

Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

1 februari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1	Vektoralgebra	1
1.1	Satser	1
2	Mängdlära	1
2.1	Definitioner	1
2.2	Satser	2
3	Funktioner	2
3.1	Definitioner	2
3.2	Satser	3
4	Derivata	4
4.1	Definitioner	4
4.2	Satser	5
5	Kurvor	10
5.1	Definitioner	10
5.2	Satser	11
6	Ytor	11
6.1	Definitioner	11
6.2	Satser	11
7	Kvadratiske ytor	11

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter x_1, \dots, x_n . Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i \mathbb{R}^n centrerad i \mathbf{a} med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum \mathbf{a} .

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. \mathbf{a} är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} i M .

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. \mathbf{a} är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} i M 's komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. \mathbf{a} är en randpunkt till M om varje öppet klot kring \mathbf{a} innehåller punkter i M och M 's komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M . Denna betecknas ∂M .

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M 's komplement och sluten om ∂M är i M .

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

Bågvis sammanhängande mängder D är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ finns en kurva $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$ så att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

2.2 Satser

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Grafen av en funktion Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen av f är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Kurvor i \mathbb{R}^p En kurva i \mathbb{R}^p är en funktion $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Lokala gränsvärden Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och \mathbf{a} vara en inre punkt eller randpunkt till D . $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Gränsvärden mot oändligheten Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Kontinuitet Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D$ om $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}}$ existerar och $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} = f(\mathbf{a})$.

Likformig kontinuitet Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Lokala extrempunkter Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i \mathbf{a} om $\exists \delta > 0$ så att $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ för alla $\mathbf{x} \in D$ så att $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Lokala minima definieras analogt. Om $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ har f ett strängt lokalt maximum i \mathbf{a} .

Kvadratiska former Låt A, B, C vara konstanter. En kvadratisk form från \mathbb{R}^2 är på formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

För en mer allmän definition, se definitionen från sammanfattningen av SF1672.

Positivt och negativt definita kvadratiska former En kvadratisk form är

- positivt definit om $Q(h, k) > 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- positivt definit om $Q(h, k) \geq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt definit om $Q(h, k) < 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt definit om $Q(h, k) \leq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- indefinit om Q antar såväl positiva som negativa värden.

3.2 Satser

Gränsvärden av funktioner och deras komponenter Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ är ekvivalent med att $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_i$, där subskriptet i indikerar den i -te komponenten av varje vektor.

Bevis Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^p |f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i|.$$

Största och minsta värde för funktioner Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då antar f ett största och ett minsta värde på D .

Bevis

Definitionsmängd och likformig kontinuitet Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då är f likformigt kontinuerlig på D .

Bevis

Satsen om mellanliggande värden Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara bågvis sammanhängande. Om f antar värdena $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ i D , antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Bevis

Inversa funktionssatsen Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen, f vara C^1 och $|\mathrm{d}f(\mathbf{a})| \neq 0$. Då finns det öppna omgivning U, V till $\mathbf{a}, f(\mathbf{a})$ så att $f : U \rightarrow V$ är bijektiv och $f^{-1} : V \rightarrow U$ är C^1 .

Bevis

Implicita funktionssatsen Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1 och \mathbf{a} vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$. Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en öppen omgivning U av \mathbf{a} så att restriktion av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion.

Bevis

Derivatans av en implicit funktion Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1 , \mathbf{a} vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$ och $F(\mathbf{x}) = C$ definiera en implicit funktion nära \mathbf{a} . Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ har man

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})}.$$

Bevis Eftersom F är konstant nära \mathbf{a} använder vi kedjeregeln, vilket ger

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = 0.$$

Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ får man resultatet i satsen.

4 Derivata

4.1 Definitioner

Partiella derivator Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är partiellt deriverbar med avseende på x_i i den inre punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av f med avseende på x_i i \mathbf{a} och betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Differentierbarhet Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är differentierbar i \mathbf{a} om $\exists A_1, \dots, A_n$ och en $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n A_i h_i + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h})$$

och $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. f är differentierbar om detta är uppfyllt för alla $\mathbf{a} \in D$.

