

Sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

26 september 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs.

Innehåll

1	Grundläggande koncept	1
2	Prestanda och prestandamått	1
3	Blockschema	1
4	Negativ återkoppling	2
5	Frekvensanalys	5
6	Kompensering	8
7	Tillståndsrepresentationer	9
8	Alternativa regulatorstrukturer	13

1 Grundläggande koncept

Grundläggande begrepp och ideer Reglerteknik handlar om att kontrollera olika storheter, ofta betecknad y , mot något värde r . Dessa påverkas typiskt av en yttre störning v , och vi kan kontrollera dem vid att tillföra en påverkan u .

Strategi för att förstå För att förstå systemet, hittar vi först på en modell som beskriver det. Ur denna modellen fås typiskt en differentialekvation. Denna löser vi med Laplacetransform över tid.

Överförningsfunktionen Typiskt (isär om modellen ger en linjär differentialekvation) fås en lösning i Laplacerummet på formen $Y(s) = G(s)U(s)$, där U är Laplacetransformen av u . Funktionen G är överförningsfunktionen. Notera att denna lösningsformen beror på att alla initialvärden är 0!

Poler Ett systems poler är rötterna till nämnarpolynomet (som typiskt finns) i överförningsfunktionen.

Stabilitet Ett system är stabilt om det tenderar mot ett visst läge. Systemets stabilitet är typiskt kopplad med dets noder. Detta kan man se i enkla fall, till exempel vanliga linjära ordinära differentialekvationer, då systemets polar anger hur snabbt lösningen avtar.

Nollställen Ett systems nollställen är rötterna till täljarpolynomet (som typiskt finns) hos överförningsfunktioner. Eftersom vi är intresserade av att styra y , är det viktigt hur vi ska välja u för att få det. Därmed är $\frac{1}{G}$ en viktig storhet, och nollställen kan därmed orsaka reglerproblem som är svårlösta.

Impulssvar Om lösningen för Y är på formen $Y = GU$, är lösningen för y på formen

$$y(t) = \int_0^t d\tau g(\tau)u(t - \tau).$$

g kallas för impulssvaret.

Rotort En rotort är en plott av ett systems poler som funktion av någon parameter. Den är typiskt uppdelad i grenar, som är kurvor i planet som är parametriserade av parametervärdet. Polerna som motsvarar parametervärdet 0 är rotortens startpunkter, och polarna motsvarande parametervärdet ∞ är rotortens ändpunkter. Om rotorten närmar sig kurvor, är dessa rotortens asymptoter.

2 Prestanda och prestandamått

Stigtid Stigtiden definieras som $T_r = t_2 - t_1$, där $y(t_2) = 0.9$ och $y(t_1) = 0.1$, med y mätt i relativa enheter.

Insvängningstid Insvängningstiden definieras som $|y(t) - 1| < p$ när $t > T_s$, med y mätt i relativa enheter. p är typiskt lika med 0.05.

Översläng Överslänget definieras som $y_{\max} - 1$, med y mätt i relativa enheter.

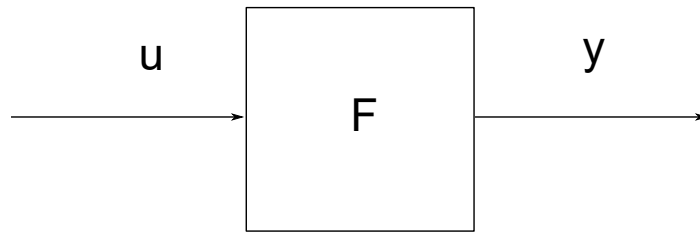
Parametrar i svängningslika system Om du har ett system med ett andra ordningens polynom i överförningsfunktionens nämnare, skriv polynomet som $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Då gäller det att

$$T_r \propto \frac{1}{\omega_0}, \quad T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}, \quad M = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

Stationärt fel Det stationära felet är felet som kvarstår efter lång tid.

3 Blockschema

Syftet med blockschema Blockschema är ett systematiskt sätt att rita reglerade system på.



Figur 1: Illustration av ett enkelt block i ett blockschema.

