

Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

23 december 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1	Vektorrum	1
1.1	Definitioner	1
1.2	Satser	2
2	Avbildningar	2
2.1	Definitioner	2
2.2	Satser	3
3	Eigenvärden och olika polynom	4
3.1	Definitioner	4
3.2	Satser	4
4	Inreprodukt	6
4.1	Definitioner	6
4.2	Satser	8
5	Linjär rekursion	11
5.1	Definitioner	11
5.2	Satser	12
6	Singulärvärden	12
6.1	Definitioner	12
6.2	Satser	12
6.3	Algoritmer	12
7	Sannolikhet	12
7.1	Definitioner	12
7.2	Satser	12
8	Multilinjär algebra	14
8.1	Definitioner	14
8.2	Satser	14
9	Yttre algebra	14
10	Kroppsutvidning	14
10.1	Definitioner	14
10.2	Satser	15

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är en mängd k med två binära operationer $+$ och \cdot och två speciella element 0 och 1 som uppfyller

- k är en abelsk grupp under $+$ med 0 som identitet.
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in k.$
- k är en abelsk grupp under \cdot med 1 som identitet.
- för alla $a \neq 0$ i k finns det ett $b \in k$ så att $a \cdot b = 1$.
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in k.$

\cdot kommer ej skrivas ut efter detta.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd V med en operation $+$ så att den definierar en abelsk grupp. Till vektorrummet hör även en kropp k med skalärer och en operation \cdot med skalären som uppfyller

- $c(x + y) = cx + cy, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x, y \in V.$
- $(c + d)x = cx + dx, \quad c, d \in \mathbb{R}.$
- $c(dx) = (cd)x.$
- $1x = x.$

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V.$
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}.$

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}$$

som ett vektorrum så att om $v \in V$ är linjärkombinationen av element från alla V_i unik.

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, definieras

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har använt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= x + y + W, \\ a(x + W) &= (ax) + W.\end{aligned}$$

Linjärt oberoende mängder $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i.$$

Linjärt hölje Det linjära höljet $\text{Span}(S)$ av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S .
- det minsta delrummet som innehåller S .
- $\bigcap_{S \subset W} W$.
- $\sum_{x \in S} \text{Span}(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \text{Span}(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

Duala rum För ett vektorrum V över kroppen k är duala rummet V^* mängden av alla linjära former på V , dvs. alla linjära avbildningar $V \rightarrow k$.

Dual bas Givet en bas $\{e_i\}_{i \in I}$ för V , definieras basen $\{e_i^*\}_{i \in I}$ för V^* som de linjära formarna som uppfyller

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis Vi vill visa att operationer på sidoklasser ger någonting som är entydigt.

Antag att $(a + W) + (b + W) = a + b + W = a' + b' + W$. Detta implicerar att $(a' + b') - (a + b) \in W$, och varje sida är därmed ekvivalenta sidoklasser.

Antag att $a(b + W) = ab + W = ab' + W, a \in k, a \neq 0$. Detta implicerar $a(b' - b) \in W$, och därmed är $b' + W$ och $b + W$ ekvivalenta sidoklasser.

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfi En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säger att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om $B = \{x_i\}_{i \in I}$ är en bas för V och $D = \{y_j\}_{j \in J}$ är en bas för W definieras matrisen för $L : V \rightarrow W$ i de givna baserna genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in J} a_{ji} y_j.$$

Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om I är oändlig.

Analytiska funktioner av operatorer En analytisk funktion av en operator L definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

Matrisnorm Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nilpotenta operatorer En operator L är nilpotent om $L^n = 0$ för något n .

2.2 Satser

Basbyte Låt L vara en avbildning från V till W . Låt $L_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen B i definitionsområdet till D i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från A till B i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

Bevis Kommutativt diagram

Koordinatavbildning Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V . Detta ger en isomorfi

$$V \rightarrow k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i x_i \rightarrow \{a_i\}_{i \in I}.$$

Bevis Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \rightarrow \sum a_i x_i$$

ger en avbildning $k^I \rightarrow V$ som är injektiv eftersom B är linjärt oberoende och surjektiv eftersom B spänner upp V . Eftersom denna avbildningen är bijektiv, måste även den inversa avbildningen vara bijektiv.