C^1 Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D .

C^k Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^k om f alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D .

Gradient Låt f vara reellvärd och differentierbar i \mathbf{x} . Gradienten definieras som

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i.$$

Riktningsderivata Låt $|\mathbf{v}| = 1$. Derivatan av f i punkten \mathbf{a} i riktningen \mathbf{v} är

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{u}} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Stationära punkter \mathbf{a} är en stationär punkt till f om $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Differentierbar Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen och låt f vara differentierbar. Funktionen $\mathbf{h} \rightarrow \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i$ kallas differentialen av f i \mathbf{x} och betecknas $df(\mathbf{x})$. Vid att skriva differentialen som en matris

$$df(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right]$$

kan differentialen skrivas som en matrismultiplikation enligt

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{h}.$$

Funktionalmatriser Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f 's funktionalmatris definieras som

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_p}{dx_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{df_p}{dx_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betecknas $f'(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) = \frac{d(f_1 \dots f_p)}{d(x_1 \dots x_n)}(\mathbf{x})$.

Linjarisering Linjariseringen av en funktion f ges av

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

4.2 Satser

Differentierbarhet och kontinuitet Låt f vara differentierbar i \mathbf{a} . Då är f kontinuerlig i \mathbf{a} .

Bevis Definitionen implicerar $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Differentierbarhet och partiell deriverbarhet Låt f vara differentierbar i \mathbf{a} . Då är f partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i \mathbf{a} och $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$.

Bevis Med $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$ ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när t går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och A_i på andra sidan.

Differentierbarhet av funktioner i C^1 Varje $f \in C^1$ är differentierbar.

Bevis Låt $\mathbf{a} \in D$. Enligt envariabelanalysens medelvärdesats har vi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + h_1 \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a} + \theta_1 h_1 \mathbf{e}_1) \\ f(\mathbf{a} + h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a} + h_1 \mathbf{e}_1) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a} + h_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 h_2 \mathbf{e}_2) \\ &\vdots \\ f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i \mathbf{e}_i) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i \mathbf{e}_i + \theta_n h_n \mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

där alla $\theta_i \in [0, 1]$. Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \mathbf{e}_i + \theta_k h_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),$$

där $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Då får man

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h}) \right) h_i.$$

Den sista delen av beviset använder

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{h}) h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

Allmänna kedjeregeln Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ och låt alla komponenter av f, g vara differentierbara. Då är alla komponenter av $f \circ g$ differentierbara. Med $u = f \circ g$ har vi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{t})$$

för varje komponent.

Specialfall: $p = 1$ Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, där alla g_i är partiellt deriverbara. Då är $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{df \circ g}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \frac{dg_i}{dt}(t).$$

Bevis

Konstantfunktioner och gradient Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och bågvis sammanhängande och $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Om $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in D$, är f konstant i D .

Bevis Använd att

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}(t)) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = 0.$$

Gradient och riktningsderivata Gradienten i riktning \mathbf{v} ges av

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Bevis Bilda $u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = u(g(t))$, vilket ger $\vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{du}{dt}(0)$. Enligt kedjeregeln blir detta

$$\sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(0) \frac{dg_i}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{d(\mathbf{a} + t\mathbf{v})}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Maximal riktningsderivata $\vec{\nabla} f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast i \mathbf{a} , och den maximala tillväxthastigheten är $|\vec{\nabla} f(\mathbf{a})|$.

Bevis Cauchy-Schwarz-olikheten ger

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{u}} f = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq |\vec{\nabla} f(\mathbf{a})| |\mathbf{v}|,$$

med likhet om och endast om \mathbf{v} är parallell med gradienten.

Gradient och nivåytor Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Då är gradienten normal på nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Bevis Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1 -kurva i nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$. Detta ger

$$0 = \frac{df \circ \mathbf{x}}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0).$$

Eftersom $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)$ är parallell med nivåytan är beviset klart.

