

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра электронных вычислительных машин

**НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ**

Учебно-методическое пособие для магистров
направления 09.04.01. – Информатика и вычислительная техника

Киров 2021

УДК 519.8+ 330.4

Шатров А.В. - Киров, изд. ВятГУ, 2021.- 59 с.

Учебно-методическое пособие представляет описание лабораторных работ по дисциплине «Непрерывные и дискретные математические модели» для магистров направления 09.04.01 -«Информатика и вычислительная техника», направленность «Интеллектуальные системы». В лабораторных работах представлен материал, составляющий основные математические модели системной динамики. Лабораторный практикум опирается на физико-математические дисциплины, курсы «Информатика», «Имитационное моделирование», «Системный анализ».

Подп. В печ.

Усл. Печ.л.

Зак.

Тир.

ПРИП ВятГУ, 610000, г. Киров, ул. Московская, 36

С ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет»

Содержание

Введение. 1.	Междисциплинарный подход на основе системной динамики	5
1.1	Системы и их составляющие: стратификация реальности	5
1.2	К объяснению системных структур: редукционизм и холизм	6
1.3	Общая теория систем, синергетика и социодинамика	7
Тема 2	Математическое моделирование в системной динамике	9
2.1	Дифференциальные уравнения как математические модели изменяющихся процессов	8
2.2	Принцип редукции в моделировании сложных систем	11
Тема 3	Линейные динамические системы. Методы исследования нелинейных динамических систем	13
3.1	Понятие о фазовом пространстве. Особые точки и топология фазовых портретов линейных динамических систем	13
3.2	Пример исследования линейной динамической системы	16
3.3	Варианты заданий лабораторной работы №1	19
Тема 4	Нелинейные динамические системы. Методы исследования нелинейных динамических систем	20
4.1	Качественные методы исследования нелинейных динамических систем в окрестности положения равновесия	20

4.2	Пример исследования модели взаимодействия экономических агентов с учетом конкуренции и насыщения	21
4.3	Варианты заданий лабораторной работы №1	25
Тема 5	Аттракторы нелинейных динамических систем	29
5.1	Понятие аттрактора динамической системы	29
5.2	Предельные циклы динамических систем	30
3.3	Пример взаимодействия бизнеса с внешней средой	32
5.4	Варианты заданий лабораторной работы №1	38
Тема 6	Линейные непрерывные динамические системы на основе равновесия спроса и предложения	41
6.1	Динамические непрерывные модели Вальраса-Эванса_ Самуэльсона для одного товара	41
6.1.1	Постановка задачи. Простейшая модель	41
6.1.2	Модель с учетом инерции цены продавца	42
6.1.3	Модель с учетом зависимости спроса и предложения от скорости изменения цены	45
6.1.4	Модель с учетом зависимости скорости изменения цены товара от отклонения его текущего запаса от фиксированной величины	45
Тема 7	Дискретные динамические модели на основе спроса и предложения	47
7.1	Бифуркации в дискретных отображениях	47
7.2	Уравнение Рикера	51
	Список использованной литературы	58

1. Междисциплинарный подход в структуре математического моделирования на основе системной динамики

1.1. Системы и их составляющие: стратификация реальности

Николай Хартман [8] является одним из первых философов, отразивший в своих учениях многослойность окружающего мира, где высшие макрослои состоят из микрослоев. Слой как целое имеет совершенно другие характеристики, которыми не обладают микрослои. Поэтому мы будем считать такой слой системой.

Отношения между системами обладают чаще всего иерархическим характером. Составляющие части одной системы могут являться системами, которые в свою очередь состоят из более элементарных частей, эта же система может являться частью более высшей системы.

Рассмотрим системную структуру в биологии или социальной сфере. Здесь человек и общество является элементарной частью. Семьи, фирмы, школы, политические партии, социальные группы являются подсистемами. В таких системах человек может быть частью нескольких групп. Существует «вертикальная» иерархическая структура «индивид – группа – общество» и «горизонтальная», где отношения между группами, фирмами и политическими партиями.

Системные качества приводят к значительному взаимодействию «целое - часть», «часть - целое» на микро и макроуровне. В физических системах элементарные частицы и микродинамика (микроуровень) через влад элементарных частиц в коллективные поля и термодинамические переменные взаимодействует с макроуровнем (коллективные поля и термодинамические потенциалы, замкнутые динамики макроскопических параметров порядка). Макроуровень в свою очередь взаимодействует с микроуровнем через силы, порождаемые коллективным полем, действующие на элементарные частицы и определяющие их динамику. В социальных системах микроуровень (индивиды и их высказывания, знания, решения, суждения и поведение) через культурную и экономическую деятельность

индивидов взаимодействует с макроуровнем (цивилизация с интеллектуальными, культурными, социальными, экономическими, материальными компонентами). Через социальные «силы» и социально-экономическое окружение происходит обратное взаимодействие.

1.2. К объяснению системных структур: редукционизм и холизм

Существует две полярные точки зрения, связанные с природой систем: редукционизм и холизм.

С точки зрения редукционизма все признаки системы могут быть и должны редуцированы и объяснены качествами и признаками низшего микроуровня, который состоит из элементов системы.

В соответствии с теорией холизма иерархия систем рассматривается как абсолютно неделимая и не допускающая разрушения структура, являющаяся индивидуальной.

Ученые - естествоиспытатели предпочитают редукционизм, ученые гуманитарных наук – холизм.

Изучая системы, различные по происхождению и сложности, можно прийти к выводу, что ни крайний редукционизм ни крайний холизм не может быть поддержан.

В редукционизме взаимодействия в сложных системах рассматриваются с точки зрения двух принципов: самосогласованность и принцип подчиненности.

В физике самосогласованность состоит, если электронные квантовые состояния создают коллективное поле. В социальной системе самосогласованность наблюдается, если действия индивида и демократические институты во взаимном репродукционизме соответствуют друг другу и система остается стабильной.

Принцип подчиненности был сформулирован Хакеном [5-7]. Метод Хакена предполагает, что существует набор фундаментальных уравнений

движения для систем переменных. В социальных системах связь между подчиненными и доминирующими переменными принимается как допущение.

В вопросе об «онтологической первичности» возникают такие понятия как номинализм и универсализм. Номинализм по Аристотелю предполагает онтологическую первичность отдельных реальных объектов. Универсализм по Аристотелю, наоборот, первичность универсальных категорий идеальных совершенных прототипов. Современная теория номинализма и универсализма соотносится с редукционизмом и холизмом. В редукционизме первичность присваивается частям системы, в холизме – целостной системе.

1.3. Общая теория систем, синергетика и социодинамика

Система – совокупность взаимосвязанных элементов, действующих для достижения общей цели. Система является организованным целым, поэтому возникает сложность определения ее границ, выделение системы из окружающей среды. Возникает вопрос: ориентирована ли система телеологически и целенаправленно.

Холисты подчеркивают целостность системы, отрицают «механические» объяснения функциональности. Редукционисты, наоборот, утверждают реализацию намерений, целей и вспомогательных функций, поддержанными структурами.

Рассмотрим роль «структуры» и «функции» в различных системах, таких как физическая, биологическая и социальная системы.

В физических системах структура устанавливается детально в общих математических понятиях, описывающих законы природы на макроуровне. По функциям физические системы подразделяются на системы без целенаправленно спроектированных функциональных структур, в которых, если наблюдается некая стабильность к окружающей среде, то это является системным свойством, и на системы, специально спроектированных

человеком и наделенных определенными структурами, в которых цели возникают от намерений инженеров и конечных пользователей.

В биологических системах [3,4] взаимодействие структур направлено рациональным замыслом. Так же функциональная направленность структур может объяснена с точки зрения эволюции. В трудах С.А. Кауфмана подробно рассматривается с помощью концептуальных основ нелинейной динамики регуляторный кругоборот и морфогенез.

В социальных системах [12-16] элементарными компонентами являются индивиды с рационализмом, целеустремленностью и эмоциональностью. Взаимодействие в такой системе происходит путем обмена информацией. Функции структур социальной системы являются результатами намеренных осознанных действий индивидов, которые распределяют функции между структурами для достижения определенной цели.

Из-за большей свободы элементов в социальных системах наблюдается большая гибкость и большая нестабильность, чем в биологических системах. Несмотря на это, в социальных системах, как и в биологических, наблюдается цикличность процессов.

Из-за большого количества микроусловий и микрорешений существует сложность моделирования долгосрочных исторических процессов.

Между системами существуют структурные и динамические сходства, поэтому возможно ведение формального алгоритма, результатом которого является точная формулировка сопоставимости структур. При этом игнорируется иррелевантность и принимается только сущность.

В системном - теоретическом исследовании главным шагом является объяснение, если существуют следующие взаимосвязи между теорией и реализацией системы:

1. Процедура верификации и фальсификации с точными критериями, различающие верные и неверные утверждения об исследуемой системе.

2. Правильное содержание теории, состоящее из изоморфизма между слоями системы и положениями структуры теории.

2. Математическое моделирование в системной динамике

2. 1 Дифференциальные уравнения как математические модели изменяющихся процессов

Допустим, что мы создаем модель объекта, обладающего следующими свойствами:

1. Объект может быть однозначно описан конечным набором величин x_1, x_2, \dots, x_n . Эти величины называют фазовыми переменными. Пространство, в котором они определены, называют фазовым пространством, а их число n - числом степеней свободы или размерностью пространства.
2. Состояние объекта может меняться с течением времени t , т.е. переменные x_i зависят только от времени и при этом являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t .
3. Фазовая скорость изменения переменных по физическому (или иному в контексте моделирования) смыслу определяется как производная от соответствующей величины по времени $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$ и может зависеть только от независимой переменной t .

В таких случаях модель объекта может быть описана в терминах теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1-5]:

$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0$	(2.1)
--	-------

$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$	(2.2)
---	-------

Выражение (2.1) определяет неявную форму задания системы n дифференциальных уравнений, а выражение (2.2) – явную форму. Обычно систему (2.2) называют нормальной системой дифференциальных уравнений или динамической системой. Если в системах (2.1) и (2.2) в качестве переменной отсутствует явно время t , то динамическая система называется автономной.

Величины x_1, x_2, \dots, x_n можно интерпретировать как координаты движущейся материальной точки в фазовом пространстве. Величины $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$ при этом имеют смысл скоростей движения или фазовых скоростей и определяют в фазовом пространстве векторное поле.

Задача теории дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы по векторному полю определить траекторию движения точки в фазовом пространстве. При этом данному дифференциальному уравнению принадлежит единственная траектория $x_i(t)$, если системам (2.1) и (2.2) поставить в соответствие начальные условия

$\begin{aligned}x_1(0) &= x_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(0) &= x_{n0}\end{aligned}$	(2.3)
--	-------

2.2 Принцип редукции в моделировании сложных систем[5,12-16]

При моделировании динамики сложных объектов, таких как социально-экономические системы, возникают при описании моделей много уравнений и параметров, в них входящих. Соответственно анализ таких моделей довольно сложен и практически непреодолим. Существует практический способ редукции таких систем уравнений к уравнениям меньшей размерности. Принцип редукции сложных систем к системам меньшей размерности основывается на основном понятии сложности.

Принято считать, что сложность системы определяется разными масштабами характерных времён, на которых происходят изменения процессов, описываемых системами уравнений. Как правило, в системах вида (2.2) всегда можно выделить быстрые и медленные движения (реакции, взаимодействия). Конечно, быстрота изменений понятие относительное, но иногда удается из содержательной постановки задачи построить иерархию характерных масштабов времени.

Рассмотрим процесс упрощения на примере трехмерной автономной динамической системы

$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$	(2.3)
---	-------

Допустим, нам удалось установить иерархию характерных изменений переменных и для простоты положим их кратными друг другу $T_3 \sim 1, T_2 \sim \varepsilon, T_1 \sim \varepsilon^2$, где ε малый параметр. Это означает, что процесс изменения величины x_1 протекает очень быстро, величины x_2 - быстро по сравнению с медленным процессом x_3 . Тогда после преобразования системы к характерным временам мы получим систему уравнений

$\begin{aligned}\varepsilon^2 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$	(2.4)
---	-------

Если мы хотим описать поведение системы в быстром времени (на малых интервалах порядка ε^2), то нам понадобится вся система уравнений (2.4), если нас интересуют времена порядка 1, то достаточно рассмотреть только последнее уравнение, а остальные процессы «заморозить», т.е. считать их стационарными. Таким образом, исходная трехмерная система редуцируется к одномерной.[16]

3. Линейные динамические системы

3.1 Понятие о фазовом пространстве. Особые точки и топология фазовых портретов линейных динамических систем

Качественные методы решения дифференциальных уравнений заключаются в построении решений (интегральных кривых) в фазовой плоскости. Пусть система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

общего вида определена в некоторой области G с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (3.2)$$

Такую систему можно получить из уравнения 2-го порядка $\ddot{x} + 4x = 0$, обозначив

$$\dot{x} = y \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = -4x \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость с осями координат Oxy . Каждая точка $M(x, y)$ на плоскости называется изображающей точкой для системы (3.1) – (3.2), если она является решением этой системы. Множество точек M , образующих интегральную кривую, называется фазовой траекторией изображающей точки, а множество $D(x, y)$, которому принадлежат фазовые траектории, называются фазовой плоскостью.

Меняя начальные условия, можно получить фазовый портрет системы

Для анализа характера особых точек системы (1) запишем ее в общем виде

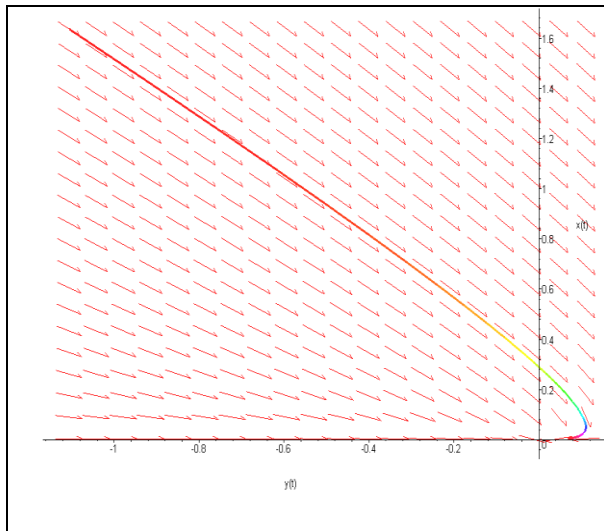
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases} \quad (3.3)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (3.3), имеет

вид
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

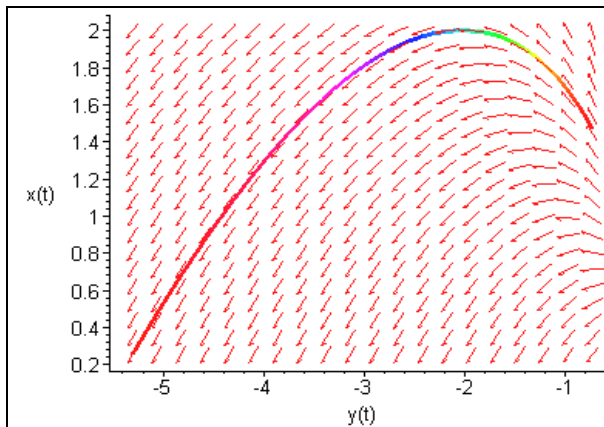
В зависимости от решений характеристического уравнения (3.4) получим следующие типы особых точек:

1) узел



$$\lambda_1, \lambda_2 \in R, \quad (\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0.$$

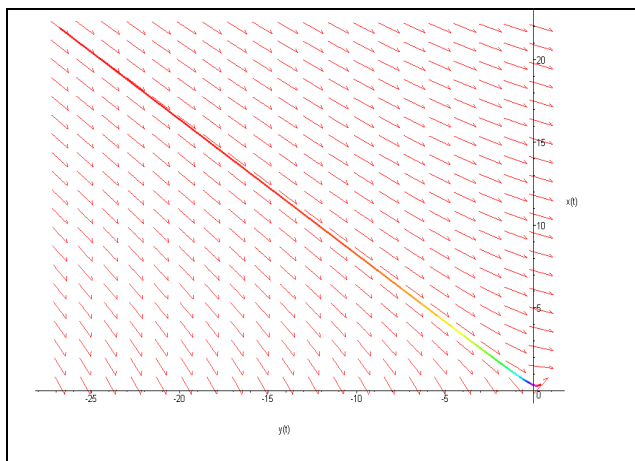
Узел устойчив, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.



$$\lambda_1, \lambda_2 \in R, \quad \lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0 \quad (\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

Узел неустойчив, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

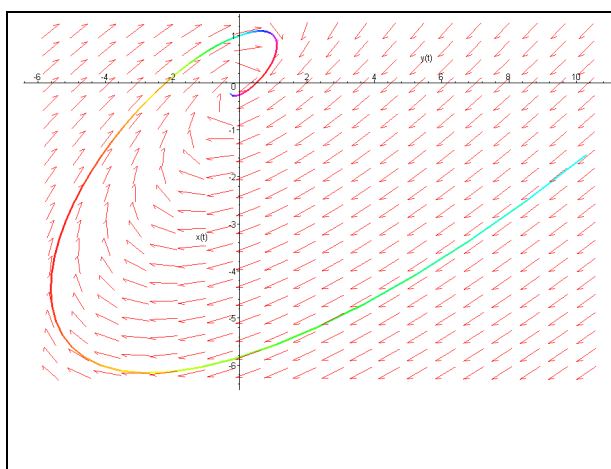
2) – седло



$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0.$$

Седло исключает понятие устойчивости.

