

# Предмет исследования операций

Лекция по дисциплине «Исследование операций»  
(14 сентября 2021 г.)

# Содержание

- 1 Определение исследования операций
- 2 Исследование операций и смежные области
- 3 Классы моделей исследования операций
- 4 Общая постановка задачи исследования операций
- 5 Задача нелинейного программирования
- 6 Задача линейного программирования
- 7 Геометрический метод решения задач линейного программирования

# Исследование операций

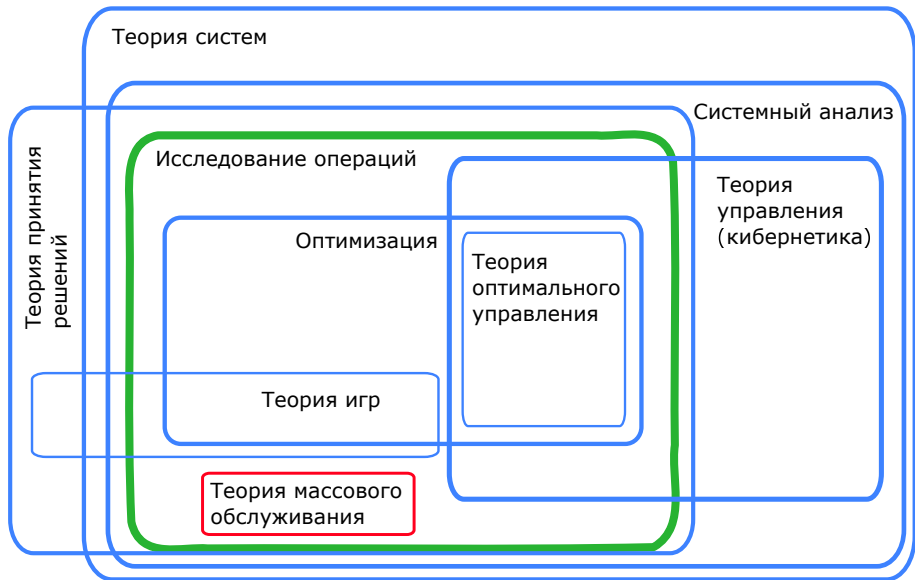


# Исследование операций: определение

Т. Саати:

Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами.

# Исследование операций



# Основные понятия исследования операций

## Операция

всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

## Цель исследования операций

предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

# Основные понятия исследования операций

## Решение

всякий определенный выбор зависящих от нас параметров.

Оптимальным называется решение, по тем или другим признакам предпочтительнее перед другими.

## Элементы решения

параметры, совокупность которых образует решение.

Множеством допустимых решений называются заданные условия, которые фиксированы и не могут быть нарушены.

# Основные понятия исследования операций

## Показатель эффективности

количественная мера, позволяющая сравнивать по эффективности разные решения.

Все решения принимаются всегда на основе информации, которой располагает лицо принимающее решение (ЛПР).

Каждая задача в своей постановке должна отражать структуру и динамику знаний ЛПР о множестве допустимых решений и о показателе эффективности.

Задача называется **статической**, если принятие решения происходит в наперед известном и не изменяющемся информационном состоянии.

Задача называется **динамической** - если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг.



# Классификация по зависимости параметров задачи от времени

- 1 Статическая задача. Принятие решения происходит при условии, что все параметры задачи заранее известны и не изменяются во времени. Процедура принятия решения осуществляется один раз.
- 2 Динамическая задача. В процессе принятия решения параметры задачи изменяются во времени. Процедура принятия решения осуществляется поэтапно и может быть представлена в виде процесса, зависящего от времени, в том числе непрерывно. Пример – навигационная задача.

# Классификация в зависимости от достоверности информации о задаче

- ❶ Детерминированная задача. Все параметры задачи заранее известны. Для решения детерминированных задач в основном применяются методы математического программирования.
- ❷ Недетерминированная задача. Не все параметры задачи заранее известны. Оптимальное решение недетерминированной задачи отыскать практически невозможно. Однако некоторое "приемлемое" решение отыскать можно.
  - ❶ Стохастическая задача. Для отыскания оптимального решения стохастической задачи применяется один из следующих приемов:
    - искусственное сведение к детерминированной задаче (неизвестные параметры заменяются их средними значениями);
    - "оптимизация в среднем" (вводится и оптимизируется некоторый статистический критерий).
  - ❷ Задача в условиях (полной) неопределенности. Статистические данные о неизвестных параметрах отсутствуют. Задачи в условиях неопределенности в основном изучаются в рамках теории игр.

