Sammanfattning av SF1672 Linjär algebra

Yashar Honarmandi

24 november 2017

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av viktiga definitioner, teoremer och algoritmer i kursen SF1672 Linjär algebra.

Innehåll

1 Algoritmer **1**

2 Vektorer **1**
2.1 Definitioner 1
2.2 Satser 2

3 Matriser **2**
3.1 Definitioner 2
3.2 Satser 3

4 Linjära avbildningar **4**
4.1 Definitioner 4
4.2 Satser 4

5 Vektorrum **5**
5.1 Definitioner 5
5.2 Bevis 5

6 Volymer **6**

1 Algoritmer

Dessa algoritmer kan vara smarta att kunna för att lösa problemer i linjär algebra.

Gauss-Jordan-elimination Ett ekvationssystem

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_n = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

kan lösas vid att konstruera en totalmatris

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n
\end{array}\right]
$$

och göra Gauss-Jordan-elimination på denna.

Syftet med Gauss-Jordan-elimination är att varje kolumn ska ha ett och endast ett pivotelement, även kallad en ledande etta. En ledande etta är en etta som inte har någon andra tal i samma kolumn eller till vänster i samma rad. För att få sådana, gör man operationer på radarna i matrisen enligt följande regler:

- Radar kan multipliceras med konstanter. Forsöka, dock, att undveka 0, eftersom det fjärnar information, vilket är otrevligt.
- Radar kan adderas och subtraheras med andra rader, var båda potensielt multiplicerad med en lämplig konstant.
- Radar kan byta plats.

När man är klar, ska matrisen (förhoppingsvis) se ut så här:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_n
\end{array}\right]
$$

var alla a_i är reella tal.

Invertering av en matris Ställ upp en totalmatris $[A|I]$. Vid att radreducera A till identitetsmatrisen blir I radreducerad till A^{-1}. Att visa detta är enkelt om man använder elementärmatriser.

2 Vektorer

2.1 Definitioner

Linjärt hölje Det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ är

$$
\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}
$$

Linjärt oberoende vektorer Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$
\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}
$$

endast har lösningen $t_i = 0$ för $i = 1, 2, \dots, n$.

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^m$ Vektorerna

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

i $\mathbb{R}^m$ kallas enhetsvektorer. Man har att $\text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_\}\} = \mathbb{R}^m$.

2.2 Satser

3 Matriser

3.1 Definitioner

Matris-vektor-produkt Betrakta $m \times n$-matrisen

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_n \end{array}\right]$$

och vektoren i $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrisproduktet $A\mathbf{x}$ definieras som vektoren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_nA \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$.

Homogena ekvationssystem Ett homogent ekvationssystem kan skrivas på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Motsatsen är då inhomogena ekvationssystem.

Addition av matriser För två matriser $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ har man

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Mutliplikation av matriser med konstanter För en matris $A = (a_{i,j})$ har man

$$cA = (ca_{i,j}), c \in \mathbb{R}.$$

Diagonalmatriser En matris $D = (d_{i,j})$ kallas en diagonal matris om $d_{i,j} = 0$ när $i \neq j$.

Transponat För en matris $A = (a_{i,j})$ definieras transponatet som $A^T = (a_{j,i})$.

Matrismultiplikation Matrismultiplikation av en $m \times p$-matris A och en $p \times n$-matris B ges av

$$AB = C : c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Inversen av en matris En matris sin invers A^{-1} uppfyller

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Elementärmatriser En matris E är en elementärmatris om produktet EA kan fås vid att göra en radoperation på A.

Rang Rangen till en matris, skrivit som rank$A$, är dim(Col$A$).

Determinant För en $n \times n$-matris A ges determinanten av

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_i j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_i j), \end{aligned}$$

var A_{ij} är matrisen A utan rad i och kolumn j. De två summorna visar att man kan räkna ut determinanten vid att utveckla den långs en given kolumn j i första fallet eller en given rad i i det andra fallet. Formelen är rekursiv, och base case är $n = 2$, som ges av

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd.$$

3.2 Satser

Matriskolumner och linjära höljen Följande påståenden är ekvivalenta:

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje

b) Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjär kombination av kolumnerna i A.

c) $\mathrm{Span}\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n} = \mathbb{R}^m$.

d) Den reducerade matrisen till A har m ledande ettor.

Bevis Ekvivalensen till a, b och c är vel trivial eller någonting.

Antag att c gäller och att A ej har m ledande ettor. Då måste man vid Gauss-Jordan-elimination av A få en rad med bara nollor. Antag att detta är sista raden i matrisen. Betrakta vektorn

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom Gauss-Jordan-elimination inte ändrar det linjära höljet av kolummnerna till en matris, borde man kunne hitta en kombination av elementerna i den sista raden i A så att man får 1, eftersom $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$. Då alla elementerna i denna raden är nollor, är detta omöjligt.

