

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра квантовой электроники

ИНЖЕКЦИОННЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ЛАЗЕРЫ

Лабораторная работа № 23

МОСКВА 2007

Составитель Л.А. Кириченко
УДК 621.373

Инжекционные полупроводниковые лазеры

Лабораторная работа № 23 / Сост.: Л.А. Кириченко. — М.: МФТИ, 2007. — 44 с.

Инжекционные полупроводниковые лазеры находят активное применение в инновационных разработках приборов квантовой электроники и волоконно-оптических систем связи.

В лабораторных работах изучаются создание инверсной населенности в полупроводниках, принцип действия инжекционного полупроводникового лазера (ИПЛ), физические особенности ИПЛ на р-п гомопереходе, ИПЛ с одним гетеропереходом и ИПЛ с двумя гетеропереходами, ватт-амперные и спектральные характеристики этих лазеров. Теоретический материал сопровождается контрольными вопросами, задачами и наглядным физическим экспериментом.

Составитель ***КИРИЧЕНКО Леонид Андреевич***

Редактор *В.А. Дружинина*. Корректор *Л.В. Себова*

Подписано в печать 30.10.2007. Формат 60 х 84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ л. 2,75. Уч.- изд. л. 2,4. Тираж 300 экз. Заказ №ф-

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Отдел автоматизированных издательских систем
"ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер.,9

Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Излучение и оптическое усилие в полупроводниках	4
2. Зонные диаграммы и инжекция носителей через гомо- и гетеропереходы	15
3. Принцип действия инжекционного полупроводникового лазера, его зонная диаграмма, достаточное условие генерации	20
4. Ватт-амперные и спектральные характеристики излучения ИПЛ	29
Заключение	33
Первая часть лабораторной работы № 23 Исследование ватт-амперных характеристик инжекционных полупроводниковых лазеров (ИПЛ)	33
Вторая часть лабораторной работы № 23 Исследование спектральных характеристик инжекционных полупроводниковых лазеров (ИПЛ)	38
Список литературы	41
Контрольные вопросы	42
Задачи	43

Введение

Инжекционным полупроводниковым лазерам (ИПЛ) свойственны миниатюрность (длина 0,1–0,5 мм, толщина самой активной области 1 мкм), возможность высокочастотного управления световым сигналом за счет модуляции тока накачки, высокий дифференциальный КПД, небольшая потребляемая мощность. Это делает их весьма перспективными для волоконно-оптической связи, ЭВМ и многих других областей.

1. Излучение и оптическое усиление в полупроводниках

Работа полупроводниковых лазеров основана на переходах электронов с энергетических уровней, лежащих внутри зоны проводимости, на уровни, лежащие внутри валентной зоны. Так как эти уровни расположены соответственно вблизи дна зоны проводимости и вблизи потолка валентной зоны, то на энергетических диаграммах обычно указывают только потолок валентной зоны E_V и дно зоны проводимости E_C . Каждому из энергетических уровней зон соответствует одно или несколько квантовых состояний, однозначно определяемых набором квантовых чисел (например, в атоме водорода состояние электрона характеризуется главным квантовым числом n , орбитальным l , магнитным m и спиновым s). В периодической решетке кристалла в силу другой симметрии задачи состояние электрона характеризуется номером зоны, тремя проекциями квазиимпульса и спиновым числом s .

Согласно принципу Паули, в каждом квантовом состоянии (направление спина считаем уже заданным) может находиться либо один электрон, либо ни одного.

Квантовая статистическая физика доказывает, что в системе, находящейся в термодинамическом равновесии с температурой T , все квантовые состояния с одним и тем же значением энергии E заполнены электронами одинаково.

Соответствующая формула называется распределением Ферми–Дирака, функцией Ферми:

$$n(E_i) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) + 1}. \quad (1)$$

Здесь T – абсолютная температура; μ — некий нормировочный параметр, имеющий размерность энергии и называемый химическим потенциалом (электрохимическим потенциалом, уровнем Ферми, энергией Ферми); $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $= (11600)^{-1}$ эВ/К — постоянная Больцмана. А какой физический смысл самой величины функции Ферми?

В некоторых учебниках написано, что распределение Ферми–Дирака – это вероятность обнаружить электрон в квантовом состоянии с энергией E_i при температуре системы T .

В других учебниках написано, что распределение Ферми–Дирака задает среднее (по времени) число электронов в одном квантовом состоянии с энергией E_i при температуре системы T .

Для тех, кто запомнил первое определение физического смысла функции Ферми, очень часто затруднение вызывает следующий вопрос:

«Предположим, значение этой вероятности известно для каждого i -го квантового состояния системы. Спрашивается, чему равняется сумма этих вероятностей по всем квантовым состояниям системы?»

К сожалению, очень часто следует быстрый ответ: «Сумма вероятностей всегда равна единице в силу нормировки вероятностей». Тогда задается уточняющий вопрос: «Утверждаете ли вы, что сумма вероятности сдать эту работу и вероятности быть счастливым в личной жизни тоже равна единице? То есть проваленная сдача работы гарантирует личное счастье, а сдача работы гарантирует его отсутствие». Почему-то подтверждать этот частный случай уже высказанного более общего утверждения никто не решается.

Попробуем разобраться. Например, в 1 см^3 металла при $T = 0 \text{ К}$ с вероятностью, равной единице, т.е. достоверно, заполнено примерно 10^{23} нижних (по энергии) квантовых состояний зоны проводимости. То есть вышеозначенная сумма равнялась бы 10^{23} , что заметно больше единицы. Как же в этом случае выглядит условие нормировки вероятностей – "сумма вероятностей равна единице"?

Здесь важно отметить разницу между подходами квантовой механики и статической физики. В задаче квантовой механики обычно "следят за одним электроном", вычисляют множество его возможных состояний. Так как электрон может быть только в этих состояниях (с разной вероятностью), то сумма этих вероятностей равна единице.

В статистической физике "следят не за отдельным электроном", а "за отдельным квантовым состоянием", в котором может с некоторой вероятностью находиться какой-то (не важно, какой именно) из множества электронов системы.

Утверждение, что сумма вероятностей равна единице, справедливо лишь для набора всех единственно возможных и несовместимых (взаимоисключающих) событий.

Если рассматривать отдельное квантовое состояние, то возможны всего два события – либо состояние занято (с вероятностью f_1), либо оно свободно (с вероятностью f_0). Сумма вероятностей этих двух событий и будет равна единице, т.е. $f_0 + f_1 = 1$. Вероятность того, что состояние заполнено, дается функцией (распределением) Ферми. Параметр распределения μ – уровень Ферми – зависит от числа электронов в системе. С ростом их числа (при неизменности прочих условий) уровень Ферми увеличивается.

В отличие от задачи квантовой механики в статистической физике занятие электроном одного квантового состояния не исключает того, что другое квантовое состояние занято другим электроном. Какой же смысл в этом случае имеет суммирование вероятностей по состояниям, если обнаружение электрона в каждом из них не является несовместимым событием?

Дело в том, что вероятность обнаружить электрон в квантовом состоянии $n(E_i)$ – это одновременно и среднее число электронов в одном квантовом состоянии с энергией E_i . Действительно, по определению математического ожидания, иначе говоря среднего значения

некой величины Z , $\bar{Z} = \sum_n F(Z_n) \cdot Z_n$ где Z_n – возможные значения величины Z , а $F(Z_n)$ – вероятность, с которой появляется значение

Z_n . Причем вероятность нормированная, так что $\sum_n F(Z_n) = 1$. Согласно принципу Паули в одном квантовом состоянии может находиться максимум один электрон, поэтому среднее число электронов в i -м квантовом состоянии есть $\bar{n} = 0 \cdot F(0) + 1 \cdot F(1) = F(1)$.

То есть действительно, функция Ферми, распределение Ферми–Дирака задает и среднее число электронов в одном квантовом состоянии, и вероятность обнаружить в этом состоянии электрон. Поэтому

сумма этих вероятностей по всем квантовым состояниям даст полное число электронов в системе.

Заметим, что для бозонов, частиц с целочисленным спином, действует другая статистика – статистика Бозе–Эйнштейна:

$$n(E_i) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) - 1}. \quad (2)$$

Так как принцип Паули для бозонов не действует, то среднее число бозонов в одном квантовом состоянии и вероятность обнаружить в этом квантовом состоянии один бозон – это вовсе не одно и то же. Для бозонов существуют ненулевые вероятности обнаружить в одном состоянии и два, и три бозона, так что формула распределения Бозе–Эйнштейна дает только одну величину – среднее число бозонов в одном квантовом состоянии.

Часто встречающееся определение уровня Ферми μ – "энергия уровня, вероятность заполнения квантового состояния которого равна 0,5" – чисто формально, т.к. не дает возможности найти этот уровень конкретно. Кроме того, если уровень Ферми лежит в запрещенной зоне полупроводника или диэлектрика, то энергетического уровня, совпадающего с уровнем Ферми, просто не существует.

Таким образом, для многоэлектронной системы уравнение

$\sum_i n(E_i) = N$ – можно рассматривать только с "точки зрения среднего числа электронов в состоянии", оно дает полное число электронов в системе и служит для вычисления неизвестного уровня Ферми.

В одноэлектронной задаче это уравнение можно интерпретировать и как условие нормировки вероятностей, и как утверждение того факта, что имеется только один электрон.

Согласно теории вероятностей сумма вероятностей равна единице только для "полного набора взаимоисключающих и единственно возможных событий". Здесь имеется в виду, что одно какое-то событие из этих непременно реализуется и оно исключает одновременное с ним появление других событий. В многоэлектронной системе обнаружение разных электронов в различных состояниях – события не взаимоисключающие. Хотя взаимоисключающие события здесь тоже есть – свободно или занято каким-либо электроном отдельное квантовое состояние.

Как видно из (1), $n(E_i)$ зависит не от квантовых чисел, а только от энергии, поэтому суммирование по состояниям можно заменить суммированием по энергетическим уровням с учетом кратности вырождения уровня – количества квантовых состояний, соответствующих одному и тому же значению энергии. Если энергетический спектр непрерывен, или квазинепрерывен, то суммирование заменяется интегрированием:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n(E) g(E) dE = N, \quad (3)$$

где $g(E)$ – плотность числа квантовых состояний на шкале энергии, т.е. $g(E)dE$ – число квантовых состояний в диапазоне энергий $E \div E + dE$.

Уровень Ферми сам зависит от температуры и от параметров системы, в частности от количества электронов в ней. Он может быть найден из условия, что сумма по всем квантовым состояниям значений среднего числа электронов, находящихся в каждом из состояний, должна равняться полному числу электронов в системе. Как видно из формулы распределения Ферми–Дирака, среднее число электронов в любом квантовом состоянии не превышает единицы.

В металле при температуре, стремящейся к абсолютному нулю, электроны заполняют все квантовые состояния с энергией вплоть до уровня μ_0 , называемого нулевым уровнем Ферми. Все квантовые состояния с энергией выше уровня μ_0 свободны от электронов. Распределение Ферми–Дирака приобретает вид ступеньки. Отсюда вытекает, что нулевой уровень Ферми совпадает с энергетическим уровнем, который заполнен лишь частично. Если такого энергетического уровня нет, то нулевой уровень Ферми μ_0 лежит строго посередине между последним (в порядке увеличения энергии) полностью заполненным энергетическим уровнем и первым пустым уровнем.

