

Sammanfattning av SH1014 Modern fysik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

26 december 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av kursen SH1014 Modern fysik.

Innehåll

| | | |
|---|--------------------------|----|
| 1 | Speciell relativitet | 1 |
| 2 | Allmän relativitetsteori | 10 |
| 3 | Kvantmekanik | 10 |
| 4 | Atomfysik | 18 |
| 5 | Kärnfysik | 20 |
| 6 | Molekylfysik | 21 |
| 7 | Fasta tillståndets fysik | 23 |
| 8 | Partikelfysik | 24 |

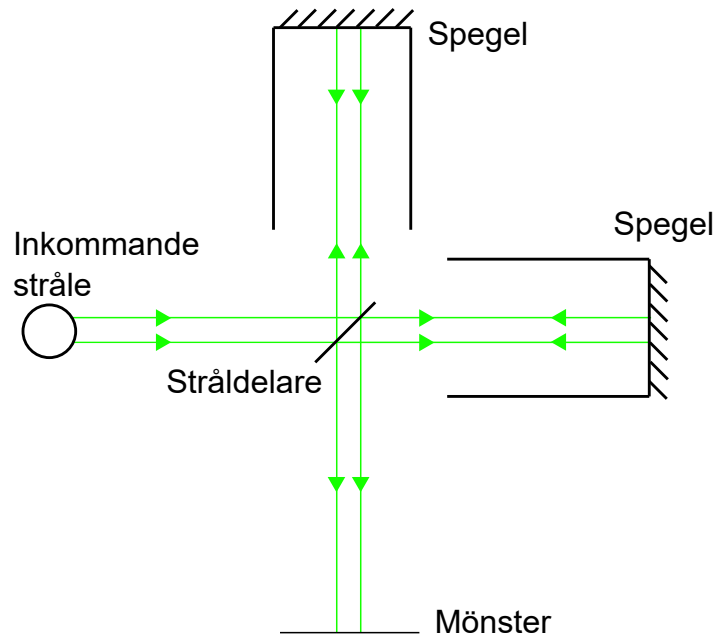
1 Speciell relativitet

Galileitransformationen Betrakta en statisk ram S och en ram S' som rör sig med konstant hastighet \mathbf{u} . Galileitransformen är den klassiska transformen av hastigheter och accelerationer mellan dessa system och ger

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{u}t + \mathbf{r}', \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{v}', \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}'.\end{aligned}$$

Michelson-Morleys experiment Michelson-Morleys experiment visade att ljus omöjligt kunde propageras genom den postulerade etern.

Uppställningen som användes är (en mer avancerad variant av) Michelson-Morley-interferometern, som illustreras i figur 1.



Figur 1:

Ideen bakom experimentet var att de två "ärmarna" i uppställningen skulle röra sig med olika hastigheter relativt etern eftersom Jorden rör sig relativt Solen.

Om nu varje arm har längd L och etern rör sig med en hastighet u åt höger, tar ljuset tiden

$$\begin{aligned}t_{\text{höger}} &= \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} \\ &= L \frac{c-u+c+u}{c^2-u^2} \\ &= \frac{2cL}{c^2-u^2} \\ &= \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

att röra sig till och från stråldelaren åt höger och tiden

$$\begin{aligned}t_{\text{upp}} &= \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} \\ &= \frac{2L}{c} \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u^2}{c^2}},\end{aligned}$$

ty ljuset måste röra sig uppåt och motriktad hastigheten mot höger för att återvända till samma position i stråldelaren. Alltså borde skillnaden mellan tiden det tar för ljuset att röra sig de två vägarna ges av

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

För Michelson och Morleys fall förutspådde de att de skulle se 0.4 fransar i interferensmönstret, men de observerade < 0.01 fransar. Efter att ha upprepat sitt experiment ett halvår senare för att utesluta påverkan från Jordens position, konkluderade de med att det inte kunde finnas någon eter.

Einsteins postulat Baserad på Michelson-Morleys experiment, kom Einstein med följande postulat:

- Fysikens lagar är de samma i alla inertialsystem.
- Ljushastigheten i vakuum har samma värde c i alla inertialsystem.

Lorentztransformationen Lorentztransformationen är en transformation för att byta mellan olika referensramar. Den skiljer sig från Galileitransformationer, som inte är tillräcklig för att beskriva denna nya fysiken. Härledningen av denna kommer täckas här. Den är lite matematiskt involverad, så denna del av sammanfattningen är endast intressant för dig som tycker om sådant.

För att härleda Lorentztransformationen, betrakta två referensramar som sammanfaller vid $t = 0$ där den ena rör sig med en hastighet v i x -riktning. För att beskriva transformationen, ansätter vi

$$x' = k_i x_i,$$

där det summeras över alla rymdliga koordinater och tiden. Vi ansätter linjaritet eftersom det annars skulle kunna uppkomma accelererande rörelse i ett system utan att det är acceleration i ett annat, vilket skulle vara konstigt. Vidare antar vi att x' ej beror av andra rymdliga koordinater, men att den kan bero av origos rörelse, och ansätter

$$x' = k_1(x - vt).$$

Antag nu att vi skickar ut en ljuspuls från origo vid $t = 0$. Vågfrontens avstånd från origo kommer beskrivas av

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2,$$

eftersom ljuset skall ha samma fart i båda referensramar. Vi använder nu vår ansats för att transformera den andra ekvationen tillbaka, och får

$$k_1^2 x^2 + y^2 + z^2 + k_1^2 (v^2 t^2 - 2xvt) = c^2 t'^2.$$

Om vi sätter $t = t'$, får vi nu andra termer, och transformationen mislyckades. Vi åtgärder detta vid att ansätta

$$t' = k_{t,1}x + k_{t,2}t.$$

Detta ger

$$k_1^2 x^2 + y^2 + z^2 + k_1^2 (v^2 t^2 - 2xvt) = c^2 (k_{t,1}^2 x^2 + k_{t,2}^2 t^2 + 2k_{t,1}k_{t,2}xt).$$

För att transformationen skall lyckas, ger detta

$$\begin{aligned} k_1^2 - c^2 k_{t,1}^2 &= 1, \\ vk_1^2 + c^2 k_{t,1}k_{t,2} &= 0, \\ c^2 k_{t,2}^2 - v^2 k_1^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Vi kollar först fallet $v = 0$, motsvarande identitetstransformationen. Denna lösningen motsvarar $k_1 = 1, k_{t,1} = 0, k_{t,2} = 1$, och en lösning för andra v bör återskapa detta resultatet.

Vi inför nu

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

och ekvationssystemet kan skrivas om till

$$\begin{aligned} k_1^2 - c^2 k_{t,1}^2 &= 1, \\ \beta k_1^2 + c k_{t,1} k_{t,2} &= 0, \\ k_{t,2}^2 - \beta^2 k_1^2 &= 1. \end{aligned}$$

Sista ekvationen kan skrivas som

$$k_1^2 = \frac{k_{t,2}^2 - 1}{\beta^2}.$$

Den andra ekvationen kan skrivas som

$$\frac{k_{t,2}^2 - 1}{\beta} + c k_{t,1} k_{t,2} = 0.$$

Detta är en andragradsekvation i $k_{t,2}$ med lösningar

$$k_{t,2} = \frac{-\beta c k_{t,1} \pm \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4}}{2}.$$

Vi kommer självklart se att transformationskoefficienterna är entydigt bestämda, men eftersom $k_{t,1}$ fortfarande är okänd (basfallet ger inte ens tillräcklig information för att bestämma tecknet på den koefficienten) låter vi \pm -tecknet bli och fortsätter.

