Билет №8: 1) Ур-ие движ невязкой нетеплопров. жидк в перем. Лагр. 2) известен закон изменения скорости в коорд Лагр. $v(\xi,t)=\xi+t$, $t_0=0$. Найти $v(x,t)$ в коорд Эйлера

Билет №1: 1) Подходы Эйлера и Лагр для описания движения сплошной среды. Связь лагр. и эйлеровой произв. $\frac{D}{Dt}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$. 2) Применяя закон сохр. массы записанный в одномерном случ. получить выражение для скорости стац. движ $v(x)$, если плотность зависит от коорд. как

$$\rho(x,t)=\frac{1}{1+x^2}$$

Билет №9. 1) Вывод ур-ия энергии. 2) Известен закон изменения скорости в коорд Эйлера $v(x,t) = xt$, $t_0 = 0$. Найти $v(\xi, t)$ в коорд Лагр.

Билет №10 1) Используя формулу связи лагр и эйлеровой произв. а так же ур-ие неразрывн в коорд эйлера для сплош. ~~жидк~~ среды, получить ур-ие неразр. в коорд Лагранжа.

2) Представить тензор $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ в виде суммы:

1) шарового тензора и девиатора. 2) полученный девиатор представить в виде суммы симметр и ассим тензоров.

Билет №2: 1) Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа и переход от переменных Лагр. к Эйлеру, если известно поле скорости. Роль определителя Якоби.

2) Используя ур-ие неразрывности в коорд Эйлера для сплош. ~~среды~~ среды, показать что полной производной по времени логарифма ур. объема $\frac{1}{\rho}$ равна $\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) = \operatorname{div}\vec{v}$, $\vec{v}$ - вектор скорости

Билет №5: 1) Получить ур-ие изменения кин. энергии $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right)$ в перем Эйлера. 2) Движение мат. точки на плоскости ~~по~~ подчин. закону $\vec{v}(x,y) = \alpha\vec{r}$, Найти $x(\xi,\eta,t)$ и $y(\xi,\eta,t)$ ξ,η - коорд Лагранжа, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

~~Билет №4: 1) ур-ие неразр. в Эйлер. коорд. Ур-ие для несжим. жидк. 2) Для ур-ий из 1 в Лагр коорд выразить $v(x,t)$ если зависимость $\rho(x,t) = t^2$~~

Билет №3: 1) Ур-ие неразр в перем. Эйлера. Ур-ие неразр в перем Эйлера в случае несжим жидк.

2) Движ. мат. точки по плоск подчин. закону $\vec{v}(x,y) = \vec{i}$. Найти $x(\xi,\eta,t)$ и $y(\xi,\eta,t)$ ξ,η - лагр. или положение точки при $t=0$

Билет №4 1) Ур-ие неразрывности в переменных Лагранжа. Ур-ие неразр в перем. Лагр. в случае несжим. жидкости. 2) Используя в 1 ур-ие неразр в перем. Эйлера получить выражение для скорости $v(x,t)$ если плотность зависит от времени как $\rho(x,t) = t^2$.

Билет №6 1) Получить выражения изменения внутр энергии $\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}$, используя II закон термодинамики и связь энтальпии и внутр. энергии. 2) В коорд Эйлера известны законы изменения скорости $v(x,t) = t$, $t_0 = 0$ и некоторой скалярной величины, например температуры $T(x,t) = \frac{x}{t}$. Найти $T(\xi, t)$ координатах Лагранжа и проверить формулу связи производных, записанную для температуры $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}$.

Билет №7. 1) Ур-ие движения невязкой жидк. в перем Эйлера. Привести пример массовой силы. 2) Движ. мат. точки по плоскости подчин. закону $\vec{v}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Найти $x(\xi,\eta,t)$ и $y(\xi,\eta,t)$ ξ,η - коорд Лагр. Вычислить Якобиан $\Delta^{(x,y)} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right|$.

Билет 1) Ур-ие движения невязкой нетеплопроводной жидк в перем. Лагр. 2) Известен закон измен. скорости в коорд Лагр $v(\xi,t) = \xi + t$, $t_0 = 0$. Найти $v(x,t)$ в коорд. Эйлера.

