

# Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

22 november 2018

**Sammanfattning**

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Ordinarie differentialekvationer (ODE)</b>	<b>1</b>
1.1	Användbara definitioner och satser . . . . .	1
1.2	Första ordningen . . . . .	4
1.3	Andra ordningen . . . . .	6
1.4	System av ODE . . . . .	8
1.5	Exakta differentialekvationer . . . . .	12
1.6	Potensserier . . . . .	12
1.7	Stabilitet . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Fourierserier</b>	<b>15</b>
2.1	Definitioner . . . . .	15
2.2	Satser . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Funktioner, vektorrum och dylikt</b>	<b>22</b>
3.1	Definitioner . . . . .	22
3.2	Satser . . . . .	23

# 1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

## 1.1 Användbara definitioner och satser

**Lipschitzkontinuitet** En funktion  $f$  är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett  $K$  så att det för varje  $x_1, x_2$  gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

**Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet** Låt  $f \in C^1$ . Då är  $f$  Lipschitzkontinuerlig.

**Grönwalls lemma** Antag att det finns positiva  $A, K$  så att  $h : [0, T \rightarrow \mathbb{R}]$  uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s) \, ds + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

**Bevis** Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s) \, ds.$$

Då gäller att

$$\frac{dI}{dt}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{d}{dt} (e^{-Kt} I(t)) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till  $r$  och använder att  $I(0) = 0$  för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

**Positivt definitiva funktioner** Låt  $D$  vara en öppen omgivning av  $\mathbf{0}$ . Funktionen  $V$  är positivt definitiv om  $V(\mathbf{0}) = 0$  och  $V(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Definitionen är analog för negativt definitiva funktioner. Vid att inkludera likheten i olikhetstecknet fås också definitionen av positivt och negativt semidefinitiva funktioner.

**Analytiska funktioner** En funktion är analytisk om den lokalt beskrivs av en potensserie.

**Potenser av matriser** Vi definierar

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

**Eulers metod** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y), \quad 0 < t < T, \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

Vi gör indelningen  $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N$  så att  $\Delta t = \frac{T}{N}$  och inför  $y_n = y(t_n)$ . Vidare gör vi approximationen

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y).$$

Vi utvidgar nu Eulerapproximationen  $\bar{y}$  till en styckvis linjär funktion som definieras enligt

$$y(t) - y(t_n) = f(t_n, y)(t - t_n), \quad t_n \leq t < t_{n+1}.$$

Denna uppfyller

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}_n) = \bar{f}(t, \bar{y}), \quad t_n \leq t < t_{n+1}.$$

**Konvergens av Eulers metod** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y), \quad 0 < t < T, \\ y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

där  $f$  är Lipschitzkontinuerlig, låt  $\bar{y}, \bar{\bar{y}}$  vara två Eulerapproximationer av denna, med indelningar  $\bar{t}_n = n\frac{T}{N}, n = 0, 1, \dots, N$  respektive  $\bar{\bar{t}}_m = m\frac{T}{M}, m = 0, 1, \dots, M$  och inför  $\Delta t = \max(\frac{T}{N}, \frac{T}{M})$ . Antag vidare att det finns ett  $C$  så att

$$\begin{aligned}\max(|f(0)|, |y(0)|) &\leq C, \\ |f(a) - f(b)| &\leq C|a - b|.\end{aligned}$$

Då finns det  $B_1, B_2$  så att

$$\begin{aligned}\max_{t \in [0, T]} (|\bar{y}(t)|, |\bar{\bar{y}}(t)|) &\leq B_1, \\ \max_{t \in [0, T]} |\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| &\leq B_2 \Delta t.\end{aligned}$$

**Bevis** Vi beviser det första påståendet först.  
Lipschitzkontinuitet av  $f$  ger

$$|f(z)| \leq C|z| + |f(0)| \leq C(1 + |z|).$$

Eulers metod ger

$$\bar{y}(\bar{t}_n) = \bar{y}(\bar{t}_{n-1}) + \frac{T}{N} f(\bar{y}(\bar{t}_{n-1})).$$