3) - фокус



$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0.$$

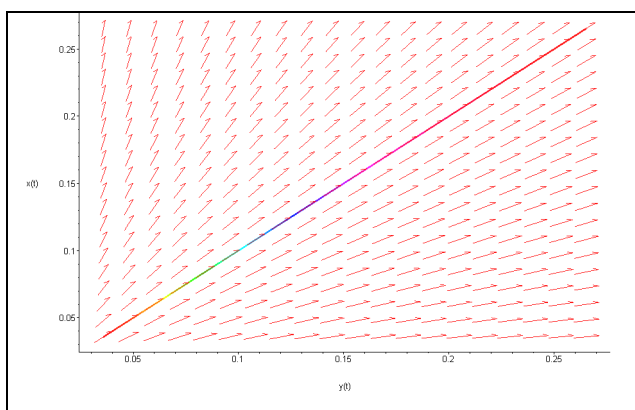
Фокус устойчив, если

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0.$$

Фокус неустойчив, если

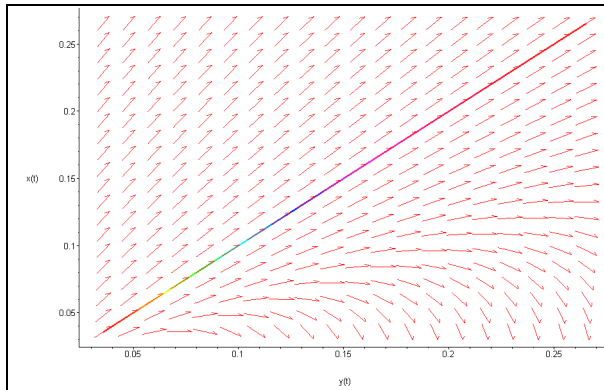
$$\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0.$$

4) дикритический узел:



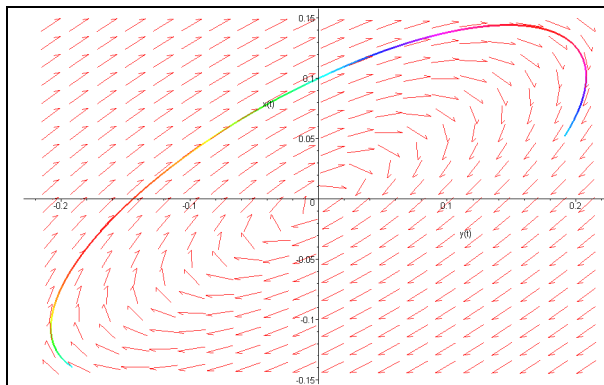
$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0; \quad \dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay.$$

5) вырожденный узел:



$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

6) – центр



$$\lambda_1, \lambda_2 \in C : \operatorname{Im}(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0, \operatorname{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Центр всегда устойчив.

3.2 Пример исследования линейной динамической системы.

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0 \quad (3.5)$$

$$x(0) = 2$$

$$\dot{x}(0) = -1 \quad (3.6)$$

Запишем уравнение (3.5) в виде нормальной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \quad (3.7)$$

Определим характер особых точек

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = 1.$$

Следовательно, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

Особая точка – седло.

Используя пакет MAPLE, построим фазовые портреты системы (3.5), (3.6) при различных начальных условиях:

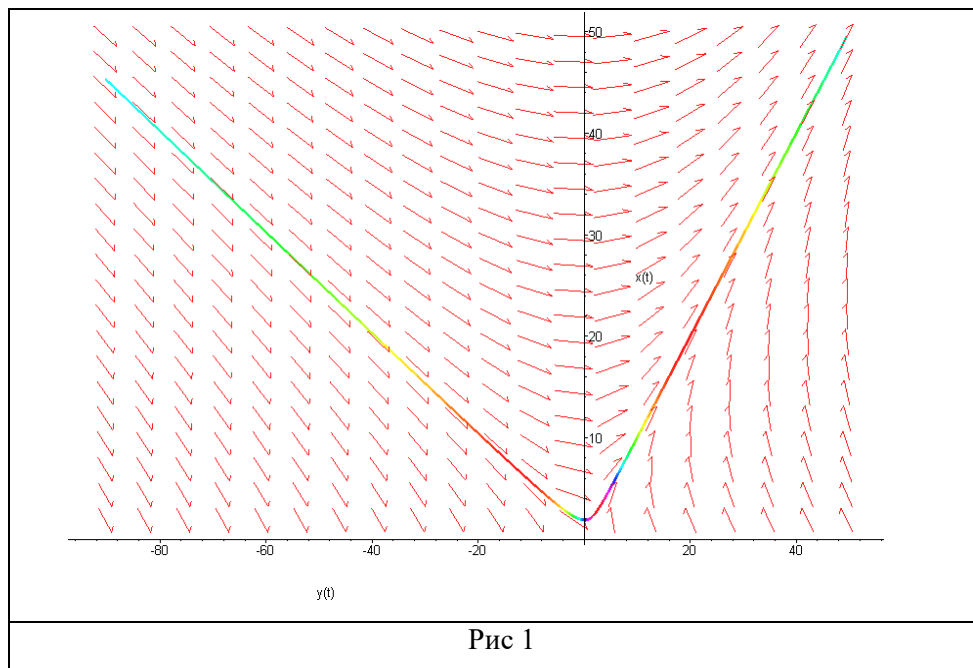
$$x(0) = 2; \quad y(0) = -1$$

$$x(0) = 2; \quad y(0) = -4$$

$$x(0) = 2; \quad y(0) = -7$$

$$x(0) = 2; \quad y(0) = 2$$

Фазовые портреты приведены на рис. 1, 2, 3, 4.



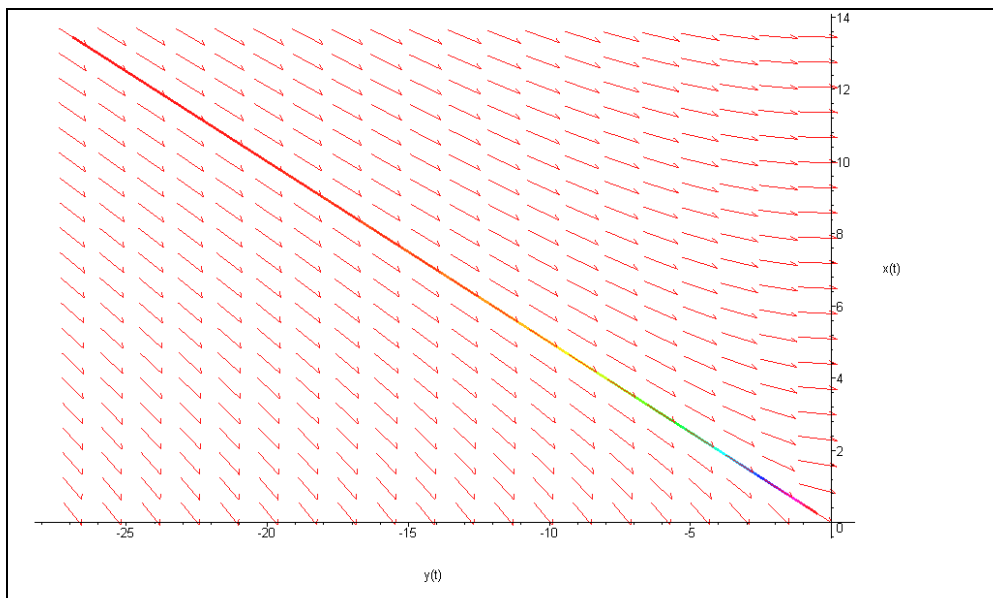


Рис 2

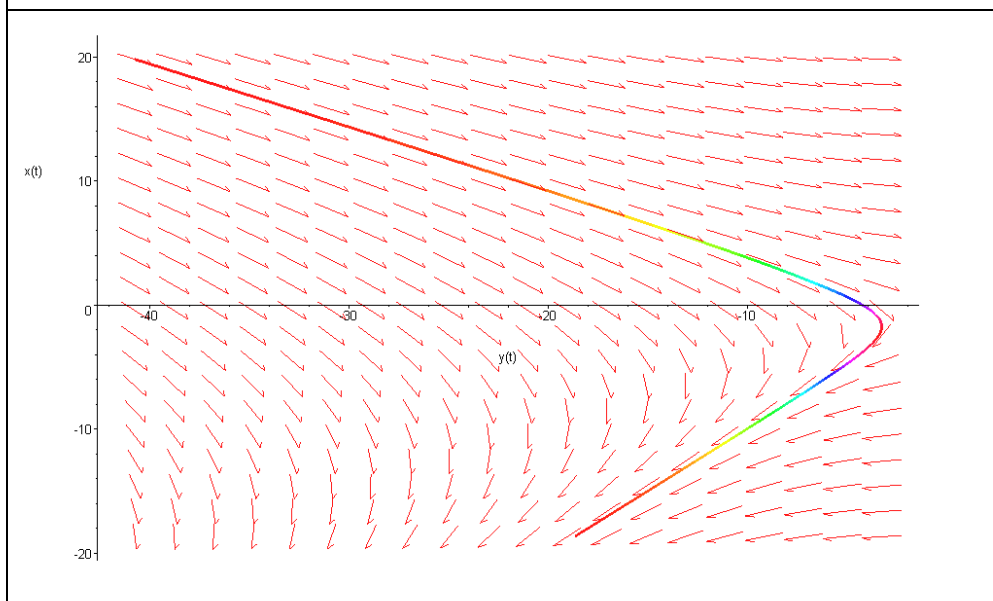


Рис 3

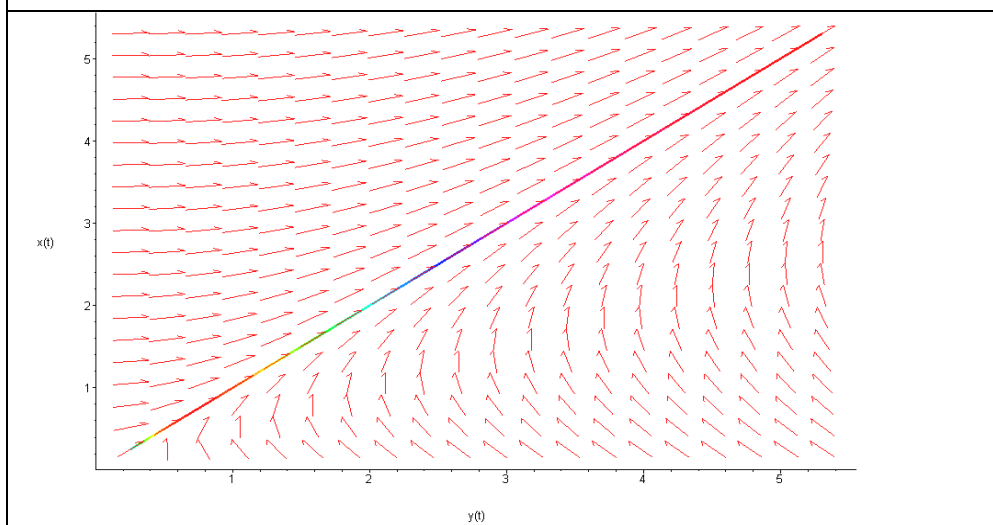


Рис. 4

Примечание.

Для работы в пакете MAXIMA следует загрузить программное обеспечение с сайта

<http://wxmaxima.sourceforge.net>

При работе с системами дифференциальных уравнений использовать команду `plotdf`. Код с исполнением этой команды для системы уравнений (3.9)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \ddot{x} = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Имеет вид

`plotdf([y, 2*x-y], [x,y], [x,0,2], [y,0,1], [trajectory_at,0.1,0.1], [direction,forward])`

Как можно видеть, в первой квадратной скобке записываются правые части системы дифференциальных уравнений, далее перечисляются переменные системы, затем указаны начальные условия для системы уравнений, команда `[trajectory_at,0.1,0.1]` указывает порядок построения интегральной кривой в фазовом пространстве, в последней скобке задается способ построения в зависимости от времени. Подробное описание пакета MAXIMA приводится в книге

Полосков И.Е. Система аналитических вычислений Maxima. Описание и примеры использования. [Электронный ресурс] : <http://www.psu.ru/files/docs/sceince/books/uchebnie-posobiya/poloskov-sistema-analiticheskikh-vychislenij-maxima.pdf>.

Варианты заданий

№ вар.	Вид дифференциального уравнения	$x(0)$	$y(0)$
1	$\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$	1	3; 4; 5; 6
2	$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x$	1	-1; -3; 1; 5
3	$2\ddot{x} - 5\dot{x} + 2x = 0$	2	2,5; 3,5; 1; -0,5
4	$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$	1	7; 4; 1; -2
5	$\ddot{x} - 4\dot{x} = 0$	1	-4; -2; 2; 4

6	$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$	1	2; 3; 4; 5
7	$\ddot{x} + x = 0$	1	-2; -1; 1; 2
8	$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$	2	-9; -4; 1, 6
9	$\ddot{x} + \dot{x} - x = 0$	2	-7; -4; -1; 4
10	$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$	2	-2; 0; 2; 4
11	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3x + 4y}$	2	
12	$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4y}{-3x + 2y}$	2	
13	$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{y}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	
14	$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{-3x + 2y}$	1	
15	$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 4y}{x + y}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

4. Нелинейные динамические системы. Методы исследования нелинейных динамических систем

Линейные динамические системы характеризуются однозначностью стационарного решения, устойчивостью решения по отношению к типу уравнения и начальным условиям. Таким образом, линейные динамические системы являются предельно-идеалистическим представлением реальных процессов. Их распространение можно объяснить чрезвычайным удобством (вследствие упрощающих допущений) в научном исследовании и техническом воплощении. Однако практически все процессы в сложных системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Содержательные нелинейные модели динамических систем изучаются в математической физике, биофизике, экологии и экономике.

4.1 Качественные методы исследования нелинейных динамических систем в окрестности положения равновесия

Порядок исследования нелинейной динамической системы [1-5] :

1. Записать исходную систему в безразмерном виде, удобном для решения и анализа.
2. Провести предварительное математическое исследование.
3. Описать параметрический и фазовый портрет системы.
4. Описать по фазовому портрету динамические режимы при изменении значений параметров.

4.2 Пример исследования модели взаимодействия экономических агентов с учетом конкуренции и насыщения

Система, описывающая конкуренцию мелких поставщиков и насыщения перекупщиков, имеет вид [16]

$\begin{cases} \dot{x} = ax \frac{K-x}{K} - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}, \end{cases}$	(4.1)
---	-------

где K – емкость рынка поставщиков;

$\frac{b}{A}$ – максимальное количество поставщиков, приходящихся на одного

перекупщика (максимальный «рацион» оптовика-перекупщика);

$\frac{d}{A}$ – величина, характеризующая рост плотности оптовиков-перекупщиков

за счет «переработки» мелких поставщиков;

a, b, c, d – постоянные.

