

# Sammanfattning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

30 oktober 2017

## **Sammanfattning**

Denna sammanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Mängder</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Funktioner</b>	<b>1</b>
2.1	Definitioner . . . . .	1
2.2	Satser . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Talföljder</b>	<b>3</b>
3.1	Definitioner . . . . .	3
3.2	Satser . . . . .	4

# 1 Mängder

## 1.1 Definitioner

**Delmängder** Låt  $A, B$  vara mängder.  $A$  är en delmängd av  $B$  om det för varje  $x \in A$  gäller att  $x \in B$ . Notation:  $A \subset B$ .

**Union och snitt** Låt  $A, B$  vara mängder. Unionen  $A \cup B$  består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet  $A \cap B$  består av de element som är i båda.

**Övre och undra begränsningar** Ett tal  $m$  är en övre begränsning av en mängd  $A$  om  $x \leq m$  för varje  $x \in A$ , och en undra begränsning om  $x \geq m$  för varje  $x \in A$ .

**Supremum och infimum** Ett tal  $m$  är supremum till en mängd  $A$  om  $m$  är den minsta övre begränsningen till  $A$ .  $m$  är infimum till  $A$  om  $m$  är den största undra begränsningen till  $A$ . Notation:  $\sup A, \inf A$ .

## 1.2 Satser

**Supremumsegenskapen** Varje uppåt begränsade delmängd av  $\mathbb{R}$  har en minsta övre begränsning.

# 2 Funktioner

## 2.1 Definitioner

**Definition av en funktion** Låt  $X, Y$  vara mängder. En funktion  $f : X \rightarrow Y$  är ett sätt att till varje element  $x \in X$  tilldela ett välbestämt element  $y \in Y$ . Vi säger att  $x$  avbildas på  $y$  och att  $y$  är bilden av

$x$ .  $x$  kallas argumentet till  $f$ .  $X$  kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även  $D_f$ .  $Y$  kallas funktionen målmängd.

**Värdemängd** Värdemängden till  $f : X \rightarrow Y$  definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden  $f$  antar.

**Injektivitet**  $f$  är injektiv om det för varje  $x_1, x_2 \in X$  gäller att om  $f(x_1) = f(x_2)$  så är  $x_1 = x_2$ .

**Surjektivitet**  $f$  är surjektiv om  $V_f = Y$ .

**Bijektivitet** Om  $f$  är injektiv och surjektiv, är  $f$  bijektiv.

**Inversa funktioner** Låt  $f : X \rightarrow Y$  vara en bijektiv funktion. Inversen till  $f$  är avbildningen  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  som ges av  $f^{-1}(y) = x$ , där  $y = f(x)$ . Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

**Växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) \leq f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

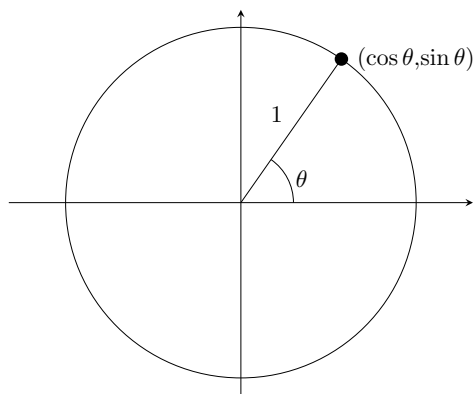
**Strängt växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är strängt växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) < f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  strängt växande. Strängt

avtagande funktioner definieras analogt.

**Monotona funktioner** Om en funktion är antingen strängt växande respektive strängt avtagande eller växande respektive avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektive monoton.

**Uppåt och nedåt begränsade funktioner** En funktion  $f$  är uppåt begränsad om  $V_f$  är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedre begränsning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

**Trigonometriska funktioner** Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.



Figur 1: Enhetssirkeln.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel  $\theta$  med  $x$ -axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av  $x$ -axeln, och

ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras  $\sin$  och  $\cos$  utifrån  $x$ - och  $y$ -koordinaterna till punkten för en given  $\theta$ , var  $\theta$  mäts i radianer. Vi definierar även  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

Från definitionerna ser vi att  $\sin x$  och  $\cos x$  är definierade för alla  $x \in \mathbb{R}$ , medan  $\tan x$  är definierad för alla  $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Radianer** Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 bevägar sig från startpunkt och till nå

**Trigonometriska funktioners egenskaper** Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dessa. Några essentiella är listad under:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos \theta \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

**Inversa trigonometriska funktioner** Låt  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \sin x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .

Låt  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \cos x$ . Inversen till den-

na funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arccos x$ .

Låt  $f : (-\inf, \inf) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sådan att  $f(x) = \tan x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arctan x$ .

**Exponentialfunktionen** I häftet definieras inte exponentialfunktionen  $a^x, a > 1$ , utan den antas vara en strängt växande funktion med värdemängd  $(0, \inf)$  som uppfyller

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

**Logaritmfunktionen** Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \inf)$  sådan att  $f(x) = a^x$  för något  $a > 1$ . Inversen till denna funktionen betecknas som  $f^{-1}(x) = \log_a x$ .

**Absolutbelopp** Absolutbeloppet definieras som  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

## 2.2 Satser

**Trigonometriska funktioner med vinkelsummor**

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

**Cosinussatsen** Låt  $a, b, c$  vara sidorna i en triangel och  $\theta$  vinkeln där sidlängderna  $a$  och  $b$  möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

**Logaritmfunktionens egenskaper** Låt  $a > 1$ . Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \quad (1)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (2)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad (3)$$

**Bevis** Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen -  $a^{\log_a x} = x$  - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att  $a^{\log_a 1} = 1$  och att  $a^0 = 1$ . Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att  $a^{\log_a xy} = xy$  och att  $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$ .

Ekvation 3 fås från att  $a^{\log_a x^y} = x^y$  och att  $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ .

**Absolutbeloppens egenskaper**

$$|xy| = |x||y| \quad (4)$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

**Bevis** Kommer kanske någon gång.

## 3 Talföljder

### 3.1 Definitioner

**Definitionen av en talföljd** En talföljd är en följd av tal  $a_1, a_2, \dots$  och betecknas  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .

**Växande och avtagande talföljder** En talföljd är växande om  $a_{n+1} \geq a_n$  för varje  $n \geq 1$ . Avtagande talföljder definieras analogt.

d) om  $a_n \leq b_n$  för varje  $n$  så gäller att  $A \leq B$ .

**Bevis** Aa.

**Uppåt och nedåt begränsade talföljder** En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett  $M$  så att  $a_n \leq M$  för alla  $n \geq 1$ .

**Växande och uppåt begränsade talföljder** Om  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

**Begränsade talföljder** En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

**Konvergens av talföljder** En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde  $A$  om det för alla  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a_n - A| < \varepsilon$  för varje  $n > N$ . Detta beteendet betecknas

**Bevis** Oo.

**Gränsvärde för potenser**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

**Divergenta talföljder** En divergent talföljd är inte konvergent.

•

## 3.2 Satser

**Gränsvärden för kombinationer av talföljder** Låt  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$  vara talföljder med gränsvärden  $A$  och  $B$ . Då följer att

- $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent med gränsvärdet  $A + B$ .
- $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent med gränsvärdet  $AB$ .
- om  $B \neq 0$  är  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  konvergent med gränsvärdet  $\frac{A}{B}$ .