עיבוד מידע במערכות אוטונומיות

ד"ר אבישי כרמי

סמסטר ב' 2023

ירין הוידלר

ירין הויצלר

שיעור 1

נושאי השיעור:

1. מבוא
2. דוגמאות
3. סיכום

1. יותר אקראיות ← יותר מידע

00 11 00 1100 ...

1 0 11 000 11 0 1 ...

2. כמה ביטים צריך כדי לשמור "ייצוג" של המספרים: $0, 1, \dots, \underline{N-1}$ [Bit = 0,1]

$\log_2 N$

מה שצריך לייצג

כמה אפשרויות לייצג

3. נניח, כי יש n כדורים שחורים/לבנים, מתוכם m כדורים שחורים.

א. כמה אפשרויות קיימות לסדרם, כאשר כדורים מאותו הצבע נחשבים זהים?

ב. כמה ביטים צריך כדי לקודד את כל האפשרויות המתקבלות?

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{א}$$

$$\text{ב} \quad \log_2 \binom{n}{m} = \log_2 \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

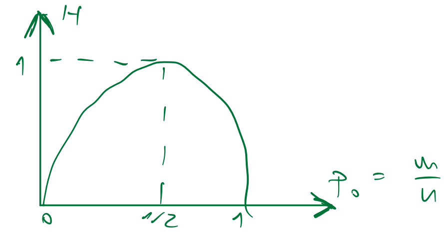
$n >> 1$: Stirling approx $\Rightarrow n! \approx n^n$

$$\approx \log_2 \frac{n^m \cdot n^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} = \log_2 \left[\left(\frac{n}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m} \right]$$

$$= -m \cdot \log_2\left(\frac{m}{n}\right) - (n-m) \cdot \log_2\left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

$$P_0 = \frac{m}{n}$$

$$\approx n \cdot H(P_0)$$



$$H(P_0) = -P_0 \cdot \log P_0 - (1-P_0) \cdot \log P_0$$ ← אנטרופיה של אינפורמציה

$$= n\left[-\frac{m}{n} \cdot \log\left(\frac{m}{n}\right) - \left(1-\frac{m}{n}\right) \cdot \log\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]$$

4. מטילים n מטבעות, שסיכוי לעץ הוא P וסיכוי לצאת פלי $1-P$.
נניח כי $n \gg 1$. כמה ביטים דרושים כדי לקודד את אפשרויות ההטלה.

מספר הראשים $n \cdot P$ מספר הזנבות $n \cdot (1-P)$

$$P' = P(\text{Typical sequence}) = P^{nP} \cdot (1-P)^{n(1-P)}$$

$$P' = 2^{\log P'} = 2^{nP\log P + n(1-P)\log(1-P)} = 2^{-nH(P)}$$

$$\frac{1}{P'} = 2^{nH(P)}$$ עפ"י הסדרות הטיפוסיות:

$$\text{compression ratio}: \frac{\cancel{n} \cdot H(P)}{\cancel{n}} = H(P)$$

5. אינפורמציה במשתנה אקראי עבור פרמטר

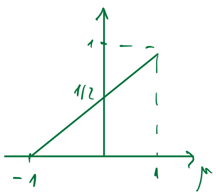
Fisher information:

$X(H)=1 \qquad P(x=1)=P(H)$

$X(T)=-1 \qquad P(x=-1)=P(T)$

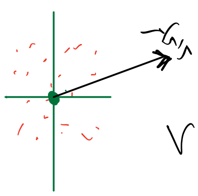
תוחלת (ממוצע משוקלל) $\mu = E\{x\} = P(x=1)\cdot 1 + P(x=-1)\cdot(-1) \longrightarrow$

$\longrightarrow P(x=1) = \frac{1}{2}(1+\mu) \; ; \; P(x=-1) = \frac{1}{2}(1-\mu)$



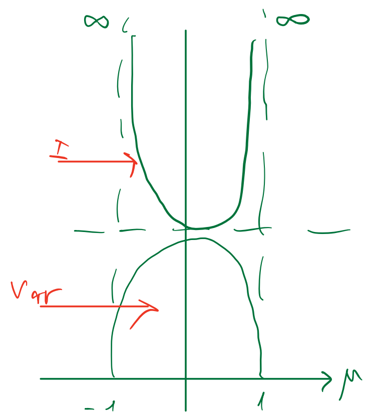
$= P(x=1) - (1-P(x=1)) = 2P(x=1) - 1$

$I_\mu(x) = \frac{1}{var(x)}$ ← שונות (מרחק ממוצע)



$var(x) = E\{x^2\} - E\{x\}^2 = 1-\mu^2$

פונק' המידע $I = -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log P(x|\mu)\right\}$

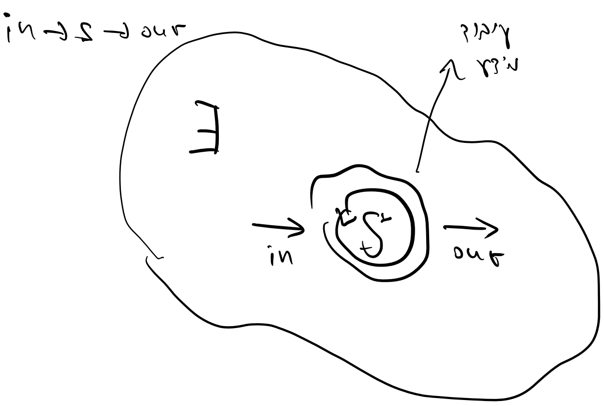


6. עיבוד מידע

טרנספורמציה של מידע שנכנס

$out = f(in)$ (מניפולציה)

דוגמא: $in \to sensors$ — במערכות אוטונומיות
$out \to actuators$



מושג ההסתברות
של מה שיוצא בהינתן מה שנכנס $P(out\,|\,in) = \int_S P(out|s)\cdot P(s|in)$

7. חוק שימור מידע: $I_{in} \geq I_{out}$ כמות מידע

קיים משתנה דיסקרטי X - כניסה לערוץ מידע בינארי

קיים משתנה דיסקרטי y - יציאה מערוץ מידע בינארי

$\mu = E\{X\}$. כמה אינפורמציה (לפי פישר) קיים ב-y לגבי μ?

כמות האינפורמציה ב-x לגבי μ היא: $I_x = \frac{1}{1-\mu^2}$.

$I_y = ?$

מוגדר כערך: $I_y = -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \cdot \log P(y|\mu)\right\}$

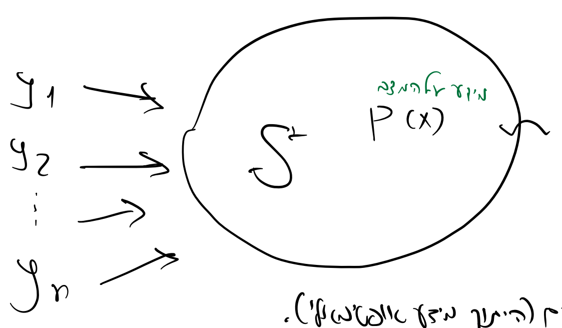
$$\begin{cases} P(x = y|x) = \frac{1}{2}(1+c) \\ P(x \neq y|x) = \frac{1}{2}(1-c) \end{cases}$$

$$\rightarrow P(y|x) = \frac{1}{2}(1+xyc)$$

$$P(y=1|\mu) = P(y=1|x=1)\cdot P(x=1|\mu) + P(y=1|x=-1)\cdot P(x=-1|\mu)$$

$$= \frac{1}{2}(1+c)\cdot\frac{1}{2}(1+\mu) + \frac{1}{2}(1-c)\cdot\frac{1}{2}(1-\mu) = \frac{1}{2}(1+c\mu)$$

8. היתוך מידע



יש לשערך את מצב המערכת

על סמך המדידות השונות:

שערוך אופטימלי במובן שסו"ם (היתוך מידע אופטימלי).

$$P(x \mid \underbrace{y_1, \dots, y_z}_{in}) \cong P(out \mid in)$$

x ↑ out

זמן דיסקרטי

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$ משוואת תהליך:

משתני מצב או מצב הרובוט

u_k ↑ כניסות ידועות

w_k ↑ הפרעות רעשים אי-ודאות

$$y_{k+1} = h(x_{k+1}, v_{k+1})$$ משוואת מדידה:

v_{k+1} ↑ אי-ודאות במדידה

ידוע: y_k, u_k ← רוצים לשערך את x_k.

estimation (שערוך) $\quad P(x_k \mid y_1, \dots, y_k)$

Prediction (חיזוי) $\quad P(x_k \mid y_1, \dots, y_{k-T})$

Smoothing (החלקה) $\quad P(x_{k-T} \mid y_1, \dots, y_k)$

9. משערך אופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת הינו מסנן קלמן:

$P(x_k \mid y_1, \dots, y_k)$

ניתן את התוחלת והשונות. במקרה הלינארי -

$E\{x_k \mid y_1, \dots, y_n\}$ $\quad$ $Var(\tilde{x}_k \mid y_1, \dots, y_n)$

במקרה הלא לינארי משתמשים במשערכים לא לינאריים:

EKF, UKF, Sequential monte carlo.

10. מבנה הקורס:

מבוא להסתברות	2
מבוא לשערוך	2
משערך מינימום ריבועים (LS)	2
משפט יסודי של תורת השערוך	
שערוך מצב לינארי (קלמן)	
שערוך מצב לא לינארי:	
EKF, UKF	1
מסנני חלקיקים	2
שאלות "ישומיות":	
כיוונון מסננים, עקביות	1
היתוך מידע ללא מידע על קורלציות	1
אינפורמציה קוונטית ?	1

ירין קויצלר

שיעור 2

<u>נושאי השיעור:</u>

1. 43 נוסחאות בהסתברות
2. מבוא להסתברות
3. ניסויים בת״ס
4. הסתברות מותנה
5. נוסחת ההסתברות השלמה
6. ניסויי ברנולי

נוסחאות עזר – מבוא להסתברות

חוקי הפילוג: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

חוקי דה מורגן: $(\bigcup_i \overline{A_i}) = \overline{(\bigcap_i A_i)}$ $\quad (\bigcap_i \overline{A_i}) = \overline{(\bigcup_i A_i)}$

A, B **מאורעות זרים** אם $A\cap B=\phi$,

סדרת מאורעות תקרא **זרים בזוגות** אם **כל** זוג מאורעות מתוכה הם זרים.

חוקי ההסתברות:

$$P\{A\}=P\{A\cap B\}+P\{A\cap \overline{B}\}$$

$$P\{\overline{A}\}=1-P\{A\}$$

$$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$$

אם: $\{A_i\}_{i=1}^n$ סדרת מאורעות **זרים בזוגות** אז: $P\{\bigcup_{i=1}^n Ai\}=\sum_{i=1}^n P\{Ai\}$

נוסחת **ההכלה וההוצאה** (inclusion exclusion):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\&-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

כללים קומבינטוריים:

כלל המכפלה: אם ניסוי ניתן להצגה כמתבצע ב n שלבים, ובשלב k יש n_k תוצאות אפשריות וסימטריות, ואם מרחב המדגם מוגדר כוקטורים באורך n כאשר הרכיב ה k שלו הוא תוצאת השלב ה k, אז במרחב המדגם יש $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות סימטריות.

מספר האפשרויות לדגימה של k מתוך n איברים:

	התחשבות בסדר הדגימה	ללא התחשבות בסדר
עם החזרה	n^k	(מרחב מדגם לא סימטרי)
ללא החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P\{A/B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$, **נוסחת הכפל**: $P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B/A\}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

אם: $\{B_i\}_{i=1}^n$ חלוקה של מרחב המדגם, אז: $P\{A\}=\sum_{i=1}^n P\{A/Bi\}P\{Bi\}$

נוסחת בייס: $P\{B_k/A\}=\frac{P\{A/B_k\}P\{B_k\}}{P\{A\}}$ כאשר: $P(A)=\sum_{i=1}^n P\{A/B_i\}P\{B_i\}$

אי תלות: A ו B הם מאורעות **בלתי תלויים** אם מתקיים: $P\{A/B\}=P(A)$ או $P\{A\cap B\}=P(A)P(B)$

קבוצת מאורעות הם בלתי תלויים אם כל קבוצה חלקית שלהם מקיימת שהסתברות החיתוך שלהם שווה למכפלת ההסתברויות.

סדרת ניסויי ברנולי: סדרת ניסויים זהים ובלתי תלויים, כשבכל ניסוי שתי תוצאות אפשריות: הצלחה וכשלון, וכאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

משתנים מקריים:

משתנה מקרי בדיד: פונקצית ההסתברות: $P(X=k)$ פונקצית ההתפלגות המצטברת: $F(k)=P(X\le k)$

התוחלת של X: $E[X]=\sum_k k\cdot P\{X=k\}$; התוחלת של פונקציה של X, g(X) היא: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P\{X=k\}$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בעל ההסתברות הגבוהה ביותר, **החציון** הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (בדידים) מיוחדים:

אחיד (בדיד): X~U(N), מתאר משתנה המקבל את הערכים: 1,2,…,N בהסתברויות שוות.

