Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

4 september 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

Innehåll

1 Accelererande referensramar

1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram S' som rör sig relativt en inertialram S. S' rör sig med hastighet $\mathbf{v}_{O'}$ och roterar med vinkelhastighet ω kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$).

Transformation av vektorstorheter Betrakta en godtycklig vektorstorhet $\mathbf{A}$. Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_x\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_x}{\mathrm{d}t} + A'_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_y}{\mathrm{d}t} + A_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_z}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatorn

$$\mathring{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av $\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t}\right| = \omega \sin\alpha_i$, där α_i är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn ω och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på ω och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t} = \omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i$, och slutligen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{1}$$

Mer om vinkelhastighet Definitionen av vinkelhastighet ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{z'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{x'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{x'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{y'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{y'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{z'}.$$

För att visa att dessa är additiva, inför tre system S_0, S_1, S_2, vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_{1,0}$ av S_1 relativt S_0 och derivatan

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A}.$$

Vid att använda derivationssambanden $1-2, 1-0, 2-0$ får man

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,1} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,0} \times \mathbf{A},$$

vilket implicerar

$$\boldsymbol{\omega}_{2,0} = \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0}.$$

Det gäller speciellt att

$$\boldsymbol{\omega}_{2,1} = -\boldsymbol{\omega}_{1,2}.$$

Vi betraktar vidare vinkelaccelerationen, och inför

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,0} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

Vid att tidsderivera additionssambandet för vinkelhastigheter får man

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{2,0} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \boldsymbol{\alpha}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1},\end{aligned}$$

alltså är vinkelaccelerationer allmänt ej additiva. Man kan dock visa att

$$\boldsymbol{\alpha}_{2,1} = -\boldsymbol{\alpha}_{1,2}.$$

Hastighet Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn i S, $\mathbf{r}'$ är ortsvektorn i S' och $\mathbf{r}_{O'}$ är ortsvektorn till origo i S' relativt S. Vi tidsderiverar och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi känner igen hastigheten i S och hastigheten till ramen S'. Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i S', vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i S' som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt S', vilket ger den hastighet i S lika med $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{v}',$$

där $\mathbf{v}_{\mathrm{sp}}$ är systempunktens hastighet.

Acceleration För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i S' för att få

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}'.\end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i S, accelerationen till ramen S' och hastigheten mätt i S', och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt S', ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger $\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration S'. Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen $\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'.$$

1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i S, får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'\right).$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}}$ och Corioliskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = \mathbf{F}_{\mathrm{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tl}} = -m\mathbf{a}_{O'}$.
- en transversell kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tv}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{tv}} = -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}'$.
- en centrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathrm{c}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.

2 Partikelsystem

Ett partikelsystem är en samling av N partiklar med (konstanta) massor m_i och total massa m som samverkar. Varje partikel påverkas av yttre krafter med summa $\mathbf{F}_i$ samt inre krafter $\mathbf{f}_{ij}$ med alla andra partikler i systemet.

Vi antar att alla inre krafter verkar parallellt med linjen mellan partiklerna. Newtons andra lag ger $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, vilket även implicerar $\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$.

Vi definierar kraftsummorna

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{f} &= \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}. \end{aligned}$$

Vi får

$$\mathbf{f} = \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} = -\sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f},$$

och därmed $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Masscentrum Vi kommer ihåg att masscentrum för ett partikelsystem definieras som

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

Rörelsemängd Systemets totala rörelsemängd ges av

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{\mathrm{d} m \mathbf{r}_G}{\mathrm{d}t} = m \mathbf{v}_G.$$

Kraftekvationen för ett partikelsystem Kraftekvationen för en enda partikel ger

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij}.$$

Om vi adderar alla dessa ekvationer, får man

$$\begin{aligned} \sum m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} &= \sum \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}, \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) &= \mathbf{F} + \mathbf{f}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m \mathbf{v}_G) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F}, \end{aligned}$$

vilket är kraftekvationen som vi känner den. Med konstant massa kan detta även skrivas som

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{F}.$$

3 Stela kroppar

En stel kropp är en massbelagd domän så att avståndet mellan två godtyckliga punkter är konstant.

En stel kropp kan ha translationshastighet eller rotationshastighet. Translationshastighet karakteriseras av att $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$ för alla A, B. Rotationshastighet karakteriseras av att det finns ett C som är stelt förenad med kroppen så att $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ momentant.

För att beskriva rörelsen till en stel kropp, bilda en referensram med axlerna fixa relativt kroppen. betrakta två punkter A, B i kroppen, där origo i den nya referensramen är A. Då gäller det att

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{v}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Eftersom axlerna är fixa relativt kroppen, ger andra termen inget bidrag, vilket ger

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

och bekräftar vårt påstående om att all rörelse för en stel kropp är antingen translation eller rotation.

Betrakta vidare kroppens acceleration, som ges av

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{cor}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Fixa axler relativt kroppen ger att de två sista termerna ej bidrar och

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}),$$

där den första termen är ett translatoriskt bidrag och de två andra är rotationsbidrag.

Plan rörelse Plan rörelse för en stel kropp karakteriseras av att hastigheten i alla punkter är parallellt med ett och samma fixa plan. Om rörelsen är i xy-planet, kommer $\boldsymbol{\omega}$ peka längs med z-axeln.

Om en stel kropp roterar under plan rörelse, finns det alltid en punkt C med $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, som kallas momentancentrum. Denna punkt uppfyller $\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$. För att hitta den, multiplicera med $\boldsymbol{\omega}$ på båda sidor för att få

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AC})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AC}.\end{aligned}$$

Eftersom rörelsen är plan, behöver vi bara betrakta ett snitt av kroppen i rörelsesplanet, vilket gör att den första skalärprodukten blir 0. Detta ger då positionen till momentancentrumet enligt

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$

Vi studerar vidare accelerationssambandet för plan rörelse, som ger

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}).$$

Vi skriver ut termerna och får

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}_{AB}.$$

Eftersom rörelsen är plan, blir skalärprodukten 0, och man får slutligen

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2\mathbf{r}_{AB}.$$