В статистической физике доказывается, что уровень Ферми обладает важным свойством. Если система находится в тепловом равновесии и состоит из нескольких подсистем, то все уровни Ферми, вычисленные для каждой из подсистем, совпадают.

Если же система состоит из электронов, обладающих отрицательным зарядом $-e$, и при этом между двумя подсистемами (те-

лами) приложено внешнее напряжение V , то вся система энергетических уровней (и уровень Ферми в том числе) тела, связанного с плюсом источника напряжения, понижается, а вся система энергетических уровней (и уровень Ферми в том числе) другого тела — повышается. При этом уровни Ферми первого и второго тела уже не совпадают, а отличаются на величину eV . Перемещения систем уровней этих тел по шкале энергии в общем случае различаются по величине.

Зная количество электронов в единице объема тела и энергетическую плотность числа квантовых состояний, можно получить значение энергии Ферми μ_0 в металлах при $T \rightarrow 0$.

Среднее число дырок в одном квантовом состоянии с энергией E , т.е. вероятность нахождения дырки в этом состоянии с энергией E будет равна

$$f_0 = f_p = 1 - f_1 = 1 - f_n = 1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu - E_i}{kT}\right) + 1},$$

где f_p — есть среднее число дырок в одном квантовом состоянии с энергией E_i .

Для лазерной техники особый интерес представляют вырожденные полупроводники, в которых концентрация доноров и акцепторов столь велика, что донорные и акцепторные уровни вследствие взаимодействия примесных атомов расщепляются в полосы, сливающиеся с зоной проводимости или валентной зоной, а уровень Ферми оказывается в одной из этих зон. В вырожденном n -полупроводнике среднее число электронов в каждом из квантовых состояний вблизи дна зоны проводимости превышает 0,5. Аналогично в вырожденном p -полупроводнике среднее число дырок в каждом из квантовых состояний вблизи потолка валентной зоны превышает 0,5. Такие сильнолегированные полупроводники обозначаются соответственно n^+ и p^+ .

Распределение носителей по квантовым состояниям с различными энергиями, описываемое функцией Ферми, поддерживается в результате взаимодействия носителей с кристаллической решеткой. Если, например, некоторые носители получают дополнительную энергию извне и число носителей с большей энергией станет выше нормы, то через некоторое время распределение вновь восстанавливается. Носители, обладающие дополнительной энергией, при столкновениях с

атомами кристаллической решетки передадут ей эту энергию, и она будет в конечном счете перераспределена между всеми носителями в полупроводнике. Время релаксации, т.е. установление равновесного распределения носителей по энергетическим уровням, в полупроводниках мало и лежит в пределах 10^{-11} – 10^{-13} секунды.

Равновесное состояние полупроводника характеризуется определенными равновесными концентрациями электронов и дырок, которые поддерживаются процессами генерации и рекомбинации носителей. При генерации носителей происходит поглощение энергии. Валентный электрон, получая от кристаллической решетки или внешнего электромагнитного поля энергию, превышающую ширину запрещенной зоны, совершает переход в зону проводимости, в результате чего появляются два носителя заряда – электрон в зоне проводимости и дырка в валентной зоне.

Акты рекомбинации (переходы электронов из зоны проводимости в валентную зону) сопровождаются выделением энергии, равной или большей, чем ширина запрещенной зоны. Рекомбинация может происходить самопроизвольно (спонтанно), а также индуцированно под действием внешнего электромагнитного поля. Количество индуцированных (вынужденных) актов рекомбинации в 1 см^3 за 1 секунду пропорционально произведению концентрации электронов в зоне проводимости, концентрации дырок в валентной зоне, а также плотности электромагнитного поля в полупроводнике. Спонтанная рекомбинация определяет среднее время нахождения электрона в зоне проводимости (время жизни). Время жизни для различных полупроводников составляет от 10^{-3} до 10^{-9} секунды.

Практически всегда оно во много раз больше времени релаксации. Благодаря этому созданные каким-либо образом неравновесные носители заряда успевают до рекомбинации перераспределиться по энергетическим уровням и сосредоточиться у границ энергетических зон. Это обстоятельство имеет большое значение для полупроводниковых лазеров. Если, например, внешнее поле вызывает рекомбинацию электронов с нижних уровней зоны проводимости, то эти уровни не опустошаются, а почти сразу же (через 10^{-11} – 10^{-13} секунды) на них переходят электроны с верхних уровней. Тем самым создаются условия для вынужденных переходов практически всех неравновесных носителей данной энергетической зоны.

В процессе рекомбинации отдаваемая электроном избыточная энергия может быть излучена в виде фотона либо безызлучательно передана кристаллической решетке.

Определим, при каких условиях можно получить усиление в полупроводнике за счет вынужденного рекомбинационного излучения. Рассмотрим для этого систему из двух квантовых состояний, входящих в различные энергетические зоны: состояние 1 – в валентной зоне и состояние 2 – в зоне проводимости. Переходы между этими двумя уровнями будут сопровождаться излучением и поглощением энергии на частоте $\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$. Для упрощения задачи будем полагать, что

энергетическая плотность квантовых состояний в зонах постоянна. Тогда среднее число электронов в состояниях 1 и 2 определяется значениями функций Ферми $n(E_1 \leq E_V)$ и $n(E_2 \geq E_C)$.

Количество переходов с излучением энергии пропорционально числу электронов в верхнем состоянии $n(E_2)$ и числу свободных мест (свободных валентных связей), т.е. дырок в нижнем состоянии $[1 - n(E_1)]$. Энергия, выделенная квантовой системой, пропорциональна их произведению $n(E_2) \cdot [1 - n(E_1)]$.

Количество переходов с поглощением энергии соответственно будет определяться числом электронов в нижнем состоянии и числом свободных состояний в верхнем состоянии в зоне проводимости. Поглощаемая энергия определяется величиной $n(E_1) \cdot [1 - n(E_2)]$.

Общая энергия, которую отдает квантовая система внешнему электромагнитному полю в результате актов индуцированного излучения и поглощения, пропорциональна следующей величине:

$$W \sim B_{21} n(E_2) [1 - n(E_1)] - B_{12} n(E_1) [1 - n(E_2)], \quad (4)$$

где B_{21} и B_{12} – эйнштейновские коэффициенты вынужденного испускания и поглощения.

Учитывая, что $B_{21} = B_{12}$, получим

$$W \sim B_{21} [n(E_2) - n(E_1)]. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что усиление излучения возможно при выполнении условия:

$$n(E_2 \geq E_C) \geq n(E_1 \leq E_V). \quad (6)$$

Условие (6) показывает, что усиление излучения полупроводниковой средой возможно лишь в тех случаях, когда в зоне проводимости имеются состояния, средние числа электронов в которых больше,

чем среднее число электронов в каком-либо состоянии в валентной зоне.

В равновесном состоянии условие (6) не выполняется, так как $n(E_2) < n(E_1)$. Чтобы обеспечить условие усиления, необходимо возбудить полупроводник, создать в зоне проводимости и в валентной зоне избыточную, неравновесную концентрацию носителей зарядов. Неравновесные носители, взаимодействуя с решеткой, преимущественно занимают энергетические уровни вблизи границ зон. Среднее число электронов в квантовых состояниях в зоне проводимости возрастает, а в валентной зоне уменьшается, потому что у потолка валентной зоны скапливаются дырки. Так как ширина полосы энергетических уровней, с высокой вероятностью занятых электронами и дырками, составляет приблизительно kT , то в отличие от обычных температурных источников света рекомбинационное излучение полупроводниковых лазеров сконцентрировано в сравнительно узкой полосе частот $\Delta\omega \approx \frac{2kT}{h}$ вблизи частоты $\omega \approx \frac{E_G}{h}$, где E_G – ширина запрещенной зоны.

Время релаксации в зоне проводимости и валентной зоне на два-три порядка меньше времени жизни электрона в возбужденном состоянии. Поэтому в одной и той же точке полупроводника неравновесные носители в обеих зонах успевают достичь теплового равновесия с решеткой значительно раньше, чем установится равновесие во всей системе, и восстановится равновесная концентрация электронов и дырок. Образно говоря, электроны и дырки успевают заключить "сепаратный мир с решеткой", но не мир между собой. Система "распадается" на две подсистемы, находящиеся в одной и той же точке пространства, но разделенные по шкале энергий. В каждой отдельной зоне носители распределяются по энергетическим уровням в соответствии с функцией (распределением) Ферми, но параметр распределения, уровень Ферми, будет определяться уже числом носителей в данной зоне и будет для каждой зоны своим. Концентрация электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне связаны со своими уровнями Ферми μ_e и μ_h следующим образом:

$$n = 4\pi \left(\frac{\sqrt{2m_n}}{h} \right)^3 \int_{E_c}^{\infty} \frac{\sqrt{(E - E_c)}}{\exp\left(\frac{E - \mu_e}{kT}\right) + 1} dE, \quad (7)$$

$$p = 4\pi \left(\frac{\sqrt{2m_p}}{h} \right)^3 \int_{-\infty}^{E_V} \frac{\sqrt{(E_V - E)}}{\exp\left(\frac{\mu_h - E}{kT}\right) + 1} dE, \quad (8)$$

где m_n и m_p – эффективные массы электронов и дырок, T – абсолютная температура, h , k – постоянные Планка и Больцмана.

Такой уровень Ферми для подсистемы называется квазиуровнем Ферми. Так как в зоне проводимости неравновесными носителями будут электроны, то таким образом введенный квазиуровень Ферми μ_e называется электронным. Соответственно в валентной зоне распределение неравновесных дырок будет описываться дырочным квазиуровнем Ферми μ_h . Квазиуровни μ_e и μ_h отличаются от уровня Ферми μ , который один описывал всю систему, т.е. равновесное распределение и электронов в зоне проводимости, и дырок в валентной зоне. Если возбуждение снять, то с течением времени μ_h и μ_e будут стремиться друг к другу и сольются в единый уровень Ферми μ . Подчеркнем, что эти квазиуровни μ_h и μ_e надо рассматривать в одной и той же точке пространства. Значит, в каждой точке полупроводника может быть либо один уровень Ферми μ , либо один или два квазиуровня μ_h и μ_e . Один квазиуровень Ферми может существовать в том случае, если одна подсистема еще не пришла в теплое равновесие, а вторая подсистема уже пришла или вообще из него не выходила.

Введение квазиуровней позволяет сохранить вид функций распределения для электронов и дырок, при этом из условия $n(E_2) > n(E_1)$ получим

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E_c - \mu_e}{kT}\right) + 1} > \frac{1}{\exp\left(\frac{E_v - \mu_h}{kT}\right) + 1} \quad (9)$$

или, при $\hbar\omega = E_c - E_v = E_G$,

$$\mu_e - \mu_h > \hbar\omega. \quad (10)$$

Условие (10) является необходимым условием создания инверсной населенности. То есть разность квазиуровней Ферми для электронов и дырок должна превышать энергию фотонов, возникающих при

стимулированном излучении, или, что то же самое самое, быть больше ширины запрещенной зоны полупроводника E_G .

