

# Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

4 oktober 2018

**Sammanfattning**

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Ordinarie differentialekvationer (ODE)</b>	<b>1</b>
1.1	Användbara definitioner och satser . . . . .	1
1.2	Första ordningen . . . . .	3
1.3	Andra ordningen . . . . .	5
1.4	System av ODE . . . . .	8
1.5	Exakta differentialekvationer . . . . .	12
1.6	Stabilitet . . . . .	12

# 1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

## 1.1 Användbara definitioner och satser

**Lipschitzkontinuitet** En funktion  $f$  är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett  $K$  så att det för varje  $x_1, x_2$  gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

**Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet** Låt  $f \in C^1$ . Då är  $f$  Lipschitzkontinuerlig.

**Grönwalls lemma** Antag att det finns positiva  $A, K$  så att  $h : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s) \, ds + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

**Bevis** Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s) \, ds.$$

Då gäller att

$$\frac{dI}{dt}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{d}{dt} (e^{-Kt} I(t)) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till  $r$  och använder att  $I(0) = 0$  för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

**Positivt definitiva funktioner** Låt  $D$  vara en öppen omgivning av  $\mathbf{0}$ . Funktionen  $V$  är positivt definitiv om  $V(\mathbf{0}) = 0$  och  $V(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Definitionen är analog för negativt definitiva funktioner. Vid att inkludera likheten i olikhetstecknet fås också definitionen av positivt och negativt semidefinitiva funktioner.

**Potenser av matriser** Vi definierar

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

**Eulers metod** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y), \quad 0 < t < T, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Vi gör indelningen  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  så att  $\Delta t = \frac{T}{N}$  och inför  $y_n = y(t_n)$ . Vidare gör vi approximationen

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y).$$

**Linjära differentialekvationer** Om en differentialekvation kan skrivas på formen  $F(t, y, \frac{dy}{dx}, \dots) = 0$ , är den linjär om  $F$  är linjär i alla sina argument förutom  $t$ .

**Wronskianen** Wronskianen definieras som

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \frac{dy_1}{dt}(t) & \frac{dy_2}{dt}(t) \end{vmatrix}.$$

För vektorvärda funktioner definieras den som determinanten av matrisen vars kolumner är de olika funktionerna.

**Linjärt beroende funktioner**  $f : I \rightarrow \mathbf{R}, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  är linjärt beroende om det finns  $k_1, k_2$  så att

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

**Fundamentalt sätt av lösningar** Betrakta någon ODE och ett sätt lösningar. Detta sättet är ett fundamentalt sätt av lösningar om och endast om deras wronskian är nollskild överallt i lösningsintervallet.

## 1.2 Första ordningen

**Existens av lösning** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= f(y), \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

Detta har en lösning om  $f$  är Lipschitzkontinuerlig.

**Bevis** Bilda två diskreta approximationer  $\bar{y}, \bar{\bar{y}}$  av  $y$ . Vi kan visa att

$$\max_{t \in [0, T]} |\bar{y}, \bar{\bar{y}}| \leq K \Delta t$$

där  $\Delta t$  är det största tidsavståndet mellan två punkter i någon av de diskreta approximationerna. Detta implicerar konvergens mot ett gränsvärde  $y(t)$  när  $\Delta t \rightarrow 0$ . Detta gränsvärdet uppfyller

$$\begin{aligned}y(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{y}(0) + \int_0^t f(\bar{y}(s)) \, ds \\ &= y(0) + \int_0^t f(y(s)) \, ds,\end{aligned}$$

där sista likheten kommer av integrandens Lipschitzkontinuitet. Integralkalkylens fundamentalsats ger då

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y),$$

vilket skulle visas.

**Entydighet av lösning** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= f(y), \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

Detta har en unik lösning om  $f$  är Lipschitzkontinuerlig.

Observera att beviset kan även göras för en funktion  $f(t, y)$  vid att skriva differentialekvationen som ett system och komma med en motsvarande sats för system av differentialekvationer.

