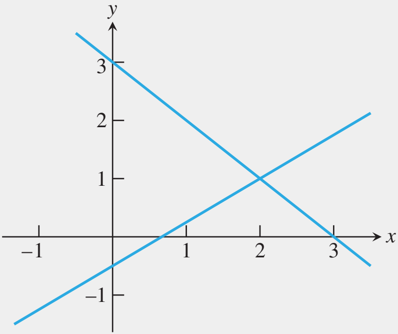
Численные методы решения систем уравнений

Вычислительная математика. Лекции 3 и 4. v.2

Исупов К.С.

October 26, 2019



Введение

Системы линейных алгебраических уравнений

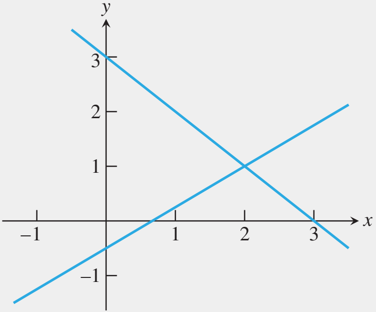
Определение

Система линейных алгебраических уравнений (линейная система, СЛАУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является линейным — алгебраическим уравнением первой степени.

Пример:

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ 3x - 4y &= 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Каждое уравнение в (1) соответствует линии на графике. Точка пересечения — решение.



Способы записи линейных систем

1. Классическая форма:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

2. Табличная форма:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix}$$

Практическое использование

- Системы линейных и нелинейных уравнений возникают во множестве областей: строительная механика (упруго-пластические задачи), вычислительная динамика, химия, экономика и т.д.
- Основные трудности — решение систем большого порядка.
- Главный практический вопрос — уменьшение числа арифметических и логических операций, которое сильно зависит от метода решения:
  1. метод Крамера требует $n^2 n!$ умножений и делений; при $n = 20 : 10^{21}$ операций;
  2. метод Гаусса требует $\frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 1)$ умножений и делений; при $n = 20 : 3270$ операций.

Методы решения линейных систем

- Точные (прямые), пригодны для $n < 200$
- Итерационные, пригодны для $n \approx 10^3 \dots 10^6$
- Вероятностные, пригодны для очень больших n

Метод подстановки

Метод подстановки

Описание

При решении системы линейных уравнений методом подстановки сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую (другие, если неизвестных больше двух). Полученное выражение подставляют в другие уравнения, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной. Затем находят соответствующее значение второй (и третьей, если она есть) переменной.

Метод подстановки

Пример

Решить систему линейных уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x - 4y & = & 2 \end{cases}$$

1. Выразим из первого уравнения y через x: $y = 3 - x$
2. Подставив это во второе уравнение получим равносильную систему:
$$\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x - 4(3 - x) & = & 2 \end{cases}$$
3. Из второго уравнения находим $x = 2$.
4. Вычисляем $y = 3 - 2 = 1$.

Метод Гаусса

Базовая схема (Naive Gaussian elimination)

Алгоритм заключается в последовательном исключении переменных из каждого уравнения до тех пор, пока в каждом уравнении не останется только по одной переменной.

Для реализации алгоритма к линейной системе применяются операции, которые дают эквивалентную систему, то есть такую, которая имеет те же решения. Такие операции называются эквивалентными преобразованиями.

Эквивалентные преобразования

- Обмен уравнениями системы.
- Прибавление или вычитание кратного одного уравнения из другого.
- Умножение уравнения на ненулевую константу.

Базовая схема (Naive Gaussian elimination)

Пример

Решить систему линейных уравнений методом исключений:

$$\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x - 4y & = & 2 \end{cases}$$

1. Вычтем 3 раза первое уравнение из второго, т.е. $3 \cdot [x + y = 3]$:

$$\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 0 - 7y & = & -7 \end{cases}$$

2. Начиная с последнего уравнения выполняем «обратный ход» для получения полного решения:

$$-7y = -7 \quad \to \quad y = 1.$$

$$x + y = 3 \quad \to \quad x + 1 = 3 \quad \to \quad x = 2.$$

Алгоритм последовательного исключения неизвестных

Рассматриваем линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & a_{45} \end{cases} \tag{2}$$

Представим эту систему в табличной форме (обозначив b_i на a_{i5}):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Базовая схема (Naive Gaussian elimination)

1. Выберем ведущий коэффициент a_{11} (должен быть ненулевым).
2. Вычислим множители $m_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ для всех строк, начиная со второй:

$$\begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftrightarrow \quad m_2 = -a_{21}/a_{11} \\ \leftrightarrow \quad m_3 = -a_{31}/a_{11} \\ \leftrightarrow \quad m_4 = -a_{41}/a_{11} \end{matrix}$$