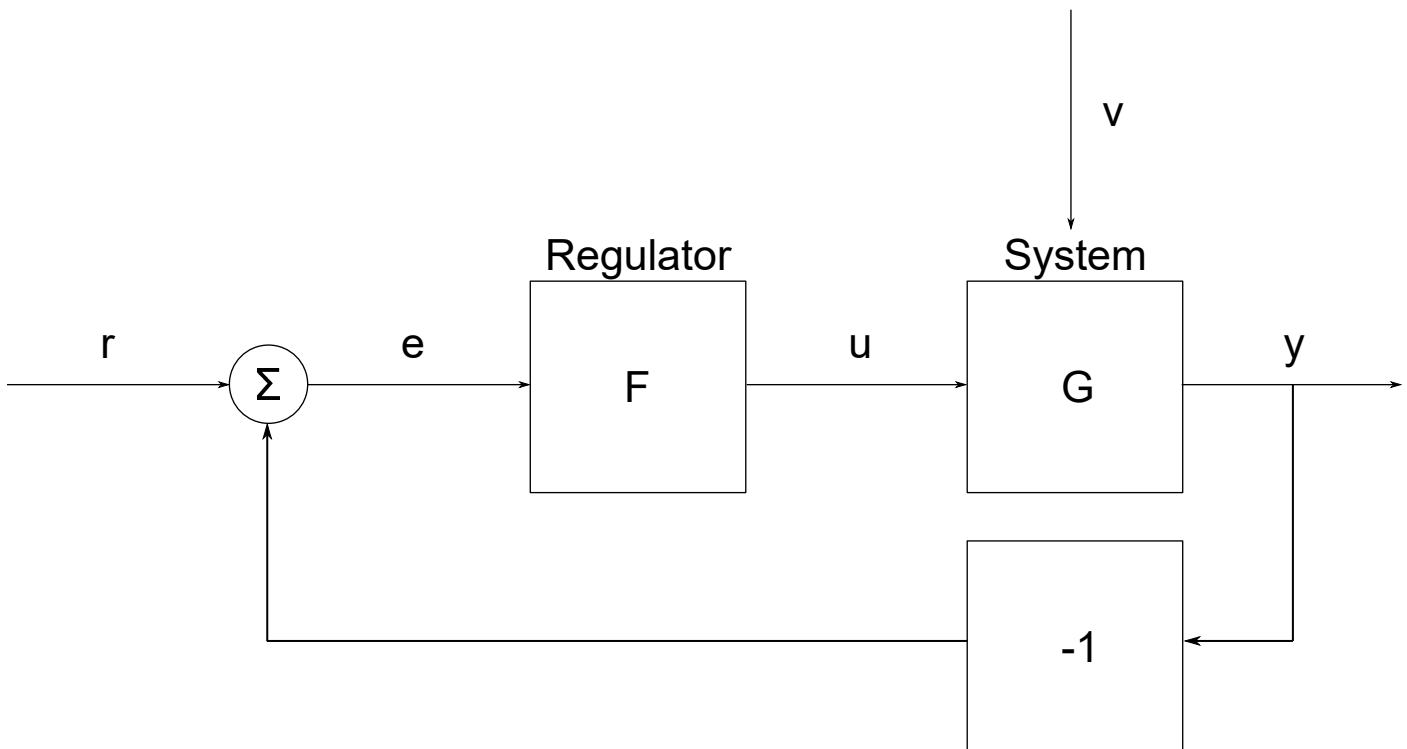
Hur funkar det? Betrakta blocket i figur 1.

Med denna figuren menar vi exakt att $Y(s) = F(s)U(s)$.

4 Negativ återkoppling

Vad är negativ återkoppling? I denna kursen kommer vi att studera hur man kontrollerar ett system vid att låta avvikelsen mot det önskade värdet kontrollera regleringen av storheten.

Illustration i blockdiagram Ett enkelt negativt kontrollsystem illustreras i figur 2.



Figur 2: Schematisk illustration av ett enkelt negativt återkopplad system.

Beskrivning av systemet Vi börjar beskrivningen av systemet med att inte betrakta störningar. I ena ändpunkten har vi

$$Y = GU = GFE.$$

Summationskomponenten till vänster ger oss

$$E = R - Y,$$

och därmed

$$Y = GFR - GFY.$$

Därmed kan vi skriva

$$Y = \frac{GF}{1 + GF}R.$$

Återkopplad överföringsfunktion För ett återkopplad system som kan skrivas som $Y = G_C R$ definieras G_C som den återkopplade överföringsfunktionen. För systemet ovan har vi alltså

$$G_C = \frac{GF}{1 + GF} R.$$

Samband mellan reglerfel och referens Alternativt kan vi lösa systemet ovan för att få

$$R - E = GFE, \quad E = \frac{1}{1 + GF} R.$$

Samband mellan referens och insignal Systemet ovan kan även lösas för att ge

$$U = FR - FY = FR - GFU, \quad U = \frac{F}{1 + GF} R.$$

Slutna systems poler Vi ser att slutna system har poler där $1 + GF = 0$. Därmed bestäms systemets stabilitet av systemet och regulatoren.

P-reglering Principet i P-reglering är att välja en styrsignal som är proportionell mot storleken av felet, alltså

$$u = K(r - y) = Ke.$$

Det är här klart att för att få negativ återkoppling väljer vi $K > 0$.

Denna regleringsmetoden

- minskar inverkan av störning och modellfel för ett bra val av K .
- ökar snabbheten vid insvängning.
- stabiliserar instabila system.

Däremot kan regleringen gå fel om t.ex.

- systemet inte uppför sig som man tror.
- man har begränsningar i styrförmåga.
- man får instabilitet på grund av återkopplingen.

Det är även ett problem att om felet är stationärt, är även styrsignalen det, så även om du har ett nollskild fel klarar inte systemet nödvändigtvis anpassa sig.

