



دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده برق و کامپیوتر

پروژه ۱ اصول سیستم های مخابراتی

Fourier transform, correlation and spectral density

“Solution”

رأپانامه

yasaman.parhizkar@gmail.com

طراح

ياسمن پرهيزكار

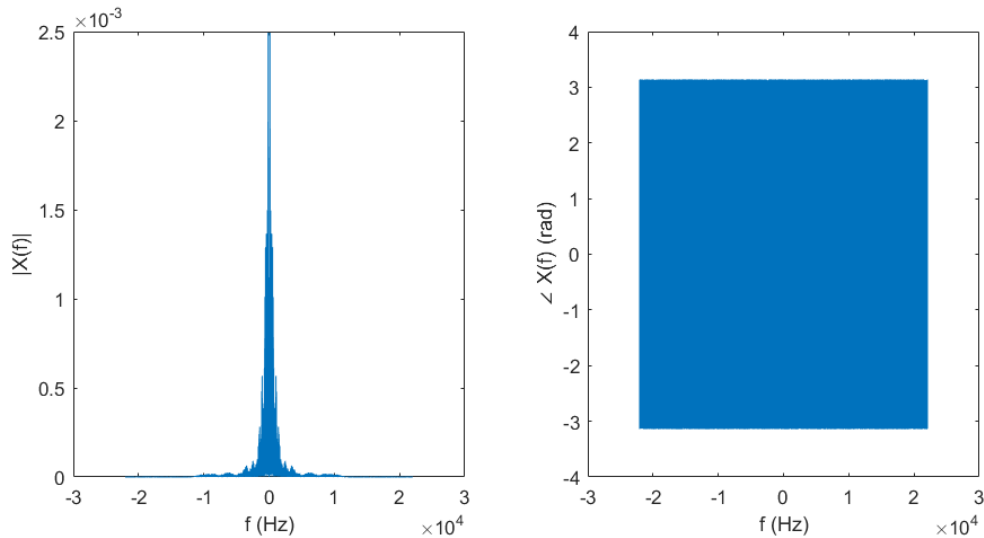
نیم سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

فهرست سوالات

- سوال ۱- تبدیل فوریه سیگنال صوتی ۳
- سوال ۲- سیستم تاخیر زمانی ۳
- سوال ۳- بدست آوردن خروجی سیستم در حوزه فرکانس ۴
- سوال ۴- بدست آوردن خروجی سیستم در حوزه زمان ۴
- سوال ۵- همبستگی ۵
- سوال ۶- روابط چگالی طیف و همبستگی ۶
- سوال ۷- اضافه کردن یک پژواک دیگر ۷

سوال ۱ - تبدیل فوریه سیگنال صوتی

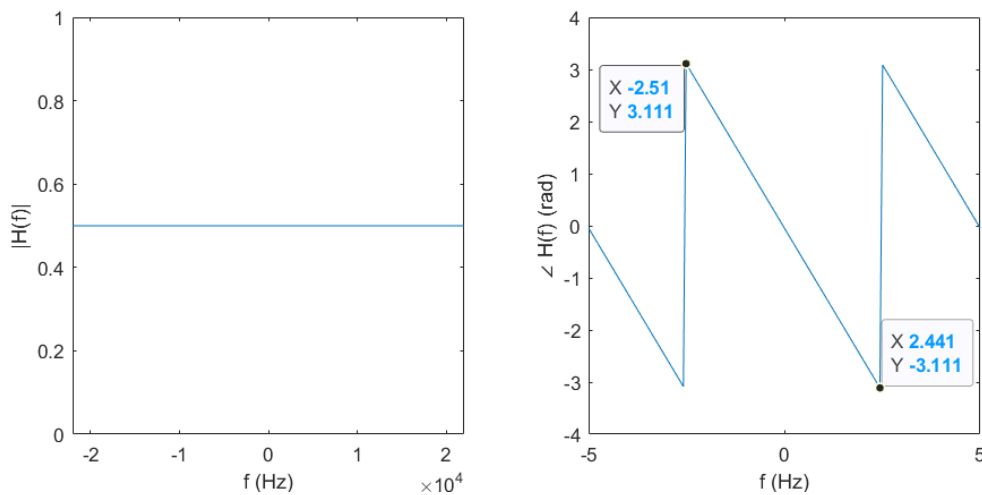
Fourier Transform of Audio Sample



شکل ۱- اندازه و فاز تبدیل فوریه سیگنال صوتی

سوال ۲ - سیستم تاخیر زمانی

Impulse Response of the Delay System in Frequency Domain



شکل ۲- اندازه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم تاخیر زمانی

این سیستم، فقط یک تاخیر زمانی در ورودی ایجاد می کند و درواقع، منجر به هیچ اعوجاجی نمی شود.