Vi får nu

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\frac{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + \beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4 \mp 2\beta c k_{t,1} \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4}}{4} - 1}{\beta^2} \\ &= \frac{2\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 \mp 2\beta c k_{t,1} \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4}}{4\beta^2} \\ &= \frac{\beta c^2 k_{t,1}^2 \mp c k_{t,1} \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4}}{2\beta}. \end{aligned}$$

Nu ser vi att valet av tecknet på $k_{t,1}$ och valet av \mp spelar roll - mer specifikt, om $k_{t,1} > 0$ måste man välja $+$ och vice versa (annars skulle man få en imaginär transformationskoefficient, vilket skulle vara absurd när den beskriver en transformation mellan två observabler). Vi noterar att om den andra ekvationen skall uppfyllas, måste $k_{t,1} k_{t,2}$ vara negativ. Eftersom basfallet gav $k_{t,2} = 1$, gissar vi att $k_{t,1}$ är negativ (vadå, har du en bättre gissning?). Första ekvationen ger nu

$$\frac{\beta c^2 k_{t,1}^2 - c k_{t,1} \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4}}{2\beta} - c^2 k_{t,1}^2 = 1.$$

Vi får rotuttrycket för sig själv och får

$$-\frac{c k_{t,1}}{2\beta} \sqrt{\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4} = 1 + \frac{1}{2} c^2 k_{t,1}^2.$$

Vi har något positivt på båda sidor, och kan med ro i hjärtat kvadrera för att få

$$\frac{c^2 k_{t,1}^2}{4\beta^2} (\beta^2 c^2 k_{t,1}^2 + 4) = 1 + c^2 k_{t,1}^2 + \frac{1}{4} c^4 k_{t,1}^4.$$

Gudarna är barmhärtiga, och detta förenklas till

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) c^2 k_{t,1}^2 &= 1, \\ c^2 k_{t,1}^2 &= \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} - 1} \\ &= \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.\end{aligned}$$

Detta har (negativ) lösning

$$k_{t,1} = -\frac{\beta\gamma}{c}.$$

Första ekvationen ger nu

$$\begin{aligned}k_1^2 &= 1 + c^2 k_{t,1}^2 \\ &= 1 + \beta^2 \gamma^2 \\ &= \frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2} \\ &= \gamma^2.\end{aligned}$$

Vi ser att γ har samma tecken för alla β , och eftersom vi sökte en positiv lösning för $\beta = 0$, väljer vi $k_1 = \gamma$.

Sista ekvationen ger på helt samma sättet

$$k_1^2 = 1 + \beta^2 k_{t,2}^2 = 1 + \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2,$$

och med ett motsvarande argument får vi $k_1 = \gamma$.

Om du är en matematiker, ser du kanske att ekvationerna vi utgick från är invarianta under teckenbyte av vissa koefficienter, och du kan komma fram till en lika bra lösning på dessa vid att byta tecken på några transformationskoefficienter. Dessa löser ekvationerna, men ger absolut inget samsvar med gammal och vältestad teori, vilket man typiskt inte vill att ens nya revolutionära teori skall göra.

Om du är en matematiker och ett petigt as, tycker du kanske att val av tecken kan bero av β . Det löser ju ekvationerna, trots allt. Detta är sant, men bara tanken på att förklara absurditeten i detta för dig gör ont. Om du tycker det är rimligt att göra så, kan du omöjligt ha smält konsekvenserna av dina tankar ordentligt. Jag skulle rekommendera dig att sätta dig med en kopp te och fundera både två och tre gånger över vad du föreslår. Nu är det sent, och jag vill lägga mig.

Alternativ härledning Wow, dessa tar ju aldrig slut.

Vi kan i stället göra en härledning vid att låta Lorentztransformen vara linjär, och ställa följande krav på den:

- Ljusets hastighet är den samma i båda referensramer, dvs. att $x = ct$ och $x' = ct'$ måste gälla samtidigt.
- Den inversa transformen måste motsvara transformen när hastigheten v till den rörliga referensramen byter tecken.

Vi skriver Lorentztransformen som

$$\begin{aligned}x' &= Ax + Bt, \\ t' &= Cx + Dt.\end{aligned}$$

Om man betraktar punkten $x' = 0$, har denna uppenbarligen rörelse $x = vt$, vilket implicerar $\frac{B}{A} = -v$. Lorentztransformen kan då skrivas som

$$x' = A(x - vt).$$

Kravet som rör att ljushastigheten är konstant ger

$$\begin{aligned}ct' &= A(c - v)t, \\ ct &= A(c + v)t'\end{aligned}$$

för transformen och den inversa transformen av x' . Produkten av dessa två ekvationerna är

$$c^2 tt' = A^2(c^2 - v^2)tt',$$

vilket implicerar

$$A^2 = \gamma^2.$$

Återigen skulle man kunna leka med tecknet, men vi bara väljer en positiv konstant och låter det bli med det.

För att bestämma transformationskoefficienterna för tid, försöker vi att Lorentztransformera den inversa transformen. Den inversa transformen ges av

$$x = \gamma(x' + vt'),$$

och transformation av denna ger

$$x = \gamma(x' + vCx + vDt).$$

Vi löser denna för x' och får

$$x' = \left(\frac{1}{\gamma} - vC\right)x - vDt.$$

Om detta skall motsvara den ursprungliga transformen, måste

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} - vC &= \gamma, \\ -vD &= -v\gamma.\end{aligned}$$

Detta har lösningar

$$\begin{aligned}D &= \gamma, \\ C &= \frac{1}{v} \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \\ &= \frac{1}{v} \frac{1 - \frac{1}{1 - \beta^2}}{\gamma} \\ &= -\frac{1}{v} \frac{\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}}{\gamma} \\ &= -\frac{\beta \gamma^2}{c \gamma} \\ &= -\frac{\beta \gamma}{c}.\end{aligned}$$

Formler för Lorentztransformationen Lorentztransformationen ges av

$$x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right),$$

med

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Den inversa Lorentztransformationen fås vid att lösa ut ekvationerna för x och t , och ges av

$$x = \gamma(x' + vt'), t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right).$$

Med de givna skalfaktorerna ser vi att för små hastigheter går detta över i Galileitransformer, medan inga hastigheter över c tillåts.

Samtidighet Betrakta två händelser som inträffar med en tidsskillnad Δt mätt i inertialramen. Lorentztransformationen ger

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x').$$

Detta implicerar att även om händelserna är samtidiga i en referensram, är de inte nödvändigtvis det i den andra. Om tidsskillnaden mäts i den rörliga ramen, kan den skrivas som

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x).$$

Tidsdilation Betrakta två händelser som inträffar vid samma position i den rörliga ramen. Lorentztransformationen ger

$$\Delta t = \gamma\Delta t',$$

och det mäts en längre tidsskillnad mellan händelserna i den statiska ramen. Symmetrierna i ekvationen ovan ger att om händelserna inträffar vid samma position i den statiska ramen, observeras tidsdilatation i den rörliga ramen.

Med andra ord: Observatörer som ej är statiska relativt två händelser mäter en längre tidsskillnad mellan händelserna än observatörer som är statiska relativt händelsen.

Längdkontraktion Lorentztransformationen av avståndet mellan två händelser ges av

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t')\end{aligned}$$

Betrakta två händelser som rör sig med den rörliga ramen och inträffar vid samma tidspunkt i den rörliga ramen. Lorentztransformationen ger

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x',$$

och det mäts ett kortare avstånd mellan händelserna i inertialramen. Symmetrien ger ett motsvarande resultat om händelserna är samtidiga i den statiska ramen.

Med andra ord: Observatörer som ej är statiska relativt två händelser mäter ett kortare avstånd mellan händelserna än observatörer som är statiska relativt händelsen.

Tvillingparadoxen Betrakta två tvillingar, där tvilling A stannar på Jorden hela sitt liv och tvilling B reser till en planet långt borta och tillbaka med en relativistisk hastighet. A får att hen har åldrats mer än sin tvilling eftersom denna har upplevt tidsdilatation. Men B upplever att hen är statisk och att A rör sig. Därmed upplever B tidsdilatation enligt A , och A åldrats mer. Hur kan båda tycka att de är äldst när B kommer tillbaka?

För att lösa paradoxen, antag att A och B skickar ut ljuspulser med något fast tidsintervall för att hålla koll på hur gamla varandra är. Eftersom ljuset har samma hastighet i alla inertialramer, måste antal pulser vara ett mått på ålder som både A och B kan enas om.

Låt planeten vara ett avstånd $x = cT$ från Jorden, och låt B röra sig med en hastighet $v = \beta c$ mot antingen planeten eller Jorden. Enligt A tar det $t = \frac{T}{\beta}$ att nå planeten, och $t = \frac{2T}{\beta}$ att åka fram och tillbaka. B s position ges då enligt A av

$$s = \begin{cases} \beta ct, & t < \frac{T}{\beta}, \\ c(2T - \beta t), & \frac{T}{\beta} < t < \frac{2T}{\beta}. \end{cases}$$

Om varje tvilling skickar ut en ljuspuls med tidsintervall Δt , mottar B ljuspuls nummer n enligt A när

$$c(t_{B,n} - n\Delta t) = s(t_{B,n}).$$

Vi betraktar först ljuspulser som mottas när B är på väg mot planeten. Dessa mottas vid tid

$$t_{B,n} = \frac{n}{1 - \beta}\Delta t.$$

A mottar ljuspulser som skickas ut med tidsintervall $\gamma\Delta t$ och ljuspuls nummer n mottas när

$$s(\gamma n\Delta t) - c(t_{A,n} - \gamma n\Delta t) = 0.$$

Vi betraktar igen ljuspulser som mottas när B är på väg mot planeten. Dessa mottas vid tid

$$\begin{aligned} c\beta\gamma n\Delta t - c(t_{A,n} - \gamma n\Delta t) &= 0, \\ t_{A,n} &= (1 + \beta)\gamma n\Delta t. \end{aligned}$$

Vi betraktar vidare ljuspulser som mottas av B på väg mot Jorden. Dessa mottas när

$$\begin{aligned} c(t_{B,n} - n\Delta t) &= c(2T - \beta t_{B,n}), \\ t_{B,n} &= \frac{2T + n\Delta t}{1 + \beta}. \end{aligned}$$

A mottar ljuspuls nummer n när

$$\begin{aligned} c(2T - \beta\gamma n\Delta t) - c(t_{A,n} - \gamma n\Delta t) &= 0, \\ t_{A,n} &= 2T + (1 - \beta)\gamma n\Delta t. \end{aligned}$$

Skillnaden mellan de två kommer från att B mottar sin sista puls på väg mot planeten vid $t = \frac{T}{\beta}$, medan A mottar sista pulsen från färden till planeten vid tiden

$$t = \frac{1 + \beta}{\beta}T.$$

Därmed inträder ändringen tidigare för B än A , och detta kommer ge att de är överens om hur gamla de är.