PID-reglering PID står för proportionell integrerande deriverande. Denna sortens reglering löser många reglerproblem. Med PID-reglering väljer vi styrsignalen

$$u = K_P e + K_I \int_{t_0}^t d\tau e + K_D \frac{de}{dt}.$$

Alternativt kan vi skriva det som

$$u = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e + T_D \frac{de}{dt} \right).$$

De tre ingående termerna i styrsignalen är

- proportionell återkoppling, som betraktar det nuvarande felet.
- integrerande återkoppling, som betraktar hur felet har uppfört sig.
- deriverande återkoppling, som betraktar hur felet kommer att uppföra sig.

PI-reglering PI-reglering använder ej den deriverande återkopplingstermen. Vi ser härifrån att vid ett stationärt tillstånd är antingen $e = 0$, annars ökar eller minskar u på grund av integraltermen.

Vi vill nu betrakta systemets insvängning. Om det stationära \bar{u} krävs för att $e = 0$, har vi

$$\bar{u} = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e \right).$$

Vid att derivera detta fås

$$K \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{T_I} e \right) = 0,$$

med lösning proportionell mot $e^{-\frac{t}{T_I}}$.

Notera att om man har stort fel kan PI-reglering ge problem. Därför använder man det typiskt när felen är små.

PI-reglering i Laplacevärlden Vid att Laplacetransformera uttrycket för styrsignalen i en PI-regulator, nämligen

$$u = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e \right),$$

fås

$$U = K \left(E + \frac{1}{T_I s} E \right),$$

och enligt figur 2 ser vi att

$$F(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right).$$

Rotort Betrakta ett system med överförningsfunktion G_O för det öppna systemet. Det slutna systemet kommer ha överförningsfunktion

$$G_C = \frac{G_O}{1 + G_O}.$$

G_O är (tydligt) ofta på formen

$$G_O = K \frac{Q}{P},$$

där K är en parameter. Då får vi

$$G_C = \frac{KQ}{P + KQ}.$$

Systemet har alltså poler som ges av

$$P + KQ = 0, \quad \frac{P}{Q} = -K.$$

Detta kriteriet anger systemets rotort.

Vi antar nu att P och Q är polynom av grad n respektive m , där $n \geq m$. Då vet vi att kriteriet har n rötter, och rotorten har därför n grenar. Rötterna dyker antingen upp som reellvärda eller i par av komplexkonjugerade rötter, och därmed är rotorten symmetrisk med avseende på reella axeln. Vi vet även att rotorten har $n - m$ asymptoter. Det gäller även att alla delar av reella axeln som har ett udda antal reella start- och ändpunkter till höger om sig tillhör rotorten.

För att rita rotorten kan du följa dessa steg:

- Beräkna överförningsfunktionen för det slutna systemet. Skriv nämnaren som $P + KQ = 0$.
- Hitta startpunkterna, alltså rötterna till P .
- Hitta ändpunkterna, alltså rötterna till Q .
- Bestäm antal asymptoter, alltså gradtalet till P minus gradtalet till Q .
- Beräkna punkterna där rotorten korsar reella axeln, alltså en dubbelrot till karakteristiska ekvationen.
- Bestäm deras riktningar genom att betrakta argumentet till $\frac{P}{Q} = -K$ för stora s .
- Bestäm korsningar med imaginära axeln genom att sätta $s = i\omega$. Kom ihåg att $K \geq 0$.
- Bestäm vilka delar av reella axeln som tillhör rotorten. Det är de delar som har ett udda antal start- och slutpunkter till höger om sig.
- Rita.

Nyquistkriteriet Givet överförningsfunktionen

$$G_C = \frac{G_O}{1 + G_O}.$$

för ett slutet system, finns det några poler så att systemet är instabilt? En ide för att undersöka detta är att undersöka alla s i högre halvplan och se vilka värden på G_O man får. Detta gör vi genom att rita två halvcirklar med radier r respektive R i högre halvplan, förbinda dem med raka linjer i änderna och låta r gå mot 0 och R mot ∞ . G_O kommer då anta värden på en kurva som kallas för Nyquistkurvan. Argumentvariationsprincipen från komplex analys ger oss då att antalet poler i höger halvplan till ett återkopplat system är lika med antalet poler i höger halvplan hos G_O plus antalet varv som Nyquistkurvan omsluter punkten -1 . Speciellt, om G_O inte har poler i höger halvplan, är systemet stabilt om Nyquistkurvan inte omsluter -1 .

Av någon anledning är den viktigaste delen där γ' skär imaginära axeln. Man ska även kunna observera att $G_O(\infty) = 0$ och $G_O(0) \approx \frac{K}{s^p}$, där p är antal poler i origo.

Skärfrekvens Skärfrekvens ω_c är frekvensen för vilken Nyquistkurvan skär enhetscirkeln. Det är en tumregel att denna är ungefär lik bandbredden.