Dessa två ger till sammans

$$\begin{aligned}|\bar{y}(\bar{t}_n)| &\leq |\bar{y}(\bar{t}_{n-1})| + \frac{T}{N} |f(\bar{y}(\bar{t}_{n-1}))| \\ &\leq |\bar{y}(\bar{t}_{n-1})| + C \frac{T}{N} (1 + |\bar{y}(\bar{t}_{n-1})|) \\ &= (1 + C \frac{T}{N}) |\bar{y}(\bar{t}_{n-1})| + C \Delta t.\end{aligned}$$

Vi använder induktion på detta resultatet och får

$$\begin{aligned}|\bar{y}(\bar{t}_n)| &\leq (1 + C \frac{T}{N})^n |\bar{y}(0)| + C \frac{T}{N} \frac{(1 + C \frac{T}{N})^n - 1}{C \frac{T}{N}} \\ &= (1 + C \frac{T}{N})^n |\bar{y}(0)| + (1 + C \frac{T}{N})^n - 1.\end{aligned}$$

Vi vet även att

$$(1 + C \frac{T}{N})^n \leq e^{Cn \frac{T}{N}} = e^{C\bar{t}_n},$$

vilket slutligen ger

$$|\bar{y}(\bar{t}_n)| = e^{C\bar{t}_n} |\bar{y}(0)| + e^{C\bar{t}_n} - 1.$$

En motsvarande gräns kan fås för  $\bar{\bar{y}}$ , vilket slutför beviset.

Vidare bevisar vi det andra påståendet. Skillnaden mellan de två approximationerna ges av

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t) &= \bar{y}(0) - \bar{\bar{y}}(0) + \int_0^t \bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}}) dt \\ &= \int_0^t \bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}}) dt. \end{aligned}$$

Betrakta ett  $t \in [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}) \cup [\bar{\bar{t}}_m, \bar{\bar{t}}_{m+1})$ . Vi adderar och subtraherar  $f(\bar{y}(t))$  och  $f(\bar{\bar{y}}(t))$  från integranden och får

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}}) &= f(\bar{y}(\bar{t}_n)) - f(\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)) \\ &= (f(\bar{y}(\bar{t}_n)) - f(\bar{y}(t))) + (f(\bar{\bar{y}}(t)) - f(\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m))) + (f(\bar{y}(t)) - f(\bar{\bar{y}}(t))) \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

Lipschitzantagandet för  $f$  ger

$$|f(\bar{y}(\bar{t}_n)) - f(\bar{y}(t))| \leq C|\bar{y}(\bar{t}_n) - \bar{y}(t)|.$$

Med hjälpresultatet för  $|f(z)|$  kan vi skriva

$$|\bar{y}(\bar{t}_n) - \bar{y}(t)| = (t - \bar{t}_n)|f(\bar{y}(\bar{t}_n))| \leq C(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|)(t - \bar{t}_n)$$

och slutligen

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq C^2(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|)(t - \bar{t}_n), \\ |R_2| &\leq C^2(1 + |\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)|)(t - \bar{\bar{t}}_m), \\ |R_3| &\leq C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)|, \end{aligned}$$

där antaganden igen har användts.

Integranden kan nu skrivas som

$$\left| \bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}}) \right| \leq C^2(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|)(t - \bar{t}_n) + C^2(1 + |\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)|)(t - \bar{\bar{t}}_m) + C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)|.$$

Om vi antar att det första påståendet i satsen stämmer, fås

$$\left| \bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}}) \right| \leq C^2(1 + B_1)\Delta t + C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)|,$$

och integralen kan skrivas som

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t) &\leq \int_0^t C^2(1 + B_1)\Delta t + C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| dt \\ &\leq \int_0^t C^2(1 + B_1)\Delta t + C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| dt \\ &\leq \int_0^t C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| dt + C^2(1 + B_1)T\Delta t \\ &= \int_0^t C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| dt + C_1T\Delta t. \end{aligned}$$

Grönwalls lemma ger slutligen

$$\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t) \leq C_1T\Delta te^{CT}.$$

**Linjära differentialekvationer** Om en differentialekvation kan skrivas på formen  $F(t, y, \frac{dy}{dx}, \dots) = 0$ , är den linjär om  $F$  är linjär i alla sina argument förutom  $t$ .