Замена $t = \tau/a$, $x = \frac{c}{d}u$, $y = \frac{a}{b}v$, переводит систему (3.1) в

$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2, \\ \dot{v} = -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1 + \alpha u} \right), \end{cases}$	(4.2)
--	-------

где $\alpha = \frac{Ac}{d}$, $\varepsilon = \frac{c}{Kd}$, $\gamma = \frac{c}{d}$.

Уравнения нулевых изоклин:

Очевидное тривиальное решение

$\begin{aligned} \dot{u} &= 0, & u &= 0, \\ \dot{v} &= 0, & v &= 0. \end{aligned}$	(4.3)
--	-------

И нетривиальное решение

$\begin{aligned} \dot{u} &= 0, & v &= (1 + \alpha u)(1 - \varepsilon u), \\ \dot{v} &= 0, & u &= \frac{1}{1 - \alpha}. \end{aligned}$	(4.4)
---	-------

которое имеет вид

$\begin{aligned} v &= \frac{1 - \varepsilon - \alpha}{(1 - \alpha)^2}, \\ u &= \frac{1}{1 - \alpha}. \end{aligned}$	(4.5)
---	-------

Условие нетривиальности равновесия показано на рис. 4.1, где показано

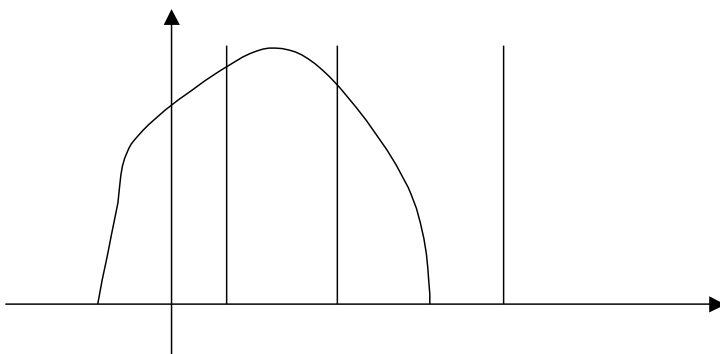


Рис. 4.1 Пересечение нуль – изоклин в первом квадранте

Условие неотрицательности u, v очевидно из постановки задачи.

Для того, чтобы исследовать тип решений в окрестности особых точек, представим правые части системы (4.2) в виде разложения в ряд Тейлора, удерживая члены первого порядка. Обозначим правые части (4.2)

$\begin{cases} P(u, v) = u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2, \\ Q(u, v) = -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1 + \alpha u} \right), \end{cases}$	(4.6)
--	-------

Запишем разложения для этих функций

$\begin{cases} P(u, v) = P(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial P}{\partial u_{\bar{u}, \bar{v}}} (u - \bar{u}) + \frac{\partial P}{\partial v_{\bar{u}, \bar{v}}} (v - \bar{v}) \\ Q(u, v) = Q(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial Q}{\partial u_{\bar{u}, \bar{v}}} (u - \bar{u}) + \frac{\partial Q}{\partial v_{\bar{u}, \bar{v}}} (v - \bar{v}) \end{cases}$	(4.7)
--	-------

Вычислим производные этих функций в нетривиальной особой точке

$O'(\bar{u}, \bar{v})$, определенной выражениями (4.5)

$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u_{\bar{u}, \bar{v}}} &= \alpha + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{1 - \alpha}; & \frac{\partial P}{\partial v_{\bar{u}, \bar{v}}} &= 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial u_{\bar{u}, \bar{v}}} &= \gamma(1 - \alpha - \varepsilon); & \frac{\partial Q}{\partial v_{\bar{u}, \bar{v}}} &= 0 \end{aligned}$	(4.8)
--	-------

Легко проверить, что из (4.5) – (4.8) следует

$\begin{cases} P(u, v) = \left(\alpha + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{1 - \alpha} \right) u + v \\ Q(u, v) = \gamma(1 - \alpha - \varepsilon) u \end{cases}$	(4.9)
---	-------

Система (4.9) представляет собой линеаризацию правых частей исходной системы (4.2) в малой окрестности особой точки (4.5). Это означает, что тип особой точки может быть определен по (4.9) с точностью до малых значений переменных u, v , т.е. в малой окрестности точки $O'(\bar{u}, \bar{v})$.

Исследуем характер особой точки. По правилам определения типа составим определитель

$$\begin{vmatrix} \varepsilon + \alpha - \frac{2\varepsilon}{1-\alpha} - \lambda & 1 \\ \gamma(1-\alpha-\varepsilon) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Найдём корни этого характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon + \alpha - \frac{2\varepsilon}{1-\alpha}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon + \alpha - \frac{2\varepsilon}{1-\alpha})^2}{4} - \gamma(1-\alpha-\varepsilon)}$$

Следует отметить, что в данном случае выражение для корней характеристического уравнения получилось достаточно громоздким, чтобы провести полный параметрический анализ по типам особой точки, поэтому ограничимся несколькими значениями параметров:

$$\alpha = 2; \quad \varepsilon = 1; \quad \gamma = 1.5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$$

Оба корня действительны и положительны, следовательно, в данном случае мы имеем *неустойчивый узел*.

Пример фазового портрета приведен на рис. 4.2.

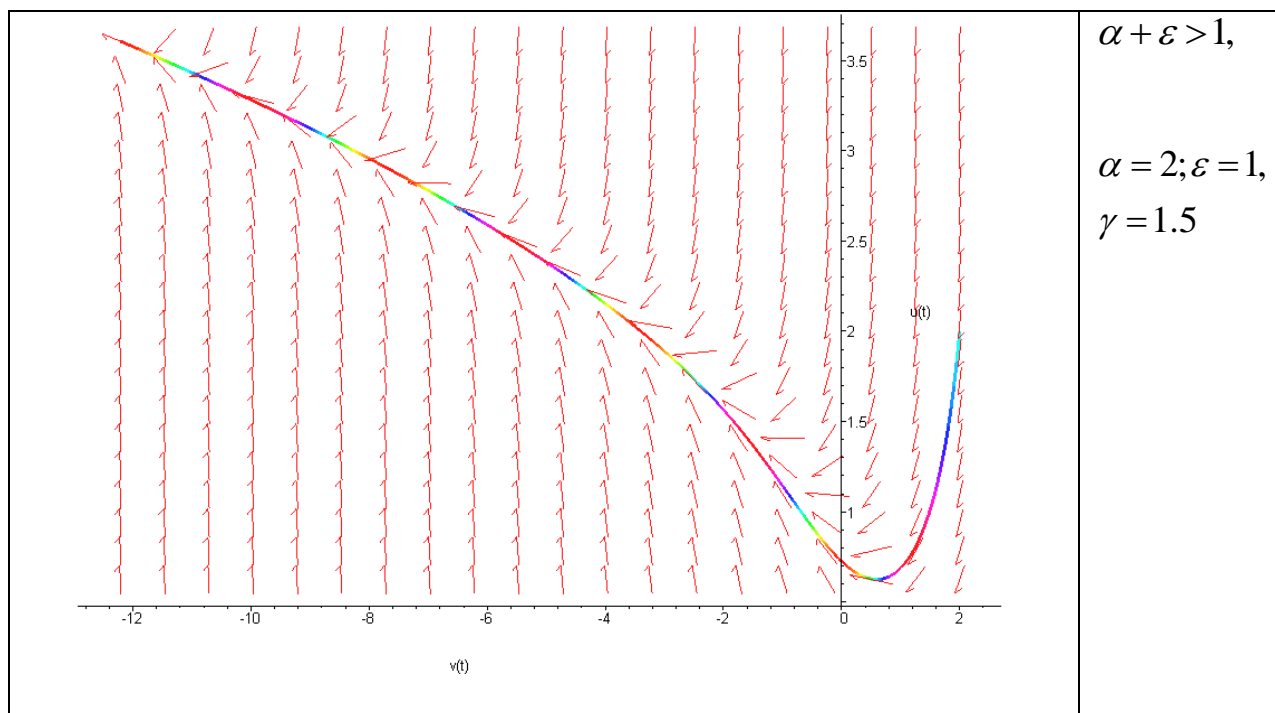


Рис. 4.2

Варианты лабораторных работ

1. Нелинейность размножения и выбывания жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax^2}{N+x} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

2. Нелинейность размножения, конкуренция и выбывание жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax^2}{N+x} \frac{K-x}{K} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

3. Выбывание жертв и насыщение хищников

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax}. \end{cases}$$

4. Конкуренция хищника за жертву и за отличные от жертвы ресурсы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + By}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + By}. \end{cases}$$

5. Нелинейность размножения хищника при малой плотности популяции жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy^2}{N + y}. \end{cases}$$

6. Конкуренция жертв и нелинейность размножения популяции жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax^2}{N + x} \cdot \frac{K - x}{K} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + bxy. \end{cases}$$

7. Нелинейность выбывания жертв при малой плотности популяции жертв и насыщения хищника.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy^2}{(N + y)(1 + Ax)}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy^2}{(N + y)(1 + Ax)}. \end{cases}$$

8. Конкуренция хищника за отличные от жертвы ресурсы и насыщение хищника.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax} - cy^2. \end{cases}$$

9. Конкуренция хищника за жертву и насыщение хищника

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)^2}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{(1 + Ax)^2}. \end{cases}$$

10. Нелинейность размножения хищника и конкуренция жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \frac{K - x}{K} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dx \frac{y^2}{N + y}. \end{cases}$$

11. Нелинейность выбывания жертв при насыщении хищника

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + Ax} - \frac{cx^2}{K}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax}. \end{cases}$$

12. Конкуренция жертв за ресурсы при насыщении хищника.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)(1 + Bx)}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{(1 + Ax)(1 + Bx)}. \end{cases}$$

13. Нелинейность выбывания жертв при нелинейности размножения хищника.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - ax^2, \\ \dot{y} = -cy + dxy + cy^2. \end{cases}$$

14. Нелинейность выбывания и конкуренция хищников за ресурсы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)(1 + Bx)}, \\ \dot{y} = \frac{dxy}{(1 + Ax)(1 + Bx)} - cy^2. \end{cases}$$

15. . Нелинейность выбывания хищников и конкуренция жертв за ресурсы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)}, \\ \dot{y} = -cy + dxy - cy^2. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы

- Привести систему уравнений к безразмерному виду, сделав замену переменных в соответствии с преобразованием (3.2) из примера .
- Ввести параметры (критерии) задачи.
- Получить уравнения нулевых изоклин и проверить условие нетривиальности положения равновесия.
- Из полученных выражений для нуль-изоклин оценить возможные значения параметров задачи.
- Меняя параметры, найти решение задачи в виде фазовых траекторий на фазовой плоскости.
- Проанализировать полученные фазовые портреты, определить тип особых точек и характер поведения фазовых кривых.
- Провести численные эксперименты, меняя начальные условия, временной интервал, величину шага интегрирования, алгоритм численного решения.

Порядок выполнения работы после приведения задачи к безразмерному виду предусматривает подбор и изменение параметров, значения которых в случае необходимости можно согласовать или получить у преподавателя.

5. Аттракторы нелинейных динамических систем

5.1 Понятие аттрактора динамической системы

Аттрактором в синергетике и в теории динамических систем называют множество, к которому приближается решение (притягивающее множество). Понятие аттрактора нелинейной динамической системы связано с понятием устойчивости. Напомним определение устойчивости дифференциального уравнения по Ляпунову.

Решение $x = x(t, x_0)$ задачи $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta(\varepsilon)$, что при $\|\Delta x_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0)\| < \varepsilon$$

Аттракторы, изучение которых важно с точки зрения устойчивости поведения динамических систем, являются математическими образами установившихся режимов. Кроме того, близкие к притягивающему множеству траектории $x = x(t, x_0)$ из его области притяжения стремятся к аттрактору. В терминологии системной динамики оперируют также понятиями «устойчивый аттрактор» и «неустойчивый аттрактор». Тем самым расширяется толкование динамики вблизи аттрактора решения – могут возникать ситуации, когда требование устойчивости по Ляпунову в окрестности аттрактора не выполняется. Более того, в вычислительных экспериментах в 70-е годы XX столетия были открыты так называемые «странные аттракторы». Они описывают поведение динамических систем в виде непериодических, хаотических режимов. Таким, например, является аттрактор Лоренца, американского ученого, создавшего модель динамики атмосферных течений.

5.2 Предельные циклы динамических систем

Примером аттрактора является предельный цикл – множество к которому стремятся фазовые траектории (устойчивый предельный цикл) или от которого удаляются фазовые траектории (неустойчивый предельный цикл). Появление предельных циклов обусловлено особыми свойствами дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$\ddot{x} = \mu \cdot F(x, \dot{x}),$	(5.1)
---------------------------------------	-------

где $\varepsilon = 1/\mu \ll 1$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \infty$) называется сингулярно-возмущенным или уравнением с малым параметром при старшей производной. Уравнение (6.1) приводится к нормальной системе

$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dx}{dt} = F(x, y) \end{cases}$	(5.2)
---	-------

с помощью замены $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y$.

Система (4.2) называется в теории управления «жесткой системой». Системы такого вида называют сложными системами «по Тихонову» или «тихоновскими системами». Сложность жестких систем обуславливается тем, что в решении выделяется область резкого изменения искомой функции (пограничный слой) и область, где функции либо претерпевают малые изменения, либо выходят на стационар.

Для анализа таких систем используется асимптотический подход [9-12], в котором область решения Ω разбивается на подобласть «быстрого» изменения – пограничный слой L_Ω при $\varepsilon \rightarrow 0$ (сингулярное подмножество) и

регулярную подобласть $\bar{\Omega} : \Omega = L_{\Omega} \cup \bar{\Omega}$. Следовательно, в системе появляются два масштаба времени. Переходя в сингулярной подобласти к времени $\tau = \frac{t}{\mu}$, получим «быструю» подсистему

$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = f(x, y), \\ \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon F(x, y). \end{cases}$	(5.3)
--	-------

Полагая в системе (5.3) $\varepsilon \rightarrow 0$, получим асимптотические уравнения для траекторий «быстрых» движений:

$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, y), \\ y = \text{const.} \end{cases}$	(5.4)
--	-------

При этих же предположениях в уравнениях (5.2) получим асимптотику «медленных движений (подсистему медленных движений)

$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = F(x, y). \end{cases}$	(5.5)
---	-------

Разбиение фазовой плоскости системами (5.4) и (5.5) показано на рис.5.1 На рисунке можно видеть конфигурацию предельного цикла который образуется при движении изображающей точки вдоль кривой медленных движений, затем по прямым линиям области быстрых движений происходит переход вновь на кривую медленных движений.