# Классификация по виду критерия оптимальности

## Однокритериальные задачи.

- 1 Задачи линейного программирования. Целевая функция линейная, множество допустимых решений – выпуклый многогранник.
- 2 Задачи квадратичного программирования. Целевая – функция квадратичная, а множество допустимых решений – выпуклый многогранник.
- 3 Задачи стохастического программирования. Это задачи линейного программирования с неизвестными числовыми параметрами, о которых имеются статистические данные.
- 4 Задачи дискретного программирования. Множество допустимых решений – дискретное множество.
- 5 Задачи целочисленного программирования. Множество допустимых решений – точки целочисленной решетки.
- 6 Задачи булева программирования. Множество допустимых решений – 0-1 матрицы.

# Общая постановка задачи исследования операций

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\rightarrow \max \\ g_i(x, y, z) &\leq 0, \quad i \in [1, M] \\ x &\in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z. \end{aligned}$$

где

$x$  — вектор контролируемых факторов,

$y$  — вектор случайных факторов,

$z$  — вектор неопределенных факторов,

$X, Y, Z$  есть подмножества некоторых векторных пространств.

Если все эти пространства конечномерные, то мы имеем задачу **конечномерной оптимизации**, если хотя бы одно из этих пространств бесконечномерное, то задачу **бесконечномерной оптимизации**.

# Общая постановка задачи исследования операций

Важными разделами исследования операций являются:

- математическое программирование ( $X \neq \emptyset, Y = Z = \emptyset$ );
- стохастическое программирование ( $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset, Z = \emptyset$ );
- теория игр и робастная оптимизация ( $X \neq \emptyset, Z \neq \emptyset$ ).

# Основные обозначения

$R$  – множество действительных чисел.

$R^n$  – арифметическое векторное пространство размерности  $n$ , множество всех векторов- столбцов вида  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , где  $x_i \in R$  для всех  $i$ ;  $R^1 = R$ .

Мы будем рассматривать только модели, для которых выполнено предположение:

В модели конечное число переменных, все они принимают действительные значения.

# Задача математического программирования

Математическое программирование – область математики, изучающая оптимизационные процессы посредством поиска экстремума функции при заданных ограничениях.

## Задача математического программирования

$f(x) \rightarrow \max$  при условии  $x \in X \subseteq R^n$ .

Задачу минимизации на множестве  $X \subseteq R^n$  можно привести к задаче максимизации, используя следующую теорему.

## Теорема о замене минимизации максимизацией

Точка  $x_0$  минимизирует функцию  $f(x)$  на множестве, если и только если она максимизирует функцию  $-f(x)$  на том же множестве.

# Задача нелинейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i \in [1, m_1] \\ g_j(x) &= 0, \quad j \in [m_1 + 1, m] \\ x &\in R^n \end{aligned} \tag{1}$$

В этой задаче  $m$  ограничений.

Вектор  $x \in R^n$  является допустимым решением задачи, если он удовлетворяет ограничениям  $g_i, g_j$ .



# Задача линейного программирования

Линейным программированием (ЛП) Т. Купманс в 1951 г. предложил назвать оптимизацию (максимизацию или минимизацию) линейной функции при линейных ограничениях (равенствах и/или нестрогих неравенствах).

Несколько ранее, в 1947 г., Дж. Данциг разработал метод решения задач ЛП – симплекс-метод.

Еще раньше (начиная с 1939 г.) были опубликованы работы Л. В. Канторовича, посвященные теории и приложениям ЛП.

В 1975 году Л. В. Канторович и Т. Купманс получили Нобелевскую премию по экономике «за вклад в теорию оптимального использования ресурсов».

