МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**Снежинский физико-технический институт-**

Филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**(СФТИ НИЯУ МИФИ)**

Кафедра высшей и прикладной математики

**КУРСОВОЙ ПРОЕКТ**

**по дисциплине: «Численные методы решения математической физики на неортогональных сетках»**

Тема: «Сравнение различных способов расчета градиента скалярной функции на регулярных, неортогональных сетках»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил:  студент группы ПМ21м  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.Д. Нецветаева  студент группы ПМ21м  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_П.Р. Сиднева  Проверил:  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Э.М.Вазиев  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022г. |

Снежинск

2022

**Содержание**

[Введение 4](#_Toc121944927)

[1. Метод Гаусса - Грина 4](#_Toc121944928)

[2. Метод наименьших квадратов (МНК) 8](#_Toc121944929)

[3. Практическое вычисление градиента в ячейке 11](#_Toc121944930)

[4. Результаты практического вычисления градиента 12](#_Toc121944931)

[4.1. Задача №1 12](#_Toc121944932)

[4.2. Задача №2 16](#_Toc121944933)

[Заключение 20](#_Toc121944934)

[Приложение А 21](#_Toc121944935)

Цель курсового проекта: сравнить различные способы расчета градиента скалярной функции на неортогональных сетках. Написать программу в среде MatLab для вычисления градиента в ячейке методами, изученными в ходе лекций.

Задачи курсового проекта:

1. Изучить такие методы расчета градиента как:

* Метод Гаусса-Грина;
* Метод наименьших квадратов.

1. Написать программу для расчета градиента для обоих методов.
2. Получить результаты на равномерных и неравномерных сетках для нескольких задач.
3. Получить и сравнить показатели норм и порядка сходимости для обоих методов.

# Введение

Для численного решения задач переноса и теплопроводности в двумерной постановке на неортогональной сетке возникает задача вычисления градиента функции в ячейке, если известны значения самой функции в этой и соседних ячейках.

Этой задаче и посвящена данная курсовая работа.

# Метод Гаусса - Грина

Одним из часто используемых методов для вычисления градиента сеточной функции является метод Гаусса–Грина:

где - область интегрирования, – граница области .

Допустим постоянен в области интегрирования, тогда:

Допустим - некоторая ячейка 0, окружённая кусочно-линейным контуром по множеству узлов , тогда перейдём от интегрирования к суммированию:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где множество узлов;

сумма двух нормалей границ, содержащих точку k;

площадь области (ячейки).

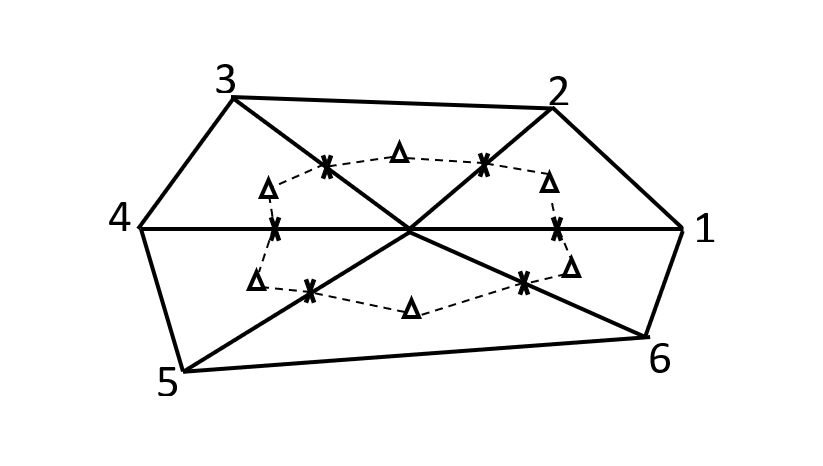
Пример №1. Рассмотрим неравномерную по углу сетку (рис.1).

1. Способ №1:

Имеется неортогональная неравномерная по углам сетка с равными длинами ребер.