При $\mu_e - \mu_h > E_G$ происходит накопление электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне, вследствие чего вероятность стимулированного излучения начинает преобладать над вероятностью спонтанных и поглощающих процессов.

Приведенные положения имеют самый общий характер – неравновесное состояние, в частности инверсная населенность, может быть у полупроводников как собственных, так и несобственных. Механизм возбуждения тоже может быть различен – оптическое возбуждение (накачка), возбуждение электронным пучком, электрическим пробоем. Наибольшее распространение получил метод инжекции электронов и дырок через нелинейный электрический контакт. Такими контактами являются обычный p - n -переход, гетеропереход, контакт металл-полупроводник.

Перед тем как рассмотреть инжекцию через p - n -переход и гетеропереход, напомним, что происходит при контакте двух металлов с различными работами выхода электронов Φ_1 и Φ_2 (рис. 1).

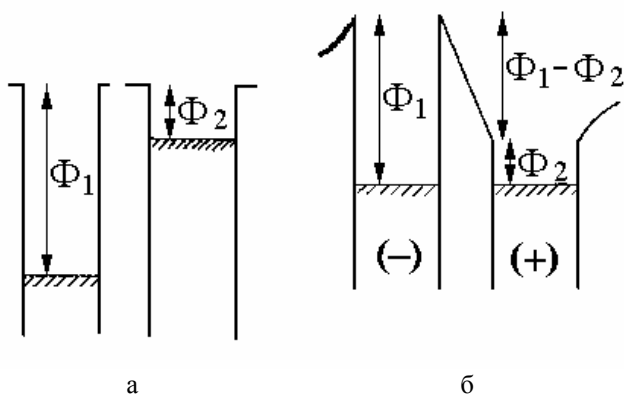


Рис. 1

На рис. 1 по вертикали отложена энергия электрона, по горизонтали – пространственная координата. До контакта (см. рис. 1а) у металлов совпадают "уровни вакуума" – энергия покоящегося внешнего электрона у поверхности тел (т.е. его потенциальная энергия). При контакте (см. рис. 1б) переход некоторого количества электронов из тела 2 на нижележащие свободные уровни тела 1 вызывает не только опустошение уровней тела 2 и заполнение уровней тела 1. Так вела бы себя обычная жидкость в сообщающихся сосудах. Изменение положе-

ния уровней Ферми за счет этого эффекта пренебрежимо мало. Главный эффект другой – переход микроскопической части общего числа электронов из одного тела в другое вызывает появление противоположенных зарядов на телах. А это приводит к изменению потенциальной энергии электронов, как внешних у поверхности тел, так и всех внутренних электронов этих тел. Так как в уравнении Шредингера потенциальная энергия изменяется на некую постоянную величину, то энергия всех разрешенных квантовых состояний изменяется на эту же величину. Ведь решением уравнения Шредингера и определяются все разрешенные квантовые состояния электрона в этих телах. То есть все энергетические уровни тела 1 (и тела 2 соответственно) сдвигаются как целое по шкале энергии относительно прежнего положения. У отрицательно заряженного тела (тела 1) – вверх, у положительно заряженного тела (тела 2) – вниз. Этот процесс прекращается тогда, когда совпадут верхние границы заполненных электронами уровней (точнее, уровни Ферми). Это и есть условие равновесия при контакте двух тел. Хотя заряды обоих тел по модулю равны, перемещения по оси энергии систем энергетических уровней тела 1 и тела 2 совпадают далеко не всегда. Ведь этот сдвиг определяется не зарядом тела, а приобретенным этим телом электростатическим потенциалом. А он, как следует из электростатики, определяется не объемом тела, а его линейными размерами, точнее говоря, емкостью этого тела. Для металлических сфер емкость пропорциональна радиусу шара, следовательно, сдвиг по шкале энергии обратно пропорционален радиусу каждого тела.

2. Зонные диаграммы и инжекция носителей через гомо- и гетеропереходы

а) p – n -переход.

Рассмотрим полупроводник, одна часть которого имеет n -тип проводимости (т.е. легирована донорной примесью), а вторая – p -тип проводимости (легирована акцепторной примесью). Ширина запрещенной зоны в обеих частях одинакова – такой p – n -переход называется гомопереходом.

При приведении в контакт этих полупроводников электроны, находящиеся вблизи границы контакта, начнут переходить в p -область, где электронов в зоне практически нет, и число свободных состояний велико. Переход электронов в p -область нарушает условие электронейтральности по обе стороны p – n -перехода.

Если в рассмотренном ранее контакте двух металлов перешедшие электроны растекались по всему металлу, обеспечивая его эквипотенциальность, то в случае p - n -перехода картина другая. В n -типе вблизи p - n -перехода остается не скомпенсированный электронами положительный объемный заряд доноров не во всем полупроводнике, а только вблизи p - n -перехода. Перешедшие в p -область электроны не успевают распространиться по всей p -области, а рекомбинируют с дырками вблизи p - n -перехода. При этом на месте рекомбинирующих электронов вместо их отрицательного заряда остается уже некомпенсированный дырками отрицательный объемный заряд акцепторов. Таким образом, по обе стороны p - n -перехода образуются неподвижные объемные заряды, равные по величине, но противоположные по знаку.

К аналогичным результатам приводит и диффузия дырок из p -области в n -область. Поле этого двойного слоя объемных зарядов препятствует бесконечной диффузии электронов и дырок через p - n -переход.

Построим энергетическую диаграмму p - n -перехода. Для этого начертим вначале в отдельности энергетические диаграммы материалов n - и p -типа с совпадающими уровнями вакуума (энергиями внешнего электрона, покоящегося у поверхности тела, вне тела) (рис. 2а).

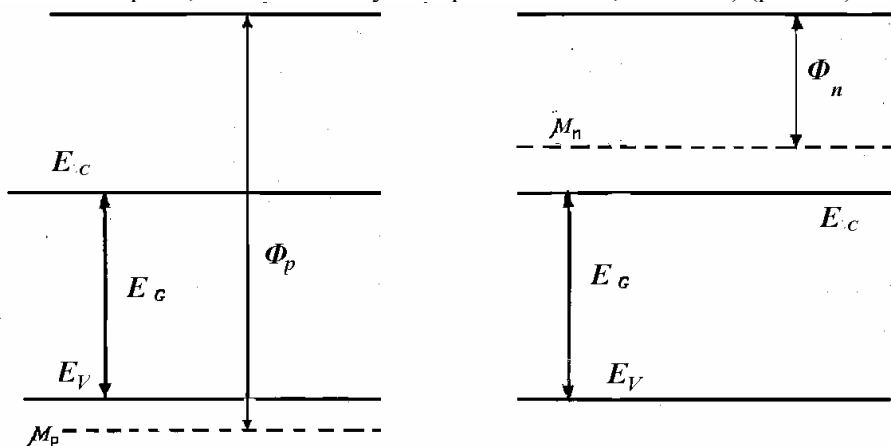


Рис. 2а. Зонная диаграмма p - и n -полупроводников до контакта

Зонная диаграмма p - n -перехода после контакта изображена на рис. 2б. Для ее понимания отметим, что наличие распределенных зарядов приводит к плавному возрастанию уровня вакуума (потенциальной энергии внешнего электрона, покоящегося у поверхности тела)

в n -области образца. Необходимо подчеркнуть, что в каждом сечении образца сумма дырочного j_h и электронного j_e токов равна полному току, протекающему через образец.

б) Зонная модель гетероперехода.

Рассмотрим зонную диаграмму, возникающую при контакте двух полупроводников с различными ширинами запрещенных зон. Такой переход называется гетеропереходом. Более широкозонный полупроводник обозначается в зависимости от типа проводимости главными буквами N или P соответственно.

Построим энергетическую диаграмму p - N -перехода (вторым идет широкозонный материал) в предположении, что все объемные свойства обоих полупроводников сохраняются вплоть до границы раздела, где имеет место резкий переход от одного материала к другому.

На рис. 3 построены энергетические диаграммы этих полупроводников перед контактом с совпадающими уровнями вакуума. Отме-

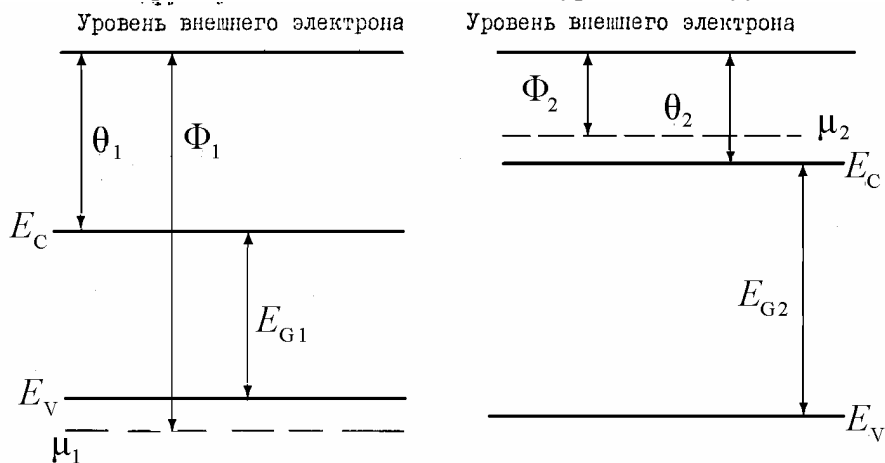


Рис. 3. Зонные диаграммы p - и N -полупроводников до контакта

тим, что на рисунке есть новая величина θ – электронное средство, определяемое как энергия, необходимая для перемещения электрона со дна зоны проводимости на уровень вакуума (энергетический уровень покоящегося электрона вне тела). Эта величина представляет собою свойство материала, не зависящее от легирования, в то время как положение уровня Ферми μ (а следовательно, и работа выхода Φ – энергия, необходимая для перемещения электрона с уровня Ферми на уровень вакуума) зависит от легирования.

При контакте этих двух полупроводников вблизи p - N -перехода возникают (как было описано ранее) объемные заряды доноров и акцепторов. Уровень вакуума (потенциальная энергия внешнего электрона у поверхности) становится плавной функцией координат (как изображено на рис. 4).

