نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

مؤلف: دکتر فرشید شیرافکن

جزوه درس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها استاد شکری

فهرست مطالب

فرم نرمال چامسکی

فرم نرمال گریباخ

فصل ۶ : اتوماتای پشته ای (DPDA,NPDA)

اتوماتای پشته ای نامعین

تابع انتقال

پیکر بندی لحظه ای

اتوماتای پشته ای معین

تشخیص مستقل از متن بودن یک زبان

زبان مستقل از متن معین

ساخت اتوماتای پشته ای با استفاده از گرامر در فرم گریباخ

فصل ۷ : ماشین های تورینگ(TM)

ماشین تورینگ استاندارد

ماشین تورینگ در نقش پذیرنده زبان

ماشین تورینگ به عنوان مترجم

مدل های دیگر ماشین تورینگ

سکون دار

با نوار نیمه نامتناهی

آف لاین

با حافظه پیچیده تر

چند نواره

چند بعدی

نامعین

فصل ۱:

عبارت منظم – زبان منظم

در این کتاب، سه مفهوم اصلی یعنی زبان، گرامر(ابزار تولید زبان) و ماشین(ابزار پذیرش زبان) بررسی خواهند شد. مطالبی که بررسی می شوند عبارتند از:

۱- زبان و گرامر منظم و ماشین پذیرنده رشته‌های زبان منظم یعنی ماشین متناهی(FA)

۲- زبان و گرامر مستقل از متن و ماشین پذیرنده رشته‌های زبان مستقل از متن یعنی ماشین پشته‌ای(PDA)

۳- زبان و گرامر حساس به متن و ماشین تورینگ(TM) و ....

عبارت منظم

قبل از ورود به بحث زبان، عبارت منظم را بررسی می کنیم. عبارت منظم، ترکیبی از سمبل‌ها(از قبیل الفبا، پرانتز، عملگر بستار ، عملگر الحاق) می باشد. عبارت منظم با انجام متوالی برخی قوانین بازگشتی روی اجزاء پایه ای ایجاد می شود.

به طور نمونه a^+b یک عبارت منظم در الفبای $\sum = \{a,b\}$ می باشد، که معرف رشته‌هایی است که با یک یا چند حرف a شروع شده و به b ختم می شوند. مانند ab ، aab و aaab .

به عنوان مثالی دیگر عبارت منظم ab^+ ، معرف رشته‌هایی است که با یک حرف a شروع شده و به یک یا چند b ختم می شوند. مانند ab ، abb و abbb. اگر به جای بستار مثبت از بستار ستاره استفاده شده بود، یعنی عبارت منظم به صورت ab^* باشد، آنگاه، معرف رشته‌هایی است که با یک حرف a شروع شده و به صفر یا یک یا چند b ختم می شوند. یعنی از b می‌توان استفاده نکرد و رشته a را تولید کرد که توسط ab^+ قابل تولید نبود.

تعریف

$\sum$ را الفبای مفروض در نظر می گیریم. آنگاه:

۱- ϕ ، λ و $a \in \sum$ همگی عبارات منظم هستند. این عبارات را عبارات منظم پایه می‌خوانیم.

۲- اگر r_1 و r_2 عبارات منظمی باشند، آنگاه $r_1 + r_2$ ، $r_1.r_2$ ، r_1^* و (r_1) نیز عبارات منظم خواهند بود.

۳- یک رشته فقط و فقط در صورتی عبارت منظم است که با بکارگیری تعداد محدودی از قوانین بند (۲)، از عبارات منظم پایه بدست آیند.

چنانچه $\sum$ یک الفبا باشد، آنگاه از $\sum^+$ برای نمایش مجموعـه رشـته‌های بدسـت آمـده از الحـاق چنـد سمبل دیگر و از $\sum^*$ برای نمایش مجموعه رشته‌های بدسـت آمـده از الحـاق صـفر یـا بیشـتر سـمبل دیگـر استفاده می‌کنیم. مجموعه $\sum^*$ همواره حاوی λ خواهد بود. به عبارتی: $\sum^* = \sum^+ + \{\lambda\}$.

همواره $\sum^+$ و $\sum^*$ نامتناهی هستند.

مثال

اگر الفبا شامل یک حرف a باشد، یعنی $\sum = \{a\}$ ، آنگاه :

$\sum^* = \{\lambda, a, aa, aaa, ...\}$ و $\sum^+ = \{a, aa, aaa, ...\}$

چند نکته:

۱- در عبارت منظم اولویت ستاره از همه بیشتر است، سپس اولویت اتصال بیشتر بوده، و در نهایـت اجتمـاع قرار دارد، مگر اینکه از پرانتز برای تغییر اولویت استفاده شود.

۲- تعداد سمبل های موجود در رشته را طول رشته می گویند. طول رشته w با $|w|$ نشان داده می‌شود.

۳- رشته تهی (λ)، رشته ای است که هیچ سمبولی ندارد. برای هر رشته w داریم: $\lambda.w = w.\lambda = w$

۴- طول رشته تهی که با λ نشان داده می شود، برابر صفر است. ($|\lambda| = 0$)

۵- اگر r یک عبارت منظم باشد، آنگاه : $r.\lambda = r$

۶- اگر r یک عبارت منظم باشد، آنگاه : $r + \phi = r$

مثال

آیا رشته‌های aa و $abbba$ و $abab$ را می‌توان از عبارت منظم ab^*a تولید کرد؟

حل: aa : بله- به علت استفاده از بستار ستاره برای b ، می‌توان از b استفاده نکرد.

$abbba$: بله- به علت استفاده از بستار ستاره برای b ، می‌توان چند بار از b استفاده کرد.

$abab$: خیر.

مثال

آیا رشته‌های aa و aba و $abbbba$ را می‌توان از عبارت منظم $a(bb)^*a$ تولید کرد؟

حل: aa : بله- از bb داخل پرانتز، استفاده نمی کنیم.

aba : خیر- تعداد b های تولید شده توسط عبارت منظم، باید زوج باشد.

$abbbba$: بله- از bb داخل پرانتز، دو مرتبه استفاده می کنیم. ■

مثال

رشته‌های تولید شده با حداکثر طول ۴ ، توسط عبارت منظم a^+b و a^*b عبارتند از :

$$a^+b = \{ab, aab, aaab\} \quad , \quad a^*b = \{b, ab, aab, aaab\}$$

■

مثال

رشته‌های تولید شده با طول ۳ توسط عبارت منظم $(a+b)^+$ عبارتند از :

$$(a+b)^+ = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

■

مثال

آیا رشته $aaaabbaa$ از عبارت منظم $(ab^*aa)^+$ قابل تولید است؟

حل: بله – به علت استفاده از بستار مثبت برای کل عبارت داخل پرانتز، می‌توان چند بار از این عبارت استفاده کرد. در بار اول aaa و در بار دوم abbaa را تولید می‌کنیم.■

مثال

نحوه تولید رشته‌های $abaa$ و $aaabaab$ و $aaababbba$ به کمک عبارت منظم $(ab+ab^*a)^+$ را مشخص کنید.

حل: عبارت داده شده دارای دو قسمت ab و ab^*a می‌باشد که به علت استفاده از بستار مثبت می‌توان چندین بار از آن استفاده کرد.

$abaa$: انتخاب ab از قسمت اول عبارت منظم و aa از قسمت دوم.

$aaabaab$: انتخاب aa از قسمت دوم، سپس aba از قسمت دوم و ab از قسمت اول .

$aaabababba$: انتخاب aa از قسمت دوم، سپس $abab$ با دو بار استفاده از قسمت اول و در نهایت $abba$ از قسمت دوم.

روابط مقابل برقرارند: $(a^+)^* = (a^*)^+ = (a^*)^* = a^*$

روابط زیر برقرارند:

$$\phi^+ = \phi \,, \phi^* = \{\lambda\} \,,\ \lambda^* = \lambda \,,\ \lambda^* - \phi^* = \phi \ ,\ \lambda - \phi^* = \phi,\ \lambda^*.\phi^* = \lambda$$

به جای $(\alpha+\beta)^*$ هر یک از عبارت‌های زیر را می توان قرار داد:

$$(\alpha^* + \beta)^* \ \ ,\ (\alpha + \beta^*)^* \ ,\ \ (\alpha^* + \beta^*)^* \ ,\ \alpha^*(\alpha+\beta)^* \ \ ,\alpha^*(\alpha+\beta)^*\beta^*$$

$$(\alpha^*\beta^*)^* \ ,\ \ \ \beta^*(\alpha\beta^*)^*,\ \ \ \alpha^*(\beta\alpha^*)^*,(\beta^*\alpha^*)^*$$

مثال

معادل عبارت $(a^*+b)^*(a^*+b^*)^*$ را بدست آورید.

حل: می توان به جای $(a^*+b)^*$ و $(a^*+b^*)^*$ از $(a+b)^*$ استفاده کرد:

$$(a+b)^*(a+b)^* = (a+b)^*$$

مثال

معادل عبارت $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^*$ را بدست آورید.

حل: می‌توان به جای $(a^*b^*)^*$ و $(b^*a^*)^*$ از $(a+b)^*$ استفاده کرد:

$$((a+b)^*(a+b)^*)^* = ((a+b)^*)^* = (a+b)^*$$

مثال

آیا رابطه $(ab)^* a = a(ba)^*$ برقرار است؟

حل: بله- تمام رشته‌های قابل تولید توسط هر کدام، به کمک دیگری نیز قابل تولید است.■

مثال

فرض کنید a و b عبارت‌های منظم باشند. آیا رابطه زیر برقرار است؟

$$(a+b)^* a(a+b)^* = b^* a(a+b)^* = (a+b)^* ab^*$$

حل: بله- تمام رشته‌های قابل تولید توسط هر کدام، به کمک دیگری نیز قابل تولید است.■

مثال

آیا رابطه $(a+b)^* = (a^* b + ab^*)^*$ برقرار است؟

حل: بله- تمام رشته‌های قابل تولید توسط هر کدام، به کمک دیگری نیز قابل تولید است.■

اگر Σ شامل n عنصر باشد، آنگاه Σ^* دارای n^k رشته به طول k است.

معکوس عبارت منظم

برای پیدا کردن معکوس(متمم) یک عبارت منظم، از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$(\alpha^*)^R = (\alpha^R)^* \quad (\alpha+\beta)^R = \alpha^R + \beta^R \qquad (\alpha\beta)^R = \beta^R \alpha^R$$

مثال

معکوس عبارت منظم $ab(c+de)$ را مشخص کنید.

حل: $[(ab).(c+de)]^R = (c+de)^R.(ab)^R = (c^R + (de)^R).(b.a) = (ed+c).ba$

تذکر: در واقع برای پیدا کردن معکوس یک عبارت منظم، می توان عبارت را از انتها به ابتدا نوشت.■

مثال

معکوس $(a^*+b)ba^*$ را مشخص کنید.

حل: کافی است عبارت را معکوس نوشت: $(a^*+b)ba^* \Rightarrow a^*b(b+a^*)$ ■

زبان

هر مجموعه از رشته‌های روی یک الفبای Σ را یک زبان می گویند. عملیات قابل انجام بر روی زبـان هـا عبارتنـد از: اجتمـاع، اشتراک، تفاضل، اتصال، معکوس، مکمل(متمم)، همریختی و تقسیم راست.

مثال

مجموعه $L=\{a^nb^n : n\geq 0\}$، یک زبان بر روی الفبا $\Sigma=\{a,b\}$ است که شامل رشته‌هایی با تعـداد برابـر a و b می‌باشـد. مانند: $\{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$ ■

اجتماع و اشتراک

از آنجا که زبان ها، مجموعه هستند، اجتماع و اشتراک دو زبان، به راحتی قابل تعریف است.

مثال

اشتراک و اجتماع $L_1=\{a^nb^m : n\geq 0, m\geq 0\}$ و $L_2=\{a^nb^n : n\geq 0\}$ را مشخص کنید.

حل: چند جمله از هر زبان را مشخص می‌کنیم:

$$L_1=\{\lambda, ab, a^5b^2, a^7b^7, \ldots\} \quad , \quad L_2=\{\lambda, ab, a^2b^2, a^5b^5, a^7b^7, \ldots\}$$

واضح است که زبان L_2 زیر مجموعه L_1 است. در نتیجه اشتراک آنها L_2 و اجتماع آنها L_1 است.■

مثال

اشتراک و اجتماع دو زبان $L_1=\{a^nb^k : n\neq k\}$ و $L_2=\{a^nb^k : n\geq 0, k\geq 0\}$ را مشخص کنید.

حل: چند جمله از هر زبان را مشخص می‌کنیم:

$L_1=\{\lambda, a^5b^2, a^7b^4, \ldots\}$

$L_2=\{\lambda, ab, a^7b^4, a^5b^5, a^4b^4, a^5b^2, \ldots\}$

واضح است که زبان L_1 زیر مجموعه L_2 است $(L_1\subseteq L_2)$،پس حاصل $L_1\cap L_2$ همان L_1 و حاصل $L_1\cup L_2$ همان L_2 است.■

مثال

اشتراک L_1 و L_2 را مشخص کنید.

$L_1=\{a^nb^nc^m : n\geq 0, m\geq 0\}$

$L_2=\{a^nb^mc^m : n\geq 0, m\geq 0\}$

حل: چند جمله از هر زبان را مشخص می‌کنیم:

$L_1=\{\lambda, abc, abc^5, a^6b^6c^2, a^4b^4c^4, \ldots\}$

$L_2=\{\lambda, abc, a^4b^5c^5, a^4b^4c^4, a^3b^6c^6, \ldots\}$

بنابراین اشتراک این دو زبان، شامل جمله هایی است که در آنها تعداد a و b و c برابر است، یعنی: $L_1\cap L_2=\{a^nb^nc^n : n\geq 0\}$

مثال

اجتماع دو زبان زیر را مشخص کنید.

$L_1=\{a^nb^mc^n : n\geq m\geq 0\}$

$L_2=\{a^nb^mc^n : m> n\geq 0\}$

حل: اجتماع دو زبان برابر است با:

$L_1\cup L_2=\{a^nb^mc^n : n\geq 0, m\geq 0\}$

مثال

اشتراک سه زبان زیر را مشخص کنید.

$L_1 = \{a^n b^m a^n b^p : n, m, p \geq 0\}$

$L_2 = \{a^n b^n a^m b^p : n, m, p \geq 0\}$

$L_3 = \{a^n b^m a^p b^n : n, m, p \geq 0\}$

حل: اشتراک این سه زبان برابر است با: $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$

■

مثال

اشتراک $L_1 = \{a^n b^m : n \geq 0, m \geq 0\}$ و $L_2 = \{b^n a^n : n \geq 0\}$ را مشخص کنید.

حل: $L_1 \cap L_2 = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{b^m : m \geq 0\}$ ■

اتصال

اتصال(الحاق) دو زبان به صورت زیر تعریف می شود:

$L_1 . L_2 = \{xy : x \in L_1 , y \in L_2\}$

مثال

تعداد اعضای اتصال $L_1 = \{10,1\}$ و $L_2 = \{01,011,11\}$ را تعیین کنید.

$L_1 L_2 = \{1001,10011,1011,101,1011,111\}$

بنابراین $L_1 L_2$ دارای پنج عضو می باشد. (1011 که دو بار تکرار شده را یکبار شمارش می کنیم.)

L^n به معنای اتصال L به تعداد n بار با خودش می‌باشد و $L^0 = \{\lambda\}$.

مثال

اگر $L=\{a^nb^n : n\geq 0\}$، آنگاه L^2 برابر است با :

$$L^2=\{a^nb^na^kb^k : n\geq 0, k\geq 0\}$$

توجه کنید که n و k ارتباطی به هم ندارند و رشته aabbab (یعنی n=2,k=1) در L^2 موجود است. ■

مثال

با فرض اینکه $L=\{awa : w\in\{a,b\}^*\}$، آنگاه L^2 برابر است با :

$$L^2=\{aw_1aaw_2a : w_1, w_2\in\{a,b\}^*\}$$

■

- اتصال دو رابطه خاصیت جابجایی ندارد، یعنی : $L_1L_2\neq L_2L_1$
- عمل اتصال نسبت به اجتماع خاصیت پخشی دارد اما نسبت به اشتراک ندارد:

$$L_1(L_2\cup L_3)=L_1L_2\cup L_1L_3 \quad , \quad L_1(L_2\cap L_3)\neq L_1L_2\cap L_1L_3$$

معکوس

معکوس زبان L به صورت $L^R=\{w^R : w\in L\}$ تعریف می شود.روابط زیر برقرار می باشند:

الف- $(L^R)^R=L$ ب- $(L^R)^n=(L^n)^R$ ج- $((L^R)^n)^R=L^n$ د- $(L_1L_2)^R={L_2}^R{L_1}^R$

مثال

معکوس $L=\{a^nb^n : n\geq 0\}$، برابر است با:

$$L^R=\{b^na^n : n\geq 0\}$$

■

مکمل

مکمل(متمم) زبان L به صورت $\overline{L}=\Sigma^*-L$ تعریف می شود.

مثال

مکمل زبان $L=\{aa,bb\}$، را مشخص کنید. ($\sum=\{a,b\}$)

حل: زبان داده شده دارای دو رشته به طول ۲ است. مکمل این زبان، شامل همه رشته ها با طول صفر، یک، دو (به غیر از aa وbb)، سه و بزرگتر از سه است. این زبان را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\overline{L}=\{\lambda,a,b,ab,ba\}\bigcup\{w\in\{a,b\}^*:|w|\geq 3\}$$

مثال

با فرض $\sum=\{a,b\}$، مکمل زبان $L=\{a^nb^n:n\in N\}$ برابر است با: $\overline{L}=\{a^xb^y:x\neq y\}$ ■

مثال

با فرض $\sum=\{0,1\}$ مکمل $L=\{0^n1^n0^n:n\in N\}$ برابر است

$$\overline{L}=\{0^n1^m0^k:n\neq m\neq k\}$$

بستار

برروی زبان L دو عمل بستار ستاره ای و بستار مثبت قابل انجام است:

$$L^*=L^0UL^1UL^2...=\bigcup_{i\geq 0}L^i$$

$$L^+=L^1UL^2UL^3...=\bigcup_{i\geq 1}L^i$$

چند نکته:

۱- عملگر بستار نسبت به هیچیک از عملگرهای "اجتماع ، اشتراک ، تفاضل و الحاق" خاصیت پخشی ندارد.
به عنوان نمونه : $(L_1\bigcup L_2)^*\neq L_1^*\bigcup L_2^*$.

۲- برای هر زبان L داریم $\lambda\in L^*$ بنابراین : $\lambda\notin\overline{L^*}$

۳- هیچ زبانی وجود ندارد که در آن $\overline{L^*}=\overline{L}^*$.

۴- برای هر زبان L داریم: $\overline{L^*}\subset\overline{L}^*$.

هم ریختی

همریختی(homomorphism) یک نوع جایگزینی است که در آن به جای یک سمبل، از یک رشته استفاده می‌شود. با فرض اینکه Σ و Γ دو الفبا باشند، آنگاه تابع $h:\Sigma \to \Gamma^*$ همریختی نامیده می شود. تصویر همریختی زبان L به صورت $h(L)=\{h(w):w \in L\}$ تعریف می‌شود.

مثال

با فرض $\Sigma=\{a,b\}$ و $\Gamma=\{a,b,c\}$ ، تابع h را بصورت $h(a)=ab$ و $h(b)=bbc$ تعریف می‌کنیم. مطلوب است $h(aba)$.

حل: کافی است در aba به جای a رشته ab و به جای b رشته bbc را قرار دهیم: $h(aba)=abbbcab$ ■

مثال

با فرض $\Sigma=\{a,b\}$ و $\Gamma=\{b,c,d\}$ ، h را به صورت $h(a)=bc$ و $h(b)=bdc$ تعریف می‌کنیم. اگر L زبان منظمی باشد که عبارت منظم $r=a^*(a+b^*)$ آن را معرفی کند، آنگاه عبارت منظمی که زبان منظم $h(L)$ را معرفی کند را مشخص کنید.

حل: کافی است در عبارت منظم داده شده، به جای a از رشته bc و به جای b از رشته bdc استفاده کرد:
$(bc)^*(bc+(bdc)^*)$

خانواده زبانهای منظم تحت همریختی بسته است. به عبارتی اگر h یک همریختی و L یک زبان منظم باشد،آنگاه $h(L)$ ، منظم خواهد بود.

تقسیم راست

با فرض اینکه L_1, L_2 زبان های تعریف شده بر روی یک الفبای یکسان باشند، آنگاه تقسیم راست L_1به L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$L_1/L_2=\{x: y\in L_2$ برای برخی $xy\in L_1\}$

برای تعیین L_1/L_2، تمام رشته‌های موجود در L_1 با پسوندهای متعلق به L_2 را در نظر می گیریم. هر رشته با این فرض، پس از حذف مذکور، متعلق به L_1/L_2 خواهد بود.

مثال

حاصل $\frac{L_1}{L_2}$ را تعیین کنید.

$L_1 = \{001101, 0101010, 011100, 101010\}$

$L_2 = \{01, 10\}$

حل: باید در رشته های L_1،پیشوندهایی را انتخاب کنیم که به 01 یا 10 ختم شوند. در زیر این پیشوندها خط کشیده شده است:

$L_1 = \{\underline{0011}01\ ,\ \underline{01010}10\ ,\ 011100\ ,\ \underline{1010}10\}$

بنابراین خواهیم داشت:

$L_1 / L_2 = \{0011, 01010, 1010\}$

مثال

حاصل تقسیم راست L_1 / L_2 را تعیین کنید.

الف- $L_1 = L(a^*baa^*)\ ,\quad L_2 = L(ab^*)$

ب- $L_1 = L(a^*baa^*)\ ,\quad L_2 = L(aba^*)$

پ - $L_1 = L(a^*b^*c)\ ,\quad L_2 = L(b^*c)$

حل: باید در رشته های L_1،پیشوندهایی را انتخاب کنیم که به L_2 ختم شوند.

الف : $\{a^*ba^*\}$ ب : $\{a^*\}$ پ : $\{a^*b^*\}$

اگر L_1 و L_2 زبان های منظم باشند، آنگاه L_1 / L_2 نیز منظم خواهد بود. پس خانواده زبانهای منظم تحت تقسیم راست، بسته است.

زبان منظم

اگر بتوان برای زبانی، یک عبارت منظم نوشت،آن زبان منظم است. به ازای هر زبان منظم، یک عبارت منظم و به ازای هر عبارت منظم، یک زبان منظم وجود دارد. به عبارتی اگر L یک زبان منظم باشد، آنگاه عبارت منظمی به ازای r وجود خواهد داشت، بطوریکه L=L(r) .

برای بیان عبارت منظم یک زبان، دو شرط زیر باید برقرار باشد:

۱- هر رشته ای که عبارت منظم بیان می کند، شرط توصیف را داشته باشد.

۲- هر رشته ای که شرط توصیف را دارد، توسط عبارت منظم قابل بیان باشد.

با فرض اینکه r_1 و r_2 عبارت منظم و $L(r)$، زبان مربوط به عبارت منظم r باشد، خواهیم داشت:

الف- $L(r_1^*) = (L(r_1))^*$

ب- $L(r_1.r_2) = L(r_1).L(r_2)$

ج- $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$

مثال

عبارت منظم $r = (a+b)^*(a+bb)$ ، در الفبای $\Sigma = \{a,b\}$، به چه زبانی اشاره دارد؟

حل: بخش $(a+b)^*$ به معنای هر رشته ای از aها و bها است. بخش $(a+bb)$، بیانگر یک a یا دو b می‌باشد. در نتیجه ، L(r) مجموعه تمام رشته هایی است که به یک a یا یک bb ختم می شوند.

$$L(r) = \{a, bb, aa, abb, ba, bbb, ...\}$$

مثال

عبارت منظم $r = (aa)^*(bb)^*b$ ، در الفبای $\Sigma = \{a,b\}$، به چه زبانی اشاره دارد؟

حل: به مجموعه تمام رشته هایی با تعداد زوج a که قبل از تعداد فردی از b ها می‌آیند:

$$L(r) = \{a^{2n}b^{2k+1} : n \geq 0, k \geq 0\}$$

مثال

عبارت منظم $r=a^{+}(bb)^{+}$ ، در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$، چه زبانی را توصیف می کند؟

$L(r)=\{a^{n}b^{2k}:n\geq 1,k\geq 1\}$

■

مثال

عبارت منظم $r=abbb^{+}(a+b)^{+}$ ، در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$، به چه زبانی اشاره دارد؟

حل: $L=\{ab^{n}w:n\geq 3,w\in\{a,b\}^{+}\}$ ■

مثال

عبارت منظم زبان $L=\{a^{n}b^{m}:(n+m)\ \ is\ \ even\}$ را بنویسید.

حل: برای اینکه مجموع تعداد a ها و b ها زوج باشد، باید تعداد هر دو زوج و یا تعداد هر دو فرد باشد.

$r=(aa)^{*}(bb)^{*}+(aa)^{*}a(bb)^{*}b$

■

مثال

عبارت منظم زبان $L=\{a^{n}b^{m}:(n+m)\ \ is\ \ odd\}$ را بنویسید.

