мультиграфом?
2. Правила запуска перехода-истока.
3. Правила запуска перехода-стока.
4. Является ли сеть Петри однородной, если содержит дугу, входящую в переход от позиции P_i , и дугу, выходящую из данного перехода в позицию P_i ?
5. Может ли быть однородная сеть Петри простой?
6. Сохраняется ли суммарное число фишек в сети Петри после запуска одного, двух переходов?
7. После запуска перехода t_3 (рисунок 9.1) возможен ли запуск перехода t_5 ?
8. После двукратного запуска перехода t_3 (рисунок 9.1) возможен ли запуск перехода t_2 ?
9. Возможен ли запуск перехода t_7 на рисунок 9.7?

10. Возможен ли запуск перехода t_5 на рисунок 9.7?

11. Построить граф сети Петри по формальному описанию.
 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ $I(t_1) = p_1$ $I(t_2) = p_2, p_4, p_4$ $I(t_3) = p_3, p_3, p_2$
 $I(t_4) = p_5, p_5$ $O(t_1) = p_1, p_2, p_5, p_5$ $O(t_2) = p_3, p_3$ $O(t_3) = p_4, p_4, p_4$
 $O(t_4) = p_4, p_4, p_4$ $M(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 21220$.

12. Описать последовательный запуск переходов t_1, t_2, t_3, t_4 и перемещения фишек для графа сети Петри в упражнении 11 (ответ: $M(t_4) = 20260$).

13. Разработать граф сети Петри по формальному описанию.
 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ $I(t_1) = p_1$ $I(t_2) = p_2, p_4, p_4$ $I(t_3) = p_3, p_3$
 $I(t_4) = p_5, p_5, p_5$ $O(t_1) = p_2, p_2, p_5, p_5, p_5$ $O(t_2) = p_3, p_3, p_3, p_3$ $O(t_3) = p_4, p_4, p_4$
 $O(t_4) = p_4, p_4, p_4$ $M(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 23330$

14. Описать последовательный запуск переходов t_1, t_2, t_3, t_4 и перемещения фишек для графа сети Петри в упражнении 13 (ответ: $M(t_4) = 13543$).

15. Разработать граф сети Петри по формальному описанию.
 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ $I(t_1) = p_1$ $I(t_2) = p_2, p_4, p_4$ $I(t_3) = p_3, p_3$
 $I(t_4) = p_5, p_5, p_5$ $O(t_1) = p_2, p_2, p_5, p_5, p_5$ $O(t_2) = p_3$ $O(t_3) = p_4, p_4, p_4$
 $O(t_4) = p_4, p_4, p_4$ $M(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 13330$. Какая будет маркировка после запуска перехода t_2 ? (ответ: $M(t_2) = 12410$).

16. Описать последовательный запуск переходов t_1, t_2, t_3, t_4 и перемещения фишек для графа сети Петри в упражнении 15. (ответ: $M(t_4) = 04270$).

17. Может ли быть k-ограниченная сеть Петри безопасной?

18. Может ли быть обратимая сеть Петри безопасной?

19. Может ли быть устойчивая сеть Петри безопасной?

20. Построить 3-х ярусное дерево достижимости для графа сети Петри, представленной формальным описанием: $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
 $I(t_1) = p_1$ $I(t_2) = p_2, p_4, p_4$ $I(t_3) = p_3, p_3, p_2$ $I(t_4) = p_5, p_5, p_5$ $O(t_1) = p_1, p_5, p_5$
 $O(t_2) = p_3, p_3$ $O(t_3) = p_4, p_4, p_4$ $O(t_4) = p_4, p_4, p_4$ $M(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 21220$.

21. Построить 3-х ярусное дерево достижимости для графа сети Петри, представленной формальным описанием: $P=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$ $T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$
 $I(t_1)=p_1$ $I(t_2)=p_2,p_4,p_4$ $I(t_3)=p_3,p_3$ $I(t_4)=p_5,p_5,p_5$ $O(t_1)=p_2,p_2,p_5,p_5,p_5$
 $O(t_2)=p_3,p_3,p_3,p_3$ $O(t_3)=p_4,p_4,p_4$ $O(t_4)=p_4,p_4,p_4$ $M(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=23330$.

22. Определить L-активность каждого перехода сети Петри, приведённой в п.20 и 21.

23. Является ли данная сеть Петри устойчивой, покрываемой и обратимой. Сеть Петри задана в п.21?