دلیل اینکه فاز $H(f)$ کاملاً خطی نیست، این است که در واقع، $H(f)$ به صورت گسسته در فضای متلب ذخیره شده و حاصل یک تبدیل فوریه ی گسسته^۱ است. تبدیل های فوریه در فضای گسسته، کلاً متناوب هستند.

^۱ DFT (Discrete Fourier Transform)

سوال ۳- بدست آوردن خروجی سیستم در حوزه فرکانس

(برای شنیدن صوت حاصل به فایل Solution.mlx مراجعه کنید)

صدا، یک پژواک (echo) پیدا کرده است.

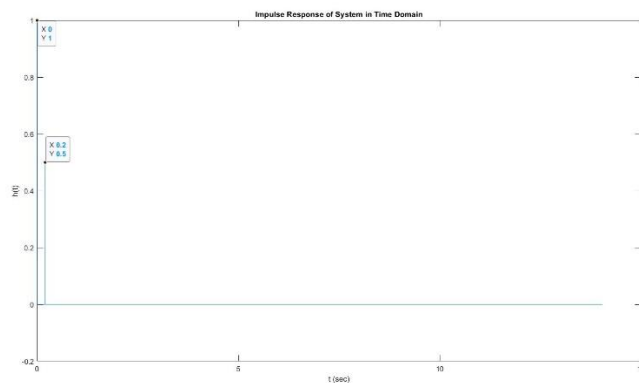
اگر معادله ی $y(t)$ برحسب $x(t)$ را بنویسیم، داریم:

$$H(f) = 1 + 0.5 e^{-j 2\pi \frac{1}{5} f} = \frac{Y(f)}{X(f)} \Rightarrow Y(f) = X(f) + 0.5 * e^{-j 2\pi \frac{1}{5} f} * X(f)$$

$$\xrightarrow{\text{Inverse F.T.}} y(t) = x(t) + 0.5 x(t - \frac{1}{5})$$

در معادله بالا، به طور واضح می بینیم که یک پژواک با دامنه ی 0.5 و تاخیر $\frac{1}{5}$ ثانیه، به صوت اضافه شده است.

سوال ۴- بدست آوردن خروجی سیستم در حوزه زمان



شکل ۳- پاسخ فرکانسی سیستم، در حوزه زمان

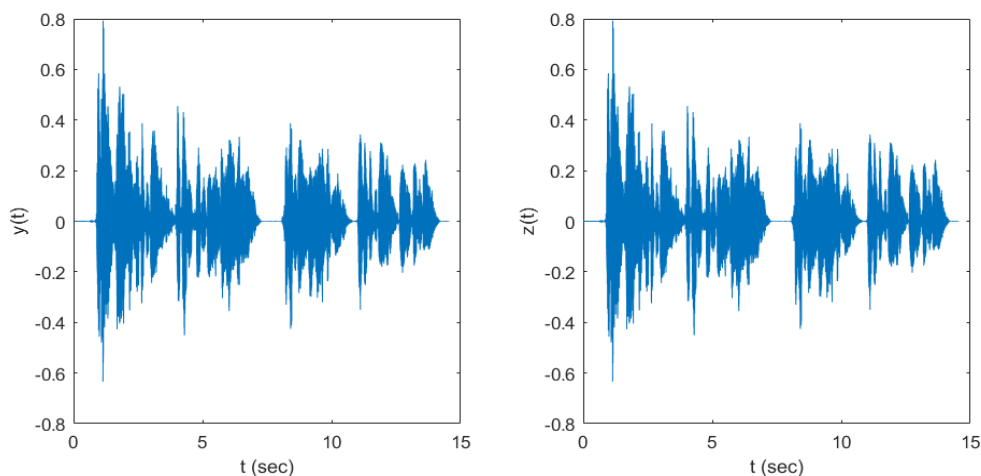
نتیجه ی محاسبه ی $h(t)$ به صورت دستی، کاملاً مطابق نمودار شکل ۳ به دست می آید:

$$H(f) = 1 + 0.5 * e^{-j 2\pi \frac{1}{5} f} \xrightarrow{\text{Inverse F.T.}} h(t) = \delta(t) + 0.5 \delta(t - \frac{1}{5})$$

همانطور که در شکل ۴ می بینید، سیگنال Z با تقریب خوبی منطبق بر سیگنال Y است. می توانیم با دستور sound سیگنال

Z را هم پخش کنیم تا ببینیم که فرق خاصی با سیگنال Y ندارد.