3. К каждой i-й строке, начиная со второй, прибавим поэлементно первую строку, умножив на m_i:

$$\begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \color{green}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \color{green}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \color{green}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \quad [a_{11}m_2 \quad a_{12}m_2 \quad a_{13}m_2 \quad a_{14}m_2 \quad a_{15}m_2] \\ + \quad [a_{11}m_3 \quad a_{12}m_3 \quad a_{13}m_3 \quad a_{14}m_3 \quad a_{15}m_3] \\ + \quad [a_{11}m_4 \quad a_{12}m_4 \quad a_{13}m_4 \quad a_{14}m_4 \quad a_{15}m_4] \end{matrix}$$

4. В результате получим матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} \end{bmatrix}$$

5. Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец матрицы (запоминаем первую строку, она пригодится для обратного хода!):

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} & \cancel{a_{15}} \\ \cancel{0} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ \cancel{0} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ \cancel{0} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Базовая схема (Naive Gaussian elimination)

6. Выберем ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)}$ (должен быть ненулевым).
7. Вычислим множители $m_i = -a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ для всех строк, начиная со второй:

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftrightarrow \quad m_3 = -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \\ \leftrightarrow \quad m_4 = -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \end{matrix}$$

8. К каждой i-й строке, начиная со второй, прибавим поэлементно первую строку, умножив на m_i:

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \quad [a_{22}^{(1)} m_3 \quad a_{23}^{(1)} m_3 \quad a_{24}^{(1)} m_3 \quad a_{25}^{(1)} m_3] \\ + \quad [a_{22}^{(1)} m_4 \quad a_{23}^{(1)} m_4 \quad a_{24}^{(1)} m_4 \quad a_{25}^{(1)} m_4] \end{matrix}$$

9. В результате получим матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix}$$

10. Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец матрицы (запоминаем первую строку, она пригодится для обратного хода!):

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{22}^{(1)}} & \cancel{a_{23}^{(1)}} & \cancel{a_{24}^{(1)}} & \cancel{a_{25}^{(1)}} \\ \cancel{0} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ \cancel{0} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix}$$

11. Выберем ведущий коэффициент $a_{33}^{(2)}$ (должен быть ненулевым).

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix}$$

12. Вычислим множитель m_4:

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad m_4 = -a_{43}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$$

13. К последней строке прибавим первую строку, умножив на m_4:

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix} + \quad \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} m_4 & a_{34}^{(2)} m_4 & a_{35}^{(2)} m_4 \end{bmatrix}$$

14. В результате получим матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}$$

15. Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец матрицы (запоминаем первую строку, она пригодится для обратного хода!):

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{33}^{(2)}} & \cancel{a_{34}^{(2)}} & \cancel{a_{35}^{(2)}} \\ \cancel{0} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}$$

16. В результате получаем систему первого порядка:

$$\begin{bmatrix} a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

17. Составляем треугольную расширенную матрицу коэффициентов из первых (ведущих) строк, которые исключались на каждой итерации:

$$\begin{bmatrix} & & & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}$$

или в другой форме:

$$\begin{cases} a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = a_{15} \end{cases}$$

18. Последовательно вычисляя все неизвестные, начиная с последнего (обратный ход), получаем решение исходной системы.

Базовая схема (Naive Gaussian elimination)

Этапы решения

1. Прямой ход — приведение системы к треугольному виду.
2. Обратный ход — определение неизвестных в обратном порядке.

Вычислительная сложность

$$N = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2) + n(n-1) \sim \mathbf{O}(\mathbf{n}^3) \tag{4}$$

Недостатки

- Если ведущий коэффициент = 0, решение не будет получено.
- Если ведущий коэффициент мал, могут возникать большие ошибки округления.

Поиск опорного элемента (pivoting)

Определение

Процесс выбора опорного элемента заключается в том, что производится перестановка строк и/или столбцов матрицы, чтобы в нужном элементе a_{ii} оказалось ненулевое число.

Способы поиска опорного элемента

- Partial pivoting — обмен только строк
- Full pivoting — обмен строк и столбцов

Перестановка строк значительно проще реализуется на компьютере, чем перестановка столбцов: при обмене местами двух каких-то столбцов надо запомнить, что эти две переменных обменялись местами.

Схема с выбором главного элемента (partial pivoting)

Правило

На каждой итерации следует переставлять строки так, чтобы в качестве опорного элемента выбрать наибольший по модулю элемент, причём производить поиск опорного элемента и обмен с ним следует всегда, а не только когда это необходимо (т.е. не только тогда, когда $a_{ii} = 0$).

Итерационные методы решения систем уравнений

Итерационные методы

Итерационные методы не позволяют вычислить точные решения, но дают последовательность приближенных значений корней системы уравнений, сходящуюся к точному решению.

Преимущества по сравнению с прямыми методами

1. Если итераций меньше n, то получается выигрыш во времени.
2. Требуется меньшая точность промежуточных вычислений.
3. Устойчивы к просчетам в промежуточных вычислениях (самоисправляемы).
4. Выгодны при решении систем с разреженными матрицами коэффициентов у которых большая часть элементов = 0.
5. Достаточно просто реализуются на ЭВМ.

