Вычислительная математика

Лекция 5. Методы приближения функций

Исупов К. С.
isupov.k@gmail.com

12 октября 2020 г.

План

1. Приближение функций
2. Постановка задачи интерполяции
3. Алгебраическое интерполирование функций
   - Интерполяционный полином Лагранжа
   - Интерполяционный полином Ньютона
     - Полином Ньютона для сеток с произвольным шагом
     - Полином Ньютона для сеток с постоянным шагом
   - Погрешность интерполяции
   - Сравнение формул Лагранжа и Ньютона
4. Тригонометрическая интерполяция
5. Сплайн-интерполяция

Приближение функций

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана на отрезке $x \in [a, b]$, которая является **сложной для исследования**. Требуется заменить эту функцию некоторой **простой, но хорошо исследуемой** функци. Для этого с помощью $f(x)$ строят таблицу (сеточную функцию):

Таблица 1: Сеточная функция

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	$\dots$	y_n

которую можно заменить простой функцией с контролируемой погрешностью.

Способы замены:

- *Интерполяция*. Приближенная функция $\overline{f}(x)$ является многочленом n-й степени (где $n+1$ — число узлов в таблице 1) и так приближает сеточную функцию $f(x)$, что

$$y_i = \overline{f}(x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

- *Метод наименьших квадратов*. Осуществляется минимизация некоторого функционала, построенного с помощью таблицы 1 и многочлена степени m, например:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - \overline{f}(x_i)]^2, \quad m << n. \tag{2}$$

Постановка задачи интерполяции

Пусть некоторая функция $f(x)$ известна только в узлах сетки x_i, т.е. задана таблицей:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	$\ldots$	y_n

Здесь:

- Точки x_i — узлы интерполяции
- Пары $(x_i, y_i = f(x_i))$ — исходные данные для интерполирования.

Пусть значение аргумента x **отличается** от узлов интерполяции (его нет в исходной таблице).

Задача: Пользуясь исходными данными найти $f(x)$, а именно, в общем виде получить аналитическое выражение, которое **совпадает с табличными значениями в узлах сетки**.

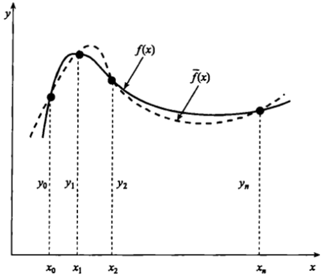

Рис. 1: К задаче интерполяции

Постановка задачи интерполяции

В общем случае искомая функция имеет вид:

$$\psi(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{3}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные

Исходя из основного условия интерполяции, имеем систему уравнений:

$$\psi(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

В развернутом виде:

$$\begin{aligned}
\psi(x_1; a_1, a_2, \ldots, a_n) &= y_1 \\
\psi(x_2; a_1, a_2, \ldots, a_n) &= y_2 \\
&\ldots \\
\psi(x_2; a_1, a_2, \ldots, a_n) &= y_n
\end{aligned}$$

Решив систему, найдем параметры a_i.

Типы интерполции:

- Линейная (если $\psi(x, \vec{a})$ линейно зависит от параметров a_i)
- Неинейная (если $\psi(x, \vec{a})$ нелинейно зависит от параметров a_i)

Линейная интерполяция

Представим $\psi(x, \vec{a})$ в виде обобщенного многочлена:

$$\psi(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \tag{5}$$

где $\psi_k(x)$ — линейно независимые функции:

$$a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_n\psi_n(x) = 0,$$

только если

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$$

Система уравнений для нахождения a_k является линейной системой:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Система имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля:

$$\det \psi_k(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \psi_3(x_1) & \ldots & \psi_n(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \psi_3(x_2) & \ldots & \psi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_n) & \psi_2(x_n) & \psi_3(x_n) & \ldots & \psi_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0.$$

При линейной интерполяции строят обобщенный полином по какой-либо чебышевской системе функций.