עבור משתנה זה: $P\{X=k\}=\frac{1}{N}\quad k=1,2,...,N\ ;\quad E[X]=\frac{N+1}{2}\ ;\quad V[X]=\frac{N^2-1}{12}$

בינומי: $X\sim B(n,p)$, מתאר את מספר **ההצלחות** ב- *n* ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה: $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\quad k=0,1,...,n\ ;\quad E[X]=np\ ;\quad V[X]=npq$

גיאומטרי: $X\sim G(p)$, מתאר את מספר הניסויים **עד** להצלחה (כולל) בסדרת ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה:

$$P(X=k)=pq^{k-1}\quad k=1,2,...\ ;\quad P(X\le k)=1-q^k\quad k=1,2,...\ ;\quad E[X]=\frac{1}{p};\quad V[X]=\frac{q}{p^2}$$

היפרגיאומטרי: $X\sim H(N,R,n)$ מתאר את מספר האיברים המיוחדים שיתקבלו בבחירת *n* איברים ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל *N* שבה *R* איברים מיוחדים.

עבור משתנה זה:

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,2,...n\ ;\quad E(X)=n\frac{R}{N}\ ;\quad V(X)=n\frac{R}{N}\frac{(N-R)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

פואסוני: $X\sim Pois(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור מספר אירועים בתחום מוגדר.

עבור משתנה זה: $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad k=0,1,2,...\ ;\quad E(X)=V(X)=\lambda$

משתנה מקרי רציף: פונקצית הצפיפות: $f(x)$, פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=P\{X\le t\}=\int_{x=-\infty}^{t}f(x)dx\ .$$

התוחלת של X: $E[X]=\int xf(x)dx$; **התוחלת של פונקציה של X**, g(X) היא: $E[g(X)]=\int g(x)f(x)dx$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בו הצפיפות היא מקסימלית, החציון הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (רציפים) מיוחדים:

אחיד (רציף): $X \sim U(a,b)$ מתאר משתנה המקבל ערכים בין a ל- b כך שההסתברות לערך בקטע פרופורציונית לאורך הקטע.

עבור משתנה זה: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$; $\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}$; $\mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

מעריכי (אקספוננציאלי): $\mathrm{X} \sim \mathrm{ezp}(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases}$; $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda}$; $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

נורמלי: $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty\le x\le\infty$; $\mathrm{E}(X)=\mu$; $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$

חישוב הסתברויות עבור משתנה זה בעזרת טבלת ההתפלגות המצטברת של המשתנה הסטנדרטי

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, והחישוב מתבצע על ידי: $P\{X\le t\}=P\{Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$,

את הערך $\Phi(t)$ קוראים בטבלה, הוא מקיים: $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

משתנה דו ממדי בדיד: פונקצית ההסתברות המשותפת: $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{X,Y}(x_i,y_j)$

פונקצית **ההסתברות השולית** של X: $P_X(k)=P\{X=k\}=\sum_j P\{X=k,Y=j\}$

פונקצית **ההסתברות המותנית** של X בהינתן Y=j: $P_{X/Y}(k/j)=P\{X=k/Y=j\}=\frac{P\{X=k,Y=j\}}{P\{Y=j\}}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $P_{X,Y}(x_i,y_j)=P_X(x_i)P_Y(y_j)$ לכל הערכים האפשריים i ו-j.

משתנה דו ממדי רציף: פונקצית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y)$

פונקצית **הצפיפות השולית** של X: $f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)dy$

פונקצית **הצפיפות המותנית** של X בהינתן Y=y: $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ **לכל** הערכים האפשריים x,y.

תכונות התוחלת והשונות:

$$E[aX+b]=aE[X]+b \quad ; \quad \mathrm{V}[aX+b]=a^2V[X]$$

$$E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i] \quad ; \quad V[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]+\sum_{i\ne j}^{"n^2-n"}Cov(X_i,X_j)$$

$$\mathrm{Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)} \quad ; \quad \rho\mathrm{(X,Y)}=\frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sigma\mathrm{(X)}\sigma\mathrm{(Y)}}$$

$$\mathrm{Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)} \ ; \quad \mathrm{Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)}$$

סכום מקרי של משתנים מקריים: $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$; $\mathrm{E[S_N]}=E[N]E[X]$; $V[S_N]=E[N]V[X]+V[N]E^2[X]$

נוסחת התוחלת השלמה : $E[X] = \sum_j E(X/Y=j)P\{Y=j\} = \sum_j E(X/B_j)P\{B_j\}$

מדגם מקרי פשוט הוא אוסף של מ"מ בלתי תלויים, לכולם אותה התפלגות.

ממוצע המדגם הוא : $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, והוא מקיים : $V[\overline{X_n}] = \frac{V[X]}{n}$; $E[\overline{X_n}] = E[X]$

אי שוויונים וחוקי גבול:

אי שויון מרקוב : אם X משתנה מקרי אי שלילי ולו תוחלת E[X] אז קיים : $P\{X \geq t\} \leq \frac{E[X]}{t}$.

אי שויון צ'בישב : אם X משתנה שלו תוחלת E[X] ושונות V (X) אז קיים : $P\{|X - E[X]| \geq t\} \leq \frac{V[X]}{t^2}$

(ה)חוק (החלש של) המספרים הגדולים : כאשר n שואף לאינסוף, ממוצע המדגם שואף לתוחלת המשתנה.

משפט הגבול המרכזי : עבור מדגם מקרי פשוט קיים, עבור n מספיק גדול ($n \geq 30$) :

אם X משתנה מקרי עם תוחלת $E(X) = \mu$ ושונות $V(X) = \sigma^2$ אזי :

$$\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

קרוב נורמלי למשתנה בינומי : עבור X משתנה בינומי : $X \sim B(n,p)$

כאשר n מספיק גדול, כך ש : $np > 5$ וגם : $nq > 5$, מתקיים : $X \sim N(np, npq)$

תיקון רציפות : $P\{X < k\} = \Phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$; $P\{X \leq k\} = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

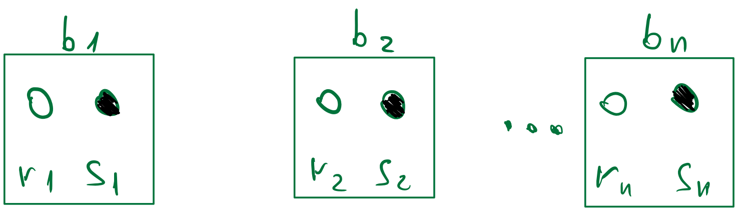
הסתברות

1. ניסוי אקראי: n פעמים, מתוכן n_A פעמים מתרחש מאורע A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_A}{n}\right)$$

שאלה:

נתון



1. מה ההסתברות להוציא כדור שחור כאשר הקופסאות נבחרות באופן אקראי?
2. בהינתן כדור שחור שהוצא מאחת הקופסאות, מה ההסתברות שהוצא מקופסא m?

תשובה:

1. $$P(\text{כדור שחור}) = \sum_{i=1}^{n} P(\text{כדור שחור}\mid b_i)\cdot P(b_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\text{כדור שחור}\mid b_i) \overset{\text{ע״פ ב״ס}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{s_i+r_i}$$

2. $$P(b_m \mid \text{כדור שחור}) = \frac{P(\text{כדור שחור}\mid b_m)\cdot P(b_m)}{P(\text{כדור שחור})} = \frac{\frac{s_m}{s_m+r_m}\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{s_i+r_i}}$$

שאלה ותשובה

מטילים מטבע הוגן n פעמים.

1. מה ההסתברות לקבל n ראשים? 2^{-n}
2. מה ההסתברות לקבל סדרה מסויימת של ראשים וזנבות? 2^{-n}
3. מה ההסתברות לקבל m ראשים בכל סדר שהוא? $\binom{m}{n}2^{-m}$
4. מה ההסתברות לקבל ראש לאחר m זנבות? $1/2$

קבוצה: $A=\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$, $\{m\}\notin A$, $\{i\}\in A$, $\{\emptyset\}$.

למשל -

$A=\{1,2,3\} \longrightarrow$

$\{\emptyset\}$

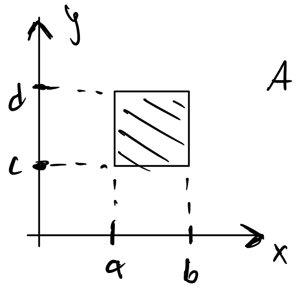
$\{1\},\{2\},\{3\}$

$\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$

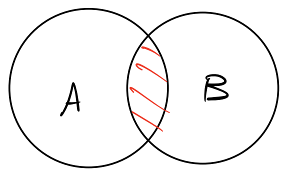
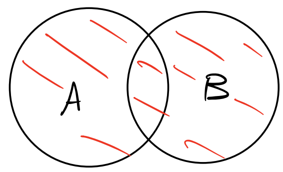
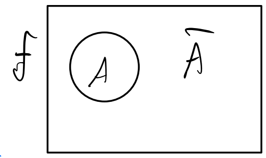
$\{1,2,3\}$

מס' האלמנטים בקבוצה $\rightarrow |A|$

$2^{|A|}$ = מס' תתי הקבוצות



$$A=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$
$$=\{(x,y)\mid a\le x\le b \cap c\le y\le d\}$$

$A \cap B$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ Ω $f = A \cup \bar{A}$

מאורעות זרים $A \cap \bar{A} = \{\phi\}$

חוק הפילוג $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

למשל-

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{even\}$, $\bar{B} = \{odd\}$

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$

ג. מרחב הסתברות

שלישיה: (Ω, F, P)

מרחב מדגם (Ω), שדה מאורעות (F), מידת הסתברות (P)

Ω - מכילה את כל תוצאות הניסוי. למשל:

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ בהטלת קובייה

$\Omega = \{H, T\}$ בהטלת מטבע

F - תת קבוצה של $P = 2^{\Omega}$. למשל:

$F = 2^{\Omega} = 2^{6}$ בהטלת קובייה

$F = 2^{\Omega} = 2^{2}$ בהטלת מטבע

P - אקסיומות:

1. $P(A) \geq 0$ $\qquad$ 2. $P(\Omega) = 1$

3. $A \cap B = \{\phi\} \xrightarrow{\text{אז}} P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

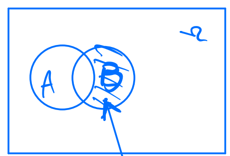
שאלה

$P(A \cup B) = ?$

תשובה

$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

$$\begin{cases} P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \end{cases}$$



$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$

$\bar{A} \cap B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

שאלה

הטלת קוביה -

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$P(i) = 1/6 \ , \ i = 1, \dots, 6$

$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P(i) = 1$

1. מה ההסתברות לקבל 1 או 6 ?
2. מה ההסתברות לקבל 1 ו-6 ?
3. מטילים קוביה פעמיים. מה ההסתברות לקבל סכום = 5 ?

הנחה: ההטלות ב"ת

תשובה

1. $P(\{1\} \cup \{6\}) = P(1) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

2. $P(\{1\} \cap \{6\}) = 0$

3. $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{11, 12, \ldots, 16, 21, \ldots 26, 62, \ldots 66\}$

$P(i_1 \cup j_2) = P_1(i) \cdot P_2(j)$

$A = \left\{ \substack{\text{סכום } 5 \\ i+j=5} \right\} = \{14, 41, 23, 32\} \longrightarrow P(A) = 4/36 = 1/9$

3. <u>ניסויים בלתי תלויים סטטיסטית (בת"ס)</u>

$P[(i_1, \ldots i_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n] = P(i_1 \in \Omega_1) \cdot \ldots \cdot P(i_n \in \Omega_n)$

אוסף הניסויים בת"ס

$F_{1\times 2\times \ldots \times n} = 2^{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n}$

4. <u>הסתברות בשדה אין-סופי</u>

$\Omega = \mathbb{R}$

$F = \left\{ \substack{\text{איחודים/חיתוכים} \\ \text{של מקטעים } [a,b]} \right\}$

מגדירים פונ׳ : $\alpha(x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,dx = 1 \quad , \quad \alpha(x) \geq 0$

$P((-\infty, w]) = \int_{-\infty}^{w} \alpha(x)\,dx$

$$P([w_1, w_2]) = \int_{w_1}^{w_2} \alpha(x)\,dx$$

$$P(x = w_1) = \lim_{w_2 \to w_1} \int_{w_1}^{w_2} \alpha(x)\,dx = 0$$

5. הסתברות מותנה

$$P(A|M) \triangleq \frac{P(A\cap M)}{P(M)}$$

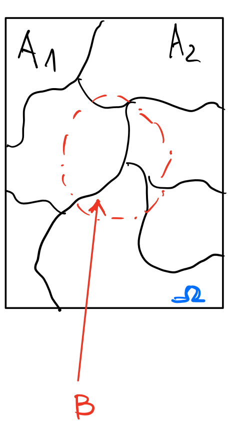
ההסתברות של A בהינתן M (מה הסבירות של A כאשר M קרה?)