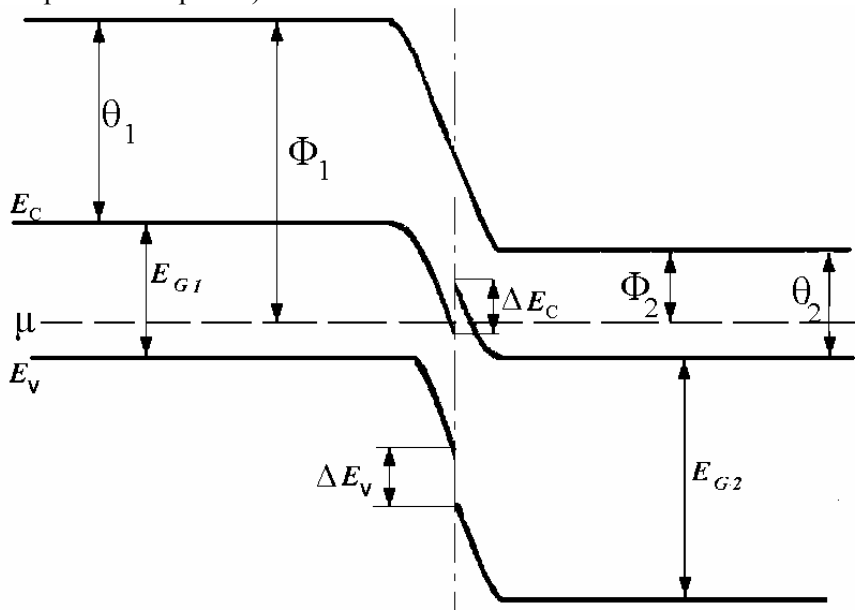


Рис. 4

Так как считаем, что все объемные характеристики сохраняются вплоть до границы, то для построения зависимости от координаты x дна зоны проводимости E_C достаточно в p -области из уровня вакуума вычесть электронное сродство θ_1 , а в N -области – вычесть электронное сродство θ_2 . Так как θ_1 и θ_2 различны, то на границе полупроводников дно зоны проводимости E_C терпит разрыв энергии:

$$\Delta E_C = \theta_2 - \theta_1. \quad (12)$$

Уровни потолка валентной зоны E_V испытывают на границе разрыв энергии. Его величина обуславливается различием электронных сродств и ширин запрещенных зон полупроводников:

$$\Delta E_V = (E_{G2} - E_{G1}) + (\theta_2 - \theta_1). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что в зависимости от соотношения $\theta_1, \theta_2, E_{G1}, E_{G2}$ разрывы могут быть как отрицательные, так и положительные. Положительные разрывы увеличивают величину потенциального барьера по сравнению с потенциальным барьером уровня вакуума, отрицательные – уменьшают. Как видно из рисунка 4, потенциальный барьер для электронов оказывается ниже, чем потенциальный барьер для дырок.

3. Принцип действия инжекционного полупроводникового лазера, его зонная диаграмма, достаточное условие генерации

Как и обычный лазер, ИПЛ представляет собой активную среду между зеркалами с коэффициентами отражения R_1 и R_2 . Электромагнитная волна распространяется в активной среде, усиливаясь и испытывая потери, падает на зеркало, частично отражается и распространяется ко второму зеркалу. Если условия в активном слое таковы, что после прохождения волны между зеркалами она возвращается в исходную точку с увеличенной интенсивностью, т.е. усиленной, то генерация возможна; если же ослабленной, то после нескольких проходов волна затухает и генерация невозможна.

Нетрудно показать, что изменение интенсивности света при распространении его в среде с постоянным распределением потерь и усиления описывается экспоненциальным законом:

$$I = I_0 \exp(-\alpha x). \quad (14)$$

Поэтому выражение для генерации (условие того, что волна возвращается в исходную точку без изменения в интенсивности) имеет вид

$$I_0 = I_0 R_1 R_2 \exp(2gL - 2\alpha L), \quad (15)$$

где g – коэффициент усиления в среде [см^{-1}],

α – коэффициент поглощения [см^{-1}],

L – расстояние между зеркалами [см].

Или

$$g = \alpha + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}. \quad (16)$$

Правая часть (16) определяет потери, которые испытывает световая волна при распространении в активном слое. Эти потери можно разделить на два типа:

1) потери в активном слое – поглощение на свободных носителях, на дефектах материала и т.д.

2) дифракционные потери как при распространении света в среде, так и при отражении от зеркала.

В ИПЛ среда становится активной за счет инжекции лишних, неравновесных носителей (электронов и дырок) через гомопереход или через один либо два гетероперехода. Необходимому условию $\mu_e - \mu_h > E_G$ будут соответствовать необходимые концентрации электронов и дырок, которые обеспечиваются при некоторой величине плотности тока j_0 , протекающей через ИПЛ. При дальнейшем увеличении плотности тока разность $j - j_0$ будет давать вклад в усиление. Результаты теоретических и экспериментальных исследований показали, что зависимость коэффициента усиления в среде g от плотности тока накачки j дается выражением

$$g = \beta(j - j_0), \quad (17)$$

где β – коэффициент усиления по току [$A^{-1} \cdot cm^{-1}$], j_0 – некоторая постоянная величина (плотность тока инверсии) [$A \cdot cm^{-2}$] – характеризует ток, необходимый для создания инверсной населенности. При $j > j_0$ $g \geq 0$. Величина j_0 определяется зонной структурой полупроводниковых слоев, формирующих ИПЛ.

Величина β зависит от того, какая часть носителей дает вклад в усиление. Дело в том, что не все носители, попав в активную область, успевают в нем прорекомбинировать, и часть их вследствие дрейфа уходит из активного слоя. Этому уходу могут препятствовать потенциальные барьеры на границах контакта полупроводниковых слоев.

Однако условие $g \geq 0$ ($j > j_0$), вообще говоря, недостаточно для возникновения генерации. Как видно из (16), пороговый ток генерации $j_{пор}$ должен удовлетворять соотношению

$$j_{пор} = j_0 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2\beta L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}. \quad (18)$$

При разработке ИПЛ важно снизить величину пороговой плотности тока, по возможности уменьшить все слагаемые. Для того чтобы

понять, почему в гетеролазерах (ИПЛ на гетеропереходах) удалось более чем на два порядка снизить $j_{\text{пор}}$ по сравнению с гомолазером (ИПЛ на обычном p - n -переходе, гомопереходе), надо подробнее рассмотреть процесс инжекции носителей через эти переходы.

Прежде всего отметим, что в гомолазере на арсениде галлия GaAs и в гетеролазере GaAs – Ga_{1-x}Al_xAs (x обозначает долю атомов галлия, замененных алюминием) активной областью является арсенид галлия, т.е. ширина запрещенной зоны в обоих лазерах одна и та же ($E_g = 1,45$ эВ).

Отсюда следует, что условие инверсии $\mu_e - \mu_h > E_G$ достигается в обоих лазерах при одних и тех же концентрациях электронов и дырок в активной области. Но при этом ток, протекающий через гетеролазер, может быть в сотни раз меньше.

Дело в том, что концентрация электронов и дырок в активной области уменьшается со временем как за счет рекомбинации электронов и дырок в активной области, так и за счет ухода их из активной области с последующей рекомбинацией вне активной области. Для поддержания во времени состояния инверсной населенности, т.е. этих концентраций, требуется пропускать через ИПЛ ток, компенсирующий оба механизма уменьшения концентраций носителей, его можно условно представить в виде суммы двух токов – тока генерации излучения и тока утечки. При одинаковых токах генерации токи утечки у гомо- и гетеролазеров отличаются очень сильно. Рассмотрим, что их определяет в гомо- и гетеролазерах:

а) ИПЛ с p - n -гомопереходом (диффузионный лазерный диод).

Эта лазерная структура получается в результате диффузии цинка в подложку GaAs, имеющую n -тип проводимости. Подложка образует n^+ -эмиттер. Полупроводник GaAs p -типа, получившийся после диффузии цинка, образует p^+ -эмиттер. Переходный слой между n^+ и p^+ GaAs, возникающий вследствие градиента распределения цинка, образует активную область. Ширина запрещенной зоны у обоих эмиттеров одинакова. Необходимое условие инверсии $\mu_e - \mu_h > E_G$ предполагает, что эмиттеры вырождены, т.е. такой высокий уровень легирования n и p типа GaAs, что в n -типе уровень Ферми располагается внутри зоны проводимости, в p -типе – в валентной зоне. Как правило, уровень легирования n^+ -эмиттера составляет $2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, p^+ -эмиттера $(3-5) \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

На рис. 5 изображена энергетическая схема работы гомолазера.

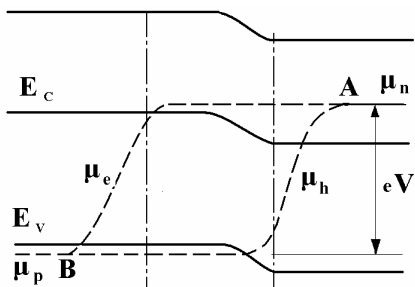


Рис. 5

При приложении в пропускном направлении напряжения V величина потенциального барьера уменьшилась на eV , что увеличило диффузию электронов и дырок навстречу друг другу через p - n -переход. Уровень Ферми в n^+ -полупроводнике лежит по шкале энергии на eV выше, чем уровень Ферми в p^+ -полупроводнике.

В точке А вблизи p - n -перехода уровень Ферми расщепляется на два квазиуровня Ферми – μ_e и μ_h , причем вблизи точки А электронный квазиуровень совпадает по величине с уровнем Ферми в n^+ -полупроводнике, описывая распределение по энергиям диффундирующих электронов. По мере продвижения в p^+ -область количество электронов уменьшается за счет рекомбинации, поэтому описывающий их квазиуровень Ферми μ_e снижается, приближаясь к величине уровня Ферми в p^+ -полупроводнике. В точке В квазиуровни сливаются в один уровень Ферми для дырочного полупроводника. Аналогично описывается зависимость от координаты x и дырочного квазиуровня Ферми μ_h . Пунктиром ограничена та область p - n -перехода, где выполняется условие инверсии $\mu_e - \mu_h \geq E_G$. Большинство дырок и электронов уходит из этой активной области, не успев прорекомбинировать.

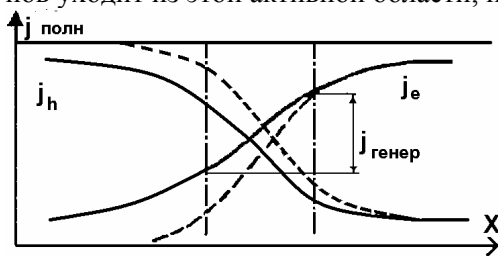


Рис. 6

На рис. 6 изображены зависимости от координаты x электронной и дырочной составляющих полного тока через p - n -переход. Важно отметить, что в любом сечении сумма дырочного и электронного тока постоянна и равна

полному току. Разность электронного (или дырочного) тока на входе и на выходе из активной области составляет ток генерации излучения. Разность между полным током и током генерации – ток утечки. Большие токи утечки гомолазера приводят к большим плотностям порогового тока. При $T = 300$ К $j_{\text{пор}} \approx 10^5 - 10^6$ А/см². Для вычисления полного тока в любом сечении необходимо сложить величину электронной и дырочной составляющих тока, а вот для вычисления тока гене-

рации достаточно лишь одной составляющей, причем неважно какой именно – электронной или дырочной. Вопрос, почему во втором случае можно обойтись без суммы, одним слагаемым, обычно вызывает затруднение. Часто следует ответ – но ведь вычисленный результат одинаков и для электронной составляющей, и для дырочной составляющей. Но это не ответ на вопрос, почему в первом случае нужно суммировать два слагаемых, а во втором случае достаточно лишь одной составляющей. Дело в том, что два разных понятия – полный ток и ток генерации –, хотя и используют слово "ток" и измеряются в одних и тех же единицах, но это принципиально разные физические понятия. Полный ток – это количество заряда, пересекающее какую-то поверхность в единицу времени. Если есть встречное движение противоположно заряженных частиц, то величина тока дается суммой модулей тока носителей противоположных знаков. Величина тока генерации – это умноженное на заряд электрона количество электронно-дырочных пар, прорекомбинировавших в активной области в единицу времени. А это величина равна разности электронной составляющей тока на входе и на выходе из активной области, точно так же она равна разности дырочной составляющей тока на входе и на выходе из активной области. Происхождение и смысл пунктирных кривых на рис. 6 объясняется ниже, после рис. 7.