Kärna och injektivitet En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

Bevis Antag att L är injektiv. Det gäller att

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element som ej nödvändigtvis är i kärnan. Eftersom L är injektiv, är $x - y = 0$, och kärnan innehåller endast 0.

Antag nu att $\ker(L) = \{0\}$. Detta ger

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y = 0,$$

och beviset är klart.

Kvotavbildning Om $W \subseteq V$ är ett delrum, ger $x \rightarrow x + W$ en linjär kvotavbildning från V till $\frac{V}{W}$.

Bevis Vi har

$$x + y \rightarrow x + y + W = x + W + y + W,$$
$$ax \rightarrow ax + W = a(x + W),$$

och beviset är klart.

Isomorfisatsen

$$\operatorname{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

Bevis Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\text{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty L är linjär. Φ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) : L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. Detta implicerar att om $\Phi(x + \ker(L)) = \Phi(y + \ker(L))$, är $x - y \in \ker(L)$, och de två är ekvivalenta sidoklasser. Φ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något x ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \text{Im}(L)$ ett x så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

Dimensionssatsen Om V är ändligdimensionellt är $\text{rank } L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

Bevis

Faktorisering med kvotrum Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \rightarrow W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

Bevis Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.

Norm av potenser av matriser

$$\|A^i\| \leq \|A\|^i$$

Bevis

Konvergens av funktioner av matriser En funktion f av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

3 Egenvärden och olika polynom

3.1 Definitioner

Egenvektorer x är en egenvektor till L om det finns ett $\lambda \in k$ så att

$$Lx = \lambda x.$$

λ kallas det motsvarande egenvärdet.

Karakteristiskt polynom Om V är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där I är identitetsavbildningen.

Minimalpolynom Om A är en matris, är minimalpolynomet $q_A(x) \in k[x]$ det moniska polynomet av lägst grad så att $q_A(A) = 0$.

Diagonaliserbarhet En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operatorns matris i den basen är diagonal.

Samtidig diagonaliserbarhet Två operatorer L_1 och L_2 är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

Konjugerade matriser Två matriser A och B är konjugerade om det finns en matris P så att

$$A = PBP^1.$$

3.2 Satser

Karakteristiska polynom och egenvärden Om λ är ett egenvärde till L så är $p_L(\lambda) = 0$.

Bevis Kärnan till avbildningen $A - \lambda I$ är icke-trivial i detta fallet.

Existens av minimalpolynom Om V är ändligdimensionellt, har L ett karakteristiskt polynom.

Bevis Betrakta matrisen A för L i någon bas. Det gäller att mängden $\{A^0, A^1, \dots, A^{n^2}\}$ är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter a_0, \dots, a_n så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

Cayley-Hamiltons sats $p_L(L) = 0$.

Bevis Om matrisen för L är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

Korollar q_L är en faktor i p_L .

Bevis Följer av fundamentalsatser i algebra.

Multipliciteter och diagonaliserbarhet Om L är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla L 's egenvärden.

Bevis

Konjugering med övertriangulära matriser Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

Bevis

Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum och L_1, L_2 två operatorer på detta. Då går det att samtidigt diagonalisera L_1 och L_2 om de kommuterar.

Bevis

Kommutativitet och egenrum Låt L_1 och L_2 kommutera och E_1 vara egenrum till L_1 . Då är $L_2(E_1) \subset E_1$.

Bevis Låt $x \in E_1$. Då är

$$L_1(L_2(x)) = L_2(\lambda x) = \lambda L_2(x),$$

och beviset är klart.

Nilpotens och blockdiagonalitet Om L är nilpotent finns det en bas för V så att matrisen för L blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Bevis Här kommer endast en bevisidé presenteras.