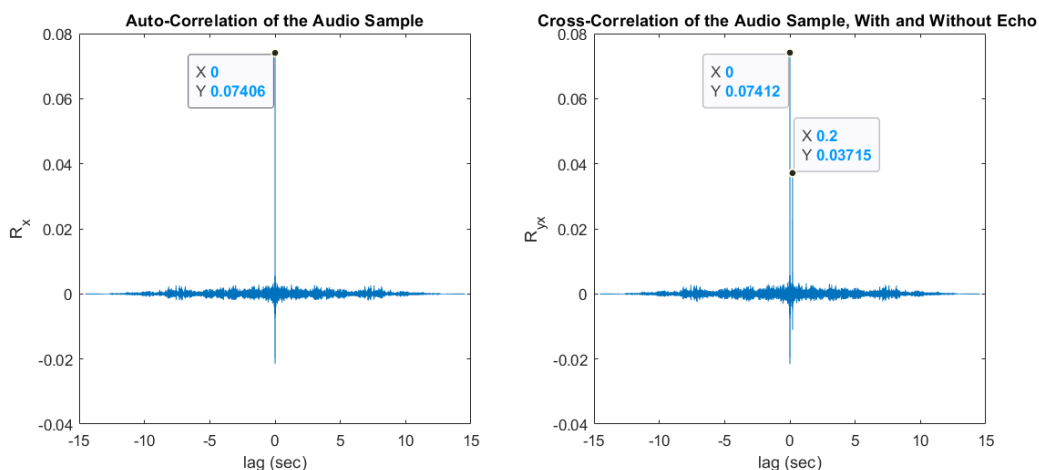
Comparing Results From Frequency Domain and Time Domain Calculations



شکل ۴- مقایسه سیگنال $y(t)$ و $z(t)$

سوال ۵- همبستگی

در شکل ۵، نمودار $R_x(\tau)$ و $R_{yx}(\tau)$ را مشاهده می کنید.



شکل ۵- نمودار خودهمبستگی سیگنال صوتی (سمت چپ) و نمودار همبستگی سیگنال با پژواک و بدون پژواک (سمت راست)

همانطور که در معادله ی زیر می بینیم، در محاسبه ی همبستگی، تابع دوم (در اینجا $x(t)$) به اندازه ی τ شیفت زمانی خورده و سپس، ضرب داخلی آن با تابع اول محاسبه می شود.

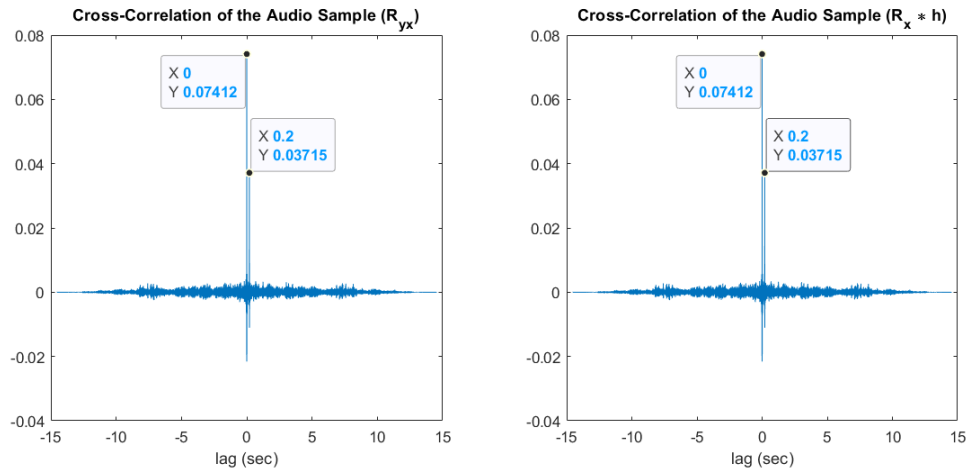
$$R_{yx} = \langle y(t), x^*(t - \tau) \rangle$$

طبق قضیه کوشی-شوارتز، بیشترین مقدار ضرب داخلی زمانی اتفاق می افتد که دو تابع مضرری از هم باشند.

در محاسبه ی $R_x = R_{xx} = \langle x(t), x^*(t - \tau) \rangle$ این اتفاق زمانی می افتد که $\tau = 0$ باشد؛ به همین دلیل، R_x در نقطه ی صفر، یک پیک دارد.