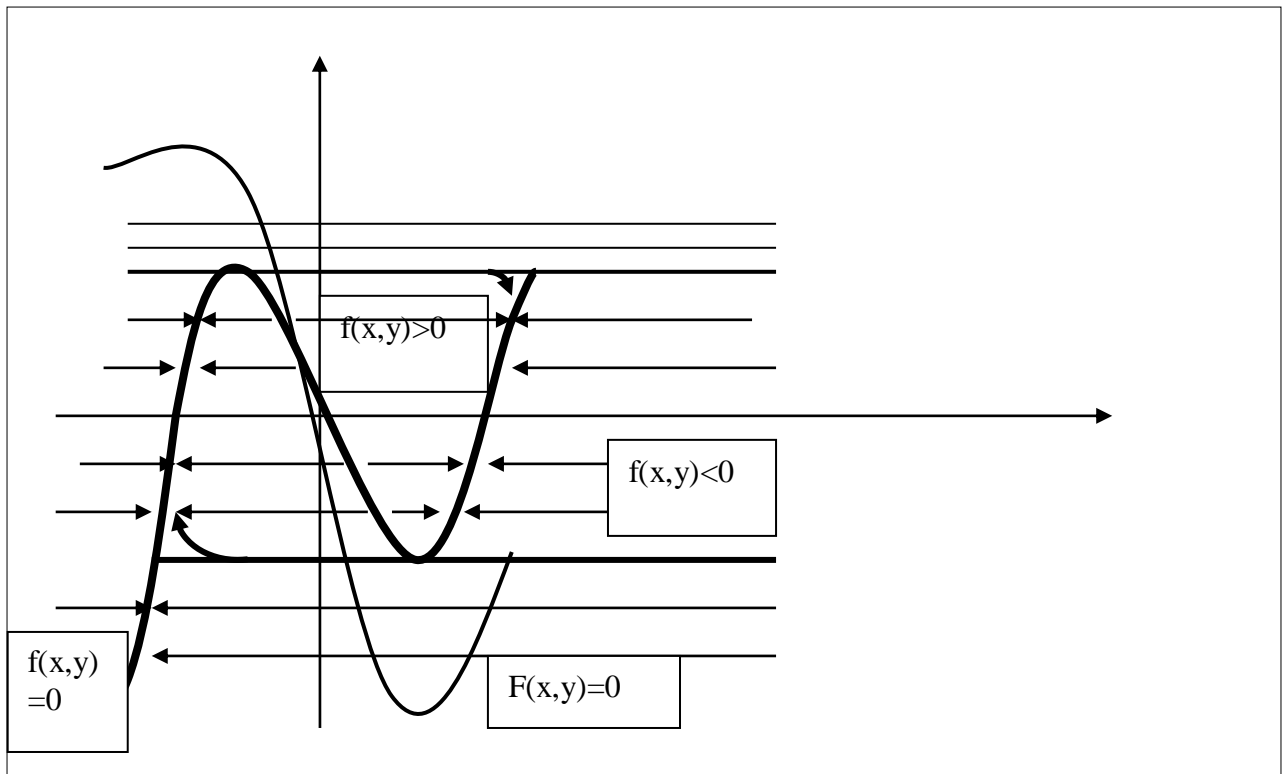


Рис. 5.1

5.3 Пример взаимодействия бизнеса с внешней средой [13]

Пример.

Рассмотрим пример

$\ddot{x} = \mu \left[(3x^2 - 1)\dot{x} - x \right].$	(5.6)
--	-------

Замена $x = \frac{dy}{dt}$, $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$, приводит уравнение (4.1) к нормальной системе

$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1) - y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$	(5.7)
---	-------

Данное преобразование называют приведением к плоскости Льева. Получить его можно следующим образом:

- 1) проинтегрируем уравнение (5.6) по x ;
- 2) интеграл от x обозначим за y , следовательно, производная от него (или от функции y) будет равна x .

В новом масштабе времени $\tau = t/\varepsilon$ система запишется в виде

$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x - x^3 - y, \\ \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon x. \end{cases}$	(5.8)
--	-------

Подсистема быстрых движений

$\frac{dx}{d\tau} = x - x^3 - y, \quad y = c.$	(5.9)
--	-------

Подсистема медленных движений

$y = x - x^3, \quad \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon x.$	(5.10)
--	--------

Кривая медленных движений неоднозначна по координате x , представляет собой график кубической параболы с двумя локальными экстремумами

$y_{\min}^{(1)}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $y_{\max}^{(2)}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Разбиение фазовой плоскости показывает

единственное устойчивое состояние равновесия и единственный неустойчивый предельный цикл (рис. 5.2а). Характер устойчивости, строго говоря, определяется на основании влияния возмущений начальных условий на поведение решения динамической системы (устойчивость по Ляпунову). Однако, располагая фазовым портретом решения, полученного с помощью пакета MAPLE, по направлению стрелок поля направлений можно судить об устойчивости положения равновесия и предельного цикла.

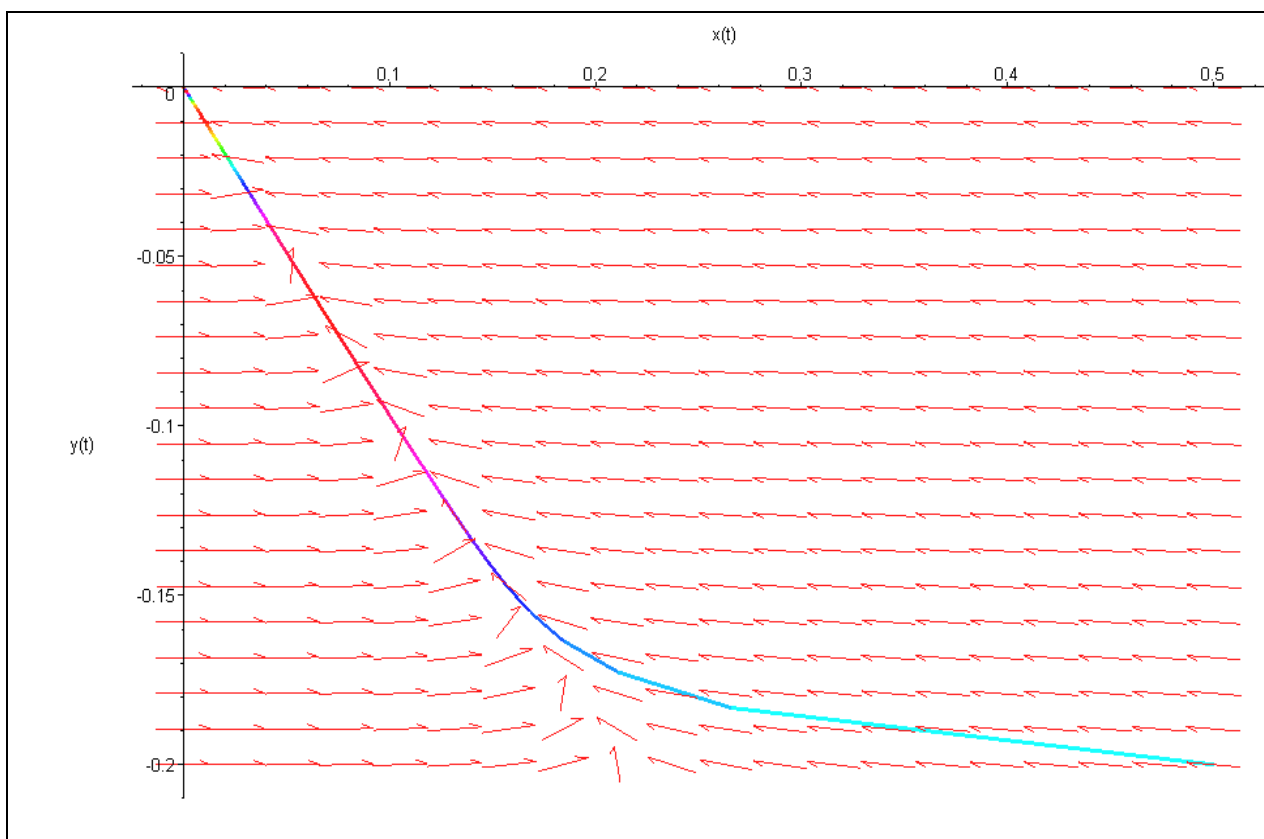
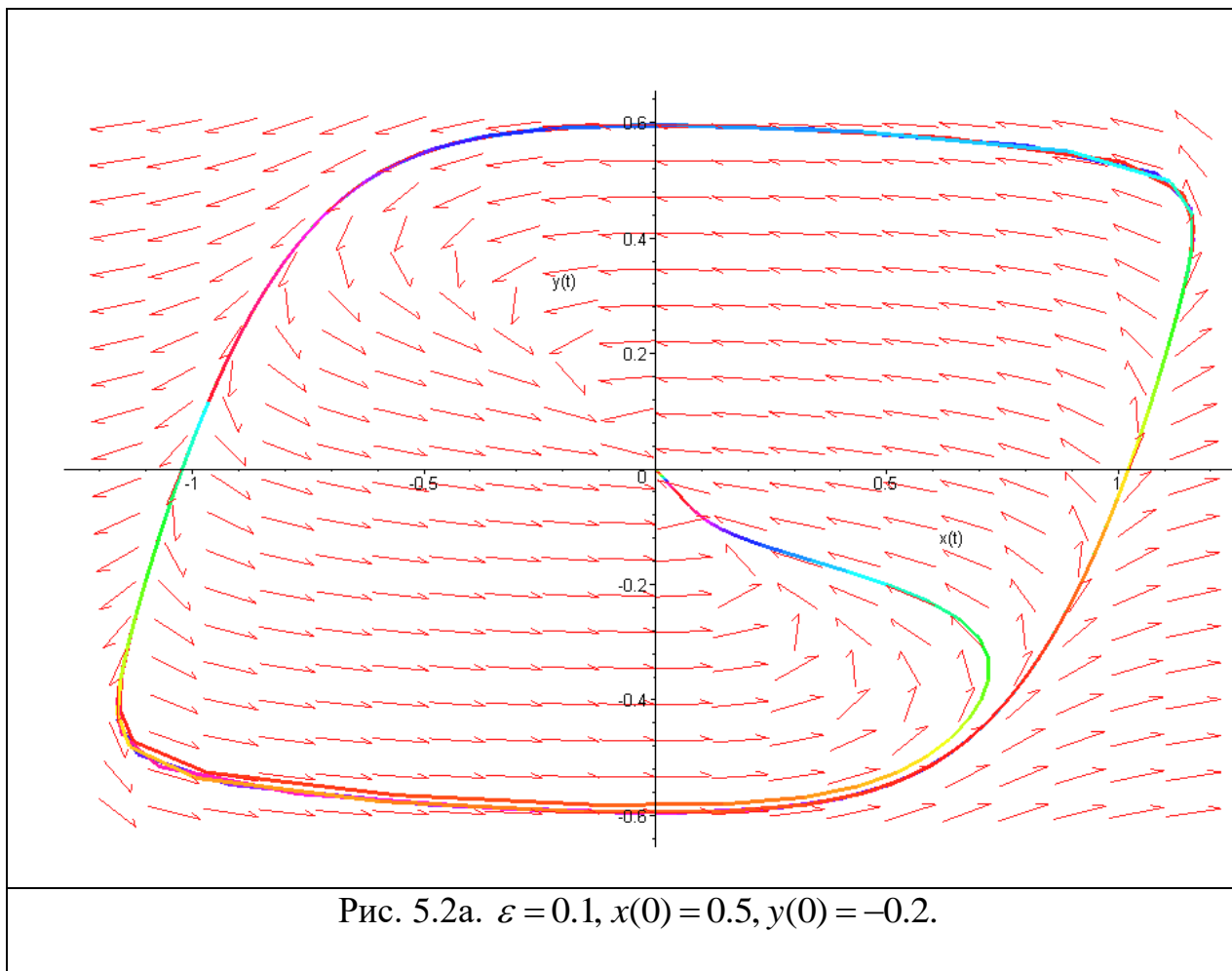


Рис. 5.2б. $\varepsilon = 0.02$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = -0.2$.

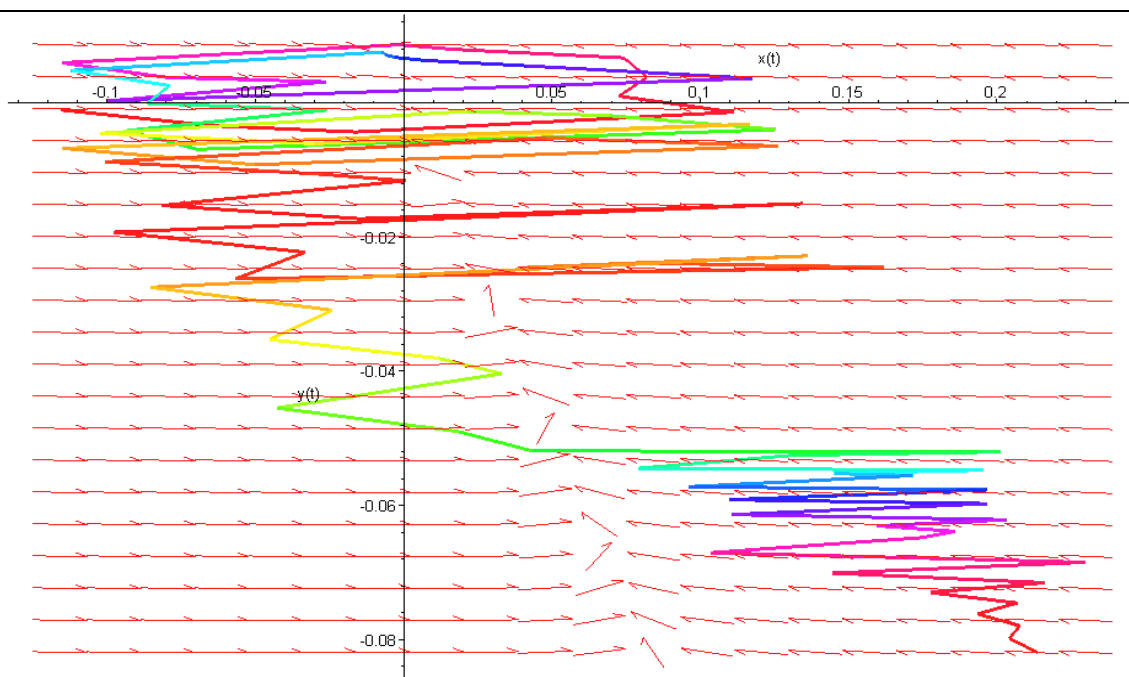


Рис. 5.2в. $\varepsilon = 0.013$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = -0.2$.

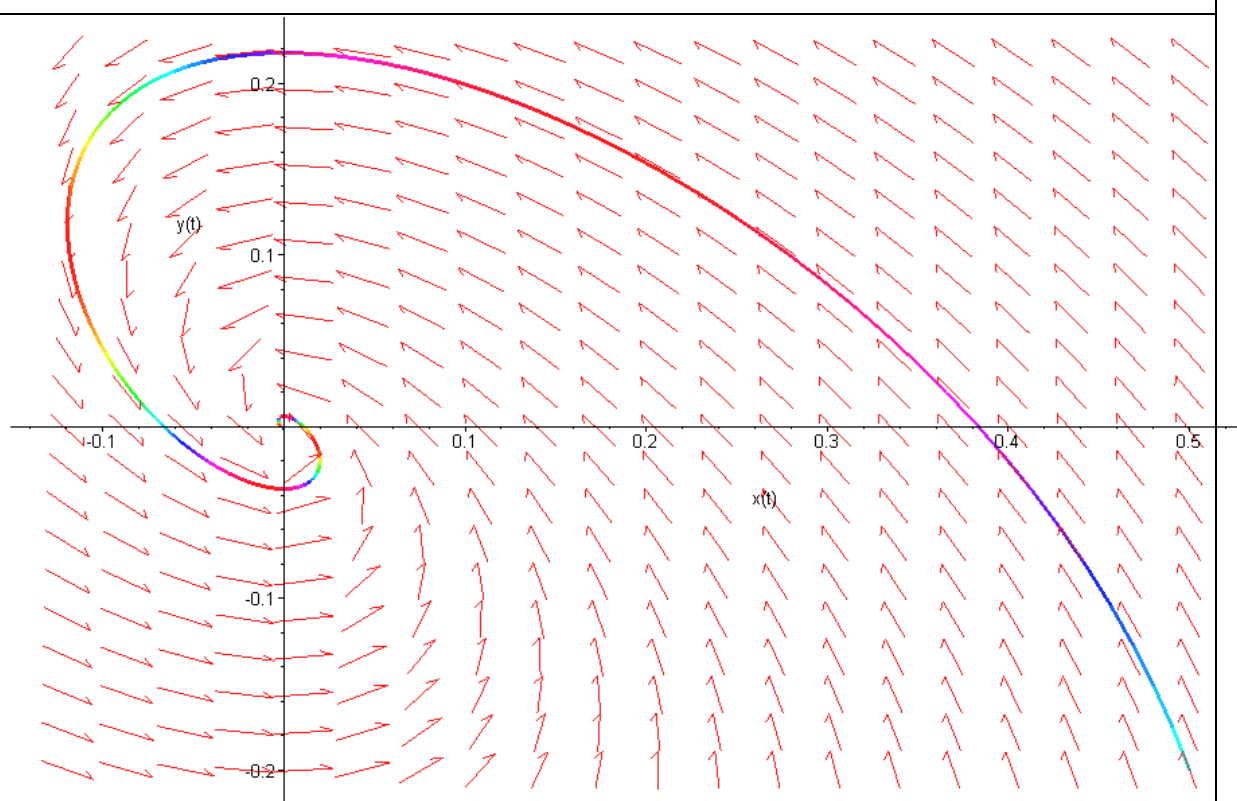


Рис. 5.2г. $\varepsilon = 1$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = -0.2$.