לדוגמא

זריקת קוביה - $A=\{2\}$, $M=\{\text{זוגי}\}$

$$P(A|M) = \frac{P(\{2\}\cap\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{P(2)}{P(2,4,6)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

6. נוסחת ההסתברות השלמה/כוללת (Total probability)



$$B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i\cap B)$$

לפי הסתברות מותנה $P(B|A_i)\cdot P(A_i)$

לכן:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$

עפ״י בייס:

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\cdot P(A_j)}$$

ד. ניסויי ברנולי

ההסתברות להצלחה בכל ניסוי הינה p. מבצעים n ניסויים בלת״ם.
מה ההסתברות ל- m הצלחות?

$$P\left(\substack{m \text{ הצלחות} \\ \text{בכל סדר שהוא}}\right)=\binom{n}{m}p^m\cdot(1-p)^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m\cdot(1-p)^{n-m}$$

ירין הויצלר

שיעור 3

נושאי השיעור:

1. המשך לברנולי
2. משתנים אקראיים
3. צפיפויות ופילוגים
4. הסתברות כללית וחוק ב"ס

1. <u>המשך ברנולי</u>

הסתברות להצלחה

מס' הניסיונות

מספר ההצלחות הסביר ביותר: $[n\cdot q]+1$ או $n\cdot q$

ידוע -
$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \quad (1)$$

נפתח -
$$Q(k)\overset{\Delta}{=}\sum_{k=0}^{n} q^{t\cdot k\log(q)}\binom{n}{k}q^k\cdot(1-q)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} q^{(t\cdot\log(q)+1)k}(1-q)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}$$

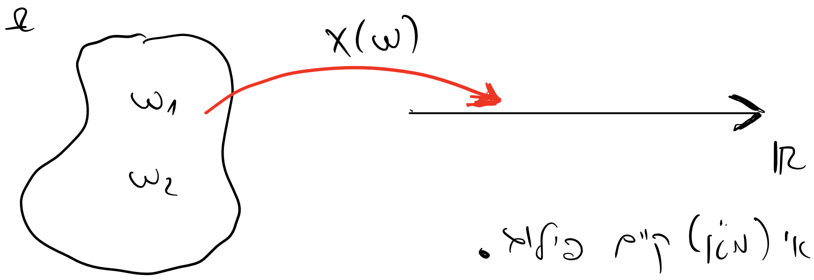
ע"פ (1)
$$=\left[1-q+q^{t\log(q)+1}\right]^n=\left[1-q+qe^t\right]^n$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t)\Big|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}\left[1-q+qe^t\right]^n\Big|_{t=0}$$

$$=n\cdot q\cancel{e^t}\left[1-\cancel{q}+\cancel{q}\cdot\cancel{e^t}\right]^{n-1}=\underline{\underline{n\cdot q}}$$

2. משתנים אקראיים/מקריים - Random Variables

העתקה ממרחב מדגם Ω לציר הממשי:



עבור משתנה אקראי (מוני) קיים פילוג.

דוגמא: הטלת מטבע

$X(H)=1$

$X(T)=-1$

דוגמא: זריקת קוביה

$i=1,\dots,6$

$X(i)=-10i$

$P(\{X\le\infty\})=1$

$P(X=\pm\infty)=0$

מגדירים פונ' פילוג:

$$F_x(X) \triangleq P(x\le X)$$

לדוגמא-

$$F_x(5)=P(x\le 5)$$

דוגמא 1 -

הטלת מטבע :

$X(h)=1$

$X(T)=0$

פתרון -

$P(X=1)=P(h)\triangleq q$

$P(X=0)=P(T)=1-q$

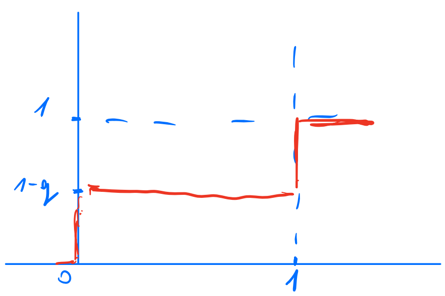
$F_X(x)$

$F_X(<0)=0$

$F_X(0)=P(X\le 0)=1-q$

$F_X(1)=P(X\le 1)=P(\{X=0\}\cup\{X=1\})=P(X=0)+P(X=1)=1$

$F_X(>1)=1$



פונק' הפילוג - מונוטונית עולה

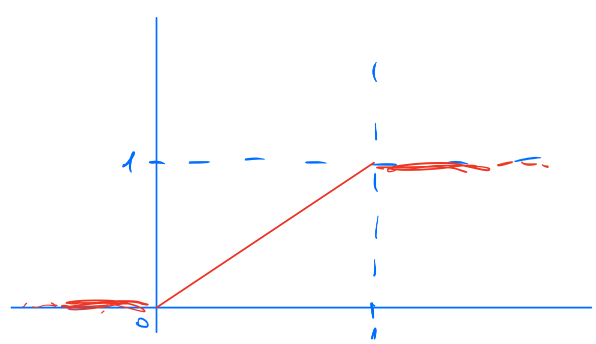
דוגמא 2 -

$X(t)=t\,,\quad 0\le t\le 1$

$P(t_1\le X\le t_2)=t_2-t_1$

$F_X(t_1)=P(X\le t_1)=t_1$

$F_X(t)=t$



תכונות של פונ' הפילוג $F_x(w)$:

1. $F(+\infty) = 1$
   $F(-\infty) = 0$

2. $a \le b$
   $\rightarrow F(a) \le F(b)$

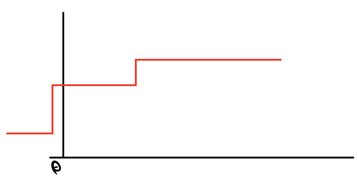
3. $P(X \ge W) = 1 - \overbrace{F_x(W)}^{P(x \le W)}$

4. $P(w_1 \le x \le w_2) = F_x(w_2) - F_x(w_1)$

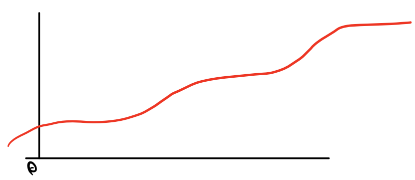
משתנה אקראי מוגדר במלואו ע"י הפילוג!

סוגי המשתנה האקראי:

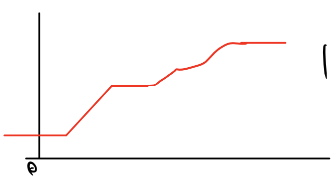
1. בדיד - פונ' פילוג בדידה



2. רציף - פונ' פילוג רציפה



3. היברידי — בדיד + רציף - פונ' רציפה למקוטעין



עבור משתנה אקראי רציף, מגדירים פונ' צפיפות:

צפיפות

פילוג

$$f_{\chi}(w) \triangleq \left.\frac{\partial F_{\chi}(x)}{\partial x}\right|_{x=w}$$

1. מונוטוניות של $F_{\chi}(\;)$ נובע $\quad f_{\chi}(w) \geq 0$

2. $F_{\chi}(w) = \int_{-\infty}^{w} f_{\chi}(x)\,dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi}(x)\,dx = F_{\chi}(+\infty) = 1$

4. $\int_{x_1}^{x_2} f_{\chi}(x)\,dx = F_{\chi}(x_2) - F_{\chi}(x_1) = P(x_1 \leq \chi \leq x_2)$

5. $\int_{w}^{w+\Delta w} f_{\chi}(x)\,dx \cong f_{\chi}(w)\cdot\Delta w \cong P(\chi \in [w, w+\Delta w])$

3. דוגמאות לצפיפויות / פילוגים

1. נורמלי / גאוסיין

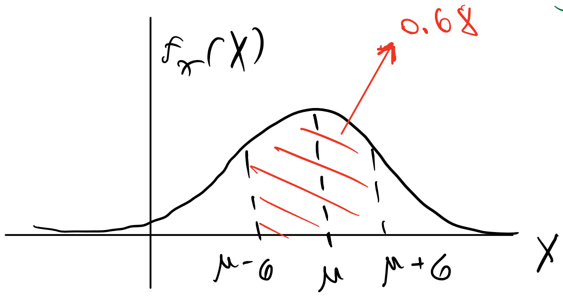
$X \in \mathbb{R}$

צפיפות $f_X(X) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

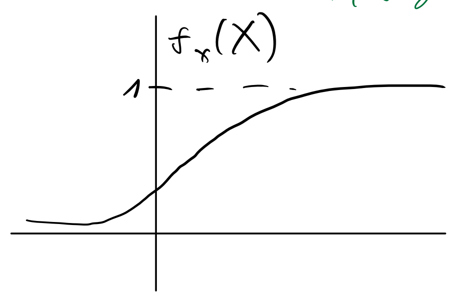
$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0.68$

הפילוג הוא אינטגרל של הצפיפות!

צפיפות:



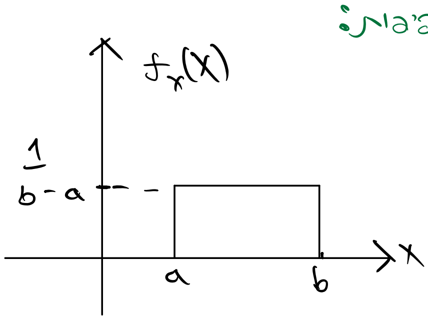
פילוג:



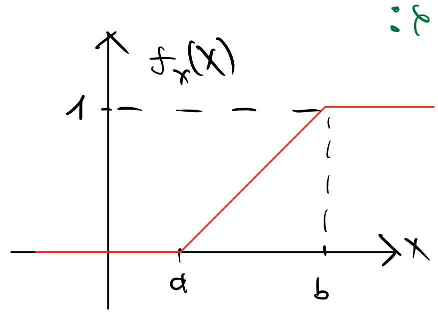
2. אחידה / יוניפורמית

$$\text{צפיפות}\begin{cases} f_X(X) = \frac{1}{b-a}, & a \le X \le b \\ f_X(X) = 0, & X<a\ ,\ X>b \end{cases}$$

צפיפות:



פילוג:

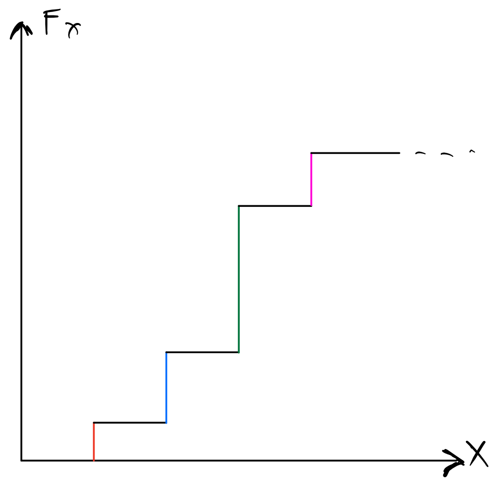


3. בינומי

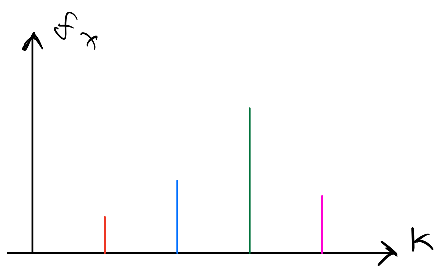
צפיפות
$$f_x(x) = \binom{n}{k} q^{k} (1-q)^{n-k} \cdot \delta(x-k)$$

פילוג
$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_x(x)\,dx = \sum_{k=0}^{X} \underbrace{\binom{n}{k} q^{k} (1-q)^{n-k}}_{P(x=k)}$$

פילוג:



צפיפות:



4. מותנה

פילוג
$$F_x(X|M) \triangleq P(x \le X | M) = \frac{P(\{x \le X\} \cap M)}{P(M)}$$

צפיפות $f_x(X|M) \longrightarrow$ נגזרת הפילוג

דוגמה -

מה הפילוג המותנה בניסוי זריקת קובייה, בהינתן שיצא זוגי?

פתרון -

$P(x=i)=1/6\,,\quad i=1,\dots,6.$

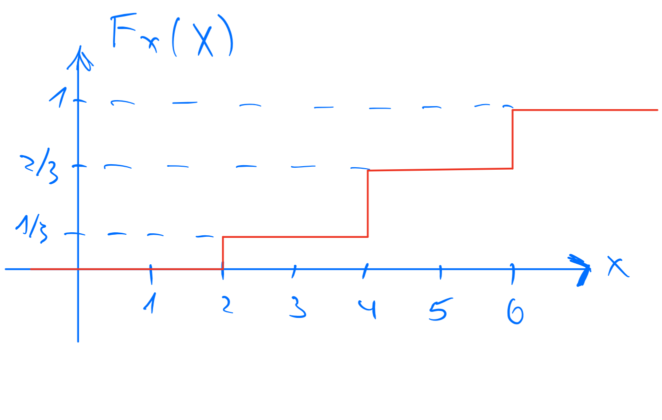
$$F_x(X\mid\{\text{זוגי}\})=\frac{P(\{x\le X\}\cap\{\text{זוגי}\})}{P(\text{זוגי})}=\frac{P(\{x\le X\}\cap\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}$$

$$F_x(1\mid\{\text{זוגי}\})=0$$

$$F_x(2\mid\{\text{זוגי}\})=\frac{P(\{x\le 2\}\cap\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}=\frac{P(2)}{P(2,4,6)}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$F_x(6\mid\{\text{זוגי}\})=\frac{P(\{x\le 6\}\cap\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}=\frac{P(\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}=1$$



דוגמא -

X הינו משתנה אקראי גאוסי.