длина ребра

Контур проводим через середину ребер к центрам ячейки (рис. 1)



π/6

π/3

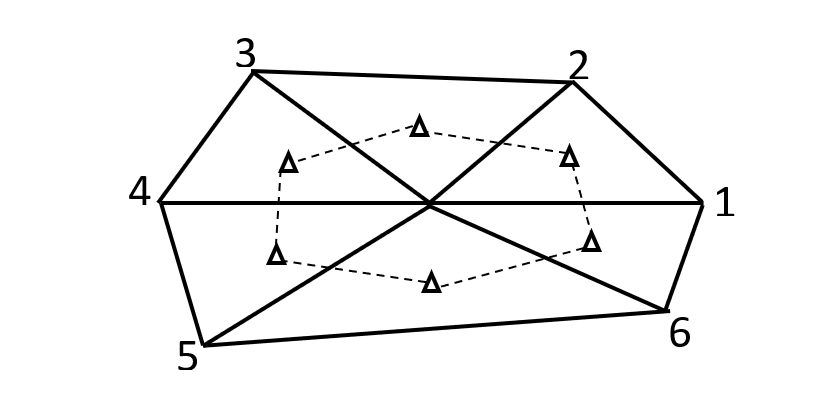
Рисунок 1- неравномерная по углам сетка с контуром через середины ребер

Оценка погрешности метода Гаусса-Грина для выше рассмотренной сетки получена разложением в ряд Тейлора:

т.к. первого порядка, то формула дает первый порядок точности.

1. Способ №2:

Имеется неортогональная равномерная сетка. Контур проводим напрямую к центрам ячейки (рис. 2)



π/6

π/3

Рисунок 2 – неравномерная по углам сетка с контуром через центры ячеек

Оценка погрешности метода Гаусса-Грина для сетки (рис.2) получена разложением в ряд Тейлора:

Так же получили первый порядок точности.

Пример №2. Рассмотрим равномерную неортогональную сетку (рис.3).

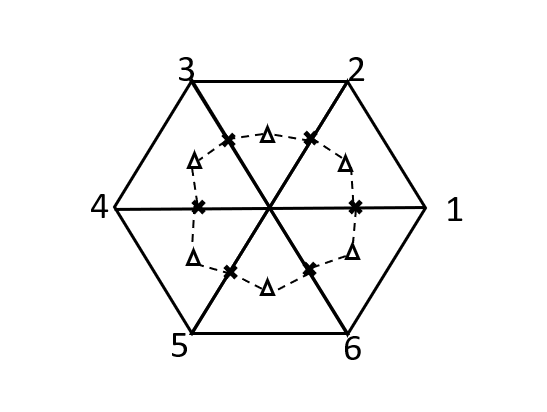


Рисунок 3 – равномерная сетка

Рассматриваемая сетка является равномерной так как все углы и длины ребер между узлами равны.

Оценка погрешности метода Гаусса-Грина для равномерной сетки (рис.3) получена разложением в ряд Тейлора:

В результате получили второй порядок точности.

# Метод наименьших квадратов (МНК)

Допустим, известен, тогда можно найти приближённое значение функции в любой точке в окрестности точки 0, зная значение функции в точке 0:

где компоненты градиента.

Найдём сумму взвешенных квадратов ошибок для каждой соседней ячейки:

где вес.

Минимизируем этот функционал, чтобы найти компоненты градиента. Для этого найдём производные от компонент градиента и приравняем их к нулю:

Для удобства при вычислении введем следующие обозначения:

*;*

*;*

Тогда получим компоненты градиента:

Разложив в ряд Тейлора для неравномерной по углам сетки (рис.1) из способа №1, получили следующее выражения для оценки погрешности:

Схема имеет первый порядок точности для сетки, представленной в способе №1 (рис.1).

Для равномерной сетки (рис.3) при разложении в ряд Тейлора получили следующее выражения для оценки погрешности:

Схема имеет второй порядок точности.

# Практическое вычисление градиента в ячейке

Определим градиент в ячейке 0, с координатами , где – координаты центров соседних ячеек. Перейдём в начало координат:

Процесс определения порядка сходимости заключается в следующих этапах:

1. Вычисляем градиент исследуемым методом для некоторой ячейки.
2. Вычисляем показатель нормы градиента:

где , – точное значение компонент градиента.