För att kunna jämföra åldern, vill vi nu veta hur många pulser varje tvilling mottar under de två etapperna. Under resan till planeten mottar B

$$n_{A \rightarrow B} = \frac{T}{\Delta t} \frac{1 - \beta}{\beta}$$

pulser, medan B har skickat ut

$$n_B = \frac{T}{\beta\gamma\Delta t}$$

pulser. Under resan tillbaka till Jorden mottar B

$$n_{A \rightarrow B} = 2T \frac{1}{\beta\Delta t} - \frac{T}{\Delta t} \frac{1 - \beta}{\beta} = \frac{T}{\beta\Delta t} (2 - 1 + \beta) = \frac{T(1 + \beta)}{\beta\Delta t}$$

pulser, medan B har skickat ut

$$n_B = \frac{T}{\beta\gamma\Delta t}$$

pulser. Alltså upplever B att den åldras långsammare med en faktor

$$\frac{n_{A \rightarrow B}}{n_B} = \frac{\frac{T}{\Delta t} \frac{1 - \beta}{\beta}}{\frac{T}{\beta\gamma\Delta t}} = (1 - \beta)\gamma$$

under resan till planeten, dvs. under tiden $\frac{T}{\beta\gamma}$ och snabbare med en faktor

$$\frac{n_{A \rightarrow B}}{n_B} = \frac{\frac{T(1 + \beta)}{\beta\Delta t}}{\frac{T}{\beta\gamma\Delta t}} = (1 + \beta)\gamma$$

under den resterande tiden. Alltså är det slutliga förhållandet i ålder

$$\frac{(1 - \beta)\frac{T}{\beta} + (1 + \beta)\frac{T}{\beta}}{2\frac{T}{\gamma\beta}} = \frac{1 - \beta + 1 + \beta}{2}\gamma = \gamma.$$

På andra sidan mottar A

$$n_{B \rightarrow A} = \frac{T}{\gamma\beta\Delta t}$$

pulser som skickades från färden till planeten under tiden $\frac{1+\beta}{\beta}T$, medan A har skickat ut

$$n_A = \frac{1+\beta}{\beta} \frac{T}{\Delta t}$$

pulser under samma tiden. A mottar även

$$n_{B \rightarrow A} = \frac{2T}{\gamma\beta\Delta t} - \frac{T}{\gamma\beta\Delta t} = \frac{T}{\gamma\beta\Delta t}$$

pulser från färden tillbaka till Jorden, medan A har skickat ut

$$n_A = \frac{\frac{2T}{\beta} - \frac{1+\beta}{\beta}T}{\Delta t} = \frac{2T - (1+\beta)T}{\beta\Delta t} = \frac{T(1-\beta)}{\beta\Delta t}$$

pulser under den återstående tiden. Alltså upplever A att den äldas snabbare med en faktor

$$\frac{n_{B \rightarrow A}}{n_A} = \frac{\frac{T}{\gamma\beta\Delta t}}{\frac{1+\beta}{\beta} \frac{T}{\Delta t}} = \frac{1}{(1+\beta)\gamma}$$

när den får signaler från resan till planeten och långsammare med en faktor

$$\frac{n_{B \rightarrow A}}{n_A} = \frac{\frac{T}{\gamma\beta\Delta t}}{\frac{T(1-\beta)}{\beta\Delta t}} = \frac{1}{(1-\beta)\gamma}$$

när den får signaler från resan till Jorden. Det slutliga förhållandet i ålder blir då

$$\frac{\frac{1}{(1+\beta)\gamma} \frac{1+\beta}{\beta} T + \frac{1}{(1-\beta)\gamma} (\frac{2T}{\beta} - \frac{1+\beta}{\beta} T)}{\frac{2T}{\beta}} = \frac{1 + \frac{1-\beta}{1-\beta} \frac{1}{\gamma}}{2} = \frac{1}{\gamma},$$

och de två är överens om att tvillingen på Jorden åldras snabbast.

Relativistisk Dopplereffekt Betrakta återigen två olika system, där det rörliga systemet rör sig med en vinkel θ från linjen mellan O och O' , som är parallell med x axeln. Från O' skickas det ut ljuspulser vid t'_1 och t'_2 . Lorentztransformationerna ger att ljuset skickas ut vid tider

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma t'_1, \\ t_2 &= \gamma t'_2. \end{aligned}$$

Om första pulsen skickas ut vid avstånd x_1 , skickas den andra ut vid avstånd

$$x_2 = x_1 + \gamma v(t'_2 - t'_1) \cos \theta,$$

där vi har approximerat att avståndet S' rör sig normalt på x axeln är litet. Ljuspulserna når därmed origo vid tid

$$\begin{aligned} t_{O1} &= t_1 + \frac{x_1}{c}, \\ t_{O2} &= t_2 + \frac{x_2}{c} \\ &= t_2 + \frac{x_1 + \gamma v(t'_2 - t'_1) \cos \theta}{c} \\ &= \frac{x_1}{c} + \gamma t'_2(1 + \beta \cos \theta) - \gamma t'_1 \beta \cos \theta. \end{aligned}$$

Vi inför periodtiden $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, och får

$$\begin{aligned} \Delta t_O &= \gamma t'_2(1 + \beta \cos \theta) - \gamma t'_1(1 + \beta \cos \theta) \\ &= \gamma(1 + \beta \cos \theta) \Delta t'. \end{aligned}$$

Frekvensen för ljuspulsen ges då av

$$f_{\text{obs}} = \frac{1}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} f_{\text{källa}}.$$

Lorentztransformation av hastigheter Vi använder differentialerna

$$dx = \gamma(dx' + v dt'),$$

$$dt = \gamma(dt' + \frac{\beta}{c} dx')$$

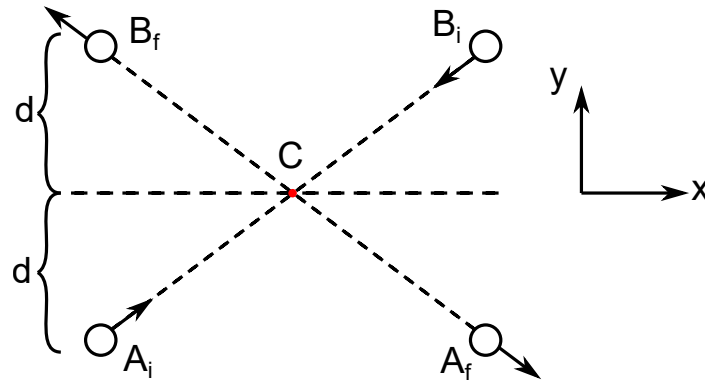
och får hastigheterna

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x},$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x},$$

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}.$$

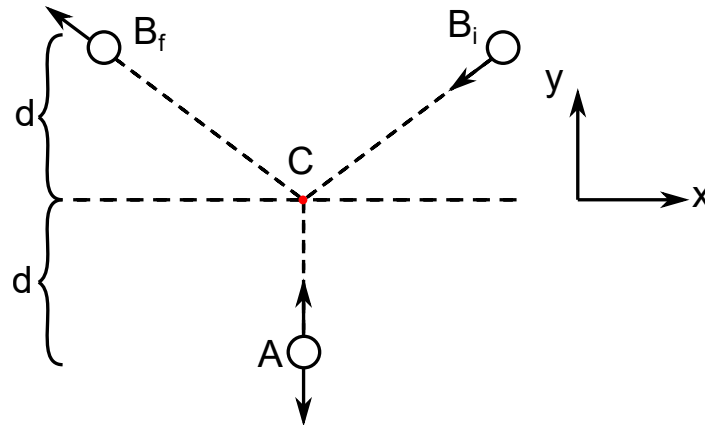
Relativistisk rörelsemängd Betrakta studsens som illustreras i figur 2.