**Wronskianen** Wronskianen definieras som

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \frac{dy_1}{dt}(t) & \frac{dy_2}{dt}(t) \end{vmatrix}.$$

För vektorvärda funktioner definieras den som determinanten av matrisen vars kolumner är de olika funktionerna.

**Linjärt beroende funktioner**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  är linjärt beroende om det finns  $k_1, k_2$  så att

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

**Fundamentalt sätt av lösningar** Betrakta någon ODE och ett sätt lösningar. Detta sättet är ett fundamentalt sätt av lösningar om och endast om deras wronskian är nollskild överallt i lösningsintervallet.

**Ordinarie punkter** Betrakta differentialekvationen

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + Q(x) \frac{dy}{dx}(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Vi skriver denna om till

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) + p(x) \frac{dy}{dx}(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Om både  $p$  och  $q$  är analytiske kring punkten  $x_0$ , är  $x_0$  en ordinarie punkt till differentialekvationen.

**Singulära punkter** Betrakta differentialekvationen

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + Q(x) \frac{dy}{dx}(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Vi skriver denna om till

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) + p(x) \frac{dy}{dx}(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Om antingen  $Q$  eller  $R$  är nollskilda i  $x_0$ , medan  $P(x_0) = 0$ , är  $x_0$  en singulär punkt till differentialekvationen.

**Regulära singulära punkter** Betrakta differentialekvationen

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + Q(x) \frac{dy}{dx}(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Vi skriver denna om till

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + x(xp(x)) \frac{dy}{dx}(x) + x^2 q(x)y(x) = 0.$$

Om antingen  $p$  eller  $q$  ej är analytiska kring  $x_0$ , men  $xp$  och  $x^2 q$  är det, är  $x_0$  en regulär singulär punkt till differentialekvationen.

## 1.2 Första ordningen

**Existens av lösning** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= f(y), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Detta har en lösning om  $f$  är Lipschitzkontinuerlig.

**Bevis** Bilda två diskreta approximationer  $\bar{y}, \bar{\bar{y}}$  av  $y$ . Vi kan visa att

$$\max_{t \in [0, T]} |\bar{y}, \bar{\bar{y}}| \leq K \Delta t$$

där  $\Delta t$  är det största tidsavståndet mellan två punkter i någon av de diskreta approximationerna. Detta implicerar konvergens mot ett gränsvärde  $y(t)$  när  $\Delta t \rightarrow 0$ . Detta gränsvärdet uppfyller

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{y}(0) + \int_0^t f(\bar{y}(s)) \, ds \\ &= y(0) + \int_0^t f(y(s)) \, ds, \end{aligned}$$

där sista likheten kommer av integrandens Lipschitzkontinuitet. Integralkalkylens fundamentalsats ger då

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y),$$

vilket skulle visas.

**Entydighet av lösning** Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= f(y), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Detta har en unik lösning om  $f$  är Lipschitzkontinuerlig.

Observera att beviset kan även göras för en funktion  $f(t, y)$  vid att skriva differentialekvationen som ett system och komma med en motsvarande sats för system av differentialekvationer.