Билет №1

1) $\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right) = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\rho$ $\boxed{\rho(x,t) = \frac{1}{1+x^2}}$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$0 = v \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Big| \cdot (1+x^2)$

$\frac{2xv}{1+x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial v}{\partial v} = \int \frac{\partial x \cdot 2x}{1+x^2} \Rightarrow \ln \tilde{C} v = \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln \tilde{C} v = \ln(x^2+1)$ $\tilde{C} v = x^2+1 \Rightarrow \boxed{v = C(x^2+1)}$

Билет №2

1) Эйлера → Лагранжа:

$\vec{v}(\vec{x},t)$ $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$ $\vec{x}(0) = \vec{\xi}(0)$

Лагранжа - Эйлера: $\vec{v}(\vec{\xi},t) \to x(\xi,t) = x\Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t} v(\vec{\xi},\tau)\,d\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\xi}(\vec{x}) \to \vec{v}(\vec{\xi},t) \Rightarrow v(\vec{x},t)$

$\Delta^{(x,\xi)} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right|$.

2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$

~~Билет №3~~

$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v\nabla)$

$\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\rho$

$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\operatorname{div}\vec{v}$

$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = \frac{d\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\cdot\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho}\cdot(-\rho\operatorname{div}\vec{v}) = \operatorname{div}\vec{v}$

Билет №3

1) $\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint \rho \vec{v}\vec{n}\,dS = -\int_{V_0}\operatorname{div}(\rho\vec{v})dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\vec{v})}$. Для случая несжим. жидкости $\rho = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0}$

2) $\vec{v}(x,y) = \vec{i}$ $x(\xi,\eta,t)$ - ? $y(\xi,\eta,t)$ - ? $x(0) = \xi$, $y(0) = \eta$

$\frac{\partial x}{\partial t} = 1 \Rightarrow x = t + C_1$ $x(0) = C_1 = \xi$ $x = t+\xi$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Rightarrow y = C_2$ $y(0) = C_2 = \eta$

$y = \eta$

Билет 4

1) $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec v\nabla)\rho$ $\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -div(\rho\vec v)$

$\frac{d\rho}{dt} = (\vec v\nabla)\rho - div(\rho\vec v)$ $\quad div(\rho\vec v) = v\, grad\,\rho + \rho\, div\,\vec v$

$\frac{d\rho}{dt} = (v\nabla)\rho - v\, grad\,\rho - \rho\, div\,\vec v$

2) $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial\rho v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -v\frac{\partial\rho}{\partial x} - \rho\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad \rho = t^2$

$\cancel{0 - v\,2t - t^2\frac{\partial v}{\partial x}}$ $\quad 2t = -t^2\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$ $\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 2t$

$\Rightarrow \partial v = -2\frac{\partial x}{t}$ $\quad v = -2\frac{x}{t} + C.$ $\quad \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$

Билет №5

1) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v^2}{2\partial t} = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec v\frac{\partial v}{\partial t} =$

$= \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{grad\,p}{\rho} - (\vec v\nabla)\vec v \right\rangle = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\vec v\left(\frac{grad\,p}{\rho} + (\vec v\nabla)\vec v\right) =$

$= \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\vec v\frac{grad\,p}{\rho} - \rho\vec v(\vec v\nabla)\vec v = \left\langle \begin{matrix} grad\,Q = T\,grad\,S - \frac{grad\,p}{\rho} \\ grad\,p = \rho\cdot grad\,Q - \rho T\,grad\,S \end{matrix} \right\rangle =$

$= \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec v\,T\,grad\,S - \rho\vec v\,grad\,Q - \rho(\vec v\nabla)\frac{\vec v^2}{2} = \left\langle \frac{\partial\rho}{\partial t} = -div(\rho v) \right\rangle =$

$= -\frac{v^2}{2}div(\rho\vec v) - \rho(\vec v\nabla)\left(Q + \frac{v^2}{2}\right) + \rho T(\vec v\nabla)S.$

2) $\vec v = \alpha\vec r$ $\quad \frac{\partial\vec r}{\partial t} = \alpha\vec r \Rightarrow \int\frac{\partial\vec r}{r} = \int\alpha\,\partial t \Rightarrow \ln\tilde C\vec r = \alpha t \Rightarrow \vec r = \tilde C e^{\alpha t}$