Fasmarginal Fasmarginalen ϕ_m är vinkeln mellan negativa x -axeln och punkten där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln.

Phase-crossover-frekvens ω_p är frekvensen så att $\arg G_O(i\omega_p) = -\pi$.

Amplitudmarginal Amplitudmarginalen ges av $A_m = \frac{1}{|G_O(i\omega_p)|}$.

Alternativt Nyquist-kriterium Nyquistkriteriet kan nu formuleras som $\phi_m > 0$, $A_m > 1$.

5 Frekvensanalys

Fundamental ide Eftersom periodiska funktioner kan skrivas som en summa av trigonometriska funktioner och funktioner som avtar tillräcklig snabbt kan skrivas som en integral över trigonometriska funktioner, vet vi att när vi studerar linjära system räcker det att studera systemets respons på en enda term, alltså en enda trigonometrisk funktion, och se hur den beror av frekvensen. Om vi tillför en signal $u = \sin \omega t$ till ett system

med överföringsfunktion G får vi

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\infty d\tau g(\tau)u(t-\tau) \\ &= \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty d\tau g(\tau)e^{i\omega(t-\tau)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i\omega t} \int_0^\infty d\tau g(\tau)e^{-i\omega\tau} \right) \\ &= \operatorname{Im}(e^{i\omega t}G(i\omega)) \\ &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)). \end{aligned}$$

Det kan även finnas transienta termer här, men om systemet är stabilt kommer dessa försvinna över tid. Vi ser alltså att systemets svar beror av $G(i\omega)$.

Nyquistdiagram Ett Nyquistdiagram är en uppritning av $G(i\omega)$ för $0 < \omega < \infty$.

Bodediagram Ett Bodediagram är en uppritning av $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω .

Bandbredd Bandbredden är bredden på det frekvensintervallet där $|G(i\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, och benämns ω_B . Bandbredden kan ge information om systemets tillväxt, då hög bandbredd typiskt betyder snabb tillväxt. Man önskar typiskt att denna skall vara stor.

Resonansfrekvens Resonansfrekvensen ω_r är den frekvens som ger starkast respons i systemet.

Resonanstopp Resonanstoppen är $M_p = |G(i\omega_r)|$, och ger typiskt en indikation på hur mycket översläng man får. Man önskar typiskt att denna ska vara liten.

Stationärt fel Det stationära felet ges av $e_0 = 1 - G_C(0)$.

Brytningspunkter Om överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(i\omega) = \frac{\prod(i\omega - z_i)}{\prod(i\omega - p_i)},$$

är alla z_i och p_i brytningspunkter för systemet. Här kommer de största lutningsändringarna i Bodediagrammet.

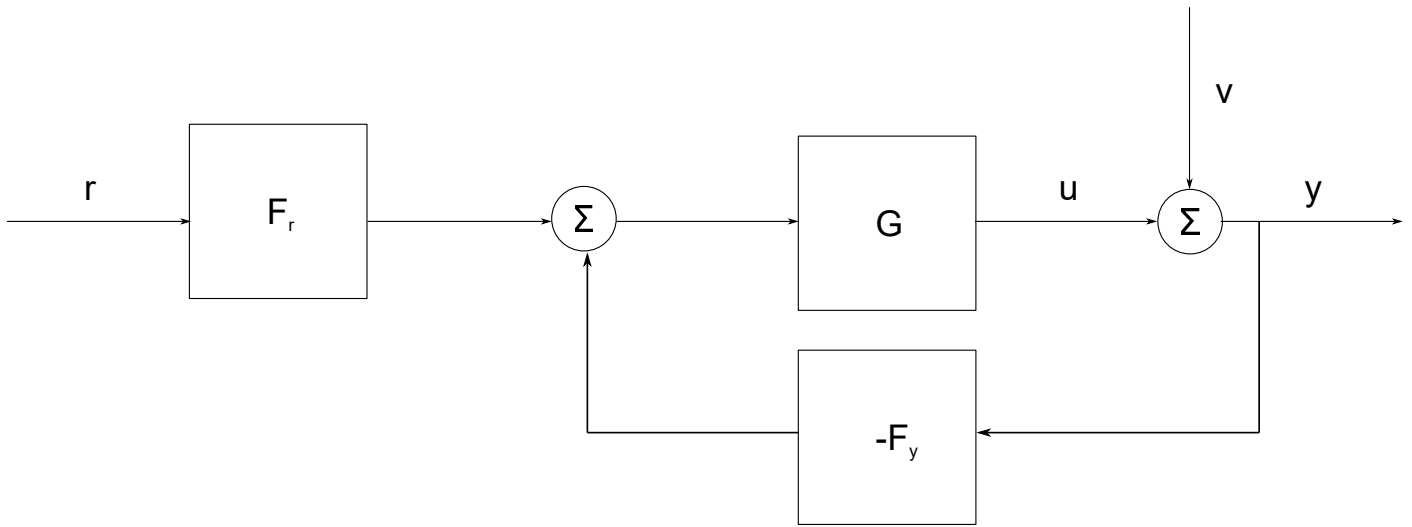
Bodes relation Låt G vara minimumsfas, dvs. ha alla sina nollställen och poler i vänstre halvplan, och $G(0) > 0$. Då gäller att om $|G(i\omega)|$ i ett visst frekvensområde avtar med 20 dB per dekad (en dekad är en ökning i frekvens med en faktor 10), är $\arg G(i\omega) \approx -90^\circ$, och om $|G(i\omega)|$ avtar med 40 dB per dekad, är $\arg G(i\omega) \approx -180^\circ$.