Итерационные методы

Представители класса

1. Метод простых итераций.
2. Метод Зейделя.
3. Метод Ньютона.

Метод простых итераций

Метод простых итераций

Рассмотрим линейную систему с неособенной матрицей коэффициентов:

$$AX = B \tag{5}$$

Приведем систему к каноническому виду (в предположении, что все диагональные коэффициенты ненулевые):

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \dots + \alpha_{1n} x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \dots + \alpha_{2n} x_n \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \dots + \alpha_{3n} x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \alpha_{n3} x_3 + \dots + \alpha_{nn} x_n \end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$, $\beta i = b_i/a_{ii}$

или в матричной форме:

$$X = \beta + \alpha X \tag{7}$$

Метод простых итераций

Если известно начальное приближение:

$$X^{(0)} = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}, \tag{8}$$

то последующие приближения определяются по формуле

$$X^{k+1} = \beta + \alpha X^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Если последовательность приближений имеет предел, то он и будет решением системы уравнений:

$$\lim_{k \to \inf} X^{(k)} = \beta + \alpha X.$$

Выбор начального приближения

Если никаких сведений о решении нет, то за начальное приближение берут столбец свободных членов системы (β).

Метод простых итераций

Сходимость итерационного процесса зависит только от свойств матрицы коэффициентов, но не от начального приближения $X^{(0)}$.

Нормы матрицы коэффициентов

1. $\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}|$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы *по строкам*
2. $\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}|$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы *по столбцам*
3. $\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}^2|}$ — евклидова норма

Теорема 1 (достаточные условия сходимости для $X = \beta + \alpha X$)

Чтобы последовательность приближений $X^{(k)}$ сходилась, достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы α была меньше 1:

$$\|\alpha\|_1 < 1 \quad \text{или} \quad \|\alpha\|_2 < 1 \quad \text{или} \quad \|\alpha\|_3 < 1.$$

Если система *не приведена* к каноническому виду (то есть, представлена в виде $AX = B$), то сходимость определяется следующим образом:

Теорема 2 (достаточные условия сходимости для $AX = B$)

Чтобы последовательность приближений $X^{(k)}$ сходилась, достаточно, чтобы выполнялось условие диагонального преобладания:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

то есть модули диагональных коэффициентов должны быть больше суммы модулей остальных коэффициентов *в каждой строке матрицы A*.

Метод простых итераций

Теорема 3 (оценка погрешности)

Если одна из норм матрицы α меньше 1, то справедлива следующая оценка погрешности в методе простых итераций:

$$\|X_T - X^{(k)}\| \leq \|\alpha\|^k \|X^{(0)}\| - \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \|\alpha\|^k \|\beta\|, \tag{10}$$

где

- X_T — точное решение
- $\|\alpha\|$ — одна из норм матрицы α
- $\|\beta\|$ — норма вектора β
- k — число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

Метод Зейделя

Метод Зейделя

Суть метода

Предлагается немедленно вводить в вычисления приближенные значения корней, полученные на текущей итерации, т.е. для вычисления $x_i^{(k+1)}$ использовать найденные значения $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$

Пусть найден вектор k-го приближения $X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$, тогда $X^{(k+1)}$ находят следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k+1)} + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{3j} x_j^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

Оценка погрешности

Погрешность k-го приближения определяется следующим образом:

$$\|X_T - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \tag{11}$$

Сравнение с методом простых итераций

- **Преимущества** метода Зейделя: часто (но не всегда) метод дает лучшую сходимость (требуется меньшее число итераций)
- **Недостатки** метода Зейделя: более высокая сложность каждой итерации, не распараллеливается.

Метод Ньютона для решения нелинейных систем

Метод Ньютона

Пусть задана система двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

и известно приближенное решение (x_0, y_0).

Точное решение можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x \\ y = y_0 + \Delta y \end{cases} \tag{13}$$

где Δx и Δy — невязки приближенного и точного решений.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} F'_{1x}(x_0, y_0) = a_{11} & F'_{1y}(x_0, y_0) = a_{12} & -F_1(x_0, y_0) = a_{13} \\ F'_{2x}(x_0, y_0) = a_{21} & F'_{2y}(x_0, y_0) = a_{22} & -F_2(x_0, y_0) = a_{23} \end{cases}$$

Получим систему линейных уравнений относительно невязок:

$$\begin{cases} a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y = a_{13} \\ a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y = a_{23} \end{cases}$$

Решение этой линейной системы позволяет найти невязки и вычислить приближенные значения корней, которые принимаются за новое начальное приближение.

Условия окончания итераций:

$$\max(\Delta x^2, \Delta y^2) < \varepsilon. \tag{14}$$

end