Алгебраическое интерполирование функций

- Полином Лагранжа
- Полином Ньютона для сеточной функции с произвольным шагом
- Полином Ньютона для сеточной функции с постоянным шагом

Рекомендуемая литература: [1], страницы 99-107.

Алгебраическое интерполирование функций

Пусть значения функции $f(x)$ известны только в $(n+1)$ точках – узлах интерполяции:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Рассмотрим полином степени n:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \tag{7}$$

или то же самое

$$\psi_k(x) = x^k, \quad 0 \le k \le n. \tag{8}$$

Значения полинома должны совпадать со значениями функции в узлах интерполяции. Имеем систему из $(n+1)$ уравнений

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{9}$$

Определитель системы отличен от 0 для всех различных между собой значений x_i:

$$\det = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod (x_k - x_m) \neq 0, \quad n \ge k > m \ge 0$$

- Алгебраический многочлен $P_n(x)$ существует и является единственным.
- Коэффициенты a_k линейно зависят от $f(x_i)$, поэтому и многочлен $P_n(x)$ линейно зависит от $f(x_i)$.

Интерполяционный полином Лагранжа

Представим $P_n(x)$ в форме:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k). \tag{10}$$

Требуется найти $l_k(x)$.

Потребуем, чтобы

1. $l_k(x_i) = 0$ при $i \neq k$ $\quad$ (x_i — узлы интерполяции),
2. $l_k(x_k) = 1$.

Тогда условие интерполяции будет выполняться:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= 1 \cdot f(x_0) + 0 + 0 + \cdots + 0 = f(x_0) \\ P_n(x_1) &= 0 + 1 \cdot f(x_1) + 0 + \cdots + 0 = f(x_1) \\ &\ldots \\ P_n(x_n) &= 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 \cdot f(x_n) = f(x_n) \end{aligned}$$

Указанным требованиям отвечает многочлен следующего вида (здесь $\boldsymbol{x}$ — точка, в которой требуется вычислить значение функции):

$$l_k(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1)\ldots(\boldsymbol{x} - x_{k-1})(\boldsymbol{x} - x_{k+1})\ldots(\boldsymbol{x} - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}, \tag{11}$$

Интерполяционный полином Лагранжа

Подставив (12) в (11) получим

Интерполяционный полином Лагранжа, $L_n(x)$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} f(x_k)$$

где $l_k(x)$ — множители Лагранжа:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

Интерполяционный полином Ньютона

Пусть значения $f(x)$ известны только в $(n+1)$ точках – узлах интерполяции:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Требуется вычислить $f(x)$, где $x \neq x_i$ (не является узлом интерполяции)

Будем строить интерполяционный полином следующим образом:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Задача — определить a_i.

Возможные варианты:

1. Сетка имеет произвольный шаг: $x_{i+1} - x_i \neq x_{x+2} - x_i$ — используются **разделённые разности**.
2. Сетка имеет постоянный шаг: $x_i = x_0 + ih$ — используются **конечные разности**.

Разделённые разности

Разделенная разность — аналог понятия производной в вычислительной математике.

1. Разделенные разности первого порядка в узлах x_i для $i = 0 \ldots n-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

2. Разделенные разности второго порядка в узлах x_i для $i = 0 \ldots n-2$:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

3. Разделенная разность n-го порядка в узле x_0 (она одна!):

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Выражение для разделенной разности n-го порядка через значения $y_i = f(x_i)$:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x_i - x_0), \ldots, (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} \tag{12}$$

Полином Ньютона для сеток с произвольным шагом

Подставляя вместо a_i разделенные разности, получим:

Интерполяционный полином Ньютона для сеток с произвольным шагом

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Этот полином, также как и полином Лагранжа, подходит для **произвольных** сеточных функций.