Snabbhet och svängighet Vi kan med tidigare resultat se att om $G_O(i\omega)$ är nära 1 blir $G_C(i\omega)$ stor, och om $G_O(i\omega)$ är liten blir även $G_C(i\omega)$ liten. Vi kan också se att ett ekvivalent kriterium för bandbredden är $|G_O(i\omega) - 1| \leq \sqrt{2}$ för $\omega \geq \omega_B$.

Resonanstopp och fasmarginal Vi har

$$M_p \geq |G(i\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}\phi_m)}.$$

Speciellt ger liten fasmarginal stort översläng.



Figur 3: Illustration av tänkt reglersystem.

Känslighet Betrakta ett system som i figur 3. Om $F_r = F_y = F$, skulle systemet vara ekvivalent med välkända negativt återkopplade system. Vi är nu intresserade av att studera systemets känslighet för störningen.

Vi har allmänt

$$Y = V + U = V + G(RF_r - YF_y), \quad Y = \frac{GF_r}{1 + GF_y}R + \frac{1}{1 + GF_y}V.$$

Vi definierar då känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1 + GF_y}.$$

Frekvensanalys av känslighetsfunktionen Vi har

$$|S(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 + G(i\omega)F_y(i\omega)} \right| \leq M_s,$$

vilket kan skrivas som

$$|G(i\omega)F_y(i\omega) - (-1)| \leq \frac{1}{M_s}.$$

Alltså måste Nyquistkurvan för $G(F_y$ vara utanför en cirkel med mittpunkt i -1 och radie $\frac{1}{M_s}$.

Robusthet Medan en modell kan ha en överförningsfunktion G , kan ett reellt system ha en överförningsfunktion $G' = G(1 + \Delta G)$, där ΔG är det relativa felet i överförningsfunktionen. Om man återkopplar systemet får man då

$$Y' = \frac{G'F}{1 + G'F}R = \dots = (1 + S'\Delta G)Y, \quad S' = \frac{1}{1 + G'F},$$

och $S*\Delta G$ blir det relativa felet i Y . Detta betyder att om systemets känslighetsfunktion är liten, får modellfel liten inverkan.

Robusthetskriteriet Antag att G ger ett system som är stabilt. Är då ett motsvarande verkligt system stabilt? För att svara på det, kan vi använda Nyquistkriteriet. Kravet är att F_yG' ej får omsluta -1 , vilket vi anser som uppfyllt om avståndet mellan F_yG' och F_yG är mindre än avståndet mellan F_yG och -1 . Detta kan formuleras som

$$|F_y(i\omega)G'(i\omega) - F_y(i\omega)G(i\omega)| < |F_y(i\omega)G(i\omega) + 1|$$

och slutligen robusthetskriteriet

$$\left| \frac{F_y(i\omega)G'(i\omega)}{1 + F_y(i\omega)G(i\omega)} \right| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}.$$

Vi definierar nu den komplementära känslighetsfunktionen

$$T = \frac{GF_y}{1 + GF_y} = 1 - S.$$

Normalt är ΔG ej känd, men vi har en övre skattning g av denna. Det verkliga systemet är då stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{g(\omega)},$$

vilket är ett tillräckligt, men ofta inte nödvändigt, villkor.

Nackdelar med återkoppling Återkoppling kan ge följande problem:

- Hög krets förstärkning ökar risken för instabilitet, speciellt vid modellfel.
- Om GF_y är stor, krävs stora styrsignaler. Det samma gäller i frekvensband där $|G|$ är liten.
- Mätbrus suger, typ.

Bodes sats Om G' har relativt gradtal större än 2, gäller att

$$\int_0^\infty d\omega \log |S(i\omega)| = \pi \sum_{k=1}^m p_k,$$

där p_k är polerna till G' i högre halvplan.

6 Kompensering

Ideen Vi ser att det enklaste sättet att konstruera en bra regulator på är att ändra konstruktionen av det öppna systemet. Vi bestämmer alltså regulatorn F utifrån krav på

- snabbhet, alltså skärfrekvens.
- dämpning, alltså fasmarginal.
- stationärt fel, alltså krav på $|G_O(0)|$.

Kompensation för snabbhet För snabbhet räcker det med en P-regulator. Denna flyttar amplitudkurvan, men ändrar ej faskurvan. Alltså hjälper den oss att bestämma skärfrekvensen.