**Bevis** Betrakta två lösningar  $y, z$  av differentialekvationen. Vi får

$$y(\tau) - y_0 = \int_0^\tau f(y) \, dt$$

och samma för  $z$ . Vi subtraherar dessa två resultat och får

$$y(\tau) - z(\tau) = y_0 - z_0 + \int_0^\tau f(y) - f(z) \, dt.$$

Vid att beräkna absolutbeloppet av båda sidor och använda Cauchy-Schwarz' oliket får man vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau |f(y) - f(z)| \, dt.$$

Kravet om Lipschitzkontinuitet av  $f$  ger vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau K |y(t) - z(t)| \, dt.$$

Grönwalls lemma ger slutligen

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| e^{K\tau}.$$

Om  $y_0 = z_0$  är  $y = z$ , och beviset är klart.

**Lösning av linjära ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{dy}{dt}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p \, dx$$

och inför den integrerande faktorn  $e^{P(t)}$ . Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)} \frac{dy}{dt}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{d}{dt}(ye^P)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{dH}{dt}(t).$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret  $y(a) = y_0$ . Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p \, dx} + \int_a^t g(x) e^{-\int_x^t p \, ds} \, dx.$$

**Separabla ODE av första ordning** Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna betecknas som en separabel ODE av första ordning.

För att lösa den, beräkna primitiv funktion på båda sidor, vilket ger

$$M(x) + N(y(x)) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Om  $N$  är inverterbar, får man då  $y$  enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

### 1.3 Andra ordningen

**Entydighet av lösning** Betrakta den andra ordningens ODE

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) &= g(t), \quad y > t_0, \\ y(t_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dt}(t_0) &= y'_0. \end{aligned}$$

Den har en entydig lösning om  $p, q$  är Lipschitzkontinuerliga.

**Form på lösning av andra ordningens ODE** Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = L(t, y) = g(t).$$

Låt  $y_P$  vara en partikulär lösning till denna. Då är  $y$  en lösning om och endast om

$$y = y_H + y_P,$$

där  $y_H$  löser den homogena ekvationen.



**Bevis** Vi har

$$L(t, y) = L(t, y_P + y_H) = L(t, y_P) + L(t, y_H) = g(t) + 0 = g(t),$$

och därmed löser  $y$  differentialekvationen. Vi har även

$$L(t, y - y_P) = g(t) - g(t) = 0,$$

och  $y - y_P$  löser den homogena ekvationen. Eftersom detta är sant, har vi visat ekvivalens.

**Fundamentala lösningar** Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

där  $p, q, g$  är kontinuerliga på  $I$ . Låt  $y_1$  uppfylla

$$y_1(t_0) = 1, \quad \frac{dy_1}{dt}(t_0) = 0$$

och  $y_2$  uppfylla

$$y_2(t_0) = 0, \quad \frac{dy_2}{dt}(t_0) = 1.$$

Då definieras  $y_1, y_2$  som mängden av fundamentala lösningar av differentialekvationen.

**Linjär kombination av lösningar** Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t > t_0,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då finns det  $c_1, c_2$  så att  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  är en lösning om  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ .

**Abels sats** Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då gäller att

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

**Bevis**

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= \frac{dy_1}{dt}(t) \frac{dy_2}{dt}(t) - \frac{dy_1}{dt}(t) \frac{dy_2}{dt}(t) + y_1 \frac{d^2 y_2}{dt^2}(t) - y_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2}(t) \\ &= y_1 \left( -p(t) \frac{dy_2}{dt}(t) + q(t)y_2(t) \right) - y_2 \left( -p(t) \frac{dy_1}{dt}(t) + q(t)y_1(t) \right) \\ &= -p(t)W(y_1, y_2)(t). \end{aligned}$$

Denna differentialekvationen har lösning

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds},$$

vilket skulle visas.

**Linjärt beroende av lösningar** Betrakta

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) &= g(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dt}(t_0) &= y'_0\end{aligned}$$

och anta att  $y_1, y_2$  är lösningar. Då är dessa linjärt beroende på  $I$  om och endast om  $W(y_1, y_2)(t) = 0$ .

**Bevis** Om dessa är linjärt beroende, ser man att Wronskianen blir lika med 0, då kolumnerna i matrisen vars determinant ger Wronskianen kommer vara multipler av varandra.