حل: برای اینکه مجموع تعداد a ها و b ها فرد باشد، باید تعداد a فرد و b زوج و یا تعداد a زوج و b فرد باشد.

$r=(aa)^{*}a(bb)^{*}+(aa)^{*}(bb)^{*}b$

مثال

عبارت منظمی برای $L=\{w:|w|\ \ \bmod\ \ 3=0\}$ ، در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$، بنویسید.

حل: برای اینکه طول رشته مضرب ۳ باشد، تمام رشته های ممکن با طول سه را ایجاد و تکرار می کنیم:

$r=((a+b)(a+b)(a+b))^{*}$

می توان عبارت را به صورت $(\Sigma\Sigma\Sigma)^{*}$ نیز نشان داد.■

مثال

عبـــارت منظمـــی بـــرای $L=\{w_1bw_2 : |w_1| \bmod 2 = |w_2| \bmod 2, w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$ ، در الفبـــای $\Sigma=\{a,b\}$، بنویسید.

حل: رشته های این زبان شامل یک b و تعداد زوجی a هستند:

$$r=(aa)^*b(aa)^*+a(aa)^*ba(aa)^*$$

مثال

عبارت منظمی برای زبان $L=\{a^nb^m : n\ge 4, m\le 3\}$ ارائه دهید.

حل: مساله را به حالتهای m=0,1,2,3 تقسیم می کنیم. تعداد ۴ یا بیشتر a تولید کرده و پس از آن به تعداد لازم b قـرار می دهیم: $r=aaaaa^*(\lambda+b+bb+bbb)$ ■

مثال

عبارت منظمی برای $L=\{vwv : v,w\in\{a,b\}^+, |v|=2\}$ بنویسید.

حل: تمام حالت های با ضابطه $|v|=2$ را شمارش می کنیم:

$$r=aa(a+b)^*aa+ab(a+b)^*ab+ba(a+b)^*ba+bb(a+b)^*bb$$ ■

برای هر زبان، تعداد نامحدودی عبارت منظم وجود دارد.

مثال

عبارت های منظمی در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$ برای هر یک از حالات زیر بنویسید.

الف- با aa شروع یا به bb ختم شود.

ب- با aa شروع و به bb ختم شود.

پ- به b یا ba ختم شوند.

ت- سومین نماد از راست b باشد.

ث- تعداد a بر ۳ بخش پذیر باشد.

ج- قبل یا بعد از هر a یک b باشد.

حل: منظور از x در حل این مثال، همان $(a+b)$ است.

الف: $aax^* + x^*bb$

ب : aax^*bb

پ: $x^*(b+ba)$

ت: x^*bxx

ث : $b^*(ab^*ab^*ab^*)^+$

ج: $(ab+ba+b+aba)^*$ ■

مثال

عبارت‌های منظمی در الفبای $\Sigma=\{0,1\}$ برای هر یک از حالات زیر بنویسید.

الف- شامل 0 نباشد.

ب- دقیقا دو تا 1 داشته باشد.

پ- با 1 شروع شده و شامل دو 0 متوالی نباشد.

ت- تعداد زوجی 0 داشته باشد.

ث- دارای هیچ دو 0 متوالی نباشد.

حل:

الف : 1^*

ب : $0^*10^*10^*$

پ : $(1+10)^*$

ت : $(1^*01^*01^*)^* + 1^*$

ث : $(1+01)^*(0+1^*)$ یا $(1+01)^*(0+\lambda)$

■

مثال

عبارت‌های منظمی در الفبای $\Sigma=\{0,1\}$ برای هر یک از حالات زیر بنویسید.

الف- حداقل یک عدد 1 داشته باشد.

ب- حداقل دو تا 1 داشته باشد.

پ- حداقل دو تا 1 متوالی داشته باشد.

ت- دارای زیر رشته 001 باشد.

ث- به 101 ختم شود.

ج- تعداد 0 و تعداد 1 ، زوج باشد.

حل: منظور از x همان $(0+1)$ است.

الف : x^*1x^* ب : $x^*1x^*1x^*$ پ : x^*11x^*

ت : x^*001x^* ث : x^*101 ج : $(00+11+(01+10)(00+11)^*(01+10))^*$

■

مثال

یک عبارت منظم برای هر یک از حالتهای زیر در الفبای $\Sigma=\{a,b,c\}$ بنویسید.

الف- طول رشته زوج است. ب- طول رشته مضرب سه است.

پ- نماد شروع و پایان یکی باشد. ت- حداقل شامل یکی از سمبل‌های الفبا باشد.

حل: در حل این مثال، منظور از x همان $(a+b+c)$ است.

الف : $(xx)^*$

ب : $(xxx)^*$

پ : $a+b+c+ax^*a+bx^*b+cx^*c$

ت:

$x^*ax^*bx^*cx^*+x^*ax^*cx^*bx^*+x^*bx^*ax^*cx^*+x^*bx^*cx^*ax^*+x^*cx^*ax^*bx^*+x^*cx^*bx^*ax^*$ ■

مثال

یک عبارت منظم بنویسید که نمایش یک عدد صحیح یا اعشاری بدون علامت باشد.

حل: با فرض D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ، عبارت به صورت $D^{+}+D^{+}.D^{*}+D^{*}.D^{+}$ است. مثال هایی از این رشته ها عبارتند از: 12 , 2.254 , 3. , .04 ■

مجموعه تمام اعداد حقیقی در زبان برنامه نویسی C ، یک زبان منظم است.

مثال

آیا زبان $L=\{a^{n}b^{k}:n,k\geq 0\}$ منظم است؟

حل: بله- چون زبان L همان $a^{*}b^{*}$ است. ■

مثال

کدام یک از زبان‌های زیر منظم هستند؟

$L_1=\{uww^{R}v:u,v,w\in\{a,b\}^{+}\}$

$L_2=\{uww^{R}v:u,v,w\in\{a,b\}^{+},|u|\geq|v|\}$

حل: فقط زبان L_1 منظم است. چون می توان یک عبارت منظم برای آن نوشت:

$r_1=(a+b)^{+}(aa+bb)(a+b)^{+}$

■

مثال

کدام یک از زبان‌های زیر منظم هستند؟

$L_1=\{ww^{R}:w\in\{a\}^{*}\}$

$L_2=\{ww^{R}:w\in\{a,b\}^{*}\}$

حل: زبان L_1 منظم است.

■

مثال

کدام یک از زبان‌های زیر منظم هستند؟

$L_1 = \{a^n b^m a^k : n+m+k > 5\}$

$L_2 = \{a^n b^m a^k : n > 5, m > 3, k \le m\}$

حل: فقط زبان L_1 منظم است. برای اثبات منظم بودن زبان L_1، کافی است آن را به حالت هایی مثل $m = 0, k = 0, n > 5$ تقسیم کرد. در اینصورت می توان برای هر یک عبارات منظمی ارائه داد. در ادامه منظم نبودن L_2 را به کمک لم تزریق نشان می دهیم. ■

چند نکته:

۱- این مساله که یک زبان به مقدار نامحدود حافظه نیاز دارد، الزاما به معنی نامنظم بودن آن نیست. زبان‌هایی وجود دارند که تعداد نامحدودی موقعیت دارند ولی منظم هستند. مانند:

$L = \{w:$ w دارای تعداد مساوی از زیر رشته های 01 و 10 می‌باشد. $\}$

۲- اگر L منظم باشد، آنگاه $L - \{\lambda\}$ منظم است.

۳- اگر L منظم باشد، آنگاه $L \cup \{a\}$ منظم است.(به ازای تمام $a \in \Sigma$)

۴- هر زبان متناهی، منظم است.

بسته بودن زبان های منظم

در حالت کلی یک مجموعه نسبت به عملی بسته است اگر اجرای آن عمل روی اعضای آن مجموعه،عضوی از همان مجموعه را نتیجه بدهد. مسئله بسته بودن یک زبان منظم روی یک عملگر، یعنی آیا زبان حاصل در اثر اعمال عملگر، باز هم منظم خواهد بود؟

اگر L زبان منظمی باشد، آنگاه $\overline{L}$ و L^* و L^R منظم خواهند بود. یعنی خانواده زبان های منظم تحت مکمل گیری ، بستار ستاره ای و معکوس، بسته هستند.

اگر L_1 و L_2 منظم باشند، آنگاه $L_1 \cup L_2$، $L_1 \cap L_2$، $L_1.L_2$، $L_1 - L_2$ منظم خواهند بود. یعنی خانواده زبان های منظم تحت اجتماع، اشتراک، الحاق و تفاضل بسته هستند.

مثال

نشان دهید خانواده زبان‌های منظم تحت تفاضل بسته هستند.

حل: تفاضل را می توان بر اساس اشتراک به صورت $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ تعریف کرد. حال از آنجا که L_2 منظم است، $\overline{L_2}$ نیز منظم خواهد بود و چون زبان‌های منظم تحت اشتراک بسته هستند، $L_1 \cap \overline{L_2}$ نیز منظم خواهد بود. ■

مثال

با فرض اینکه L_1, L_2 زبان‌های منظم هستند، کدام یک از زبان‌های $L_3 = L_1 \cap L_2^R$ و $L_4 = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ منظم است؟

حل: هر دو زبان منظم هستند، چون زبان‌های منظم نسبت به وارون، متمم و اشتراک بسته هستند. ■

مثال

با فرض اینکه زبان‌های L_1, L_2 روی الفبای Σ تعریف شده باشند، آنگاه کدام گزاره درست است؟

الف) اگر $L_1, L_1 \cap L_2$ منظم باشند، آنگاه L_2 منظم است.

ب) اگر $L_1, L_1 \cup L_2$ منظم باشند، آنگاه L_2 منظم است.

پ) اگر $L_1, L_1 - L_2$ منظم باشند، آنگاه L_2 منظم است.

حل: از آنجا که ϕ و Σ ، زبان‌های منظم هستند، دلیلی نادرستی گزاره ها عبارتند از:

الف : با فرض $L_1 = \phi$، آنگاه $L_1 \cap L_2 = \phi$ است و L_2 می‌تواند هر نوع زبانی باشد.

ب: با فرض $L_1 = \Sigma$، آنگاه $L_1 \cup L_2 = \Sigma$ است و L_2 می‌تواند هر نوع زبانی باشد.

پ : با فرض $L_1 = \phi$، آنگاه $L_1 - L_2 = \phi$ است و L_2 می‌تواند هر نوع زبانی باشد. ■

مثال

آیا اجتماع دو زبان نامنظم، می‌تواند منظم باشد؟

حل: بله- به طور نمونه، زبان های $L_1 = \{a^n b^m : n \le m\}$ و $L_2 = \{a^n b^m : n > m\}$ هر دو نامنظم هستند، اما اجتماع آنها یعنی $L(a^* b^*)$، منظم است. ■

اگر L_1 و L_2 زبان های نامنظمی باشند، آنگاه $L_1 \cup L_2$ ممکن است منظم باشد.

مثال

با فرض $L_i = a^i b^i$، آیا حاصل اجتماع نامتناهی L_i به ازای $(i = 0,1,2,3,...)$، منظم است؟

حل: خیر- اجتماع این زبان ها برابر $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ است که منظم نیست. (به ازای هر i، L_i متناهی و در نتیجه منظم است.) ■

مجموعه زبان‌های منظم، نسبت به اجتماع نامتناهی بسته نیستند.

مثال

آیا زبان $L = \{w : n_a(w) \neq n_b(w)\}$ منظم است؟

حل: خیر- می‌دانیم که زبان‌های منظم تحت مکمل گیری بسته هستند. بنابراین اگر L منظم باشد، باید مکمل آن هم منظم باشد. اما چون $\overline{L} = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$، منظم نیست، بنابراین L نیز منظم نمی‌باشد. ■

مثال

اگر L_1 و L_2 زبان های منظمی باشند، آیا $L = \{w : w \in L_1, w^R \in L_2\}$ لزوما منظم است؟

حل: زبان L را می توان به صورت $L = \{w : w \in L_1, w \in {L_2}^R\}$ نوشت که همان $L_1 \bigcap {L_2}^R$ است. بنابراین چون زبان‌های منظم تحت معکوس و اشتراک بسته هستند،زبان $L_1 \bigcap {L_2}^R$ منظم است.■

مثال

آیا زبان $L = \{w_1 c w_2 : w, w_2 \in \{a,b\}^*, w_1 \neq w_2\}$ منظم است؟

حل: فرض کنیم L منظم باشد، آنگاه متمم آن نیز منظم است. از آنجا که زبان‌های منظم تحت اشتراک بسته هستند، پس $\overline{L} \bigcap \{a^* c a^*\}$ باید منظم باشد. اما حاصل این اشتراک زبان $\{a^n c a^n\}$ است که منظم نیست. پس فرض خلف نادرست است و زبان L منظم نیست.■

لم تزریق

یک زبان در صورتی منظم است که در جریان پردازش رشته ها، اطلاعاتی که باید در هر مرحله به خاطر آورده شوند، کاملا محدود باشد. این گفته درست است، اما باید قبل از هر نوع استفاده ای به دقت اثبات شود. یکی از راه های اثبات نامنظم بودن یک زبان، استفاده از لم تزریق(پمپاژ) است.

اگر L یک زبان منظم نامتناهی باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت m وجود دارد بطوریکه هر $w \in L$ با شرط $|w| \geq m$، را می‌توان به صورت $w = xyz$ تجزیه کرد، با فرض $|xy| \leq m$ و $|y| \geq 1$ بطوریکه $w_i = xy^i z$ به ازای تمام $i = 0,1,2,...$ عضو L باشد.

به طور خلاصه:

تمامی رشته‌های طولانی L را می‌توان به سه بخش تقسیم نمود، بطوریکه تعداد دلخواهی از تکرارهای بخش میانی، رشته دیگری را در L ایجاد کند. (می گوییم رشته میانی تزریق شده است.)

توسط لم پمپاژ فقط می‌توان منظم نبودن یک زبان را بررسی کرد و برای بررسی اینکه آیا یک زبان منظم هست از لم پمپاژ نمی‌توان استفاده کرد.

لم pumping یک شرط کافی برای منظم نبودن یک زبان ارائه می دهد.

مثال

آیا زبان $L = \{a^n b^n : n > 0\}$ منظم است؟

حل: فرض کنیم که L منظم باشد. حال رشته $w = a^n b^n$ متعلق به L را به ۳ قسمت تجزیه می‌کنیم:

$x = a^{n-1}, y = a, z = b^n$

حال باید به ازای تمام $i \geq 0$ ، رشته $xy^i z$، متعلق به L باشد، ولی مثلا به ازای i=2 این چنین نیست: $a^{n-1}a^2b^n = a^{n+1}b^n \notin L$

بنابراین زبان داده شده منظم نیست.

مثال

آیا زبان $L=\{a^n b^m c^k : k=n+m\}$ منظم است؟

حل: فرض کنیم که L منظم باشد. حال رشته $w=a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ متعلق به L را به ۳ قسمت تجزیه می‌کنیم:

$x=a^{n-1}$ و $y=a$ و $z=b^{n+1}c^{2n+1}$

حال باید به ازای تمام $i\ge 0$ ، رشته xy^iz، متعلق به L باشد، ولی مثلا به ازای i=2 این چنین نیست:

$a^{n-1}a^2b^{n+1}c^{2n+1}=a^{n+1}b^{n+1}c^{2n+1}\notin L$

بنابراین زبان داده شده منظم نیست. چون: $(n+1)+(n+1)\neq 2n+1$ ■

مثال

آیا زبان $L=\{a^n : n\ge 2,$ عددی اول است n$\}$ منظم است؟

حل: فرض کنیم که L منظم باشد. حال رشته $w=a^k$ با فرض اول بودن k، متعلق به L را به ۳ قسمت تجزیه می‌کنیم:

$x=a^{k-t-h}$ و $y=a^t$ و $z=a^h$

حال باید به ازای تمام $i\ge 0$ ، رشته xy^iz، متعلق به L باشد، ولی مثلا به ازای i=k+1 این چنین نیست: $a^{k-t-h}a^{t(k+1)}a^h=a^ka^{tk}=a^{(1+t)k}\notin L$

مقدار (1+t)k اول نیست، چون به k و 1+t بخش پذیر است. بنابراین زبان داده شده منظم نیست.■

تمرین‌های فصل ١

١- رشته‌های تولید شده توسط عبارت منظم $(a+bb)*(b+aa)*$ با طول ٣ یا کمتر، را بنویسید.

٢- در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$، درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف- $(a+b)*=a*(ba)*$

ب- $(a+b)^*=a^*+b^*$

٣- در الفبای $\Sigma=\{0,1\}$، درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف- $1+0(0+10)*11=(00^*1)1^*$

ب- $0(0+10)*11=(0^*10)^*1$

پ- $1*0*+(0+1)*01(0+1)*=0^*1^*$

۴- هر یک از عبارات منظم زیر در الفبای $\Sigma=\{0,1\}$، چه نوع رشته هایی را تولید می کنند؟

الف- $(0+1)^*(0+11)+1+\lambda$

ب- $0*(1+1000*)*(\lambda+10)$

پ- $(1+01)*(0+\lambda)$

۵- هر یک از عبارات منظم زیر، در الفبای $\Sigma=\{a,b\}$، چه نوع رشته هایی را تولید می کنند؟

الف- $(a+ba*b)*ba*$

ب- $(b+ab+aab)^*(a+aa+\lambda)$

۶- عبارت منظم $100(000)*1$، نشان دهنده چه مجموعه ای است؟

٧- آیا دو عبارت منظم زیر برابرند؟

$$r_1=b*(\lambda+ab*ab*)(\lambda+ab*)$$

$$r_2=(\lambda+b*a)(\lambda+b*ab*a)b*$$

٨- عبارت منظمی بنویسید که زبان $L=\{a^nb^{3m}c^{2k}: n\ge 1, m\ge 1, k\ge 1\}$ را توصیف کند.

٩- عبارت منظمی بنویسید که زبان $L=\{a^nb^m: n\ge 2, m\le 3\}$ را توصیف کند.

۱۰- اگر زبان L به وسیله عبارت منظم $ba(b^*(ab)^* + a^*(bb)^*)ba$ توصیف شده باشد، وارون L را مشخص کنید.

۱۱- منظم بودن زبان‌های زیر را بررسی کنید.

الف- $\{a^n b^n (a+b)^* : n \geq 0\}$

ب- $\{a^* a^n b^n b^* : n \geq 0\}$

پ- $\{a^n b^m : n, m \geq 0\} - \{a^n b^m : n \neq m\}$

ت- $\{a^n b^m : n \geq 0, m \geq 0\} \cup \{a^n : n \geq 0\}$

ث- $\{w : n_a(w) \neq n_b(w)\} \cap \{a^* b^*\}$

۱۲- اگر L زبان نامنظم روی الفبای Σ باشد، آیا $(\Sigma^* - L)$ منظم است؟

۱۳- اگر L_1 و L_2 زبان های نامنظم روی الفبای Σ باشند، آیا $L_1 \cup L_2$ می تواند منظم باشد؟

۱۴- با توجه به زبان های زیر، عبارت $(L_1 \cup L_2)L_3^*$ معرف چه زبانی است؟

$L_1 = \{a, b\}$

$L_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

$L_3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$

۱۵- تابع $f : N \to N$ به صورت زیر می باشد. آیا زبان $L_f = \{0^n 1^{f(n)} : n \in N\}$ ، منظم است؟ ($L_f \subseteq \{0,1\}^*$)

$$f(n) = \begin{cases} 2n & n \text{ زوج} \\ 2n+1 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

۱۶- آیا به ازای هر زبان منظم A ، زبان نامنظم B وجود دارد به گونه‌ای که $B \subseteq A$؟

۱۷- آیا به ازای هر زبان منظم A ، زبان نامنظم B وجود دارد به گونه‌ای که $A \subseteq B$؟

۱۸- اگر L_1 و L_2 زبان هایی منظم باشند و $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$. آیا L منظم است؟

۱۹- آیا زبان منظم، می تواند ذاتا مبهم باشد؟

۲۰- لم تزریق برای منظم نبودن یک زبان شرط کافی است یا لازم؟

۲۱- نشان دهید $(L_1.L_2)^* \subset L_2^*$.

$$L_1 = \{a^n : n = 9k, k = 0,1,2,\ldots\}$$
$$L_2 = \{a^n : n = 3k, k = 0,1,2,\ldots\}$$

۲۲- اگر $L - \Sigma^* = \varphi$ باشد، آنگاه L چه زبانی می تواند باشد؟

۲۳- اگر $L_1 = \{10,1\}$ و $L_2 = \{011,11\}$ باشد، حاصل $L_1.L_2$ را مشخص کنید.

۲۴- حاصل تقسیم راست L_1 / L_2 را تعیین کنید.

$$L_1 = \{0,01,111\}$$
$$L_2 = \{0,1,11\}$$

۲۵- اگر L یک زبان روی مجموعه Σ باشد، نمایشی برای $((L^R)^n)^R$ بنویسید.

۲۶- آیا اگر $s \in palindrome$ باشد، آنگاه $s^n \in palindrome$ است؟

$$palindrome = \{\lambda \;\; and \;\; all \;\; strings \;\; s \;\; such \; that \; reverse(s) = s\}$$

۲۷- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف- اگر L یک زبان منظم فاقد λ باشد، آنگاه truncate(L) منظم خواهد بود.

ب - اگر L منظم باشد، $chop2(L) = \{w : vw \in L, |v| = 2\}$ هم منظم خواهد بود.

پ- اگر L منظم باشد، آنگاه $even(L) = \{even(w) : w \in L\}$ هم منظم خواهد بود.

۲۸- عبارت منظمی برای زبان $L = \{w : n_a(w) \bmod 3 > 0\}$ روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ بنویسید.

۲۹- عبارت منظمی روی الفبای $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ بنویسید که بیانگر تمام رشته هایی باشد که طول تمام دنباله‌های a آنها، مضرب ۳ باشد.

۳۰- عبارت منظمی روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ بنویسید که بیانگر تمام رشته هایی باشد که شامل دنباله ای از a ها با طول بیشتر از ۲ نباشد.

۳۱- عبارت منظمی برای زبان $L=\{a^n b^m : n\ge 1, m\ge 1, nm\ge 3\}$ بنویسید.

۳۲- عبارت منظمی روی الفبای $\Sigma=\{a,b,c\}$ بنویسید که بیانگر تمام رشته هایی باشد که حداکثر دو تـا a دارند.

۳۳- به کمک لم تزریق نشان دهید زبان $L=\{a^n b^p : n\le p\}$ منظم نیست؟

۳۴- به کمک لم تزریق نشان دهید که زبان $L=\{n_a(w)=n_b(w)\}$ منظم نیست؟

حل تمرین فصل ۱

۱- رشته های تولید شده عبارتند از:

$\lambda, a, bb, ab, aaa, bbb, b, aa, aab, abb, bba$

۲- هر دو گزاره نادرست هستند:

الف: رشته b توسط سمت چپ تولید می شود اما توسط سمت راست تولید نمی شود.

ب: رشته aba توسط سمت چپ تولید می شود اما توسط سمت راست تولید نمی شود.

۳- هر سه گزاره نادرست هستند:

الف: رشته 1 توسط سمت چپ تولید می شود اما توسط سمت راست تولید نمی شود.

ب: رشته 011 توسط سمت چپ تولید می شود اما توسط سمت راست تولید نمی شود.

پ: رشته 10 توسط سمت چپ تولید می شود اما توسط سمت راست تولید نمی شود.

۴- حل هر گزاره در زیر آورده شده است:

الف: همه رشته هایی که به 01 ختم نمی‌شوند.

ب: تمام رشته هایی که شامل 101 نباشد.

پ: دارای یک زوج صفر متوالی نباشند.

۵- حل هر گزاره در زیر آورده شده است:

الف: دارای تعدادی فرد از کاراکتر b می‌باشند.

ب: همه رشته هایی که شامل سه تا a پشت سرهم نباشند.

۶- عبارت داده شده نشان دهنده مجموعه $\{<8^n+1>_2 : n \geq 1\}$ می باشد. به طور نمونه:

$$n=1 \rightarrow 8^n+1=9 \rightarrow 1001$$
$$n=2 \rightarrow 8^n+1=65 \rightarrow 1000001=100(000)1$$
$$n=3 \rightarrow 8^n+1=513 \rightarrow 1000000001=100(000)^2 1$$

۷- دو عبارت منظم داده شده برابرند:

$$r_1 = b^*+b^*ab^*+b^*ab^*ab^*+b^*ab^*ab^*ab^*$$
$$r_2 = b^*+b^*ab^*ab^*+b^*ab^*+b^*ab^*ab^*ab^*$$

۸- با توجه به زبان داریم:

الف- حداقل یک a باید داشت.

ب- حداقل تعداد b ها باید سه یا مضربی از سه باشد.

ج- حداقل تعداد c ها باید دو یا مضربی از دو باشد.

بنابراین عبارت منظمی که زبان L را توصیف کند برابر است با: $a^+(bbb)^+(cc)^+$

۹- جواب $aaa^*(\lambda+b+bb+bbb)$ است.