מה ההסתברות ש - $a \le X \le b$

כאשר ידוע כי - $c \le X \le d$

פתרון -

$$P(a\le X\le b \mid c\le X\le d) = \int_a^b f_X(x \mid c\le X\le d)\,dx$$ מא״ן רציף (4)

$$= F_X(b \mid c\le X\le d) - F_X(a \mid c\le X\le d)$$

פילוג מותנה $$F_X(x \mid c\le X\le d) = \frac{P(\{X\le x\}\cap\{c\le X\le d\})}{\underbrace{P(\{c\le X\le d\})}}$$

זנבים גאוסיים

$$F_X(x \mid c\le X\le d) = \begin{cases} 0, & x<c \\ \dfrac{F_X(x)-F_X(c)}{F_X(d)-F_X(c)}, & c\le x\le d \\ 1, & x>d \end{cases}$$

4. הסתברות כללית

$$\text{פילוג}\; F_x(X) = P(x \le X) = \sum_i P(x \le 0 \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

$$\text{צפיפות}\; f_x(X) = \sum_i f_x(X \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

דוגמא -

כאשר מכונה מכויילת, הדיוק שלה מפולג נורמלי עם μ_1 ו σ_1.
כאשר מכונה אינה מכויילת הדיוק שלה מפולג נורמלי עם μ_2 ו σ_2.

1. מהי ההסתברות שדיוק המכונה הינו a, כאשר ההסתברות שהיא מכויילת הינו q?
2. מהי ההסתברות לדיוק בין $[a,b]$ כאשר הכיול הינו q?

פתרון -

עבור צפיפויות רציפות:

1. $P(x = a) = 0$
2. $P(a \le x \le b) = \int_a^b f_x(X)\,dX$

$$q \cdot f_x(X \mid \text{מכויילת}) + (1-q) \cdot f_x(X \mid \text{לא מכויילת}) =$$

$$= q \cdot N(X \mid \sigma_1, \mu_1) + (1-q) \cdot N(X \mid \sigma_2, \mu_2)$$

$$P(a \le x \le b) = q \cdot P(a \le x \le b \mid \text{כיול}) + (1-q) \cdot P(a \le X \le b \mid \text{לא כיול})$$

5. חוק בייס

$$P(A \mid x \le X) = \frac{P(x \le X \mid A) \cdot P(A)}{P(x \le X)}$$

$$= \frac{F_x(X \mid A) \cdot P(A)}{F_x(X)}$$

$$f_x(X \mid A) = \frac{P(A \mid x = X) \cdot f_x(X)}{P(A)}$$

ירין הויזלר

שיעור 4

נושאי השיעור:

1. פונקציה של משתנים מקריים
2. חוק המספרים הגדולים
3. חוק הגבול המרכזי

1. ~~פונקציה של משתנה אקראי~~

מ"א, פילוג, צפיפות

$x,\ F_x(X),\ f_x(X)$

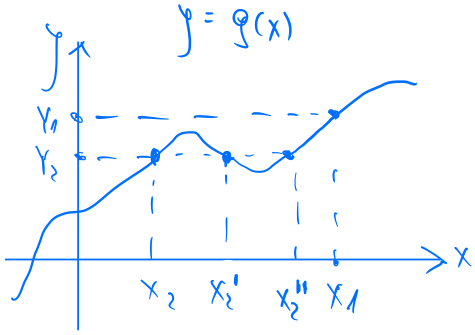
$g(x),\ y$ מ"א

דוגמא -

מה פונ' הפילוג של y המתאים לזו של x?

" — הצפיפות ——— " ——— $f_x(x)$?

פתרון -



$$F_y(Y) = P(\{y \le Y\}) = P(\{g(x) \le Y\})$$

$$\bullet\ F_y(Y_1) = P(\{y \le Y_1\}) = P(\{g(x) \le Y_1\}) = P(x \le X_1) = F_x(Y_1) = F_x(\underbrace{g^{-1}(Y_1)}_{\text{פונ' הופכית}})$$

$$\bullet\ F_y(Y_2) = P(y \le Y_2) = P(g(x) \le Y_2) = P(\{x \le x_2\} \cup \{x_2' \le x \le x_2''\}) = P(x \le x_2) + P(x_2' \le x \le x_2'') = F_x(x_2) + F_x(x_2'') - F_x(x_2')$$

$$Y_2 = g(x) \longrightarrow x = X_2,\ X_2',\ X_2''$$

שאלה -

x מ"מ $F_x(X)$. נתונה $y=ax+b$, כאשר a,b הם קבועים.

מהי $F_y(Y)$?

פתרון -

$$X = \frac{y-b}{a}$$

<u>$a>0$</u>

$$F_y(Y) = P(y \le Y) = P(ax+b \le Y) = P\left(x \le \frac{Y-b}{a}\right) =$$
$$= F_x\left(\frac{Y-b}{a}\right)$$

<u>$a<0$</u>

$$F_y(Y) = P\left(x \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(x \le \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

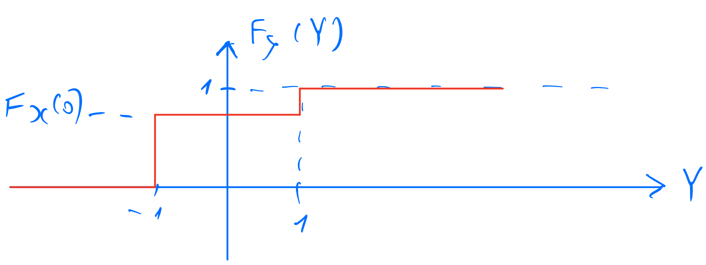
שאלה -

x הינו מ"מ, $F_x(X)$.

$$y = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

פתרון -

$$P(y=-1) = P(x \le 0)$$
$$P(y=1) = P(x>0) = 1 - P(x \le 0)$$



שאלה -

X מ"מ $F_X(X)$. נתונה $y=ax+b$, כאשר a,b הם קבועים.

מהי $F_y(Y)$?

משפט: נניח כי $Y=g(x)$ מניבה n פתרונות $x_1,\dots,x_n$, אזי:

$$f_y(Y) = \frac{f_X(X_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

פתרון -

$$X = \frac{y-b}{a}, \qquad g(x)=y=ax+b$$

$$f_y(Y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

2. תוחלת (Expected value) ושונות (Various) של מ"מ

Continuous: $E\{x\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$

Discrete: $E\{x\} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(x=x_i)$

x מתפלג אחיד בתחום $[X_1,X_2]$. מהי $E\{x\}$?

$$f_x(x)=\begin{cases} \frac{1}{x_1-x_2}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{Else} \end{cases}$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx = \frac{1}{x_2-x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{x_2-x_1} \cdot \frac{(x_2^2-x_1^2)}{2}$$

דוגמה: קוביה $\Omega=\{1,\dots,6\}$. חשב $E\{x\}$ (הקוביה הוגנת).

$$E\{x\} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

3. תוחלת מותנית

Continuous: $E\{x \mid M\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x \mid M)\, dx$

Discrete: $E\{x \mid M\} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(x=x_i \mid M)$

4. תוחלת של מ"מ

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_x(x)\,dx$$

5. שונות

$$\sigma_x^2 = Var(x) \triangleq E\{\overbrace{(x - E\{x\})}^{\text{המרחק מהממוצע}}{}^2\}$$
$$= E\{x^2 - 2xE\{x\} + E\{x\}^2\} = E\{x\}^2 - 2E\{x\}\cdot E\{x\} + E\{x\}^2$$

דוגמא 1 -

x מפולג אחיד בתחום $[-c, c]$. מהי התוחלת ומה השונות?

פתרון -

$$E\{x\} = \frac{1}{2c}\cdot\int_{-c}^{c} x\cdot dx = 0$$

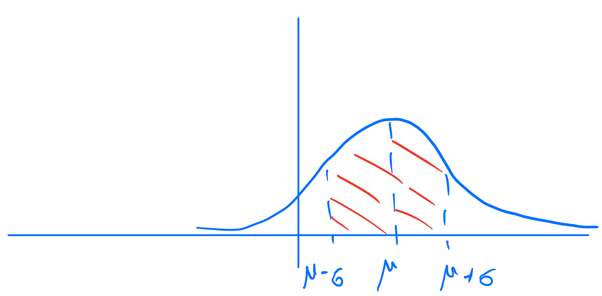
$$Var(x) = E\{x^2\} = \frac{1}{2c}\cdot\int_{-c}^{c} x^2\,dx = \frac{1}{2c}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

דוגמא 2 -

x מפולג נורמלית/גאוסיינית עם ממוצע μ וסטיית תקן σ.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E\{x\} = \mu, \quad Var(x) = \sigma^2$$



דוגמא -

חשב תוחלת/שונות עבור מ"מ ברנולי

$$P(x=0)=p$$

$$P(x=1)=q$$

פתרון -

$$E\{x\} = 0\cdot p + 1\cdot q = q$$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E\{x^2\} - q^2 = 0^2\cdot p + 1^2\cdot q - q^2 = q - q^2 = q(1-q)$$

6. פילוג של שני מ"מ

$$F_{x,y}(X,Y) \triangleq P(\{x \le X\} \cap \{y \le Y\}) = P(x \le X, y \le Y)$$

תכונות -

1. $F_{x,y}(-\infty, Y) = F_{x,y}(X, -\infty) = 0$

2. $F_{x,y}(-\infty, \infty) = 1$

3. $P(X_1 \le x \le X_2,\ y \le Y) = F_{x,y}(X_2, Y) - F_{x,y}(X_1, Y)$

4. $P(X_1 \le x \le X_2,\ Y_1 \le y \le Y_2) = F_{x,y}(X_2, Y_2) - F_{x,y}(X_1, Y_2) - F_{x,y}(X_2, Y_1) + F_{x,y}(X_1, Y_1)$

7. צפיפות משותפת

$$f_{x,y}(X,Y) \triangleq \left.\frac{\partial^2 F_{x,y}(u,v)}{\partial u \partial v}\right|_{\substack{u=X \\ v=Y}}$$

$$F_{x,y} = \int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} f_{x,y}(u,v)\,du\,dv$$

$$P((x,y)\in D) = \iint_D f_{x,y}(u,v)\,du\,dv$$

8. פילוג שולי וצפיפות שולית

נתון $F_{x,y} \longrightarrow F_x, F_y = ?$

$$\underbrace{F_x(X)}_{\int_{-\infty}^{X} f_x(u)\,du} = P(x\le X,\ y\le \infty) = F_{x,y}(X,\infty) = \int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(u,v)\,dv\,du$$

$$f_x(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(X,Y)\,dy$$

$$f_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(X,Y)\,dx$$

בהינתן הפילוג/צפיפות המשותפים, ניתן למצוא את הפילוג/צפיפות של כל אחד בנפרד, אך לא להפך!

אם x ו y הם בת״ס ונתונים הצפיפות/הפילוג של כל אחד מהם, אז:

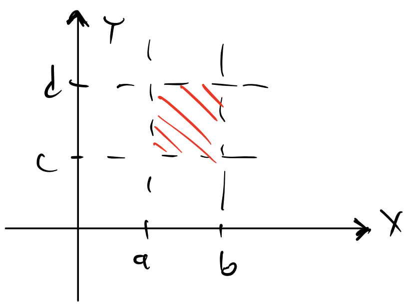
$$F_{x,y} = F_x \cdot F_y$$

$$f_{x,y} = f_x \cdot f_y$$

9. התפלגות אחידה עבור שני מ"מ

$x \in [a, b]$
$y \in [c, d]$

$$f_{x,y}(X,Y) = \begin{cases} m \ (\text{const}) & , \ (x,y) \in \\ 0 & , \ \text{else} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m \, dx\,dy$$

$$m = \frac{1}{A} = \frac{1}{(b-a)(d-c)}$$

10. התפלגות נורמלית/גאוסיאנית משותפת

$$f_{x,y}(X,Y) = \frac{1}{2\pi \cdot |C|^{0.5}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}[X-\mu_x, Y-\mu_y] \cdot C^{-1} \begin{bmatrix} X-\mu_x \\ Y-\mu_y \end{bmatrix}\right\}$$

$$|C| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$$

אם: $\sigma_{x,y} = 0$

$$f_{x,y}(X,Y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \sigma_y} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{1}{2}\frac{(Y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(X-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \cdot e^{-\frac{(Y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = f_x(X) \cdot f_y(Y)$$

ולכ': בת"ס

11. חוק המספרים הגדולים

א. החלש:

סדרה של מ"א מ"ס $x_i,\ i=1,\dots,n$

הם בינאריים -

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{מאורע } A \text{ מתרחש} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$P(x_i=1) = P(A)$$

נוכיח כי -

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{X}_n} = P(A)$$

לפי אי-שוויון צ'בישב -

$$P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^2$$

$$E\{x_i\} = 1\cdot P(A) + 0\cdot P(\bar{A}) = P(A)$$

$$E\{\bar{X}_n\} = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{x_i\} = P(A)$$

$$\overset{var}{\sigma^2_{x_i}} = E\{x_i^2\} - E\{x_i\}^2 = 1\cdot P(A) - P(A)^2 = P(A)\cdot(1-P(A))$$

$$E\{(\bar{X}_n - P(A))^2\} = E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - P(A))\right)^2\right\}$$

$$\frac{1}{n^2}\cdot E\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-P(A))^2 + \sum_{i\neq j}\sum (x_i-P(A))(x_j-P(A))\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E\{(x_i - P(A))^2\}}_{P(A)(1-P(A))} = \frac{P(A)(1-P(A))}{n}$$

לפי צ'בישב $P(|\bar{X}_n - P(A)| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^2 n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n \xrightarrow{P} P(A)$$

ב. החזק:

x_i ש"מ בת"ס, בעלי $E\{x_i\} = \mu$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu$$

ממוצע מדגמי → התוחלת של המ"מ.