б) ИПЛ с одним гетеропереходом (одинарная гетероструктура – ОГС).

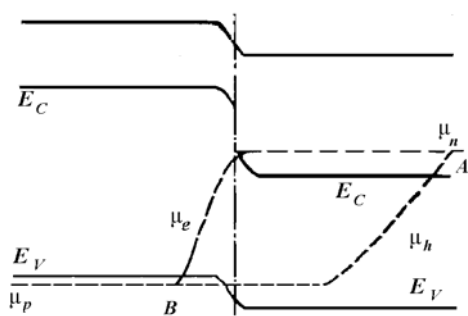


Рис. 7

Такой структурой является, например, выращенная на подложке GaAs n^+ -типа проводимости монокристаллическая пленка твердого раствора $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$. Замещение в кристаллической решетке атомов галлия атомами алюминия приводит к тому, что ширина запрещенной зоны твердого раствора увеличивается

по сравнению с шириной запрещенной зоны GaAs, а показатель преломления этого твердого раствора на длине волны рекомбинации в GaAs уменьшается.

Выращенная пленка твердого раствора легируется цинком. В процессе кристаллизации происходит диффузия атомов цинка в подложку, вследствие чего p - n -переход оказывается смещенным в GaAs.

Подложка n^+ -типа и p^+ -слой твердого раствора $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ образуют эмиттеры, а p -слой GaAs , образованный диффузией цинка, является активным. Различие в ширинах запрещенных зон материала активного слоя и P^+ -эмиттера приводит к появлению энергетического барьера для электронов в зоне проводимости на границе активного слоя и P^+ -эмиттера.

При приложении к гетеропереходу напряжения в пропускном направлении можно устранить потенциальный барьер для внешних электронов (контактную разность потенциалов), но нельзя устранить разрывы ΔE_c и ΔE_v – они определяются только зонной структурой материала и не зависят от положения уровня Ферми (квазиуровней Ферми). На рис. 7 верхняя кривая – это уровень энергии внешнего электрона, она непрерывна. Видно, что в P – n -переходе, где P – более широкозонный материал, для электронов остается барьер даже в том случае, когда поле объемных разрядов полностью нейтрализуется внешним напряжением. Это уменьшает ток утечки электронов из активной области, тем самым снижая плотность порогового тока по сравнению с аналогичной величиной в гомолазере. Плотность порогового тока $j_{\text{пор}}$ в ОГС составляет величину порядка 10^4 А/см^2 , при $T = 300 \text{ К}$. Однако для дырок, инжектированных в активный слой, нет барьера в валентной зоне на границе активная область – n -эмиттер. Это вызвано тем, что в GaAs и GaAlAs потолки валентной зоны практически совпадают (см. пунктирные кривые рис. 6).

в) ИПЛ с двумя гетеропереходами (двойная гетероструктура – ДГС).

Наиболее распространенными и широко используемыми в настоящее время являются ИПЛ с двумя гетеропереходами или ИПЛ–ДГС.

Такая структура получается, например, следующим образом. На подложке n -типа GaAs методом жидкофазной эпитаксии последовательно выращивают монокристаллические слои:

- 1) твердый раствор $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ n -типа проводимости, образующий N^+ -эмиттер;
- 2) GaAs n - или p - типа проводимости, формирующий активную область;
- 3) твердый раствор $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ p -типа проводимости, являющийся P^+ -эмиттером.

Таким образом, активная область n - или p -типа заключена между N^+ - и P^+ -эмиттерами, выполненными из более широкозонного полупроводника (рис. 8 и 9).

В отличие от ИПЛ с одним гетеропереходом, на границе N^+ -эмиттер появляется дополнительный барьер для дырок в валентной зоне. Это еще сильнее уменьшает ток утечки, снижая тем самым пороговую плотность тока. При $T = 300$ К лучшие образцы ИПЛ–ДГС имеют $j_{\text{пор}} \approx 10^3$ А/см². Отметим, что толщина активного слоя может меняться в очень широких пределах от 0.1 мкм до 50 мкм, при этом зависимость $j_{\text{пор}}$ от d линейна.

Таким образом, дополнительные потенциальные барьеры в гетеропереходах препятствуют уходу электронов и дырок из активной области, локализуют их в ней. Поэтому увеличивается доля носителей, рекомбинирующих в активной области, т.е. коэффициент усиления по току β , и уменьшается величина тока инверсии j_0 .

Использование гетеропереходов позволяет улучшить и оптические характеристики ИПЛ. Дело в том, что у полупроводников, как правило, большей ширине запрещенной зоны соответствует меньший показатель преломления. В гомолазере различие между показателями преломления активного слоя и подложки очень мало ($\Delta n \approx 0.01 \div 0.03$) и определяется различным уровнем легирования.

В гетеропереходах величина скачка показателя преломления на границе активного слоя существенно выше ($\Delta n \approx 0.05 \div 0.15$) и зависит от содержания AlAs в твердом растворе.

Таким образом, двойная гетероструктура образует диэлектрический волновод, где центральная часть, имеющая инверсную населенность, заключена между слоями, имеющими меньший показатель преломления. За счет эффекта полного внутреннего отражения световая волна может зигзагообразно распространяться вдоль волновода, оставаясь все время в активном слое. Эта локализация света, оптическая локализация, позволяет уменьшить оптические потери в лазере, т.е. коэффициент поглощения. Тем самым облегчаются условия начала генерации, уменьшается пороговый ток.

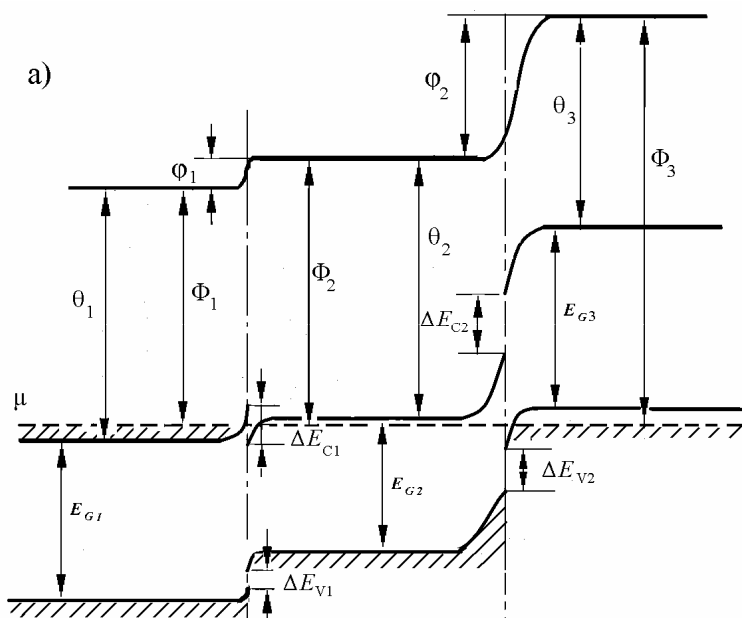


Рис. 8а. Энергетическая зонная диаграмма с активной областью n -типа в отсутствие электрического смещения

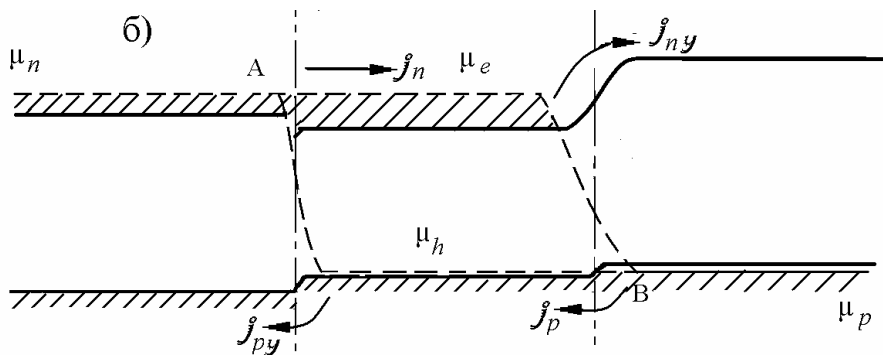


Рис. 8б. Энергетическая зонная диаграмма с активной областью n -типа при прямом смещении

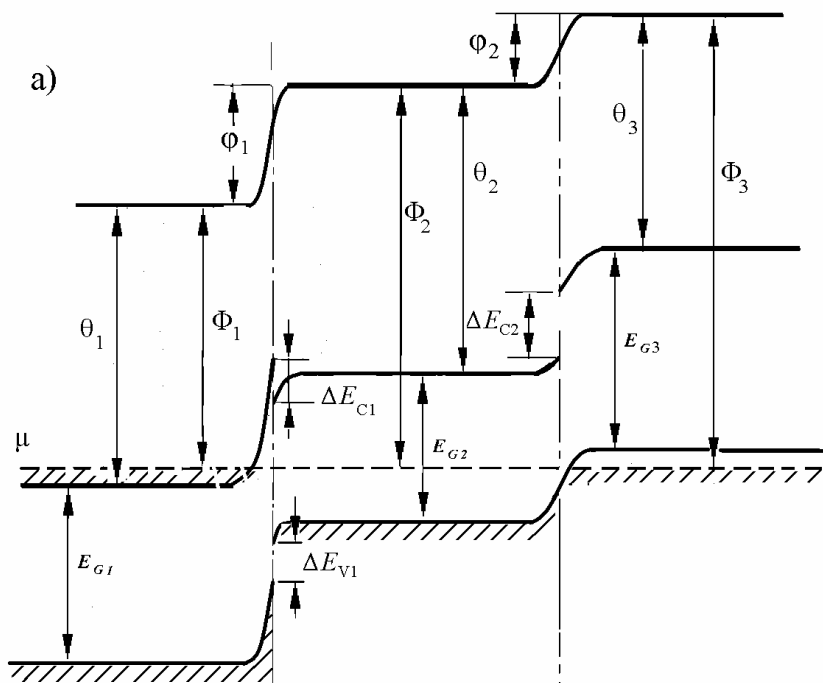


Рис. 9а. Энергетическая зонная диаграмма с активной областью p -типа в отсутствии электрического смещения

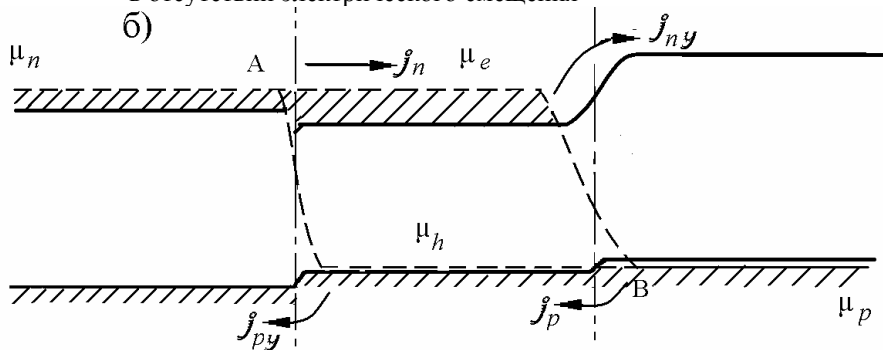


Рис. 9б. Энергетическая зонная диаграмма с активной областью p -типа при прямом смещении

4. Ватт-амперные и спектральные характеристики излучения ИПЛ

В предыдущем разделе мы выяснили связь энергетических и волновых характеристик активного слоя с величиной плотности тока накачки $j_{\text{пор}}$, необходимой для достижения порога генерации. Рассмотрим теперь вопрос о ватт-амперных и спектральных характеристиках излучения ИПЛ.