Fasavancering För att höja fasen kan man använda en deriverande länk, alltså en regulator med överföringsfunktion

$$F = K(\tau_D s + 1).$$

Typiskt kan man inte låta deriveringen verka fullt ut, så överföringsfunktionen blir i stället på formen

$$F_{\text{lead}} = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}.$$

Vi har

$$\arg F_{\text{lead}} = \dots = \arctan \frac{(1 - \beta)\tau_D \omega}{1 + \beta \tau_D^2 \omega^2},$$

och får därmed att den maximala fasförskjutningen är

$$\phi_{\text{max}} = \arctan \frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}}$$

för frekvensen

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\beta}\tau_D}.$$

Lågfrekvensförstärkning Lågfrekvensförstärkning kan ta bort stationärt fel. För att lågfrekvensförstärka kan man använda en integrerande länk, alltså en regulator med överförningsfunktion

$$F = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_D s}.$$

Denna har dock oändligt hög förstärkning för låga frekvenser, kan man i stället använda en fasretarderande länk, alltså en regulator med överförningsfunktion

$$F_{\text{lag}} = \frac{\tau_1 s + 1}{\beta \tau_1 s + \gamma}.$$

Vi har

$$\arg F_{\text{lag}} = \dots = -\arctan \frac{(1 - \gamma)\tau_1 \omega_c}{\gamma + \tau_1^2 \omega_c^2}.$$

Det kan däremot vara svårt att göra rätt val av parametrar.

Arbetsgång Arbetsgången i kompensering är att

- bestämma önskad bandbredd.
- bestämma önskad fasmarginal för att ge nödvändig fasökning vid skärfrekvensen.
- Gör lead- och laggrejer. Jag kanske borde fatta det.

7 Tillståndsrepresentationer

Ideen Den fundamentala ideen vi vill åt nu är att representera ett systems tillstånd på ett annat sätt än just dets tidsutveckling, till exempel som en vektor.

Representation av linjära system Tidsutvecklingen av ett system tillstånd kan i många linjära fall skrivas som

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

där u beskriver en styrsignal. Utsignalen är typiskt på formen

$$y = Cx + Du.$$

Linjära system i Laplacedomänet Genom att laplacetransformera ekvationen som beskriver ett systems tillstånd fås

$$sX = AX + BU,$$

givet att systemets starttillstånd är $\mathbf{0}$. Detta kan skrivas som

$$X = (sI - A)^{-1}BU.$$

Insatt i uttrycket för Y fås

$$Y = CX + DU = (C(sI - A)^{-1}B + D)U,$$

och vi identifierar överförningsfunktionen som

$$G = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Av någon anledning är detta lika med

$$G = \frac{1}{sI - A}C(sI - A)^{\dagger}B + D$$

Poler i tillståndsrepresentation Det visar sig att systemets poler ges av

$$\det(sI - A) = s^2.$$

Detta ska tydligen motsvara A 's egenvärden.

Linjarisering Verkliga system är ofta olinjära, men vi ska försöka behandla dem som linjära ändå.

Betrakta ett system

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = g(x, u).$$

Anta konstant styrsignal u_0 , och antag att systemet då tenderar mot ett stationärt tillstånd \mathbf{x}_0 . Denna punkten uppfyller då

$$f(x_0, u_0) = \mathbf{0}, \quad h(x_0, u_0) = y_0.$$

När vi linjäriserar, betraktar vi små variationer $\Delta x, \Delta u, \Delta y$ kring denna punkten. Vi får

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - f(x_0, u_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u.$$

Observera att $\frac{\partial f}{\partial x}$ allmänt är en matris.

På samma sätt fås

$$\frac{d\Delta y}{dt} = h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - y_0 = h(x_0, u_0) - y_0 + \vec{\nabla}_x h \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u = \vec{\nabla}_x h \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u.$$

Det totala systemet

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u, \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= \vec{\nabla}_x h \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u \end{aligned}$$

är alltså linjärt för små ändringar.

Lösning av system i representation Betrakta ett system på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad y = C\mathbf{x}.$$

Vi använder att

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At},$$

varför

$$\begin{aligned} e^{-At} \dot{\mathbf{x}} &= e^{-At} A\mathbf{x} + e^{-At} Bu, \\ \frac{d}{dt} (e^{-At} \mathbf{x}) &= e^{-At} Bu, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 e^{At} + \int_0^t d\tau e^{-A(t-\tau)} Bu. \end{aligned}$$

Styrbarhet Ett tillstånd \mathbf{x} är styrbart om man kan styra det motsvarande systemet från $\mathbf{0}$ till \mathbf{x} med hjälp av en styrsignal u på ändlig tid.

Test av styrbarhet Vi noterar först att Cayley-Hamiltons sats ger

$$A^n + \sum_{i=1}^n a_i A^{n-i} = 0,$$

där a_i är koefficienterna i A 's karakteristiska polynom. Därmed kan alla potenser av A av högre ordning skrivas som en linjärkombination av potenser av A upp till och med $n - 1$. Därmed gäller det att

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) A^i$$

för några funktioner f_i .