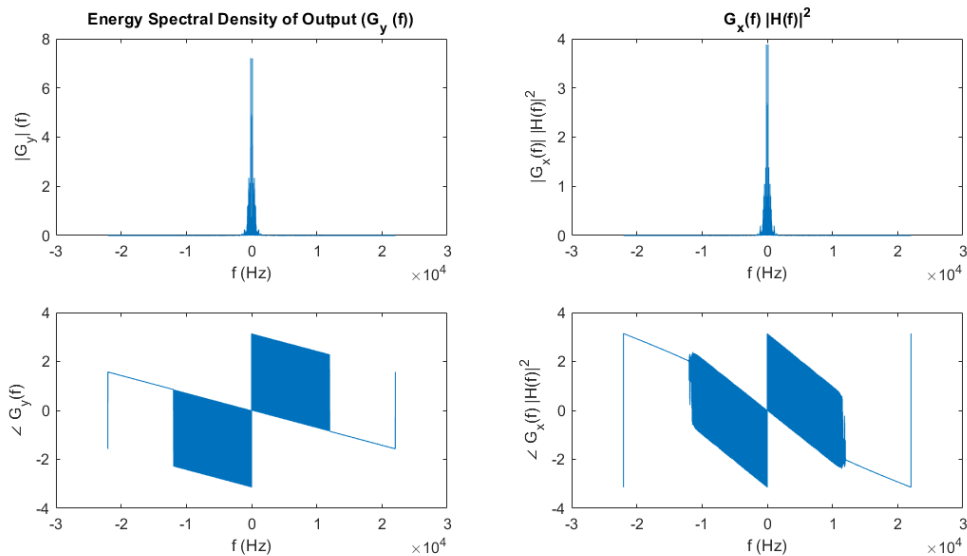
در تابع R_{yx} این انطباق، یکبار در $\tau = 0$ اتفاق می افتد که سیگنال اصلی موجود در y (با دامنه ۱) بر سیگنال x منطبق می شود. و یکبار هم در $\tau = 0.2$ که پژواک موجود در y (با دامنه ۰.۵) بر سیگنال x منطبق می شود. به همین دلیل، در R_{yx} دو پیک با دامنه های ۱ و ۰.۵ می بینیم.

سوال ۶- روابط چگالی طیف و همبستگی



شکل ۶- مقایسه ی دو طرف معادله ی (a) در صورت سوال - دو طرف با هم برابرند و معادله برقرار است.

خطای دو طرف معادله، تقریباً برابر $2e-10$ شد که بسیار اندک است و این مقدار اندک هم ناشی از خطاهای محاسباتی است.



شکل ۷- مقایسه دو طرف معادله (b) در صورت سوال - دو طرف با هم برابرند و معادله برقرار است.

دو طرف معادله تا حدود خوبی با هم برابرند؛ کمی اختلاف به دلیل خطای محاسبات است. در این معادله، $MSE = 6e-10$ شد که باز هم مقدار ناچیزی است.

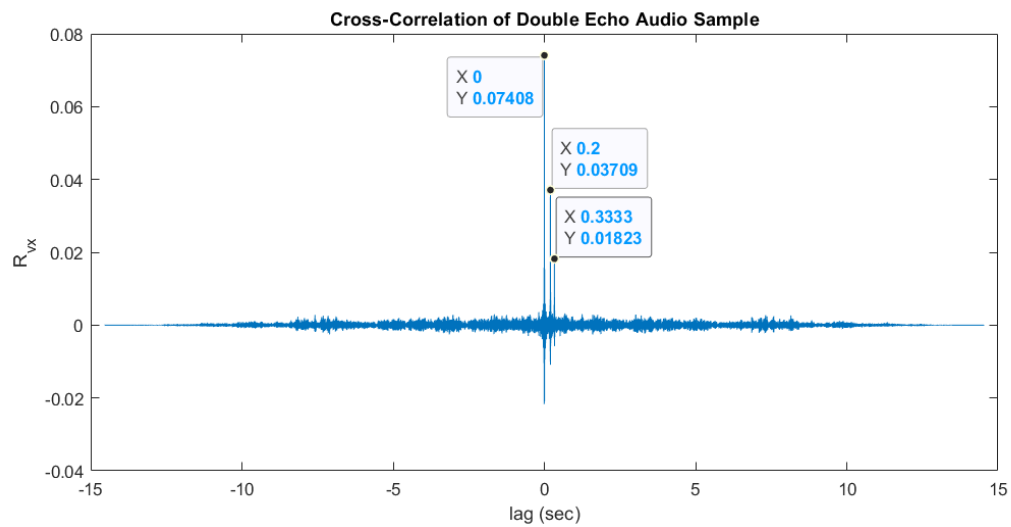
سوال ۷- اضافه کردن یک پژواک دیگر

در پاسخ فرکانسی سیستم، مشابه پژواک اول، یک پژواک دوم با دامنه ی 0.25 و تاخیر $\frac{1}{3}$ ثانیه اضافه می کنیم:

$$H_2(f) = 1 + 0.5 * e^{-j 2\pi \frac{1}{5} f} + 0.25 * e^{-j 2\pi \frac{1}{3} f}$$

فایل صوتی حاصل، با نام echoed.wav ضمیمه شده است.

در شکل ۸، نمودار همبستگی صوت دو پژواکی را با صوت اصلی مشاهده می کنید.



شکل ۸- نمودار همبستگی صوت دو پژواکی و صوت اصلی بدون پژواک

موفق باشید!