Система алгебраических уравнений и скалярные алгоритмы прогонки

Алгебраическая задача возникает в результате построения разностных схем и дает разностное решение (стационарное, либо относящееся к очередному слою по времени). Система уравнений с трехдиагональной матрицей, или близкая к ней может быть записана в виде:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i,\ 1 \le i \le N-1. \tag{1}$$

Будем рассматривать граничные условия вида: $-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0,\ -C_N y_N + A_N y_{N-1} = -F_N$. (2)

Свойства коэффициентов: $A_i, B_i \ge 0,\ C_i > 0,\ i = 0,\dots,N$,

либо $C_i = A_i + B_i + D_i,\ D_i > 0,\ i = 0,\dots,N$,

либо $C_i = A_{i+1} + B_{i-1} + D_i,\ D_i > 0,\ i = 1,\dots,N-1$.

Правая прогонка:

$$\alpha_0 = \frac{B_0}{C_0},\quad \beta_0 = \frac{F_0}{C_0},\quad \alpha_i = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_{i-1}},\quad \beta_i = \frac{F_i + A_i\beta_{i-1}}{C_i - A_i\alpha_{i-1}},\quad i = 1,\dots,N;$$

$$y_N = \beta_N,\quad y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i,\quad i = N-1,\dots,0.$$

Левая прогонка:

$$\alpha_N = \frac{A_N}{C_N},\quad \beta_N = \frac{F_N}{C_N},\quad \alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\quad \beta_i = \frac{F_i + B_i\beta_{i+1}}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\quad i = N-1,\dots,0;$$

$$y_0 = \beta_0,\quad y_i = \alpha_i y_{i-1} + \beta_i,\quad i = 1,\dots,N.$$

Встречная прогонка:

$$\alpha_0 = \frac{B_0}{C_0},\quad \beta_0 = \frac{F_0}{C_0},\quad \alpha_i = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_{i-1}},\quad \beta_i = \frac{F_i + A_i\beta_{i-1}}{C_i - A_i\alpha_{i-1}},\quad i = 1,\dots,M;$$

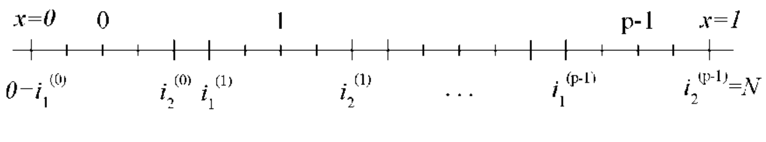
$$\alpha_N = \frac{A_N}{C_N},\quad \beta_N = \frac{F_N}{C_N},\quad \alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\quad \beta_i = \frac{F_i + B_i\beta_{i+1}}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\quad i = N-1,\dots,M+1;$$

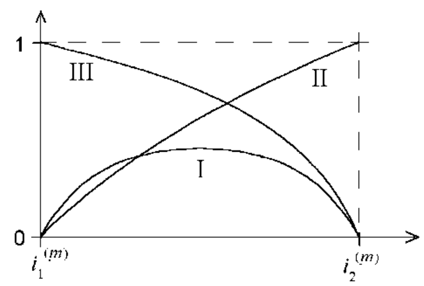
$$y_M = \frac{\beta_M + \alpha_M\beta_{M+1}}{1 - \alpha_M\alpha_{M+1}},\quad y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i,\quad i = M-1,\dots,0,\quad y_i = \alpha_i y_{i-1} + \beta_i,\quad i = M+1,\dots,N.$$

Параллельный алгоритм решения

Алгоритм решения – метод прогонки (вариант метода Гаусса). ***Параллельный алгоритм*** на примере системы (1)-(2) для МВС с p процессорами.

Введем равномерное линейное разбиение множества номеров узлов сетки $\Omega = \{0,1,\dots,N\}$ на связные подмножества $\Omega_m = \{i_1^{(m)},\dots,i_2^{(m)}\}$ ($m = 0,\dots,p-1$), соответствующие разбиению вектора неизвестных по процессорам:





В результате такого разбиения процессор с номером m будет обрабатывать $(i_2^{(m)} - i_1^{(m)} + 1)$ точек. Представим решение на каждом внутреннем ($0 < m < p-1$) процессоре в виде:

$$y_i \equiv y_i^{(m)} = y_i^{(I,m)} + y_{i_1^{(m)}} y_i^{(III,m)} + y_{i_2^{(m)}} y_i^{(II,m)}, \tag{3}$$

где $y_i^{(\alpha,m)}$ ($\alpha = I, II, III$) определены на Ω_m и играют роль базиса, а значения функции на границе Ω_m – $y_{i_1^{(m)}}$ и $y_{i_2^{(m)}}$ – пока не известны. Во внутренних узлах Ω_m функция $y_i^{(I,m)}$ находится из уравнений (1), а функции $y_i^{(II,m)}$, $y_i^{(III,m)}$ из уравнений (1) с нулевой правой частью.