# Задача линейного программирования

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j = b_i, i \in [1; m_1]$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, i \in [m_1 + 1; m_2]$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i \in [m_2 + 1; m]$$

$$x_j \geq (\leq) 0$$

# Задача линейного программирования в стандартной форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq (\geq) b_i, i \in [1; m]$$

$$x_j \geq 0$$

# Задача линейного программирования в канонической форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j = b_i, i \in [1; m]$$

$$x_j \geq 0$$

# Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП с двумя переменными:

$$f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \rightarrow \max(\min)$$

при условиях

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \leq (\geq) b_i, i \in [1; m]$$
$$x_j \geq 0$$

# Геометрический метод решения задач линейного программирования

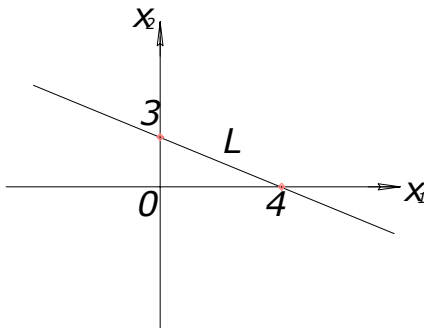
Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с произвольными двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Справедливо утверждение: пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Каждое неравенство системы ограничений геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой  $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$ , или  $x_1 = 0$ , или  $x_2 = 0$ .

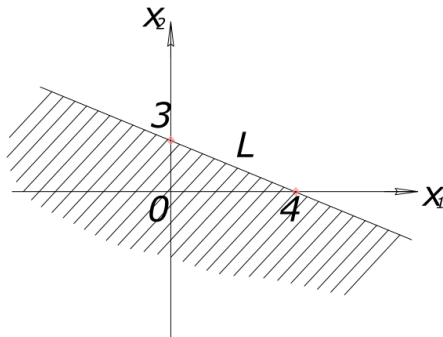
# Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим, например, неравенство  $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 12$



# Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим, например, неравенство  $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 12$





# Алгоритм решения ЗЛП геометрическим методом.

- 1 Строится многоугольник решений.
- 2 Строится вектор набла, перпендикулярно ему проводятся линии уровня и при этом учитывают, что оптимальное решение ЗЛП находится в угловой точке многоугольника решений.
- 3 Первая точка встречи линии уровня с многоугольником решений определяет минимум целевой функции.
- 4 Последняя точка встречи линии уровня с многоугольником решений определяет максимум целевой функции.
- 5 Если линия уровня параллельна одной из сторон многоугольника решений, то экстремум достигается во всех точках этой стороны . ЗЛП в этом случае имеет бесконечное множество решений.
- 6 Для нахождения координаты точки экстремума решают систему из двух уравнений прямых, дающих в пересечении эту точку.

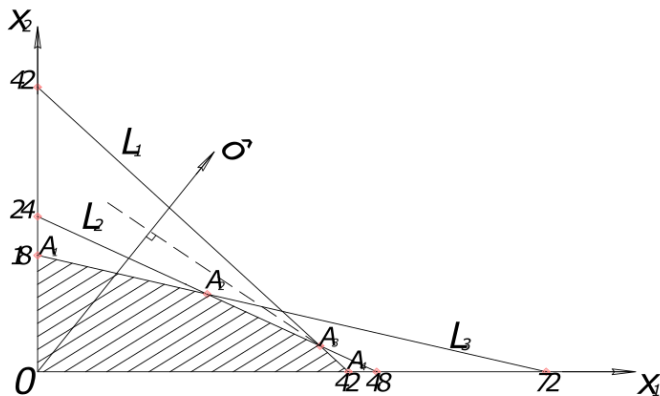
## Пример 1. Экономико-математическая модель задачи о планировании производства

На заводе имеются запасы трех видов сырья:  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , из которого можно наладить производство двух видов товаров:  $T_1$  и  $T_2$ . Запасы сырья, норма его расхода на производство единицы товаров, а также прибыль от реализации единицы каждого товара приведены в таблице (цифры условные).

Товары \ Сырье	$S_1$	$S_2$	$S_3$	Прибыль
$T_1$	3	1	1	25
$T_2$	3	2	4	34
Запасы	126	48	72	

Необходимо составить такой план производства товаров, при котором прибыль от их реализации будет максимальной.

# Геометрический метод решения задач линейного программирования



## Пример 1. Экономико-математическая модель задачи о диете

Имеются два вида продуктов:  $P_1$  и  $P_2$ . Содержание в 1 кг питательных веществ А, В и С, ежесуточные потребности организма  $V$  в них и стоимость  $S$  1 кг продуктов приведены в таблице

<div>Витамины Продукты</div>	$A$	$B$	$C$	$S$
$P_1$	1	3	1	8
$P_2$	3	1	8	16
$V$	6	9	8	

Составить такую ежесуточную диету, которая обеспечивает необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты.

# Геометрический метод решения задач линейного программирования