12. חוק הגבול המרכזי

התכנסות – המשערך של הממוצע לממוצע.

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$f(\bar{x}_n) \xrightarrow[n]{} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0.1$$

ירין הויצלר

שיעור 5

נושאי השיעור:

1. שיערוך בייסיני
2. מסנן קלמן

1. משפט יסודי של המשערך

המשערך שממזער את השגיאה הריבועית הממוצעת

Mean square Error

$$E\underbrace{(MSE)}\{(\theta-\hat{\theta})^T(\theta-\hat{\theta})\}$$

θ – וקטור אקראי

$\hat{\theta}$ – משערך פונ' של z

היינו:

$$\hat{\theta}_{\underbrace{(MMSE)}_{\text{min MSE}}} = E\{\theta \mid z\}$$

z – אור מדידות

הוכחה:

$$\underbrace{E\{f(x)\cdot g(y)\}}_{\int \ldots P(y|x)\cdot P(x)} = E\{E\{f(x)\cdot g(y)|x\}\} = E\{f(x)\cdot E\{g(y)|x\}\}$$

צפיפות

$$E\{E\{(\theta-\hat{\theta})^T(\theta-\hat{\theta})|z\}\} \longrightarrow \min_{\hat{\theta}} E\{(\theta-\hat{\theta})^T(\theta-\hat{\theta})|z\}$$

$$E\{\theta^T\theta - 2\theta^T\hat{\theta} + \hat{\theta}^T\hat{\theta}|z\} =$$

$$E\{\theta^T\theta|z\} - 2E\{\theta^T\hat{\theta}|z\} + E\{\hat{\theta}^T\hat{\theta}|z\} =$$

$$E\{\theta^T\theta|z\} - 2\hat{\theta}^T\cdot E\{\theta|z\} + \hat{\theta}^T\hat{\theta} =$$

$$E\{\theta^T\theta|z\} + (\hat{\theta} - E\{\theta|z\})^T(\cdot) - E\{\theta|z\}$$

$E\{\hat{\theta}_{MMSE}\} = E\{E\{\theta|z\}\} = E\{\theta\}$ בלתי מוטה - unbiased:

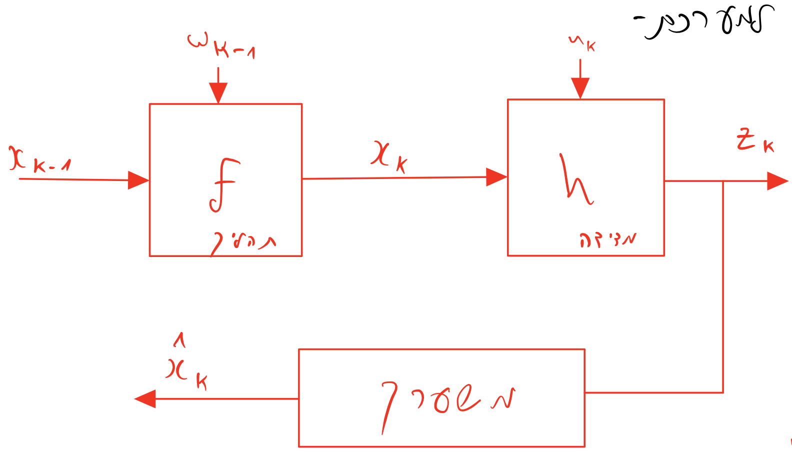
ג. שערוך בייסיני (Bayesian filtering)

$$E\{x|z\} = \int x \cdot P(x|z)\,dx$$

מערכת דינמית (זמן דיסקרטי) -

$x_k \in \mathbb{R}^n$	וקטור מצב
$z_k \in \mathbb{R}^m$	וקטור מדידה
$w_k \in \mathbb{R}^q$	וקטור רעש תהליך
$v_k \in \mathbb{R}^m$	וקטור רעש מדידה

תיאור בלוקים למערכת -



MMSE: $\hat{x}_k = E\{x_k|z_1,\dots,z_k\} = \int x_k \cdot P(x_k|z_1,\dots,z_k)$

משערך אופטימלי

ניתן לקבל מתוך שערוך בייסיני

צפיפות

$$P(x_0),\ z_{1:k} = \{z_1, \dots, z_k\}$$

$$P(x_k | z_{1:k}) \longrightarrow P(x_{k+1} | z_{1:k+1})$$

מודל מערכת - f, h מדידה חדשה - z_{k+1}

$$P(x_0) \longrightarrow P(x_1 | z_1) \longrightarrow P(x_k | z_{1:k})$$

תיאור מתמטי למערכת -

Process Equation:

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k) \qquad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\nu}$$

measurement Equation:

$$z_{k+1} = h(x_{k+1}, u_{k+1}) \qquad h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Filtering (state estimation):

$\hat{x}_k$ - מצב משוערך ע"פ מדידות

אלגוריתם מקובל MMSE: $\hat{x}_k = (x_k | z_{1:k})$

סינון באמצעות שערוך בייסיני -

Beyesian Recursion:

$$P(x_k | z_{1:k}) \longrightarrow P(x_{k+1} | z_{1:k+1})$$

Time Propagation: קידום בזמן (משוואת צ'פמן-קולמוגורוב)

$$P(x_{k+1} | z_{1:k}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_{k+1} | x_k, z_{1:k}) P(x_k | z_{1:k}) \, dx_k$$

measurement update: עדכון מדידה

$$P(x_{k+1} | z_{1:k+1}) = \frac{P(z_{k+1} | x_{k+1}, z_{1:k}) \cdot P(x_{k+1} | z_{1:k})}{\int P(z_{k+1} | x_{k+1}, z_{1:k}) \cdot P(x_{k+1} | z_{1:k}) \, dx_{k+1}}$$

$$\underset{(1)}{P(x_k | z_{1:k})} \xrightarrow{f} \underset{(2)}{P(x_{k+1} | z_{1:k})} \xrightarrow{z_{k+1},\, h} \underset{(3)}{P(x_{k+1} | z_{1:k+1})}$$

צפיפות מצב בזמן קודם   קבלת צפיפות מקדמת   עדכון צפיפות במדידה החדשה

$P(x_{k+1} | x_k, z_{1:k})$ – (Transmition Pdf) צפיפות מעבר

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k)$$

הנחה מפשטת למערכת $\underbrace{\text{מרקובית}}_{\text{תלוי בהינתן מצב קודם}}$:

$$P(x_{k+1} | x_k, z_{1:k}) = P(x_{k+1} | x_k)$$

$$P(x_{k+1} | x_k) = \frac{P_{w_k}(x_{k+1} - f(x_k, 0))}{|f'(x_k, 0)|}$$

$P(z_k \mid x_k, z_{1:k-1})$ – Likelihood Pdf צפיפות

$z_k = h(x_k, u_k)$

במערכות כאלו

$P(z_k \mid x_k, z_{1:k-1}) = P(z_k \mid x_k)$

(בהינתן המצב x: z_k בת"ל ב- $z_{1:k-1}$)

הנחה: רעשים אדטיביים -

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + w_k \\ z_{k+1} = h(x_{k+1}) + u_k \end{cases}$$

P_{w_k}, P_{u_k}

צפיפויות רעשים ידועות

$$P(x_{k+1} \mid x_k) = P_{w_k}(x_{k+1} - f(x_k))$$
$$P(z_{k+1} \mid x_{k+1}) = P_{u_{k+1}}(z_{k+1} - h(x_{k+1}))$$

$$P(x_k \mid z_{1:k}) = ?$$

למשוואות הבייסיאניות לרוב אין פתרון אנליטי. מקרים בודדים:

א. מערכות לינאריות, גאוסיות

$$x_{k+1} = F_k \cdot x_k + w_k, \qquad w_k \sim N(w_k \mid 0, Q_k)$$
$$z_{k+1} = H_{k+1} \cdot x_{k+1} + u_{k+1}, \qquad u_k \sim N(u_k \mid 0, R_k)$$

$P(x_k \mid z_{1:k})$ = kalman Filter(k.F) משערך אופטימלי עבור מערכות לינאריות גאוסיות

3. מסנן קלמן (K.F - Kalman Filter)

גאוסיאן

$$\mathcal{N}(x|\mu,Q) = \frac{1}{(2\pi|Q|)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T Q^{-1}(x-\mu)\right\}$$

נתונים -

$$P(x_0) = \mathcal{N}(x_0|x_{0/0}, P_{0/0})$$ מצב התחלתי של המערכת

סימונים -

$$\hat{x}_{k|T} \triangleq E\{x_k|z_{1:T}\}$$

$$\hat{x}_{0/0} = E\{x_0\}$$

$$P_{k|T} \triangleq E\left\{(x_k-\hat{x}_{k|T})(x_k-\hat{x}_{k|T})^T \,|\, z_{1:T}\right\}$$

ב"ת ב- x_0 (רעשים לבנים) w_k, v_k -

א. פיתוח שלב קידום בזמן -

$$P(x_k|z_{1:k}) = \mathcal{N}(x_k|\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

$$\hat{x}_{k|k} \longrightarrow \hat{x}_{k+1/k} = E\{x_{k+1}|z_{1:k}\}$$

$$P(x_{k+1}|z_{1:k}) = \mathcal{N}(x_{k+1}|\hat{x}_{k+1/k}, P_{k+1/k})$$

$$\hat{x}_{k+1} = E\{x_{k+1}|z_{1:k}\} = E\{F_k x_k + w_k|z_{1:k}\} = F_k \cdot \underbrace{E\{x_k|z_{1:k}\}}_{\hat{x}_{k/k}}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = F_k\, \hat{x}_{k/k}$$

$$P_{k+1|k} = E\{(\underbrace{\underbrace{x_{k+1}}_{F_k x_k + w_k} - \underbrace{\hat{x}_{k+1|k}}_{F_k \hat{x}_{k|k}}}_{F_k \underbrace{\hat{x}_{k|k}}_{x_k - \hat{x}_{k|k}} + w_k})(\cdot)^T | z_{1:k}\}$$

$$= E\{(F_k \hat{x}_{k|k} + w_k)(\cdot)^T | z_{1:k}\}$$

$$= E\{F_k \tilde{x}_k \tilde{x}_k^T F_k^T + w_k \tilde{x}_k F_k^T + F_k x_k w_k^T + w_k w_k^T | z_{1:k}\}$$

$$= F_k \cdot P_{k|k} F_k^T + Q_k$$

$$P_{k+1|k} = F_k P_k F_k^T + Q_k$$

ב. פיתוח שלב עדכון מדידה -

$$P(x_{k+1} | z_{1:k}, z_{k+1}) = \frac{P(z_{k+1}|x_{k+1}) P(x_{k+1}|z_{1:k})}{P(z_{k+1}|z_{1:k})}$$

$$P(x|y) = \frac{P(y,x)}{P(y)}$$

x,y הם מ"ו גאוסיים במשותף.

$$\mu_x = E\{x\}$$

$$\mu_y = E\{y\}$$

מטריצת קווריאנס משותפת. $C = \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{yx} & P_y \end{bmatrix}$

אזי

$$P(x|y) = N(x|E\{x|y\})$$

$$E\{x|y\} = \mu_x - P_{xy} \cdot P_y^{-1}$$

$$P_{xy} = P_x - P_{xy}$$ חסר

$$P(x,y) = \frac{1}{(2\pi|C|)^{(m+n)/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}\right\}$$

$$P(y) = \frac{1}{(2\pi|P_y|)^{m/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu_y)^T P_y^{-1}(\cdot)\right\}$$

$$(*)\ \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}^T C^{-1}[\cdot] - (y-\mu_y)^T P_y^{-1}(\cdot)$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{yx} & P_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