۱۰- برای بدست آوردن وارون، عبارت را از انتها به ابتدا می‌خوانیم:

$$L = ba(b^*(ab)^*+a^*(bb)^*)ba \Rightarrow L^R = ab((bb)^*a^* + (ba)^*b^*)ab$$

۱۱- بررسی گزاره ها:

الف: بله- از الحاق a^nb^n با $(a+b)^*$، زبان $(a+b)^*$ حاصل می شود که منظم است.

ب: بله- عبارت a^*a^n برابر a^* و عبارت b^nb^* برابر b^* می باشد. پس زبان a^*b^* بوده که منظم است.

پ: خیر- حاصل $\{a^nb^n : n \geq 0\}$ است که منظم نمی‌باشد.

ت : بله- زبان به صورت $a^*b^* + a^* = a^*b^*$ است، که منظم است.

ث: خیر- این زبان برابر $\{a^nb^m : n \neq m\}$ است که منظم نیست، چون باید نابرابری a ها و b ها چک شود.

۱۲- خیر- چون اگر L نامنظم باشد، آنگاه مکمل آن یعنی $\Sigma^* - L$ حتما نامنظم است.

۱۳- بله- زبان $L_1 = \{a^nb^k : n \neq k\}$ نامنظم و زبان $L_2 = \{a^nb^k : n,k \geq 0\}$ منظم است، اما اجتماع آنها یعنی $\{a^nb^k : n,k \geq 0\}$، منظم است.

مثالی دیگر: زبان $L_1 = \{a^nb^n : n \geq 0\}$ نامنظم و در نتیجه مکمل آن یعنی $L_2 = \overline{L_1}$ هم نامنظم خواهد بود. اما اجتماع آن ها یعنی a^*b^* ، منظم است.

۱۴- با توجه به زبان‌های داده شده، می‌توان نوشت:

$$L_1 = \Sigma, L_2 = \Sigma^2, L_3 = \Sigma^3$$

از آنجا که عبارت $(\sum \cup \sum^2)(\sum^3)^*$ معرف مجموعه رشته‌هایی است که طول آنها مضرب ۳ نمی‌باشند، می توان عبارت داده شده را به صورت زیر بیان کرد:

$$L = \{w : w \in \{a.b\}^*, |w| \bmod 3 \geq 1\}$$

۱۵- خیر- تابع f(n) یک به یک است، پس زبان منظم نیست.

۱۶- خیر- فرض کنید A برابر تهی باشد که زبانی منظم است. هیچ زبانی نمی توان پیدا کرد که زیر مجموعه تهی باشد.

۱۷- خیر- فرض کنید A برابر Σ^* باشد که زبانی منظم است. هیچ زبانی نمی توان پیدا کرد که Σ^*، زیر مجموعه آن باشد.

۱۸- خیر- چون با فرض $L_1 = \phi$ و $L_2 = \Sigma^*$، برای زبان L چه منظم باشد و چه نامنظم، رابطه $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$ برقرار است.

۱۹- خیر- زبان های منظم نمی‌توانند ذاتاً مبهم باشند.

۲۰- لم تزریق، یک شرط کافی برای منظم نبودن یک زبان است. چون اگر زبانی در لم تزریق صدق نکند، آنگاه حتما نامنظم است.

۲۱- زبان‌های L_1 و L_2 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L_1 = \{\lambda, a^9, a^{18}, \ldots\}$$

$$L_2 = \{\lambda, a^3, a^6, a^9, \ldots\}$$

نتیجه الحاق این دو زبان برابر است با:

$$L_1.L_2 = \{\lambda, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}, a^{18}, \ldots\}$$

بنابراین : $(L_1.L_2)^* \subset L_2^*$

۲۲- عبارت $L - \Sigma^*$ را می توان به صورت $L \cap \phi$ نشان داد:

$$L - \Sigma^* = L \cap (\overline{\Sigma^*}) = L \cap \phi$$

که طبق صورت سئوال این مقدار برابر تهی است. از آنجا که اشتراک هر زبانی با زبان تهی، زبانی تهی می باشد، بنابراین زبان L می تواند هر زبانی باشد.

۲۳- نتیجه الحاق این دو زبان برابر است با:

$$L_1.L_2 = \{10,1\}\{011,11\} = \{10011, 1011, 101, 111\}$$

۲۴- $\{\lambda, 0, 1, 11\}$

۲۵- از آنجا که روابط $(L^R)^R = L$ و $(L^R)^n = (L^n)^R$ برقرار می باشند، داریم:

$$((L^R)^n)^R = ((L^R)^R)^n = L^n$$

که L^n به صورت $\{w_1 w_2 ... w_n \mid w_i \in L\}$نمایش داده می شود.

۲۶- بله- رشته پالیندروم، رشته ای است که با معکوس اش یکی باشد. بنابراین اگر s یـک رشـته پالینـدروم باشد، s^n نیز یک رشته پالیندروم است و برعکس. مثلا $s = radar$ و $s^2 = radarradar$.

۲۷- هر سه گزاره درست هستند.

الف- زبان truncate(L) ، از حذف آخرین سمبل سمت راست هر رشته از زبان L بوجود می آید.

ب- زبان chop2(L)، از حذف دو سمبل انتهایی سمت چپ هر رشته ای از زبان L بوجود می آید.

پ- زبان even(w) ، از استخراج حروف واقع در موقعیت های زوج w بدست می آید.

۲۸- $r = (b^* ab^* ab^* ab^*)^* (a(a+\lambda)b^* ab^*)$

۲۹- $r = (aaa + b + c + d)^*$

۳۰- $r = (b^* + (a+\lambda)(a+\lambda)b)^* .(a+\lambda).(a+\lambda)$

۳۱- $r = a^+ bbb^+ + aaa^+ b^+ + aa^+ bb^+$

۳۲- $r = (b+c)^* (a+\lambda)(b+c)^* (a+\lambda)(b+c)^*$

۳۳- فرض کنیم که L منظم باشد. حال رشته $w = a^m b^m$ متعلق به L را به ۳ قسمت تجزیه کرد:

$$w = a^{m-t-k} a^t a^k b^m \Rightarrow x = a^{m-t-k}, y = a^t, z = a^k .b^m$$

حـال بایـد بـه ازای تمـام $i \ge 0$ ، رشـته $xy^i z$، متعلـق بـه L باشـد، ولـی مـثلا بـه ازای i=2 ایـن چنـین نیست: $a^{m-t-k} (a^t)^2 a^k b^m = a^{m+t} b^m \notin L$

بنابراین زبان داده شده منظم نیست. $(t \ge 1)$

۳۴- فرض کنیم که L منظم باشد. حال رشته $w = a^m b^m$ متعلق به L را به ۳ قسمت تجزیه کرد:

$$w = a^{m-t-k} a^t a^k b^m \Rightarrow x = a^{m-t-k}, y = a^t, z = a^k .b^m$$

حـال بایـد بـه ازای تمـام $i \ge 0$ ، رشـته $xy^i z$، متعلـق بـه L باشـد، ولـی مـثلا بـه ازای i=0 ایـن چنـین نیست: $a^{m-t-k} (a^t)^0 a^k b^m = a^{m-t} b^m \notin L$

بنابراین زبان داده شده منظم نیست.

فصل ۲:

گرامر – گرامر منظم

گرامر

گرامر G به صورت چهار تایی $G=(V,T,S,P)$ تعریف می‌شود که:

V : مجموعه متناهی از اشیاء به نام متغیرها

T : مجموعه متناهی از اشیاء به نام سمبل‌های پایانی(ترمینال)

S : سمبل ویژه ای به نام متغیر شروع $(S \in V)$

P : مجموعه متناهی از قوانین

تذکر: مجموعه های V و T غیر تهی و جدا از هم می باشند.

قوانین گرامر به شکل $x \to y$ می‌باشند که در آن $x \in (V \cup T)^+$ و $y \in (V \cup T)^*$ می باشد.

مثال

مجموعه V و T را در گرامر با قوانین، را مشخص کنید.

$$S \to Aab$$
$$A \to Aab$$
$$A \to a$$

حل: مجموعه V یا همان متغیرها برابر $V=\{S,A\}$ است. مجموعه T یا همان ترمینال‌ها برابر $T=\{a,b\}$ است. متغیرها با حروف بزرگ و ترمینال‌ها با حروف کوچک نمایش داده می‌شوند. ■

انواع گرامر

گرامرها را به چهار دسته تقسیم می شوند:

۱- منظم

گرامری که همه قواعد آن به صورت $A \to Bx \mid x$ یا $A \to xB \mid x$ باشد. ($A, B \in V$ و $x \in T^*$)

۲- مستقل از متن

گرامری که در سمت چپ کلیه قواعد آن، فقط یک متغیر باشد.

۳- حساس به متن

گرامری که تمامی قوانین آن به فرم $x \to y$ باشند که در آن x و y عضو $(V+T)^+$ باشند و $|x| \le |y|$.

۴- بدون محدودیت

هیچ شرط و محدودیتی برای قواعد تولید ندارد. تنها محدودیت این است که λ نباید در سمت چپ قواعد تولید باشد.

مثال

نوع گرامر زیر را مشخص کنید.

$1. S \to AB$
$2. A \to aAb$
$3. bB \to bbbB$
$4. aAb \to aa$
$5. B \to \lambda$

حل: گرامر داده شده از نوع بدون محدودیت است.

این گرامر مستقل از متن نیست، چون در سمت چپ همه قواعد باید فقط یک متغیر باشد. در دو قانون ۳و۴ این چنین نیست.

این گرامر چون مستقل از متن نیست، پس حتما منظم نمی باشد.

این گرامر حساس به متن نیست، چون طول سمت چپ باید از سمت راست بیشتر باشد. در دو قـانون ۴و ۵ این چنین نیست. ■

زبان تولید شده توسط گرامر

با استفاده از گرامرها می توان بوسیله بکار بردن قوانین با ترکیب های مختلف، رشته های متعددی تولید کـرد. مجموعـه ایـن رشته های پایانی، زبانی است که بوسله گرامر تولید می شود.

فرض کنیم که $G=(V,T,S,P)$ یک گرامر باشد. آنگاه مجموعه $L(G)=\{w\in T^*: S\overset{*}{\Rightarrow} w\}$، زبانی است کـه توسـط G تولید می شود.

تذکر: عبارت $S\overset{*}{\Rightarrow} w$ یعنی w از S با تعداد نامشخص(حتی صفر) مشتق می‌شود.

مثال

گرامر منظم $S\to aS\mid\lambda$، زبان منظم a^* را تولید می‌کند. نحوه تولید رشته aa به کمک این گرامر:

$S\Rightarrow aS\Rightarrow aaS\Rightarrow aa$

■

مثال

گرامر منظم $S\to aS\mid a$، زبان منظم a^+ را تولید می‌کند.نحوه تولید رشته aa به کمک این گرامر:

$S\Rightarrow aS\Rightarrow aa$

■

مثال

گرامر منظم $S\to abS\mid a$ ، زبان منظم $(ab)^*a$ را تولید می‌کند. نحوه تولید رشته $ababa$:

$S\Rightarrow abS\Rightarrow ababS\Rightarrow ababa$

مثال

گرامر منظم زیر، چه زبانی را تولید می‌کند؟

$$S \to Aab$$
$$A \to Aab \mid a$$

حل: زبان منظم $a(ab)^+$ را تولید می‌کند.■

مثال

گرامر مستقل از متن $S \to aSb \mid \lambda$، چه زبانی را تولید می کند؟

حل: زبان $\{a^n b^n : n \geq 0\}$ یعنی رشته‌های شروع شونده با a که تعداد a و b در آنها برابر است تولید می‌شود. نحـوه تولیـد رشته $aabb$ به کمک این گرامر:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

■

مثال

زبان گرامر مستقل از متن زیر را مشخص کنید.

$$S \to XY$$
$$X \to aXb \mid \lambda$$
$$Y \to cY \mid \lambda$$

حل: قوانین خط ۲ رشته هایی به فرم $a^n b^n$ و قوانین خط ۳ رشته هایی به فرم c^m تولید می‌کنند. در نهایت به علـت وجـود قانون ۱، رشته هایی به فرم $a^n b^n c^m$ تولید می شود. بنابراین :

$$L = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$$

نحوه تولید رشته $a^2 b^2 c$ توسط این گرامر: (n=2,m=1)

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow aXbY \Rightarrow aaXbbY \Rightarrow aabbY \Rightarrow aabbcY \Rightarrow aabbc$$

■

مثال

گرامر حساس به متن زیر چه زبانی را تولید می‌کند؟

$S \to abc \mid aAbc$
$Ab \to bA$
$Ac \to Bbcc$
$bB \to Bb$
$aB \to aa \mid aaA$

حل: زبان حساس به متن $L = \{a^n b^n c^n : n \ge 1\}$ را تولید می کند. نحوه تولید رشته $a^2b^2c^2$:

$S \Rightarrow aAbc \Rightarrow abAc \Rightarrow abBbcc \Rightarrow aBbbcc \Rightarrow aabbcc$

■

گرامر منظم (regular)

گرامری که همه قواعد آن به صورت $A \to Bx \mid x$ باشد را خطی از چپ و گرامری که همه قواعد آن به صورت $A \to xB \mid x$ باشد را خطی از راست می گویند. ($A, B \in V$ و $x \in T^*$). گرامری که خطی از راست یا خطی از چپ باشد را گرامر منظم می گویند.

مثال

زبان منظم تولید شده توسط هر یک از گرامرهای منظم را مشخص کنید.

الف	ب
$S \to aA \mid ab$ $A \to bS$	$S \to aA \mid \lambda$ $A \to bS$

حل:الف: $(ab)^+$ ب: $(ab)^*$

مثال

زبان منظم تولید شده توسط هر یک از گرامرهای منظم را مشخص کنید.

الف	ب
$S \to aA \mid a$ $A \to aA \mid bA \mid b$	$S \to aA \mid a$ $A \to aA \mid bA \mid a \mid b$

حل: الف: $a + a(a+b)^* b$ ب: $a(a+b)^*$ ■

مثال

زبان منظم تولید شده توسط هر یک از گرامرهای منظم را مشخص کنید.

الف	ب	پ	ت
$S \to aaS \mid aA \mid bA$ $A \to bA \mid \lambda$	$S \to bS \mid aA$ $A \to bA \mid \lambda$	$S \to aS \mid aB \mid bB \mid \lambda$ $B \to bB \mid \lambda$	$S \to aS \mid aB$ $B \to bB \mid b$

حل: الف: $(aa)^*(a+b)b^*$ ب: b^*ab^* پ: a^*b^* ت: a^+b^+

مثال

زبان منظم تولید شده توسط هر یک از گرامرهای منظم را مشخص کنید.

الف	ب	پ
$S \to aaS \mid aX$ $X \to bX \mid bb$	$S \to aS \mid abX$ $X \to bX \mid \lambda$	$S \to aS \mid abS \mid \lambda$

حل: الف: $(aa)^* ab^+ b$ ب: a^*abb^* پ: $(a+ab)^*$

■

مثال

زبان منظم تولید شده توسط هر یک از گرامرهای منظم را مشخص کنید.

الف	ب	پ	ت
$S \to aaS \mid abbX$ $X \to baX \mid \lambda$	$S \to aaaS \mid aX$ $X \to bbbbX \mid bbbbb$	$S \to aaS \mid aaaX$ $X \to bbX \mid b$	$S \to aaS \mid aaabbX$ $X \to baX \mid \lambda$

حل:

الف: $(aa)^* abb(ba)^*$ ب: $(aaa)^* a(bbbb)^+ b$

پ: $(aa)^+ a(bb)^* b$ ت: $(aa)^+ abb(ba)^*$

مثال

گرامر منظمی برای زبان $L = \{a^n b^m : n \geq 2, m \geq 3\}$ بنویسید.

حل:

$$S \to aaA$$
$$A \to aA \mid bbbB$$
$$B \to bB \mid \lambda$$

مثال

در الفبای $\Sigma = \{a\}$، گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : |w| \bmod 3 = 0\}$ را بنویسید.

حل: گرامر تولید کننده رشته هایی با حرف a که طول آنها مضرب ۳ باشد برابر است با:

$$S \to aaaS \mid \lambda$$

مثال

در الفبای $\sum = \{a\}$، گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : |w| \bmod 3 = 2\}$ را بنویسید.

حل: $S \to aaaS \mid aa$ ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : |w| \bmod 3 > 0\}$ را بنویسید. $(\sum = \{a\})$

حل: باقیمانده تقسیم صحیح هر عدد به 3 ، برابر 0 یا 1 یا 2 است. با توجه به شرط، حالت 0 مطرح نیست. توسط $S \to S_1$ حالتی که باقیمانده برابر 1 است و توسط $S \to S_2$، حالتی که باقیمانده برابر 2 است، تولید می شود.

$S \to S_1 \mid S_2$

$S_1 \to aaaS_1 \mid a$

$S_2 \to aaaS_2 \mid aa$

■

مثال

گرامر منظمی بنویسید که زبان $L = \{a^n b^m :$ n وm هر دو زوج هستند $\}$ را تولید کند.

حل:

$S \to aaS \mid X$
$X \to bbX \mid \lambda$

■

مثال

گرامر منظمی بنویسید که زبان $L = \{a^n b^m :$ n وm هر دو فرد هستند $\}$ را تولید کند.

حل:

$S \to aaS \mid aY$
$Y \to bbY \mid b$

مثال

گرامر منظمی بنویسید که زبان $L = \{a^n b^m :$ n+m زوج است $\}$ را تولید کند.

حل: برای اینکه جمع n و m زوج باشد، باید هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. این دو حالت در مثالهـای قبـل بررسـی شـدند و کافی است با دستور $S \to S_1 \mid S_2$ ، آنها را با هم ترکیب کرد.

$S \to S_1 \mid S_2$
$S_1 \to aaS_1 \mid X$
$X \to bbX \mid \lambda$
$S_2 \to aaS_2 \mid aY$
$Y \to bbY \mid b$

■

تمرین‌های فصل۲

۱- نحوه تولید رشته $w = acaacabbdebde$ توسط گرامر زیر را نشان دهید.

$S \to acBdeA \mid BAB$

$B \to aSb \mid ae \mid \lambda$

$A \to aAb \mid b \mid \lambda$

۲- نحوه تولید رشته $w = a^5$ توسط گرامر زیر را مشخص کنید.

$$
\begin{aligned}
S &\to ACaB \\
Ca &\to aaC \\
CB &\to DB \\
CB &\to E \\
aD &\to Da \\
AD &\to AC \\
aE &\to Ea \\
AE &\to a
\end{aligned}
$$

۳- نحوه تولید رشته $w = a^6$ توسط گرامر زیر را مشخص کنید.

$S \to ABC$

$B \to DBE \mid \lambda$

$DE \to EFaa$

$aE \to Ea$

$aC \to Ca$

$FE \to EFa$

$FC \to C$

$AE \to A$

$AC \to \lambda$

۴- نحوه تولید رشته $(((:a)),a)$ توسط گرامر زیر را مشخص کنید.

$S \to F \mid (S, SH)$

$F \to ((:F)) \mid a$

$H \to ,SH \mid \lambda$

۵- نحوه تولید رشته $babba$ توسط گرامر زیر را مشخص کنید.

$S \to aA \mid Aa$
$A \to aA \mid bA \mid \lambda$

۶- کدام گرامرمنظم می‌باشند؟

$G1: S \to aSb \mid ab$

$G2: S \to Ab \mid ab$

$G3: S \to aA \mid ab \;, \qquad A \to Sa$

۷- عبارت منظمی معادل با هر یک از گرامرهای زیر بنویسید.

الف	ب	پ
$S \to bS \mid aA \mid \lambda$ $A \to bA \mid aB$ $B \to bB \mid aS$	$S \to aB \mid cB$ $B \to abB \mid cbB \mid acB \mid \lambda$	$S \to aA \mid bA$ $A \to aA \mid bA \mid \lambda$

۸- عبارت منظمی معادل با هر یک از گرامرهای زیر بنویسید.

الف	ب	پ
$S \to 00S \mid X$ $X \to 11X \mid \lambda$	$S \to 0B \mid A$ $A \to 1A \mid S$ $B \to 1S \mid 1$	$S \to A$ $A \to 0B \mid 0$ $B \to 1C$ $C \to 1A$

۹- عبارت منظمی معادل با هر یک از گرامرهای زیر بنویسید.

الف	ب	پ
$S \to bS \mid aA \mid \lambda$ $A \to bA \mid aB$ $B \to bB \mid aS$	$S \to aaS \mid abbX$ $X \to baX \mid bbY$ $Y \to aY \mid \lambda$	$S \to T \mid D$ $T \to aT \mid bD$ $D \to bD \mid aT \mid \lambda$

۱۰- آیا هر گرامر خطی، گرامر منظم است؟

۱۱- یک گرامر خطی راست برای زبان $(aab^*ab)^*$ بنویسید.

پاسخ تمرین فصل ۲

۱- نحوه تولید:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow acBdeA \\
&\Rightarrow acaSbdeA \\
&\Rightarrow acaacBdeAbdeA \\
&\Rightarrow acaacaSbdeAbdeA \\
&\Rightarrow acaacaBABbdeAbdeA \\
&\Rightarrow acaacaAbdeAbdeA \\
&\Rightarrow acaacabbdebde
\end{aligned}
$$

۲- اگر اشتقاق زیر را دنبال کنیم به $aaaaa$ می رسیم:

$$S \Rightarrow ACaB \Rightarrow AaaCB \Rightarrow AaaDB \Rightarrow AaDaB \Rightarrow ADaaB \Rightarrow ACaaB$$

$$\Rightarrow AaaCaB \Rightarrow AaaaaCB \Rightarrow AaaaaE \Rightarrow AaaaEa \Rightarrow AaaEaa \Rightarrow AaEaaa$$
$$\Rightarrow AEaaaa \Rightarrow aaaaa$$

۳- نحوه تولید:

$$S \Rightarrow ABC \Rightarrow ADBEC \Rightarrow ADDBEEC \Rightarrow ADDEEC$$
$$\Rightarrow ADEFaaEC \Rightarrow AEFaaFaaEC \Rightarrow AFaaFaaEC$$
$$\Rightarrow AFaaFaEaC \Rightarrow AFaaFEaaC \Rightarrow AFaaEFaaaC$$
$$\Rightarrow AFaEaFaaaC \Rightarrow AFEaaFaaaC \Rightarrow AEFaaaFaaaC$$
$$\Rightarrow AFaaaFaaaC \Rightarrow AFaaaFaaCa \Rightarrow AFaaaFaCaa$$
$$\Rightarrow AFaaaFCaaa \Rightarrow AFaaaCaaa \Rightarrow AFaaCaaaa$$
$$\Rightarrow AFaCaaaaa \Rightarrow AFCaaaaaa \Rightarrow ACaaaaaa$$
$$\Rightarrow aaaaaa$$

زبان گرامر به صورت $\{a^{n(n+1)} : n \geq 0\}$ است.

۴- نحوه تولید:

$$S \Rightarrow (S,SH) \Rightarrow (F,SH) \Rightarrow (((:F)),SH) \Rightarrow (((:F)),FH) \Rightarrow (((:a)),FH)$$
$$\Rightarrow (((:a)),a)$$

۵- نحوه تولید:

$$S \Rightarrow Aa \Rightarrow bAa \Rightarrow baAa \Rightarrow babAa \Rightarrow babbAa \Rightarrow babba$$

۶- گرامر G2 منظم است. در گرامر منظم، همه قواعد خطی راست یا خطی چپ می باشند.

۷- عبارت منظم هر یک از گرامرها برابرند با:

الف- $(b^*ab^*ab^*a)^*b^*$

ب- $(a+c)(ab+cb+ac)^*$

پ- $(a+b)(a+b)^*$

۸- عبارت منظم هر یک از گرامرها برابرند با:

الف- $(00)^*(11)^*$

ب- $1^*(01^+)^+$

پ- $(011)^*0$

۹- عبارت منظم هر یک از گرامرها برابرند با:

الف- $(a+b)^2(a+b)^+$

ب- $(aa)^*abb(ba)^*bba^*$

پ- $(a^*b+\lambda)b^*(aa^*bb^*)^*$

۱۰- خیر- گرامری منظم است که همه قواعد آن، خطی چپ یا خطی راست باشند. در گرامر خطی، ممکن است تعدادی از قواعد خطی چپ و تعدادی خطی راست باشند.

۱۱- گرامر :

$$S \to aaA \mid \lambda$$
$$A \to bA \mid abS$$

فصل ۳:

اتوماتای متناهی

ماشین‌ها(اتوماتا) ابزارهایی هستند برای تشخیص رشته‌های زبان که رشته را از چپ بـه راسـت بررسـی کـرده و نهایتـاً اعـلام می‌کنند که آیا رشته متعلق به زبان هست یا نه. ماشین‌ها را می‌توان به عنوان مدلهای ریاضی برای کامپیوترهای واقعی در نظر گرفت.

انواع ماشین

یک دسته بندی برای اتوماتا به صورت زیر است:

۱- متناهی(FA)

ماشین پذیرنده‌ای که حافظه ندارد و خروجی آن دارای دو حالت پذیرش یا عدم پذیرش است.