Figur 2: Illustration

Vi antar här att rörelsen kan vara relativistisk i x , men approximeras som klassisk i y . Om partiklarna har samma massa (och hastighet), är masscentrum statiskt i C .

Vi kan alternativt betrakta studsens i ett system som följer partikeln A i x -riktning, vilket illustreras i figur 3.



Figur 3: Illustration

Båda system är inertialsystem, och därmed är rörelsemängden bevarad i båda system.

Vi definierar tiden t_0 som det tar för A att röra sig avståndet d upp och ned i A 's referensram. Ändringen i rörelsemängd ges då av

$$\Delta p_{A,y} = -2m_A \frac{d}{t_0} - 2m_A \frac{d}{t_0} = -4m_A \frac{d}{t_0},$$

$$\Delta p_{B,y} = 2m_B \frac{d}{t_0} + 2m_B \frac{d}{t_0} = 4m_B \frac{d}{t_0},$$

där tiden t är tiden det tar för B att röra sig upp och ned i den betraktade referensramen. Eftersom rörelsen i y -riktning är klassisk, är denna tiden t_0 i B :s referensram. Vi transformerar därmed tillbaka och får

$$\Delta p_{B,y} = 4m_B \frac{d}{\gamma t_0}.$$

Fysikens lagar gäller i alla inertialsystem, vilket systemet vi betraktar är, och därmed är den totala ändringen i rörelsemängdsmoment lika med 0, vilket ger

$$m_B = \gamma m_A.$$

Eftersom rörelsen i y -riktning är klassisk, kan A :s massa nu ersättas av vilomassan m_0 , som är A :s massa mätt i sitt eget inertialsystem. Eftersom de två har samma vilomassa, ger detta

$$m = \gamma m_0.$$

Den relativistiska rörelsemängden ges därmed av

$$p = mv = \gamma m_0 v.$$

Relativistisk energi Newtons andra lag ger

$$F = \frac{d}{dt}(mv).$$

Om kraftsumman F får verka på en partikel som börjar från vilo, ges dens kinetiska energi av

$$T = \int F \cdot ds = \int \frac{d}{dt}(mv) \cdot v dt = \int v \cdot d(mv) = \int v^2 dm + mv \cdot dv.$$

Lorentztransformationen av massa ger

$$m^2 \gamma^2 = m_0^2, m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2.$$

Vid att beräkna differentialen av båda sidor får

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v \cdot dv = 0, c^2 m = v^2 dm + mv \cdot dv,$$

vilket insatt i integralen ger

$$T = \int c^2 dm = c^2(m - m_0) = m_0 c^2(\gamma - 1).$$

Detta kan alternativt skrivas som

$$mc^2 = T + m_0 c^2,$$

vilket tolkades som ett uttryck för totala energin som innehåller en konstant viloenergi $m_0 c^2$ (obs: Ej en potentiell energi!). Därmed ges den totala energin av

$$E = mc^2 = T + m_0 c^2.$$

Relation mellan energi och rörelsemängd Vi har nu fått

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2, E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4.$$

Energien i kvadrat kan skrivas som

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \right),$$

eftersom $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Vi får vidare

$$\begin{aligned} E^2 &= m_0^2 c^4 + m_0^2 v^2 c^2 \\ &= m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \end{aligned}$$

2 Allmän relativitetsteori

Gravitationell tidsdilatation Betrakta två observatorer i ett tyngdfält med (svag) uniform fältstyrka g som befinner sig på olika positioner med en höjdskillnad h . Då upplever observatören högre upp i fältet en tidsdilatation

$$\Delta t' = (1 + \frac{gh}{c^2})\Delta t.$$

Om man har ett icke-uniformt tyngdfält, kan man i stället använda att för små Δh gäller att

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t(h + \Delta h)}{\Delta t(h)} &= (1 + \frac{g(h)}{c^2}\Delta h), \\ \prod \frac{\Delta t(h_i)}{\Delta t(h_{i-1})} &= \frac{\Delta t(h)}{\Delta t(h_0)} = (1 + \sum \Delta h \frac{g(h_i)}{c^2}) \end{aligned}$$

med $h_i = h_0 + i\Delta h$, och i gränsen $\Delta h \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta t(h)}{\Delta t(h_0)} = 1 + \int_{h_0}^h dx \frac{g(x)}{c^2}.$$

3 Kvantmekanik

Brister i klassisk fysik Redan innan kvantmekaniken formulerades, fanns det brister i det experimentella beviset för den klassiska fysiken.

Ultravioletter katastrofen Ett bevis var att den klassiska förutsägelsen av svartkroppsstrålning var

$$I(\nu, T) = \frac{2kT\nu^2}{c^2},$$

som divergerar för stora frekvenser. Observationer av svartkroppsstrålning var naturligtvis inte i närheten av detta utan gick mot 0 även för höga frekvenser.

Max Planck sägs att ha upptäckt kvantmekaniken vid att härleda intensitetsfördelningen för svartkroppsstrålning under antagandet att energinivåerna i kroppen var diskreta kvanta av $h\nu$, där h är den nu införda Plancks konstant. Han fick

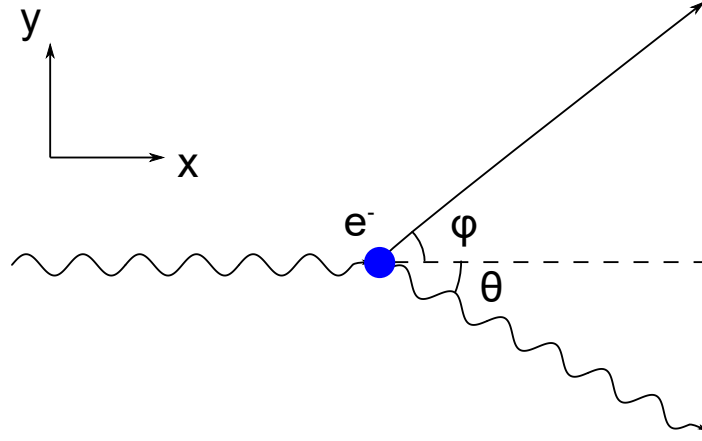
$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Denna går både mot 0 för höga frekvenser och beter sig som den klassiska förutsägelsen vid låga frekvenser. Einstein gissade senare att $h\nu$ var energien för partiklarna som bygger upp ljus - fotoner.

Fotoelektriska effekten Om man bestrålar metaller med elektromagnetisk strålning, frigörs elektroner (upptäckta vid det här laget) från metallet. Man kunne sätta metallet i närheten av en anod så att en spänningsskillnad mellan metallet och anoden kunde attrahera metaller till anoden. Vid att elektrisk koppla de två samman, kunde man mäta strömmen som orsakades av de frigjorda elektronerna. Det som observerades var:

- Det frigjordes bara elektroner om den inkommande strålningen hade en frekvens över en viss gränshäns.
- Under denna gränshäns spelade strålningsintensiteten ingen roll.
- Över gränshäns mättes den maximala elektronenergin som $E = h\nu - W$.

Detta var svårt att förklara med klassisk fysik.



Figur 4: Illustration av studs mellan en foton och en elektron.

Comptonspridning Elektromagnetisk strålning kan spridas på elektroner. Klassiskt är det svårt att förklara spridningsmönstret som uppstår, eftersom elektromagnetisk strålning är vågor. Däremot kan man anta att strålningen består av fotoner med rörelsemängd och energi enligt speciell relativitetsteori och resultaten från fotoelektriska effekten, som illustrerad i figur 4.

