Задачи к экзамену по Квантовой Оптике

Яромир Водзяновский Б04-855а

Задача 1

Найти длины волн (мкм), частоты (Гц) и энергии(эВ) для 7 цветов диапазона, видимого глазом человека излучения.

1) Красный
длина волны λ: 690 нм
частота ν: $4,35 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 1,8 эВ

2) Оранжевый
длина волны λ: 610 нм
частота ν: $5,00 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 2,0 эВ

3) Жёлтый
длина волны λ: 580 нм
частота ν: $5,02 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 2,1 эВ

4) Зелёный
длина волны λ: 530 нм
частота ν: $5,70 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 2,3 эВ

5) Голубой
длина волны λ: 490 нм
частота ν: $6,12 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 2,5 эВ

6) Синий
длина волны λ: 460 нм
частота ν: $6,52 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 2,7 эВ

7) Фиолетовый
длина волны λ: 420 нм
частота ν: $7,10 \cdot 10^{14}$ Гц
энергия $\hbar\omega$: 3,0 эВ

Задача 2

Закон Вина: $\lambda_m T = const = 0.002898\ m \cdot k$

$$t_1 = 40^\circ C = 313\ K$$

$$\lambda_{m_1} = 0.259\ mkm$$

$$t_2 = 6000^\circ C = 6273\ K$$

$\lambda_{m_2} = 462\ nm$ — соответсвует зеленому свету с пиком спектра слонца, поэтому бильярдный стол зеленый.

Задача 3

Оценить суммарную мощность излучения (Вт), испускаемую Вами при нормальной температуре (t = $36,6°$ C) и в состоянии болезни (t = $42°$ C).

Закон Стефана-Больцмана:

$$J = \sigma T^4$$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 K^4}$
Площадь человеческого теля $S \approx 1.8 \ m^2$
$t_1 = 46.6°C = 309.75 \ K \Rightarrow W_1 = J_1 S = \sigma T_1^4 S = 940 \ W$
$t_2 = 42°C \Rightarrow W_2 = 1007 \ W$

Задача 4

При классическом представлении Э-М поля, при какой его плоской поляризации (в плоскости падения или перпендикулярно ей) выход фотоэлектронов будет больше при всех равных других параметров излучения и фотокатода.

Эффект будет сильным, если электрическое поле перпендикулярно плоскости падени: в этом случа проекция поля на катод максимальна.

Задача 5

Определите красную длину волны фотоэффекта на алюминиевом фотокатоде, найдя его работу выхода. Найдите E_{MAX} фотоэлектрона, выбитого из алюминиевого фотокатода 4-ой гармоникой лазера на неодиме.

$$A_{out} = 4.25 \ eV \Rightarrow \lambda_{red} = \frac{he}{E} = \frac{6.83 \cdot 10^{-34} 3 \cdot 10^8}{4.25 \cdot 10^{-19} \cdot 1.6} = 292.5 \ nm$$

Первая гармоника неодимового лазера: $\lambda_n = 106 \ nm$. Длина волны 4-ой грамоники: $\lambda_{n_4} = \frac{\lambda_n}{4} = 266 \ nm$

$$E = E_{em} - A_{out} = \frac{hc}{\lambda_{n_4}} - A_{out} = 0.42 \ eV$$

Задача 6

Постройте линейную функцию запирающего потенциала от частоты падающего на фотокатод излучения $U_{\text{Зап}} = kV + b$. Выразите k и b через константы и параметры фотокатода и покажите их на графике.

$U_{cl} = h\nu + b$, $h\nu = A + \frac{mv^2}{2} = A + eV_{cl}$

$$V_{cl} = \frac{h}{e}\upsilon - \frac{A_{out}}{e}$$

$k = \frac{h}{e}, \ b = -\frac{A_{out}}{e}$

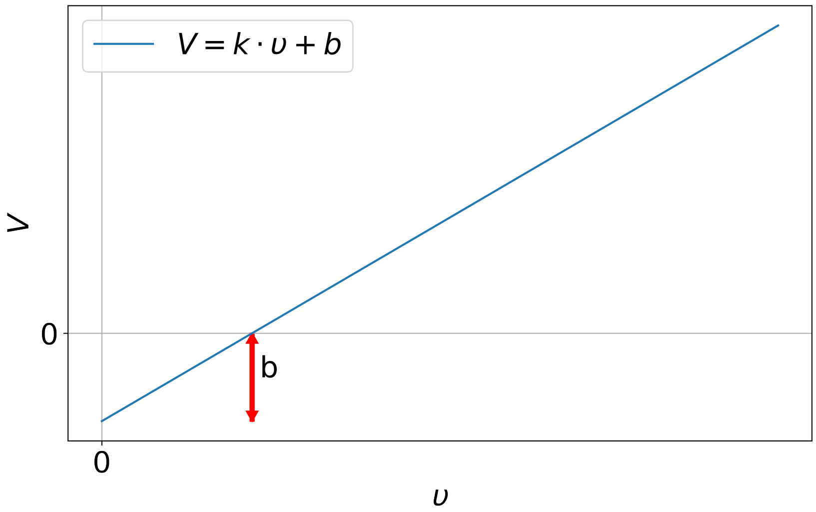

Рис. 1.