۲- پشته‌ای (PDA)

ماشین پذیرنده‌ای که حافظه آن به صورت پشته بوده و خروجی آن دارای دو حالت پذیرش یا عدم پذیرش است.

۳- کراندار خطی (LBA)

ماشینی دارای حافظه از دو سر محدود با قابلیت خواندن و نوشتن است.

۴- تورینگ (TM)

ماشینی دارای حافظه نامحدود با قابلیت خواندن و نوشتن است.

نکات:

۱- ماشین متناهی، قادر به پذیرش زبان منظم است.

۲- ماشین پشته ای، قادر به پذیرش زبان مستقل از متن است.

۳- ماشین کراندار خطی، قادر به پذیرش زبان حساس به متن است.

۴- ماشین تورینگ تشخیص دهنده، قادر به پذیرش زبان بازگشتی شمارش پذیر است.

در این فصل ماشین متناهی را بررسی می کنیم. ماشین های دیگر در فصل های بعدی بررسی خواهند شد.

ماشین های متناهی

یکی از ساده ترین انواع ماشین‌ها، ماشین متناهی می باشد که از آن در شناخت زبان‌های منظم استفاده می‌شود. اتوماتای متناهی مدل مناسبی برای کامپیوتر با محدودیت شدید حافظه است. ماشین‌های متناهی(FA) ، به دو دسته معین (DFA) و نامعین (NFA) تقسیم می‌شوند.

DFA : Deterministic Finite Accepter

NFA : Nondeterministic Finite Accepter

پذیرنده متناهی معین (DFA)

ماشین متناهی قطعی(معین) بوسیله پنج تایی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ تعریف می شود که در آن:

Q : مجموعه متناهی از حالات داخلی

Σ : مجموعه متناهی از علائمی به نام الفبای ورودی

δ : تابع انتقال $(Q \times \Sigma \to Q)$

q_0 : حالت شروع

F : مجموعه حالات پایانی

یک dfa ، مانند همه اتوماتاها دارای حالت های داخلی، قوانینی برای انتقال از یک حالت به حالت دیگر، تعدادی ورودی و همچنین روشهایی برای تصمیم گیری هستند.

نحوه عملکرد ماشین:

اتوماتا ابتدا در حالت شروع و هد خواندن از نوار ورودی، روی آخرین سمبل از سمت چپ رشته ورودی قرار دارد. با هر یک از حرکت های اتوماتا ، هد یک موقعیت به راست می رود. اگر با رسیدن به پایان رشته، اتوماتا در یکی از حالت های پایانی قرار داشته باشد، رشته پذیرفته می شود.

انتقال از یک حالت داخلی به حالت داخلی دیگر، توسط تابع انتقال انجام می شود. بعنوان مثال $\delta(q_i, a) = q_j$، یعنی اگر dfa در حالت q_i باشد و هد بر روی a باشد، آنگاه ماشین به حالت q_j تغییر حالت می دهد.

هد نوار در ماشین متناهی، فقط به سمت راست حرکت می‌کند.

مثال

نمودار تغییر وضعیت DFA زیر را به کمک شکل نشان دهید.

$\Sigma = \{a, b\} \quad , \ Q = \{q_0, q_1\} \ , \ \ F = \{q_1\}$

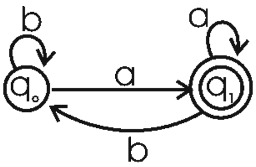
$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_0$$

$$\delta(q_1, b) = q_0$$

$$\delta(q_1, a) = q_1$$

حل: این ماشین دارای دو حالت q_0 و q_1 است که q_0 حالت شروع و q_1 حالت پایانی است. طبق تـابع انتقال‌هـای داده شـده، ماشین اگر در حالت q_0 باشد و هد a را بخواند به حالت q_1 می رود و اگـر b را بخوانـد در همـان حالـت q_0 بـاقی می‌مانـد. همچنین اگر ماشین در حالت q_1 باشد و هد b را بخواند به حالت q_0 رفته و اگر a را بخواند در همان حالـت q_1 بـاقی مـی ماند. نمودار تغییر وضعیت DFA این مثال در شکل زیر نشان داده شده است:

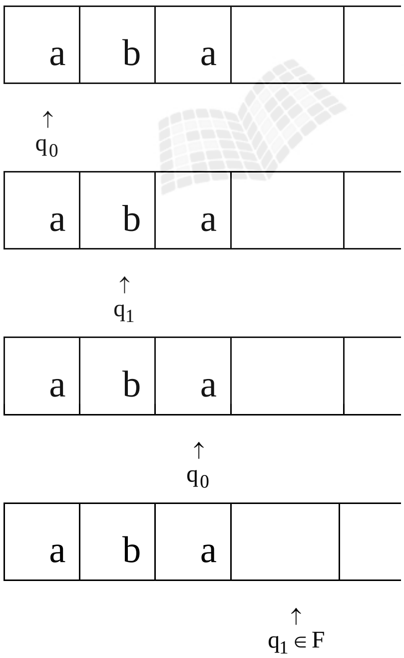


حالت نهایی به صورت دوایری دو خطی نمایش داده می شود.

مثال

آیا رشته W=aba توسط ماشین مثال قبل، پذیرفته می‌شود؟

حل: بله- نمایش تعلق رشته aba به زبان ماشین:



نحوه پذیرش رشته توسط ماشین: با شروع از حالت q_0، ابتدا سمبل a را می خواند. با توجه به یال های گراف ماشین به حالت q_1 می رود. سپس، سمبل b خوانده شده و ماشین به حالت q_0 می رود. در نهایت سمبل a خوانده شده و ماشین به حالت q_1 می رود. در این لحظه، هم در پایان رشته و هم در حالت پایانی قرار داریم. بنابراین رشته aba پذیرفته می شود. نشان دهید ماشین رشته abb را نمی پذیرد. ■

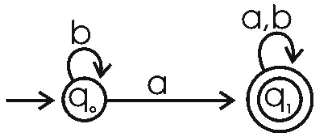
زبان ها و dfa ها

زبان مجموعه ای از تمام رشته های پذیرفته شده توسط اتومات می باشد. زبان پذیرفته شده توسط dfa $M=(q,\Sigma,\delta,q_0,F)$، مجموعه تمام رشته های روی Σ است که توسط M پذیرفته می شوند. فرم صوری آن به صورت $L(M)=\{w\in\Sigma^*:\delta^*(q_0,w)\in F\}$ است. dfa پس از پردازش هر یک از رشته های Σ^*، یا آنها را می پذیرد و یا رد می کند. عدم پذیرش به این معنی است که dfa در یکی از حالت های غیر پایانی متوقف شود.

مثال

عبارت منظم مربوط به DFA زیر را مشخص کنید؟

(q_0 حالت شروع و q_1 حالت پایانی است.)

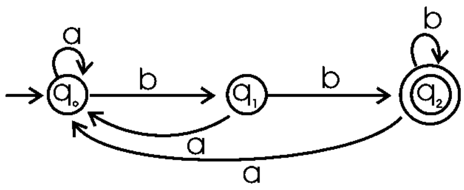


حل: $b^*a(a+b)^*$ ■

مثال

برای عبارت منظم $(a+b)^*bb$، یک DFA رسم کنید. $\Sigma=\{a,b\}$

حل:

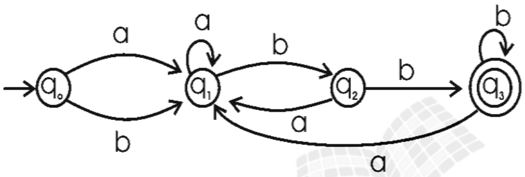


■

مثال

برای عبارت منظم $(a+b)^{+}bb$، یک DFA رسم کنید. $\sum=\{a,b\}$

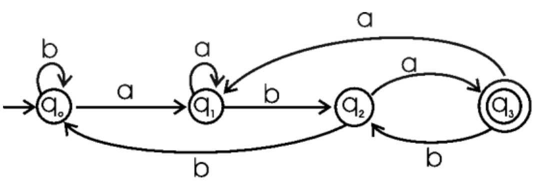
حل:



■

مثال

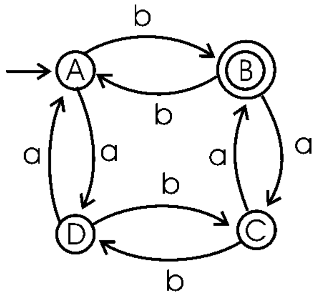
عبارت منظم مربوط به DFA زیر را مشخص کنید؟ $\sum=\{a,b\}$



حل: $(a+b)^{*}aba$ (رشته هایی که به aba ختم می شوند.) ■

مثال

ماشین زیر چه نوع رشته هایی را می پذیرد؟ $\Sigma = \{a,b\}$

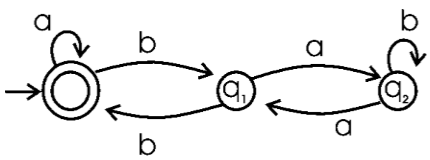


حل: رشته هایی با تعداد زوجی a و تعداد فردی b .

این مثال را با تغییر حالت پایانی به حالت های دیگر، بررسی کنید. به طور نمونه اگر C حالت پایانی بود(بـه جـای B)، آنگـاه چه زبانی را می پذیرفت؟

مثال

عبارت منظم مربوط به DFA زیر را مشخص کنید؟ $\Sigma = \{a,b\}$

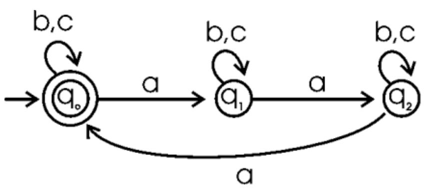


حل: $(a+b(ab^*a)^*b)^*$.

رشته λ نیز پذیرفته می‌شود، چون حالت شروع، حالت پایانی نیز می‌باشد.

مثال

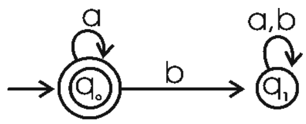
ماشین DFA زیر چه نوع رشته هایی را می‌پذیرد؟ $\Sigma = \{a,b,c\}$



حل: رشته هایی که تعداد a در آنها، مضرب 3 باشد.

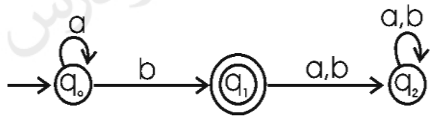
حالت دام یا تله (trap state)

می خواهیم ماشینی رسم کنیم که زبان a^* را روی الفبای $\Sigma=\{a,b\}$ بپذیرد. برای این کار یک DFA با یک حالت رسم می کنیم که هم حالت شروع و هم حالت پایانی است به طوری که یال با برچسب a از آن حالت خارج شده و به همان حالت وارد می شود. در این ماشین اگر قبل یا بعد از حرف a، حرف b ظاهر شود، رشته نباید پذیرفته شود، بنابراین یک حالت دیگر به نام q_1 رسم کرده و با یالی با برچسب b به آن حالت می رویم که خروج از آن ممکن نمی باشد. در شکل زیر این DFA رسم شده که وضعیت q_1 همان وضعیت تله است:



مثال

در DFA زیر، حالت trap را مشخص کنید.

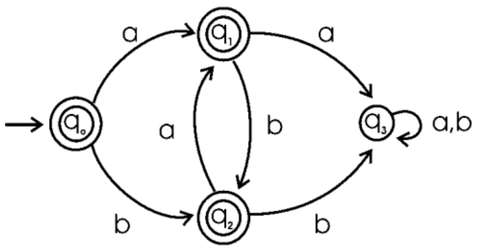


حل: حالت q_2. (زبان ماشین a^*b است.)

مثال

DFA پذیرنده زبانی که رشته های آن شامل aa یا bb نباشد را رسم کنید.

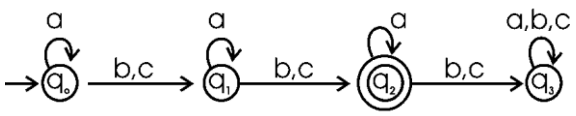
حل: حالت q_3، trap است.



مثال

در الفبای $\Sigma = \{a,b,c\}$ ، DFA پذیرنده زبانی که در رشته های آن تعداد کل b ها و c ها برابر ۲ باشد را رسم کنید.

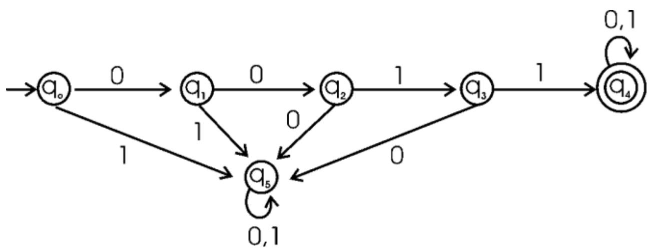
حل: حالت q_3، trap است.



مثال

در الفبای $\Sigma = \{0,1\}$، DFA پذیرنده زبانی که رشته های آن با زیر رشته 0011 آغاز شود را رسم کنید.

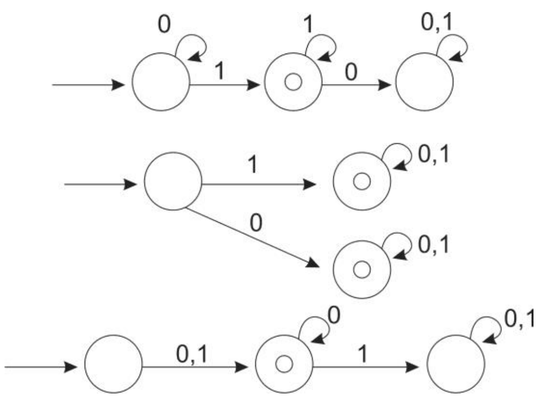
حل: حالت q_5، trap است.



مثال

برای هر یک از زبان های $(0+1)^*1$ و $1(0+1)^*$ و $(0+1)0^*$ یک DFA رسم کنید.

حل: dfa هر کدام به ترتیب از بالا به پاینن رسم شده است:



اصلاح: در شکل وسط، حالت پایینی، حالت trap است.

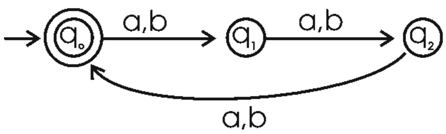
مکمل DFA

برای رسم مکمل یک DFA، کافی است که کلیه حالتهای غیر پایانی را به حالت پایانی و کلیه حالات پایانی را به حالات غیر پایانی تبدیل کنیم. (جهت یالها و مقدار برچسب آنها تغییری نمی‌کند.)

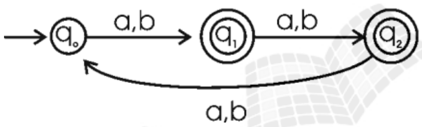
مثال

dfa ای رسم کنید که رشته‌هایی که طول آنها مضربی از 3 نباشد را بپذیرد. ($\Sigma = \{a,b\}$)

حل: ابتدا DFA ای رسم می کنیم که رشته هایی را بپذیرد که طول آنها مضربی از ۳ باشد:



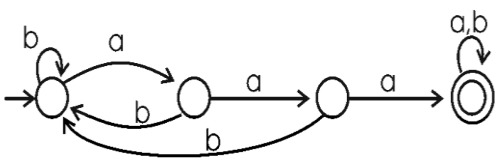
سپس DFA بالا را مکمل می کنیم:



مثال

DFA ای رسم نمایید که زبان $L = \{w:$ در آن وجود ندارد $aaa\}$ را بپذیرد. ($\Sigma = \{a,b\}$)

حل: ابتدا DFA ای رسم می کنیم که زبان $L = \{w:$ باشد w زیر رشته‌ای از $aaa\}$ را بپذیرد:



سسپس DFA بالا را مکمل می کنیم.

اگر $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ و $\hat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ دو DFA باشند، آنگاه:

$$\overline{L(M)} = L(\hat{M})$$

برای به دست آوردن مکمل یک NFA از روی نمودار حالت، باید ابتدا NFA را به DFA تبدیل کرده و سپس مکمل DFA را بدست آورد.

پذیرنده های متناهی نامعین(NFA)

اگر به ازای هر حالت ماشین و هر نماد ورودی به صورت منحصر بفردی حالت بعدی مشخص باشد به آن معین (Deterministic) می گویند. در یک ماشین نامعین (Nondeterministic) در هر لحظه ممکن است چندین انتخاب مختلف موجود باشد. پذیرنده‌های متناهی نامعین(غیرقطعی)، پیچیده تر از انواع معین خود هستند. ماشین نامعین می تواند به ازای دریافت یک ورودی در هر حالت، به چندین حالت مختلف تغییر حالت دهد.

تعریف

یک پذیرنده متناهی نامعین (NFA) بوسیله پنج تایی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ تعریف می شود که در آن Q و Σ و q_0 و F همانند DFA تعریف می شوند، ولی تابع انتقال به صورت $Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \rightarrow 2^Q$ تعریف می‌شود. برد این تابع مجموعه ای از حالات مجاز برای ماشین می باشد.

سه تفاوت عمده بین تعریف NFA و تعریف DFA وجود دارد. در NFA:

۱- محدوده تابع δ در مجموعه توانی 2^Q است. مثلاً اگر وضعیت فعلی q_0 باشد و حرف a خوانده شود، آنگاه هریک از حالتهای q_2, q_1 می‌تواند وضعیت بعدی باشد:

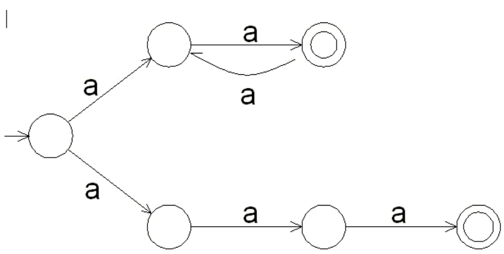
$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$$

۲- λ بعنوان ورودی قابل قبول است. یعنی NFA می تواند بدون استفاده از سمبل ورودی، دست به انتقال بزند. هد می تواند در بعضی انتقال ها حرکت نکند.

۳- $\delta(q_i, a)$ می‌تواند تهی باشد، یعنی هیچ انتقالی برای این وضعیت خاص تعریف نشده است.

مثال

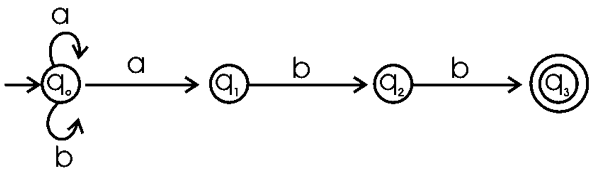
آیا ماشین زیر یک NFA می باشد؟



حل: بله- چون دو انتقال با برچسب a از حالت شروع دارد. اولین انتخاب منجر به پذیرش تمام رشته های دارای تعداد زوجی از a می شود و دومین انتخاب منجر به پذیرش رشته a^3 می شود. زبان پذیرفته شده توسط این ماشین، $L = \{a^{2n} : n \geq 1\} \cup \{a^3\}$ می باشد. ■

مثال

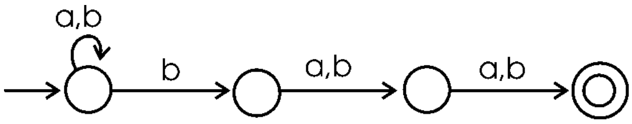
ماشین NFA زیر چه زبانی را می پذیرد؟ $\Sigma = \{a,b\}$



حل: رشته‌هایی را که به زیر رشته abb ختم شوند.(این ماشین dfa نیست. به طور نمونـه، در حالـت q_1، دریافـت a پـیش بینی نشده است یا در q_0 با دریافت a ، دو تغییر حالت ممکن است.) ■

مثال

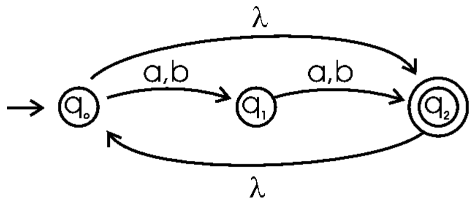
ماشین NFA زیر چه زبانی را می پذیرد؟



حل: رشته های که سومین نماد از سمت راست آنها، b باشد.■

مثال

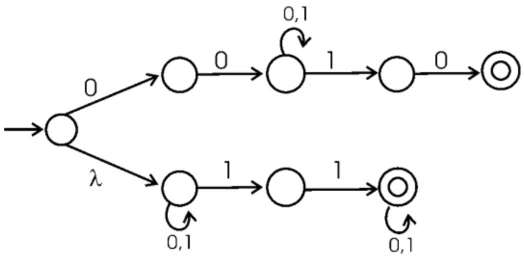
ماشین NFA زیر چه زبانی را می پذیرد؟



حل: ماشین داده شده، رشته‌هایی با طول زوج را می پذیرد. (در تعریف NFA اجازه داشتن یال بـا برچسـب λ را داریم.بـه عبارتی λ بعنوان ورودی قابل قبول است. یعنی ماشین می‌تواند بدون استفاده از سمبل ورودی، دست به انتقال بزند. هد مـی تواند در بعضی انتقال ها حرکت نکند.) ■

مثال

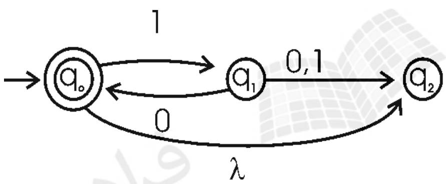
ماشین NFA زیر چه زبانی را می پذیرد؟ $\Sigma = \{0,1\}$



حل: رشته‌هایی که با 00 شروع و به 10 ختم شوند یا شامل زیر رشته 11 باشند. ■

مثال

زبان پذیرفته شده توسط اتومات شکل زیر چیست؟ $\Sigma = \{0,1\}$



حل: اتومات زبان $L = \{(10)^n : n \geq 0\}$ را می پذیرد. ■

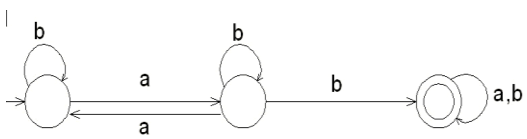
مثال

می دانیم که یک DFA داده شده با 4 حالت، رشته ای به طول 6 را می پذیرد. آیا تعداد اعضای زبان پذیرش شده توسط این ماشین، متناهی است؟

حل: خیر- چون طول رشته پذیرفته شده، از تعداد حالتهای ماشین بیشتر است، بنابراین دارای حلقه می باشد. ماشینی که دارای حلقه است، تعداد اعضای زبان پذیرش شده آن، نامتناهی می باشد.■

مثال

پذیرنده حالت متناهی غیر قطعی زیر چه زبانی را می‌پذیرد.



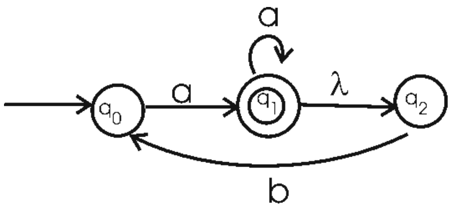
حل: $(b + ab^*a)^* ab^*b(a+b)^*$ ■

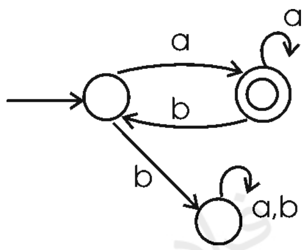
هم ارزی DFA و NFA

دو ماشین متناهی را هم ارز می گویند اگر هر دو زبانی یکسان را بپذیرند. چون به ازای هر زبان معمولا تعداد زیادی پذیرنده وجود دارد، بنابراین هر dfa یا nfa نیز تعداد زیادی پذیرنده هم ارز دارد.

مثال

در شکل زیر دو ماشین هم ارز نشان داده شده است(شکل سمت راست dfa و سمت چپ nfa است)





چند نکته:

۱- به ازای هر زبانی که توسط یک NFA پذیرفته می شود، یک DFA هم وجود دارد که آن را می پذیرد.

۲- کلاس های DFA ها و NFA ها دارای قدرت یکسان می باشند.

۳- برای هر NFA با هر تعداد دلخواه حالت پایانی، یک DFA با فقط یک حالت پایانی، هم ارز با آن NFA وجود دارد.

۴- اگر L یک زبان غیر تهی باشد بطوریکه هر w عضو L، دارای حداقل طول n باشد، آنگاه هر DFA که L را بپذیرد، باید حداقل n+1 حالت داشته باشد.

ارتباط گرامر منظم با ماشین متناهی

می توان با داشتن انتقالات یک ماشین متناهی، گرامر منظم مربوط به زبان تولید شده توسط ماشین را مشخص کرد(و بر عکس). به طور نمونه انتقال $\delta(q_i, a) = q_j$ به قانون $q_i \to aq_j$ تبدیل می شود.