1. Уменьшаем ячейку в два раза, затем повторяем 1 и 2 пункты

Выражение для вычисления порядка сходимости имеет следующий вид:

# Результаты практического вычисления градиента

## Задача №1

Рассмотрим практически следующую функцию:

Точные значения компонент градиента для данной функции:

Для рассматриваемой функции неравномерная сетка имеет следующий вид (рис.4):

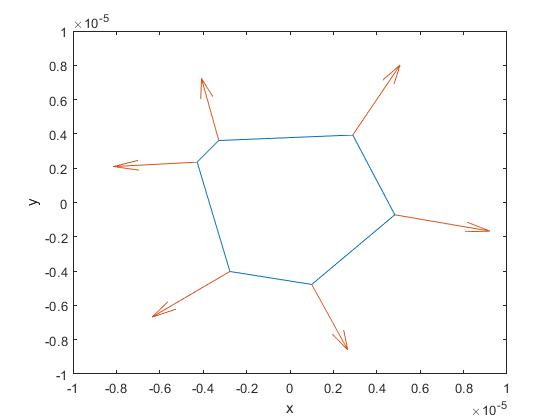


Рисунок 4 - неравномерная сетка

На основе полученных значений вычислили норму градиента для метода Гаусса - Грина и МНК (рис. 5) для неравномерной сетки (рис.4):

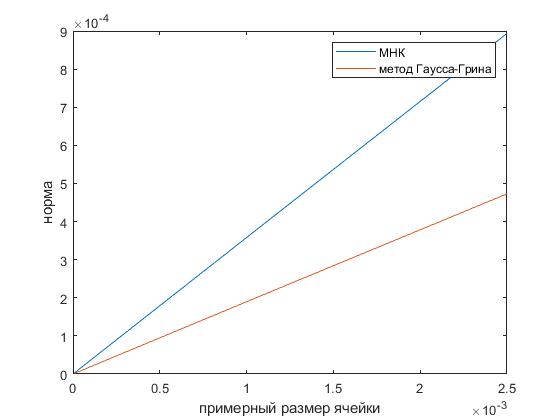


Рисунок 5- нормы для метода Гаусса – Грина и МНК

Вычислили порядок сходимости для метода Гаусса - Грина и МНК (рис.6). Оба метода имеют первый порядок сходимости:

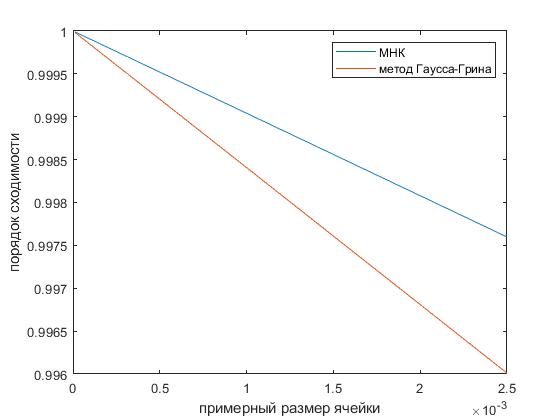


Рисунок 6 – порядок сходимости метода Гаусса – Грина и МНК

Далее рассмотрим нашу функцию на равномерной сетке (рис.7):

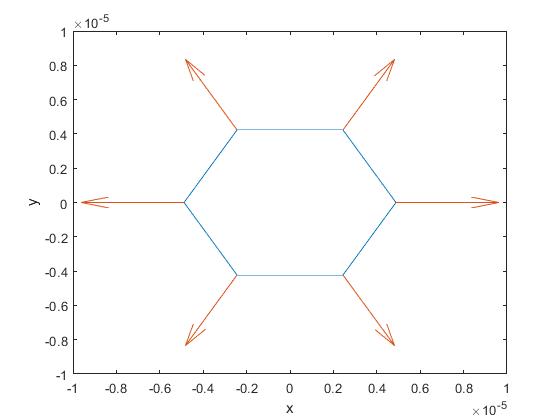


Рисунок 7 - равномерная сетка

На основе полученных значений вычислили норму градиента для метода Гаусса - Грина и МНК (рис. 8) для равномерной сетки (рис.7):