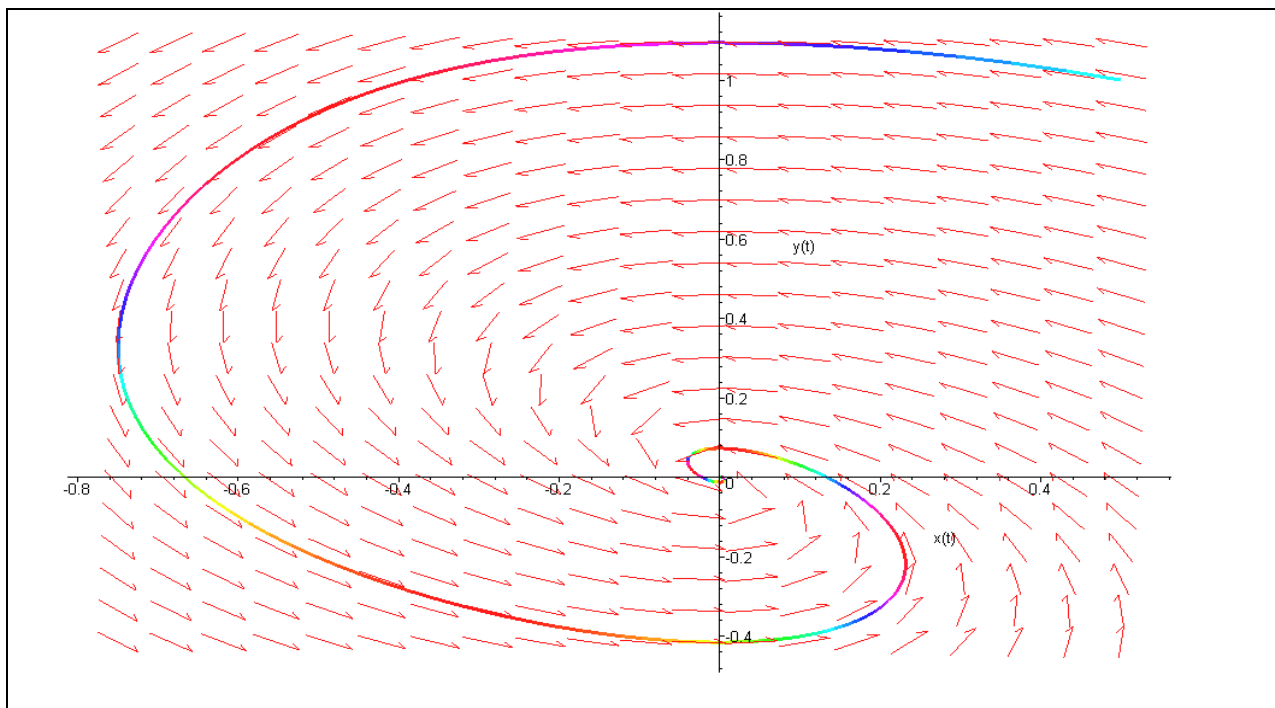


Рис. 4.2г. $\varepsilon = 1$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = 1.0$.

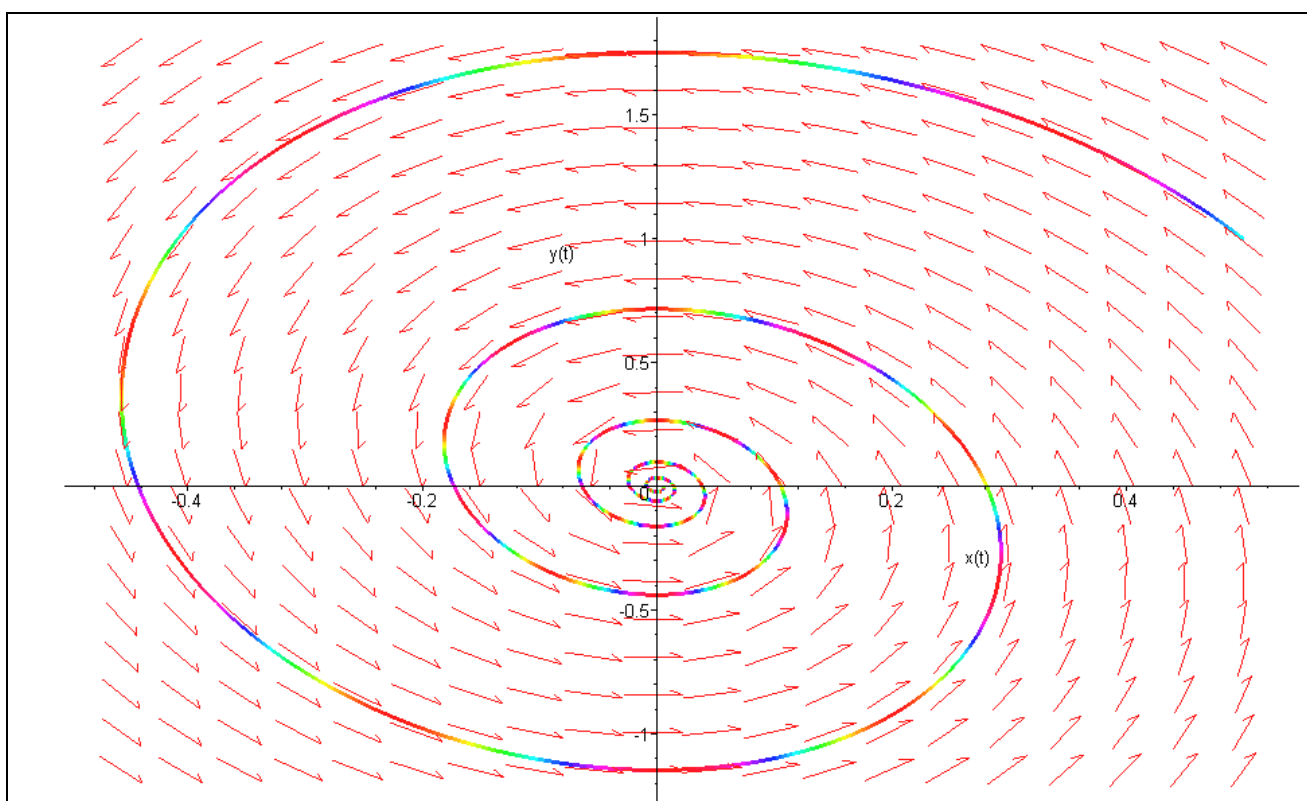


Рис. 5.2д. $\varepsilon = 10.0$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = 1$.

Приведенные фазовые портреты динамической системы допускают следующую интерпретацию:

- при умеренно малых значениях параметра $\varepsilon = 0.1$ (при этом «коэффициент сопротивления» среды $\mu = 10$) существует одно устойчивое тривиальное положение равновесия и один неустойчивый предельный цикл автоколебаний (мультивибраторный режим) ;
- при существенно малом значении параметра $\varepsilon = 0.02$ предельный цикл уходит на бесконечность, но в окрестности особой точки (устойчивый узел) при некоторых начальных значениях удастся выйти на устойчивую ветвь, приводящую к тривиальному решению ;
- при значениях параметра порядка 0.01 решение перестает быть регулярным, наблюдается «жесткая турбулентность» и в окрестности особой точки появляется странный аттрактор, при этом нужно иметь в виду, что причина такого явления может быть обусловлена особенностями дискретизации исходной математической модели и алгоритмом численного решения;
- при значениях параметра $\varepsilon = 1 \div 10$ система теряет сложность и решение приобретает вид затухающих колебаний, стягиваясь к тривиальной особой точке.

Экономическая интерпретация данной системы неординарна: режим автоколебаний (наиболее реальный для состояния динамически функционирующего малого бизнеса) наблюдается при некотором, не очень большом сопротивлении среды (конкуренция, контроль, налоги). При большом сопротивлении (коррупция, рэкет, несовершенство законодательства и другие механизмы торможения) режим автоколебаний носит *случайный, хаотический* характер, по существу, исчезает, и, что интересно, к нему же приводит отсутствие сопротивления, только в этом случае режим затухания имеет регулярный характер.

Варианты заданий

№ П/П	
1.	$\ddot{x} = \mu \left[(6x^2 - 5x^4 - 2)\dot{x} - x \right].$
2.	$\ddot{x} = \mu \left[(3x^2 - 1)\dot{x} + x \right].$
3.	$\ddot{x} = \mu \left[x - (5 + 5x^4 - 6x^2) \right].$
4.	$\ddot{x} = \mu \left[2(e^x - e^{2x})\dot{x} - x - 1 \right].$
5.	$\ddot{x} = \mu \left[3(e^x - e^{2x})\dot{x} - x - 5 \right].$
6.	$\ddot{x} = \mu \left[2(e^x - e^{2x})\dot{x}' - x + 1 \right].$
7.	$\frac{dx}{dt} = x(y - 1).$ $\frac{dy}{dt} = -\mu y \left[x^2 + 2(y + 1)(y - 3) \right].$
8.	$\frac{dy}{dt} = \mu \cdot y \left[1 - y^2 - (x - y)^2 \right],$ $\frac{dx}{dt} = 3y - 2, \quad y \geq 0.$
9.	$\frac{dy}{dt} = -\mu y \left[x^2 + (2y + 2)(y - 5) \right],$ $\frac{dx}{dt} = x(xy - 1).$
10.	$\frac{dx}{dt} = \mu \left[x(1 - x^2) - y \right],$ $\frac{dy}{dt} = x - 2y.$

11.	$\frac{dx}{dt} = \mu(2e^x - e^{2x} - y),$ $\frac{dy}{dt} = x + 1.$
12	$\frac{dx}{dt} = \mu(2e^x - e^{2x} - y),$ $\frac{dy}{dt} = x - 1.$
13	$\frac{dx}{dt} = \mu(6e^x - e^{2x} - y),$ $\frac{dy}{dt} = x + 5 - y.$
14	$\frac{dx}{dt} = \mu(y(2 - x) - y(3 + x) - x - y),$ $\frac{dy}{dt} = x.$

Порядок выполнения работы.

1. Записать исходное дифференциальное уравнение в виде системы нормальных уравнений (перейти к плоскости Лъенара). Для вариантов 7 -10 записать систему в виде одного дифференциального уравнения.
2. Разбить систему на две подсистемы, описывающие быстрые и медленные движения.
3. Проанализировать фазовые траектории быстрых движений.
4. Построить кривую медленных движений.
5. На основе анализа подсистем быстрых и медленных движений сделать вывод о существовании предельного цикла и характере поведения фазовых кривых в фазовой плоскости исходной задачи.
6. Получить решение исходной задачи (построить фазовый портрет), пользуясь возможностями пакета MAPLE.

7. В ходе численного эксперимента рассмотреть поведение динамической системы при различных значениях малого параметра.
8. Убедиться в существовании различных режимов поведения системы, меняя начальные условия, временной интервал, шаг интегрирования, алгоритм численного метода.

Тема 6. Линейные динамические системы на основе равновесия спроса и предложения

6.1 Динамические непрерывные модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона для одного товара

6.1.1 Постановка задачи. Простейшая модель

Рассмотрим равновесие для функций спроса и предложения

$$\begin{aligned} D(t) &= -ap(t) + \alpha \\ S(t) &= bp(t) - \beta \end{aligned} \quad (6.1)$$

параметры функций (6.1) a, b, α, β принимаются постоянными и положительными. Предположим, что на рынке создается дефицит $D(t) - S(t)$ или запас (избыток) товара $-D(t) + S(t)$ при этом скорость изменения (роста) цены пропорциональна дефициту с коэффициентом λ (реакция рынка)

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(D(t) - S(t)) \quad (6.2)$$

Перепишем уравнение (6.2) после подстановки (6.1)

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(-ap(t) + \alpha - bp(t) + \beta) \quad (6.3)$$

Определим положение равновесия системы (6.3)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(-ap(t) + \alpha - bp(t) + \beta) \Rightarrow \\ p^* &= \frac{\alpha + \beta}{a + b} \end{aligned} \quad (6.4)$$

из уравнений (6.3) и (6.4) составим систему

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\alpha + \beta) - \lambda(a + b)p(t)^* \\ \frac{dp}{dt} &= \lambda(\alpha + \beta) - \lambda(a + b)p(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим, обозначив $R(t) = p(t) - p(t)^*$ как отклонение цены от равновесного значения дифференциальное уравнение для этой величины

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda(a+b)R \quad (6.6)$$

Интегрируя (6.6), получим решение для отклонения цены

$$R(t) = R_0 \exp(-\lambda(a+b)t) \quad (6.7)$$

$$p(t) = p^* + p_0 \exp(-\lambda(a+b)t)$$

Ценовая динамика для рыночной системы в этой простейшей модели зависит, как можно видеть от параметров модели.

6.1.2 Модель с учетом инерции цены продавца

Рассмотрим теперь модель, в которой производители (продавцы) товара реагируют на изменение цены равновесия не мгновенно, а с некоторой задержкой T (*среднее запаздывание*). Цена спроса $p(t)$ и цена предложения $y(t)$ не совпадают. Пусть, к примеру, цена $y(t)$ запаздывает относительно цены $p(t)$ на величину временного лага T . Тогда скорость изменения цены продавца определяется соотношением

$$\frac{dy}{dt} = [p(t) - y(t)]/T \quad (6.8)$$

Динамика спроса и предложения задается функциями (6.1) с учетом зависимости предложения от цены $y(t)$. Скорость изменения цены спроса $p(t)$ пропорциональна дефициту (рассогласованию между спросом и предложением) аналогично выражению (6.2)

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(D(p(t)) - S(y(t)))$$

Таким образом, модель будет иметь вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{T}(p(t) - y(t)) \\ \frac{dp}{dt} &= \lambda[(-ap(t) + \alpha) - (by(t) - \beta)] \end{aligned} \quad (6.9)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Положения равновесия в данной системе очевидны

$$p^* = y^* = \frac{\alpha + \beta}{a + b} \quad (6.11)$$

Исследуем поведение системы в окрестности положения равновесия. Система (5.9) линейна и допускает полное исследование в терминах качественной теории динамических систем. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda a - k & -\lambda b \\ \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} - k \end{vmatrix} = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-(1 + T\lambda a) \pm \sqrt{(1 + T\lambda a)^2 - 4T\lambda(a + b)}}{2T} \quad (6.12)$$

Рассмотрим топологию на фазовой плоскости для анализа поведения динамической системы (6.9) в окрестности положения равновесия (6.11), используя корни характеристического уравнения (6.12). Как известно из качественной теории, возможны следующие состояния:

1. Дискриминант в (6.12) положителен - $(1 + T\lambda a)^2 > 4T\lambda(a + b)$, при этом очевидно, что оба корня будут отрицательны, т.к. все параметры a, b, α, β являются положительными числами. Этому соответствует состояние *устойчивого узла* на фазовой плоскости. Следовательно при этом решения динамической системы *асимптотически устойчивы* и приближение к равновесной цене будет *монотонным* при условии $a > \frac{-1}{\lambda T}, (a + b) > 0$
2. Дискриминант в (5.12) отрицателен - $(1 + T\lambda a)^2 < 4T\lambda(a + b)$ при этом выполняется условие $a > \frac{-1}{\lambda T}, (a + b) > 0$, значит, действительная часть комплексных корней (6.12) меньше нуля, следовательно, такое состояние определяется как *устойчивый фокус* на фазовой плоскости. Динамическая система также *асимптотически устойчива* и приближение к цене приобретает характер затухающих колебаний.