Det finns ett s så att $L^s = 0$ och $L^{s-1} \neq 0$. Vi väljer då ett delrum W_s så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$ så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$ och $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$. Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla W_i och bilderna av alla potenser av L . Dessa bildar en bas för V . Med en lämplig ordning på basen fås $\dim(W_i)$ block på formen ovan i matrisen, varje med storlek $i \times i$.

Jordans normalform Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för L är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att $\Lambda_i = \lambda_i I + N$, där N är nilpotent.

Bevis

4 Inreprodukt

4.1 Definitioner

Inreprodukt över \mathbb{R} En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum V över \mathbb{R} är en avbildning $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ som är

- bilinjär, dvs.
 - $\langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$.
 - $\langle ax|y \rangle = a \langle x|y \rangle$.
 - $\langle x|y + z \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$.
 - $\langle x|ay \rangle = a \langle x|y \rangle$.
- symmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$.

Inreprodukt över \mathbb{C} En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum V över \mathbb{C} är en avbildning $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men $\langle ax|y \rangle = a^* \langle x|y \rangle$.
- konjugatsymmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$. Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att $\langle x|x \rangle$ har ingen imaginärdel.

Metrik Låt $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$ och $B = \{e_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V som x och y är i. Vi definierar en matris som beskriver inreprodukten genom

$$\langle x|y \rangle = \sum a_{ij} x_i^* y_j = (x^*)^T A y,$$

där $A_{ij} = \langle e_i|e_j \rangle$. A kallas för metriken.

Hermiteiska matriser Låt A vara en matris. Om A uppfyller

$$A = (A^*)^T,$$

sågs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermiteisk.

Norm Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x \rangle}.$$

Vinkel Vinkeln θ mellan två vektorer definieras som

$$\cos \theta = \frac{\langle x|x \rangle}{|x||y|}.$$

Ortogonalitet x och y är ortogonala om

$$\langle x|y \rangle = 0.$$

Ortogonalt komplement Om $W \subseteq V$ är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^\perp = \{x \in V : \langle x|y \rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

Projektion Låt V vara ett delrum med bas $B = \{e_i\}_{i=0}^n$. Då definieras projektionen som

$$\text{proj}_V(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\langle x|e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

Adjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är L^\dagger den adjungerade operatorn till L om

$$\langle L^\dagger(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Om $L : V \rightarrow W$ definieras den adjungerade operatorn som $L^\dagger : W \rightarrow V$ som uppfyller

$$\langle y|L(x) \rangle = \langle x|L^\dagger(y) \rangle \quad \forall x \in V, y \in W.$$

Självadjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är L självadjungerad om

$$\langle L(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Matrisen för en sådan operator sägs vara Hermiteisk.

Cauchyföljder En Cauchyföljd är en följd som indexeras med naturliga talen och som uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett N så att

$$i, j > N \implies \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

Fullständiga rum Ett rum V är fullständigt om alla Cauchy-följder konvergerar.

Hilbertrum Ett Hilbertrum är ett inreproduktrum som är fullständigt.

ℓ^2 Vi definierar $\ell^2(\mathbb{C})$ som mängden av alla följder av tal i \mathbb{C} så att

$$\sum_{i=0}^N |a_i|^2$$

är begränsad, med inreprodukten

$$\langle A|B \rangle = \sum_{i=0}^N a_i^* b_i.$$

L^2 Vi definierar $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ som mängden av alla komplexvärda funktioner på $[0, 1]$ med inreprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f^*(t)g(t) dt.$$

Ortogonala och unitära operatorer En ortogonal operator över ett reellt vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly \rangle = \langle x|y \rangle \forall x, y \in V$.

En unitär operator över ett komplext vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly \rangle = \langle x|y \rangle \forall x, y \in V$.

4.2 Satser

Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Bevis

Triangelolikheten

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Bevis

Krav på metriken Metriken är konjugatsymmetrisk.