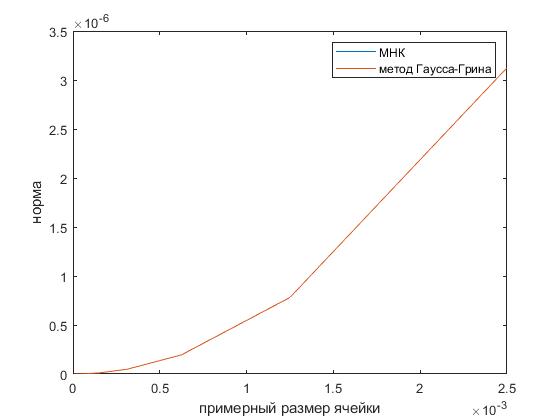


Рисунок 8 - нормы для метода Гаусса – Грина и МНК

Вычислили порядок сходимости для метода Гаусса - Грина и МНК (рис.9). Оба метода имеют второй порядок сходимости:

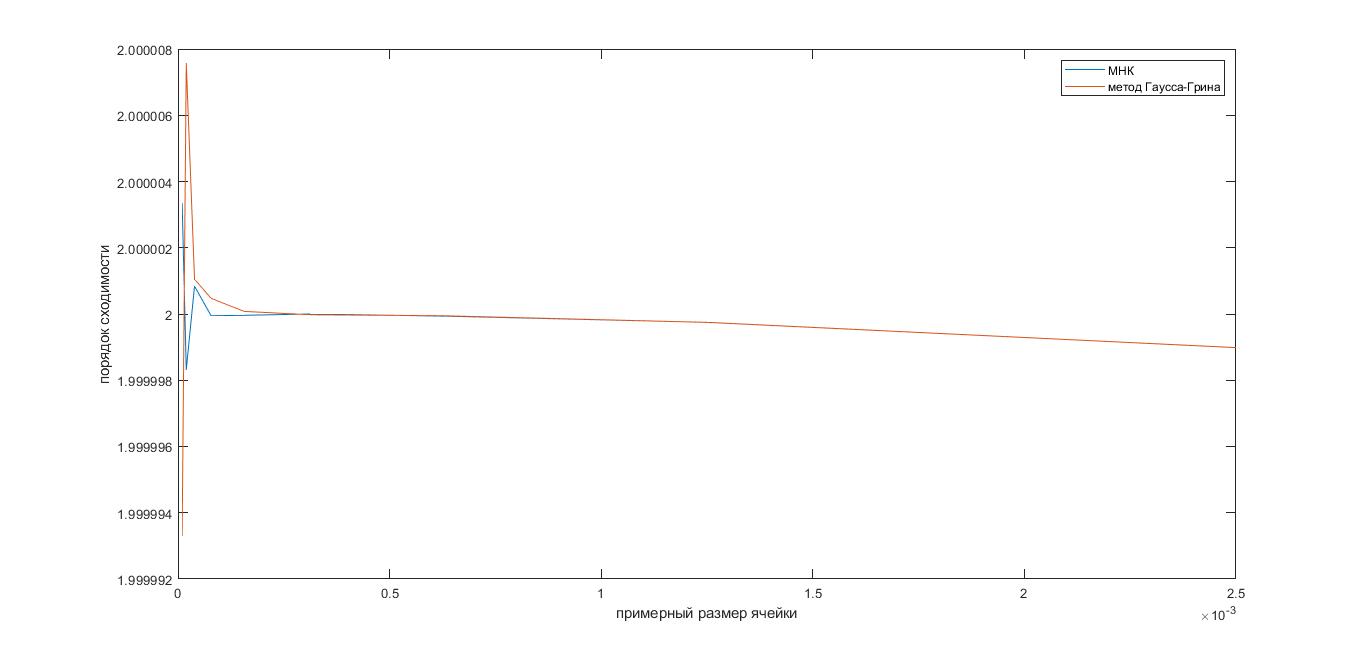


Рисунок 9 - порядок сходимости метода Гаусса – Грина и МНК

## Задача №2

Рассмотрим практически следующую функцию:

Точные значения компонент градиента для данной функции:

Для рассматриваемой функции неравномерная сетка имеет следующий вид (рис.10):