**Bevis** Betrakta två lösningar  $y, z$  av differentialekvationen. Vi får

$$y(\tau) - y_0 = \int_0^\tau f(y) \, dt$$

och samma för  $z$ . Vi subtraherar dessa två resultat och får

$$y(\tau) - z(\tau) = y_0 - z_0 + \int_0^\tau f(y) - f(z) \, dt.$$

Vid att beräkna absolutbeloppet av båda sidor och använda Cauchy-Schwarz' oliket får man vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau |f(y) - f(z)| \, dt.$$

Kravet om Lipschitzkontinuitet av  $f$  ger vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau K|y(t) - z(t)| \, dt.$$

Grönwalls lemma ger slutligen

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0|e^{K\tau}.$$

Om  $y_0 = z_0$  är  $y = z$ , och beviset är klart.

**Lösning av linjära ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{dy}{dt}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p \, dx$$

och inför den integrerande faktorn  $e^{P(t)}$ . Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)} \frac{dy}{dt}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{d}{dt}(ye^P)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{dH}{dt}(t).$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret  $y(a) = y_0$ . Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p dx} + \int_a^t g(x) e^{-\int_x^t p ds} dx.$$

**Separabla ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna betecknas som en separabel ODE av första ordning.

För att lösa den, beräkna primitiv funktion på båda sidor, vilket ger

$$M(x) + N(y(x)) = c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Om  $N$  är inverterbar, får man då  $y$  enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

### 1.3 Andra ordningen

**Entydighet av lösning** Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad y > t_0,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0.$$

Den har en entydig lösning om  $p, q$  är Lipschitzkontinuerliga.

**Form på lösning av andra ordningens ODE** Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = L(t, y) = g(t).$$

Låt  $y_P$  vara en partikulär lösning till denna. Då är  $y$  en lösning om och endast om

$$y = y_H + y_P,$$

där  $y_H$  löser den homogena ekvationen.

**Bevis** Vi har

$$L(t, y) = L(t, y_P + y_H) = L(t, y_P) + L(t, y_H) = g(t) + 0 = g(t),$$

och därmed löser  $y$  differentialekvationen. Vi har även

$$L(t, y - y_P) = g(t) - g(t) = 0,$$

och  $y - y_P$  löser den homogena ekvationen. Eftersom detta är sant, har vi visat ekvivalens.

**Fundamentala lösningar** Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

där  $p, q, g$  är kontinuerliga på  $I$ . Låt  $y_1$  uppfylla

$$y_1(t_0) = 1, \quad \frac{dy_1}{dt}(t_0) = 0$$

och  $y_2$  uppfylla

$$y_2(t_0) = 0, \quad \frac{dy_2}{dt}(t_0) = 1.$$

Då definieras  $y_1, y_2$  som mängden av fundamentala lösningar av differentialekvationen.

**Linjär kombination av lösningar** Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t > t_0,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då finns det  $c_1, c_2$  så att  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  är en lösning om  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ .



**Abels sats** Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då gäller att

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

**Bevis**

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= \frac{dy_1}{dt}(t)\frac{dy_2}{dt}(t) - \frac{dy_1}{dt}(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + y_1\frac{d^2y_2}{dt^2}(t) - y_2\frac{d^2y_1}{dt^2}(t) \\ &= y_1\left(-p(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + q(t)y_2(t)\right) - y_2\left(-p(t)\frac{dy_1}{dt}(t) + q(t)y_1(t)\right) \\ &= -p(t)W(y_1, y_2)(t). \end{aligned}$$

Denna differentialekvationen har lösning

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

vilket skulle visas.

**Linjärt beroende av lösningar** Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då är dessa linjärt beroende på  $I$  om och endast om  $W(y_1, y_2)(t) = 0$ .

**Bevis** Om dessa är linjärt beroende, ser man att Wronskianen blir lika med 0, då kolumnerna i matrisen vars determinant ger Wronskianen kommer vara multipler av varandra.