Energins bevarande ger

$$h\nu + m_{e,0}c^2 = E_e + h\nu'$$

och rörelsemängdens bevarande ger

$$\begin{aligned} h\frac{\nu}{c} &= h\frac{\nu'}{c} \cos \phi + p'_e \cos \theta, \\ h\frac{\nu'}{c} \sin \phi - p'_e \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Vi omformulerar förste rörelsemängdsekvationen till

$$h\frac{\nu}{c} - h\frac{\nu'}{c} \cos \phi = p'_e \cos \theta$$

och kvadrerar för att få

$$h^2 \frac{\nu^2}{c^2} - 2h^2 \frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \phi + h^2 \frac{\nu'^2}{c^2} \cos^2 \phi = p_e'^2 \cos^2 \theta.$$

Kombinerat med kvadratet av den andra rörelsemängdsekvationen ger detta

$$h^2 \frac{\nu^2}{c^2} + h^2 \frac{\nu'^2}{c^2} - 2h^2 \frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \phi = p_e'^2.$$

Energins bevarande ger vidare

$$E_e = h\nu - h\nu' + m_{e,0}c^2.$$

Vi kvadrerar och kombinerar med massa-energi-sambandet från speciell relativitet och får

$$\begin{aligned} h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_{e,0}c^2 + m_{e,0}^2c^4 &= p_e'^2c^2 + m_{e,0}^2c^4 \\ &= h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \phi + m_{e,0}^2c^4, \\ (\nu - \nu')m_{e,0}c^2 &= h\nu\nu'(1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

Vi skriver nu om till våglängd och får

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right)m_{e,0}c^2 &= h\frac{c^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos \phi), \\ (\lambda' - \lambda)m_{e,0}c &= h(1 - \cos \phi), \\ \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_{e,0}c}(1 - \cos \phi), \end{aligned}$$

alternativt i termer av energi

$$E' = \frac{1}{\frac{1 - \cos \phi}{m_{e,0}c^2} + \frac{1}{E}},$$

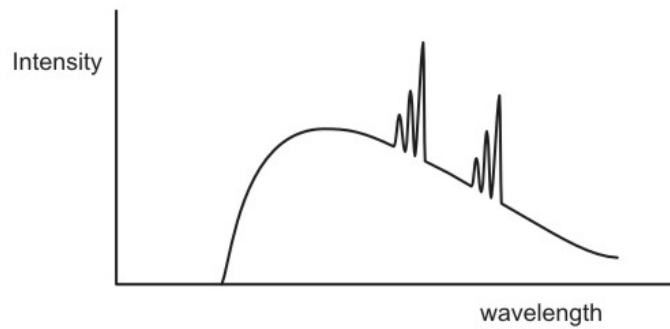
vilket stämde överens med experiment.

Röntgendiffraktion Röntgenstråler har ganska liten våglängd. För att få diffraktion med röntgenstrålning, kan man använda plan av atomer i fasta material. Man kan visa att diffraktionsvillkoret är

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

där θ är infallsvinkeln för strålningen och d är avståndet mellan atomplanen.

Röntgenspektra Om ett metall bestrålas av röntgenstrålning med olika våglängder, kan man använda en diffraktionsuppställning och mäta intensiteten som funktion av utgående vinkel. Eftersom man har ett spektrum av våglängder, får man konstruktiv interferens i ett intervall av vinklar. Braggs formel implicerar att den utgående vinkeln beror av våglängden till strålningen som interfererar konstruktivt, och det erhållna spektrumet från ett sådant experiment visas i figur 5.



Figur 5: Typiskt röntgenspektrum.

Röntgenspektrumet är en superposition av ett kontinuerligt spektrum och vissa skarpa toppar. Den kontinuerliga delen kommer direkt från våglängdsspektrumet. De skarpa topparna kommer från excitationer av elektroner i metallet. När metallernas elektroner exciteras, skapas det en foton när de hoppar tillbaka till tillståndet med lägre energi, och detta orsakar intensitetstopparna.

de Broglie-våglängd Kombinationen

$$E = h\nu, p = \frac{E}{c}$$

för fotoner fick de Broglie att hypotetisera att alla partiklar har en våglängd. Vid att kombinera resultaten ovan, var de Broglies hypotes att denna våglängden ges av

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Detta kan i stället omformuleras till kinetisk energi vid att visa att

$$p = \sqrt{2Tm_0 + \left(\frac{T}{c}\right)^2},$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{\sqrt{2Tm_0 + \left(\frac{T}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2Tm_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{T}{c\sqrt{2Tm_0}}\right)^2}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2Tm_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{T}}{c\sqrt{2m_0}}\right)^2}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2Tm_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T}{2m_0c^2}}}.\end{aligned}$$

Davidsson-Germers experiment I detta experimentet besetrålades en nickelskatod normalt på sin yta med elektroner som accelererades med någon spänning, och reflekterade elektroner detekterades som funktion av vinkel ut från strålen. I detta experimentet uppmättes ett intensitetsmaximum vid en annan vinkel än 0, och med Braggs formel samsvarar detta maximumet med avståndet mellan atomplan i nickel.

Osäkerhetsprincipen Partiklars vågnatur kombinerad med Fourieranalys implicerar

$$\begin{aligned}\Delta p \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2\pi}, \\ \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2\pi},\end{aligned}$$

där vi har infört den reducerade Plancks konstant $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Vågfunktionen Baserad på dessa resultaten infördes vågfunktionen Ψ . Det postulerades vidare att för alla dynamiska system existerar en vågfunktion som innehåller all information om systemet. Denna är kontinuerligt deriverbar.

Sannolikhet Olika experiment började visa att partiklars position har ett icke-deterministiskt element i sig. Positionen beskrivs av en täthetsfunktion, som postulerades vara $|\Psi|^2$.

Schrödingerekvationen För ett system av en partikel i en dimension som rör sig i en potential V beskrivs vågfunktionen av

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + V\Psi = i\hbar\partial_t\Psi.$$

Detta kan utvidgas för mer allmänna system till

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\partial_t\Psi,$$

där \hat{H} är systemets Hamiltonoperator, som kommer diskuteras sedan.

Bundna tillstånd Gör ansatsen $\Psi = \psi(x)\phi(t)$. Då ger Schrödingerekvationen för en enda partikel

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi\partial_x^2\psi + V\psi\phi = i\hbar\psi\partial_t\phi.$$

Detta kan separeras till

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_x^2\psi}{\psi} + V = i\hbar\frac{\partial_t\phi}{\phi}.$$

Om potentialen är tidsberoende, är vänstersidan bara en funktion av position och högersidan bara en funktion av tid. Därmed måste båda sidor vara lika med en konstant, som vi för tillfället kallar E .

Tidsberoendet ger

$$\begin{aligned}\partial_t \phi &= -i \frac{E}{\hbar} \phi, \\ \phi &= A e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.\end{aligned}$$

Om vi tittar på frekvensen, får vi

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{E}{\hbar} = \frac{E}{h},$$

och vi ser att E precis motsvarar systemets energi. Vi noterar vidare att $|\phi|^2$ är tidsberoende, så denna sortens tillstånd ändrar sig inte med tiden.

Positionsberoendet ger nu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi + V \psi = E \psi.$$

Alla lösningarna till denna ekvationen är egenfunktioner till operatoren $-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V$ med egenvärde E .

Väntevärde Eftersom kvantmekaniken handlar om sannolikheter, är även konceptet väntevärde relevant. I kvantmekaniken postulerar vi att det till varje observabel q finns en operator \hat{q} , och dens väntevärde ges av

$$\langle q \rangle = \int dx \psi^* \hat{q} \psi.$$

Exempel på grundläggande operatorer är

- positionsooperatoren $\hat{x} = x$.
- rörelsemängdsoperatorn $\hat{p} = -i\hbar \partial_i$.
- kinetisk energi-operatorn $\hat{T} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2$.
- potentialoperatorn $\hat{V} = V$.
- Hamiltonoperatorn $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$.
- rörelsemängdsmomentoperatorn $\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k \equiv \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$.

Spinn Spinn är en ny fysikalisk storhet som dyker upp i kvantmekaniska sammanhang. Den har egenvärden

$$|S| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

enligt postulat, där s är ett nytt kvanttal. För elektroner är $s = \frac{1}{2}$.

Alternativt kan man titta på z -komponenten av spinnet, med egenvärden

$$S_z = m_s \hbar,$$

där $m_s = 0, \dots, \pm s$ är det spinnmagnetiska kvanttalet.

Magnetiskt moment Det magnetiska momentet som skapas av en strömslinga definieras som

$$\boldsymbol{\mu} = I A \mathbf{n},$$

där I är strömmen i slingan, A är ytan som slingan omkransar och \mathbf{n} är en vektor normalt på slingan enligt högerhandsregeln.

Fermioner och bosoner Alla partiklar kan delas upp i bosoner och fermioner. Om man betraktar den simultana vågfunktionen $\Psi_{1,2}$ till två lika partiklar, är dessa bosoner om $\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}$ och fermioner om $\Psi_{1,2} = -\Psi_{2,1}$.

Pauliprincipen Fermionerna uppfyller Pauliprincipen, som säger att två ej särskiljbara partiklar ej kan existera i samma individuella kvanttillstånd. Ett typiskt exempel på en fermion är en elektron.

En konsekvens av detta är det faktum att grundämnen delas upp i periodiska systemet på det sättet de gör.