Конечные разности

Пусть $f(x)$ задана таблицей своих значений $f(x_k) = y_k = f(x_0 + kh)$ в равноотстоящих узлах интерполяции $x_k = x_0 + kh$, $(k = 0, 1, ...)$:

x_i	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$	$\dots$	$x_0 + nh$
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Для интерполяции таких функций используется аппарат **конечных разностей (КР)**. КР связаны с разделенными разностями соотношением:

$$\Delta^n y = f(x_0, x_1, ..., x_n) n! h^n. \tag{13}$$

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	
3	x_3	y_3	Δy_3		
4	x_4	y_4			

Рис. 2: Неполная таблица конечных разностей

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$

...

Полином Ньютона для сеток с постоянным шагом

Полином Ньютона для сетки с переменным шагом (для интерполяции в точке x):

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f(x_0, x_0 + h)(x - x_0) + ... \\ &+ f(x_0, ..., x_0 + nh)(x - x_0)(x - x_0 - h) \cdots (x - x_0 - (n-1)h) \end{aligned} \tag{14}$$

Заменим разделенные разности конечными:

$$\begin{aligned} &f(x_0) = y_0; \\ &f(x_0, x_0 + h) = \frac{\Delta y_0}{1!h}; \\ &f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}; \\ &... \end{aligned} \tag{15}$$

Полином Ньютона для сеток с постоянным шагом

Введем новую переменную q, определяющую число шагов от x_0 до x:

$$x = x_0 + qh \quad \Rightarrow \quad q = (x - x_0)/h,$$

тогда

$$(x - x_0) = qh; \quad (x - x_0)(x - x_0 - h) = q(q-1)h^2; \ldots \tag{16}$$

Первая интерполяционная формула Ньютона для интерполяции в начале таблицы

$$N_n(x) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Полином Ньютона для сеток с постоянным шагом

Если точка интерполяции x лежит вблизи конечной точки таблицы x_n, то узлы интерполяции следует брать в обратном порядке: $x_n, x_n - h, x_n - 2h, \ldots$. Тогда:

$$\begin{aligned} &f(x_n) = y_n; \\ &f(x_n, x_n - h) = f(x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}; \\ &f(x_n, x_n - h, x_n - 2h) = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}; \end{aligned} \qquad (17)$$

Введем новую переменную q, определяющую число шагов от x до x_n:

$$q = (x - x_n)/h.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполяции в конце таблицы

$$N_n(x) = y_n + \frac{q}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Полином Ньютона для сеток с постоянным шагом

Интерполяция в широком смысле включает в себя также **экстраполяцию** — нахождение значений функции для аргументов, находящихся **за пределами** таблицы. При этом:

1. Первая формула Ньютона используется для интерполяции вперед и экстраполяции назад;
2. Вторая формула Ньютона используется для интерполяции назад и экстраполяции вперед.

Погрешность экстраполяции много выше погрешности интерполяции!

Погрешность интерполяции

Погрешность, вызванная заменой искомой функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x) \cdot r(x), \tag{18}$$

где $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. В узлах интерполяции погрешность равна нулю.
Вспомогательная функция:

$$t(\xi) = f(\xi) - P_n(\xi) - \omega(\xi) \cdot r(x), \tag{19}$$

где x - параметр, такой, что

$$t(\xi) = 0, \text{ при } \xi = x_0, x_1, ..., x_n \text{ и при } \xi = x,$$

т.е $t(\xi) = 0$ в $(n+2)$ точках.

Погрешность интерполяции

Пусть $f(x)$ и $t(\xi)$ имеют $(n+1)$ непрерывные производные.

Правило

Между двумя нулями гладкой функции лежит нуль ее производной.

Обобщение

Между крайними из $(n+2)$ нулей функции лежит нуль ее $(n+1)$-й производной.

$(n+1)$-я производная вспомогательной функции:

$$t^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!r(x). \tag{20}$$

Пусть ξ^* лежит между указанными нулями и $t^{(n+1)}(\xi^*) = 0$. Тогда

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!}. \tag{21}$$

Погрешность интерполяции

1. Мажорантная оценка погрешности интерполяции (априорная):

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|, \tag{22}$$

   где $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(\xi)|$ — максимум берется по отрезку между наименьшим и наибольшим из $x_0, x_1, ..., x_n$.