### Lösning av andra ordningens ODE med konstanta koefficienter

Låt  $r_1, r_2$  vara lösningar till

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Då ges lösningarna till

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p \frac{dy}{dt}(t) + qy(t) = L(t, y) = 0$$

av

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2, \\ (c_1 t + c_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2. \end{cases}$$

### Variation av parametrar Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

där  $p, q, g$  är kontinuerliga på  $I$  och  $y_1, y_2$  är lösningar av den motsvarande homogena ekvationen, ges en partikulär lösning av ekvationen av

$$y_p = -y_1 \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2 \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds$$

där  $t_0 \in I$ .

## 1.4 System av ODE

**Formulering** Betrakta ett system av funktioner  $x_1, x_2, \dots$  som beskrivs av systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= g_1(t) + \sum p_{1i}(t)x_i, \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= g_2(t) + \sum p_{2i}(t)x_i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

av differentialekvationer. Definiera

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Då kan systemet skrivas som

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Detta kan även generaliseras till

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(t).$$

**Autonoma system** Ett autonomt system är på formen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

**Form på lösning av system av ODE** Låt  $\mathbf{x}_p$  lösa

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Då är alla lösningar på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

där  $\mathbf{x}_h$  löser det motsvarande homogena systemet.

**Fundamentalmatris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$$

med fundamentalt sätt av lösningar  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ . Då definieras systemets fundamentalmatris som

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}(t) & \dots & \mathbf{x}^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

Vi definierar även den speciella fundamentalmatrisen  $\Phi$ , vars kolumner satisfierar begynnelsesvillkoret

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det kan visas att denna ges av

$$\Phi(t) = e^{A(t)t}.$$

**Linjär kombination av lösningar** Låt  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)} \in \mathbf{R}$ ,  $0 < t < T$  vara ett fundamentalt sätt av lösningar till

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P(t)\mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

där  $P$  är kontinuerlig. Då kan varje lösning till ekvationen skrivas som

$$\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{x}^{(i)}$$

på precis ett sätt. Med fundamentalmatrisen kan detta uttryckas som

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{c},$$

där  $\mathbf{c}$  är en vektor med koefficienter.

**Bevis** Begynnelsevärdeproblemet implicerar att vår lösning måste uppfylla

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}(0) \dots \mathbf{x}^{(n)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0).$$

Detta har bara en lösning om  $|\mathbf{x}^{(1)}(0) \dots \mathbf{x}^{(n)}(0)| \neq 0$ . Eftersom alla lösningarna är linjärt oberoende, är detta uppfyllt. Konstanterna  $c_i$  ges då unikt, och beviset är klart.

**System av ODE med konstant matris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris. Vi gör ansatsen  $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\boldsymbol{\xi}$  och får

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) - P\mathbf{x}(t) = e^{rt}(rI - A)\boldsymbol{\xi}.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är nollskild, kan detta bara bli noll om

$$P\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}.$$

Alltså är  $\mathbf{x}$  bara en lösning om  $\boldsymbol{\xi}$  är en egenvektor till  $P$  och  $r$  är det motsvarande egenvärdet.

**Upprepande egenvärden** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris, låt  $r$  vara ett egenvärde till  $P$  med algebraisk multiplicitet 2 och geometrisk multiplicitet 1 och  $\boldsymbol{\xi}$  en motsvarande egenvektor. Då är en lösning

$$\mathbf{x}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$$

och en ny lösning kan skrivas som

$$\mathbf{x}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt},$$

där  $\boldsymbol{\eta}$  uppfyller

$$(A - rI)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

**Wronskianen för ett system med konstant matris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris. Låt  $\xi_i$  vara de olika egenvektorerna till  $P$  motsvarande egenvärden  $r_i$ . Wronskianen till dessa ges av

$$\begin{aligned} W(\xi_1, \dots, \xi_n)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} \xi_1 & \dots & e^{r_n t} \xi_n \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{vmatrix} \\ &= W(\xi_1, \dots, \xi_n)(0) e^{\text{Tr}\{P\}t}, \end{aligned}$$

där vi har använt en sats för att få fram spåret. Det följer blant annat att Wronskianen är antingen 0 eller nollskild överallt.