**Lösning av andra ordningens ODE med konstanta koefficienter** Låt  $r_1, r_2$  vara lösningar till

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Då ges lösningarna till

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p\frac{dy}{dt}(t) + qy(t) = L(t, y) = 0$$

av

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2, \\ (c_1 t + c_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2. \end{cases}$$

**Variation av parametrar** Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

där  $p, q, g$  är kontinuerliga på  $I$  och  $y_1, y_2$  är lösningar av den motsvarande homogena ekvationen, ges en partikulär lösning av ekvationen av

$$y_p = -y_1 \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2 \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds$$

där  $t_0 \in I$ .

**Eulerekvationer** Betrakta en ekvation på formen

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2}(x) + ax \frac{dy}{dx}(x) + by = 0.$$

För att hitta lösningar, gör ansatsen  $y(x) = x^r$ . Om detta är en lösning, uppfyller  $r$

$$r(r-1) + ar + b = 0.$$

I fallet att ekvationen över har en dubbelrot, är den andra lösningen  $y_2(x) = x^r \ln|x|$ .

## 1.4 System av ODE

**Formulering** Betrakta ett system av funktioner  $x_1, x_2, \dots$  som beskrivs av systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}(t) &= g_1(t) + \sum p_{1i}(t)x_i, \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= g_2(t) + \sum p_{2i}(t)x_i, \\ &\vdots\end{aligned}$$

av differentialekvationer. Definiera

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Då kan systemet skrivas som

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Detta kan även generaliseras till

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(t).$$

**Autonoma system** Ett autonomt system är på formen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

**Form på lösning av system av ODE** Låt  $\mathbf{x}_p$  lösa

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Då är alla lösningar på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

där  $\mathbf{x}_h$  löser det motsvarande homogena systemet.

**Fundamentalmatris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$$

med fundamentalt sätt av lösningar  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ . Då definieras systemets fundamentalmatris som

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}(t) & \dots & \mathbf{x}^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

Vi definierar även den speciella fundamentalmatrisen  $\Phi$ , vars kolumner satisfierar begynnelsesvillkoret

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det kan visas att denna ges av

$$\Phi(t) = e^{A(t)t}.$$

**Linjär kombination av lösningar** Låt  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)} \in \mathbb{R}$ ,  $0 < t < T$  vara ett fundamentalt sätt av lösningar till

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P(t)\mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

där  $P$  är kontinuerlig. Då kan varje lösning till ekvationen skrivas som

$$\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{x}^{(i)}$$

på precis ett sätt. Med fundamentalmatrisen kan detta uttryckas som

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{c},$$

där  $\mathbf{c}$  är en vektor med koefficienter.

**Bevis** Begynnelsevärdeproblemet implicerar att vår lösning måste uppfylla

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}(0) \dots \mathbf{x}^{(n)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0).$$

Detta har bara en lösning om  $|\mathbf{x}^{(1)}(0) \dots \mathbf{x}^{(n)}(0)| \neq 0$ . Eftersom alla lösningarna är linjärt oberoende, är detta uppfyllt. Konstanterna  $c_i$  ges då unikt, och beviset är klart.

**System av ODE med konstant matris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris. Vi gör ansatsen  $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\boldsymbol{\xi}$  och får

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) - P\mathbf{x}(t) = e^{rt}(rI - A)\boldsymbol{\xi}.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är nollskild, kan detta bara bli noll om

$$P\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}.$$

Alltså är  $\mathbf{x}$  bara en lösning om  $\boldsymbol{\xi}$  är en egenvektor till  $P$  och  $r$  är det motsvarande egenvärdet.