3. Вывод. Рыночная система с запаздыванием предложения асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $a > \frac{-1}{\lambda T}, (a + b) > 0$.

Задания $\lambda = 0,5$ для простейшей модели и для модели с задержкой $T=0,5$, с учетом замены $p(t)$ на $y(t)$ при этом начальные условия для $y(t)$ взять на 1 больше, чем для $p(t)$

$$D = 20 - 2p$$

1. $S = -4 + p$

$$p(0) = 4$$

$$D = 22 - 2p$$

2. $S = -5 + p$

$$p(0) = 5$$

$$D = 25 - 2p$$

3. $S = -3 + p$

$$p(0) = 8$$

$$D = 16 - p$$

4. $S = -4 + p$

$$p(0) = 8$$

$$D = 16 - 2p$$

5. $S = -4 + p$

$$p(0) = 4$$

$$D = 20 - 1,5p$$

6. $S = -4 + p$

$$p(0) = 3$$

$$D = 20 - 3p$$

7. $S = -4 + 2p$

$$p(0) = 4$$

$$D = 30 - 2p$$

8. $S = -5 + p$

$$p(0) = 6$$

$$D = 20 - 3p$$

9. $S = -4 + 2p$

$$p(0) = 2$$

$$D = 40 - 3p$$

10. $S = -4 + 2p$

$$p(0) = 4$$

6.1.3 Модель с учетом зависимости спроса и предложения от скорости изменения цены

В формулу для функций предложения и спроса (6.1) введем слагаемое учета скорости изменения цены. Скорость изменения цены выражается производной от цены по времени. Поэтому выражение для функций предложения и спроса имеют вид

$$\begin{aligned}D(t) &= \alpha - ap(t) - k_2 \frac{dp}{dt} \\S &= -\beta + bp(t) + k_1 \frac{dp}{dt} \\p(0) &= p_0\end{aligned}\quad (6.13)$$

Коэффициенты α, β, k_1, k_2 - постоянные коэффициенты, при этом знаки их положительны. Подставим в условие равновесия функции (5.13) с учетом реакции рынка и обозначений

$$A = \lambda(\alpha + \beta)/(1 + \kappa\lambda), \quad B = \lambda(a + b)/(1 + \kappa\lambda), \quad \kappa = k_1 + k_2$$

Дифференциальное уравнение после этого примет вид

$$\frac{dp}{dt} + Bp = A$$

Это дифференциальное линейное уравнение 1-го порядка и имеет точное решение

$$P(t) = (P_0 - A/B)\exp(-Bt) - A/B \quad (6.14)$$

Цена монотонно приближается к постоянному значению по экспоненциальному закону, рыночная система при ограничениях на параметры α, β, k_1, k_2 , оговоренные выше, является асимптотически устойчивой, если выполняется условие $a + b > 0$.

Задание: Построить график решения для цены (5.14), проверить поведение системы, если условие $a + b > 0$ не выполняется. Задание коэффициентов k_1, k_2 рассматривать способ акселерации спроса и предложения на скорость изменения цены

6.1.4 Модель с учетом зависимости скорости изменения цены товара от отклонения его текущего запаса от фиксированной величины

Запасы могут быть непрерывно меняющимися во времени, при этом предположим

$$\frac{dQ}{dt} = S - D \quad (6.15)$$

Из (6.15) следует

$$Q = Q_0 + \int_0^t (S - D) ds$$

В каждый момент времени продавец устанавливает в соответствии с предположением о пропорциональности скорости роста цены и разности запасов по сравнению с заданным уровнем \bar{Q}

$$\frac{dp}{dt} = -\lambda(Q - \bar{Q}) = -\lambda(Q_0 + \int_0^t (S - D) ds) \quad (6.16)$$

Продифференцируем выражение (5.16), получим

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\lambda(S - D) \quad (6.17)$$

Уравнение (6.17) показывает, что ускорение роста цен убывает пропорционально разности между предложением и спросом, или скорости уменьшения запасов. В случае линейной зависимости для функций спроса и предложения получим:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\lambda(S - D) = -\lambda(a + b)p + \lambda(\alpha + \beta) \quad (6.18)$$

Уравнение (6.18) можно представить в виде нормальной системы

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d^2 p}{dt^2} = -\lambda(a + b)p + \lambda(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

И исследовать её качественным методом системной динамики. Характеристическое уравнение модели (6.18) имеет вид

$$k^2 + \lambda(a + b) = 0$$

Если $(a + b) > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda(a + b)}$, то уравнение будет *нейтрально устойчиво*, в противоположном случае $(a + b) < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda(a + b)}$ неустойчиво. В фазовом пространстве $(\frac{dp}{dt}, p)$ первому случаю соответствует *центр*, второму – *седло*.

Задание: В соответствии с вариантами рассмотреть поведение системы, задавая при этом начальное условие для скорости изменения цены как положительным (запас меньше заданного уровня) так и отрицательным (запас больше заданного уровня)

Тема 7. Дискретные динамические модели на основе спроса и предложения

7.1 Бифуркации в дискретных отображениях

Дискретным отображением в динамических системах называют преобразование вида

$$x_{t+1} = \varphi(x_t, \lambda) \quad , \quad (7.1)$$

где параметр λ является бифуркационным параметром. В одной из простейших форм (одномерное отображение Фейгенбаума, *Feigenbaum M.J., 1978*)

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda x(1-x) = \frac{\lambda}{4} - \lambda(x - \frac{1}{2})^2$$

возникает бифуркация удвоения периода при отображении функцией отрезка $[0,1]$ в $[0, \frac{\lambda}{4}]$ при значении $\lambda \in [0,4]$ функция осуществляет отображение в себя, т.е. все члены последовательности $\{x_k\}$, получаемой в результате отображения (2.1) при любом начальном значении $x_0 \in [0,1]$ не выйдут за пределы отрезка $[0,1]$, другими словами, определены при любом $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Важно понимать при этом, что при $\lambda > 4$ дискретное отображение (6.1) и непрерывная функция (непрерывное отображение) $\varphi(x) = \lambda x(1-x)$ становятся противоречивыми, т.к. при дискретном отображении появляются такие корни, которые не принадлежат непрерывной функции, например, при $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{4}$ и, следовательно, выходит за границу определения непрерывной функции. Именно этим обстоятельством объясняется явление *бифуркации*, т.е. неоднозначности в виде удвоения решений (бифуркация Фейгенбаума). При $0 < \lambda < 1$ (6.1) представляет собой сжимающее отображение, при котором существует одно устойчивое решение $\xi_1 = 0$, при переходе параметра λ через 1 на интервале $1 \leq \lambda \leq 4$ нарушается условие сходимости:

$$\varphi'(x) = \lambda(1-2x) \Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \lambda \quad .$$

Кроме того, появляется другое решение $\xi_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, которое тоже является устойчивым. Таким образом, при определенных обстоятельствах, происходит бифуркация решений: вместо одного решения на рассматриваемом промежутке появляется два. Осталось определить, в каких именно точках по параметру λ будут возникать бифуркации. Сходимость последовательности $\{x_k\}$ к решению $\xi_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ будет

наблюдаться не при всех значениях $1 \leq \lambda \leq 4$. Оказывается, существует такое число $\Lambda_1 > 1$, при переходе через которое начинается *перемежающаяся сходимост*: все четные члены последовательности $\{x_k\}$ сходятся к одному числу, а нечетные - к другому. Формально это означает, что найдутся такие числа $a_1, a_2 \in (0,1)$ (свои для каждого λ) такие, что

$$a_2 = \varphi(a_1), \quad a_1 = \varphi(a_2); \quad a_1 \neq a_2 \neq \xi_1 \quad (7.2)$$

В таких случаях говорят, что дискретное отображение (7.1) имеет устойчивый цикл *периода 2* и обозначают его S^2 . Определим эти значения. Из (6.2) следует, что

$$a_1 = \varphi(\varphi(a_1)), \quad a_2 = \varphi(\varphi(a_2)); \quad (7.3)$$

Таким образом, точки (7.3) являются неподвижными точками двойного отображения

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \lambda(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x)) \quad (7.4)$$

Два корня этого отображения мы уже знаем $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, поэтому из теоремы Безу можно, исключив эти корни, найти остальные, решив квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{\lambda+1}{\lambda}x + \frac{\lambda+1}{\lambda^2} = 0 \quad (7.5)$$

Рассматриваем дискриминант уравнения (7.5) и находим, что по условию положительности дискриминанта искомое значение Λ_1 , начиная с которого появляются новые устойчивые неподвижные точки (решения уравнения (7.5)).

$$a_{1,2} = \frac{\lambda+1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda} \quad (7.6)$$

График этих точек на плоскости (x, λ) будет иметь вид «вилки на интервале» Λ_1, Λ_2 , где Λ_2 получим из решения для неподвижных точек для отображения

$$x = \phi^3(x) = \phi(\phi(\phi(x))) = \lambda\{(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x))\}\{1-(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x))\}$$

Эти точки будут в свою очередь определять уже 4 ветви бифуркационной диаграммы. Схематический вид этой диаграммы представлен на рисунке 7.1.

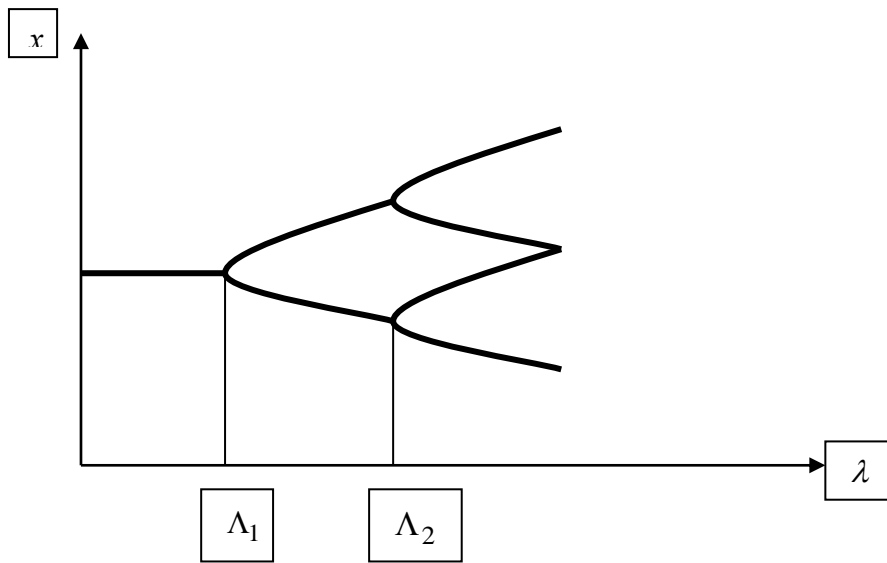


Рис.7.1 Бифуркационная диаграмма циклов периода 2^n

Обратим внимание на то, что качественно ситуация с появлением неподвижных точек и бифуркаций в отображениях $\varphi(x)$, $\varphi^2(x)$ показана на следующих графиках:

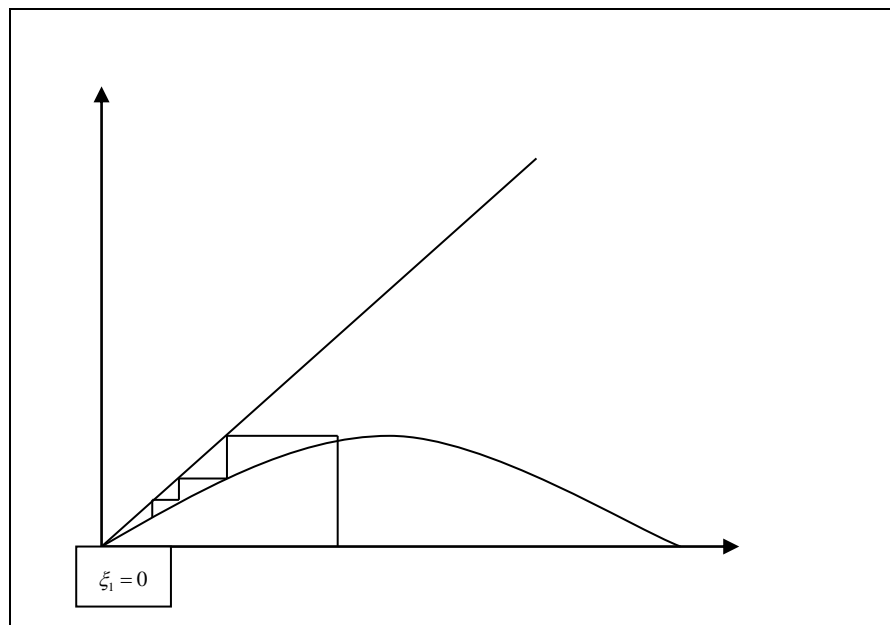


Рис. 7.2 Сходимость к первому корню отображения $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ при $\lambda \in (0,1)$

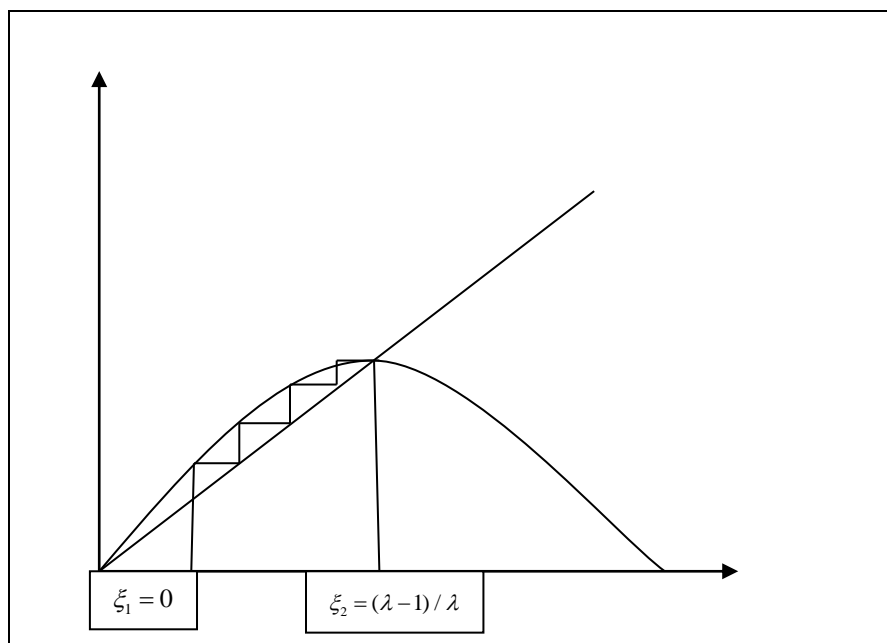


Рис. 7.3. Сходимость ко второму корню отображения $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ при $\lambda \in (1, \Lambda_1)$

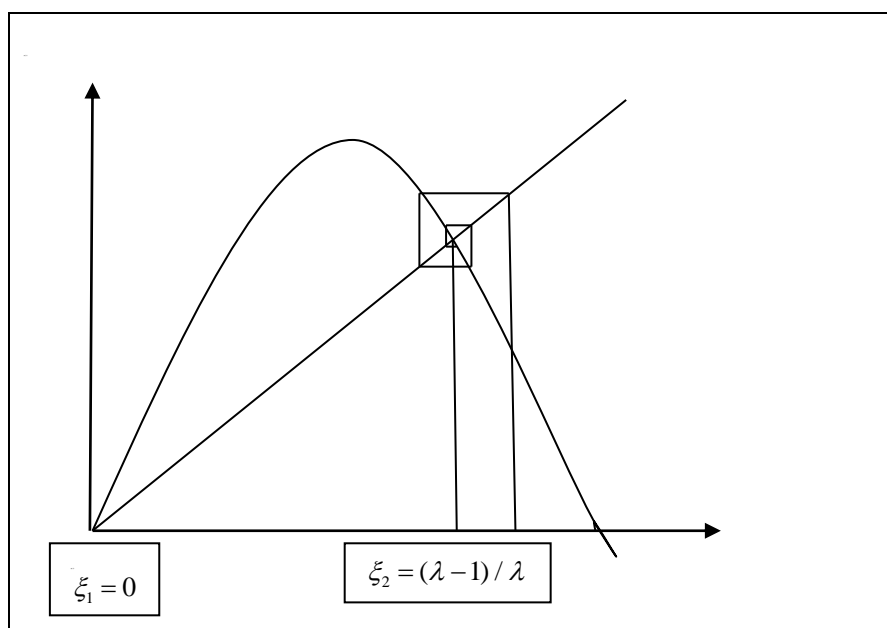


Рис. 7.4 Сходимость ко второму корню отображения $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ при $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$