**Diagonalisering** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t),$$

där  $A$  är en konstant matris som kan skrivas som  $A = PDP^{-1}$ . Då kan vi införa  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ , vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) &= P \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = PDP^{-1}\mathbf{y} = PD\mathbf{y}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) &= D\mathbf{y}, \end{aligned}$$

vilket är en simplare variant av det ursprungliga problemet.

**Partikulärlösningar** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Det finns olika metoder att ta fram en partikulärlösning av detta.

**Diagonalisering** Låt  $P$  vara diagonaliserbar och konstant. Då får man vid diagonalisering att

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{h}(t) + D\mathbf{y}(t)$$

med  $\mathbf{h} = T^{-1}\mathbf{g}$ . Varje komponent kan då lösas som

$$y_j(t) = c_j e^{r_j t} + e^{r_j t} \int_{t_0}^t h_j(s) e^{-r_j s} ds.$$

**Obestämda koefficienter** Om  $\mathbf{g}$  har en enkel form, kan man gissa på en lösning och bestämma koefficienterna baserad på ens gissning.

**Variation av parametrar** Ansätt

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t).$$

Då ger differentialekvationen

$$\frac{d\Psi}{dt}(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t).$$

Eftersom  $\Psi$  är en fundamentalmatris för ekvationen, gäller att

$$\frac{d\Psi}{dt}(t)P(t)\Psi(t),$$

och vi får

$$\Psi(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t).$$

Vi löser för  $\mathbf{u}$  och integrerar, vilket slutligen ger

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds.$$

## 1.5 Exakta differentialekvationer

**Formulering** Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{d\psi}{dx}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

**Exakthet av differentialekvationer** Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$

## 1.6 Stabilitet

**Jämviktpunkter** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

En jämviktpunkt för detta systemet är en punkt  $\mathbf{x}(t_0)$  så att  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ , med implikationen att  $\mathbf{x}(t)$  är konstant för  $t > t_0$ .

**Stabila jämviktpunkter** En jämviktpunkt  $\mathbf{x}_0$  är stabil om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  så att alla lösningar  $\mathbf{x}$  som uppfyller  $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ , existerar för  $t > t_0$  och uppfyller  $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$ ,  $t > t_0$ . En jämviktpunkt som ej uppfyller detta är instabil.

**Asymptotiskt stabila jämviktpunkter** En jämviktpunkt  $\mathbf{x}_0$  är asymptotiskt stabil om den är stabil och det finns ett  $\delta_0 > 0$  så att om  $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0| < \delta_0$ , gäller det att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

**Stabilitet av autonom ODE** Betrakta

$$\frac{dy}{dt}(t) = g(y(t)), \quad g(y_0) = 0.$$

Då gäller att

- om  $\frac{dg}{dy}(y_0) < 0$ , är  $y_0$  asymptotiskt stabil.
- om  $\frac{dg}{dy}(y_0) > 0$ , är  $y_0$  instabil.

**Bevis** Här bevisas endast det första fallet.

Betrakta  $(y - y_0)^2$ . Nära  $y_0$  gäller att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t) - y_0)^2 &= 2(y(t) - y_0)g(y(t)) \\ &\approx 2(y(t) - y_0) \left( g(y_0) + \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0) + o((y(t) - y_0)^2) \right) \\ &= 2(y(t) - y_0) \left( \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0) + o((y(t) - y_0)^2) \right). \end{aligned}$$

Det gäller att  $o((y(t) - y_0)^2) < -\frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0)^2$  tillräckligt nära  $y_0$  (man skulle även kunna välja en annan nollskild konstant än  $-\frac{dg}{dy}(y_0)$ , men detta valet gör beviset snyggare). Detta ger

$$\frac{d}{dt}(y(t) - y_0)^2 < \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0)^2,$$

som kan lösas för att ge

$$(y(t) - y_0)^2 < e^{\frac{dg}{dy}(y_0)t}(y(0) - y_0)^2,$$

som går mot 0 för stora  $t$  enligt vårt antagande om  $g$ 's derivata.

