

## Экзаменационное билет №23.

Яромир Водзяновский Б04-855а

**Доказать теорему о запрете клонирования неизвестного квантового бита. К каким последствиям приводит эта теорема для квантового компьютера и квантовой коммуникации?**

Теорема о запрете клонирования — утверждение квантовой теории о невозможности создания идеальной копии произвольного неизвестного квантового состояния. Теорема была сформулирована Вуттерсом, Зуреком и Диксом в 1982 году и имела огромное значение в области квантовых вычислений, квантовой теории информации и смежных областях.

Состояние одной квантовой системы может быть запутанным с состоянием другой системы. Например, создать запутанное состояние двух кубитов можно с помощью однокубитного преобразования Адамара и двухкубитного квантового вентиля C-NOT. Результатом такой операции не будет клонирование, поскольку результирующее состояние нельзя описать на языке состояний подсистем (состояние является нефакторизуемым). Клонирование — это такая операция, в результате которой создается состояние, являющееся тензорным произведением идентичных состояний подсистем.

### *Доказательство*

Пусть мы хотим создать копию системы  $A$ , которая находится в состоянии  $s$ . Возьмем систему  $B$  с тем же самым гильбертовым пространством, находящуюся в начальном состоянии  $|e\rangle_B$ . Начальное состояние не должно зависеть от состояния  $|\psi\rangle_A$ , тк оно нам не известно. Составная система опишется тензорным произведением состояний подсистем:

$$|\psi\rangle_A \otimes |e\rangle_B \equiv |\psi\rangle_A |e\rangle_B \quad (1)$$

С составной системой можно произвести два различных действия.

1. Измерить ее состояние, что приведет к необратимому переходу системы в одно из собственных состояний измеряемой наблюдаемой и к частичной потере информации об исходном состоянии системы  $A$ .
2. Применение унитарного преобразования  $U$ , должным образом настроим гамильтониан системы. Оператор  $U$  будет клонировать состояние ситемы, если:

- $U|\psi\rangle_A |e\rangle_B = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$
- и  $U|\phi\rangle_A |e\rangle_B = |\phi\rangle_A |\phi\rangle_B$
- $\forall |\phi\rangle \ \& \ |\psi\rangle$

Согласно определению унитарного оператора  $U$  сохраняется скалярное произведение:

$$\langle e|_B \langle \phi|_A U^\dagger U |\psi\rangle_A |e\rangle_B = \langle \phi|_B \langle \phi|_A |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B \quad (2)$$

то есть

$$\langle \phi|\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle^2 \quad (3)$$

Из этого следует, что либо  $|\phi\rangle = |\psi\rangle$ , либо состояния  $|\phi\rangle$  и  $|\psi\rangle$  ортогональны. Таким образом, операция  $U$  не может клонировать произвольное квантовое состояние.

Теорема о запрете клонирования доказана.