Symmetri av derivator i C^2 För varje $f \in C^2$ gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Bevis Vi beviser endast för en tvåvariabelfunktion, då det allmänna fallet följer direkt från detta. Låt $q(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$, $\phi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$. Detta ger

$$\begin{aligned} q(h, k) &= \phi(y + k) - \phi(y) \\ &= k \frac{d\phi}{dt}(y + \theta k) \\ &= k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta k) \right) \\ &= kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \eta h, y + \theta k), \end{aligned}$$

där vi har använt medelvärdesatsen två gånger. Då har vi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{q(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Beviset kan upprepas i motsatt ordning, och detta fullförar beviset.

Taylor's formel Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, $(a, b) \in D$ och f vara C^3 . Då gäller:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3 B(h, k), \end{aligned}$$

där $B(h, k)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Bevis Låt $F(t) = f(a + th, b + tk)$. Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk), \\ \frac{d^2 F}{dt^2}(t) &= h \left(h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th, b + tk) + k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right) + k \left(h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th, b + tk) + h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right), \\ \frac{d^3 F}{dt^3}(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)h^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)h^2 k + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a, b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b)k^3. \end{aligned}$$

F 's Taylorpolynom kring 0 är

$$F(t) = F(0) + \frac{dF}{dt}(0)t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 F}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(0)t^3.$$

Vi evaluerar i 1:

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + \frac{dF}{dt}(0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 F}{dt^2}(0) + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(\theta) \\ f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(\theta). \end{aligned}$$

Vi analyserar sen den sista termen:

$$\frac{\frac{d^3 F}{dt^3}(t)}{\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)h^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)h^2k + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a, b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b)k^3 \right).$$

Vi ser att detta är konvergent eftersom vi t.ex. kan betrakta

$$\left| \frac{3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)h^2k}{\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3} \right| \leq C \frac{|h|^2}{h^2 + k^2} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq C.$$

Derivatan är kontinuerlig, vilket enligt sats garanterar att den är begränsad. Därmed är den sista termen på rätt form, och beviset är klart.

Lokala extrempunkter och partiella derivator Om f har ett lokalt extremvärde i $\mathbf{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i \mathbf{a} är $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, i = 1, \dots, n$.

Bevis Följer av motsvarande sats i en variabel applicerad på $x_i \rightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$.

Kvadratiska former och extrempunkt Låt (a, b) vara en inre punkt till D och en stationär punkt till f . Om f :s Taylorpolynom kring (a, b) ges av $f(a+h, b+k) = c + Q(h, k)$. Då gäller att:

- Om Q är positivt definit har f ett strängt lokalt minimum i (a, b) .
- Om Q är negativt definit har f ett strängt lokalt maximum i (a, b) .
- Om Q är indefinit har f en sadelpunkt (varken ett maximum eller ett minimum) i (a, b) .

Små ändringar och funktionalmatriser Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ vara C^1 . Då kan vi för små $|\mathbf{h}|$ skriva

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

där ρ tar värden i \mathbb{R}^p och $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Bevis Betrakta varje komponent.

Kedjeregeln och funktionalmatriser

$$d(f \circ g)(\mathbf{t}) = df(g(\mathbf{t})) dg(\mathbf{t})$$

Bevis Inses lätt.

5 Kurvor

5.1 Definitioner

C^1 -kurvor En kurva är klass C^1 om alla dess komponenter är C^1 .

Tangentvektor Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1 -kurva definierad på $[\alpha, \beta]$, $\phi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ vara strängt växande och ϕ, ϕ^{-1} vara C^1 . Då definieras tangentvektorn till kurvan av

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

Längd Längden av en kurva ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right| dt.$$

5.2 Satser

6 Ytor

6.1 Definitioner

Ytor En yta är en funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$.