משלים
שור

$$A = \left(P_x - P_{xy} P_y^{-1} P_{yx}\right)^{-1}, \qquad B = -A P_{xy} P_y^{-1}$$

$$D = P_y^{-1} + P_y^{-1} P_{yx} A P_{xy} P_y^{-1}$$

$$\circledast \quad \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D-P_y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix} =$$

$$(x-\mu_x)^T A (x-\mu_x) + 2(x-\mu_x) B (y-\mu_y) +$$
$$+ (y-\mu_y)^T (D - P_y^{-1})(y-\mu_y) =$$

$$= [x - \underbrace{(\mu_x + P_{xy} P_y^{-1}(y-\mu_y))}_{E\{x|y\}}]^T \underbrace{A}_{P_{x|y} = A^{-1}} [\cdot]$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{(2\pi |C|)^{(m+n)/2}}{(2\pi |P_y|)^{m/2}}\right)}_{(2\pi |P_{x|y}|)^{n/2}}} \cdot \exp\{\cdot\}$$

$$|P_{x|y}| \stackrel{?}{=} \frac{|C|}{|P_y|}$$

$$C = \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{yx} & P_y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} L & P_{xy} \\ 0 & P_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_y^{-1} & I_m \end{bmatrix}$$

$$L + P_{xy} \cdot N = P_x$$

$$P_y N = P_{yx} \longrightarrow N = P_y^{-1} P_{yx}$$

$$L = P_x - P_{xy} P_y^{-1} P_{yx} = P_{x|y}$$

$$|C| = |L| \cdot |P_y| \longrightarrow |P_{x|y}|$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = E\{(x_{k+1} | z_{1:k}) \,|\, z_{k+1}\}$$

$$= \underbrace{E\{x_{k+1} | z_{1:k}\}}_{\hat{x}_{k+1|k}} + \underbrace{P_{x_{k+1}, z_{k+1} | z_{1:k}} P^{-1}_{z_{k+1}| z_{1:k}}}_{K_{k+1} \text{ - הגבר קלמן}}$$

$$(z_{k+1} - \underbrace{E\{z_{k+1} | z_{1:k}\}}_{\substack{E\{H_{k+1} x_{k+1} + u_{k+1} | z_{1:k}\} \\ = H_{k+1} E\{x_{k+1} | z_{1:k}\}}})$$

$$= H_{k+1} \underbrace{E\{x_{k+1} | z_{1:k}\}}_{\hat{x}_{k+1|k}}$$

$$P_{z_{k+1}|z_{1:k}} = E\{(\underbrace{z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1|k}}_{H_{k+1}\tilde{x}_{k+1|k} + u_{k+1}})(\cdot)^T | z_{1:k}\}$$

$$= H_{k+1} P_{k+1|k} H^T_{k+1} + R_{k+1}$$

$$P_{x_{k+1}, z_{k+1}|z_{1:k}} = E\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1|k})\}$$

$$= E\{\tilde{x}_{k+1|k}(u_{k+1}^T + \tilde{x}_{k+1|k}^T H^T_{k+1})\} = P_{k+1|k} H^T_{k+1}$$

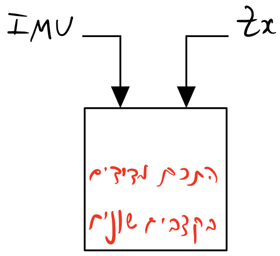
$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - P_{k+1/k} H^T_{k+1} \times \left(H_{k+1} P_{k+1/k} H^T_{k+1} + R_{k+1}\right)^{-1} H_k P_{k+1/k}$$

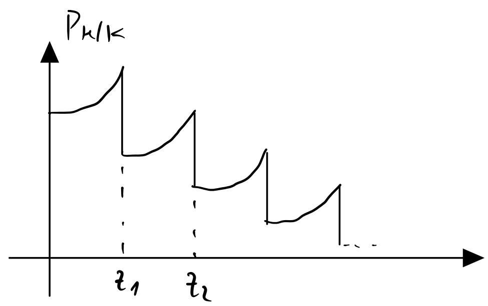
<u>משוואות המסנן</u>

הגבר קלמן $K_{k+1} = P_{k+1/k} H^T_{k+1} \left(H_{k+1} P_{k+1/k} H^T_{k+1} + R_{k+1}\right)$

עדכון שערוך $\hat{x}_{k+1/k+1} = \overbrace{\hat{x}_{k+1/k}}^{\text{שערוך מקודם}} + \overbrace{K_{k+1}}^{\text{הגבר קלמן}} \left(\overbrace{z_{k+1}}^{\text{מדידה חדשה}} - \overbrace{H_{k+1} \hat{x}_{k+1}}^{\text{מדידה חזויה}}\right)$

$$P_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1} H_{k+1}\right) P_{k+1/k}$$





ירין הויזלר

שיעור 6

<u>נושאי השיעור</u>:

1. מסנן קלמן
2. מסנן קלמן מורחב
3. כוונון מסנן
4. שערוך פרמטרים ושערוך מצב
5. קווטרניון

1. מסנן קלמן (KF)

Propagation
$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k \\ P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k \end{cases}$$

Update
$$\begin{cases} K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T \left(H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1} \right)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} \left(z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k} \right) \\ P_{k+1|k+1} = \left(I - K_{k+1} H_{k+1}^T \right) P_{k+1|k} = \end{cases}$$

$$= \left(I - K_{k+1} H_{k+1}^T \right) P_{k+1|k} (\cdot) + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T$$

2. מסנן קלמן מורחב (EKF)

$$x_{k+1} = f(x_k, \omega_k)$$
$$z_{k+1} = h(x_{k+1}, u_{k+1})$$

יישום של KF על לינאריזציה של המערכת המקורית (סביב השערוך האחרון - $\hat{x}_{k|k}, \hat{x}_{k+1|k}$)

הנחת לינאריזציה -

קטנה $\tilde{x}_{k|k} \triangleq x_k - \hat{x}_{k|k}$

$$\|\tilde{x}_{k|k}\| << 1$$

$$E\{\hat{x}_{k|k} | z_{1:k}\} = E\{x_k | z_{1:k}\} - \hat{x}_{k|k} = 0$$

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k},\, w_k = 0} \qquad C_k = \frac{\partial f}{\partial w_k}\Big|_{w_k = 0,\, x_k = \hat{x}_{k|k}}$$

$$H_k = \frac{\partial h}{\partial x_k}\Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k},\, v_k = 0} \qquad D_k = \frac{\partial h}{\partial v_k}\Big|_{v_k = 0,\, x_k = \hat{x}_{k|k}}$$

קידום בזמן $\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, 0)$

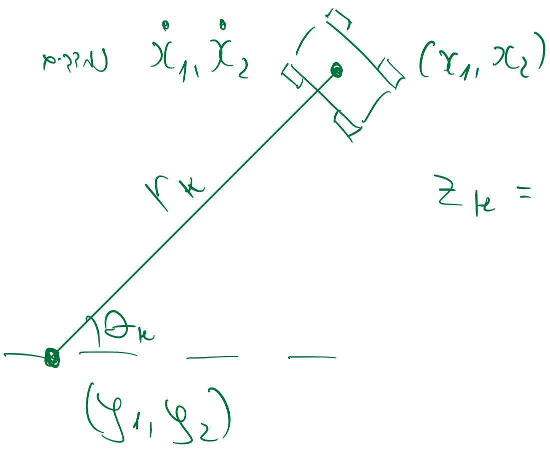
קידום קווריאנס $P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + C_k Q_k C_k^T$

הגבר קלמן $K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + D_{k+1} R_{k+1} D_{k+1}^T)^{-1}$

עדכון מדידה $\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(z_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k}, 0))$

עדכון קווריאנס $P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} (\cdot)^T +$
$+ K_{k+1} D_{k+1} R_{k+1} D_{k+1}^T K_{k+1}^T$

דוגמא - מערכת עקיבה



$$z_k = \begin{bmatrix} r_k^2 \\ \theta_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \\ tg^{-1}\left(\dfrac{x_2-y_2}{x_1-y_1}\right) \end{bmatrix}}_{h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k\right)} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{r_k} \\ v_{\theta_k} \end{bmatrix}}_{v_k}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_k} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{u_k} \Delta t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_k$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_k \Delta t + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

[illegible]

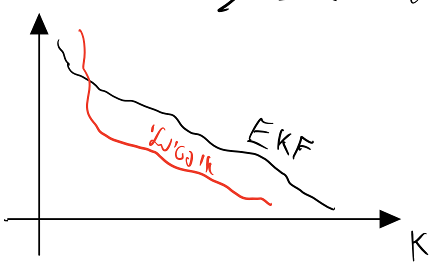
$$e^{A\Delta t} = I + A \cdot \Delta t$$

בעייתיות שנובעת מחוסר קיום של הנחות הלינאריזציה (שגיאות שערוך קטנות) במסנן EKF:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}\left(z_{k+1} - h(\cdot)\right)$$

$$P^{EKF}_{k+1|k} \le E\{(x_k - \hat{x}_{k+1|k})(\cdot)^T\}$$ איבוד עקביות

$$P^{EKF}_{k+1|k} \ge \overbrace{E\{(x_k - \hat{x}_{k+1|k})(\cdot)^T\}}^{\text{אופטימלי}}$$ (נאו' עקביות מסנן)



3. כוונון מסנן EKF

מגדילים $P^{EKF}_{k+1|k}$ באופן מלאכותי.

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + C_k Q_k C_k^T + \underbrace{\varepsilon_k}_{\text{קווריאנס}}$$

זיהוי חוסר עקביות (בדיקת התכנסות מסנן)

$$\hat{z}_{k|k-1} = H_k \cdot \hat{x}_{k|k-1}$$

שגיאת מדידה

$$\tilde{z}_{k|k-1} = z_k - \hat{z}_{k|k-1} = H_k x_k + u_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} = H_k \tilde{x}_{k|k-1} + u_k$$

קווריאנס

$$cov(\tilde{z}_{k|k-1}) = E\{(H_k \tilde{x}_{k|k-1} + u_k)(\cdot)^T\} =$$

$$= \underbrace{H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k}_{\text{מתוך מסנן קלמן}} = \Upsilon_k$$

התבדרות או
חוסר עקביות $\|\tilde{z}_{k|k-1}\|_2 > 3\lambda_{max}(\tilde{V}_k)$ — מחשבים על סמך המדידה והשערוך

דרך נוספת:

ההסתברות לקבלת מדידה z_k בהינתן שהמדידות עכשיו היו $z_{1:k-1}$ —

$$P(z_k \mid z_{1:k-1}) = \int P(z_k \mid x_k) P(x_k \mid z_{1:k-1})\, dx_k$$

$$\text{evidence} = E\{P(z_k \mid x_k) / z_{1:k-1}\}$$

$$P(z_k \mid x_k) = P(z_k \mid \hat{x}_{k|k-1}) + \left.\frac{\partial P}{\partial x_k}\right|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} \cdot \tilde{x}_{k|k-1} + \overset{\text{order}}{O}(\tilde{x}^2_{k|k-1})$$

$$\begin{aligned} P(z_k \mid z_{1:k-1}) &\cong P(z_k \mid \hat{x}_{k|k-1}) + \varepsilon \\ &= N(z_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) / 0, R_k) \\ &\propto \exp\{-\tfrac{1}{2}(z_k - \underbrace{h(\hat{x}_{k|k-1})}_{\hat{z}_{k|k-1}})^T R_k^{-1} (\cdot)\} \end{aligned}$$

$$\|\tilde{z}_{k|k-1}\|_2^2 = \tilde{z}_{k|k-1}^T \tilde{z}_{k|k-1} = (z_k - h(\hat{x}_{k|k-1}))^T$$

זיהוי התבדרות (על פני חלון זמן $[k,k+T]$)

מס' הפעמים שזיהינו $\eta_k > \varepsilon$

$$P(\eta_k > \varepsilon \mid [k,k+T]) \simeq \frac{n_w}{T}$$

$$\frac{1}{T}\cdot\sum_{m=1}^{T}\eta_{m+k} \overset{?}{>} \varepsilon$$

בנק מסננים -

גנאי במעלה

$$\hat{x}_{k|k}^{(i)} = EKF\left(\hat{x}_{0|0}^{(i)}\right), \quad i=1,\dots,N$$

משקל $$\bar{\omega}_k^{(i)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta_k^{(i)}\right\}, \quad i=1,\dots,N$$

נרמול משקלים $$\omega_k^{(j)} = \frac{\bar{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N}\bar{\omega}_k^{(i)}}, \quad j=1,\dots,N$$

$$j^* = \arg_j\max\ \omega_k^{(j)}$$

$$\hat{x}_{k|k}^{*} = \hat{x}_{k|k}^{(j*)}$$

משערך אופטימלי $$\hat{x}_{k|k} = \sum_j \omega_k^{(j)}\hat{x}_{k|k}^{(j)}$$

4. שערוך פרמטרים + מצב

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + w_k & \text{מערכת} \\ z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + u_{k+1} & \text{מדידות} \end{cases}$$

לשערך A_k, x_k בהינתן את $z_{1:k}$

$$y_k \triangleq \begin{bmatrix} x_k \\ col(A_k) \end{bmatrix}$$

$$col(A_k) = \left.\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right\} n^2 \qquad A_k = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$$

נשערך את y_k בהינתן $z_{1:k}$

$$y_{k+1} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_k x_k \\ col(A_k) \end{bmatrix}}^{f(y_k)} + \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(y_k) = \begin{bmatrix} f_1(y_k) \\ f_2(y_k) \end{bmatrix}, \qquad z_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{k+1} & 0_{m \times n^2} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{k+1}} y_{k+1} + u_{k+1}$$

- EKF re'')

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \operatorname{col}(A_k)} \\[2em] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \operatorname{col}(A_k)} \end{bmatrix}$$

$$F_k = \left[\begin{array}{c|c} A_k & D_k \left\{ \dfrac{\partial\, A_k x_k}{\partial \operatorname{col}(A_k)} \right. \\ \hline 0_{n^2 \times n} & I_{n^2 \times n^2} \end{array}\right]$$

$$A_k x_k = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} x_k = \begin{bmatrix} q_1^T x_k \\ \vdots \\ q_n^T x_k \end{bmatrix} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} x_k^T & 0_{1\times n} & \cdots & 0 \\ & x_k^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_k^T \end{bmatrix}}^{I_{n\times n} \otimes x_k^T}}_{n \times n^2}}^{D_k} \overbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}}^{\operatorname{col}(A_k)}$$

5. קווטרניון

$P(x_k | A_k, z_{1:k})$

$$q = \begin{bmatrix} e \cdot \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \qquad \|q\|_2 = 1$$

$$A A^T = I_{3\times3}$$

$$A(q_1 * q_2) = A(q_1) A(q_2)$$

$$A^T = A(q^{-1})$$

$$\dot{q} = A(\bar{\omega}) q = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \quad -\omega_3 \quad \omega_2}^{A^T = -A} & 0 \\ \omega_3 \quad 0 \quad -\omega_2 & 0 \\ -\omega_2 \quad \omega_1 \quad 0 & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} q$$

$$q_{k+1} = \exp\{A(\bar{\omega}) \cdot \Delta t\} q_k$$

$$r_{k+1} = \underbrace{A(q_{k+1})}_{I_{3\times3} - 2q_r[\hat{e}\times] + 2[e\times]^2} \bar{r}_m + u_{k+1}$$

$$q_k = \begin{bmatrix} \hat{e} \\ q_r \end{bmatrix}, \quad [q\times] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ירין הולצמר

שיעור 6

<u>נושאי השיעור:</u>

1. תזכורת - EKF
2. UKF

1. <u>תזכורת</u>: מסנן קלמן מורחב

$$x_{k+1} = f(x_k) + \omega_k$$

$$z_{k+1} = h(x_{k+1}) + u_{k+1}$$

אופן פעולה EKF - תעשה לינאריזציה ותפעיל מסנן קלמן.