مثال

گرامر منظمی برای زبان $L=\{w: n_a(w), n_b(w)$ هر دو زوج هستند$\}$ روی $\{a,b\}$ که DFA آن به صورت زیر است، بنویسید. (q_0 حالت شروع و پایانی است.)

$$\delta(q_0,a)=q_1, \delta(q_0,b)=q_2$$
$$\delta(q_1,a)=q_0, \delta(q_1,b)=q_3$$
$$\delta(q_2,a)=q_3, \delta(q_2,b)=q_0$$
$$\delta(q_3,a)=q_2, \delta(q_3,b)=q_1$$

حل: از روی انتقالات ماشین، گرامر را می نویسیم:

$$q_0 \to aq_1 \mid bq_2 \mid \lambda$$
$$q_1 \to aq_0 \mid bq_3$$
$$q_2 \to aq_3 \mid bq_0$$
$$q_3 \to aq_2 \mid bq_1$$

■

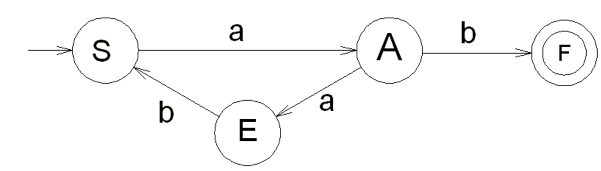
مثال

ماشین متناهی بسازید که زبان تولید شده بوسیله گرامر زیر را بپذیرد.

$$S \to aA$$
$$A \to abS \mid b$$

حل:

گراف انتقالی با سه راس S و A و F ایجاد می کنیم. یالی با برچسب a بین S و A ایجاد می نماییم. سپس راس E را به گونه ای ایجاد می کنیم که مسیری با برچسب ab بین A و S وجود داشته باشد. در نهایت یالی با برچسب b بین A و F ایجاد می کنیم تا ماشین شکل زیر بدست آید.



زبان تولید و پذیرفته شده توسط این گرامر، زبان منظم $L((aab)^*ab)$ خواهد بود. ■

مثال

ماشین متناهی متناظر با گرامر منظم زیر را بدست آورید.

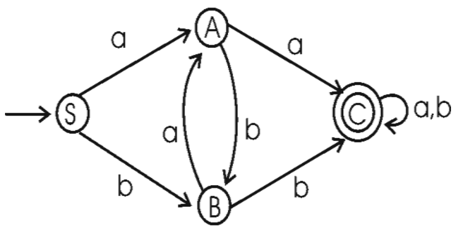
$S \to aA \mid bB$

$A \to aC \mid bB \mid a$

$C \to aC \mid bC \mid a \mid b$

$B \to aA \mid bC \mid b$

حل:



روال تبدیل NFA به DFA

۱- گراف مفروض G_D با راس $\{q_0\}$را ایجاد کرده و آن راس را بعنوان راس شروع در نظر بگیرید.

۲- تا زمانی که همه یال ها در نظر گرفته نشده اند، مراحل زیر را تکرار کنید:

الف- هر یک از رئوس $\{q_i, q_j, ..., q_k\}$ از G_Dرا در نظر بگیرید که برای $a \in \Sigma$ آن هیچ یالی خارج نشود.

ب- $\delta_N^*(q_i, a), \delta_N^*(q_j, a), ..., \delta_N^*(q_k, a)$ را محاسبه کنید.

ج- اجتماع همه این δ_N^* ها را تشکیل دهید. در نتیجه مجموعه $\{q_1, q_m, ..., q_n\}$ بدست می آید.

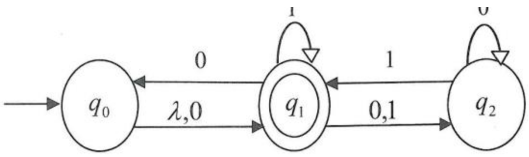
د- در صورت عدم وجود راسی با برچسب $\{q_1, q_m, ..., q_n\}$ در G_D ، این راس را ایجاد کنید. یـالی از $\{q_i, q_j, ..., q_k\}$ بـه $\{q_1, q_m, ..., q_n\}$ به نام a به G_D اضافه کنید.

۳- تمامی حالت های G_D که برچسب آن حاوی حداقل یک $q_f \in F_N$ باشد، بعنوان راس پایانی شناخته می‌شود.

۴- اگر nfa، λ را بپذیرد، راس $\{q_0\}$در G_D نیز، راس پایانی می باشد.

مثال

NFA زیر را به DFA تبدیل کنید.



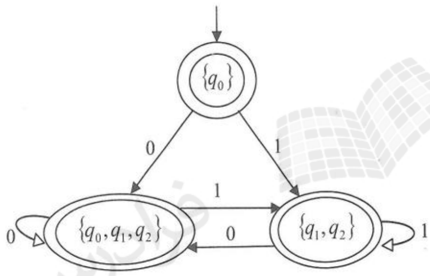
حل:

$\delta(\{q_0\},0)=\{q_0,q_1,q_2\}$, $\delta(\{q_0\},1)=\{q_1,q_2\}$

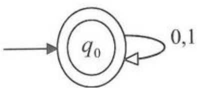
$\delta(\{q_1,q_2\},0)=\{q_0,q_1,q_2\}$, $\delta(\{q_1,q_2\},1)=\{q_1,q_2\}$

$\delta(\{q_0,q_1,q_2\},0)=\{q_0,q_1,q_2\}$, $\delta(\{q_0,q_1,q_2\},1)=\{q_1,q_2\}$

بنابراین داریم:



اما nfa حاصل λ را هم می پذیرد. پس q_0 هم باید وضعیت نهایی باشد در این صورت dfa حاضر همـه رشـته هـا را مـی پذیرد و به طور خلاصه به شکل روبه رو در می آید:



کاهش تعداد حالات در ماشین های متناهی

هر dfa یک زبان منحصر بفرد را تعریف می کند، اما عکس این جمله صحیح نیست،یعنی برای یک زبان ممکـن اسـت چنـد dfa وجود داشته باشد. در عمل ممکن است از بین چند dfa که برای یک زبان وجود دارد، یکی را انتخاب کرد. معمولا ایـن dfa دارای حالات کمتری می باشد. در dfa می توان حالتی که دسترس پذیر نباشد را حذف کرد و بعضـی از حالتهـا را کـه ادغام پذیر هستند را با هم ادغام کرد.

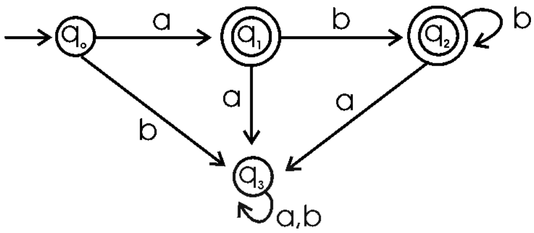
دو حالت p وq یک dfa ، در صورتی ادغام پذیر هستند که به ازای هر $w \in \Sigma^*$ داشته باشیم:

$$\delta^*(q,w)\in F \Rightarrow \delta^*(p,w)\in F \quad , \quad \delta^*(q,w)\notin F \Rightarrow \delta^*(p,w)\notin F$$

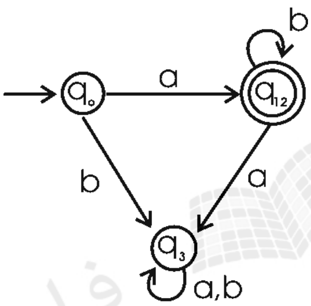
اگر p و q ادغام پذیر بوده و q و r هم ادغام پذیر باشند، آنگاه p و r ادغام پذیر هستند و در نتیجه هر سه حالت هم ادغام پذیر هستند. به عبارتی ادغام پذیر بودن یک رابطه هم ارزی است. (ادغام ناپذیر بودن، اینطور نیست.)

مثال

DFA زیر را کمینه نمایید.

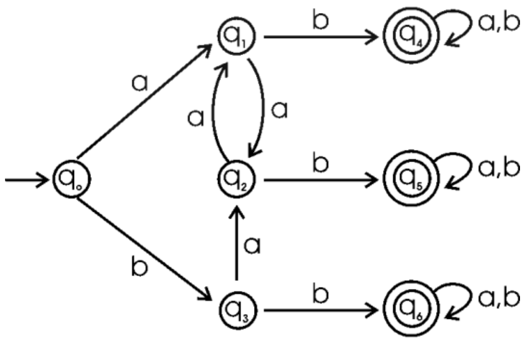


حل: حالت q_1 و q_2 ادغام پذیرند و به جای آنها حالت q_{12} را قرار می‌دهیم:

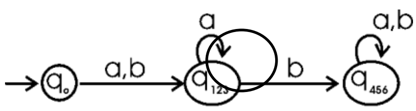


مثال

DFA زیر را کمینه نمایید.



حل: حالت های q_1 و q_2 و q_3 ادغام پذیرند و به جای آنها حالت q_{123} را قرار می‌دهیم. همچنین حالت هـای q_4 و q_5 و q_6 ادغام پذیرند و به جای آنها حالت q_{456} را قرار می‌دهیم.



نحوه تشخیص منظم بودن یک زبان

در فصل های قبل برای اینکه نشان دهیم یک زبان منظم است، عبارت منظم یا گرامر منظم برای آن ارائه دادیم. یک راه دیگر این است که بتوان برای آن یک ماشین متناهی پیدا کرد.

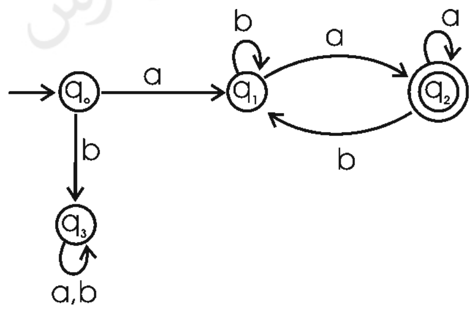
زبان L منظم است اگر و فقط اگر یک DFA مانند M وجود داشته باشد به طوریکه L = L(M).

فرض کنیم r یک عبارت منظم باشد. آنگاه یک NFA وجود دارد که L(r) را می پذیرد. در نتیجه L(r) یک زبان منظم است.

مثال

نشان دهید که زبان $L = \{awa : w \in \{a,b\}^*\}$ منظم است.

حل: برای اثبات منظم بودن زبان داده شده، کافی است که یک DFA برای آن پیدا کنیم. زبان L رشته هایی را می‌پذیرد که با حرف a شروع شده و با حرف a نیز تمام می شود. بین این دو حرف a می تواند هیچ یا تعداد نامحدودی حرف a یا b ظاهر شود.

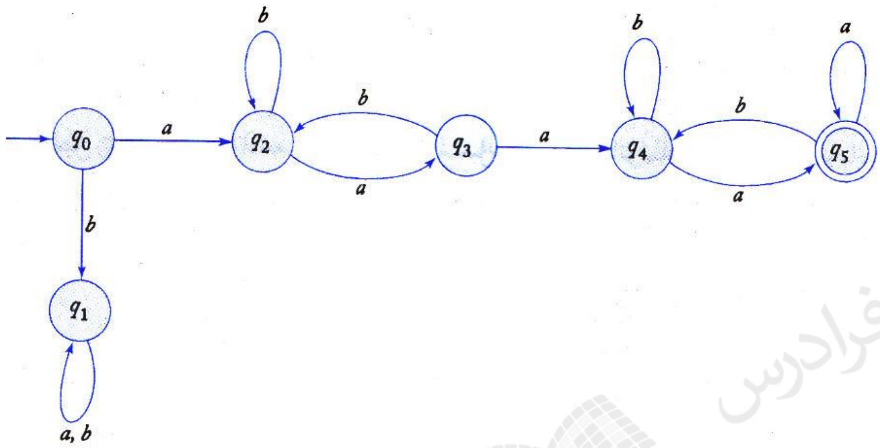


وضعیت q_3 یک تله است و اگر رشته با حرف b شروع شود، ماشین به این حالت می رود.

مثال

با فرض اینکه $L = \{awa : w \in \{a,b\}^*\}$، نشان دهید که زبان L^2 منظم است.

حل: زبان L^2 برابر $L^2 = \{aw_1aaw_2a : w_1, w_2 \in \{a,b\}^*\}$ است. با رسم یک DFA برای این زبان می توان نشان داد که L^2 نیز منظم است.



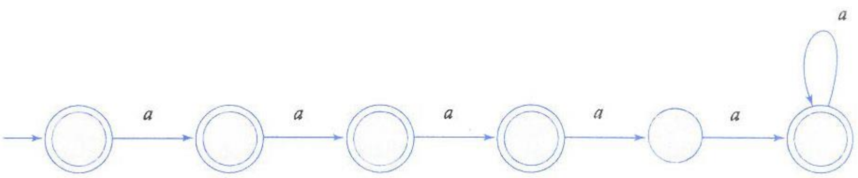
■

اگر زبان مفروض L منظم باشد، L^2 و L^3 و ... هم منظم خواهد بود.

مثال

نشان دهید که زبان $L = \{a^n : n \geq 0, n \neq 4\}$ منظم است؟ $(\Sigma = \{a\})$

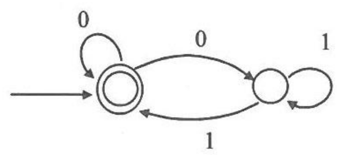
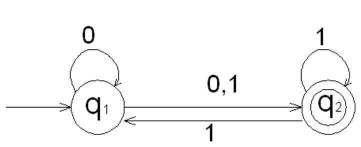
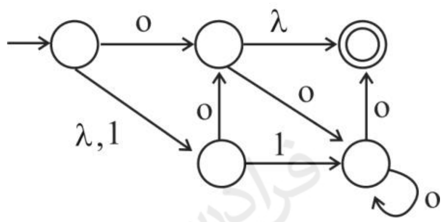
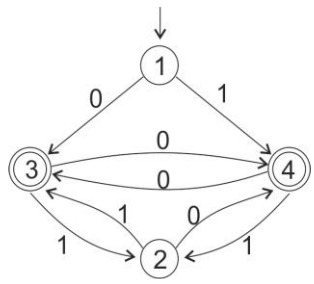
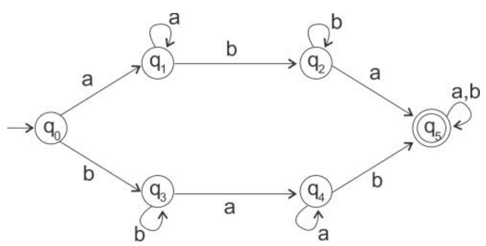
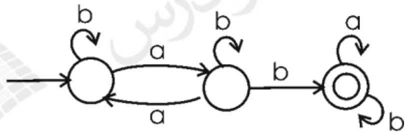
حل: برای اثبات منظم بودن زبان داده شده، کافی است که یک DFA برای آن پیدا کنیم:



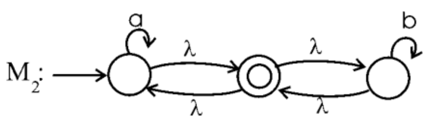
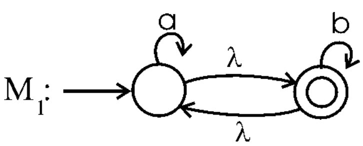
■

تمرین‌های فصل ۳

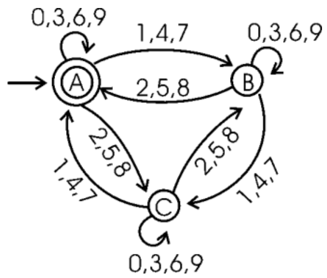
۱- عبارت منظمی معادل زبان هر یک از ماشین‌های زیر را بنویسید.

الف:	ب:
	
پ:	ت:
	
ث:	ج:
	

۲- چه رابطه ای بین $L(M_1)$ و $L(M_2)$ است؟

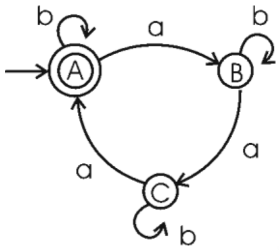
	

۳- چه رشته‌های توسط ماشین زیر پذیرفته می شوند؟

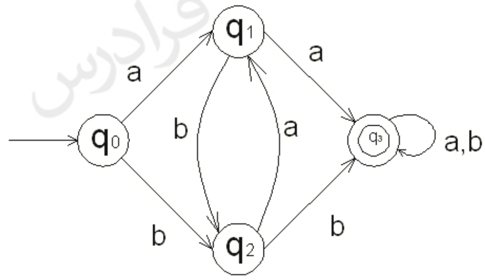


۴- یک DFA برای زبان منظم $(a^*(b+\lambda)a^*)^*$ رسم کنید.

۵- گرامر هم ارز با پذیرنده زیر را بنویسید.



۶- گرامر متناظر با ماشین زیر را بنویسید.



۷- آیا زبان $\{a^nb^ma^k : n+m+k>3\}$ منظم است؟

۸- کدام یک از زبان‌های زیر منظم هستند؟

$L_1=\{a^n :$ n یا ضریب سه است یا ضریب پنج $\}$

$L_2=\{a^n :$ n ضریب سه است و ضریب پنج نیست$\}$

$L_3=\{a^n : n=2^k, k\le 2000\}$

۹- آیا زبان زیر منظم است؟

$L=\{w\in(0,1)^* :$ تعداد 0 ها و 1ها برابر مقدار ثابت $n\ge 0$ باشد.$\}$

۱۰- آیا زبان $L=\{a^n : n=i+jk\}$ منظم است؟ (i و k ثابت و $j=0,1,2,...$)

۱۱- آیا زبان زیر منظم است؟

A} یک DFA است و در مسیر پذیرش w از چند حالت معین A عبور نمی شود. $L=\{w\in L(A):$

۱۲- آیا زبان زیر منظم است؟

$L=\{x^n y^n : x\in(0+1)^*, y\in(0+1)^*, n\geq 0\}$

۱۳- اگر $m(L)$ تعداد حالات DFA مینیمال متناظر با زبان $L\subseteq\{0,1\}^*$ باشد، $m(L)$ چه رابطه ای با $m(L^R)$ دارد؟

۱۴- آیا هر زبان منظمی، معین(قطعی) است؟

۱۵- برای $L(a\phi)$ و $L(\phi^*)$ یک NFA رسم کنید.

۱۶- ثابت کنید که تمام زبانهای متناهی، منظم هستند.

۱۷- منظور از dfa ناقص چیست؟

۱۸- کدام گزاره صحیح است؟

الف- اگر L یک زبان منظم فاقد λ باشد، یک NFA بدون انتقال λ و فقط با یک حالت پایانی وجود دارد که L را می پذیرد.

ب- فرض کنیم r یک عبارت منظم باشد. آنگاه یک NFA وجود دارد که L(r) را می پذیرد. در نتیجه L(r) یک زبان منظم است.

پ- به ازای هر NFA با چندین حالت شروع، یک NFA با دقیقا یک حالت شروع وجود دارد که همان زبان را می‌پذیرد.

۱۹- رشته‌های تولید شده توسط گرامر زیر چه خاصیتی دارند؟

$S\to aA\,|\,bB$

$A\to bbA\,|\,baB\,|\,aS\,|\,b$

$B\to abA\,|\,aaB\,|\,bS\,|\,a$

پاسخ تمرین فصل ۳

۱- عبارت منظم معادل با هر ماشین برابر است با:

الف- $(0+01^*1)^*$

ب- $0^*(0+1)1^*(10^*(0+1)1^*)^*$

پ- $0+(00+1+11)0^*0$

ت- $(0+1)(0+10+11)^*$

ث- $(a^+b^+a+b^+a^+b)(a+b)^*$

ج- $(b+ab^*a)^*ab^*b(a+b)^*$

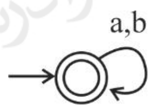
۲- هر دو ماشین، زبان $(a+b)^*$را می پذیرند.

۳- ماشین اعداد بخش پذیر بر ۳ را می‌پذیرد. مانند ۹۷۵ ، ۶۴۷۱ ، ۳۱۵

۴- زبان داده شده را می توان ساده کرد:

$$(a^*(b+\lambda)a^*)^* = ((a^*b+a^*)a^*)^* = (a^*ba^*+a^*)^* = (a+b)^*$$

بنابراین ماشین به صورت زیر است:



۵- گرامر به صورت زیر است:

$A \to bA \mid aB \mid \lambda$

$B \to bB \mid aC$

$C \to bC \mid aA$

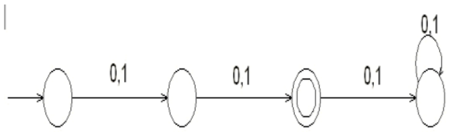
۶- گرامر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} q_0 &\to aq_1 \mid bq_2 \\ q_1 &\to bq_2 \mid aq_3 \mid a \\ q_2 &\to aq_1 \mid bq_3 \mid b \\ q_3 &\to aq_3 \mid bq_3 \mid a \mid b \end{aligned}$$

۷- بله- چون می توان برای آن یک NFA رسم کرد.

۸- همه زبان های داده شده منظم هستند،چون برای هر یک از آنها می توان یک DFA رسم کرد.

۹- بله- چون مقدار n ثابت است و می توان برای آن یک DFA طراحی کرد. به طور مثال اگـر n=2، بـه کمک DFA زیر می توان رشته های زبان را پذیرفت:



۱۰- بله– می توان dfa برای آن رسم کرد. چون i و k ثابت هستند، بنابراین تعداد وضعیت هـا مشـخص و عددی ثابت و متناهی می باشد.($a^{i+jk} = a^i . a^{jk}$)

۱۱- بله- چون برای آن یک DFA طراحی شده است.

۱۲- بله- چند رشته از زبان:

$$L = \{\lambda, 0^5 1^5, 1^2 0^2, (011)^2 (10)^2, (10)^3 (0)^3, \ldots\}$$

۱۳- اگر ماشین DFA ای که زبان L را می پذیرد، به ماشینی که معکوس زبان L (یعنـی L^R) را بپـذیرد، تبدیل کنیم، ممکن است ماشین به NFA تبدیل شود. بنابراین برای قطعی کـردن ماشـین، تعـداد حـالات یعنی $m(L)$ به صورت توانی زیاد می شود. بنابراین $m(L) \le 2^{m(L^R)}$.

۱۴- بله- چون می توان برای آن یک DFA رسم کرد.

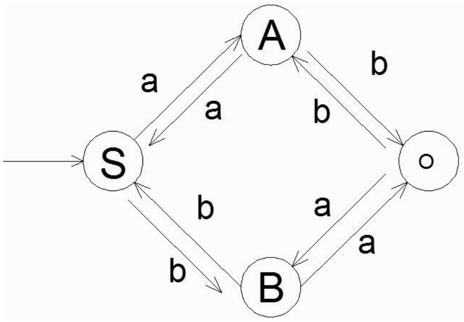
۱۵- ماشین های NFA به صورت زیر است:

۱۶- کافی است یک NFA برای آنها طراحی کنیم. یک q_0 مشترک برای همه رشته های عضو وجود دارد و سپس هر رشته به صورت مجزا برای خود یک وضعیت نهایی دارد که مسیر رسیدن با این وضـعیت نهـایی معادل خود رشته خواهد بود.

۱۷- nfa ای که در آن هیچ انتقال λ وجود ندارد و به ازای هر $q \in Q$ و هر $a \in \Sigma$، $\delta(q,a)$ حـاوی حـداکثر یک عضو باشد را dfa ناقص می گویند. در این dfa ، برای برخی انتقال ها نمی توان حرکتی کرد.

۱۸- همه گزاره ها صحیح هستند.

۱۹- شامل تعداد فردی a و تعداد فردی b هستند. البته می توان FA را رسم کرد و با توجه بـه آن زبـان را تشخیص داد.)



فصل ۴:

زبان و گرامر مستقل از متن

برای ساخت برنامه‌های قدرتمندتر باید تا حدی از قید محـدودیت‌های موجـود در گرامرهـای مـنظم رهـا شـویم. از زبان‌هـای مستقل از متن در طراحی زبان‌های برنامه‌سازی و ساخت کامپایلر استفاده می‌شود.

گرامر مستقل از متن

گرامر مفروض $G=(V,T,S,P)$ در صورتی مستقل از متن خوانده می شود که تمام قوانین P به فرم $A \to x$ باشـند کـه در آن $A \in V$ و $x \in (V \bigcup T)^*$. به طور کلی شرط مستقل از متن بودن این است که در سمت چپ قوانین، فقط یک متغیـر وجود داشته باشد.

زبان L مستقل ازمتن نامیده می شود، اگر و تنها اگر گرامر مستقل ازمتن G وجود داشته باشد بطوریکه $L=L(G)$.

گرامرهای منظم، مستقل از متن نیز هستند. هر زبان منظمی، یک زبان مستقل از متن نیز می باشد.

خانواده زبان های منظم یکی از زیر مجموعه های محض خانواده زبان های مستقل از متن هستند.

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b^n : n \ge 1\}$ را بنویسید.

حل: توسط این گرامر رشته‌های شروع شونده با a که تعداد a و b در آنها برابر است تولید می شود.

$$S \to aSb \mid ab$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b^n : n \ge 0\}$ را بنویسید.

حل: $S \to aSb \mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^nb^{n+1}: n\geq 0\}$ را بنویسید.

حل: $S\to aSb \mid b$.