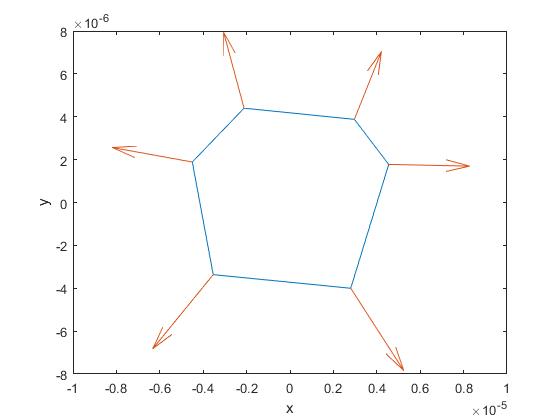


Рисунок 10 - неравномерная сетка

На основе полученных значений вычислили норму градиента для метода Гаусса - Грина и МНК (рис. 11) для неравномерной сетки (рис.10):

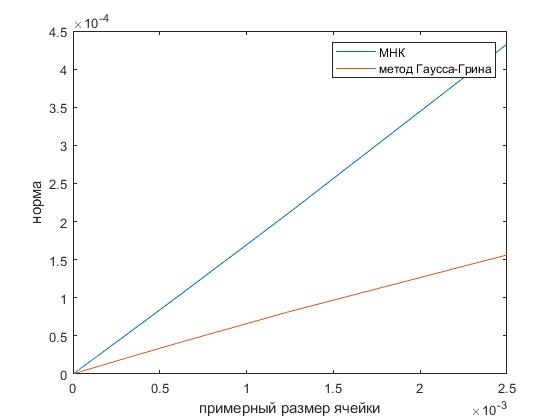


Рисунок 11 - нормы для метода Гаусса – Грина и МНК

Вычислили порядок сходимости для метода Гаусса - Грина и МНК (рис.12). Оба метода имеют первый порядок сходимости:

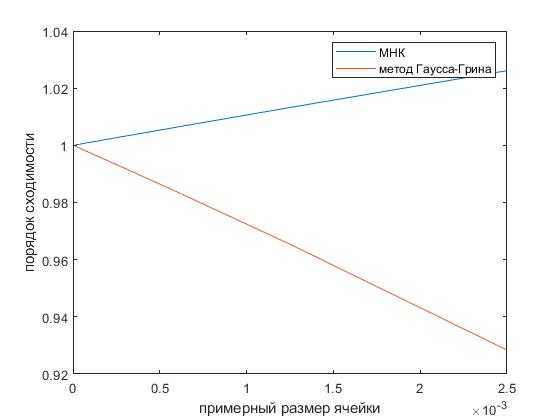


Рисунок 12 - порядок сходимости метода Гаусса – Грина и МНК

Далее рассмотрим нашу функцию на равномерной сетке (рис.13):

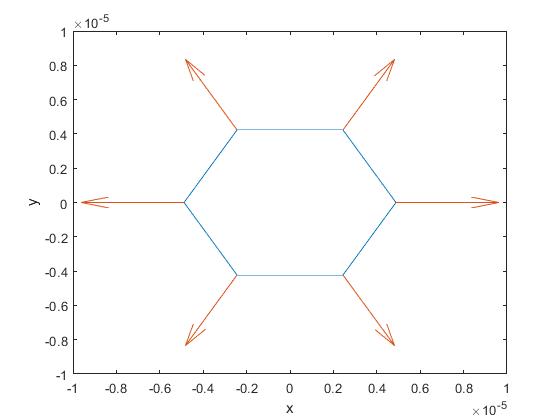


Рисунок 13 – равномерная сетка

На основе полученных значений вычислили норму градиента для метода Гаусса - Грина и МНК (рис. 14) для равномерной сетки (рис.13):

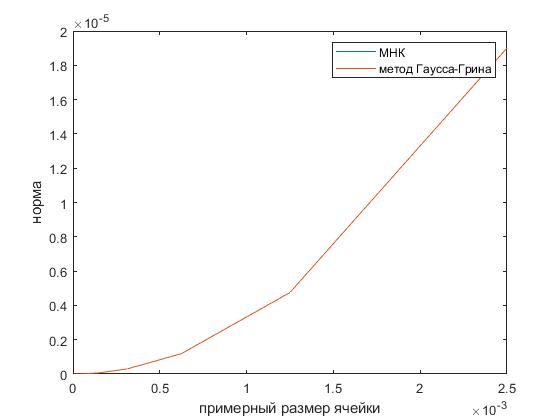


Рисунок 14 - нормы для метода Гаусса – Грина и МНК

Вычислили порядок сходимости для метода Гаусса - Грина и МНК (рис.15). Оба метода имеют второй порядок сходимости:

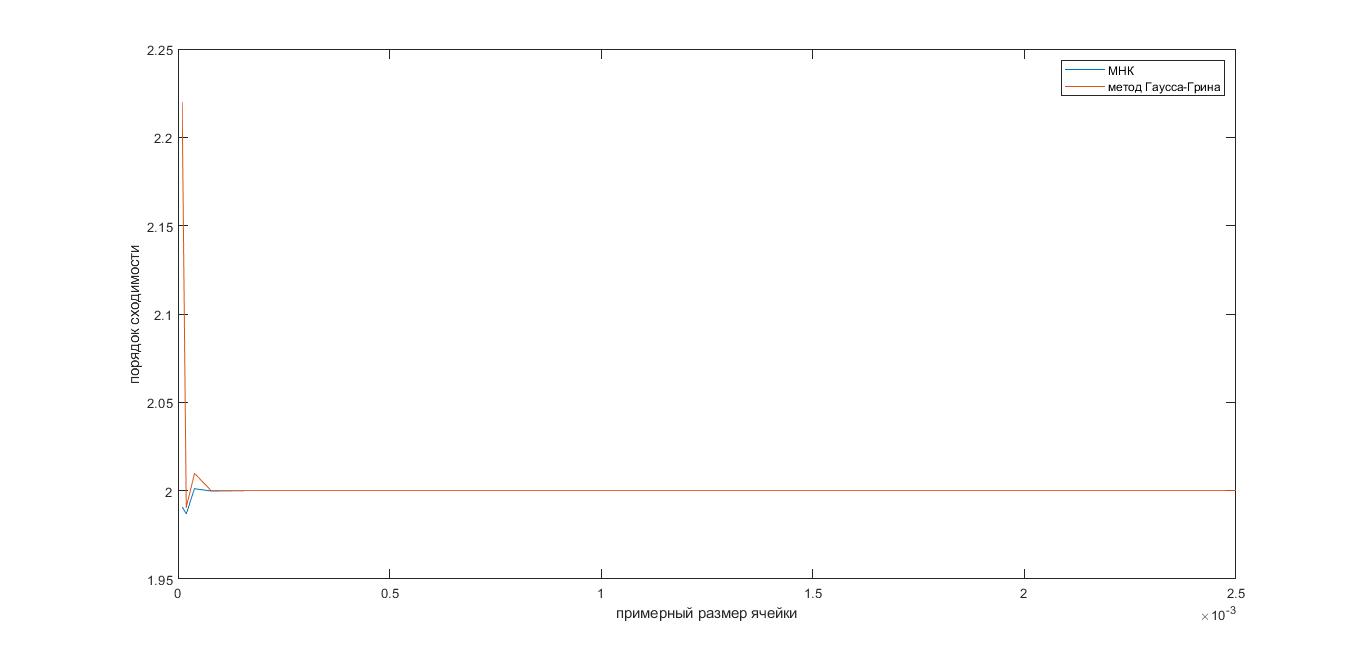


Рисунок 15 - порядок сходимости метода Гаусса – Грина и МНК

# Заключение

В данной курсовой работе была написана программа для вычисления градиента в ячейке методом Гаусса - Грина и методом наименьших квадратов на языке MatLab.

По погрешностям вычислений определили, что на равномерных сетках оба метода считаются с одинаковой точностью. На неравномерных сетках метод Гаусса - Грина чаще выдает более точные результаты в отличии от метода наименьших квадратов.

Также были вычислены порядки сходимости методов Гаусса-Грина и МНК от размера ячейки. Оба метода показали первый порядок сходимости для неравномерной сетки и второй для равномерной сетки, что сходится с теорией.