Граничные условия для $y_i^{(\alpha,m)}$:

$$\begin{aligned}
&y_{i_1^{(m)}}^{(I,m)} = 0,\ y_{i_2^{(m)}}^{(I,m)} = 0;\\
&y_{i_1^{(m)}}^{(II,m)} = 0,\ y_{i_2^{(m)}}^{(II,m)} = 1;\\
&y_{i_1^{(m)}}^{(III,m)} = 1,\ y_{i_2^{(m)}}^{(I,m)} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

На нулевом и последнем процессорах:

$$y_i^{(0)} = y_i^{(I,0)} + y_{i_2^{(0)}} y_i^{(II,0)}, \quad y_i^{(p-1)} = y_i^{(I,p-1)} + y_{i_1^{(p-1)}} y_i^{(III,p-1)}. \tag{3*}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&C_0 y_0^{(I,0)} - B_0 y_1^{(I,0)} = F_0,\ y_{i_2^{(0)}}^{(I,0)} = 0; \quad y_{i_1^{(p-1)}}^{(I,p-1)} = 0,\ C_N y_N^{(I,p-1)} - A_N y_{N-1}^{(I,p-1)} = F_N;\\
&C_0 y_0^{(II,0)} - B_0 y_1^{(II,0)} = 0,\ y_{i_2^{(0)}}^{(II,0)} = 1. \quad y_{i_1^{(p-1)}}^{(III,p-1)} = 1,\ C_N y_N^{(III,p-1)} - A_N y_{N-1}^{(III,p-1)} = 0.
\end{aligned} \tag{4*}$$

Свойства базиса:
$\left\| y^{(I,m)} \right\|_C \le \left\| D^{-1} F \right\|_C$, $0 \le y^{(II,m)} \le 1,\ 0 \le y^{(III,m)} \le 1,\ m = 0,...,p-1,\quad 0 \le y_i^{(II,m)} + y_i^{(III,m)} \le 1$, для всех i, m (5)
Эти свойства обеспечивают устойчивость вычислений по формулам (3).

Нахождение значений в граничных узлах подобластей:

$$\begin{aligned}
&A_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1} - C_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}} + B_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}+1} = -F_{i_2^{(m)}},\\
&A_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}-1} - C_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}} + B_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1} = -F_{i_1^{(m+1)}}.
\end{aligned}$$

Если учесть в этих уравнениях очевидные связи:

$$\begin{aligned}
&y_{i_2^{(m)}-1} = y_{i_2^{(m)}-1}^{(I,m)} + y_{i_1^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(III,m)} + y_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(II,m)},\ y_{i_2^{(m)}+1} = y_{i_1^{(m+1)}},\\
&y_{i_1^{(m+1)}-1} = y_{i_2^{(m)}},\ y_{i_1^{(m+1)}+1} = y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(I,m)} + y_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(III,m)} + y_{i_2^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(II,m)},
\end{aligned}$$

то получим:

$$\tilde{A}_{i_2^{(m)}} y_{i_1^{(m)}} - \tilde{C}_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}} + \tilde{B}_{i_2^{(m)}} y_{i_1^{(m+1)}} = -\tilde{F}_{i_2^{(m)}}, \quad \tilde{A}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_2^{(m)}} - \tilde{C}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}} + \tilde{B}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_2^{(m+1)}} = -\tilde{F}_{i_1^{(m+1)}}, \tag{6}$$

с коэффициентами

$$\tilde{A}_{i_2^{(m)}} = A_{i_2^{(m)}} y^{(III,m)}_{i_2^{(m)}-1}, \quad \tilde{B}_{i_2^{(m)}} = B_{i_2^{(m)}}, \quad \tilde{C}_{i_2^{(m)}} = C_{i_2^{(m)}} - A_{i_2^{(m)}} y^{(II,m)}_{i_2^{(m)}-1}, \quad \tilde{F}_{i_2^{(m)}} = F_{i_2^{(m)}} + A_{i_2^{(m)}} y^{(I,m)}_{i_2^{(m)}-1},$$
$$\tilde{A}_{i_1^{(m+1)}} = A_{i_1^{(m+1)}}, \quad \tilde{B}_{i_1^{(m+1)}} = B_{i_1^{(m+1)}} y^{(II,m+1)}_{i_1^{(m+1)}+1}, \quad \tilde{C}_{i_1^{(m+1)}} = C_{i_1^{(m+1)}} - B_{i_1^{(m+1)}} y^{(III,m+1)}_{i_1^{(m+1)}+1}, \ \tilde{F}_{i_1^{(m+1)}} = F_{i_1^{(m+1)}} + B_{i_1^{(m+1)}} y^{(I,m+1)}_{i_1^{(m+1)}+1}.$$