Tangentplan Tangentplanet till en kurva spänns upp av vektorerna

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_s(s, t) &= \left(\frac{dr_1}{ds}(s, t), \frac{dr_2}{ds}(s, t), \frac{dr_3}{ds}(s, t) \right), \\ \mathbf{r}_t(s, t) &= \left(\frac{dr_1}{dt}(s, t), \frac{dr_2}{dt}(s, t), \frac{dr_3}{dt}(s, t) \right),\end{aligned}$$

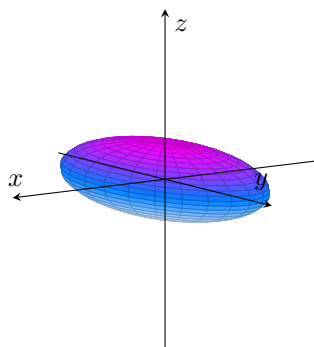
6.2 Satser

7 Kvadratiske ytor

Detta är de flesta kvadratiske ytorna man kan träffa på i \mathbb{R}^3 , komplett med snygga illustrationer.

Ellipsoider En ellipsoid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



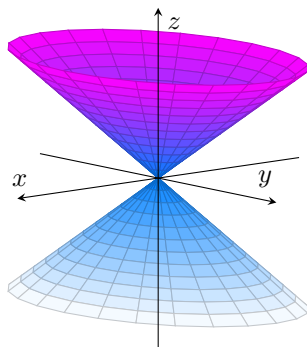
Figur 1: Illustration av en ellipsoid.

Koner En kon beskrivs av en ekvation på formen

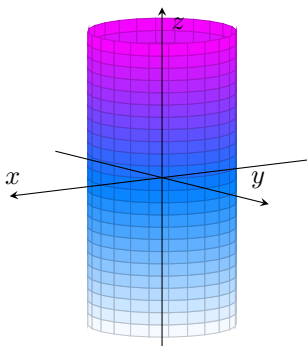
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Cylindrar En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



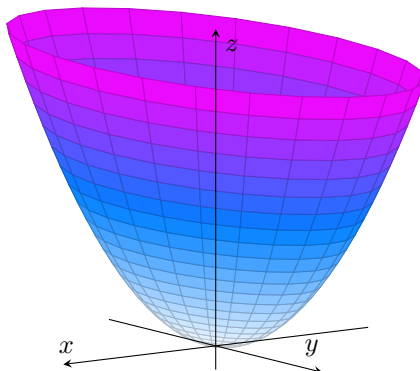
Figur 2: Illustration av en kon.



Figur 3: Illustration av en cylinder.

Elliptiska paraboloider En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

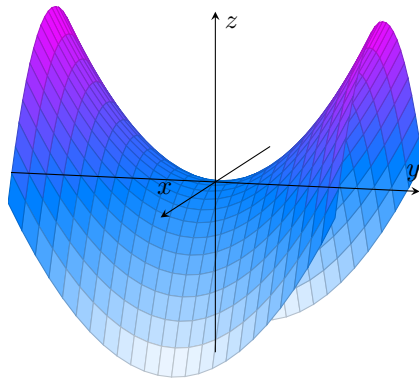
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.

Hyperbolska paraboloider En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

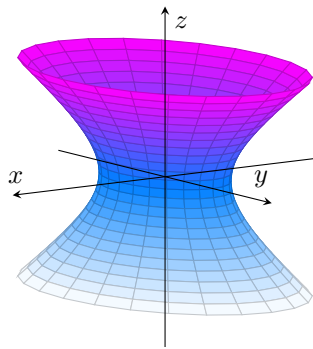
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.

Enmantlade hyperboloider En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

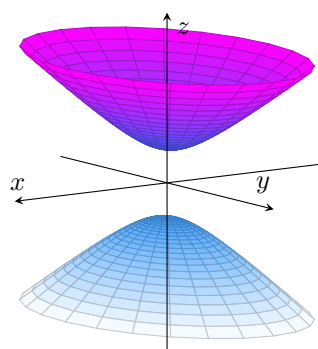
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.

Tvåmantlade hyperboloider En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.