2.א. נראה שפתרון למערכת הוא אכן VC ממשקל מינימלי. בהנתן פתרון , הרי שמתקיים לכל קשת

וכל קדקד מתקיים לכן נוכל לקחת את כל הקדקדים ונקבל בהכרח VC, כי לכל קשת מתקיים האילוץ (\*) ולכן לכל קשת בהכרח בחרנו או קדקד i או קדקד j או את שניהם (הגדרה של VC). כעת, נראה שהVC שקיבלנו הוא ממשקל מינימלי:  
מפני שקיבלנו פתרון למערכת המוגדרת, הוא בהכרח מניב תוצאה מינימלית לפונקציית התוצאה : הפונקציה הזו למעשה מגדירה משקל מינימלי על כל הקדקדים שכן נבחרו (כל הקדקדים שהמשתנה שלהם קיבל 1) שכן שאר הקדקדים הם אפס ולכן לא נתייחס למשקל שלהם.

כעת נראה את הכיוון ההפוך – שכל VC ממשקל מינימלי אכן נותן פתרון למערכת:

כל קדקד i נמצא בVC וגם המשקל של הVC נשאר מינימלי בהוספת i כלומר פונקציית התוצאה שומרת על מינימליות.

2.ב. בהנתן פתרון לבעיה נקח את כל הקדקדים כך ש. כעת אנחנו מחפשים מינימום (פונקציית התוצאה) על תחום גדול יותר של ערכים ולכן נוכל לקבל מינימום יותר קטן. נניח כי opt הוא הפתרון האופטימלי לבעיה (VC ממשקל מינימלי) ונניח כי opt\* הוא הפתרון למערכת שלנו. לכן מתקיים

לכן הפתרון שנסיק מהמערכת הוא 2 קירוב לבעיה המקורית.

\*\*עם הנתון הנוסף שקיבלנו ניתן להסיק כי כי כל הקדקדים שנבחר  
ערכם של המשתנים המתאימים יהיו חצי או אחת, והשאר אפס. לכן אם נכפיל ב2  
נקבל בדיוק סכום של משתנים שערכם 1, כלומר בדיוק פתרון בשלמים לבעיה.

2.ג. אנחנו מחפשים פתרון שמקיים את האילוצים לכל קשת ולכן נוכל להעביר קשתות רק בין זוגות שסכום ערכיהם גדול מ1: והסימטריים בהתאמה.

2.ד.

3.א.הטענה אינה נכונה. נתבונן בגרף הבא:

A

B

בגרף הנ"ל C הוא DS: לכל קדקד A,B   
קימת קשת שמחברת אותו עם C.   
לעומת זאת, C אינו VC, כי לקשת (A,B) אין שום קדקד מייצג בVC.על מנת לקבל VC חוקי יש להוסיף את A או B.  
3.ב. הטענה נכונה. יהי גרAף. נניח A הוא VC. לכן לכל קשת מתקיים:   
כעת נראה כי A הוא DS: יהי קדקד . אם הוא מבודד, הוא בA והמקרה הזה טריויאלי. כעת נניח שיש קשת המחברת אותו עם קדקד אחר v. כיוון ש נקבל מיידית ש כלומר קיים קדקד vבA שיש ביניהם קשת. וזו בדיוק ההגדרה של DS.

**C**

3.ג. נרצה לבנות פונק' f פול' כך ש:

בהנתן <G,k>, נחזיר את הפלט הבא:

נוכיח שהפלט הוא SC אמ"מ הקלט הוא DS:   
נניח . אזי יש ב G קבוצה A בגודל<= k כך שA היא DS. כלומר .  
לכן אם נרשום עבור כל קדקד בA קבוצה שמכילה אותו ואת שכניו ונאחד את הקבוצות, נקבל את V. נניח בשלילה שלא, אז קיים קדקד u שלא באחת הקבוצות, כלומר u לא שכן של אף אחד מהקדקדים ב DS בסתירה לכך שזה DS. כעת, נבחין כי מספר הקבוצות יהיה <=k שכן מספר הקדקדים בA הוא לכל היותר k.   
בכיוון השני, נניח שהפלט שלנו אכן SC. אזי הגרף המקורי שלנו יהיה גרף בו לכל קדקד i שכניו הם הקבוצה . וידוע שיש מספר של קבוצות שהאיחוד שלהם יביא לV. במילים אחרות יש קבוצה בגודל לכל היותר K של קדקדים שאם מסתכלים על כל שכניהם מקבלים את V וזה בדיוק עונה על ההגדרה של DS. מש"ל.  
הרדוקציה פול' כי בהנתן גרף מבצעתO(|V|+|E| )פעולות.