2. Апостериорная оценка для первой формулы Ньютона (при использовании k из n узлов интерполяции):

$$R_k(x) = h^{k+1} \frac{q(q-1)...(q-k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi). \tag{23}$$

3. Апостериорная оценка для второй формулы Ньютона:

$$R_k(x) = h^{k+1} \frac{q(q+1)...(q+k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi). \tag{24}$$

Сравнение формул Лагранжа и Ньютона

1. Формула Лагранжа:
   - в каждом слагаемом множитель $l_k(x)$ зависит от выбора узлов x_i и точки x, и не зависит от $f(x)$;
   - сомножители $f(x_i)$ позволяют учесть влияние на $P_n(x)$ свойств функции.

   "Разделенность"влияния выбора узлов и свойств функции полезна при изучении сходимости $P_n(x)$ к $f(x)$ при $n \to \infty$.
2. Формула Ньютона (для сетки с произвольным шагом):
   - разделенные разности сложно зависят от расположения узлов x_i и свойств функции $f(x)$ — менее удобно для теоретических исследований;
   - более полезна с вычислительной точки зрения — можно подобрать используемое количество узлов для получения заданной точности;
   - слагаемые располагаются в порядке убывания — можно судить о точности результата (оставляют те слагаемые, которые больше допустимой погрешности).

Тригонометрическая интерполяция

Разложение периодической функции (с периодом 2π) в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{25}$$

где a_0, a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \tag{26}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \tag{27}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \tag{28}$$

Гармонический анализ — разложение функции в ряд Фурье. Ограничившись конечным числом членов ряда получим **приближение функции тригонометрическим многочленом**.

Тригонометрическая интерполяция

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[0, 2\pi]$ таблицей значений $f(x_i)$ в равноотстоящих узлах

$$x_i = \frac{2\pi(i-1)}{2n+1}, \quad i = 1, 2, ..., 2n+1. \tag{29}$$

Задача тригонометрической интерполяции

Построить тригонометрический интерполяционный многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = f(x_i)$.

Тригонометрическая интерполяция

Решением поставленной задачи является тригонометрический многочлен

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{30}$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i), \tag{31}$$

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i) \cos\left(\frac{2\pi k}{2n+1} i\right), \tag{32}$$

$$b_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i) \sin\left(\frac{2\pi k}{2n+1} i\right). \tag{33}$$

С ростом степени n многочлена $P_n(x)$ аппроксимирует $f(x)$ с возрастающей точностью:

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P_n(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{34}$$

Сплайн-интерполяция

Определение

Интерполяция, использующая сразу все $(n+1)$ узлов таблицы 1, называется глобальной.

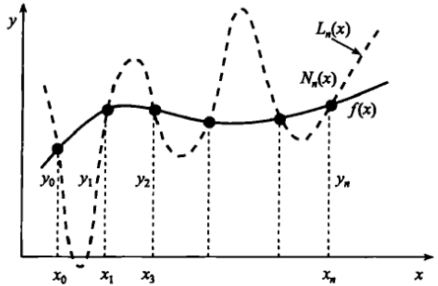

Рис. 3: **Неустойчивость глобальной многочленной интерполяции при $n \geq 7$**

Определение

Интерполяция по нескольким узлам таблицы 1 называется локальной: линейной по каждым двум узлам с помощью интерполяционных многочленов первой степени, квадратичной по каждым трем узлам и т.д.

Локальная многочленная интерполяция с помощью полиномов Ньютона или Лагранжа обладает недостатком: интерполирующая функция в узлах стыковки многочлена имеет непрерывность только нулевого порядка.

Сплайн-интерполяция

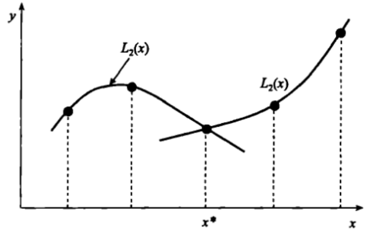

Рис. 4: Локальная интерполяция квадратичными многочленами Лагранжа. В узлах стыковки x^* непрерывность лишь нулевого порядка

Сплайн-интерполяция требует непрерывности в узлах стыковки локальных многочленов по производным соответственно порядка один, два и т.д.