Bevis Om metriken skall beskriva inreprodukten, måste den vara konjugatsymmetrisk. Detta ger

$$(x^*)^T A y = ((y^*)^T A x)^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T A y = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Ortogonal komplement och vektorrum Om V är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$W = W \oplus W^\perp.$$

Bevis Det gäller att

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

Inreprodukt och minsta norm Låt e_1, \dots, e_N vara ortonormala basvektorer i inreproduktrummet V , och låt

$$V_N = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i e_i \right\}.$$

Då ges

$$\inf_{\Phi \in V_N} \|u - \Phi\|$$

av

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \langle u | e_i \rangle e_i.$$

Bevis

Bra och dualrum Om V är ett inreproduktum, definierar båd $x \rightarrow \langle x |$ och $x \rightarrow \langle x^* |$ en injektiv avbildning $V \rightarrow V^*$. Om V är ändligdimensionellt, är detta dessutom en isomorfi.

Bevis

Inreproduktrum och ortogonal bas Ett ändligdimensionellt vektorrum har en ortogonal bas.

Bevis

Gram-Schmidts metod Låt V vara ett vektorrum med ändlig dimension eller en uppräknelig bas $B = \{x_i\}_{i=0}^n$. Då bildar vektorerna

$$e_i = x_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_j | x_i \rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

en ortogonal bas för V .

Bevis

Matrisen för en adjungerad operator Låt L beskrivas av matrisen A i någon ortonormal bas. Då beskrivs L^\dagger av matrisen $(A^T)^*$, även om operatoren är mellan två olika vektorrum.

Bevis Vi har

$$L(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

vilket ger

$$\langle e_i | L(e_j) \rangle = \left\langle e_i \left| \sum_k a_{jk} e_k \right. \right\rangle = \sum_k \langle e_i | a_{jk} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i | e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji}.$$

Om B är matrisen för L^\dagger , så vi nu att dens komponenter kan skrivas som $b_{ji} = \langle e_i | L^\dagger(e_j) \rangle$. Vi utvecklar detta och får

$$b_{ji} = \langle e_i | L^\dagger(e_j) \rangle = \left\langle L^\dagger(e_j) \left| e_i \right. \right\rangle^* = \langle e_j | L(e_i) \rangle^* = a_{ij}^*,$$

och därmed är beviset klart.

Eigenvärden för självadjungerade operatorer Självadjungerade operatorer har bara reella eigenvärden.

Bevis

$$\langle L(x)|x \rangle = \langle x|L(x) \rangle.$$

Detta kan utvecklas om x är en egenvektor för att ge

$$\lambda^* \langle x|x \rangle = \lambda \langle x|x \rangle,$$

och beviset är klart.

Diagonalisering av självadjungerade operatorer Alla självadjungerade operatorer på ändligdimensionella inreproduktrum kan diagonaliseras.

Bevis Vi gör induktion över $\dim(V)$.

Det är trivialt för dimension 1.

Annars, om vi har en egenvektor x motsvarande eigenvärdet λ , bilda $W = \text{Span}(x)$. Då har man $L(W) \subseteq W$. Vidare, om $y \in W^\perp$, har man

$$\langle x|y \rangle = 0 \implies \langle \lambda x|y \rangle = \langle L(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle = 0,$$

och $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Man kan vidare bilda en bas för V med basen för W^\perp och x . Matrisen för L med avseende på denna basen är

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

Per induktion finns det då en ortogonal bas för W^\perp så att matrisen för L på W^\perp blir diagonal.

Ortogonal bas och självadjungerade operatorer Om L är en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V , finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L .

Bevis

Självadjungerade operatorer och ortogonala egenvektorer Låt x vara en egenvektor till L med eigenvärdet λ och y vara en egenvektor med eigenvärde μ . Om $\lambda - \mu \neq 0$ är $\langle x|y \rangle = 0$.

Bevis

$$\langle L(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle.$$

Vi använder att x och y är egenvektorer och får

$$\lambda^* \langle x|y \rangle = \mu \langle x|y \rangle.$$

Enligt antagandet måste då $\langle x|y \rangle = 0$.