روش دوم: این زبان با زبان $\{a^nb^n: n\geq 0\}$ فقط در یک b تفاوت دارد(a^nb^nb). بنابراین چون گرامر $\{a^nb^n: n\geq 0\}$ را با قانون $S\to aSb\mid \lambda$ می توان تولید کرد، خواهیم داشت:

$S\to Xb$

$X\to aXb\mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^{n+1}b^n: n\geq 0\}$ را بنویسید.

حل: $S\to aSb\mid a$.

روش دوم: این زبان با $\{a^nb^n: n\geq 0\}$، فقط در یک a تفاوت دارد: aa^nb^n

$S\to aX$

$X\to aXb\mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^{n+3}b^n: n\geq 0\}$ را بنویسید.

حل: $S\to aSb\mid aaa$.

روش دوم: این مثال با $\{a^nb^n: n\geq 0\}$ فقط در سه تا a تفاوت دارد: $aaaa^nb^n$

$S\to aaaX$

$X\to aXb\mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b^{n-3} : n \ge 3\}$ را بنویسید.

حل:زبان را می توان به صورت $\{a^{k+3} b^k : k \ge 0\}$ نیز نشان داد. پس جواب، مانند مثال قبل است. ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b^{2n} : n \ge 0\}$ را بنویسید.

حل: $S \to aSbb \mid \lambda$

روش دوم:

$$S \to aSA \mid \lambda$$
$$A \to bB$$
$$B \to b$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^{n+2} b^{3n} : n \ge 0\}$ را بنویسید.

حل: $S \to aSbbb \mid aa$ ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b c^{2n} : n \ge 0\}$ را بنویسید.

حل: $S \to aScc \mid b$ ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n b^n : n \ge 0\}$ را بنویسید. (n مضربی از ۳ نیست)

حل: $S \to aaaSbbb \mid aabb \mid ab$ ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^{2n+2}b^{n+2}:n\geq 0\}$ را بنویسید.

حل:

$$S\rightarrow aXb$$
$$X\rightarrow aaXb\,|\,ab$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^nbc^m:n\neq m\}$ را بنویسید.

$$S\rightarrow aSc\,|\,aS\,|\,Sc\,|\,ab\,|\,bc$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^nb^na^kb^k:n\geq 0,k\geq 0\}$ را بنویسید.

حل:

$$S\rightarrow MM$$
$$M\rightarrow aMb\,|\,\lambda$$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^nb^n:n\geq 0\}\cup\{b^na^n:n\geq 0\}$ را بنویسید.

حل: کافی است با دستور $S\rightarrow S_1\,|\,S_2$ ، گرامر $\{a^nb^n\}$ و گرامر $\{b^na^n\}$ را با هم ترکیب کرد:

$$S\rightarrow S_1\,|\,S_2$$
$$S_1\rightarrow aS_1b\,|\,\lambda$$
$$S_2\rightarrow bS_2a\,|\,\lambda$$

■

مثال

فرض کنید $L=\{a^nb^n : n\geq 0\}$ باشد. گرامری برای زبان L^* بنویسید.

حل:

$$S\rightarrow SA\,|\,\lambda$$
$$A\rightarrow aAb\,|\,\lambda$$

■

مثال

گرامری برای زبان $L=\{a^nb^k : 2n\leq k\leq 3n\}$ بنویسید. $(n\geq 0, k\geq 0)$

حل: با $S\rightarrow aSbb\,|\,\lambda$ زبان $\{a^nb^{2n} : n\geq 0\}$ و با $S\rightarrow aSbbb\,|\,\lambda$ زبان $\{a^nb^{3n} : n\geq 0\}$ را تولید می‌کنیم:

$$S\rightarrow aSbb\,|\,aSbbb\,|\,\lambda$$

■

مثال

با توجه به مثال قبل، نحوه تولید رشته a^3b^7 را مشخص کنید.

حل:

$$S\Rightarrow aSbb\Rightarrow aaSbbbb\Rightarrow aaaSbbbbbbb\Rightarrow aaabbbbbbb$$

دو بار از $S\rightarrow aSbb$ و یکبار از $S\rightarrow aSbbb$ و در آخر از $S\rightarrow\lambda$ استفاده می کنیم.

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^k : k > n\}$ را بنویسید. $(n \geq 0, k \geq 0)$

حل: توسط $X \to aXb$ به تعداد مساوی a و b و به کمک $B \to bB \mid b$ ، یک یا چند b تولید می شود:

$S \to XB$
$X \to aXb \mid \lambda$
$B \to bB \mid b$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^k : n > k\}$ را بنویسید. $(n \geq 0, k \geq 0)$

حل: توسط $A \to aA \mid a$ ، یک یا چند a و توسط $X \to aXb$ به تعداد مساوی a و b تولید می شود:

$S \to AX$
$A \to aA \mid a$
$X \to aXb \mid \lambda$

مثال

یک گرامر مستقل از متن برای زبان $L = \{a^n b^k : n \neq k\}$ بنویسید.

حل: کافی است دو حالت $n > k$ و $k > n$ که در دو مثال قبل بررسی شد را با هم ترکیب کرد.

$S \to AX \mid XB$

$X \to aXb \mid \lambda$

$A \to aA \mid a$

$B \to bB \mid b$

مثال

گرامری بنویسید که زبان $L=\{a^n b^n c^k : n>0, k>0\}$ را تولید کند.

حل: توسط $X \to aXb \mid ab$ زبان $\{a^n b^n : n>1\}$ و توسط $Y \to cY \mid c$ زبان $\{c^k : k>0\}$، را تولید می کنیم. با دستور $S \to XY$ این دو را کنار هم قرار می دهیم.

$S \to XY$

$X \to aXb \mid ab$

$Y \to cY \mid c$

■

مثال

گرامری بنویسید که زبان $L=\{a^k b^n c^n : n>0, k>0\}$ را تولید کند.

حل: توسط قانون $X \to aX \mid a$ زبان $\{a^k : k>0\}$ و توسط $Y \to bYc \mid bc$ زبان $\{b^n c^n : n>0\}$ را تولید می کنیم. با دستور $S \to XY$ این دو را کنار هم قرار می دهیم.

$S \to XY$

$X \to aX \mid a$

$Y \to bYc \mid bc$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k :\ m \le k\}$ بنویسید.

$(n \ge 0, m \ge 0, k \ge 0)$

حل: توسط $A \to aA \mid \lambda$ زبان a^* و توسط دیگر قوانین $\{b^m c^k : m \le k\}$، را می‌سازیم.

$S \to AX$
$A \to aA \mid \lambda$
$X \to bXc \mid Y$
$Y \to Yc \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k=n+m\}$ بنویسید. $(n\ge 0, m\ge 0, k\ge 0)$

حل: می توان زبان را به صورت $a^n b^m c^m c^n$ نشان داد. قسمت $b^m c^m$ با X تولید می‌شود.

$S \to aSc \mid X$
$X \to bXc \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : n=k+m\}$ بنویسید. $(n\ge 0, m\ge 0, k\ge 0)$

حل: می‌توان زبان را به صورت $a^k a^m b^m c^k$ نشان داد. قسمت $a^m b^m$ با X تولید می‌شود.

$S \to aSc \mid X$
$X \to aXb \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : m=n+k\}$ بنویسید. $(n\ge 0, m\ge 0, k\ge 0)$

حل: می‌توان زبان را به فرم $a^n b^n b^k c^k$ نشان داد. قسمت $a^n b^n$ با X و قسمت $b^k c^k$ با Y تولید می‌شود.

$S \to XY$
$X \to aXb \mid \lambda$
$Y \to bYc \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k=|n-m|\}$ بنویسید. $(n\ge 0, m\ge 0, k\ge 0)$

حل: شرط به معنی $k=n-m$ و $k=-(n-m)$ است. ایـن دو حالـت را مـی تـوان بـه ترتیـب بـه صـورت $n=k+m$ و $m=n+k$ نشان داد. این حالتها در مثالهای قبل بررسی شد و باید با هم ترکیب شوند.

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k>n+m\}$ بنویسید. $(n\geq 0, m\geq 0, k\geq 1)$

حل: کافی است زبان را به صورت $a^n b^m c^+ c^m c^n$ نشان داد. قسمت $b^m c^+ c^m$ با X تولید می شود.

$$S \to aSc \mid X$$
$$X \to bXc \mid cY$$
$$Y \to cY \mid \lambda$$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k<n+m\}$ بنویسید. $(n\geq 0, m\geq 0, k\geq 0)$

حل: زبان را به صورت $a^n (a+b)^+ b^m c^m c^n$ نشان می‌دهیم.

$$S \to aSc \mid aS \mid aX \mid bX$$
$$X \to bXc \mid bX \mid \lambda$$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k\neq n+m\}$ بنویسید. $(n\geq 0, m\geq 0, k\geq 0)$

حل: شرط به معنی $k>n+m$ یا $k<n+m$ است. در نتیجه این دو حالت که در مثالهای قبل بررسی شد را با هم ترکیب می‌کنیم.

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^m c^k : k=n.m\}$ بنویسید.

حل: نمی توان یک گرامر مستقل از متن برای این زبان نوشت. پس این زبان مستقل از متن نیست.

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{(ab)^n(cd)^n : n\geq 1\}$ بنویسید.

$S \to aXd$
$X \to bSc \mid bc$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{(ab)^n(cde)^n : n\geq 1\}$ بنویسید.

$S \to aXde$
$X \to bSc \mid bc$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{aa(bc)^n be(dde)^n : n\geq 0\}$ بنویسید.

$S \to aaX$
$X \to bYe$
$Y \to cXdd \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{ab(bbaa)^n bba(ba)^n \mid n\geq 0\}$ بنویسید.

حل: در جملات این زبان ، تعداد bbaa با ba برابر است.

$S \to abX$
$X \to bbYa$
$Y \to aaXb \mid \lambda$

■

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L=\{a^n b^k c^k d^n : n\geq 0, k\geq 1\}$ بنویسید.

$S \to aSd \mid bXc \mid \lambda$
$X \to bXc \mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w:n_a(w)=n_b(w)\}$ را بنویسید.

حل: زبان تولید شده شامل رشته‌هایی با تعداد a و b های برابر است.(جملات با a یا b شروع می‌شوند.)

$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w:n_a(w)=n_b(w)+1\}$ را بنویسید.

حل: تعداد a ها یکی بیشتر از تعداد b ها می باشد.

$S \to XaX$

$X \to XX \mid aXb \mid bXa \mid \lambda$

به طور نمونه رشته ababa را تولید می کند که شامل سه تا a و دو تا b است. نحوه تولید:

$S \Rightarrow XaX \Rightarrow aXbaX \Rightarrow abaX \Rightarrow ababXa \Rightarrow ababa$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w:n_a(w)>n_b(w)\}$ را بنویسید.

حل: تعداد a ها بیشتر از تعداد b ها می باشد.

$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid aS \mid Sa \mid a$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w:|w| \bmod 3 \geq |w| \bmod 2\}$ را بنویسید. ($\Sigma=\{a\}$)

حل: طول رشته باید 6k، 3k+1 و یا 3k+2 باشد.

$S \to aX \mid aaX \mid Y$
$X \to aaaX \mid \lambda$
$Y \to aaaaaaY \mid \lambda$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w\in\{a,b\}^* : ww^R\}$ را بنویسید.

حل: جمله های این زبان مانند abba است که نیمه دوم، معکوس نیمه اول است. $S\to aSa\,|\,bSb\,|\,\lambda$ ■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{w\in\{a,b\}^+ : ww^R\}$ را بنویسید.

حل: $S\to aSa\,|\,bSb\,|\,aa\,|\,bb$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $\{w\in\{a,b\}^* : w=w^R\}$ را بنویسید.

حل: جمله های زبان این گرامر مانند aba است که از هر دو طرف یکسان خوانده می شوند.

$$S\to aX\,|\,bY\,|\,\lambda$$
$$X\to Sa\,|\,\lambda$$
$$Y\to Sb\,|\,\lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{a^n ww^R b^n : n\ge 1, w\in\{a,b\}^*\}$ را بنویسید.

$$S\to aSb\,|\,aMb$$
$$M\to aMa\,|\,bMb\,|\,\lambda$$

■

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L=\{uvwv^R : u,v,w\in\{a,b\}^+, |u|=|w|=2\}$ را بنویسید.

$$S\to XY$$
$$X\to aa\,|\,bb\,|\,ab\,|\,ba$$
$$Y\to aYa\,|\,bYb\,|\,aXa\,|\,bXb$$

■

مثال

گرامر مستقل از متن زیر چه زبانی را تولید می کند؟

$$S \to AB \mid \lambda$$
$$A \to 1A \mid S$$
$$B \to 0B \mid S$$

حل: زبان گرامر داده شده، زبان منظم $(1^*0^*)^+$ است. گرامر فوق یک گرامر مستقل از متن است که زبان منظم تولید می‌کند. ■

مثال

گرامر مستقل از متن زیر چه زبانی را تولید می کند؟

$$S \to XYZ \mid \lambda$$
$$X \to aX \mid S$$
$$Y \to bY \mid S$$
$$Z \to cZ \mid S$$

حل: زبان گرامر داده شده، زبان منظم $(a^*b^*c^*)^+$ است. گرامر فوق یک گرامر مستقل از متن است که زبان منظم تولید می‌کند.■

گرامر منظم فقط زبان منظم تولید می کند، اما گرامر مستقل از متن علاوه بر زبان مستقل از متن، می تواند زبان منظم هم تولید کند.

گرامر ساده (S–گرامر)

گرامر مستقل از متن $G=(V,T,S,P)$ در صورتی گرامر ساده نامیده می شود که تمامی قوانین آن به فرم $A \to aX$ باشند که در آن $X \in V^*$ و $a \in T$ و $A \in V$ و هر زوج (A,a) حداکثر یک بار در P وجود داشته باشد.

مثال

گرامر زیر یک گرامر ساده نمی باشد، چون زوج (S,a) در دو قانون ۱و۳ وجود دارد.

$S \to aS$
$S \to bSS$
$S \to aSS$
$S \to c$

■

مثال

یک s- گرامر برای $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ بنویسید.

$S \to aA$
$A \to aAB \mid b$
$B \to b$

■

اگر G یک گرامر ساده باشد، آنگاه هر رشته w عضو L(G) را می توان با مجموعه عملیات های متناسب با $|w|$ تجزیه کرد.

بسیاری از ویژگی های زبان های برنامه سازی، بوسیله گرامرهای ساده قابل توصیف هستند. در کامپایلرها بیشتر از گرامرهای LL و RR استفاده می شود.

بسته بودن زبان های مستقل از متن

خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت اجتماع، الحاق، بستار ستاره ای، معکوس و هم ریختی بسته است و تحت اشتراک، مکمل گیری و تفاضل بسته نیست.

مثال

نشان دهید که خانواده زبان‌های مستقل از متن،تحت اشتراک بسته نیستند.

حل: دو زبان L_1 و L_2 مستقل از متن هستند، چون برای آنها می توان گرامر مستقل از متن نوشت:

$L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$

$L_2 = \{a^n b^m c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$

اما اشتراک این دو زبان یعنی $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ ، مستقل از متن نیست.

■

اگر L_1 مستقل از متن و L_2 یک زبان منظم باشد، آنگاه $L_1 \cap L_2$ مستقل از متن است. این خاصیت، بسته بودن تحت اشتراک منظم خوانده می شود.

مثال

آیا زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 0, n \neq 3\}$ مستقل از متن است؟

حل: می توان زبان L را به صورت $L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cap \overline{L_1}$ نوشت که $L_1 = \{a^3 b^3\}$ است. بنابراین زبان L از اشتراک یک زبان مستقل از متن با زبان منظم تشکیل شده که با توجه به نکته قبل، زبان L مستقل از متن است. (علت منظم بودن $\overline{L_1}$: زبان L_1 متناهی است، بنابراین منظم نیز هست.از طرفی زبان‌های منظم تحت مکمل گیری بسته هستند.) ■

مثال

آیا زبان $L = \{w \in \{a,b,c\}^* : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$ ، مستقل از متن است؟

حل: خیر- اشتراک این زبان با زبان منظم $L(a^* b^* c^*)$ برابر $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ می باشد که می دانیم مستقل از متن نمی باشد. بنابراین L مستقل از متن نیست. (با توجه به قضیه اشتراک منظم) ■

مثال

آیا مکمل زبان $L=\{w \in \{a,b,c\}^* : n_a(w)=n_b(w)=n_c(w)\}$ ، مستقل از متن است؟

حل: بله - مکمل این زبان از اجتماع چهار حالت زیر تشکیل شده:

۱- $n_a(w)<n_b(w)$ ۲- $n_a(w)>n_b(w)$ ۳- $n_a(w)<n_c(w)$ ۴- $n_a(w)>n_c(w)$

قبلا نشان داده شد که تمامی این چهار حالت مستقل از متن هستند(برای آنها گرامر مستقل از متن نوشته شد.) از آنجا که زبان‌های مستقل از متن تحت اجتماع بسته هستند، اجتماع این چهار حالت نیز مستقل از متن است.■

مثال

نشان دهید زبان‌های مستقل از متن تحت متمم بسته نیستند.

حل: زبان های زیر و متمم آنها مستقل از متن هستند:

$L_1=\{a^nb^nc^m : n\ge 0, m\ge 0\}$ $L_2=\{a^nb^mc^m : n\ge 0, m\ge 0\}$

بنابراین $L=\overline{L_1}\cup\overline{L_2}$ مستقل از متن است. متمم زبان L برابر است با:

$$\overline{L}=\overline{\overline{L_1}\cup\overline{L_2}}=L_1\cap L_2$$

حاصل $L_1\cap L_2$ برابر $\{a^nb^nc^n : n\ge 0\}$ است که مستقل از متن نیست.■

مثال

فرض کنید $L=\{a^nb^n : n\ge 0\}$، باشد که زبانی مستقل از متن است. آیا زبان L^* نیز مستقل از متن است؟

حل: بله- چون می‌توان برای آن یک گرامر مستقل از متن به صورت زیر نوشت:

$$S\to SA \mid \lambda$$
$$A\to aAb \mid \lambda$$

■

برای اینکه ثابت کنیم یک زبان مستقل از متن نیست، کافی است حاصل اجتماع آن با یک زبان مستقل از متن، مستقل از متن نباشد. چون زبان‌های مستقل از متن نسبت به عمل اجتماع بسته هستند.

اگر L_1 مستقل از متن و L_2 یک زبان منظم باشد، آنگاه $L_1 - L_2$ مستقل از متن است. این خاصیت، بسته بودن تحت تفاضل منظم خوانده می شود.

اگر زبانی و متمم آن هر دو مستقل از متن باشند، آنگاه آن زبان لزوما منظم نیست.

لم تزریق برای زبان های مستقل از متن

به کمک لم تزریق می توان تشخیص داد که یک زبان مستقل از متن نیست.

لم تزریق: فرض کنید L یک زبان مستقل از متن نامتناهی باشد. آنگاه عدد صحیح و مثبت m وجود دارد، بطوریکه هر w متعلق به L با فرض $|w| \geq m$ را می توان به صورت $w = uvxyz$ با شرایط $|vxy| \leq m$ و $|vy| \geq 1$ چنان تجزیه کرد که به ازای هر $i = 0,1,2,...$ داشته باشیم: $uv^i xy^i z \in L$

مثال

به کمک لم تزریق، نشان دهید که زبان $L = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$ مستقل از متن نیست.

حل: فرض کنیم که L مستقل از متن باشد. حال رشته $w = a^n b^n c^n$ متعلق به L را به ۵ قسمت تجزیه کرد:

$x = a^n, y = b, z = b^{n-2}, u = b, v = c^n$

حال باید به ازای تمام $i \geq 0$ ، رشته $uv^i xy^i z \in L$، متعلق به L باشد، ولی به ازای i=2 این چنین نیست: $a^n b^i b^{n-2} b^i c^n = a^n b^2 b^{n-2} b^2 c^n = a^n b^{n+2} c^n \notin L$

تذکر مهم: با اعمال قوانین لم تزریق روی زبان $L = \{a^n b^n : n > 0\}$، متوجه می‌شویم که به ازای هر مقدار i ، رشته تزریق شده در L است. از این موضوع نمی‌توان نتیجه گرفت که L مستقل از متن است و فقط می‌توان گفت که از لم تزریق نتوانستیم نتیجه‌ای بگیریم.

مثال

توسط لم تزریق می‌توان نشان داد که زبانهای زیر مستقل از متن نمی‌باشند:

$\{a^n b^m :$ n اول است یا m اول است $\}$	$\{ww : w \in \{a,b\}^*\}$
$\{a^n b^m :$ n اول است و m اول نیست $\}$	$\{ww^R w : w \in \{a,b\}^*\}$
$\{a^n b^m :$ m,n هر دو اول هستند $\}$	$\{w : n_a(w) < n_b(w) < n_c(w)\}$
$\{a^n b^m : n = m^2\}$	$\{w : n_a(w) / n_b(w) = n_c(w)\}$
$\{a^n b^m : n \le m^2\}$	$\{w : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$
$\{a^n b^m c^k : k = mn\}$	$\{w \in \{a,b,c\}^* : n_a^2(w) + n_b^2(w) = n_c^2(w)\}$
$\{a^n b^n c^m : n \ne m\}$	$\{a^n :$ n یک عدد اول است $\}$
$\{a^n b^m c^k : k > n, k > m\}$	$\{a^{n!} : n > 0\}$
$\{a^n b^m c^k : n < m, n \le k \le m\}$	$\{a^{n^2} : n \ge 0\}$
	$\{a^{nm} :$ m,n هر دو اول هستند $\}$
	$\{a^n b^m a^n b^m : n \ge 0, m \ge 0\}$

گرامر خطی

گرامر خطی،گرامر مستقل از متنی است که در سمت راست تمام قواعد آن، حداکثر یک متغیر وجود داشته باشد. زبان مستقل از متن L در صورتی خطی خوانده می شود که گرامر مستقل از متن خطی G وجود داشته باشد، بطوریکه $L = L(G)$ باشد.

مثال

آیا زبان $\{a^nb^m : m \le n \le 2m-1\}$ خطی است؟

حل: بله- چون می توان یک گرامر خطی برای آن نوشت:

$$S \to aAb \mid aaBb$$
$$A \to aAb \mid \lambda$$
$$B \to aaBb \mid aBb \mid ab \mid b$$

■

مثال

آیا زبان $\{a^nb^nc^m : n \ge 0, m \ge 0\}$ خطی است؟

حل: بله- چون می توان یک گرامر خطی برای آن نوشت:

$$S \to Sc \mid aAb \mid \lambda$$
$$A \to aAb \mid \lambda$$

■

مثال

زبان $\{a^nb^n : n \ge 0\}$ خطی است، چون می توان یک گرامر خطی برای آن نوشت. ■

مثال

نشان دهید زبان های خطی تحت اشتراک بسته نمی باشند.

حل: دو زبان زیر خطی هستند، چون می توان برای آنها یک گرامر خطی نوشت:

$$L_1 = \{a^nb^nc^m : n \ge 0, m \ge 0\}$$

$$L_2 = \{a^nb^mc^m : n \ge 0, m \ge 0\}$$

اشتراک این دو زبان برابر است با:

$$L_1 \cap L_2 = \{a^nb^nc^n : n \ge 0\}$$

این زبان خطی نیست. (حتی مستقل از متن هم نیست)

■

چند نکته:

۱- تمامی زبان های خطی، مستقل از متن هستند. اما راجع به حالت عکس، نمی توان با قاطعیت حرفی زد.

۲- خانواده زبان های خطی یکی از زیر مجموعه های مناسب خانواده زبان های مستقل از متن هستند.

۳- خانواده زبان های خطی، تحت اجتماع و هم ریختی و معکوس بسته است اما تحت اشتراک و الحاق بسته نیست.

۴- اگر L_1 خطی و L_2 منظم باشد، آنگاه L_1L_2 یک زبان خطی است.