Определение

Сплайн $S(x)$ степени m дефекта r — это $(m - r)$ раз непрерывно дифференцируемая функция, которая на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, представляет собой многочлен степени m.

Наиболее распространенными являются сплайны 3-й степени дефекта один (кубические), т.е. дважды непрерывно дифференцируемый многочлен 3-й степени на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$.

Определение

Сплайны, удовлетворяющие условию интерполяции (1) называются интерполяционными.

Сплайн-интерполяция

Достоинство интерполяционного кубического сплайна $S(x)$

Кубический сплайн $S(x)$ обладает минимумом интегральной кривизны на всем заданном отрезке $[a, b]$ по сравнению с другими интерполяционными функциями $\overline{f}(x)$:

Рис. 5: Тяжелая упругая нить, геометрические представляющая собой кубические сплайны дефекта один

Кубический сплайн $S(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеет четыре неизвестных коэффициента. Число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ равно n. Таким образом, для вывода сплайна требуется определить $4 \times n$ коэффициентов. В узлах интерполяции имеются следующие условия:

- условие интерполяции (1): $S(x_i) = y_i, i = 0, 2, \ldots, n;$
- непрерывность сплайнов: $S(x_i - 0) = S(x_i + 0), i = 1, 2, \ldots, n - 1;$
- непрерывность производных 1-го порядка: $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), i = 1, 2, \ldots, n - 1;$
- непрерывность производных 2-го порядка: $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), i = 1, 2, \ldots, n - 1.$

Таким образом, всего имеется $(n + 1) + 3(n - 1) = 4n - 2$ условий.

В качестве двух недостающих условий задают значения производных 1-го или 2-го порядка в узлах интерполяции x_0 и x_n.

Сплайн-интерполяция

Будем использовать значения $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. При этом сплайн называется естественным. Обозначим: $S''(x) = q(x)$. На отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ рассмотрим поведение функции $q(x)$:

- Поскольку сплайн - это многочлен 3-й степени, то на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ 2-я производная будет линейна и может быть найдена с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа 1-й степени $L_1(x)$:

$$q(x) = q_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + q_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \tag{35}$$

- Аналогично, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$q(x) = q_i\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + q_i\frac{x - x_i}{h_{i+1}}. \tag{36}$$

- Подставляя в первое выражение вместо x значение $x_i - 0$, а во второе вместо x значение $x_i + 0$ получим:

$$q(x_i - 0) = q(x_i + 0) = q_i, \tag{37}$$

значит условие непрерывности производных 2-го порядка выполняется.

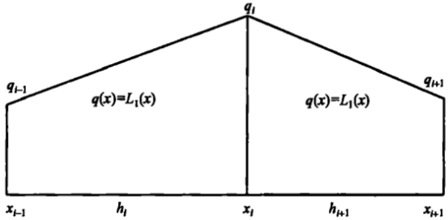

Рис. 6: Поведение функций $S''(x)$ на элементарных отрезках

Сплайн-интерполяция

- Проинтегрируем дважды выражение (35):

$$S(x) = q_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + q_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_1 x + C_2. \tag{38}$$

- Константы C_1 и C_2 найдем из удовлетворения значения сплайна (38) условиям интерполяции:

$$\begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1} = q_{i-1}\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6h_i} + q_i\frac{(x_{i-1} - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_1 x_{i-1} + C_2, \\ S(x_i) = y_i = q_{i-1}\frac{(x_i - x_i)^3}{6h_i} + q_i\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_1 x_i + C_2. \end{cases} \tag{39}$$