Lösningen till inhomogena ekvationssystem Om det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har lösningen $\mathbf{x}_\mathrm{h}$, har det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{x}_\mathrm{i}$, var $\mathbf{x}_\mathrm{i}$ är någon vektor som uppfyllar ekvationssystemet.

Bevis Ganska enkelt.

Linjärt beroende av kolumner i en matris Kolumnerna i en matris är linjärt oberoende omm (om och endast om) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen. Specielt gäller det att om antal rader är mindre än antal kolumner är kolumnvektorerna linjärt beroende.

Bevis Någonting med radreduktion.

Inverterbarhet av en matris En matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) = 0$.

Bevis Använd elementärmatriser.

Rangsatsen För en $n \times m$-matris A är $\mathrm{rank}A + \dim(\mathrm{Null}A) = m$.

Bevis Something something pivotkolumner.

Determinanten för triangulära matriser För en triangulär $n \times n$-matris A, dvs. en matris som har endast nollor över eller under diagonalen, ges determinanten av

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Bevis Inses lätt.

Determinant och elementärmatriser För en elementärmatris E har man

$$\det(E) = \begin{cases} -1, & E \text{ byter plats på två rader.} \\ 1, & E \text{ adderar en multippel av en rad till en annan.} \\ t, & E \text{ multiplicerar en rad med en skalär } t \neq 0. \end{cases}$$

och att

$$B = EA \implies \det(B) = \det(E)\det(A)$$

Bevis Radreducera med matriser.

Determinant för matrisprodukt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis Fallindelning och annat bra.

4 Linjära avbildningar

4.1 Definitioner

Bilden till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x}) : V \to W$ definierar man bildet till T som

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = T(\mathbf{x})\} \subset W.$$

Kärnan till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x}) : V \to W$ definierar man kärnan till T som

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset V.$$

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),$$
$$T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x}), c \in \mathbb{R}.$$

4.2 Satser

Avildningar och enhetsvektorer För en linjär avbildning $T(\mathbf{x})$ har man att

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{e}_i)$$

var x_i är komponenterna av $\mathbf{x}$.

Bevis Borde gå.

Avbildningar och matriser För en avbildning $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan man definiera matrisen

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)]$$

var $\mathbf{e}_i$ är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$. Då kan avbildningen skrivas som

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Bevis Inte svårt alls.

Samansättning av linjära avbildningar För två linjära avbildningar S, T är avbildningen $S \circ T$ linjär.

Bevis Vi använder oss av definitionen.

Dimensionalitet och avbildningar För en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = n$.

5 Vektorrum

5.1 Definitioner

Gruper En grupp G definieras av en mängd X och en binär operation $\cdot$ på två elementer i X (kommer ej skrivas ut). Denna operationen ska uppfylla

- operationen är assosiativ, dvs. $a(bc) = (ab)c$.
- grupen är stängd under operationen, dvs. för $a, b \in G$ är $ab \in G$.
- det finns ett enhetselement e så att $ae = ea = a$.
- det för varje element finns en invers så att $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Abelska gruper En grupp är abelsk om den uppfyllar $ab = ba$ för alla $b, a \in X$.

Vektorrum Om man definierar skalärmultiplikation med elementer i en abelsk grupp, bildar grupen ett vektorrum V under addition om

- $c\mathbf{x} \in V,\ c \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in V$.
- $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y},\ c \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x},\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$.
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $e \in V$.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Om V är ett delrum, kan det skrivas som $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Bas $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ är en bas för V om

- $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$.
- vektorerna i basen är linjärt oberoende.

Om vi kallar basen till V för β kan alla vektorer i V skrivas som basvektorer på följande sätt:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathbf{v}_i,$$
$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Dimension Dimensionen till ett vektorrum är antalet vektorer i basis.

5.2 Bevis

Delrum i $\mathbb{R}^n$ Om V är ett delrum i R^n kan det skrivas som $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Bevis 2 ez.

6 Volymer

Denna delen diskuterar hur man beräknar storheten volym för objekter i $\mathbb{R}^n$. Ordet volym kommer att användas om area i $\mathbb{R}^2$, volym i $\mathbb{R}^3$ och en analog storhet i andra $\mathbb{R}^n$.

En kropp i R^n En kropp i R^n är en mängd punkter. Ett enkelt exempel är ett prism P, som ges av

$$P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i\}.$$

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ definierar då prismet.

Volym av ett prism Ett prism P i $\mathbb{R}^n$ definieras av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Konstruera en matris A vars kolumner är vektorerna som definierar prismet. Då ges volymen till P av

$$V_P = \det(A).$$

Volym av en transformerad kropp Om man använder en linjär avbildning T med standardmatris A på punkterna i en kropp K, ges volymen av kroppen som fås efter avbildningen av

$$V_{T(K)} = \det(A) V_K.$$