Spinn-bankoppling Betrakta en elektron i en cirkulär bana kring en proton. I elektronens system rör protonen sig åt motsatt håll, och dens rörelse orsakar en ström

$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{T} \\ &= \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} \\ &= \frac{em_e v r}{2\pi m_e r^2} \\ &= \frac{e}{2\pi m_e r^2} L, \end{aligned}$$

där L är beloppet av elektronens rörelsemängd. Det orsakade magnetfältet har flödestäthet

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I}{2r} \mathbf{e}_n \\ &= -\frac{\mu_0}{2r} \frac{e}{2\pi m_e r^2} \mathbf{L} \\ &= -\frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^2} \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Detta orsakar en potential

$$V = \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}.$$

Vi ser alltså att den orsakade potentialen beror av elektronens spinn och dens rörelsemängdsmoment. Detta är spinn-bankoppling.

Oändlig lådpotential För att få en känsla för vilken sorts fysik som kommer ut av denna teorien, betraktar vi en partikel i en oändlig lådpotential, dvs.

$$V = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta motsvarar en låda med oändligt starka väggar. Rumdelen av Schrödingerekvationen för stationära tillstånd ger inuti lådan

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi &= E\psi, \\ \partial_x^2 \psi &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi. \end{aligned}$$

Vi definierar nu

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

och får

$$\partial_x^2 \psi = -k^2 \psi.$$

Detta har lösningar

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

För att få mer information, behövs randvillkor. På grund av vågfunktionens krökningsegenskaper, som framkommer av Schrödingerekvationen, måste vi ha $\psi(0) = \psi(a) = 0$. Första randvillkoret ger

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ \psi &= A \sin kx. \end{aligned}$$

Andra randvillkoret ger

$$ka = n\pi.$$

Nu kan energin bestämmas enligt

$$\begin{aligned} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} &= \frac{2mE}{\hbar^2}, \\ E &= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}, \end{aligned}$$

och vi ser att energin kan bara anta vissa diskreta värden. Vi ser även att grunntilståndets energi är nollskild, som indikerar att ett system som beskrivs av kvantmekaniken alltid kommer ha en viss rörelse.

Slutligen ger normaliseringsvillkoret

$$\int_0^a dx |B|^2 \sin^2 kx = 1.$$

Integralen på vänstersidan är

$$|B|^2 \int_0^a dx \frac{1 - \cos 2kx}{2}.$$

Den andra termen ger inget bidrag eftersom den har period a , och detta ger

$$\begin{aligned} |B|^2 \frac{a}{2} &= 1, \\ |B| &= \sqrt{\frac{2}{a}}. \end{aligned}$$

Observera att vi endast skriver absolutbeloppet eftersom B kan vara en komplex konstant utan att det ändrar fysiken.

Ändlig lådpotential Betrakta en partikel i en ändlig lådpotential, dvs.

$$V = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ V_0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta motsvarar en låda med en viss flexibilitet i väggarna. Rumdelen av Schrödingerekvationen för stationära tillstånd ger inuti lådan

$$\partial_x^2 \psi = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi.$$

och

$$\partial_x^2 \psi = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi.$$

Vi definierar som förut

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}.$$

Om $E < V_0$ är lösningarna

$$\psi = \begin{cases} Ae^{\alpha x}, & x < 0, \\ Be^{ikx} + Ce^{-ikx}, & 0 < x < a, \\ De^{-\alpha x}, & a < x. \end{cases}$$

Observera att vissa termer från den matematiska lösningen inte är med, då de skulle ge lösningar som inte är normaliserbara.

För att lösa detta, behöver vi de tre villkoren som fås från att ψ är kontinuerligt deriverbar och att $|\psi|^2$ är normaliserad.

Vi ser från lösningen att en partikel kan penetrera lite in i en region där dens totala energi är negativ, det så kallade klassiskt förbjudna området. Vi kan även definiera ett penetrationsdjup

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2m(E - V_0)}}$$

som ett mått på hur långt in i den klassiskt förbjudna zonen bundna tillstånd kan penetrera.

Andra potentialer Det finns andra intressanta potential att betrakta som kan användas för att beskriva fysikaliska system. Exempel är

- det harmoniska potentialen $V = \frac{1}{2}Kx^2$, med energiegenvärden $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$, där $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Bundna system Ett bundet system är ett system som är lokaliserad i rummet.

Obundna system Ett obundet system är ett system som ej är lokaliserad i rummet.

Ändlig barriär Betrakta en partikel i en ändlig lådpotential, dvs.

$$V = \begin{cases} 0, & 0 < x, \\ V_0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta motsvarar en vägg med en viss flexibilitet:

Man kan definiera en transmissionskoefficient och en reflektionskoefficient lika med sannolikheten för att partiklar transmitteras och reflekteras av barriären.

Tunneling Klassiskt kan en partikel inte kryssa en barriär om den har för låg energi. Kvantmekaniskt kan man beräkna en transmissionssannolikhet för tunneling.

Ett enkelt fall som illustrerar tunneling är potential som är konstant lika med 0 förutom i en region med bredd a , där potentialen är V_0 . Schrödingerekvationen ger för detta fallet

$$T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2a\sqrt{2m(V_0-E)}}, E < V_0, a \gg \delta.$$

Tunneling som fenomen förklarar t.ex. α -sönderfall, mikroskopitekniken STM och varför Solen brinner (fusion möjliggörs av att olika atomer kan tunnela in i varandras kärnor).

Schrödingerekvationen i högre dimensioner I högre dimensioner utvidgas Schrödingerekvationen triviellt genom att utvidga definitionen av Hamiltonoperatoren till att verka i alla dimensioner. Även normaliseringen görs över alla dimensioner. Notera att separeringen i tid och rum är exakt likadan.

Ett enkelt exempel är för en partikel, där Hamiltonoperatoren utvidgas till

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V.$$

4 Atomfysik

Bohrs modell För att förklara väteatomens kvantiserade emissionsspektrum, postulerade Bohr att

- elektronerna kretsar i stabila banor runt kärnan.
- en övergång mellan två banor ger en foton med energi $h\nu = \Delta E$.
- elektronens integrerade rörelsemängd längs med banan kring kärnan är en heltalsmultipel av h .

Om elektronen har konstant rörelsemängd i banan, ger detta

$$2\pi r p = nh \implies v = \frac{nh}{2\pi m_e r},$$

där r är banans radius. Accelerationen i radiell riktning ger vidare

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

eftersom atomkärnan har samma laddning som elektronen, med motsatt tecken. Enligt Bohrs postulat är de tillåtna banradierna

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} n^2.$$

Den totala energin ges av

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m_e r^2} - \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2} \\ &= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} - \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2} \\ &= -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Detta stämde med vätespektret.

Väteatomen En viktig experimentell kontroll av kvantmekaniken är väteatomens spekter. Bohr lyckades förklara detta med en modell där kvantiseringen av energi introducerades ad hoc, men vi vill nu se om vi får samma spektrumet med hjälp av kvantmekanik.

För att göra detta, vill vi beskriva ett system av en (fix) proton med en elektron i bana runt sig. I sfäriska koordinater med protonen i centrum blir Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Att ens skriva upp Schrödingerekvationen är extremt jobbigt, så vi försöker i stället att separera den. Detta ger

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{2mr^2 \sin^2(\theta)}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0.$$

Vi separerar först bort ϕ -termen, och setter den lika med en konstant som vi kallar $-m_l^2$ (som kan vara vad som helst om vi inte exkluderar komplexa tal). Vidare får man

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m_l^2}{\sin^2(\theta)} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0$$

Nu kan vi separera igen, med separationskonstant $l(l+1)$. Vi får alltså tre ekvationer

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} &= -m_l^2, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) &= l(l+1), \\ \frac{1}{\sin(\theta)\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m_l^2}{\sin^2(\theta)} &= l(l+1).\end{aligned}$$

Vi förenklar till

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m_l^2 \Phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - l(l+1) \right) R &= 0, \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{m_l^2}{\sin^2(\theta)} + l(l+1) \right) \Theta &= 0.\end{aligned}$$

Det här är svårt att lösa, och lösningarna är så speciella att de är namngivna efter olika personer, men randvillkoren kommer att ge

$$\begin{aligned}l &= 0, 1, \dots, n-1, \\ m_l &= 0, \pm 1, \dots, \pm l.\end{aligned}$$

l kallas för bankvanttalet och m_l kallas för det magnetiska kvanttalet. Det sista kvanttalet n indikerar energin.

Det återstår nu att lösa den radiella ekvationen. Vi gör heller inte det, men de tillåtna energierna är

$$E = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Från detta kan vi definiera Bohrradien

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}.$$

Rörelsemängdsmoment i atomen Det visar sig att $Y = \Theta\Phi$ är egentillstånd till båda \hat{L}^2 och \mathbf{L}_z med egenvärden $\hbar l(l+1)$ respektive $\hbar m_l$.