Задача 7

Покажите, что поглощение / излучение свободного фотона свободным электроном - процесс, запрещенный законами сохранения.

СО связана с электроном:

$$\begin{cases} 0 = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + p_{\vec{ph}} \\ mc^2 = \gamma mc^2 + |p_{ph}|c \end{cases} \tag{1}$$

$\vec{p}_{ph} = -\gamma m\vec{\upsilon}$
$mc^2 = \gamma mc^2 + \gamma mc|\vec{\upsilon}|$; $c = \gamma c + \gamma|\vec{\upsilon}|$
$c = \gamma c + \gamma|\vec{\upsilon}|$
$c = \frac{\gamma|\vec{\upsilon}|}{1-\gamma}$
$\gamma \in [1, +\infty)$; $\upsilon = p \Leftrightarrow \gamma = 1$

Значит, что единственное решение $\vec{\upsilon} = 0$, но тогда $p_{ph} = 0$ (не было фотона) и процесс завершен, аналогично для поглощения.

Задача 8

Определите изменение длины волны излучения при рассеянии его на пучке встречных релятивистских электронов, считая, что в результате неупругого столкновения с фотоном электрон часть своей кинетической энергии передал фотону, который отразился назад от релятивистского зеркала налетающих электронов.

при обратном эффекте Комптона энергия фотонов:

$E^{\gamma}_{MAX} = E_0 \frac{E^{\gamma}_0 E_0}{4E^{\gamma}_0 E_0 + m^2c^4}$

где E^{γ}_0 - начальная энергия излучения, E_0 - энергия электронов

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{E^{\gamma}_{MAX}} - \frac{hc}{E^{\gamma}_0}$

Задача 9

Найдите и запишите выражения для вариационного принципа Ферма для оптики и вариационного принципа Мопертюи-Лагранжа для механики массовой частицы. Сравните их и попробуйте найти аналогии.

Принцип Ферма: из множества возможных путей свет идет по тому, который занимает меньше всего времени.
Принцип Мюпертюи-Лагранжа: принцип наименьшего действия $\delta S = 0$.
Принципи по идее эквивалентны: $S = \int_{\delta S=0} L(q, \dot{q}, t) dq$

Задача 10

Выпишите выражение для физической величины ДЕЙСТВИЕ (S). Найдите ее размерность и сравните с размерностью постоянной Планка h. Запишите фазу плоской волны и фазу волновой функции через S/ h и сравните их временные и пространственные части.

$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}}\hat{S}$ - волновая функция
Классическое действие: $S = \int pdq - \int Hdt$, размерности S и h совпадают

Задача 11

Как по картинке миража понять на юге или на севере это происходит?

Задача 12

Оцените период кристаллической решетки никеля, если дифракционная картина типа Лауэ или Брега происходит с электронами, разогнанными разностью потенциалов в 150 эВ.

$E_e = 150\ eV$
$2d = \lambda = \lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2Em}} \approx 1\text{Å}$
$d = 0.5\text{Å}$

Задача 13

Вычислить спектральное фурье - преобразование от функция временной когерентности

Функция когерентна. $\Gamma(\tau) = \{E(t)E(t-\tau)\}$
$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega)e^{i\omega t}d\omega$
$a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} E(\varphi)e^{-i\omega t}dt$
$\Gamma(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(t)E(t-\tau)dt = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} a^*(\omega)e^{i\omega\tau}\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(t)e^{-i\omega t}dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$
$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

Задача 14

Найти выражение для аксиальных мод пустого резонатора и константу из предыдущего равенства для пустого резонатора длины L.

Для пустого резонатора: $k_n L = 2\pi n \Rightarrow k_n = \frac{2\pi n}{L},\ \lambda = \frac{2\pi}{k}$
$\lambda_n = \frac{2\pi L}{2\pi n} = \frac{L}{n}$

Задача 15

Оценить длину продольной когерентности излучения АЧТ в длинах волн для комнатной температуры и для температуры короны Солнца.

T = 300 K, $\lambda_m = 9666$ нм

$\lambda_2 = 17500$ нм $\rightarrow \lambda_1 = 5900$ нм

$l = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\lambda \approx 0,8\lambda$

T = 10^6 K, $\lambda_m = 2,9$ нм

$\Delta\lambda = 3,53$ нм

$l = \frac{2,9}{3,53}\lambda \approx 0,8\lambda$

Задача 16

Оценить плотность мощности излучения, создаваемую лазером на АИГ + Nd, имеющего диаметр выходной диафрагмы 2 мм и мощность импульса 100мДж на мишени на расстоянии 5 км.

d = 2mm, W = 100 mJ, L = 5 km, $\lambda = 1064\ nm$, $\theta = \lambda/d$
$R/L = \tan\theta \Rightarrow R = L\tan\theta$
$D = 2R = 2L\tan\frac{\lambda}{d}$
$P = \frac{W}{S} = \frac{W}{2L\tan\frac{\lambda}{d}} = 4.5\ \frac{mJ}{m^2}$

Задача 17

Найти температуру АЧТ, при которой параметр вырождения его излучения равен единице в видимом диапазоне.

$\delta = 1$ для оптического диапазона, $u \approx 0.5$
$\delta = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} = 1$
$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = 2 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k\ln 2} = 41600\ K$