Betrakta nu ett system och dets representation. Om systemets starttillstånd är $\mathbf{0}$, medför detta

$$\mathbf{x} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i \right) \mathbf{b}$$

där

$$\gamma_i = \int_0^t d\tau f_i(\tau) u(\tau).$$

Med andra ord är de styrbara \mathbf{x} linjärkombinationer av de olika $A^i \mathbf{b}$, alltså att det ligger i bildrummet till styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}].$$

Systemet är styrbart om $\det(\mathcal{S}) \neq 0$.

Observerbarhet Ett tillstånd \mathbf{x} är icke observerbart om utsignalen y är identiskt noll då initialvärdet är \mathbf{x} och insignalen identisk noll.

Test av observerbarhet Vi vill nu testa om ett tillstånd \mathbf{x}_0 är observerbart. Om vi har styrsignal $u = 0$, gäller det att

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_0, y = \mathbf{c} \cdot e^{At} \mathbf{x}_0, \frac{d^n y}{dt^n} = \mathbf{c} \cdot A^n e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Speciellt är $y = 0$ för alla t om

$$y(0) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0 = 0, \frac{dy}{dt} = \mathbf{c} \cdot A \mathbf{x}_0 = 0, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = \mathbf{c} \cdot A^{n-1} \mathbf{x}_0 = 0.$$

Givet att detta stämmer, ger Cayley-Hamiltons sats att även högre ordningens derivator av y kommer vara 0. Därmed ligger de icke-observerbara tillstånden i nollrummet till observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Systemet är observerbart $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

Minimalhet Ett system är minimalt om och endast om det är både styrbart och observerbart.

Proportionell återkoppling Antag att vi återkopplar systemet med $\mathbf{u} = l_0 \mathbf{r} - L\mathbf{x}$. Om utsignalen ej beror av \mathbf{u} kan det återkopplade systemet skrivas som

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BL)\mathbf{x} + Bl_0 \mathbf{r}, y = C\mathbf{x}.$$

Systemets poler ges av egenvärdena till $A - BL$. Det finns n såna, och L har n parametrar. Om systemet är styrbart kan dets poler därmed placeras godtyckligt vid lämpligt val av L .

Valet av l_0 görs så att $y = r$ när systemet är stationärt. Detta kräver dock att man känner $G(0)$ och att inga störningar påverkar systemet. Därför inför vi I-reglering.

I-reglering När vi I-reglerar, inför vi extra tillstånd

$$x_{n+1} = \int_0^t d\tau e.$$

Detta ger

$$\dot{x}_{n+1} = r - y = r - Cx.$$

Då kan vi utvidga modellen till

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r = A\mathbf{x} + Bu + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Strategin är nu att återkoppla det nya systemet med återkoppling på formen

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1} = -L\mathbf{x}.$$

Då kan L väljas så att $A - BL$ får önskade egenvärden. Stationärt har vi

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{x}_{n+1} = 0.$$

Skattning av tillstånd Om man ej kan mäta systemets tillstånd exakt, kan man skatta det. Mer precist, antag att vi har en modell

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

som simulerar

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \quad \hat{y} = C\hat{x}.$$

Felsignalen är

$$y - \hat{y} = y - C\hat{x}.$$

Vi försöker återkoppla systemet. Det beskrivs då av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)C\hat{x} + Bu + Ky.$$

Skattningsfelet \tilde{x} ges då av

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x}) = (A - KC)\tilde{x}.$$

Detta har lösning

$$\tilde{x} = e^{(A-KC)t}\tilde{x}(0).$$

Felet tenderar mot 0 egenvärdena till $A - KC$ är negativa, och hur snabbt det tenderar mot 0 beror av egenvärdenas belopp.

Mätfelet ges av $y_m = y + e$. Detta ger

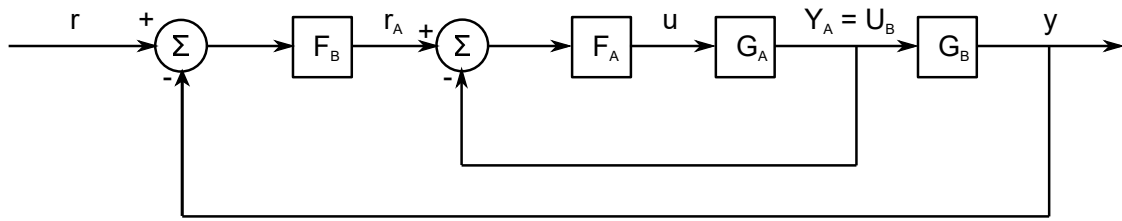
$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + Ke.$$

Stora K ger som vi ser höga mätfel, men det ger även snabba system. Optimeringen där görs av ett Kalmanfilter. Vi väljer då systemet så att egenvärdena till $A - BL$ har lägre belopp än egenvärdena till $A - KC$.