2. <u>Unscented KF (UKF)</u>

מסנן חלקיקים מבוסס קלמן. זרימת עבודה של קלמן -

שערוך בייסיני

$$P(x_k | z_{1:k}) \xrightarrow[f]{\text{קידום בזמן}} P(x_{k+1} | z_{1:k}) \xrightarrow[z_{k+1}]{\text{עדכון מדידה}} P(x_{k+1} | z_{1:k+1})$$

$$\hat{x}_{k|k}, P_{k|k} \xrightarrow[f]{} \hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k} \xrightarrow[\hat{z}_{k+1}]{} \hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1}$$

(שערוכים מוקדמים: $\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}$; עדכון מדידה: $\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1}$)

מטריצת קווריאנס

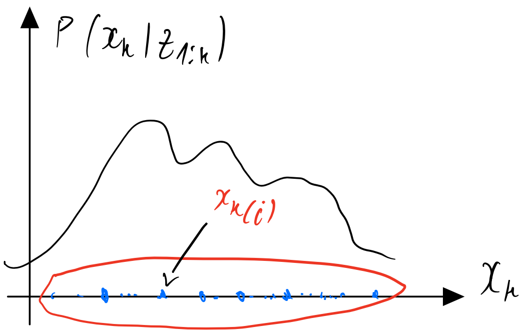
$$P_{k|k} = E\{(x_k - \hat{x}_{k|k})(\cdot)^T | z_{1:k}\} \geq 0 = A \cdot A^T =$$

$$= [A_1 | A_2 | \cdots | A_n] \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot A_i^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{n} A_i)(\sqrt{n} A_i)^T$$

$$S_i \triangleq \hat{x}_{k|k} + \sqrt{n}\, A_i \quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \hat{x}_{k|k})(\cdot)^T$$

$$x_k \sim P(x_k \mid z_{1:k})$$ דגימה מתוך צפיפות

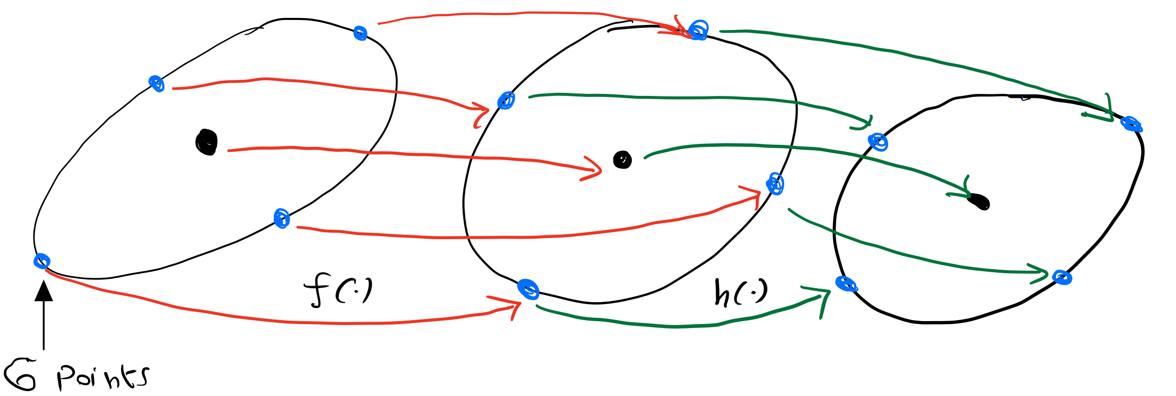
סימולציה של צפיפויות:



$$E\{x_k \mid z_{1:k}\} \approx \underset{\text{ממוצע}}{} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_k^{(i)} = \mu$$

$$Var(x_k \mid z_{1:k}) \approx \frac{1}{n}\sum_{1}^{i=1}\left(x_k^{(i)} - \mu\right)^2$$

$\hat{x}_{k|k},\ P_{k|k}$ $\qquad$ $\hat{x}_{k+1|k},\ P_{k+1|k}$ $\qquad$ $\hat{x}_{k+1|k+1},\ P_{k+1|k+1}$



UKF

1. Generate S Points: $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ –

$$S_0 = \hat{x}_{k|k}$$

$$S_i = S_0 + \sqrt{L}\, A_i, \quad i = 1, \dots, L \qquad (P_{k|k} = A A^T)$$

$$S_{i+L} = S_0 - \sqrt{L}\, A_i, \quad w_i = w_{i+L} = \frac{1}{2L}$$

2. Time Prop –

$$x_i = f(S_i), \qquad i = 0, \dots, 2L$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} w_i x_i,$$

$$P_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} w_i \left(x_i - \hat{x}_{k+1|k}\right)(\cdot)^T + Q_k$$

3. Regenerate S Points –

$$P_{k+1|k} = A \cdot A^T \longrightarrow S_i, \quad i = 0, \dots, 2L$$

4. Meas update –

מדידה חזויה $z_i = h(S_i), \quad i = 0, \dots, 2L$

$$\hat{z} = \sum_{i=0}^{2L} w_i \cdot z_i$$

$$\hat{S}_k = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i (z_i - \hat{z})(z_i - \hat{z})^T + R_k$$

$$C_{sz} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i (s_i - \hat{x}_{k+1|k})(z_i - \hat{z})^T$$

הגבר קלמן $K_{k+1} = C_{sz} (\hat{S}_k)^{-1}$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(z_{k+1} - \hat{z})$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - \underbrace{K_{k+1} \cdot (\hat{S}_k) \cdot K_{k+1}^T}_{C_{sz} \cdot (S_k)^{-1} C_{sz}^T}$$

$$\mathrm{cov}(\overset{x_{k+1}|z_{1:k}}{x} | \underset{z_{k+1}}{y}) = \overset{P_{k+1|k}}{\mathrm{cov}(x)} - \mathrm{cov}(x, y) \cdot \mathrm{cov}(y)^{-1} (\cdot)^T$$

ירין הויזלר

שיעור 7

נושאי השיעור:

1. Bayesian Filtering
2. SLLN
3. Importance Sampling
4. Particle Filtering

1. Bayesian Filtering

a. $P(x_{k+1} | z_{0:k}) = \int P(x_{k+1} | x_k) P(x_k | z_{0:k}) \, dx_k$

b. $P(x_{k+1} | z_{0:k+1}) \propto P(z_{k+1} | x_{k+1}) P(x_{k+1} | z_{0:k})$

2. SLLN

הערך מקורב ע״י ממוצע, אם ישנם מספיק חלקיקים.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x(i)) = E\{f(x)\}$$

$$\underbrace{x(i)}_{\text{sample, particle}} \sim P(x)$$

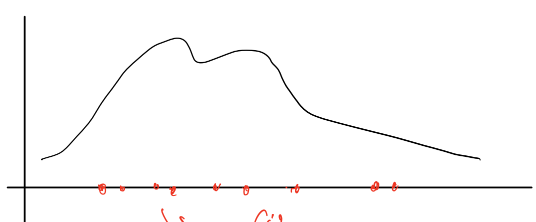
דגימה מתוך ההתפלגות $P(x)$:

$$\hat{P}(x_k | z_{0:k}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

$$x_k^{(i)} \sim P(x_k | z_{0:k})$$

$$\hat{P}(x_k | z_{0:k}) \xrightarrow[n \to \infty]{} E\{\delta(x_k - x_k)\} =$$

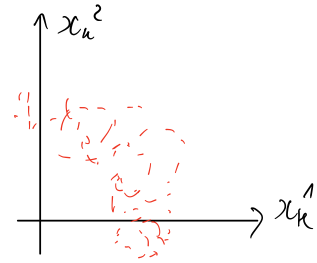
$$= \int \delta(x_k - x_k) P(x_k | z_{0:k}) \, dx_k = P(x_k | z_{0:k})$$



$$\hat{P}(X_k|z_{0:k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{Kr}(X_k - x_k^{(i)})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_k^{(i)})\underbrace{\hat{P}(x_k^{(i)}|z_{0:k})}_{= \begin{cases} 1/n, & x_k^{(i)} \text{ חלקיק} \\ 0 & \text{לא חלקיק} \end{cases}} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\{x_k|z_{0:k}\}$$

$\hat{P}(x_k|z_{0:k})$

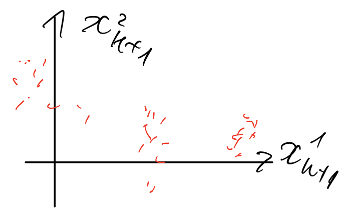


$$x_k^{(i)} = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix}$$

$P(x_{k+1}|x_k)$

$x_{k+1} = f(x_k, w_k)$

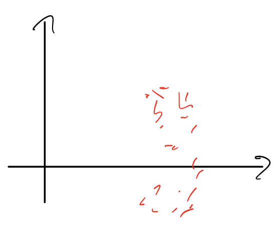
$\hat{P}(x_{k+1}|z_{0:k})$



$P(z_{k+1}|x_{k+1})$

$z_{k+1} = h(x_{k+1}, u_{k+1})$

$P(x_{k+1}|z_{0:k+1})$



3. Importance sampling

$x(i) \sim q(x)$ צפיפות ידועה

$$E_p\{f(x)\} = \int f(x)p(x)\,dx$$

Importance weight

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\underbrace{E_q\{f(x)\}}_{\int f(x)w(x)q(x)\,dx} = E_p\{f(x)\}$$

$q \geq p$ (domination: if $q=0$ then $p=0$)

$x(i) \sim q(x)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{w(x(i))}_{\text{משקלים}} f(x(i)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_q\{w(x)f(x)\} = E_p\{f(x)\}$$

$$E_q\{w(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)q(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

$x(i) \sim q(x)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x(i)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = E_q\{w(x)\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w(x(i)) \approx n$$

$$\tilde{w}(i) = \frac{w(x(i))}{\sum_{j=1}^{n} w(x(j))} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}(i) f(x(i)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_p\{f(x)\}$$

4. <u>Particle Filtering</u> (sequential monte-carlo)

$$\{x_k(i), \tilde{\omega}_k(i)\}_{i=1}^{n} \longrightarrow \hat{P}(X_k | Z_{0:k}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k(i)\, \delta_{\mathbb{R}^k}(X_k - x_k^{(i)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X_k | Z_{0:k})$$

a. Time propagation -

$$\hat{P}(X_k | Z_{0:k}) \longrightarrow \hat{P}(X_{k+1} | Z_{0:k})$$

$$\hat{P}(X_{k+1} | Z_{0:k}) = \int_{x_k} P(X_{k+1} | x_k)\, \hat{P}(x_k | Z_{0:k})\, dX_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_{k+1} | x_k(i))\, \tilde{\omega}_k(i)$$

$$x_{k+1} = f(x_k) \longrightarrow P(x_{k+1} | x_k) = \delta(x_{k+1} - f(x_k))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_{k+1} | x_k(i))\, \tilde{\omega}_k(i) = \begin{cases} \tilde{\omega}_k(i), & X_{k+1} = f(x^{(i)}) \\ 0, & \text{Else} \end{cases}$$

b. Sampling -

$x_{k+1}^{(i)} \overset{\text{לדגום}}{\sim} P(x_{k+1} \mid x_k^{(i)}) : \quad x_k^{(i)}$