Längdbevarande operatorer För en operator L på ett reellt inreproduktrum V är följande ekvivalent:

- $\|Lx\| = \|x\| \forall x \in V$.
- $\langle x|y \rangle = \langle Lx|Ly \rangle \forall x, y \in V$.

Om vektorrummet är ändligdimensionellt, är påståenden även ekvivalenta med

- L avbildar ortonormala baser på ortonormala baser.

Bevis

Längdbevarande operatorer som bijektioner Längdbevarande operatorer på ändligdimensionella vektorrum är bijektiva.

Bevis Sådana operatorer är injektiva ty

$$\|Lx\| = 0 \implies x = 0.$$

De är surjektiva ty matrisen för avbildningen i någon bas måste ha linjärt oberoende kolumner för att vara injektiv. Detta implicerar att avbildningen är surjektiv.

Ortogonala grupper

- Mängden $O(V) = \{L : V \rightarrow V : L \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under sammansättning om V är ett reellt inreproduktum med en ortogonal bas.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1, A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.

Satsen stämmer även för de komplexa motsvarigheterna.

Bevis

Eigenvärden och egenvektorer till ortogonala och unitära operatorer Om L är en unitär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L och alla eigenvärden till L har belopp 1.

Bevis Det finns (möjligtvis) minst ett eigenvärde λ . Välj en motsvarande egenvektor x . Detta ger

$$\|x\| = \|Lx\| \implies |\lambda| = 1.$$

Låt nu $W = \text{Span}(x)$. Vi har att $L(W^\perp) \rightarrow W^\perp$ eftersom L bevarar inreprodukten. Detta ger (?) per induktion att det finns en bas för W^\perp av egenvektorer till L . Unionen av x och denna basen är därmed en bas för hela vektorrummet.

Exponentialavbildningen och Hermiteska operatorer Låt H vara Hermitesk. Då är e^{iH} unitär.

Bevis Eftersom H är Hermitesk, finns det en ortogonal bas av egenvektorer. I denna basen är matrisen för H en diagonalmatris. Därmed är matrisen för e^{iH} en diagonalmatris med $e^{i\lambda}$ på diagonalen, där λ är något eigenvärde. Alltså finns det en ortogonal bas av egenvektorer till e^{iH} , där varje eigenvärde har belopp 1, och e^{iH} är unitär.

5 Linjär rekursion

5.1 Definitioner

Linjär rekursion En linjär rekursion definieras av en följd $\{x_i\}_{i \geq 0}$ av element i ett vektorrum, där

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_j x_{i-j}, i \geq n$$

där x_0, \dots, x_{n-1} är givna. Detta kan alternativt skrivas på matrisform som

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{i-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} y_{i-1}.$$

Dessa matriserna kan ej diagonaliseras.

5.2 Satser

6 Singulärvärden

6.1 Definitioner

6.2 Satser

Möjlighet för singulärvärdesuppdelning Låt $L : V \rightarrow W$. Då kan man välja baser för V och W så att matrisen för L ges av

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3 Algoritmer

Singulärvärdesuppdelning Låt $L : V \rightarrow W$. Vi vill hitta baser för V och W så att matrisen för L blir på formen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta görs vid att

- välja en bas för $\ker(L)$.
- utvidga detta till en bas för V vid att lägga till vektorer i början av basen.
- välja en bas för W vid att utgå från avbildningarna av vektorerna i basen för V och lägga på vektorer.

Om V och W är inreproduktum och du vill välja en ON-bas för båda, kommer du få en diagonalmatris i stället för identitetsmatrisen.

7 Sannolikhet

7.1 Definitioner

Sannolikhetsmatriser En sannolikhetsmatris är en kvadratisk matris där alla element är positiva och summan i varje kolonn är 1.

Stokastiska processer En stokastisk process är en följd av stokastiska variabler.

Markovprocesser En Markovprocess är en stokastisk process som endast beror av förra steget i processen.