Magnetiskt moment i atomen Om vi betraktar en elektron i en planär cirkulär bana kring kärnan, ges det magnetiska momentet av

$$\mu = IA = \frac{e}{\tau} \pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m_e} |\mathbf{L}|.$$

Från detta får vi en vektor

$$\mathbf{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L},$$

och speciellt

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e} L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l = -\mu_B m_l,$$

där vi har definierat Bohrmagnetonen

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Om vi nu applicerar ett externt magnetiskt fält i z -riktningen, ger detta upphov till en potential

$$U = -\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \mu_B m_l B.$$

Även spinnet ger upphov till ett magnetiskt moment

$$\mu_S = -gS \frac{e}{2m_e} \mathbf{S},$$

där g_S är det gyromagnetiska förhållandet som (nästan) alltid är lika med 2.

Zeeman-effekten När en atom är i ett externt magnetiskt fält, splittas atomspektrumet därför att olika rörelsemängdsmoment har olika energier på grund av den uppkomna potentialen.

Stern-Gerlachs experiment Potentialen som uppkommer av ett externt magnetiskt fält ger upphov till en kraft

$$\mathbf{F} = -\vec{\nabla} - \mu \times \mathbf{B},$$

$$F_z = \mu_z \partial_z B \mathbf{e}_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l \partial_z B \mathbf{e}_z.$$

Det gjordes därför ett experiment där elektroner sköts genom ett magnetfält som ökade i styrka uppåt och fångades upp av en skärm. Baserad på resultaten från rörelsemängdsmomentet, skulle elektronerna fångas upp i ett udda antal olika punkter, men detta var inte fallet. Specifikt, då de förväntade att alla elektroner skulle hamna i samma punkt ($l = 0$), hamnade de i stället i två olika punkter. Detta måste uppkomma från spinnet.

Masstal En atomkärna har Z protoner, N neutroner och masstal $A = N + Z$. Olika isotoper betecknas då som ${}_Z^A X_N$, eller bara ${}^A X$.

Kärnans täthet Man har (möjligtvis experimentellt) att kärnans radie är proportionell mot $A^{\frac{1}{3}}$, och detta ger

$$\rho = \frac{V}{m} \propto \frac{A}{A} = 1,$$

och kärnans täthet beror ej av masstalet.

Experiment som avslöjade atomkärnan Under tidiga 1900-talet trodde man att atomen var kontinuerlig, med en positivt laddad smet som omkransade negativt ladda elektroner. I 1911 kom Rutherford på ett experiment som gjordes av Geiger och Marsden, där en stark α -källa bombarderade en guldfilm. Enligt den dominerande modellen skulle α -partiklarna gå direkt igenom och spridas minimalt. Däremot spriddes vissa α -partiklar mycket, vilket implicerade att i atomens centrum fanns en tung kärna där det mesta av massan var koncentrerad. Vidare bytte han ut guldfilmen med en aluminiumsfilm. Eftersom det är färre protoner i aluminiums kärna, är det svagare repulsion mellan atomkärnan och α -partikeln, vilket gjorde att de i detta experimentet lyckades träffa atomkärnan.

5 Kärnfysik

Radiokativitet Radioaktivitet är ett begrepp för processer där atomkärnan förändras. För att en radioaktiv process skall ske (spontan), måste

- processen ge från sig energi.
- konserveringslagarna för laddning, rörelsemängd, rörelsemängdsmoment, nukleontalet (inte i allmänna kärnprocesser), leptontalet och universums totala energi måste vara uppfyllda.

Aktivitet Den radioaktiva aktiviteten definieras som

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

där N är antal radioaktiva partiklar i systemet. Experimentellt avtar exponentiellt med tiden, vilket enkelt kan förklaras om aktiviteten är proportionell med antal radioaktiva partiklar.

Halveringstid Om man gör ansatsen $A = \lambda N$ får man $A \propto e^{-\lambda t}$. Halveringstiden $t_{\frac{1}{2}}$ definieras som tiden det tar för aktiviteten (eller, ekvivalent, antal radioaktiva partiklar) att halveras relativt ursprungsaktiviteten. Från detta relateras konstanten till halveringstiden med

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}.$$

Q-värde Q -värdet för en radioaktiv process är den totala ändringen i energi för processen.

α -sönderfall I α -sönderfall ger kärnan från sig en He-kärna med 2 protoner och 2 neutroner. Energispektrumet för denna processen är diskret.

Man kan räkna fram att α -partikelns energi ges av

$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{ny}}}}.$$

β^- -sönderfall I β^- -sönderfall omdannas en neutron till en proton, och det skapas i processen en elektron och en elektron-antineutrino med symbolen $\bar{\nu}_e$. $\bar{\nu}_e$ är i princip masslös. Eftersom två partiklar skapas, är energifördelningen för β^- -partikeln (elektronen) kontinuerlig och stannar vid processens Q -värde.

Reaktionens Q -värde ges av

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= (m_{N,Z} - m_{N-1,Z+1} - m_{e^-})c^2 \\ &= (M_{N,Z} - M_{N-1,Z+1})c^2, \end{aligned}$$

där m refererar till kärnmassan och M den totala atommassan. Villkoret för att reaktionen skall ske är

$$M_{N,Z} > M_{N-1,Z+1}.$$

β^+ -sönderfall I β^+ -sönderfall omdannas en proton till en neutron, och det skapas i processen en positron, med symbol e^+ och en elektronneutrino med symbolen ν_e . Eftersom två partiklar skapas, är energifördelningen för β^+ -partikeln (positronen) kontinuerlig och stannar vid processens Q -värde.

Reaktionens Q -värde ges av

$$Q_{\beta^+} = (M_{N,Z} - M_{N-1,Z+1} - 2m_e)c^2,$$

där vi nu ser att den nya atomen har plats till en mindre elektron och att vi har skapat en positron (som har massan m_e). Villkoret för att reaktionen skall ske är

$$M_{N,Z} > M_{N-1,Z+1} + 2m_e.$$

γ -strålning Atomkärnans energinivåer är även kvantiserade. När kärnan hoppar ned i sina energinivåer, skickas det ut en foton. Gammastrålning kan förekomma efter andra radioaktiva processer, när atomkärnan efter processen är kvar i ett högt energinivå och hoppar ned. Sådana processer har ofta kort halveringstid.

Elektroninfångning I elektroninfångning fångas en elektron in i atomkärnan, och bildar till sammans med protonen en neutron. Från detta skickas även ut en ν_e . Denna processen har ett diskret energispektrum.

Under processen dyker även upp ett ookuperat elektrontillstånd. När en elektron hoppar ned till detta tillståndet, skickas karakteristisk röntgenstrålning ut.

Inre konversion I stället för att göra sig av med energi genom γ -sönderfall, kan kärnan ge energin till en elektron som exiteras.

6 Molekylfysik

Molekyler Molekyler är enheter som består av ett antal atomer.

Frihetsgrader Jämförd med atomer, kan molekyler både vibrera och rotera.

Modellpotential Om vi betraktar en elektron som är bunden av två atomer, försöker vi beskriva den med en potential på formen

$$V(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$$

i en dimension. De involverade konstanterna kan anpassas till experiment, men för att elektronen inte skall dras in mot en atomkärna, måste $m > n$.

Derivatans av detta ges av

$$\frac{dV}{dr} = \frac{nA}{r^{n+1}} - \frac{mB}{r^{m+1}},$$

och potentialens minimum ges av

$$\begin{aligned}\frac{nA}{r^{n+1}} - \frac{mB}{r^{m+1}} &= 0, \\ nA &= \frac{mB}{r^{m-n}} \\ r &= \left(\frac{mB}{nA}\right)^{\frac{1}{m-n}}.\end{aligned}$$

Jonbindning Om man har två atomer, där den ena har en löst bunden elektron och den andra har ett ockuperat tillstånd i sitt ytterste fyllda skal, kan den löst bundna elektronen övergå från ena atomen till den andra. Detta resulterar i en nettoladdning på varje atom, vilket skapar en attraherande kraft, även kallad en jonbindning. Jonkristaller som bildas av fler atomer förklaras analogt.

Utbytet av elektroner i sig själv är inte gynnsamt utan det som gör att salter bildas spontant är kombinationen av elektronutbyte och Coulombvexelvärkan.

Vid små avstånd mellan atomerna får man repulsiva krafter både från Paulirepulsion mellan elektronerna och Coulombrepulsion mellan kärnorna (effekten av dessa beror på avståndet mellan atomerna), varför modellpotentialen ovan är en bra beskrivning av interaktionen mellan atomerna.