$f(x_k, v_k(i)) \longrightarrow x_{k+1}^{(i)}$

$v_k(i) \sim P(v_k)$ צפיפות רעש

$\{ x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_k(i) \} \longrightarrow \hat{P}(x_{k+1} \mid z_{0:k}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} \delta(x_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})$$

$$x_{k+1}^{(i)} = f(x_k^{(i)}, v_k^{(i)}), \quad v_k^{(i)} \sim P(v_k)$$

for $i = 1, \dots, n$

obtain: $\{ x_k, \tilde{\omega}_k^{(i)} \}$

$$\hat{P}(x_{k+1} \mid z_{0:k+1}) \propto P(z_{k+1} \mid x_{k+1}) \hat{P}(x_{k+1} \mid z_{0:k})$$
$$= P(z_{k+1} \mid x_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} \delta(x_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})$$

$$\hat{P}(x_{k+1}^{(j)} \mid z_{0:k+1}) \propto P(z_{k+1} \mid x_{k+1}^{(j)}) \tilde{\omega}_k^{(j)}$$

$$w_k = \frac{p(x_k \mid z_{0:k})}{q(x_k \mid z_{0:k})},$$

$$w_{k+1} = \frac{p(z_{k+1} \mid x_{k+1})\, \cancel{p(x_{k+1} \mid x_k)}\, p(x_k \mid z_{0:k})}{\cancel{p(x_{k+1} \mid x_k)}\, q(x_k \mid z_{0:k})}$$

$q(x_{k+1} \mid z_{0:k})$

$$w_{k+1} = p(z_{k+1} \mid x_{k+1})\, w_k$$

c. measurement update-

$$\tilde{w}_{k+1}^{(i)} = p(z_{k+1} \mid x_{k+1}^{(i)})\, \tilde{w}_k^{(i)}, \quad \text{for } i = 1, \dots, n.$$

$$\tilde{w}_{k+1}^{(i)} = \frac{w_{k+1}^{(i)}}{\sum_{j=1}^{n} w_{k+1}^{(j)}}$$

Init: $\{ x_0^{(i)}, 1/n \}_{i=1}^{n}, \quad x_0^{(i)} \sim p(x_0)$

Estimation: $$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_{k+1}^{(i)} x_{k+1}^{(i)}$$

$$C_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_{k+1}^{(i)} (x_{k+1}^{(i)} - \hat{x}_{k+1})(\cdot)^T$$

d. Particle degeneracy -

לאחר מס' צעדים של הזמן כל החלקיקים חוץ מאחד נשארים "חיים"
משום שמשקלים מתאפסים.

$$w_{k+1} = \frac{P(x_{k+1} | x_k)}{q(x_{k+1} | x_k)} \cdot w_k$$

$$w_k = \prod_{i=1}^{K} \frac{P(x_{i+1} | x_i)}{q(x_{i+1} | x_i)}, \qquad x_0, x_1, \dots, x_k \sim q$$

$$\frac{1}{K} \log w_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{P(x_i)}{q(x_i)} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{x_i \sim q} E_q\left\{\log \frac{p(x)}{q(x)}\right\} < \log E_q\left\{\frac{P(x)}{q(x)}\right\} = 0$$

עבור K גדול.

$$\frac{1}{k} \log w_k \approx \underbrace{-E_q\left\{\log \frac{q(x)}{p(x)}\right\}}_{KL(q||P)} \leq 0 \qquad (KL = 0 \text{ if } P = q)$$

$$w_k = e^{-k \cdot KL(q||P)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} 0, & P \neq q \\ 1, & P = q \end{cases}$$

e. Resample – $(n_{eff} < \alpha \cdot n)$ $\alpha = 2/3$

$$\{ x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)} \} \xrightarrow[\text{sample}]{} x_{k+1}^{(i)} \text{ w.p } \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)}$$

$$\{ \bar{x}_{k+1}^{(i)}, 1/n \}$$

$$\bar{x}_{k+1}(j+m) = x_{k+1}^{(i)} + \xi_m \qquad m = 0, \ldots, \lfloor \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)} \cdot n \rfloor - 1$$

רעש רגולריזציה (פיזור של חלקיקים)

$$n_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_{k+1}^{2}}$$

PF (SIR)

1. $\{ x_k^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)} \} \xrightarrow{P(x_{k+1}|x_k)} \{ x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)} \}$
2. $\{ x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)} \} \xrightarrow{P(z_{k+1}|x_{k+1})}$ $\quad z_{k+1} = h(x_{k+1}) + u_{k+1}$
$\quad = P_{u_{k+1}}(z_{k+1} - h(x_{k+1}^{(i)}))$
3. $\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)} x_{k+1}^{(i)}$
4. $n_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_{k+1}^{2}}$
5. if $n_{eff} < 2/3\, n$ then Resample: $\{ \bar{x}_{k+1}^{(i)}, 1/n \}$

ירן קויזלר

שיעור 8

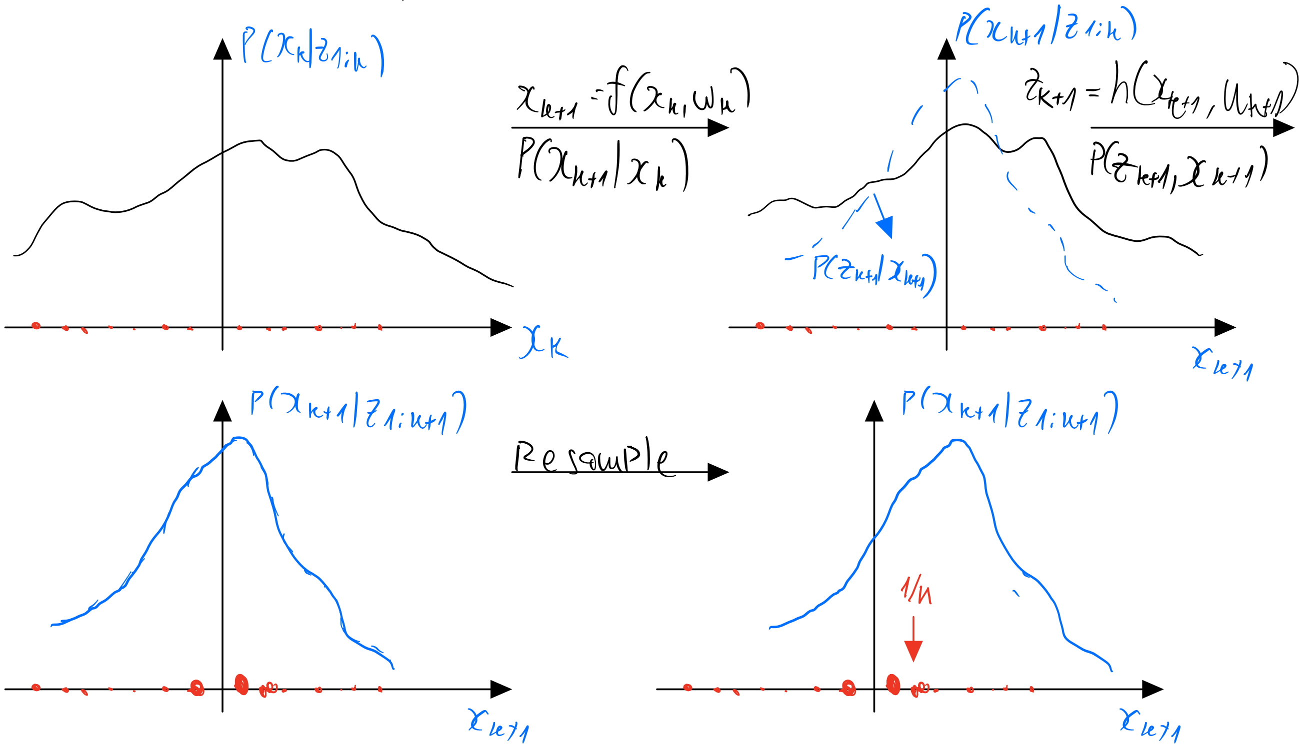
נושאי השיעור:

1. מסנן חלקיקים
2. SIR PF Resampling
3. Regularized PF
4. יישום של מסנן חלקיקים
5. Rao-Blackwellization
6. נקוי עקבות

1. מסנן חלקיקים (PF)

Filtering density-

$$\hat{P}(x_k|z_{1:k}) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k(i) \cdot \delta(x_k - x_k(i))$$



2. SIR-PF Resampling

for $i = 1, \dots, n$

$\quad m = \lfloor n\tilde{\omega}_k^{(i)} \rfloor$

$\quad \bar{x}_k(j+l) = x_k^{(i)}, \quad l = 1, \dots, m$

$\vdots$

$\longleftarrow \{x_k^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)}\}$

$$j \longrightarrow j+m$$

$$\left\{\bar{x}_k^{(i)},\ 1/n\right\}_{i=1}^{n}$$

⋮

3. Regularized-PF

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} (x_k^{(i)} - \hat{x}_k)(\cdot)^T \qquad \hat{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

$$A = \sqrt{\hat{P}_k} \qquad \text{(Cholesky)} \qquad \hat{P}_k = AA^T$$

for $i = 1, \dots, n$

$$m = \lfloor n\, \tilde{\omega}_k^{(i)} \rfloor$$

$$\bar{x}_k(j+l) = x_k^{(i)} + \varepsilon \cdot A \cdot \xi_l \,, \qquad l = 1, \dots, m$$

$$\xi_l \sim N(0, I)$$

$$j \longrightarrow j+m$$

א. יישום מסנן חלקיקים במערכת גאוסית/יוניפורמית

מערכת -

$$x_0 \sim N(\hat{x}_0, P_0)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \qquad w_k \sim U[-a, a]$$

$$u_k \sim N(0, R)$$

$$z_{k+1} = h(x_{k+1}) + u_{k+1}$$

מעוניינים, משערך MME של x_k בהינתן $z_{1:k}$

$$\hat{x}_k = E\{x_k | z_{1:k}\} \approx \hat{E}\{x_k | z_{1:k}\} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

a. Initialization:

$$x_0^{(i)} \sim N(\hat{x}_0, P_0), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\tilde{\omega}_0(i) = 1/n$$

for $k = 0, \dots$

b. Prediction/propagation:

$$\{x_k^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)}\} \longrightarrow \{x_{k+1}^{(i)} = A_k x_k^{(i)} + B_k \cdot \eta^{(i)}, \ \tilde{\omega}_k^{(i)}\}$$

c. if z_{k+1} available:

$$N(z_{k+1} - h(x_{k+1}^{(i)}), R) \propto \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(z_{k+1} - \dots)^T R^{-1} (\dots)\right\}$$

$$\{x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_k^{(i)}\} \longrightarrow \{x_{k+1}^{(i)}, \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)} = P(z_{k+1} | x_{k+1}^{(i)}) \tilde{\omega}_k^{(i)}\}$$

d. Compute estimator:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_{k+1} x_{k+1}^{(i)}$$

e. if $N_{eff} = \dfrac{1}{\sum_i \tilde{\omega}_{k+1}^{(i)2}} < \dfrac{2}{3} n \longrightarrow$ Resample.

5. Rao-Blackwellization

אלגוריתם משולב -

$$P(x_k, y_k | z_{1:k}) = \underbrace{P(x_k | y_k, z_{1:k})}_{PF} \underbrace{P(y_k | z_{1:k})}_{KF}$$

פיצול הדגימות ל-2.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_k, y_k, w_k^x) \\ f_y(x_k) + A y_k + w_k^y \end{bmatrix}$$

x_{k+1}: $P(x_{k+1} | x_k, y_k)$

y_{k+1}: $P(y_{k+1} | x_k, y_k) = N(y_{k+1} - f_y(\cdot) - A_x y_k, Q)$

$$w_k^y \sim N(0, Q)$$

$$\begin{bmatrix} z_{k+1}^x \\ z_{k+1}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^x(x_{k+1}, y_{k+1}) + u_{k+1}^x \\ h^y(x_{k+1}) + H y_{k+1} + u_{k+1}^y \end{bmatrix}$$

z_{k+1}^x: $P(z_{k+1}^x | x_{k+1}, y_{k+1})$

z_{k+1}^y: $P(z_{k+1}^y | x_{k+1}, y_{k+1}) = N(z_{k+1}^y - h^y(x_{k+1}) - H y_{k+1}, R)$

6. זיהוי תקלות

$P(z_{k+1} | z_{1:k})$ – evidence

$$= \int_{x_{k+1}} P(z_{k+1} | x_{k+1}) P(x_{k+1} | z_{1:k}) \, dx_{k+1} \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} \underbrace{p(z_{k+1} \mid x_{k+1}^{(i)})}_{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z^m_{k+1} - x_{k+1}^{(i)} - D(\theta_{k+1}^{(i)}) r^m\right)^T R^{-1} (\cdot)\right\}} < \varepsilon$$

$$\approx p(z_{k+1} \mid \overbrace{\hat{x}_{k+1|k}}^{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_k^{(i)} x_{k+1}^{(i)}})$$

$$p\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \middle| z_{1:k}\right) = p(x_k \mid y_k, z_{1:k})\, p(y_k \mid z_{1:k})$$

$$\neq p(x_k \mid \hat{y}_k, z_{1:k})\, p(y_k \mid \hat{x}_k, z_{1:k})$$