В итоге получим следующую систему из $2p-2$ уравнений для $2p-2$ неизвестных

$$\tilde{A}_i y_{i-1} - \tilde{C}_i y_i + \tilde{B}_i y_{i+1} = -\tilde{F}_i, \ i \in \tilde{\Omega} = \{i_2^{(0)}, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_1^{(p-1)}\}, \tag{7}$$

где под индексом $i \pm 1$ понимается переход к соответствующему соседнему элементу из множества $\tilde{\Omega}$. Аналогично, в граничных узлах $i_2^{(0)}$ и $i_1^{(p-1)}$ уравнения (7) принимают вид (2). ***В силу свойств базиса*** (5) коэффициенты “короткой” системы уравнений также удовлетворяют условиям принципа максимума. => решение системы (7) ***существует и единственно***. Определив его методом обычной прогонки, можно с помощью формул (3) вычислить решение исходной задачи.

Последовательность действий алгоритма.
Сначала на каждом процессоре с помощью алгоритма обычной прогонки решаются три (или две) задачи для нахождения базисных функций $y^{(\alpha,\,m)}$.
Затем находятся коэффициенты новой задачи относительно неизвестных $y_{i_1}^{(m)},\ y_{i_2}^{(m)}$ ($m = 0,\ldots,p-1$) и пересылаются нулевому процессору. Он решает короткую систему и рассылает значения $y_{i_1}^{(m)}$ и $y_{i_2}^{(m)}$. Получив эти данные, каждый процессор восстанавливает свою часть решения по формулам (3).

Эффективность алгоритма. Каждый ПА оценивается по ускорению S_p и эффективности E_p, которые определяются по формулам $S_p = \dfrac{t_1}{t_p}$, $E_p = \dfrac{S_p}{p} \cdot 100\%$, где t_1 - время решения исходной задачи на одном процессоре, t_p - время решения исходной задачи по параллельному алгоритму на p процессорах. В теоретических исследованиях не принимают во внимание накладные расходы, связанные с временем обменов, поскольку последнее является неконтролируемым фактором и сильно зависит от конкретной МВС. Поэтому времена t_1 и t_p заменяют на оценки числа арифметических операций Q_1 и Q_p. Последние оценивают по количеству элементарных объектов вычислений, например, как в нашем случае, по числу узлов расчетной сетки N.
Алгоритм ***скалярной прогонки***: $Q_1 = C_1 N$ обобщенных арифметических действий. Алгоритм ***параллельной прогонки***: $Q_p \approx 3C_2 N/p + 2C_1 p$ действий. На каждом процессоре, кроме нулевого, решаются три задачи размерности N/p, а нулевой решает еще и короткую задачу размерности $2p-2$. Константы C_1, C_2 не зависят от N и p и близки по величине ($C_2/C_1 \sim 1.2$). Теперь оценим величину ускорения и эффективность параллельного алгоритма:

$$S_p = \frac{p}{3C_2/C_1 + 2p^2/N}, \ E_p = \frac{1}{3C_2/C_1 + 2p^2/N} \cdot 100\%.$$

Анализ: при $p \ll \sqrt{N}$ ускорение $S_p \approx p/3$, а эффективность $E_p \approx 33\%$. Эти оценки можно уточнить, если рассмотреть структуру вычислений и учесть соотношения между различными видами арифметических операций. Однако полученная асимптотика не сильно изменится.
Эффективность решения краевой задачи в целом оценивается иначе. В скалярном случае $Q_1 = C_0 N + C_1 N$, где первое слагаемое связано с вычислением коэффициентов задачи. В случае нескольких процессоров получим $Q_p \approx C_0 N/p + 3C_2 N/p + 2C_1 p$. Поэтому

$$S_p = \frac{p}{(C_0 + 3C_2)/(C_0 + C_1) + 2(p^2/N)C_1/(C_0 + C_1)},$$

$$E_p = \frac{1}{(C_0 + 3C_2)/(C_0 + C_1) + 2(p^2/N)C_1/(C_0 + C_1)} \cdot 100\%.$$

В худшем варианте $C_0/C_1 \sim 5/3$, $C_2/C_1 \sim 1.2$ при $p << \sqrt{N}$ получим эффективность $E_p \approx 50.63\%$.