Для описания зависимости выходной световой мощности излучения $P_{\text{св}}$ от тока накачки $I_{\text{нак}}$ пользуются понятием дифференциальной квантовой эффективности, определяемой как

$$\eta_{\text{диф}} = \frac{\Delta N_{\phi}}{\Delta N_{\text{эл}}} \cdot 100\% \quad (19)$$

Здесь N_{ϕ} – число фотонов, возникающих в результате стимулированного излучения; $N_{\text{эл}}$ – число электронно-дырочных пар, инжектированных в активный слой.

Ясно, что предельное значение равно 100%, т.е. когда в каждом рекомбинационном акте рождается один стимулированный фотон. До достижения порога генерации, т.к. число стимулированных фотонов близко к нулю, а число спонтанных фотонов, выходящих из резонатора, ограничено углом полного внутреннего отражения на границе активный слой–вакуум. После достижения порога генерации мощность излучения ИПЛ начинает линейно расти с током, и величина $\eta_{\text{диф}}$ определяется, как это следует из (19), как волноводами, так и энергетическими характеристиками активного слоя.

Для гомолазеров величина $\eta_{\text{диф}}$ низка ($\eta_{\text{диф}} \approx 10\%$);

для ИПЛ–ОГС $\eta_{\text{диф}}$ значительно выше ($\eta_{\text{диф}} \approx 50 \div 60\%$),

в ИПЛ–ДГС величина $\eta_{\text{диф}}$ достигает $80 \div 90\%$

Зависимость $P_{\text{св}}$ от $I_{\text{нак}}$ называется ватт–амперной характеристикой излучения ИПЛ. Нетрудно показать, пользуясь определением (19), что

$$\eta_{\text{диф}} = \frac{\Delta P_{\text{св}}}{\frac{E_g}{e} \Delta I_{\text{нак}}} \cdot 100\% . \quad (20)$$

Здесь E_g – ширина запрещенной зоны GaAs ($E_g = 1.45$ эВ), e – заряд электрона.

Рассмотрим теперь вопрос о спектральных характеристиках излучения ИПЛ. Активная среда характеризуется шириной линии усиления. Положение максимума линии усиления, или, как говорят, длина генерации определяется расстоянием между квазиуровнями Ферми μ_e и μ_h . Для многих практических оценок с хорошей степенью точности можно считать, что энергия фотона в стимулированном излучении определяется шириной запрещенной зоны E_g активного слоя.

Хотя среда способна усиливать волну с любой длиной волны, лежащей в ширине линии усиления, излучение лазера имеет частоту собственных колебаний резонатора. Поэтому генерируемая световая волна должна приходить в точку своего возникновения, изменив фазу на величину, кратную 2π . Следовательно,

$$\exp(2ikLn)=1, \quad 2kLn=2\pi m. \quad (21)$$

Здесь k – волновой вектор световой волны, равный $\frac{2\pi}{\lambda}$;

λ – длина волны излучения в вакууме;

n – показатель преломления активного слоя;

L – длина резонатора.

Выражение (21) показывает, что в режиме генерации в резонаторе возникают продольные колебания поля, т.е. спектр излучения является дискретным. Расстояние между соседними типами колебаний (модами) равно

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2Ln}. \quad (22)$$

При выводе (22) не учитывалась зависимость показателя преломления от длины волны. Учет дисперсии приводит к выражению

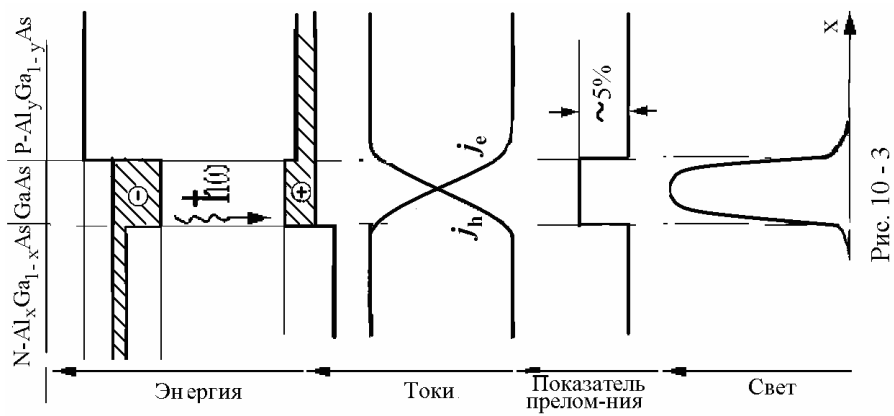
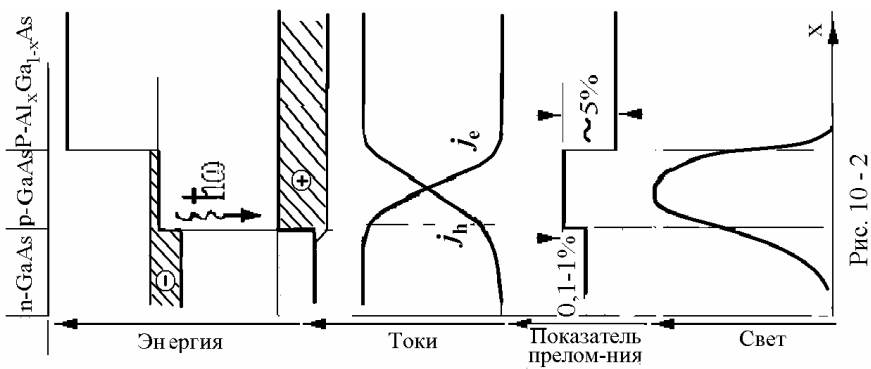
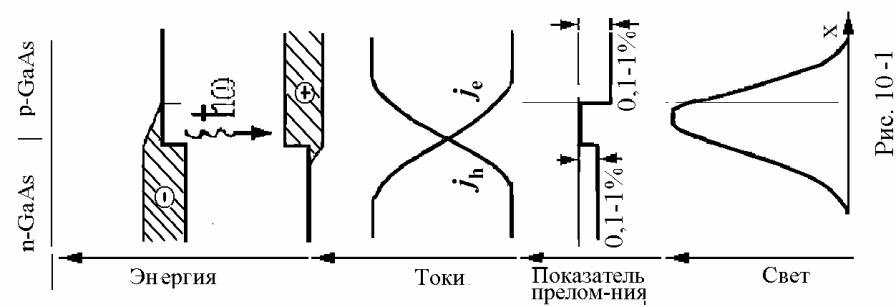
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)}. \quad (23)$$

Предлагается выражения (20) и (23) вывести самостоятельно, используя в качестве исходных соотношений (19) и (21).

Рассмотрим теперь кратко вопрос о режимах работы ИПЛ. С увеличением температуры степень локализации носителей в активном

слое начинает уменьшаться в силу того, что наиболее быстрые электроны и дырки начинают уходить через барьеры на границах. Поскольку и в ИПЛ ОГС, и в гомолазерах локализация носителей тока плохая, то увеличение температуры приводит к большим $j_{\text{пор}}$. Поэтому накачка этих типов при $T = 300$ К осуществляется импульсами тока с длительность 100–200 наносекунд и частотой следования импульсов 1–10 кГц. С понижением температуры пороговый ток уменьшается, что позволяет получить непрерывный режим генерации в этих ИПЛ при температуре жидкого азота $T = 77$ К. Способ формирования структуры активного слоя ИПЛ ДГС позволяет существенно лучше локализовать носители в активном слое, а также уменьшить толщину активного слоя. Это приводит к существенному снижению плотности порогового тока по сравнению с другими типами ИПЛ и позволяет реализовать непрерывный режим генерации при комнатной температуре. В настоящее время непрерывно работающие образцы ИПЛ–ДГС начинают применять для разработок линий связи считывающих устройств в ЭВМ и ряда других применений.

На рис. 10–1, 10–2 и 10–3 приведены для сравнения распределения по координате x важнейших физических величин всех трех рассмотренных типов ИПЛ.



Заключение3

Подводя итог вышеизложенному, можно сделать следующие выводы:

1. Условием создания инверсной населенности в полупроводнике является $\mu_e - \mu_h \geq E_g$, где μ_e и μ_h – квазиуровни Ферми для инжектированных в активный слой электронов и дырок.

2. Плотность порогового тока генерации тем меньше, чем лучше локализация инжектированных в активный слой электронов и дырок, чем лучше волноводные свойства активного слоя.

3. Применение гетеропереходов позволяет существенно улучшить энергетические и волноводные характеристики активного слоя, в частности, снизить пороговую плотность тока до величины, позволяющей получить непрерывную генерацию при температуре 300 К, и повысить дифференциальный КПД $\eta_{\text{диф}}$ до величины, близкой к 100%.

Первая часть лабораторной работы № 23

Исследование ватт-амперных характеристик излучения инжекционных полупроводниковых лазеров (ИПЛ)

I. Блок-схема установки представлена на рис. 11.



Рис. 11

Исследуемый образец лазера закреплен подпружиненным контактом в посеребренном держателе. Держатель зажат латунным винтом в измерительной головке (ИГ). Накачка образца производится ге-

нератором импульсов тока накачки (ГИТ-2). Длительность и форма импульсов тока накачки неизменны. Частота следования импульсов тока накачки задается дополнительным генератором импульсов Г5-15. Эта частота может быть изменена (ручками НЗ и "Диапазон частот следов"). Контроль величины тока накачки производится при помощи осциллографа С1-15. Схема контроля величины тока накачки, протекающего через образец ИПЛ, приведена на рис. 12.

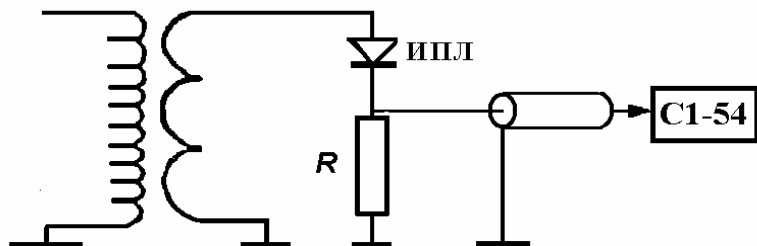


Рис. 12

Световой сигнал, возникающий при протекании тока через образец, регистрируется фотоприемником (ФП), в цепь которого включен миллиамперметр. Питание фотоприемника производится от источника постоянного напряжения.