24. Составить матрицы входных, выходных функций и инциденции для сети Петри (см. п.20 «Контрольные вопросы и упражнения») и матричное уравнение достижимости маркировки M_k (12221) из начальной маркировки (23330).

25. Решить матричное уравнение средствами MathCAD и определить достижимость маркировки M_k (12221) из начальной маркировки (23330).

26. В каком случае может быть запущен переход t_3 на графе сети Петри, представленном на рисунок 9.19.

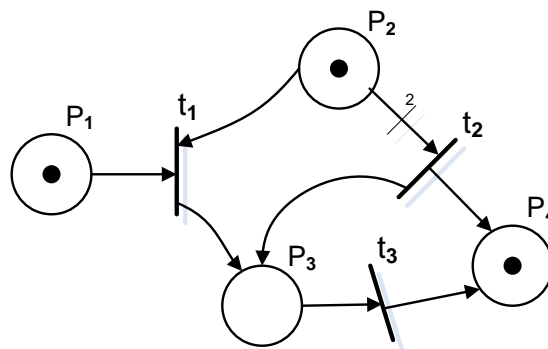


Рис.9.19. Пример графа сети Петри

Перечень сокращений и обозначений

ИС- информационная система

ГПР-группа, принимающая решение

ЛПР-лицо, принимающее решение

СППР - система поддержки решений

ТПР –теория принятия решений

Библиографический список

1. Бородачёв, С. М. Теория принятия решений[Электронный ресурс] : учебное пособие / С.М. Бородачёв. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 124 с.
2. Вдовин, В. М. Теория систем и системный анализ[Электронный ресурс] : учебник / В.М. Вдовин, Л.Е. Суркова, В.А. Валентинов. - 5-е изд., стер. - Москва : Дашков и К`, 2020. - 644 с. : ил. - (Учебные издания для бакалавров). - Библиогр. в кн
3. Заграновская, Анна Васильевна. Теория систем и системный анализ в экономике[Текст] : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. В. Заграновская, Ю. Н. Эйссенер. - Москва : Юрайт, 2019. - 265 с. - (Бакалавр. Академический курс). - Библиогр.: с. 266
4. Теория систем и системный анализ [Электронный ресурс] : учебник / С.И. Маторин, А.Г. Жихарев, О.А. Зимовец, М.Ф. Тубольцев, А.А. Кондратенко. - Москва|Берлин : Директмедиа Паблишинг, 2020. - 509 с. : 509. - Библиогр.: с. 477-489.
5. Дорогов, Виктор Георгиевич. Введение в методы и алгоритмы принятия решений[Текст] : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 230100 "Информатика и вычислительная техника" и по основной образоват. программе подготовки бакалавров 231000 "Программная инженерия" / В. Г. Дорогов, Я. О. Теплова ; под ред. Л. Г. Гагариной. - Москва : Форум : ИНФРА-М, 2012. - 239 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 234-235
6. Ростовцев, Владимир Сергеевич. Системы обработки знаний[Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов направления 09.03.01 " Информатика и выч. техника" по дисциплинам "Системы обработки знаний", "Теория принятия решений" всех профилей подготовки / В. С. Ростовцев ; ВятГУ, ИМИС, ФАВТ, каф. ЭВМ. - Киров : ВятГУ, 2019. - 176 с.
7. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах: Учеб./О.И. Ларичев- М.: Логос, 2000.-296 с.- (Учеб. XXI века).
8. Ростовцев В.С. Теория принятия решений: практикум. - Киров: ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2015. -105 с.
9. Ростовцев В.С. Теория игр : учебное пособие / В. С. Ростовцев. – Киров : ВятГУ, 2020. – 120 с.
10. Лапа, Валентин Григорьевич. Математические основы кибернетики[Текст] / В. Г. Лапа. - Киев : Вища шк., 1974. - 450 с. : ил. - Библиогр.: с. 442-446
11. Кемени, Джон Д. Конечные цепи Маркова[Текст] / Д. Д. Кемени, Д. Л. Снелл ; пер. С. А. Молчанов ; ред. А. А. Юшкевич. - М. : Наука, 1970. - 271 с. : ил.
12. Котов, Вадим Евгеньевич. Сети Петри[Текст] / В. Е. Котов. - М. : Наука, 1984. - 160 с. : ил. - Библиогр.: с. 150-152
14. Питерсон, Джеймс. Теория сетей Петри и моделирование систем[Текст] / Д. Питерсон ; пер. М. В. Горбатова ; под ред. В. А. Горбатов. - М. : Мир, 1984. - 264 с.