لم تزریق برای زبان‌های خطی:

فرض کنید L یک زبان خطی نامتناهی باشد. آنگاه عدد صحیح و مثبت m وجود دارد، بطوریکه هر w متعلق به L با فرض $|w| \geq m$ را می توان به صورت $w = uvxyz$ با شرایط $|uvyz| \leq m$ و $|vy| \geq 1$ چنان تجزیه کرد که به ازای هر $i = 0,1,2,...$ داشته باشیم: $uv^i xy^i z \in L$

مثال

به کمک لم تزریق می توان نشان داد که زبان $\{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)\}$ خطی نمی باشد.■

تمرین فصل ۴

۱- گرامر G و زبان L_1 به صورت زیر مفروض است. آیا $L_1 = L(G)$ ؟

$G : S \rightarrow aSb \mid SS \mid \lambda$

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)\}$

۲- آیا گرامرهای زیر هم ارز می باشند؟

$G_1 : S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid a$

$G_2 : S \rightarrow aSb \mid bSa \mid a$

۳- گرامرهای زیر چه زبانی را تولید می کنند؟

الف	ب	پ	ت
$S \rightarrow AB$ $A \rightarrow xAy \mid \lambda$ $B \rightarrow zB \mid \lambda$	$S \rightarrow AB$ $A \rightarrow xAy \mid \lambda$ $B \rightarrow yBz \mid \lambda$	$S \rightarrow xSz \mid A$ $A \rightarrow yAz \mid \lambda$	$S \rightarrow Sz \mid Az$ $A \rightarrow xAy \mid xy$

۴- گرامرهای زیر چه زبانی را تولید می کنند؟

الف	ب	پ	ت
$S \rightarrow aSb \mid a \mid b$	$S \rightarrow AB$ $A \rightarrow xA \mid \lambda$ $B \rightarrow yBz \mid \lambda$	$S \rightarrow AM \mid MB$ $M \rightarrow aMb \mid \lambda$ $A \rightarrow aA \mid a$ $B \rightarrow bB \mid b$	$S \rightarrow aAb \mid bBa$ $A \rightarrow aaAb \mid ab$ $B \rightarrow bBa \mid a$

۵- گرامرهای زیر چه زبانی را تولید می کنند؟

الف	ب	پ	ت
$S \rightarrow aA$ $A \rightarrow bBaa$ $B \rightarrow ccAd \mid \lambda$	$S \rightarrow abA$ $A \rightarrow cdBb$ $B \rightarrow aAba \mid \lambda$	$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid AA$ $A \rightarrow 0A \mid A1 \mid \lambda$	$S \rightarrow aSb \mid bY \mid Ya$ $Y \rightarrow aY \mid bY$

۶- گرامر زیر، چه زبانی را توصیف می‌کند؟

$S \rightarrow ABC$
$A \rightarrow 0A1 \mid \lambda$
$B \rightarrow 1B \mid 1$
$C \rightarrow 1C0 \mid \lambda$

۷- دو گرامر معادل با گرامر $S \rightarrow SS \mid (S) \mid \lambda$ بنویسید.

۸- یک گرامر مستقل از متن برای زبان زیر بنویسید.

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(v) \geq n_b(v)$: برای هر v پیشوند w }

$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w),\ n_a(v) \geq n_b(v)$: برای هر v پیشوند w }

۹- آیا زبان زیر مستقل از متن است؟

$L = \{a^n b^n : n \geq 0,$ n مضربی از ۵ نیست. }

۱۰- گرامری بنویسید که همه رشته های دارای حداقل سه a را تولید کند. $\Sigma = \{a,b\}$

۱۱- گرامر مستقل از متنی برای مجموعه تمام عبارات منظم روی الفبای {a,b} بنویسید.

۱۲- گرامری برای مجموعه اعداد صحیح در C بنویسید. (بدون محدویت برای تعداد ارقام)

۱۳- کدام یک از زبانهای زیر، مستقل از متن است؟

الف- $L = \{a^n w w^R a^n : w \in (a+b)^*, n \geq 0\}$

ب- $L = \{a^m c b^n : m \neq n\} \bigcup \{a^m d b^{2m} : m \geq 0\}$

پ- $L = \{a^n b^m c^n : n \geq m \geq 0\} \bigcup \{a^i b^j c^i : j > i \geq 0\}$

ت- $L = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\} \bigcap \{a^{2n} b^{2n} c^{2m} : n \geq 0, m \geq 0\}$

ث- $L = \{a^* b^* c^*\} \bigcap \{w : w \in (a+b+c)^*,\ n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$

۱۴- گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{(abc)^n (defg)^n : n \geq 1\}$ بنویسید.

۱۵- گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a(bcd)^n bce(fe)^n : n \geq 0\}$ بنویسید.

۱۶- گرامر تولید کننده هر زبان را بنویسید.

الف- $L = \{w : |w| \bmod 3 \neq |w| \bmod 2\}$ ($\Sigma = \{a\}$)

ب- $\Sigma = \{a,b\}$ $L = \{w : n_a(w) = 2n_b(w)\}$

پ- $\Sigma = \{a,b,c\}$ $L = \{w : n_a(w) = n_b(w) + 1\}$

ت- $L = \{w \in \{a,b,c\}^* : n_a(w) + n_b(w) < n_C(w)\}$

ث- $L = \{w \in \{a,b,c\}^* : n_a(w) + n_b(w) > n_C(w)\}$

ج- $L = \{a^n b^m c^k : n + 2m = k\}$

چ- $L = \{a^n b^m c^k : n = m \ or \ m \leq k\}$

ح- $L = \{w_1 c w_2 : w_1, w_2 \in \{a,b\}^+, w_1 \neq w_2{}^R\}$

۱۷- با توجه به زبان $L = \{a^m b^m : m \geq 0\}$، آیا $L^3 \cap L^4$ مستقل از متن است؟

۱۸- آیا $L_1 \cap L_2 \cap L_3$، مستقل از متن است؟

$L_1 = \{a^p b^q a^p b^s : p,q,s \geq 0\}$

$L_2 = \{a^p b^p a^r b^s : p,r,s \geq 0\}$

$L_3 = \{a^p b^q a^r b^p : p,q,r \geq 0\}$

۱۹- آیا زبان L ، مستقل از متن است؟

$L = \{a^i b^j c^k : i,j,k \geq 0\} \cap \{w \in \{a,b,c\}^* : |w|_a = |w|_b\}$

۲۰- آیا متمم زبان $L = \{0^n 1^n 0^n : n \in N\}$ مستقل از متن است؟

۲۱- با توجه به زبان $L = \{(ab)^n (cd)^n : n \geq 0\}$ ، آیا L^* مستقل از متن است؟

۲۲- با فرض اینکه $L \subseteq \{1\}^*$ یک زبان باشد، در مورد نوع زبان L چه می توان گفت؟

۲۳- فرض کنید L_1 زبانی منظم و L_3, L_2 زبان های مستقل از متن باشند، آیا زبان $(L_2 \cup L_3) - L_1$ مستقل از متن است؟

۲۴- آیا زبان $L = \{a^i b^j c^k : i,j,k \geq 1, k \leq \max(i,j)\}$ مستقل از متن است؟

۲۵- زبان‌های منظم A و B را روی حروف الفبای Σ در نظر بگیرید. اگر تعریف کنـیم $L=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A^n \cap B^n)$ ، آیا در رابطه با L چه می توان گفت؟

۲۶- اگر L_1 مستقل از متن و L_2 چنین نباشد، آیا $L_1 \cap L_2$ مستقل از متن است؟

۲۷- آیا زبان $L=\{a^n b^m c^m \ : \ n \geq 0, m \geq 0\}$ خطی است؟

۲۸- آیا زبان $L=\{a^m b^n c^k \ : \ m>5, \ n+k=3t\}$ ، مستقل از متن است؟ $(m,n,k,t \in N)$

۲۹- اگر زبان تولید شده توسط گرامر زیر را L بنامیم، آیا رابطه $L=L^*$ برقرار است؟

$S \to Ab$
$A \to aAb \mid \lambda$

۳۰- اگر زبان تولید شده توسط گرامر زیر را L بنامیم، آیا رابطه $L=L^*$ برقرار است؟

$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda$

۳۱- اگر $L=\{a^n b^m : n \geq 0, n<m\}$ باشد، آنگاه گرامری برای L^2 بنویسید.

۳۲- اگر $L=\{a^n b^m : n \geq 0, n<m\}$ باشد، آنگاه گرامری برای L^* بنویسید.

۳۳- یک گرامر که مجموعه اعداد صحیح در زبان C را تولید می کند را بنویسید.

۳۴- گرامرزیر چه زبانی را تولید می کند.

$S \to bN \mid BN \mid AM$
$N \to aN \mid bN \mid \lambda$
$B \to aBb \mid b$
$A \to aAb \mid a$
$M \to aN \mid \lambda$

۳۵- کدام یک از زبانهای زیر، مستقل از متن است؟ (r و q دو عدد صحیح و ثابت و مثبت می باشند.)

الف- $L=\{1^{r+mq}0^{rq} : m \geq 0\}$

ب- $L=\{1^{r+mq}0^{rm} : m \geq 0\}$

۳۶- آیا زبان $L=\{a^n b^m a^p b^q : n+m \leq p+q\}$ مستقل از متن است؟

۳۷- کدام یک از زبان‌های زیر خطی و کدام یک معین می باشند؟

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)\}$

$L_2 = \{a^n b^n : n > 0\} \bigcup \{a^n b^{2n} : n > 0\}$

۳۸- مثالی از ترکیبات زبان C بزنید،که توسط گرامر مستقل از متن،قابل توصیف نباشد.

۳۹- نشان دهید که برای هر گرامر مستقل از متن، یک گرامر معادل وجود دارد کـه قـوانین آن بـه صـورت $A \to aBC$ یا $A \to \lambda$ باشند.

$A, B, C \in V$
$a \in \sum \bigcup \{\lambda\}$

۴۰- گرامر تولید کننده زبان را بنویسید.

$L = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)$ و w شامل زیر رشته aab نیست$\}$

پاسخ تمرین فصل ۴

۱- خیر، گرامر G رشته‌هایی را تولید می‌کند که تعداد a و b در آنها برابر است و حتماً باید با a شروع شوند که این موضوع در زبان L_1 قید نشده است، بنابراین L_1 با $L(G)$ برابر نیست.

۲- خیر، چون رشته aa توسط گرامر اول تولید می شود، اما توسط گرامر دوم تولید نمی شود.

۳- زبان هر گرامر به صورت زیر است:

الف- $L=\{x^n y^n z^m : n\geq 0, m\geq 0\}$

قانون $A\to xAy$ رشته هایی به فرم $x^n y^n$ و قانون $B\to zB$ رشته هایی به فرم z^m تولید می‌کنند. در نهایت به علت وجود قانون $S\to AB$، رشته هایی به فرم $x^n y^n z^m$ تولید می شود.

ب- $L=\{x^n y^k z^m : k=n+m, n\geq 0, m\geq 0\}$

قانون $A\to xAy$ رشته هایی به فرم $x^n y^n$ و قانون $B\to yBz$ رشته هایی به فرم $y^m z^m$ تولید می‌کنند. در نهایت به علت وجود قانون $S\to AB$،رشته هایی به فرم $x^n y^n y^m z^m$ تولید می‌شود.

پ- $L=\{x^n y^m z^t : t=n+m, n\geq 0, m\geq 0\}$

ت- $L=\{x^n y^n z^k : n\geq 1, k\geq 1\}$

۴- زبان هر گرامر برابر است با:

الف- $L=\{a^n b^{n+1} : n\geq 1\}\bigcup\{a^{n+1}b^n : n\geq 1\}$

ب- $L=\{x^m y^n z^n : n\geq 0, m\geq 0\}$

قانون $A\to xA$ رشته هایی به فرم x^m و قانون $B\to yBz$ رشته هایی به فرم $y^n z^n$ تولید می‌کنند. در نهایت به علت وجود قانون $S\to AB$،رشته هایی به فرم $x^m y^n z^n$ تولید می شود.

پ- $L=\{a^n b^m : n\neq m\}$ (یا $a^+a^n b^n + a^n b^n b^+$)

ت- $L=\{a^2 a^{2k} b^k b^2 : k\geq 0\}\bigcup\{b^t a^{t+1} : t\geq 1\}$ رشته هایی که به کمک قوانین $S\to aAb, A\to aaAb\,|\,ab$ تولید می شود به فرم $a^2 a^{2k} b^k b^2$ می‌باشد $(k\geq 0)$ و رشته هایی که به کمک قوانین $S\to bBa, B\to bBa\,|\,a$ تولید می‌شود به فرم $b^t a^{t+1}$ می‌باشد $(t\geq 1)$.

۵- زبان هر گرامر برابر است با:

الف- $L=\{a(bcc)^n baa(daa)^n : n\geq 0\}$

ب- $L=\{ab(cda)^n cdb(bab)^n : n\geq 0\}$

پ- $0^n AA1^n + 1^n AA0^n = 0^n(0+1)^* 1^n + 1^n (0+1)^* 0^n = (0+1)^*$

ت- $\{a,b\}^* - \{a^n b^n : n\geq 0\}$. یعنی تمامی رشته‌ها در $\{a,b\}^*$ به غیر از $\{a^n b^n : n\geq 0\}$.

۶- قانون $A\to 0A1 \mid \lambda$ زبان 0^n1^n، قانون $B\to 1B \mid 1$ زبان 1^+ و قانون $C\to 1C0 \mid \lambda$، زبان 1^m0^m را تولید می کنند. در نهایت به علت وجود $S\to ABC$ ، این گرامر زبان زیر را تولید می‌کند:

$\{0^n1^n1^+1^m0^m\} = \{0^n1^{n+m+t}0^m : t>0, n\geq 0, m\geq 0\}$

که می توان آن را به صورت $L=\{0^i1^j0^k : j>i+k\}$ نشان داد.

۷- دو گرامر زیر با گرامر $S\to SS \mid (S) \mid \lambda$ معادل هستند:

$G1: S\to S(S) \mid \lambda$
$G2: S\to S(SS) \mid \lambda$

۸- گرامر برای L_1 :

$G1: S\to aS \mid aSbS \mid \lambda$

گرامر برای L_2 :

$G2: S\to aSb \mid SS \mid \lambda$

۹- بله- چون می توان برای آن یک گرامر مستقل از متن به صورت زیر نوشت:

$S\to a^5Sb^5 \mid a^4b^4 \mid a^3b^3 \mid a^2b^2 \mid ab$

۱۰- ابتدا سه a تولید کرده و سپس تعداد دلخواهی a و b را در هر جای دلخواه از رشته اضافه می کنیم:

$S\to XaXaXaX$
$X\to aX \mid bX \mid \lambda$

۱۱- گرامر مورد نظر عبارت است از:

$E\to E+E \mid E.E \mid E^* \mid (E) \mid \lambda \mid \phi \mid a \mid b$

۱۲- گرامر مورد نظر عبارت است از:

$S \to AB$

$A \to + \mid - \mid \lambda$

$B \to D \mid DB$

$D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

۱۳- بررسی گزاره ها:

الف- بله، چون می توان یک گرامر مستقل از متن برای آن ارائه داد:

$S \to aSa \mid bMb$
$M \to aMa \mid bMb \mid \lambda$

ب- بله، چون می توان یک گرامر مستقل از متن برای آن ارائه داد:

$S \to A \mid B$
$A \to aAb \mid aA \mid Ab \mid ac \mid cb$
$B \to aBbb \mid d$

پ- زبان L به صورت $\{a^n b^k c^n : n,k \geq 0\}$ است که مستقل از متن می‌باشد.

ت- این زبان به صورت $L = \{a^{2n} b^{2n} c^{2m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ است، که مستقل از متن می باشد.

ث- زبان L برابر $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ است، که مستقل از متن نمی باشد.

۱۴- این گرامر به صورت زیر است:

$S \to abXefg$
$X \to cSd \mid cd$

۱۵- این گرامر به صورت زیر است:

$S \to aX$
$X \to bcYe$
$Y \to dXf \mid \lambda$

۱۶- گرامر تولید کننده هر زبان را بنویسید.

الف- طول رشته نباید 6k+1، 6k باشد.

$S \to aaaaaaS \mid aa \mid aaa \mid aaaa \mid aaaaa$

ب- گرامر به صورت زیر است:

$S \to SS \mid \lambda$
$S \to aabS \mid aaSb \mid aSab \mid Saab$
$S \to abaS \mid abSa \mid aSba \mid Saba$
$S \to baaS \mid baSa \mid bSaa \mid Sbaa$

پ-

$S \to NXNaNXN$
$X \to aXb \mid bXa \mid XN \mid NX \mid \lambda$
$N \to cN \mid \lambda$

ت-

$S \to aSc \mid bSc \mid cSa \mid cSb \mid SS \mid XS \mid c$
$X \to cX \mid \lambda$

ث-

$S \to aSc \mid bSc \mid cSa \mid cSb \mid SS \mid AS \mid BS \mid a \mid b$
$A \to aA \mid \lambda$
$B \to bB \mid \lambda$

ج-

$S \to aSc \mid A$
$A \to bAcc \mid \lambda$

چ-

$S \to ND \mid AMD$
$N \to aNb \mid \lambda$
$M \to bMc \mid \lambda$
$D \to cD \mid \lambda$
$A \to aA \mid \lambda$

ح-

$S \to A \mid c$
$A \to aAa \mid bAb \mid aMb \mid bMa \mid aNc \mid bNc \mid cNa \mid cNb$
$M \to aM \mid bM \mid cN$
$N \to aN \mid bN \mid \lambda$

۱۷- بله- زبان L^3 و L^4 به صورت زیر می باشند:

$$L^3 = \{a^m b^m a^n b^n a^p b^p : m, n, p \geq 0\}$$

$$L^4 = \{a^m b^m a^n b^n a^p b^p a^k b^k : m, n, p, k \geq 0\}$$

اشتراک آنها برابر L^3 است که مستقل از متن است.

۱۸- هر ۳ زبان مستقل از متن است، اما اشتراک آنها $\{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$ مستقل از متن نمی‌باشد.

۱۹- بله- زبان L حاصل اشتراک یک زبان مستقل از متن و یک زبان منظم است، بنابراین مستقل از متن است.

۲۰- متمم زبان داده شده یعنی $\{0^n 1^m 0^k : n \neq m \neq k\}$ مستقل از متن است.(خود زبان L مستقل از متن نیست.)

۲۱- بله- زبان L مستقل از متن می باشد و چون زبان مستقل از متن تحت بستار بسته است، بنابراین L^* نیز مستقل از متن است.

۲۲- این زبان حتما مستقل از متن نیست. مانند $L = \{1^{n^2} : n > 0\}$. البته اگر بدانیم L مستقل از متن است، آنگاه L حتما منظم خواهد بود.

۲۳- بله- زبان $(L_2 \cup L_3) - L_1$ را به صورت $(L_2 \cup L_3) \cap \overline{L_1}$ می نویسیم. می دانیم که:

الف- زبانهای مستقل از متن نسبت به اجتماع بسته هستند،پس $L_2 \cup L_3$ مستقل از متن است.

ب- زبان منظم نسبت به عمل متمم بسته است، پس $\overline{L_1}$ منظم است.

ج- اشتراک یک زبان مستقل از متن با یک زبان منظم، زبانی است مستقل از متن.

در نتیجه زبان $(L_2 \cup L_3) \cap \overline{L_1}$ مستقل از متن است.

۲۴- بله- زبان L با شرط $k \leq \max(i, j)$، از اجتماع دو زبان با شرطهای $k \leq i$ و $k \leq j$ تشکیل شده:

$$L = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 1, k \leq i\} \cup \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 1, k \leq j\}$$

بنابراین چون این دو زبان مستقل از متن بوده و زبان های مستقل از متن تحت اجتماع بسته هستند، زبان L نیز مستقل از متن می باشد.

۲۵- بله- چون A و B منظم هستند، آنگاه برای هر n عبارت $(A^n \cap B^n)$ منظم بوده ولی چون زبان‌های منظم تحت اجتماع نامتناهی یعنی $L = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A^n \cap B^n)$، بسته نمی باشند، زبان L لزوما منظم نیست ولی حتما مستقل از متن می باشد.

۲۶- اگر L_1 مستقل از متن و L_2 منظم باشد، آنگاه $L_1 \cap L_2$ مستقل از متن است. اما در این گزینه در مورد زبان L_2 اطلاعی نداریم و در نتیجه $L_1 \cap L_2$ ممکن است مستقل از متن باشد و ممکن است نباشد.

۲۷- بله- چون می توان یک گرامر خطی برای آن نوشت:

$$S \to aS \mid bAc \mid \lambda$$
$$A \to bAc \mid \lambda$$

۲۸- با توجه به محدودیت های داده شده(تعداد a بیشتر از 5 و مجموع تعداد b ها و cها مضرب 3 باشد)، زبان داده شده منظم است، و در نتیجه مستقل از متن نیز هست.

۲۹- خیر- زبان گرامر برابر $L = \{a^n b^{n+1} : n \geq 0\}$ است که شامل λ نیست. پس $L \neq L^*$.

۳۰- بله- زبان گرامر برابر $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$ است. اگر L^* را به واحدهای شامل یک L تقسیم کنیم، در هر کدام از آنها تعداد a با b برابر است. پس $L = L^*$.

۳۱- زبان L^2 برابر $L^2 = \{a^n b^m a^p b^q : n \geq 0, n < m, p \geq 0, p < q\}$ است. گرامر آن برابر است با:

$$S \to XX$$
$$X \to aXb \mid bY$$
$$Y \to bY \mid \lambda$$

۳۲- گرامر برابر است با:

$$S \to SS \mid X \mid \lambda$$
$$X \to aXb \mid bY$$
$$Y \to bY \mid \lambda$$

۳۳- گرامر برابر است با:

$$S \to IDA$$
$$I \to + \mid - \mid \lambda$$
$$D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \mid 9$$
$$A \to DA \mid \lambda$$

۳۴- متمم زبان $L = \{a^n b^m : n \geq 0\}$.

۳۵- بررسی زبان ها:

الف–خیر، با فرض اینکه r=2,q=3 داریم: $L=\{1^{2+3m}0^6 : m\geq 0\}$. در این صورت، تعداد صفرها ثابت شده و وابستگی بـه تعداد 1 ها ندارد. پس زبان منظم می باشد.

ب- بله، با فرض اینکه r=2,q=3 داریم: $L=\{1^{2+3m}0^{2m} : m\geq 0\}$. در این صورت،0 و 1 به یکدیگر وابسته هستند و در نتیجه زبان مستقل از متن است.

زبان را می توان به صورت $(1^q)^m 1^r (0^r)^m$ نشان داد. به علت وابستگی توانی و محدود نبودن m ، نمی‌توان یک گرامر منظم طراحی کرد. اما می‌توان یک گرامر مستقل از متن برای آن طراحی کرد.

۳۶- بله- چون می توان برای آن یک گرامر مستقل از متن نوشت:

$$S \to aSb \mid Sb \mid bAa \mid aBa \mid \lambda$$
$$A \to bAa \mid Aa \mid \lambda$$
$$B \to aBa \mid bAa \mid Ba \mid \lambda$$

۳۷- زبان مستقل از متن L_1 معین است ولی خطی نیست. زبان L_2 خطی است ولی معین نیست.

۳۸- تعریف توابع در C ، توسط گرامر مستقل از متن، قابل توصیف نیست، چون ترتیب توابع در این زبان مهم نیست.

۳۹- هر گرامر مستقل از متن را می توان به فرم نرمال چامسکی در آورد. پس ابتدا گرامر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کرده و سپس قواعد به فرم $A \to a$ را حذف کرده و به جای آن قواعد زیر را قرار می‌دهیم:

$$A \to aMN$$
$$M \to \lambda$$
$$N \to \lambda$$

قواعد دیگر نیازی به تغییر ندارند، چون قواعد به فرم $A \to BC$ در فرم مطلوب هستند. a در قوائد $A \to aBC$ می تواند λ باشد.

فصل ۵:

ابهام – ساده سازی گرامر – فرم‌های نرمال

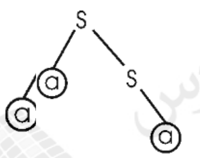
ابهام در گرامر و زبان

گرامر مستقل از متن G در صورتی مبهم خوانده می شود که یک رشته $w \in L(G)$ وجـود داشـته باشـد کـه حداقل دو درخت اشتقاق مجزا داشته باشد. به بیان دیگر، ابهام به طور ضمنی به معنـای وجـود دو یـا چنـد اشتقاق چپ ترین یا راست ترین، نیز می باشد.

مثال

آیا گرامر $S \to aS \mid aa \mid a$ مبهم است؟

حل: بله- چون به طور نمونه برای تولید رشته aa ، دو درخت اشتقاق وجود دارد:



■

مثال

آیا گرامر زیر مبهم است؟

$$S \to AB \mid aaB$$
$$A \to a \mid Aa$$
$$B \to b$$

حل: بله- چون به طور نمونه برای تولید رشته abb ، دو اشتقاق چپ وجود دارد:

$$1: S \Rightarrow aaB \Rightarrow aab$$

$$2: S \Rightarrow AB \Rightarrow AaB \Rightarrow aaB \Rightarrow aab$$

■

مثال

آیا گرامر $S \to aSbS \mid bSaS \mid \lambda$ مبهم است؟

حل: بله- چون به طور نمونه برای تولید رشته abab ، دو اشتقاق چپ وجود دارد:

$$1: S \Rightarrow aSbS \Rightarrow abSaSbS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow ababS \Rightarrow abab$$
$$2: S \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow ababS \Rightarrow abab$$

■

مثال

آیا گرامر $S \to aSb \mid SS \mid \lambda$ مبهم است؟

حل: بله- چون به طور نمونه برای تولید رشته ab ، دو اشتقاق چپ وجود دارد:

$$1: S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$
$$2: S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow ab$$

مثال

آیا زبان تولید شده توسط گرامر مبهم $S \to aSb \mid SS \mid \lambda$، مبهم است؟

حل: خیر- چون می توان یک گرامر غیر مبهم نظیر این گرامر نوشت:

$$S \to A \mid \lambda$$
$$A \to aAb \mid ab \mid AA$$

■

مثال

آیا گرامر زیر مبهم است؟

$$S \to aB \mid A$$
$$A \to aA \mid \lambda$$
$$B \to bB \mid a$$

حل: بله- چون به طور نمونه برای تولید رشته aa ، دو اشتقاق چپ وجود دارد:

$$1: S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aa$$
$$2: S \Rightarrow aB \Rightarrow aa$$

بنابراین گرامر منظم نیز می تواند مبهم باشد.