Последовательно с исследуемым образцом ИПЛ включено измерительное сопротивление $R = 0,5$ Ом, напряжение с которого поступает на вход осциллографа. Измеряя величину напряжения и зная R , нетрудно определить величину тока накачки.

Величина фототока, возникающего в цепи фотоприемника, измеряется инерционным прибором – миллиамперметром М-254, поэтому показания прибора пропорциональны средней световой мощности, усредненной за промежуток времени, содержащий множество импульсов света. Коэффициент пропорциональности (чувствительность фотоприемника) равен $0,5$ А/Вт, т.е. непрерывный световой поток мощности 1 Вт вызвал бы в цепи силой $I = 0,5$ А.

II. Порядок проведения работы

1) Включение установки

1.1. Включить средний рубильник на лабораторном щитке.

1.2. Включить тумблер "Сеть" осциллографа С1–15.

1.3. Посеребренный держатель лазера вынуть из измерительной головки. Латунный винт закрутить по часовой стрелке до упора в нижнюю пластину измерительной головки.


1.4. Включить тумблер "Сеть" генератора Г5–15. Для запуска блока питания лазера ГИТ6–2 требуется достаточная амплитуда выходного сигнала Г5–15 и правильная полярность. Ручка "Амплитуда импульса" должна быть повернута до упора по часовой стрелке, переключатель полярности под ней – поставлен в положение "Л". С помощью переключателя "диапазоны частоты след." и ручки "Hz" установить частоту 5000 Гц. Шнур от гнезда "Выход" должен быть подсоединен к генератору накачки ГИТ6–2.

1.5. Включить генератор импульсов тока накачки ГИТ6–2. Для этого ручку "Ампл. тока" установить в нулевое положение – повернуть до упора против часовой стрелки. Включить тумблеры "Сеть", "Пуск". Правый тумблер поставить в положение "Внеш.". Штекеры шнура от генератора Г5–15 должны быть установлены: зеленый провод – в гнездо " $\frac{+}{-}$ ", белый – в крайнее левое гнездо "Внешн. синхр. запуск. импульс".

1.6. Тумблер блока питания фотоприемника поставить в положение "ВКЛ".

1.7. Дать прогреться аппаратуре 10–15 минут.

2) Калибровка осциллографа


Для калибровки осциллографа сигнал выхода калибратора осциллографа надо подать на выход канала Б осциллографа. Калибратор может выдавать калиброванное по амплитуде постоянное напряжение обеих полярностей, меандр () с частотой 50 Гц и метки с периодом $T = 10 \mu$. Амплитуда напряжения меняется от 0 до 10 В. Ступенчатое переключение осуществляется большим переключателем "Множитель", плавная регулировка напряжения производится ручкой "Вольты".

Переключение того или другого вида калиброванного напряжения осуществляется маленьким переключателем, совмещенным с большим переключателем "Множитель".

Проверить соответствие между величиной сигнала калибратора и показаниями на экране осциллографа. Устойчивое изображение сигнала калибратора достигается вращением маленькой ручки "уровень" и расположенной под ней ручки "подстройка синхронизации". Маленькая ручка "усиление" канала Б должна быть установлена в положение "калибр". Размер изображения не должен превышать 40 мм. Размер устанавливается переключателем чувствительности (большой ручкой, совмещенной с маленькой ручкой "усиление"). Освободить вход канала Б, выключить калибратор. Амплитуда сигнала подсчитывается как произведение величины изображения в см на соответствующий коэффициент чувствительности в В/см, устанавливаемый переключателем.

После калибровки осциллограф имеет откалиброванную чувствительность и готов к измерениям. Погрешность – не более 10%.

3) Измерение параметров импульса тока накачки

3.1. Поставить большую ручку переключателя "синхронизация" в положение "Исслед. сигн.", переключатель "длительность" в положение "0.02", ниже расположенный переключатель " $\mu\text{S}/\text{cm}$ " в положение "x5", большую ручку "Запуск" в положение "", совмещенную с ней маленькую ручку "однократный" в положение "Выкл.". В канале Б движок "Вход" поставить в нижнее положение, переключатель "полярность" канала Б поставить в положение "Норм.", большую ручку "В/см" поставить в положение "2". После этого подать сигнал от измерительной головки на вход канала Б (красный штеккер в гнездо "Вход").

3.2. Поворотом ручки "ампл. тока" генератора импульсов тока накачки ГИТ6–2 на 3 деления подать ток в замкнутую накоротко измерительную головку.

3.3. Вращая на осциллографе маленькую ручку "уровень" и расположенную под ней ручку "подстройка синхронизации", получить на экране осциллографа изображение импульса тока накачки. Измерить длительность импульса тока на уровне 0.5 амплитуды.

4) Проведение измерений

4.1. Замыкание измерительной головки требовалось для того, чтобы не допустить прохождение через лазер слишком большого тока. Известно, что лазеры испытуемого типа допускают предельное значение мощности света в импульсе 1–1,5 Вт.

При превышении этой величины может произойти выгорание и разрушение зеркальной грани исследуемого образца. Величина тока накачки, таким образом, не должна превышать той величины, при которой световая мощность в импульсе излучения достигает предельного значения $1 \div 1,5$ Вт. Миллиамперметр, регистрирующий ток фотоприемника, показывает не мощность света в импульсе, а некую среднюю мощность, зависящую от длительности самого светового импульса и частоты повторения импульсов.

Считая, что длительность светового импульса лазера равна длительности импульса тока накачки (которая уже измерена), рассчитать, каковы должны быть предельные показания миллиампера, при частоте следования импульсов $\nu = 1, 2, 4, 6$ кГц. Коэффициент чувствительности фотоприемника – 0,5 А/Вт. Показать результаты преподавателю. Дальнейшая часть работы делается после его разрешения.

4.2. Вывести ручку "ампл. тока" генератора ГИТ6–2 в нулевое положение.

4.3. Установить в посеребренный держатель образец ИПЛ, держатель установить в измерительную головку, закрепив латунным винтом так, чтобы черная точка на торце лазера оказалась внизу. Черной точкой отмечен (+) лазера.

4.4. Придвинуть фотоприемник вплотную к образцу.

4.5. Снять зависимость фототока от величины накачки на частотах следования импульсов $\nu = 1, 2, 4, 6$ кГц. Измеряемая величина фототока не должна превышать заранее вычисленного значения для данной частоты.

4.6. По полученным данным построить зависимость световой мощности в импульсе от тока накачки. Определить величину порогового тока $I_{\text{пор}}$ и дифференциальную квантовую эффективность излучения лазера $\eta_{\text{диф}}$ для каждой частоты следования импульсов тока накачки. Построить зависимость $I_{\text{пор}} = I_{\text{пор}}(\nu)$ и $\eta_{\text{диф}} = \eta_{\text{диф}}(\nu)$.

4.7. Провести измерения и вычисления по пунктам 4.5 и 4.6 для четырех образцов.

5) Выключение установки

1. Вывести в нулевое положение ручку "ампл. тока" генератора импульсов тока накачки, выключить тумблеры "сеть" и "пуск".
2. Включить тумблеры "сеть" осциллографа С1–15 и генератора Г5–15.
3. Выключить блок питания фотоприемника.

Вторая часть лабораторной работы № 23

Исследование спектральных характеристик инжекционных полупроводниковых лазеров (ИПЛ)

Принадлежности: спектрограф ДФС–8–1, фотоумножитель ФЭУ–28 с блоком питания ВСВ–2, осциллограф С1–54, селективный усилитель У2–6, измерительная головка с держателем лазера, образцы инжекционных лазеров на гетеропереходах.

Порядок выполнения работы

1. Включение установки:
 - а) убедиться в наличии заземления у всех приборов установки;
 - б) включить средние рубильники на левых лабораторных щитах;
 - в) включить тумблер "Сеть" селективного усилителя У2–6;
 - д) у высоковольтного стабилизированного выпрямителя ВСВ–2 переключатель "Выс. напр." поставить в положение "Выкл.", после чего включить тумблер "Сеть". Переключатель "полярность" поставить в положение "–";
 - е) ручку "Ампл. тока" генератора импульсов тока накачки ГИТ6–2 повернуть до упора против часовой стрелки, включить тумблеры "Сеть" и "Пуск", правый тумблер переключить в положение "6 кГц";
 - ж) дать прогреться приборам 10–15 минут.
2. Произвести калибровку осциллографа С1–54 для измерения амплитуды входного сигнала, пропорционального току накачки лазера. Для этого ручку "синхронизация" переключить в положение "калибровка", ручку "длит/см" в положение "100 μ S", движок "Вход Y" поставить в левое положение. Маленькую ручку над этим движком переключить в положение "широкая". Выход "калибраторы амплитуды"

ды" соединить со входом Y осциллографа. Вращая ручки "режим запуска" и "уровень запуска", получить на экране устойчивое изображение меандра ($\square\square\square$), амплитуда которого должна составлять 4 см на всех диапазонах чувствительности усилителя "V/см", кроме диапазона "50". При необходимости, вращая вышерасположенную ручку "усиление", получить необходимую амплитуду 4 см, после чего осциллограф откалиброван. Положение ручки "усиление" при проведении дальнейших измерений нельзя изменять. Для измерения амплитуды импульсов тока накачки ручку "длит./см" поставить в положение "0.1". Ручку "синхронизация" осциллографа поставить в положение "внутр. \sim ", движок "усиление x" в положение "В.Ч. \square ".

3. В измерительной головке находится импульсный трансформатор, держатель образца лазера и измерительное сопротивление $R = 0,1$ Ом (см. рис. 13). В держатель образец вставляется так, чтобы черная точка или знак "+", нарисованный на торце лазера, оказалась внизу.

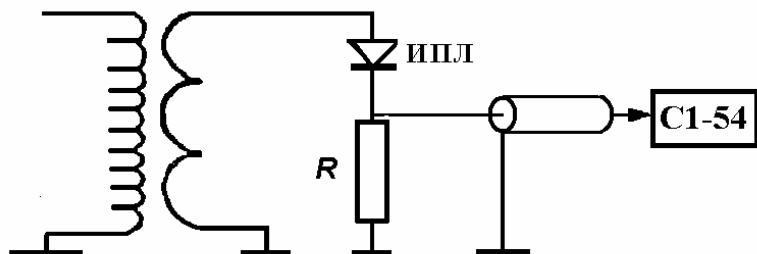


Рис. 13. ИПЛ – образец инжекционного лазера
 $R = 0,1$ Ом – измерительное сопротивление

Измерительную головку с лазером установить вплотную к входной щели спектрографа, выставив по высоте на середину щели. Открыть затвор входной щели спектрографа. Шнур от выхода измерительной головки "контроль тока" подать на вход Y осциллографа.

4. Установить ручку "Ампл. тока" генератора импульсов тока ГИТ6–2 на второе деление. На экране осциллографа должно появиться изображение импульса тока накачки. Вращением ручек "режим запуска" и "усиление x" добиться устойчивого изображения импульса тока, измерить его величину.