Kovalent bindning Kovalent bindning uppstår när två atomer delar på sina elektroner.

Som ett exempel, betrakta två lika atomer A och B . En ungefärlig lösning till Schrödingerekvationen för en elektron är $\Psi = a\Psi_A + b\Psi_B$. Av symmetriskäl är $a = \pm b$. Detta ger upphov till en symmetrisk och en antisymmetrisk lösning.

I enkla fall som väte kan detta lösas numeriskt. Då kan man jämföra energierna för små och stora avstånd mellan atomerna. Det man får är att den symmetriska lösningen har lägre energi än den antisymmetriska. Den symmetriska lösningen har hög sannolikhetstäthet mellan atomerna, medan den antisymmetriska lösningen har låg täthet mellan atomerna. Därmed kan detta tolkas som att den symmetriska lösningen ger ett elektronmoln mellan atomerna som attraherar båda, medan den antisymmetriska lösningen ger ett moln som omringar två atomer som repelleras.

Rotation Till skillnad från atomer kan molekyler rotera. Det är detta vi vill beskriva.

Betrakta en stel kropp av två punktmassor som roterar i planet i deras masscentrumssystem. Detta är ekvivalent¹ med en stel kropp med massa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ som roterar kring kroppens masscentrum med Ortsvektor $R = r_1 + r_2$.

Varför funkar detta? Det korta svaret är att det första systemet har rörelsemängdsmoment

$$L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2$$

normalt på rörelsesplanet. Det är klart att eftersom kroppen roterar kring sitt masscentrum är $r_1 = -\frac{m_2}{m_1} r_2$, vilket ger

$$\begin{aligned}L &= \frac{m_2^2}{m_1} \omega r_2^2 + m_2 \omega r_2^2 \\ &= \frac{m_2^2 + m_1 m_2}{m_1} \omega r_2^2.\end{aligned}$$

Om man inför det totala avståndet R mellan partiklerna, får man vidare $-r_1 + r_2 = \frac{m_2+m_1}{m_1}r_2 = R$ och $r_2 = \frac{m_1}{m_2+m_1}R$, vilket ger

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \omega R^2,$$

vilket skulle visas.

Kroppens rörelsemängdsmoment ges av $L = \mu v \times R$ och dens tröghetsmoment med avseende på masscentrum ges av $I = \mu R^2$. Då kan rotationsenergin skrivas som

$$E = \frac{L^2}{2I}.$$

Detta systemet är sfäriskt symmetriskt, varför rörelsemängdsmomentet är kvantiserad som $L^2 = \hbar^2 j(j+1)$, $j = 0, 1, \dots$, där j är kvanttalet som beskriver rotationen. Då ges rotationsenergin av

$$E = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}.$$

Vibrationer Bindningarna i molekyler kan vibrera, och det är detta vi vill beskriva.

För att beskriva vibrationerna i en bindning, ansätter vi att atomerna i bindningen interagerar med Morse-potentialen

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\beta(r-r_0)} \right)^2.$$

Nära r_0 kan detta approximeras som en harmonisk oscillator med styrka $k = 2V_0\beta^2$. Detta ger upphov till energinivåer

$$E = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0, v = 0, 1, \dots$$

där $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

7 Fasta tillståndets fysik

Kristaller Kristaller är en underkategori av fasta ämnen där atomerna i ämnet har en viss ordning. Mer specifikt är atomerna ordnade i ett mönster som upprepas perfekt i hela kristallen.

De flesta reella kristallinska ämnen är byggda upp av många små kristaller, där dessa gärna har olika orienteringar relativt varandra.

Bindning i kristaller Kristaller är oftast bundna av jonbindningar, kovalenta bindningar eller metallbindningar. Och vad är nu metallbindningar?

Metallbindningar Atomerna i en kristall kan bindas av metallbindningar. Detta uppstår när atomerna i kristallen ger från sig sina elektroner. Elektronerna bildar en gas, medan de positiva metallatomerna hålls ihop av en balans mellan attraktion till elektrongasen och repulsion mellan andra atomer.

Materialers elektriska egenskaper Alla materialer kan delas i

- isolatorer, som har väldigt hög resistivitet.
- ledare, som har väldigt låg resistivitet.
- halvledare, som har egenskaper någon stans mittemellan.

Bandstruktur Energinivåerna för en enda atom är kvantiserade, men i en kristall kan elektronen leva överallt runt de olika atomerna. De tillåtna energinivåerna för elektronerna i en kristall konvergerar då mot intervall med tillåtna energier, så kallade energiband. Hur dessa banden ser ut för ett material kallas för materialets bandstruktur, och är närt kopplad till de elektriska egenskaperna.

Valensband och ledningsband Valensbandet är det bandet med högst energi som har elektroner i sig. Ledningsbandet är det bandet med lägst energi som har ockuperade elektrontillstånd. Gapet mellan dessa kallas för bandgapet.

Ledares bandstruktur I en ledare krävs relativt låg energi för att excitera elektronerna med högst energi så att de kan röra på sig i kristallen. I termer av bandstruktur kan man säga att valensbandet och ledningsbandet är det samma, eller att bandgapet är litet. Eftersom denna processen kräver lite energi, är den spontan, och därmed leder ledare elektricitet väl.

Isolatorers bandstruktur I en isolator är bandgapet stort, och det är svårt för elektroner att exciteras och börja röra på sig. Därmed leder de elektricitet dåligt.

Halvledares bandstruktur Halvledare har ett bandgap som är någon stans imellan, vilket ger de vissa mer exotiska egenskaper.

Fyllning av band Elektroner fyller tillstånd i band med en given energi med en sannolikhet enligt Fermi-Dirac-fördelningen

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{kT}}}.$$

Dopning av halvledare Dopning av en halvledare är att tillsätta olika andra ämnen till den. Detta gör att man kan ändra dens elektriska egenskaper, antingen vid att tillföra ockuperade elektrontillstånd nära valensbandet eller fylla elektrontillstånd nära ledningsbandet.

Supraledare Vissa materialer förlorar all sin resistivitet när de kyls ned till väldigt låga temperaturer. Dessa kalles supraledare.

8 Partikelfysik

Partikelfysik är läran om universums minsta beståndsdelar.

De första partiklarna vi upptäckte var de som bygger upp atomen. Efter det upptäcktes partiklar från kosmisk strålning. För att upptäcka nya partiklar konstruerade vi partikelacceleratorer för att försöka bilda nya partiklar.

Elementarpartiklar En elementarpartikel är en odelbar partikel. Vi tror att alla elementarpartiklar kan delas upp i kvarkar och leptoner.

Kvarkar Det finns 6 kvarkar:

| | | |
|---------------------|-------------------|--------------------|
| | $q = \frac{2}{3}$ | $q = -\frac{1}{3}$ |
| Spinn $\frac{1}{2}$ | Upp, u | Ned, d |
| | Charm, c | Konstig, s |
| | Topp, t | Botten, b |

Protonen bildas som uud , och neutronen som udd . Man kan undra på om de lika kvarkerna är i samma kvanttillstånd. Detta är inte fallet på grund av färgladdning.

Leptoner Det finns även 6 leptoner:

- elektronen.
- muonen.
- taupartikeln.
- neutriner motsvarande varje partikel.

Alla dessa är fermioner med spinn $\frac{1}{2}$.

Antipartiklar Till varje elementarpartikel tillhör även en antipartikel med motsatta kvanttal.

Utbytespartiklar I partikelfysiken förmedlas alla krafter med hjälp av så kallade utbytespartiklar. Det finns:

- gluonen, som förmedlar stark växelverkan. Den är masslös och har färgladdning.
- fotonen, som förmedlar elektromagnetisk växelverkan. Den är masslös och har ej färgladdning.
- Z -bosonen.
- W -bosonen.

Alla har spinn 1.

Bevarandelagar De viktigaste bevarandelagarna som spelar roll i partikelfysiken är bevarandet av

- energi.
- rörelsemängd.
- laddning.
- antal kvarkar.
- alla leptontal.
- baryontalet.
- kvarksmak, förutom i reaktioner med W .

Invarianta massan Betrakta ett sönderfall där en partikel sönderfallar till vissa andra partiklar. Speciell relativitet ger

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

vilket kan lösas för massan för att ge

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2.$$

Eftersom energin och rörelsemängden bevaras, kan detta skrivas som

$$m^2 c^4 = \left(\sum E_i \right)^2 - \left(\sum p_i \right)^2 c^2,$$

där det summeras över energierna och rörelsemängderna till sönderfallsprodukten. Detta ger upphov till begreppet invariant massa.