خانواده زبان های مستقل از متن غیر مبهم،تحت اجتماع بسته نمی باشند.

مثال

نشان دهید زبان $L=\{a^nb^nc^m : n,m\geq 0\}\bigcup\{a^nb^mc^m : n,m\geq 0\}$، یک زبان مستقل از متن ذاتا مبهم است. (این زبان را می توان به صورت $L=\{0^i1^j2^k : i=j \ or \ j=k\}$ نیز نشان داد.)

حل: گرامر این زبان به صورت زیر است. زبان $\{a^nb^nc^m : n,m\geq 0\}$ توسط $S\to S_1$ و زبان $\{a^nb^mc^m : n,m\geq 0\}$ توسط $S\to S_2$ تولید می شود.

$S\to S_1 \mid S_2$

$S_1\to S_1c \mid A$
$A\to aAb \mid \lambda$

$S_2\to aS_2 \mid B$
$B\to bBc \mid \lambda$

این گرامر مبهم است، چون برای رشته $a^nb^nc^n$ دو اشتقاق مجزا وجود دارد.

تذکر:هر دو زبان $\{a^nb^nc^m : n,m\geq 0\}$ و $\{a^nb^mc^m : n,m\geq 0\}$ مستقل از متن غیر مبهم هستند. ■

اگر L مستقل از متن بوده و هر گرامر تولید کننده L ، مبهم باشد، آنگاه این زبان ذاتا مبهم است.

زبان‌های منظم نمی توانند ذاتا مبهم باشند.

تمام S-گرامرها، فاقد ابهام هستند.

ساده سازی گرامرهای مستقل از متن

در تعریف گرامرهای مستقل از متن، هیچ محدودیتی برای سمت راست قانون در نظر گرفته نشده است که این آزادی در برخی استدلال ها، مشکل ایجاد می کند. در بسیاری موارد بهتر است محدودیت شدیدی قائل شویم.

حذف متغیرها و قوانین بی فایده

یک متغیر مفید است اگر و تنها اگر در حداقل یک اشتقاق حضور داشته باشد. عوامل غیرمفید بودن یک متغیر عبارتند از:

۱- قابل دسترس نبودن از طریق متغیر شروع گرامر

۲- ناتوانی در اشتقاق یک رشته پایانی

قانونی که شامل یک متغیر بی فایده باشد، قانون بی فایده نامیده می شود.

گرامر $G=(V,T,S,P)$ را یک گرامر مستقل از متن فرض کنید. آنگاه گرامر هم ارز $\widehat{G}=(\widehat{V},\widehat{T},S,\widehat{P})$ وجود دارد که شامل هیچ متغیر یا قانون بی فایده نمی باشد.

مثال

در گرامر زیر متغیر B بی فایده می باشد، چون از طریق متغیر شروع یعنی S ، قابل دسترس نمی باشد:

$$S \to A$$
$$A \to aA \mid \lambda$$
$$B \to bA$$

پس قانون $B \to bA$ بی فایده است و می توان آن را حذف کرد، بدون اینکه تغییری در زبان ایجاد کند. ■

مثال

در گرامر زیر، کدام متغیر بی فایده است؟

$$S \to aSb \mid A \mid \lambda$$
$$A \to aA$$

حل: متغیر A بی فایده است، چون نمی تواند رشته ای از پایانی ها را تولید کند. بنابراین قانون $S \to A$ و $A \to aA$ را می توان حذف کرد، بدون اینکه تغییری در زبان ایجاد شود. ■

مثال

در گرامر زیر کدام متغیرها بی فایده هستند.

$$S \to aS \mid A \mid C$$
$$A \to a$$
$$B \to aa$$
$$C \to aCb$$

حل: متغیر C بی فایده است، چون یک رشته پایانی را تولید نمی کند. همچنین متغیر B بی فایده است، چون از متغیر شروع قابل دستیابی نمی باشد. بنابراین می توان متغیرهای C و B و قوانین مربوط به آنها را حذف کرد. گرامر نهایی به صورت زیر می باشد:

$$S \to aS \mid A$$
$$A \to a$$

■

مثال

گرامر زیر را ساده کنید.

$$S \to aAb \mid bBa \mid bCa$$
$$A \to aaAb \mid ab$$
$$B \to bBa \mid a$$
$$C \to aC \mid bC$$

حل: در گرامر داده شده، متغیرC، غیر مفید است و قاعده هایی که از C استفاده می‌کنند را می‌توان از گرامر حذف کرد. بنابراین گرامر به صورت زیر می باشد:

$$S \to aAb \mid bBa$$
$$A \to aaAb \mid ab$$
$$B \to bBa \mid a$$

■

مثال

در گرامر زیر متغیرهای بی فایده را حذف کنید.

$S \to AC \mid BS \mid B$

$A \to aA \mid aF$

$B \to CF \mid b$

$C \to cC \mid D$

$D \to aD \mid BD \mid C$

$E \to aA \mid BSA$

$F \to bB \mid b$

حل: ابتدا متغیرهایی را که به رشته‌ای از الفبا نمی‌رسند یعنی C و D را حذف می‌کنیم:

$S \to BS \mid B$

$A \to aA \mid aF$

$B \to b$

$E \to aA \mid BSA$

$F \to bB \mid b$

سپس متغیرهایی را که نمی‌توان از S به آنها رسید، یعنی A و E و F را حذف می‌کنیم:

$S \to BS \mid B$

$B \to b$

■

حذف قوانین λ

هر قانونی از یک گرامر مستقل از متن به فرم $A \to \lambda$ را قانون λ می گویند. این قوانین در بعضی مواقع نامطلوب می باشند.

هر متغیر A که اشتقاق $A \overset{*}{\Longrightarrow} \lambda$ برای آن امکان پذیر باشد را متغیر میرا می نامند.

برخی گرامرها زبانهایی را تولید می کنند که هر چند فاقد λ هستند، تعدادی متغیر میرا یا قانون λ در آنها وجود دارنـد. در این موارد، می توان قوانین λ را حذف کرد.

به ازای هر گرامر مستقل از متن، یک گرامر هم ارز فاقد قانون λ ، وجود دارد.

مثال

گرامر زیر، زبان $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ را تولید می کند. این زبان فاقد λ می باشد.

$$S \to aAb$$
$$A \to aAb \mid \lambda$$

برای حذف قانون $A \to \lambda$، دو قانون جدید که با جایگزینی λ در A های سمت راست بدست آمده اند را به گرامر اضافه می کنیم:

$$S \to aAb \mid ab$$
$$A \to aAb \mid ab$$

■

مثال

قوانین λ را در گرامر زیر حذف کنید.

$$S \to AB$$

$$A \to aA \mid \lambda$$

$$B \to bB \mid \lambda$$

حل: ابتدا $A \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$$S \to AB \mid B$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

سپس $B \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$$S \to AB \mid A \mid B \mid \lambda$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

تذکر مهم: نیازی به حذف قانون $S \to \lambda$ نمی باشد، چون S ، متغیر شروع است.

مثال

در گرامر زیر، قوانین λ را حذف کنید؟

$S \to ABaC$
$A \to BC$
$B \to b \mid \lambda$
$C \to D \mid \lambda$
$D \to d$

حل: ابتدا $B \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$S \to ABaC \mid AaC$
$A \to BC \mid C$
$B \to b$
$C \to D \mid \lambda$
$D \to d$

سپس $C \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$S \to ABaC \mid AaC \mid ABa \mid Aa$
$A \to BC \mid C \mid B \mid \lambda$
$B \to b$
$C \to D$
$D \to d$

در نهایت $A \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$S \to ABaC \mid AaC \mid ABa \mid Aa \mid BaC \mid aC \mid Ba \mid a$
$A \to BC \mid B \mid C$
$B \to b$
$C \to D$
$D \to d$

حذف قوانین واحد

هر قانونی از یک گرامر مستقل از متن به فرم $A \to B$ که در آن $A, B \in V$، قانون واحد یا یکه نامیده می‌شود. این قوانین گاهی اوقات نامطلوب هستند و باید حذف شوند.

مثال

از گرامر زیر قوانین واحد را حذف کنید.

$S \to Aa \mid B$

$B \to A \mid bb$

$A \to bc \mid a \mid B$

حل:

$S \to Aa \mid bc \mid a \mid bb$

$B \to bc \mid a \mid bb$
$A \to bc \mid a \mid bb$

توجه کنید که در اثر حذف قوانین واحد، متغیر B و قوانین مربوط به آن بی فایده شده اند. ■

ممکن است حذف قوانین λ، باعث تولید قوانین واحد شود که قبلا وجود نداشته اند.

زبان L را یک زبان مستقل از متن فاقد λ فرض کنید. آنگاه یک گرامر مستقل از متن وجود خواهد داشت که L را تولید کرده و فاقد هرگونه قانون بی فایده، قانون λ و قانون واحد باشد.

مثال

در گرامر زیر قوانین λ را حذف کنید.

$S \to aA$
$A \to BB$
$B \to aBb \mid \lambda$

حل: با حذف $B \to \lambda$ گرامر زیر بدست می آید:

$S \to aA \mid a$
$A \to BB \mid B$
$B \to aBb \mid ab$

در این گرامر قانون واحد $A \to B$ تولید شده که قبلا وجود نداشت. ■

مثال

در گرامر زیر تمامی قوانین λ، واحد و بی فایده را حذف کنید.

$S \to aA \mid aBB$
$A \to aaA \mid \lambda$
$B \to bC \mid bbC$
$C \to B$

حل: ابتدا قانون $A \to \lambda$ را حذف می کنیم:

$S \to aA \mid aBB \mid a$
$A \to aaA \mid aa$
$B \to bC \mid bbC$
$C \to B$

سپس قانون واحد $C \to B$ را حذف می کنیم:

$S \to aA \mid aBB \mid a$
$A \to aaA \mid aa$
$B \to bC \mid bbC$
$C \to bC \mid bbC$

نهایتا اینکه B و C بی فایده هستند، بنابراین داریم:

$S \to aA \mid a$
$A \to aaA \mid aa$

زبان تولید شده بوسیله این گرامر $L((aa)^* a)$ می باشد. ■

فرم‌های نرمال گرامر مستقل از متن

برای گرامر مستقل از متن، دو فرم نرمال چامسکی و گریباخ وجود دارد.

فرم نرمال چامسکی

یک گرامر مستقل از متن در صورتی در فرم نرمال چامسکی قرار دارد که تمام قوانین آن به یکی از دو فرم $A \to BC$ و یا $A \to a$ باشد. که در آن A,B,C عضو V بوده و a عضو T است.

مثال

گرامر زیر در فرم نرمال چامسکی قرار دارد:

$S \to AS \mid BS \mid a$

$A \to SA \mid a$

$B \to SB \mid b$

■

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$S \to ABa$

$A \to aab$

$B \to Ac$

حل:

قدم اول : معرفی متغیرهای جدید X,Y,Z	قدم دوم : نرمال کردن قانون اول و سوم
$S \to ABX$	$S \to AT$
$X \to a$	$T \to BX$
$A \to XXY$	$A \to XF$
$Y \to b$	$F \to XY$
$B \to AZ$	$B \to AZ$
$Z \to c$	$X \to a, Y \to b, Z \to c$

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$S \to aAB$

$A \to aA \mid b$

$B \to bB \mid b$

حل:

قدم اول	قدم دوم
$S \to TAB$ $T \to a$ $A \to TA \mid b$ $B \to FB \mid b$ $F \to b$	$S \to TK$ $K \to AB$ $T \to a$ $A \to TA \mid b$ $B \to FB \mid b$ $F \to b$

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$S \to aAbB \mid ab$

$A \to ABS \mid a$

$B \to bb$

حل:

قدم اول	قدم دوم	قدم سوم
$S \to TAFB \mid TF$ $A \to ABS \mid a$ $B \to FF$ $T \to a$ $F \to b$	$S \to TK \mid TF$ $K \to AFB$ $A \to AU \mid a$ $U \to BS$ $B \to FF$ $T \to a$ $F \to b$	$S \to TK \mid TF$ $K \to AX$ $X \to FB$ $A \to AU \mid a$ $U \to BS$ $B \to FF$ $T \to a$ $F \to b$

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$S \to abAB$
$A \to bAB \mid \lambda$
$B \to BAa \mid A \mid \lambda$

حل: ابتدا قواعد λ را حذف می کنیم:

حذف $A \to \lambda$	حذف $B \to \lambda$
$S \to abAB \mid abB$ $A \to bAB \mid bB$ $B \to BAa \mid A \mid Ba \mid \lambda$	$S \to abAB \mid abB \mid abA \mid ab$ $A \to bAB \mid bB \mid bA \mid b$ $B \to BAa \mid A \mid Ba \mid Aa \mid a$

سپس قاعده یکه $B \to A$ را حذف می کنیم:

$S \to abAB \mid abB \mid abA \mid ab$
$A \to bAB \mid bB \mid bA \mid b$
$B \to BAa \mid Ba \mid Aa \mid a \mid bAB \mid bB \mid bA \mid b$

در نهایت گرامر را به فرم نرمال چامسکی در می آوریم:

قدم اول : معرفی متغیرهای جدید Y, X	قدم دوم : معرفی متغیرهـای جدید P,T,K,N, M
$S \to XYAB \mid XYB \mid XYA \mid XY$ $A \to YAB \mid YB \mid YA \mid b$ $B \to BAX \mid BX \mid AX \mid a \mid YAB \mid YB \mid YA \mid b$ $X \to a$ $Y \to b$	$S \to XM \mid XN \mid XK \mid XY$ $M \to YT$ $T \to AB$ $N \to YB$ $A \to YT \mid YB \mid YA \mid b$ $B \to BP \mid BX \mid AX \mid a \mid YT \mid YB \mid YA \mid b$ $P \to AX$ $X \to a$ $Y \to b$

در فرم نرمال چامسکی، تولید رشته‌ای به طول n دارای اشتقاقی با طول $2n-1$ می‌باشد. $(n \ge 1)$ (n اشتقاق از $A \to a$ و $n-1$ اشتقاق از $A \to BC$)

فرض کنید G یک گرامر مستقل از متن(CFG) در فرم نرمال چامسکی با b متغیر باشد. در این صورت اگر G بتواند رشته ای را با تعداد گام های اشتقاق بیشتر از b تولید کند،آنگاه L(G) نامحدود است.

فرم نرمال گریباخ

یک گرامر مستقل از متن در فرم نرمال گریباخ است هرگاه تمام قوانین آن به فرم $A \to aX$ باشند، که در آن، $a \in T , x \in V^*$.

مثال

گرامر $S \to abSb \mid aa$ را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

حل: متغیرهای جدید A و B را معرفی می کنیم که مترادف با a و b هستند:

$S \to aBSB \mid aA$

$A \to a$

$B \to b$

■

مثال

گرامر $S \to ab \mid aS \mid aaS$ را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

$S \to aX \mid aS \mid aYS$
$X \to b$
$Y \to a$

■

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

$S \to AB$

$A \to aA \mid bB \mid b$

$B \to b$

حل: قاعده $S \to AB$ با تعریف فرم نرمال گریباخ مغایر است. بنابراین به جای A در این قانون از قوانین جایگزین آن استفاده می کنیم:

$S \to aAB \mid bBB \mid bB$

$A \to aA \mid bB \mid b$

$B \to b$

به ازای هرگرامر مستقل از متن در صورتیکه شامل λ نباشد، یک گرامر معادل به فرم نرمال گریباخ وجود دارد.

در فرم نرمال گریباخ، برای تولید رشته‌ای به طول n ، به اشتقاقی با طول n نیاز است. چون در هر مرحله یکی از نمادهای رشته ایجاد می‌شود.

مثال

گرامر زیر را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow ABb \mid a \\
&A \rightarrow aaA \mid B \\
&B \rightarrow bAb
\end{aligned}
$$

حل: ابتدا قاعده یکه $A \rightarrow B$ را حذف می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow ABb \mid a \\
&A \rightarrow aaA \mid bAb \\
&B \rightarrow bAb
\end{aligned}
$$

سپس متغیر A در $B \rightarrow ABb$ را جایگزین می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow aaABb \mid bAbBb \mid a \\
&A \rightarrow aaA \mid bAb \\
&B \rightarrow bAb
\end{aligned}
$$

سپس به فرم نرمال گریباخ تبدیل می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow aXABY \mid bAYBY \mid a \\
&A \rightarrow aXA \mid bAY \\
&B \rightarrow bAY \\
&X \rightarrow a \\
&Y \rightarrow b
\end{aligned}
$$

■

تمرین فصل ۵

۱- درخت اشتقاق را تعریف کنید.

۲- با توجه به گرامر زیر، درخت اشتقاق برای تولید رشته abbbb ، را رسم کنید.

$S \to aAB$
$A \to bBb$
$B \to A \mid \lambda$

۳- اگر G یک گرامر مستقل از متن باشد، آنگاه هر $w \in L(G)$ اشتقاق چپ دارد یا یک اشتقاق راست؟

۴- ترتیب حذف قواعد تولید λ، بی فایده و واحد را از یک گرامر مستقل از متن که زبان آن فاقد λ است را مشخص کنید.

۵- از گرامر زیر، قوانین نامطلوب (λ، واحد و بی فایده) را حذف کنید.

$S \to aA \mid aBB$
$A \to aaA \mid \lambda$
$B \to bB \mid bbC$
$C \to B$

۶- آیا حذف قوانین بی فایده لزوما موجب تولید گرامرهای کمینه می‌شود؟

۷- قوانین بی فایده را از گرامر زیر حذف کنید.

$S \to aA \mid a \mid B \mid C$
$A \to aB \mid \lambda$
$B \to Aa$
$C \to cCD$
$D \to ddd$

۸- قوانین λو بی فایده را از گرامر زیر حذف کنید.

$S \to AaB \mid aaB$
$A \to \lambda$
$B \to aaA \mid \lambda$

۹- گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$S \to aSb \mid ab$

۱۰- گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$$S \rightarrow aSaA \mid A$$
$$A \rightarrow abA \mid b$$

۱۱- گرامر $S \rightarrow aSb \mid ab$ را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

۱۲- گرامر $S \rightarrow aSb \mid aS \mid aaS$ را به فرم نرمال گریباخ تبدیل کنید.

۱۳- توسط الگوریتم CYK که توسط کوک، یانگر و کسامی ابداع شد، چه موضوعی را می توان تصمیم گیری کرد؟پیچیدگی این الگوریتم را مشخص کنید.

۱۴- اگر G گرامر مستقل از متنی باشد که هر یک از قوانین آن به فرم $A \rightarrow v$ بوده و $|v|>1$ ، آنگاه محدوده ارتفاع درخت اشتقاق به ازای تمامی $w \in L(G)$ را مشخص کنید.

۱۵- فرض کنید G=(V,T,S,P) یک گرامر مستقل از متن(CFG) بدون هیچ قانون λ یا قانون واحدی باشد. بعلاوه، فرض کنید K حداکثر تعداد سمبل های موجود در طرف راست قوانین P باشد. گرامر معادل در فرم نرمال چامسکی، حداکثر دارای چه تعداد قانون تولید است؟

۱۶- گرامر زیر را با BNF نمایش دهید.

$$E \rightarrow T \mid E + T$$
$$T \rightarrow F \mid T * E$$

حل تمرین فصل ۵

۱- فرض کنید $G=(V,T,S,P)$ یک گرامر مستقل از متن باشد. یک درخت مرتب، درخت اشتقاقی بـرای G خواهد بود اگر و تنها اگر خواص زیر را داشته باشد:

الف- ریشه دارای نام S است.

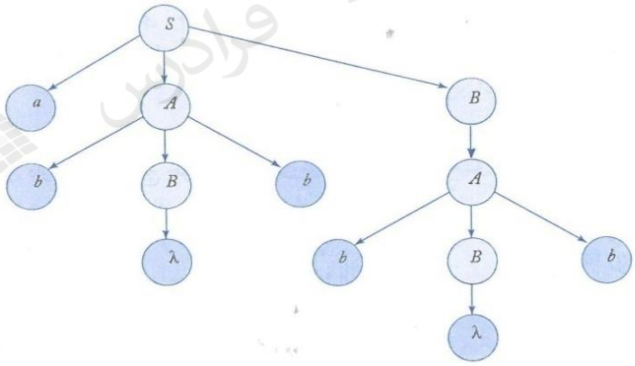
ب- هر یک از برگها دارای نامی از $T\cup\{\lambda\}$ باشد.

پ- هر یک از گره های میانی دارای نامی از V است.

ت- اگر یکی از گره ها دارای نام $A\in V$ بوده و فرزندان آن هم از چپ به راست بـه صـورت $a_1,a_2,...,a_n$ نامگـذاری شـوند، آنگاه P باید قانونی به فرم $A\to a_1a_2...a_n$ داشته باشد.

ث- برگ های دارای نام λ، هیچ خواهر و برادری ندارند.

۲- درخت اشتقاق تولید رشته abbbb :



در تمامی درختهای اشتقاق، با شروع از ریشه که با متغیر شروع گرامر نامگذاری می شود و خاتمه یـافتن بـه بـرگ هـایی کـه پایانی ها و یا λ هستند، درخت تکمیل می شود.

۳- اگر G یک گرامر مستقل از متن باشد، آنگاه هر $w\in L(G)$ یک اشتقاق چپ و یک اشتقاق راست دارد.

۴- ترتیب حذف برابر است با:

الف- قواعد تولید λ ب- قواعد واحد ج- قواعد بی فایده

۵- مراحل کار به صورت زیر است:

۳- حذف قوائد بی فایده	۲- حذف قوانین واحد	۱- حذف قوانین λ
$S \to aA \mid a$ $A \to aaA \mid aa$	$S \to aA \mid a \mid aBB$ $A \to aaA \mid aa$ $B \to bB \mid bbC$ $C \to bB \mid bbC$	$S \to aA \mid a \mid aBB$ $A \to aaA \mid aa$ $B \to bB \mid bbC$ $C \to B$

۶- خیر- به طور نمونه در گرامر $S \to aA; A \to a$ هیچ قانون بی فایده، قانون واحد یا قانون λ به چشم نمی خورد. اما چون $S \to aa$ یکی از گرامرهای متناظر است، گرامر فوق کمینه نمی باشد.

مثالی دیگر: گرامر زیر را در نظر بگیرید:

$$S \to aAb \mid ab$$
$$A \to aAb \mid ab$$

این گرامر زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ را تولید می کند. اگر روال حذف قوانین بی فایده را روی این گرامر اجرا کنیم، هیچ یک از قواعد حذف نمی شود. از طرفی گرامر زیر که کمینه است، همین زبان را تولید می کند:

$$S \to aSb \mid ab$$

۷- متغیر D و قوانین متناظر با آن بی فایده است.

$$S \to aA \mid a \mid B$$
$$A \to aB \mid \lambda$$
$$B \to Aa$$

۸- گرامر بعد از حذف قوانین λ و بی فایده به صورت زیر در می آید:

$$S \to aaB \mid aB \mid aa \mid a$$
$$B \to aa$$

۹- به جای a و b از متغیرهای M و N استفاده می کنیم:

$$S \to MAN \mid MN$$
$$M \to a$$
$$N \to b$$

به جای AN از X استفاده می کنیم:

$$S \to MX \mid MN$$
$$X \to AN$$
$$M \to a$$
$$N \to b$$

۱۰- ابتدا قانون یکه $S \to A$ را حذف می کنیم:

$$S \to aSaA \mid abA \mid b$$
$$A \to abA \mid b$$

سپس گرامر را به فرم نرمال چامسکی در می آوریم:

$S \to MX \mid MY \mid b$ $X \to SK$ $K \to MA$ $Y \to NA$ $A \to MY \mid b$ $M \to a$ $N \to b$	$S \to MX \mid MY \mid b$ $X \to SMA$ $Y \to NA$ $A \to MY \mid b$ $M \to a$ $N \to b$	$S \to MSMA \mid MNA \mid b$ $A \to MNA \mid b$ $M \to a$ $N \to b$

۱۱- فرم نرمال گریباخ:

$$S \to aSX \mid aX$$
$$X \to b$$

۱۲- فرم نرمال گریباخ:

$$S \to aSX \mid aS \mid aYS$$
$$X \to b$$
$$Y \to a$$

۱۳- می‌توان عضویت یا عدم عضویت یک رشته در زبانی که بوسیله گرامری که در فرم نرمال چامسکی تولید می شود را تصمیم گیری کرد. پیچیدگی این الگوریتم $|w|^3$ می‌باشد. این الگوریتم مساله را به بخش های کوچکتر تقسیم می کند. روش کار در کتاب لینز آورده شده است.

۱۴- ارتفاع در محدوده $\log_{|v|}^{|w|} \le h \le \frac{|w|-1}{|v|-1}$ است.

۱۵- حداکثر تعداد قانون تولید برابر است با: $(k-1)|P|+|T|$

۱۶- از فرمی به نام BNF برای تعریف گرامرها استفاده می شود.

$$< expression >::=< term > | < expression > + < term >$$
$$< term >::=< factor > | < term > * < factor >$$