**Karakterisering av jämviktpunkter för system** Betrakta systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är konstant och reellvärd. För enkelhetens skull kommer vi här att låta systemet vara ett system i två variabler. Låt även  $P$  ha egenvärden  $r_1, r_2 \neq 0$ . Då gäller att  $\mathbf{0}$  är en kritisk punkt. Lösningarnas banor kan nu beskrivas på följande sätt:

- Om  $r_1, r_2 < 0$  går alla lösningar in mot origo, och origo kallas en stabil nod.
- Om  $r_1, r_2 > 0$  går alla lösningar ut från origo, och origo kallas en instabil nod.
- Om egenvärdena har olika tecken går lösningarna in mot origo parallellt med en egenvektor och ut parallellt med den andra, och origo kallas en instabil sadelpunkt.
- Om  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$  gäller att:
  - Om  $\alpha > 0$  går lösningarna i spiraler ut från origo, och origo kallas en instabil spiralpunkt.
  - Om  $\alpha < 0$  går lösningarna i spiraler in mot origo, och origo kallas en stabil spiralpunkt.
  - Om  $\alpha = 0$  går lösningarna i bana kring origo, och origo kallas ett centrum.
- Om  $r_1 = r_2 = r$  och det finns två egenvektorer motsvarande egenvärdet  $r$  går banorna i linjer från eller till origo, beroende på tecknet till  $r$ , och origo är en instabil eller stabil nod.
- Om  $r_1 = r_2 = r$  och det bara finns en egenvektor motsvarande egenvärdet  $r$  går lösningarna i kurvade banor ut från eller in mot origo, där dessa banorna blir parallella med egenvektorn långt borta från origo, och origo är en stabil eller instabil degenererad nod.



**Slutsats** Det gäller alltså att

- Om alla  $P$ s egenvärden har negativ realdel, är origo en stabil jämviktpunkt.
- Om något av  $P$ :s egenvärden har positiv realdel, är origo en instabil jämviktpunkt.

**Stabilitet av jämviktpunkter för icke-linjära system av ODE** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

Låt detta ha en kritisk punkt  $\mathbf{x}_0$  och låt  $\mathbf{g} \in C^1$  i en öppen mängd kring  $\mathbf{x}_0$ . Vi linjariserar kring  $\mathbf{x}_0$ , vilket går om

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))|}{|\mathbf{x}(t)|} = 0,$$

vilket uppfylls om  $\mathbf{f} \in C^2$ . Inför funktionalmatrisen aka Jacobimatrisen

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_p}{dx_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{df_p}{dx_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betrakta  $J(\mathbf{x}_0)$ . Då gäller att

- Om alla  $J(\mathbf{x}_0)$ s egenvärden har negativ realdel, är  $\mathbf{x}_0$  en stabil jämviktpunkt.
- Om något av  $J(\mathbf{x}_0)$  egenvärden har positiv realdel, är  $\mathbf{x}_0$  en instabil jämviktpunkt.

**Lyapunovfunktioner** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Antag att systemet har en kritisk punkt  $\mathbf{0}$ . Om det finns en positivt definitiv funktion  $V \in C^1$  och en negativt definitiv funktion

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2$$

på någon omgivning av  $\mathbf{0}$ , är  $\mathbf{0}$  en stabil jämviktpunkt. Om  $V'$  är negativt semidefinitiv, är  $\mathbf{0}$  en stabil jämviktpunkt.