Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

3 september 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

Lipschitzkontinuerlighet En funktion f är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett K så att det för varje x_1, x_2 gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet Låt $f \in C^1$. Då är f Lipschitzkontinuerlig.

Grönwalls lemma Antag att det finns positiva A, K så att $h : [0, T \to \mathbf{R}]$ uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

Bevis Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Då gäller att

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-Kt}I(t)\right) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till r och använder att $I(0) = 0$ för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

Linjära differentialekvationer Om en differentialekvation kan skrivas på formen $F(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dots) = 0$, är den linjär om F är linjär i alla sina argument förutom t.

Lösning av linjära ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int\limits_a^t p \,\mathrm{d}x$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ye^{P}\right)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t).$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Separabla ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Denna betecknas som en separabel ODE av första ordning.

För att lösa den, beräkna primitiv funktion på båda sidor, vilket ger

$$M(x) + N(y(x)) = c, \ c \in \mathbf{R}.$$

Om N är inverterbar, får man då y enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int\limits_a^t p\mathrm{d}x} + \int\limits_a^t g(x)e^{-\int\limits_x^t p\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x\,.$$

Exakta differentialekvationer Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)),\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

Exakthet av differentialekvationer Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$

Form på lösning av andra ordningens ODE Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) = L(t, y) = g(t).$$

Låt y_P vara en partikulär lösning till denna. Då är y en lösning om och endast om

$$y = y_\mathrm{H} + y_\mathrm{P},$$

där y_H löser den homogena ekvationen.

Bevis Vi har

$$L(t, y) = L(t, y_\mathrm{P} + y_\mathrm{H}) = L(t, y_\mathrm{P}) + L(t, y_\mathrm{H}) = g(t) + 0 = g(t),$$

och därmed löser y differentialekvationen. Vi har även

$$L(t, y - y_\mathrm{P}) = g(t) - g(t) = 0,$$

och $y - y_\mathrm{P}$ löser den homogena ekvationen. Eftersom detta är sant, har vi visat ekvivalens.

Lösning av andra ordningens ODE med konstanta koefficienter
Låt r_1, r_2 vara lösningar till

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Då ges lösningarna till

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + qy(t) = L(t, y) = 0$$

av

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2, \\ (c_1 t + c_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2. \end{cases}$$