Om den stokastiska variabeln är på vektorform, kan rekursionen skrivas som

$$X_{n+1} = AX_n.$$

7.2 Satser

Eigenvärden till sannolikhetsmatriser 1 är alltid ett egenvärde till en sannolikhetsmatris.

Bevis Låt A vara en sannolikhetsmatris. Om $e = [1 \dots 1]^T$ är

$$e^T A = e^T$$

enligt definitionen, vilket implicerar

$$ATe = e.$$

Eftersom $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$ är beviset klart.

Perron-Frobenius' sats Om A är en reguljär sannolikhetsmatris, dvs. uppfyller att A^m för något m bara har positiva element, gäller följande:

- Det finns en egenvektor med egenvärde 1 så att alla element i denna är positiva.
- Den algebraiska och geometriska multipliciteten till egenvärdet 1 är båda lika med 1.
- Om λ är ett annat egenvärde är $|\lambda| < 1$.
- Alla andra egenvektorer har koordinater som summerar till 1.

Bevis Det finns ett $x \neq 0$ så att $Ax = x$. Vi bildar nu x^+ så att $x_i^+ = |x_i|$. Då kan vi skriva

$$\begin{aligned}x &= x_+ - x_-, \\x^+ &= x_+ + x_-\end{aligned}$$

Där x_+ och x_- innehåller de positiva respektive negativa elementen i x . Detta ger

$$\begin{aligned}Ax_+ &= A(x_+ - x_-) = x_+ - Ax_- \geq x_+, \\Ax_- &= A(x_+ - x_-) = Ax_+ - x_- \geq -x_-, \\Ax^+ &= A(x_+ + x_-) = Ax_+ + Ax_- \geq x^+\end{aligned}$$

där olikheterna jämför varje koordinat för sig. Vi inför igen vektorn $e^T = [1 \dots 1]$ och får

$$e^T x^+ \leq e^T Ax^+ = e^T x^+,$$

alltså måste dessa vara lika och $Ax^+ = x^+$, vilket bevisar första påståendet.

Antag vidare att det finns en annan egenvektor y motsvarande egenvärdet 1. Det finns då ett α så att vektorn $x^+ + \alpha y$ har en koordinat lika med 0. Detta ger (säkert) motsägelse enligt argumentet ovan eftersom $(x^+ + \alpha y)^+ > 0$, vilket bevisar andra påståendet.

Vi definierar vidare $A_\infty = x^+ e^T$ och får

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty.$$

Om x^+ är normerad så att summan av elementen är lika med 1, ger detta

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty.$$

Vi har vidare

$$\begin{aligned}AA_\infty &= Ax^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty, \\A_\infty A &= x^+ e^T A = x^+ e^T = A_\infty.\end{aligned}$$

Vi antar att alla element i A är positiva, och därmed finns det ett $\varepsilon > 0$ så att $B = A - \varepsilon A_\infty$ också är en positiv matris. Vi har vidare

$$\begin{aligned}B^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\&= A^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\&= A^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\&= A^n - A_\infty + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\&= A^n - A_\infty + (1 - \varepsilon)^n A_\infty.\end{aligned}$$

Det gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n = 0$ eftersom kolumnerna i B nu summerar till något mindre än 1, vilket implicerar $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_\infty$. Betrakta vidare en egenvektor motsvarande egenvärdet λ . Eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existerar, existerar även $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n y = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n y$. Detta är bara möjligt om $|\lambda| < 1$ eller $\lambda = 1$ ($|\lambda| = 1$ uppfylls ju bara om $\lambda = 1$, vilket redan har täckts).

8 Multilinjär algebra

Observera att Einsteinnotation kommer användas ofta i denna del.

Olika definitioner

8.1 Definitioner

Tensorprodukt av vektorrum från produkter Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen V och W definieras som vektorrummet med bas $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ om $\{e_i\}_{i \in I}$ och $\{f_j\}_{j \in J}$ är baser för V respektive W .