$x = C_1\cdot e^{\alpha t}$ $\quad y = C_2\cdot e^{\alpha t}$ $\quad \Rightarrow x = \xi\cdot e^{\alpha t}$

$x(0) = C_1 = \xi$ $\quad y(0) = C_2 = \eta$ $\quad y = \eta\cdot e^{\alpha t}$

Билет №6

1) $d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \left(W - \frac{p}{\rho}\right)d\rho + \rho\,d\left(W - \frac{p}{\rho}\right) =$

$= \left(W - \frac{p}{\rho}\right)d\rho + \rho\left(dW - \frac{\rho\,dp - p\,d\rho}{\rho^2}\right) = \left(W - \frac{p}{\rho}\right)d\rho + \rho\,dW - dp + \frac{p\,d\rho}{\rho} =$

$= W\,d\rho + \rho\,dW - (\rho\,dW - \rho T\,dS) = W\,d\rho + \rho T\,dS.$

2) $v(x,t) = t$ $\quad T(x,t) = \frac{x}{t}$

$T(\xi,t) - ?$

$\frac{\partial x}{\partial t} = t \Rightarrow \int\partial x = \int t\,\partial t \Rightarrow x = \frac{t^2}{2} + C$ $\quad x(0) = C = \xi \Rightarrow x = \frac{t^2}{2} + \xi$

$T(x,t) = \frac{x}{t} = \frac{\frac{t^2}{2} + \xi}{t} = \frac{t}{2} + \frac{\xi}{t} = T(\xi,t)$

$\frac{dT(\xi,t)}{dt} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\cdot\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{\xi}{t^2} = 1 - \frac{x}{t^2} \cancel{+ \frac{t}{2}} = 1 - \frac{\xi + t^2/2}{t^2}$

Билет №7 1) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}$

2) $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x \end{cases} \Rightarrow -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = x \Rightarrow$ $x'' + x = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$y = -\frac{\partial x}{\partial t}$ $\lambda = \pm i$

$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ $x(0) = C_2 = \xi$

$y = -\frac{\partial x}{\partial t} = -C_1 \cos t + C_2 \sin t.$ $y(0) = -C_1 = \eta$

$\begin{cases} x = \xi \cos t - \eta \sin t \\ y = \xi \sin t + \eta \cos t \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1.$

Билет №8 1) $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}$

2) $v(\xi, t) = \xi + t.$

$x(\xi, t) = \xi + \int_0^t (\xi + t)\,dt = \xi + \xi t + \frac{t^2}{2} = x.$ $\xi = \frac{(2x - t^2)}{2(1+t)}$

$v(x,t) = \frac{2x - t^2}{2(1+t)} + t = \frac{t^2 + 2(x+t)}{2(1+t)}.$

Билет №9 1) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \rho\frac{v^2}{2}\right) = -W\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \rho T(\vec{v}\nabla)S - \frac{v^2}{2}\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \rho\left(\vec{v}\nabla\left(W + \frac{v^2}{2}\right)\right) + \rho T(\vec{v}\nabla)S = -\left(W + \frac{v^2}{2}\right)\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \rho\left(\vec{v}\nabla\left(W + \frac{v^2}{2}\right)\right) =$

$= -\operatorname{div}\left[\rho\vec{v}\left(W + \frac{v^2}{2}\right)\right]$ $\boxed{\rho\vec{v}\left(W + \frac{v^2}{2}\right)}$ - вектор плотности потока энергии

2) $v(x,t) = xt$

$\frac{\partial x}{\partial t} = v(x,t) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = xt \Rightarrow \int \frac{\partial x}{x} = \int t\,\partial t \Rightarrow \ln \tilde{C}x = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \tilde{C}x = e^{t^2/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C \cdot e^{t^2/2}$ $x(0) = C = \xi \Rightarrow x = \xi \cdot e^{t^2/2}.$

Билет №10

1) $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$. $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho\vec{v})$.

$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho$. $\quad \frac{d\rho}{dt} = (\vec{v}\nabla)\rho - div(\rho\vec{v})$

2) $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = p \cdot \sigma_{ij} + S \qquad p = \frac{1+5+9}{3} = 5$

$$\sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{шаровой}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{девиатор} = T}$$

$T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

$+ \quad = T$.

$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$