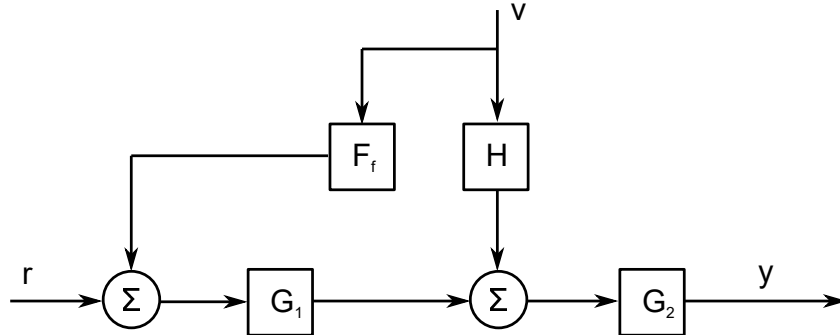
Vid återkoppling av såna system är överföringsfunktionen för det slutna systemet

$$G = C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_0,$$

alltså likadant som tidigare.



Figur 4: Blockschemat av kaskadreglering.



Figur 5: Blockschemat av framkoppling.

8 Alternativa regulatorstrukturer

Kaskadreglering Idéen bakom kaskadreglering är att försöka reglera ett system med hjälp av en mellanliggande signal. Detta beskrivs av blockschemat i figur 4. Kretsen i mitten reglerar mellansignalen u mot ett visst värde U_B . Detta är värdet som regulatorn F_B vill ha. Om detta skall fungera, måste den inre regleringen vara snabbare än den yttre.

Framkoppling Idéen bakom framkoppling är att försöka reglera bort en mätbar störsignal. Detta visas i blockschemat i figur 5. Vi önskar nu välja F_f så att störsignalen ej har någon inverkan.

Vi har

$$Y = G_2(HV + G_1(R + F_f H)) = G_2((H + G_1 F_f)V + G_1 R).$$

Därmed kommer V -termen försvinna om vi väljer

$$F_f = -\frac{H}{G_1}.$$

En fördel med detta är att man kan reglera sitt system innan störningen får en inverkan. Det kan dock uppstå problem med att man får rena deriveringstermer, men dessa kan lösas genom att approximera F_f nära $s = 0$.

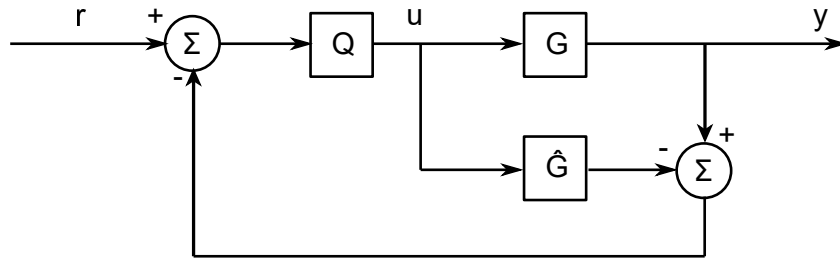
Otto Smith-regulatorn Syftet med Otto Smith-regulatorn är att reglera system med tidsfördröjning. Färdöröjningen från en sån ökar med ω , vilket gör det svårt att reglera.

För att reglera detta, bestäm först ett F så att ditt äntliga system (till exempel det slutna reglersystemet) får bra egenskaper om man ignorerar tidsfördröjningen. Om reglering av det icke-fördröjda öppna systemet G ger en regulator F , inför nu regulatorn

$$F' = \frac{F}{1 + (1 - e^{-sT})FG},$$

där T är systemets fördröjning. Detta kommer ge

$$G_c = \frac{FG}{1 + FG} e^{-sT}.$$



Figur 6: Blockschema av IMC.

Internal Model Control Ideen bak IMC illustreras i figur ???. Vi har här introducerat \hat{G} som vår modell av systemet.

Flödesschemat ger

$$U = \frac{Q}{1 - Q\hat{G}}(R - Y).$$

Om vi jämför detta med standardvarianten $U = F(R - Y)$, ser vi att

$$F = \frac{Q}{1 - Q\hat{G}}.$$

Detta betyder att alla problem vi har studerat kan omformuleras som ett IMC-problem.

Varför inför vi detta? Först av allt kan vi på något sätt hitta alla regulatorer som stabiliserar systemet genom att titta på stabila Q , vad nu det betyder. Vidare är det enkelt att studera det slutna systemet, ty om vi har en perfekt modell, försvinner återkopplingen, och $Y = GQR$. Detta är linjärt i Q , medan fall vi har studerat tidigare inte har varit linjära i F .

Betrakta specialfallet där vi vil ha $Y = HR$. Då väljer vi $Q = \frac{H}{G}$. Detta ger

$$F = \frac{1}{G} \frac{H}{1 - H},$$

som är resultatet vi känner från tidigare. På liknande sätt kan andra reglerproblem formuleras med IMC.