3.ד. נרצה לבנות פונק' הפוכה לפונק הקומת. אבל זה כבר קל: בהנתן קלט *נבנה גרף באופן הבא: לכל איבר מU יהיה קדקד. הקשתות:  
נחזיר <G,k>  
כעת, הקלט הוא SC ↔ ידוע כי יש איחוד של לכל היותר Kקבוצות שיוצר את U. כלומר ישנם K קדקדים שאם מאחדים אותם ואת שכניהם מקבלים בדיוק את V. ↔לכל קדקד שלא בקבוצה הזו יש קדקד מהקבוצה שמחובר אליו בקשת ↔ הקבוצה הנ"ל היא DS↔.  
הרדוקציה פול' כי בסך הכל עוברת על הקלט ובונה גרף בהתאם (מעבר בודד על הקלט).*

3.ה. נתאר אלגוריתם: בכל שלב נבחר את הקדקד שמתחבר אל הכי הרבה קדקדים לא מסומנים ונצרף ל DS שלנו. נסמן את הקדקדv שבחרנו ולכל שכן שלוu , נסמן אותו אם לכל שכןw של u או ש w שכן של v או ש w סומן כבר . נמשיך בלולאה עד שלא יוותרו קדקדים לסמן. נחזיר את DS.

נניח שיש לנו m קדקדים בגרף.  
תחילה, נשים לב כי בהינתן DS בגרף מגודל opt יש בו קדקד שדרגתו לפחות . נניח בשלילה שלא אז יש לנו בDS opt קדקדים, ובגגרף יש m קדקדים, אז נקבל שמס' הקדקדים שמתחברים לקדקדים בDS הוא:  
אבל כיוון ש זו סתירה (יש מחוץ לDS פחות קדקדים ממה שאמורים להיות.)

נסמן ri מספר הקדקדים שלא סומנו עד השלב הi. r0 = m.  
כעת, כיוון שיש לנו DS בגודל opt, נקבל כי בכל שלב נסמן לפחות קדקדים.  
לכן בשלב הראשון האלגוריתם יסמן לפחות. כעת, מספר הקדקדים שלא סומנו עד שלב מסויים יהיה קטן ממס' הקדקדים שלא סומנו עד השלב הקודם פחות מס' הקדקדים שסימננו כלומר:

לאחר Topt צעדים נקבל: .   
כעת, נראה מה קורה כאשר :

כלומר מס' הקדקדים שלא סומנו הוא 0. לכן בהכרח נסיים לפניln(m)+1 צעדים. בכל צעד בחרנו קדקד בודד לקבוצה ולכן עלות האלג' היא Topt = (lnm+1)opt צעדים. כלומר קירוב של lnm.

4.א. בהנתן

נבנה גרף באופן הבא: כל איבר בU ייצג קשת. לכל קבוצה Si נוציא לפלט קדקד i. הקשתות:

*נחזיר את G.  
הקלט בSC(2) ↔ קיים איחוד של k קבוצות לכל היותר מתוך שנותן את U. במילים של הפלט: קיימים k קדקדים לכל היותר שנוגעים בכל הקשתות.↔יש VC בגודל לכל היותר K.   
כיוון שהקלט בSC(2) אז כל איבר בU מופיע לכל היותר בשתי תתי קבוצות S. כלומר כל קשת בגרף תהיה מחוברת ללכל היותר 2 קדקדים בבנייה שלנו (שזה בדיוק מה שצריך כי זו קשת). ובאופן הזה יהיו לנו K קבוצות שבפלט מיוצגות על ידי K קדקדים, שאם נאחד אותן (את הקבוצות), נקבל את כל הקשתות (U) . כלומר אם נסתכל על הקשתות שיוצאות מכל הK קדקדים שבחרנו, נקבל את כל קשתות הגרף שזו בדיוק הגדרת VC – לכל קשת או קצה אחד בקבוצה או הקצה השני. אם הקלט היה רק SC(i) כך ש אז לא היינו יכולים לבנות גרף כי הייתה קשת שמחברת בין קדקד i לקדקד j שאותה קשת מחברת בין קדקד I לקדקד u בסתירה להיותה קשת.*

*4.ב.*

*5.א. נניח k=1. יהי ונניח . אזי  
  
 האלגוריתם הזה מקרב את הרדיוס האופטימלי קירוב 2. כנדרש.  
5.ב. יהי אזי  
   
5.ג.   
כאשר המעבר הראשון נובע מכך שבכל שלב באלגוריתם הוספנו את האיבר הכי רחוק מהקבוצה S לקבוצה. לכן לא יכול להיות בS קדקד שיותר קרוב לשאר קדקדי הקבוצה מאיזשהו קדקד ארביטררי בגרף.*

*5.ד. הוכחנו באינדוקציה שהאלגוריתם יוצר קבוצה S שהמרחק מכל קדקד לקבוצה הואלכל היותר פעמיים המרחק מהקבוצה האופטימלית. לכן האלגוריתם מבצע 2קירוב לתוצאה האופטימלית. מש"ל.*