Basbyten under tensorprodukt Betrakta $V \otimes W$, med baser om $\{e_i\}_{i \in I}$ och $\{f_j\}_{j \in J}$ för V respektive W . Vid basbytet

$$e'_i = p_{ik}e_k, f'_j = q_{jl}f_l$$

ges basvektorerna för $V \otimes W$ av

$$e'_i \otimes f'_j = (p_{ik}e_k) \otimes (q_{jl}f_l).$$

Detta definieras som att det uppfyllar distributiva lagen, vilket ger

$$e'_i \otimes f'_j = p_{ik}q_{jl}e_k \otimes f_l.$$

Tensorprodukt av vektorrum från dualer Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen V och W som verkas på av kroppen k definieras som $\{L : V^* \times W^* \rightarrow k : L \text{ är bilinjär}\}$.

Bas för tensorprodukt Vid att använda bilinjariteten till ett godtyckligt L kan det skrivas som

$$L(a_ie_i^*, b_jf_j^*) = a_ib_jL(e_i^*, f_j^*).$$

Eftersom en linjär avbildning ges unikt av dens verkan på basvektorerna, tar vi varje $L(e_i^*, f_j^*)$ som ett element i en bas för tensorprodukten. Vi låter även denna vara

$$e_i \otimes f_j = L(e_i^*, f_j^*) = e_i^*(e_k)f_j^*(f_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

8.2 Satser

Homomorfisats eller någonting Låt $\text{Hom}_k(V, W)$ vara mängden av alla linjära avbildningar från V till W . Då är $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Bevis $V^* \otimes W$ har bas $e_i^* \otimes f_j$ och ges av $(e_i^* \otimes f_j)(x) = e_i^*(x)f_j$.

Universella egenskapen Om $f : V \times W \rightarrow U$ är bilinjär finns en unik linjär avbildning $\phi : V \otimes W \rightarrow U$ så att $f = \psi \circ \phi$ där $\psi : V \times W \rightarrow U$.

Bevis

9 Yttre algebra

Vi utgår från något vektorrum V med en bas $\{e_i\}_{i=1}^n$. Vi bildar ett nytt vektorrum $\wedge V$ med dimension 2^n vars bas ges av $\{e_S\}$. S är alla delmängder av indexmängden. Vi skriver även $e_{\{1,2\}} = e_1 \wedge e_2$.

Vid att definiera $e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$.

10 Kroppsutvidning

10.1 Definitioner

Heltal modulo p Låt p vara ett primtal. Då är heltalen modulo p , betecknad \mathbb{Z}_p , en kropp med alla operationer modulo p . Mer specifikt ger alla operationer det positiva ttalet som fås när alla positiva heltalsmultipler av p subtraheras bort från resultatet.

10.2 Satser

Delkroppar och isomorfi Om K är en kropp så innehåller K en delkropp som är isomorf med \mathbb{Q} eller \mathbb{Z}_p för något primtal modulo p .

Bevis Addera en och en etta i taget. Om detta fortsätter med nya värden hela tiden fås isomorfi med \mathbb{Q} . Annars finns det ett n så att $1 + \dots + 1 = 0$, där det summeras n ettor. Om $n = km$ är $(1 + \dots + 1)_m (1 + \dots + 1)_k = 0$, där subskriptet indikerar hur många termer som finns i parentes. Om n är det minsta sådana talet, måste n då vara ett primtal. Därav följer isomorfin med \mathbb{Z}_n .

Korollar För en ändlig kropp är primärkroppen alltid \mathbb{Z}_p för något primtal p .

Bevis

Delkroppar och vektorrum Om $k \subseteq K$ är en delkropp av K är K ett vektorrum över k .

Bevis

Korollar En ändlig kropp har p^n element för något primtal p och positivt n .

Bevis Kroppen är isomorf med

- Om en operator A har irreducibelt minimalpolynom av grad n över \mathbb{Z}_p så är $K = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{Z}_p[x]\}$ en kropp med p^n element.