- Решая эту СЛАУ относительно C_1 и C_2, получаем **итоговое** выражение кубического сплайна:

$$S(x) = q_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + q_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - q_{i-1}\frac{h_i}{6}\right) \times$$
$$\times (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - q_i\frac{h_i}{6}\right) \times (x - x_{i-1}), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{40}$$

- В сплайне (40) требуется найти узловые значения для вторых производных q_i. Будем искать их из условий непрерывности первых производных в узлах x_i. Для нахождения первой производной $S'(x_i + 0)$ запишем (40) для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S(x) = q_{i-1}\frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + q_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + \left(\frac{y_i}{h_{i+1}} - q_i\frac{h_{i+1}}{6}\right) \times$$
$$\times (x_{i+1} - x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} - q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}\right) \times (x - x_i), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{41}$$

Сплайн-интерполяция

- Вычислим первые производные от (40) и (41):

$$S'(x_i - 0) = q_{i-1}\frac{h_i}{6} + q_i\frac{h_i}{3} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},$$

$$S'(x_i + 0) = -q_i\frac{h_{i+1}}{3} - q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}},$$

- Приравниваем эти выражения в соответствии с условиями непрерывности первых производных в узлах интерполяции x_i:

$$q_{i-1}\frac{h_i}{6} + q_i\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots n-1; \tag{42}$$

$$q_0 = q_n = 0. \tag{43}$$

- Система (42) с заданными краевыми условиями (43) является СЛАУ относительно $q_i = S''(x_i)$, имеет трехдиагональную матрицу и, следовательно, ее можно решить методом прогонки.
- Подставляя найденные значения $q_i, i = 0, 1, \ldots n$ в выражение сплайна (40), получим кубические сплайны дефекта один на каждом отрезке интерполяции $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$.
- Таким образом, определяющими выражениями для нахождения кубических сплайнов дефекта один являются выражения (40), (42) и (43).

Сплайн-интерполяция

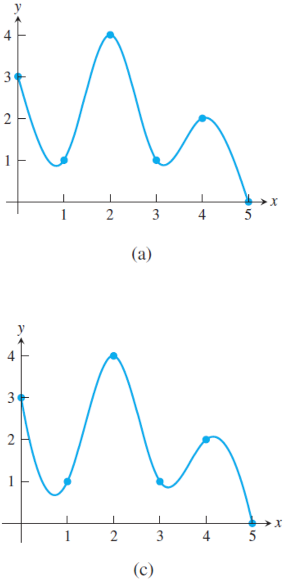

Рис. 7: Кубические сплайны при различном задании граничных условий [2]

Сплайн-интерполяция

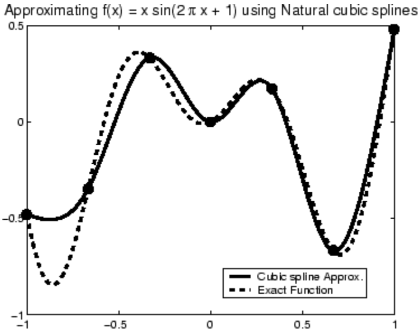

Рис. 8: Естественный сплайн, аппроксимирующий функцию $f(x) = x\sin(2\pi x + 1)$ [3]

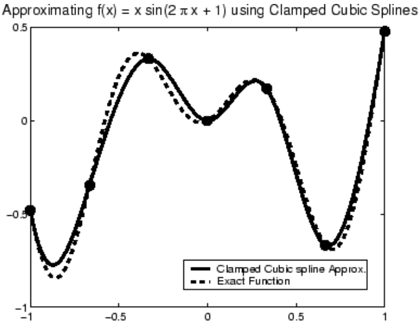

Рис. 9: Стягивающий сплайн, аппроксимирующий функцию $f(x) = x\sin(2\pi x + 1)$ [3]

Использованная литература

1. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с. - раздел 3.2.5.
2. Sauer, Timothy. Numerical analysis. 2nd ed. Boston: Pearson, 646 pp, 2012. Print. - раздел 3.4.
3. `http://www.physics.arizona.edu/~restrepo/475A/Notes/sourcea-/node35.htm`