5. Открыть щель ФЭУ–28 и щель спектрографа до предела. Серой ручкой на спектрографе установить заслонку с фотоумножителем напротив выходной щели спектрографа (при этом подвижная метка установится напротив деления "35" на вертикальной миллиметровой шкале, расположенной в левом верхнем углу торца спектрографа). Вращением черной ручки спектрографа установить на нижнем лимбе спектрографа значение 900 нм. Включить высокое напряжение на блоке питания ФЭУ, установив напряжение 1,1 кВ. Подать сигнал с ФЭУ на вход Y осциллографа. Ручку "V /см" осциллографа переключить в положение "0,1".

6. Смещая и поворачивая измерительную головку относительно выходной щели спектрографа, получить на экране осциллографа изображение сигнала с ФЭУ. При отсутствии сигнала перевести лимб спектрографа в положение 905 нм и повторить юстировку измерительной головки до получения импульса фототока с ФЭУ. Получив сигнал, добиться его максимальной величины юстировкой измерительной головки, изменением положения заслонки по вертикали и установкой лимба на максимум сигнала.

7. Переключить выход с ФЭУ–28 на вход усилителя У2–6. На вход Y осциллографа подать снова сигнал с измерительной головки. Ручка "диапазон частоты" усилителя должна стоять в положении (2,8–10 кГц). Настроить усилитель на максимальную чувствительность. Для этого ручку переключателя "режим работы" поставить в положение "первая узкая" после чего, вращая ручку "установка частоты узкая-грубо", добиться максимального отклонения стрелки прибора. Затем переключатель "режим работы" ставится в положение "2 узкая" и ручкой "установка частоты 2 узкая – грубо" добиваются максимального отклонения стрелки прибора. После настройки усилителя, медленно вращая лимб спектрографа, получить максимальный сигнал с ФЭУ, сделать счет по лимбу.

8. В работе требуется проследить, как меняется форма спектра излучения образца при увеличении тока накачки от предпорогового значения до $I \approx 1,5 I_{\text{пор}}$. Для этого установить ручку "Ампл. тока" генератора ГИТ6–2 на третьем делении и измерить на экране осциллографа новое значение тока накачки, а усилителем У2–6 – новое значение сигнала фотоумножителя. Величину шума ФЭУ и усилителя У2–6 можно определить, закрыв заслонку входной щели спектрографа. Разность между показаниями У2–6 и уровнем шума линейно зависит от тока накачки. Линейно экстраполируя эту разность к нулевому уровню, можно определить величину порогового тока.

Чтобы повысить точность измерения спектральных характеристик, входную щель фотоумножителя было бы целесообразно сузить, не допуская при этом чрезмерного ослабления выходного сигнала ФЭУ. Соотношение сигнал/шум не должно опускаться ниже трех. Фиксируя несколько значений тока накачки в пределах $0,9 I_{\text{пор}} \div 1,5 I_{\text{пор}}$, снять для каждого из них форму спектральной характеристики излучения лазера, свойственного этому значению тока накачки. Из-за большой инерционности прибора У2–6 лимб спектрографа требуется поворачивать очень медленно, иначе максимумы на спектральной характеристике будут незаметны.

Измерить полуширину линии генерации и число максимумов. Оценить число продольных мод, считая длину резонатора лазера 500 мкм, показатель преломления активного слоя 3,6.

Сравнить ширину линии излучения при различных ширинах входной щели ФЭУ.

Аналогичные измерения провести для трех образцов ИПЛ.

Выключение установки

1. Ручку "Ампл. тока" генератора ГИТ6–2 повернуть в нулевое положение; выключить тумблеры "сеть" и "пуск".
2. Выключить тумблер "Выс. напр." блока питания ФЭУ ВСВ–2, затем включить тумблер "сеть" ВСВ–2.
3. Выключить тумблер "сеть" измерительного усилителя У2–6.
4. Нажав кнопку "Сеть", выключить осциллограф С1–54.
5. Выключить средние рубильники на лабораторных щитках.

Список литературы

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. Т. 2. – М.: Мир, 1984.
2. Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978.
3. Кейси Х., Паньши М. Лазеры на гетероструктурах. Т. I. – М.: Мир, 1981.
4. Милнс А., Фойхт Д. Гетеропереходы и переход металл–полупроводник. – М.: Мир, 1975.
5. Елисеев П.Г. Введение в физику инжекционных лазеров. – М.: Наука, 1983.
6. Грибковский В.П. Полупроводниковые лазеры. – Минск.: Университетское, 1988.

Контрольные вопросы

1. На рис. 5 данного описания приведена энергетическая схема работы гомолазера. Как будет меняться толщина активной области с уменьшением приложенного напряжения? Нарисовать энергетическую схему этого гомолазера, если приложено напряжение в обратном направлении (запирающем). Как будут расположены в этом случае квазиуровни Ферми, электронный и дырочный?
2. Каким образом, мысленно наблюдая за поведением электронов в активной области ИПЛ, можно различить активную область гомолазера от активной области гетеролазера? Предполагается, что области контакта разных слоев наблюдению недоступны.
3. Почему для нахождения полного тока через ИПЛ необходимо сложить электронную и дырочную составляющие тока, а для вычисления тока генерации в ИПЛ достаточно взять одну из двух составляющих (дырочную или электронную) текущего тока?
4. Какие физические процессы приводят к образованию потенциального барьера на границе p – n -перехода?
5. Что такое квазиуровень Ферми? В чем отличие электронного и дырочного квазиуровней от уровней Ферми полупроводников n - и p -типа?
6. Нарисовать зависимость от координаты x полного, электронного и дырочного токов через p – n -гомопереход, p – n -гетеропереходов и двойную гетероструктуру, указать на них токи утечки, токи генерации.
7. Необходимые и достаточные условия достижения порога генерации в инжекционном лазере.
8. Изобразить качественно изменение плотности порогового тока с температурой для трех основных типов лазерных структур. Дать объяснения с точки зрения зонной диаграммы.
9. Зонная диаграмма гетероперехода, принцип ее построения.
10. Вывести выражение для дифференциальной квантовой эффективности.
11. Вывести формулу, описывающую расстояние между модами резонатора Фабри–Перо с учетом дисперсии показателя преломления.
12. Как изменяется длина волны генерации с температурой?

Задачи

1. Система энергетических уровней состоит всего из двух уровней с энергиями E_1 и E_2 . Каждый из них N -кратно вырожден (т.е. этой энергии соответствуют N квантовых состояний). В системе находится $N \cdot (1 + C)$ электронов ($-1 < C < 1$). Температура системы T . Вычислить уровень Ферми μ . Найти пределы, к которым стремится уровень Ферми при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow \infty$ для случаев $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$. Найти, при каких C и каких ненулевых температурах уровень Ферми совпадает с: а) верхним энергетическим уровнем, б) нижним.

Построить (приблизительно) график температурной зависимости $\mu(T)$. Доказать, что график зависимости уровня Ферми от температуры для какого-нибудь значения C_1 и график зависимости уровня Ферми от температуры для значения $C_2 = -C_1$ симметричны относительно прямой линии $E = 0.5 \cdot (E_1 + E_2)$.

2. Система энергетических уровней состоит всего из двух уровней: нижний уровень с энергией E_1 и верхний уровень с энергией E_2 . Нижний уровень N -кратно вырожден (т.е. энергии E_1 соответствуют N квантовых состояний). ВЕРХНИЙ уровень $N \cdot g$ -кратно вырожден (т.е. энергии E_2 соответствуют $N \cdot g$ квантовых состояний, $g > 0$). В системе находится N электронов. Температура системы T . Вычислить уровень Ферми μ . Найти пределы, к которым стремится уровень Ферми при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow \infty$ для случаев $g > 1$, $g = 1$ и $g < 1$. Найти, при каких g и каких ненулевых температурах уровень Ферми совпадает: а) с верхним энергетическим уровнем, б) с нижним. Построить (приблизительно) график температурной зависимости $\mu(T)$. Доказать, что график зависимости уровня Ферми от температуры для какого-нибудь значения g_1 и график зависимости уровня Ферми от температуры для значения $g_2 = 1/g_1$ симметричны относительно прямой линии $E = 0.5 \cdot (E_1 + E_2)$.

3. Система энергетических уровней состоит всего из двух уровней: нижний уровень с энергией E_1 и верхний уровень с энергией E_2 . Верхний уровень N -кратно вырожден (т.е. энергии E_2 соответствуют N квантовых состояний). НИЖНИЙ уровень $N \cdot g$ -кратно вырожден (т.е. энергии E_1 соответствуют $N \cdot g$ квантовых состояний, $g > 0$). В системе находится N электронов. Температура системы T . Вычислить уровень Ферми μ . Построить (приблизительно) график зависимости $\mu(T)$. Найти пределы, к которым стремится уровень Ферми при $T \rightarrow 0$ и при

$T \rightarrow \infty$ для случаев $g > 1$, $g = 1$ и $g < 1$. Найти, при каких g и каких ненулевых температурах уровень Ферми совпадает: а) с верхним энергетическим уровнем, б) с нижним. Доказать, что график зависимости уровня Ферми от температуры для какого-нибудь значения g_1 и график зависимости уровня Ферми от температуры для значения $g_2 = 1/g_1$ симметричны относительно прямой линии $E = 0.5 \cdot (E_1 + E_2)$.

4. О системе энергетических уровней известно лишь то, что общее число квантовых состояний равно S , а полное число электронов в системе равно N . Как ведет себя уровень Ферми при $T \rightarrow \infty$?

5. Собственный полупроводник находится в тепловом равновесии при ненулевой температуре. Электроны этой системы выводятся из равновесия двумя разными способами. В первом случае со дна зоны проводимости часть электронов забрасывается каким-то воздействием на верхние, менее заселенные уровни зоны проводимости. Во втором случае такое же количество электронов забрасывается каким-то воздействием на те же уровни зоны проводимости, но теперь уже из валентной зоны. Рассмотреть процессы возвращения систем к тепловому равновесию в этих двух случаях. Для обоих случаев нарисовать примерное распределение электронов по энергетическим уровням валентной зоны и зоны проводимости для разных моментов времени после заброса электронов. Нарисовать примерные зависимости от времени уровня Ферми, электронного квазиуровня Ферми и дырочного квазиуровня Ферми. На графике использовать такие характерные временные промежутки, как время релаксации и время рекомбинации. Считать, что температура полупроводника все время остается постоянной.

6. Два металлических шарика с разными радиусами и разными работами выхода приводят в контакт. Радиус первого шарика $R_1 = 3$ см, работа выхода его материала $\phi_1 = 5$ эВ. Радиус второго шарика $R_2 = 1$ см, работа выхода его материала $\phi_2 = 1$ эВ. Найти положение уровня Ферми системы двух шариков, электрический потенциал каждого из шариков, количество электронов, перетекших с одного шарика на другой, количество электронов в процентном отношении к полному их числу в шариках.

7. По металлу, уровень Ферми которого на 10 эВ отстоит от дна зоны проводимости, течет ток с плотностью 10^3 А/см². Оценить, какая часть электронов зоны проводимости металла участвует в переносе тока. Считать, что квантовые состояния расположены по шкале энергии равномерно.

+