# Приложение А

clear all

close all

clc

%вычисляем градиент в узле. который находится в центре координат, если нам

%будет дана задача, где узел находится не в центре координат

%мы перенесем всю систему координаты узла в котором ищем градиент

Kr = 0; %Вклад рандома в расстояние между ячейками

Kfi = 1; %вклад рандома в угловое расстояние между ячейками

N=6; %число соседних ячеек

M = 200; %начальный делитель для сетки, 1/M - начальный примерный размер сетки

for i= 1:N

r(i) = 2\*(1+(rand()-0.5)\*Kr)/M; %рандомим заранее, чтобы ячейки

fi\_rand(i) = Kfi\*2\*pi/N\*(rand()-0.5); %всех размеров были подобны друг другу

end

NSells = 10; %число размеров ячеек

for j=1:NSells

clear xu yu;

for i= 1:N

r(i) = r(i)/2; %уменьшаем ячейку в 2 раза

xu(i)=r(i)\*cos(2\*pi/N\*(i-1)+fi\_rand(i));%массивы координат центров соседних ячеек

yu(i)=r(i)\*sin(2\*pi/N\*(i-1)+fi\_rand(i));

end

u = (xu).^2+sin(yu); %значение функции в соседних ячейках

u0 = 0; %значение функции в центральной ячейке

ax\_ex = 0; %точное значение x компоненты градиента

ay\_ex = 1; %точное значение y компоненты градиента

xu(N+1) = xu(1);

yu(N+1) = yu(1);

x= xu/2; %массивы координат центров отрезков между центрами ячеек - "вершины"

y= yu/2;

%Метод Гаусса-Грина

for i=1:N

y\_g = y(i+1)-y(i);

x\_g = x(i+1)-x(i);

S(i) = abs(x(i)\*y(i+1)-y(i)\*x(i+1))\*0.5; %площадь треугольника между центром центральной ячейки и "гранью"

nx(i) =y\_g; %компоненты нормали к "граням"

ny(i) = -x\_g; %("грань" - отрезок между соседними "вершинами")

end

n0x(1) = (nx(1) + nx(N))/2;

n0y(1) = (ny(1) + ny(N))/2;

for i= 2:N

n0x(i) = (nx(i) + nx(i-1))/2; %компоненты средних нормалей для "вершин"

n0y(i) = (ny(i) + ny(i-1))/2;

end

%Нахождение градиента методом Гаусса-Грина

gradu\_x(j) = 0.5\*sum((u+u0).\*n0x)/sum(S);

gradu\_y(j) = 0.5\*sum((u+u0).\*n0y)/sum(S); %компоненты градиента функции, вычисленные методом Гаусса-Грина

%Метод наименьших квадратов

Lx(1:N) = xu(1:N)-0; %все переменные названы как в лекциях

Ly(1:N) = yu(1:N)-0;

f=u(1:N)-u0;

Lxx=sum(Lx.\*Lx);

Lxy=sum(Lx.\*Ly);

Lyy=sum(Ly.\*Ly);

%Нахождение градиента методом наименьших кватратов

ax(j)=(Lyy.\*sum(Lx.\*f)-Lxy.\*sum(Ly.\*f))/(Lxx.\*Lyy-Lxy.\*Lxy); %компоненты градиента функции, вычисленные МНК

ay(j)=(Lxx.\*sum(Ly.\*f)-Lxy.\*sum(Lx.\*f))/(Lxx.\*Lyy-Lxy.\*Lxy);

normaMNK(j) = sqrt((ax\_ex-ax(j))^2+(ay\_ex-ay(j))^2);

normaGG(j) = sqrt((ax\_ex-gradu\_x(j))^2+(ay\_ex-gradu\_y(j))^2);

M=M\*2;

end

M = M/2^(NSells-1);

figure();

plot(x,y);

hold on

quiver(x(1:N),y(1:N), n0x, n0y)

xlabel('x');

ylabel('y');

for j=1:NSells-1

SHMNK(j)=log2(normaMNK(j)/normaMNK(j+1));

SHGG(j)=log2(normaGG(j)/normaGG(j+1));

SizeSell(j)=1/(M\*2^(j-1));

end

figure();

plot(SizeSell,SHMNK);

hold on

plot(SizeSell,SHGG);

legend('МНК','метод Гаусса-Грина');

xlabel('примерный размер ячейки')

ylabel('порядок сходимости')

SizeSell(NSells)=1/(M\*2^(NSells-1));

figure();

plot(SizeSell,normaMNK);

hold on

plot(SizeSell,normaGG);

legend('МНК','метод Гаусса-Грина');

xlabel('примерный размер ячейки')

ylabel('норма')