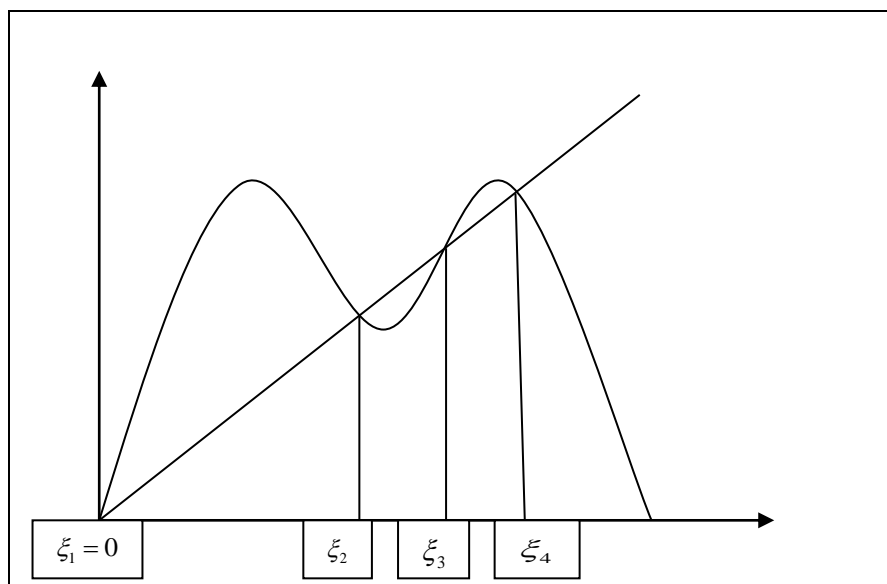


Рис 7.5 График функции отображения $x_{k+1} = \varphi^2(x_k) = \lambda(\lambda x(1-x)(1-\lambda x(1-x)))$ при $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и его неподвижные точки

Задание: найти неподвижные точки отображений $x_{k+1} = \varphi(x_k)$,
 $x_{k+1} = \varphi^2(x_k) = \lambda(\lambda x(1-x)(1-\lambda x(1-x)))$,
 $x_{k+1} = \varphi^3(x_k) = \lambda\{\lambda[\lambda x(1-x)][1-\lambda x(1-x)]\}\{1-[\lambda x(1-x)][1-\lambda x(1-x)]\}$
и построить три цикла бифуркационной диаграммы, используя эти неподвижные точки.

7.2 Уравнение Рикера

Если в случае дискретной модели ценообразования предположить, что её динамика подчиняется закону

$$P_{t+1} = P_t \exp\{r[D(P_t) - S(P_t)]\}, \quad (7.7)$$

где r – коэффициент адаптации цены, D , S – функции спроса и предложения, P_t – значение текущей цены $r > 0$,

$$D = \alpha - aP$$

$$S = -\beta + bP$$

и после подстановки сделаем замену переменных

$$P_{t+1} = P_t \exp\{r[\alpha + \beta - (a+b)P_t]\}, \quad y_t = r(a+b)P_t, \quad A = \exp(r(\alpha + \beta)),$$

то получим известное уравнение *Рикера*, часто используемое в динамике популяций биофизических систем (*W. Ricker, 1954*):

$$y_{t+1} = Ay_t \exp(-y_t) \quad (7.8)$$

Уравнение Рикера также обладает свойством бифуркации удвоения периода. При достаточно малых значениях параметра A ($A < A_1 = 1$) и любом начальном значении y_t итерационный процесс $y_{t+1} = Ay_t \exp(-y_t)$ приводит к нулевому значению. В нашем случае это означает, что цена падает до нуля и точка $y = 0$ является устойчивой неподвижной точкой отображения (7.8). При увеличении параметра A ($A_1 < A < A_2$) итерационный процесс (7.8) сходится к ненулевой неподвижной точке, значение которой увеличивается при увеличении значения параметра A . При определенных значениях параметра возникает хаотическое изменение амплитуды колебаний – возникает так называемый «детерминированный хаос».

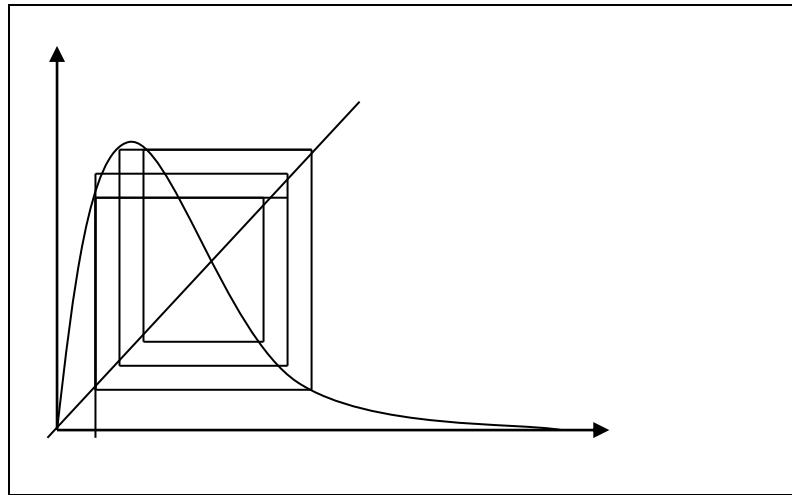


Рис. 7.6 Появление 2-х циклов периода 4 и 6 при небольших значениях параметра A

Следует отметить, что при изменении параметра возникают «окна регулярности», затем снова появляется хаотическое поведение. Такие явления называют перемежаемостью, они часто отмечаются в динамике фондовых рынков. Качественное поведение динамики функции $y(t)$ можно при малых и больших A увидеть на рис. 7.6, 7.7.

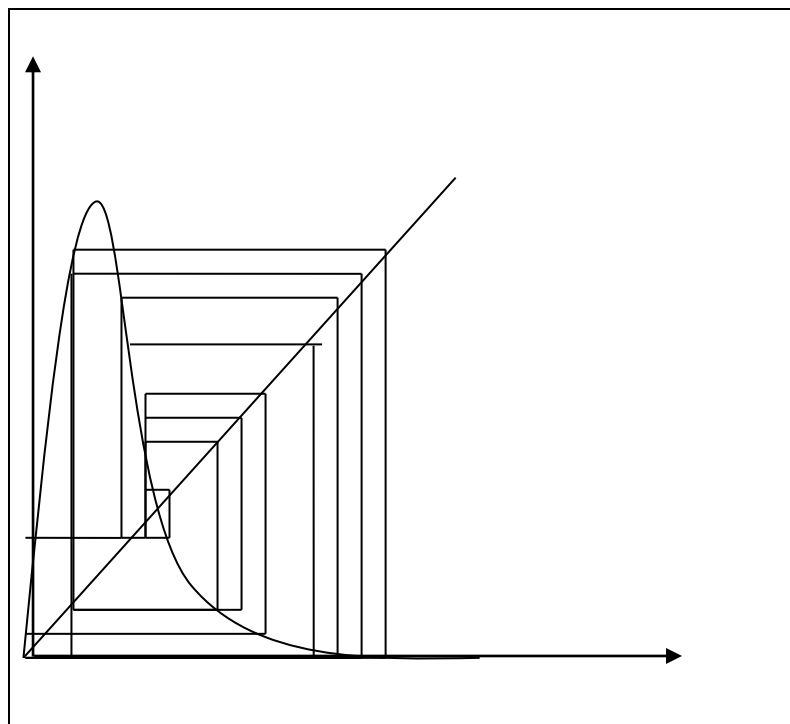
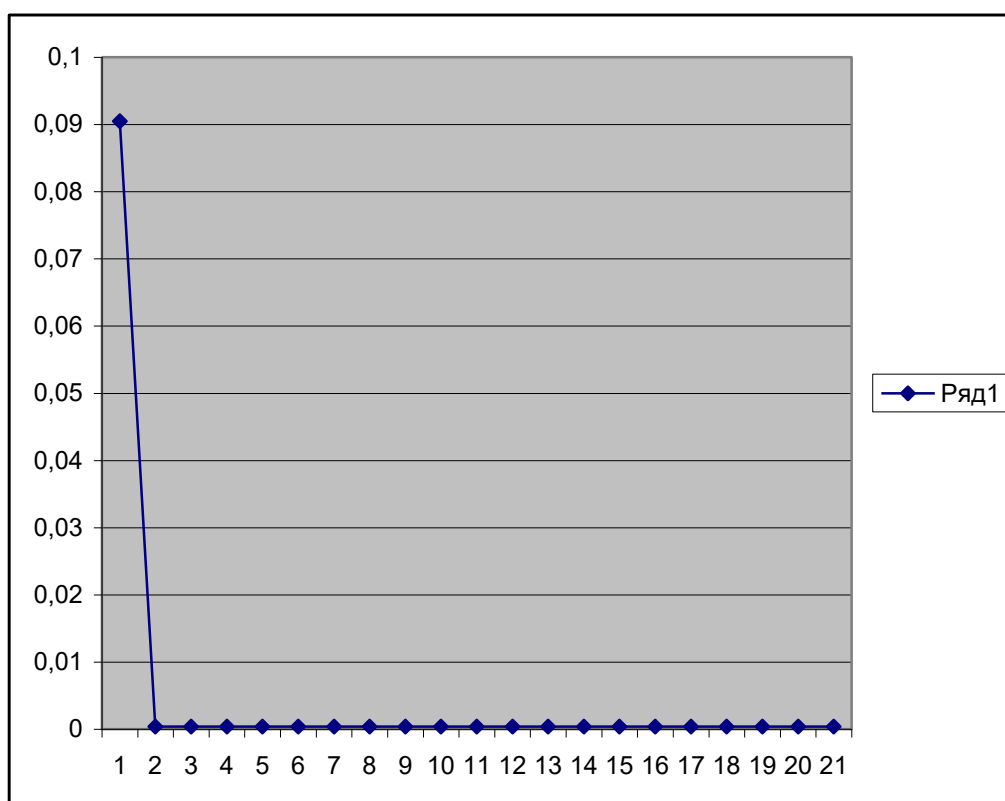
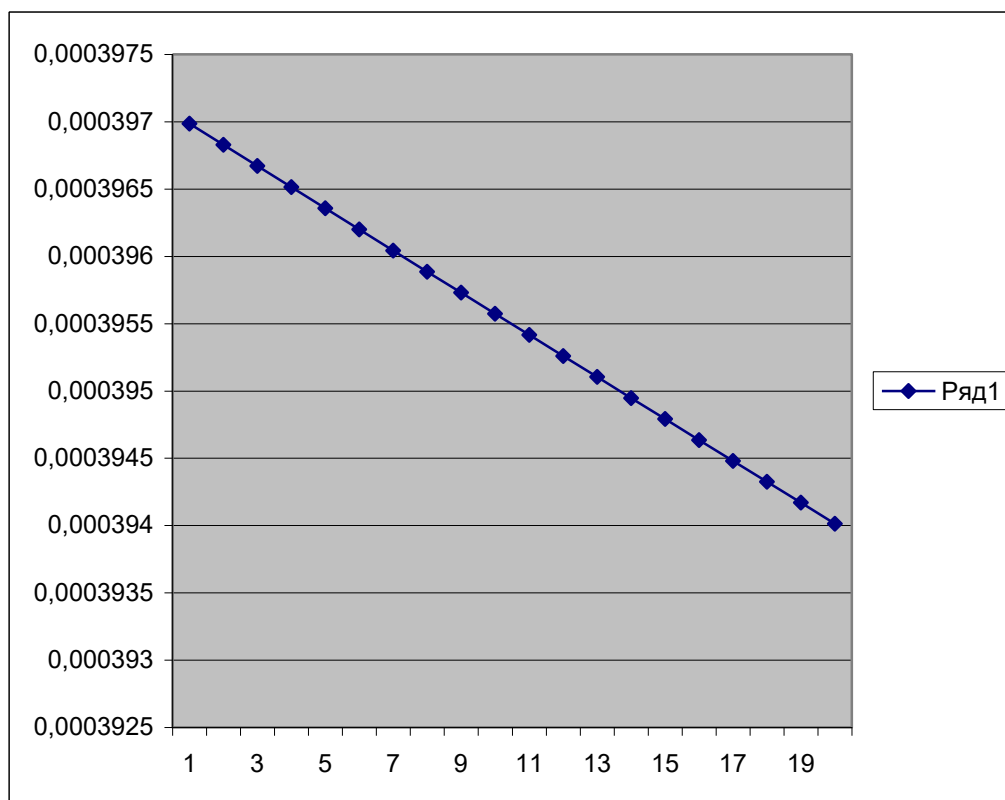


Рис. 7.7. Появление хаотичности при значениях параметра $A = 18$



а)



б)

Рис. 7.8 Динамика цены при $A=1$. Решение имеет устойчивую монотонную сходимость к нулевой цене

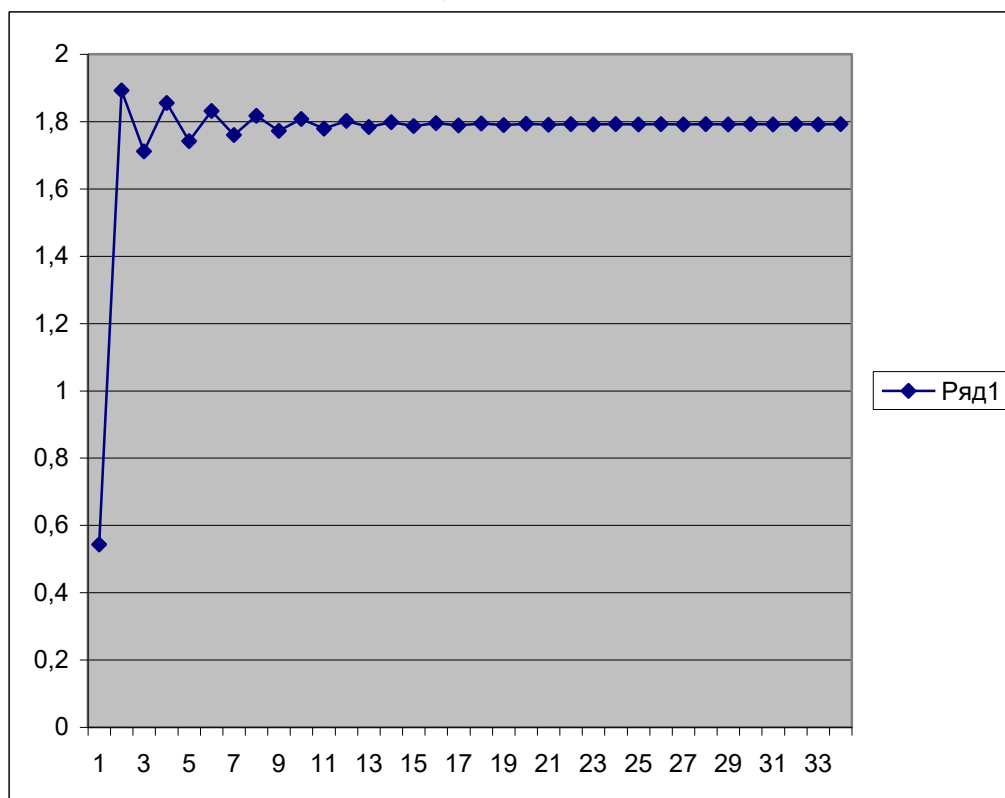


Рис. 7.9 Динамика цены при $A=6$. Решение имеет устойчивую немонотонную сходимость типа затухающих колебаний (устойчивый фокус)

