# Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

1 september 2018

**Sammanfattning**

# Innehåll

# 1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

**Lipschitzkontinuerlighet** En funktion $f$ är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett $K$ så att det för varje $x_1, x_2$ gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

**Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet** Låt $f \in C^1$. Då är $f$ Lipschitzkontinuerlig.

**Grönwalls lemma** Antag att det finns positiva $A, K$ så att $h : [0, T \to \mathbf{R}]$ uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

**Bevis** Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Då gäller att

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-Kt}I(t)\right) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till $r$ och använder att $I(0) = 0$ för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

**Linjära differentialekvationer** Om en differentialekvation kan skrivas på formen $F(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dots) = 0$, är den linjär om $F$ är linjär i alla sina argument förutom $t$.

**Lösning av linjära ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p \,\mathrm{d}x$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ye^P\right)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t)\,.$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

**Separabla ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Vi beräknar primitiv funktion på båda sidor och får

$$M(x) + N(y(x)) = c,\ c \in \mathbf{R}.$$

Om $N$ är inverterbar, får man då $y$ enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p\mathrm{d}x} + \int_a^t g(x)e^{-\int_x^t p\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x\,.$$

**Exakta differentialekvationer** Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)),\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

**Exakthet av differentialekvationer** Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$