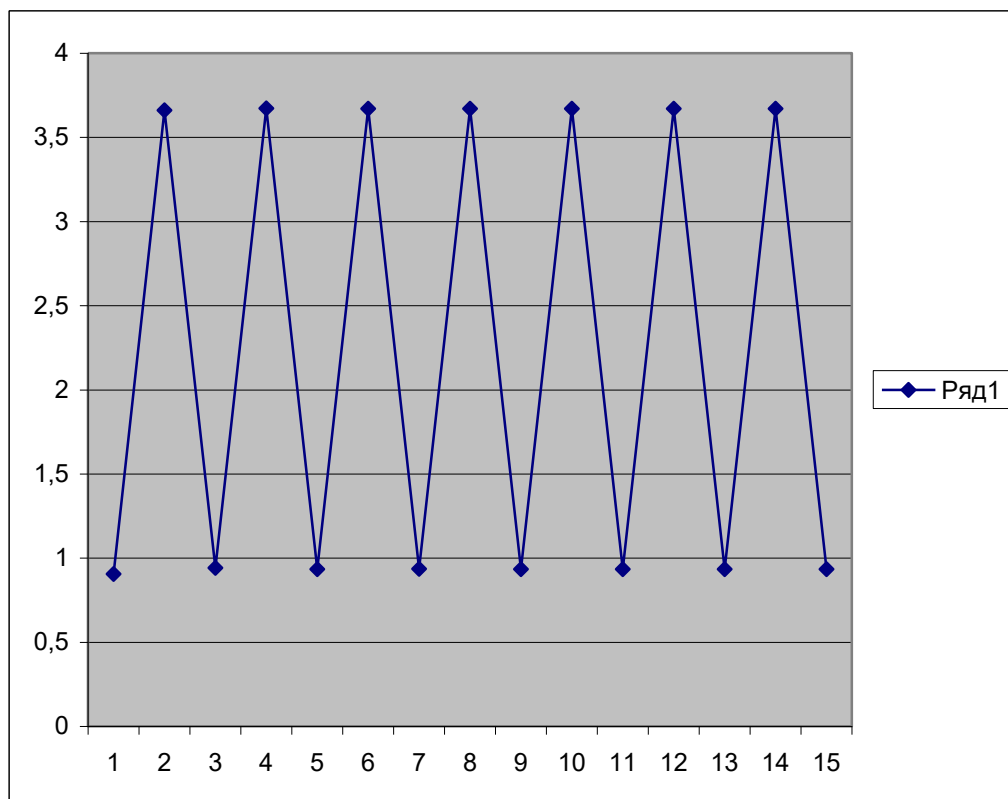


Рис. 7.10 Динамика цены при $A=10$ - строго периодическая регулярность (тип особой точки центр)

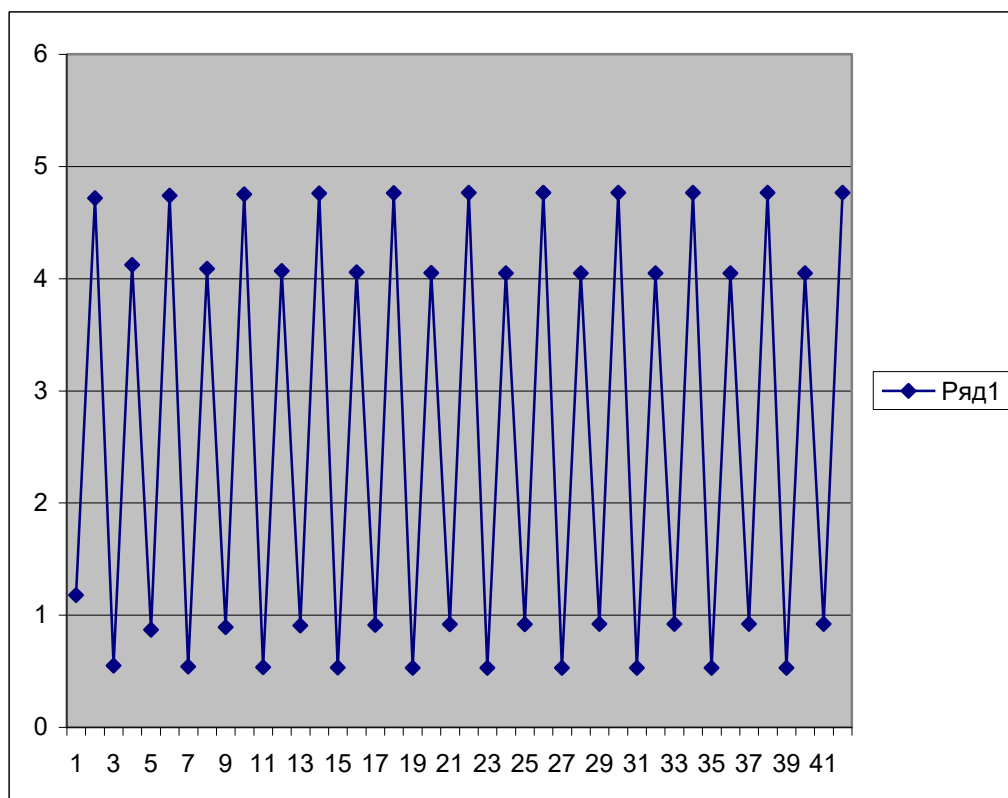


Рис.7.11 Динамика цены при $A=13$. Заметны регулярные периоды цикла 2

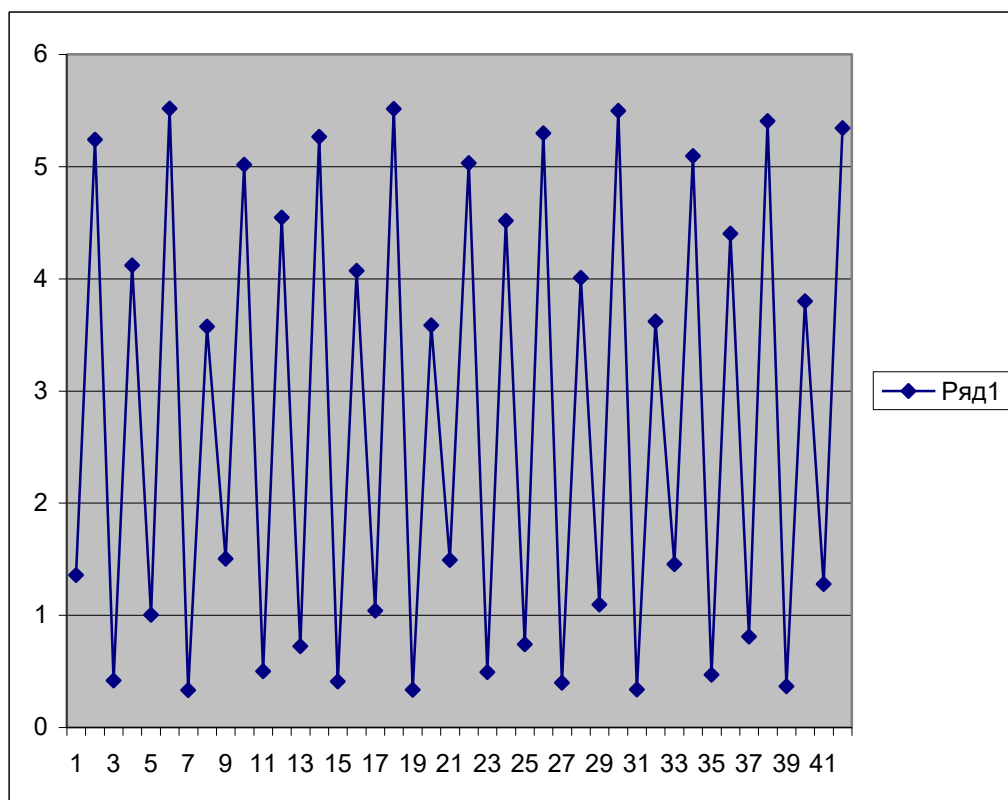


Рис. 7.12 Динамика цены при $A=15$. Заметны окна периодичности

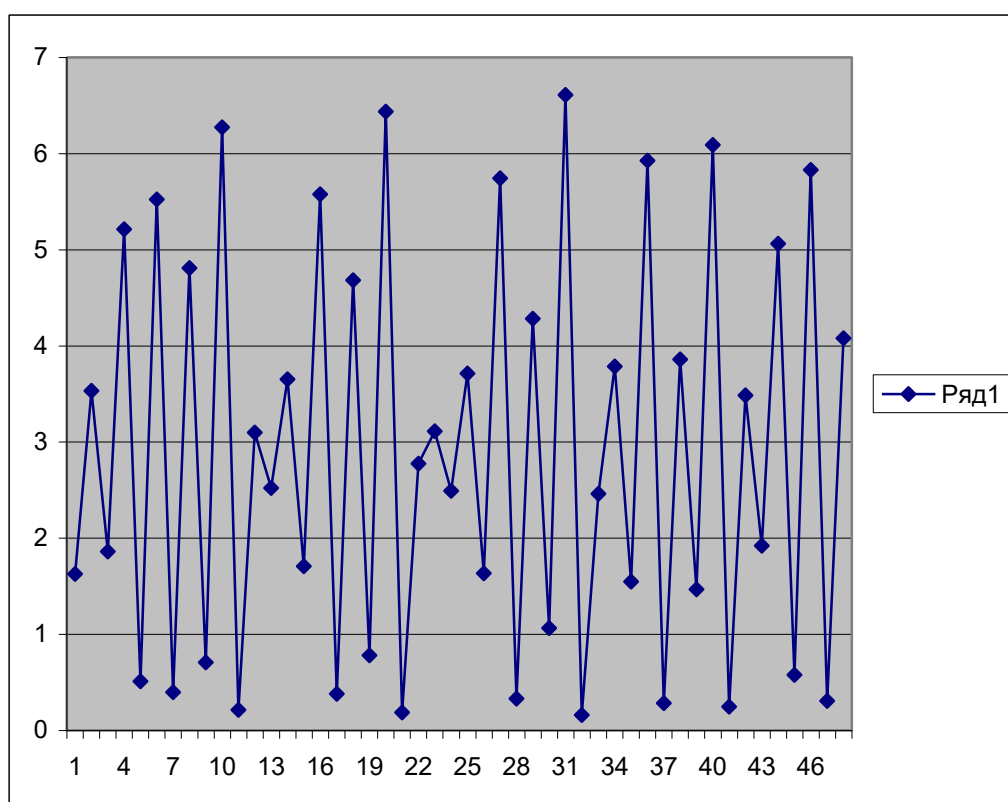


Рис. 7.13. Динамика цены при $A=18$ появление детерминированного хаоса

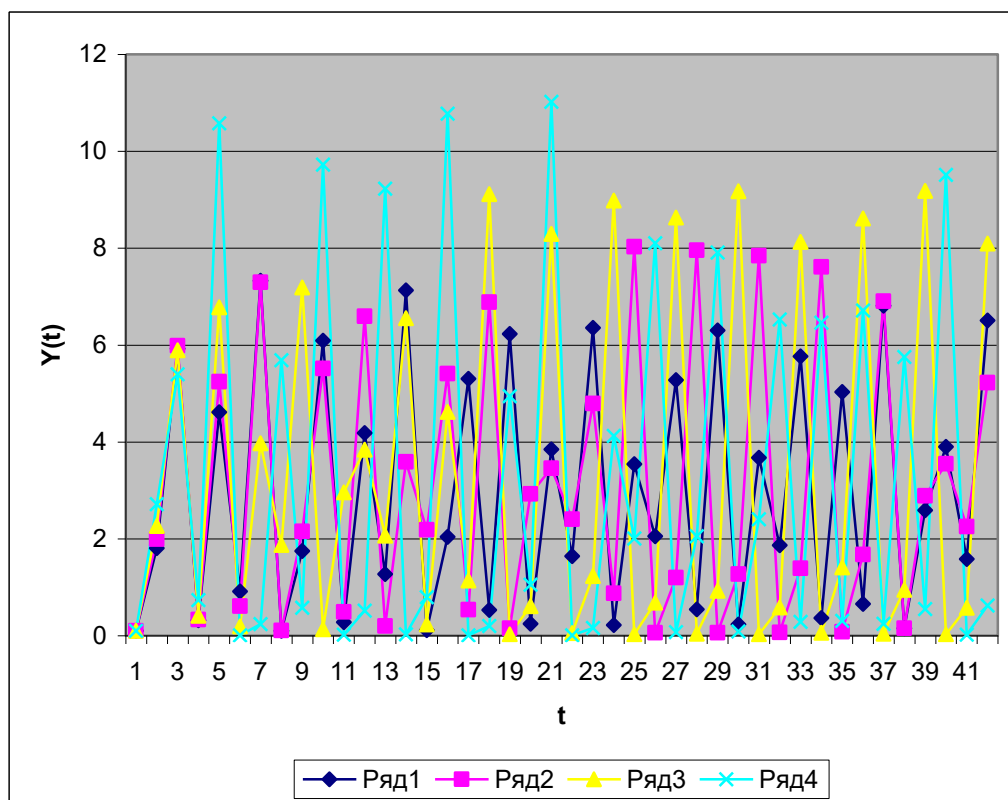


Рис.7.14 Хаотические режимы при разных A : 1- $A=20$; 2- $A=22$; 3 – $A=25$;
4 – $A=30$

Список рекомендуемой литературы

1. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости./ Б.П. Демидович – М.: Наука, 1967.
2. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости./ Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - М.: Наука, 1990. – 488 с.
3. Ризниченко, Г.Ю. Лекции по математической биофизике./ Г.Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: R&CD, 2002. – 220 с.
4. Базыкин, А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций./ А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
5. Малинецкий, Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент/ Г.Г. Малинецкий. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с.
6. Хакен, Г. Синергетика/ Г. Хакен. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
7. Хакен, Г. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах/ Г. Хакен. – М.: Мир, 1985. – 419 с.
8. Пригожин, И. Порядок из хаоса/ И. Пригожин, И. Стингерс. – М.: Мир, 1982. – 360 с.
9. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний./ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1974. – 504 с.
10. Постников, Л.В. Сборник задач по теории колебаний./Л.В. Постников, В.И. Королев, Т.М. Тарантович, В.А. Мельникова, С.Я. Вышкинд // под ред. Л.В. Постникова. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
11. Аргатов, И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике: Учебное пособие/ И.И. Аргатов.- СПб.: Политехника, 2004. - 302 с.
12. Малинецкий, Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику./ Г.Г. Малинецкий. - М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

13. Шатров, А.В. Паде-аппроксимации асимптотик предельных состояний и описание перехода в нелинейных автоколебательных системах./ , А.В. Шатров// Математика, компьютер, образование. Ч. 2. Под ред. Г.Ю.Ризниченко.- Москва-Ижевск, Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, с. 401-410
14. Шатров, А.В. Динамическая модель взаимодействия структур бизнеса./ А.В. Шатров //Математика, компьютер, образование. Ч. 2. Под ред. Г.Ю.Ризниченко. - Москва-Ижевск, Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2005, с. 401-410
15. Штерман, Дж. Бизнес-процессы: Системное мышление и моделирование сложного мира.
16. Милованов, В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация.-М: Эдиториал УРСС, 2001. - 264с.
17. Занг, В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории/ В.-Б. Занг. – М.: Мир, 1999.
18. Воркуев Б.Л. Количественные методы в микро- и макроэкономике. – М.: ТЕИС, 2007. – 436 с.
19. Л. Столерю Равновесие и экономический рост. – М., 1974
20. Замков О.О., Толстомятенко А.В., Чермных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М., 2005
21. Симонов П.М. Экономико-математическое моделирование. Динамические модели экономики.- Пермь: Изд. Пермского университета, 2009
22. Полосков И.Е. Система аналитических вычислений Maxima. Описание и примеры использования. [Электронный ресурс]: <http://www.psu.ru/files/docs/sceince/books/uchebnie-posobiya/poloskov-sistema-analiticheskikh-vychislenij-maxima.pdf>.