**Upprepande egenvärden** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris, låt  $r$  vara ett egenvärde till  $P$  med algebraisk multiplicitet 2 och geometrisk multiplicitet 1 och  $\boldsymbol{\xi}$  en motsvarande egenvektor. Då är en lösning

$$\mathbf{x}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$$

och en ny lösning kan skrivas som

$$\mathbf{x}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt},$$

där  $\boldsymbol{\eta}$  uppfyller

$$(A - rI)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

**Wronskianen för ett system med konstant matris** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är en konstant matris. Låt  $\boldsymbol{\xi}_i$  vara de olika egenvektorerna till  $P$  motsvarande egenvärden  $r_i$ . Wronskianen till dessa ges av

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} \boldsymbol{\xi}_1 & \dots & e^{r_n t} \boldsymbol{\xi}_n \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \dots & \boldsymbol{\xi}_n \end{vmatrix} \\ &= W(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n)(0)e^{\text{Tr}\{P\}t}, \end{aligned}$$

där vi har använt en sats för att få fram spåret. Det följer blant annat att Wronskianen är antingen 0 eller nollskild överallt.

**Diagonalisering** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t),$$

där  $A$  är en konstant matris som kan skrivas som  $A = PDP^{-1}$ . Då kan vi införa  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ , vilket ger

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) &= P\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = PDP^{-1}\mathbf{y} = PD\mathbf{y}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) &= D\mathbf{y},\end{aligned}$$

vilket är en enklare variant av det ursprungliga problemet.

**Partikulärlösningar** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Det finns olika metoder att ta fram en partikulärlösning av detta.

**Diagonalisering** Låt  $P$  vara diagonaliserbar och konstant. Då får man vid diagonalisering att

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{h}(t) + D\mathbf{y}(t)$$

med  $\mathbf{h} = T^{-1}\mathbf{g}$ . Varje komponent kan då lösas som

$$y_j(t) = c_j e^{r_j t} + e^{r_j t} \int_{t_0}^t h_j(s) e^{-r_j s} ds.$$

**Obestämda koefficienter** Om  $\mathbf{g}$  har en enkel form, kan man gissa på en lösning och bestämma koefficienterna baserad på en gissning.

**Variation av parametrar** Ansätt

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t).$$

Då ger differentialekvationen

$$\frac{d\Psi}{dt}(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t).$$

Eftersom  $\Psi$  är en fundamentalmatris för ekvationen, gäller att

$$\frac{d\Psi}{dt}(t)P(t)\Psi(t),$$

och vi får

$$\Psi(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = \mathbf{g}(t).$$

Vi löser för  $\mathbf{u}$  och integrerar, vilket slutligen ger

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds.$$

## 1.5 Exakta differentialekvationer

**Formulering** Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{d\psi}{dx}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

**Exakthet av differentialekvationer** Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$

## 1.6 Potensserier

**Kriterier för potensserielösning** I vissa fall kan man ansätta

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

som en lösning av en differentialekvation. Detta kan endast göras om alla involverade koefficienter är analytiska.

**Singulära punkter och Euler-liknande ekvationer** Betrakta differentialekvationen

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + Q(x) \frac{dy}{dx}(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Vi skriver denna om till

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + x(xp(x)) \frac{dy}{dx}(x) + x^2 q(x)y(x) = 0.$$

Antag att antingen  $p$  eller  $q$  ej är analytiska kring 0, men  $xp$  och  $x^2q$  är det. Då kan man med hjälp av ansatsen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

få att detta är en lösning om  $r$  uppfyller

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

där  $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x)$  och  $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x)$ . Från detta fås vidare en rekursionsrelation för koefficienterna  $a_n$ .

Låt nu  $r_1, r_2$  vara värden av  $r$  som ger lösningar, med  $r_1 > r_2$ , och antag att  $y_1$  är lösningen som fås vid att använda  $r_1$  i ansatsen. Då kan följande ansatser göras för att hitta en ny lösning:

- Om  $r_1 - r_2$  inte är ett heltal, kommer man få två olika rekursionsrelationer med hjälp av ansatsen.

- Om  $r_1 = r_2$ , gör man ansatsen

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

där koefficienterna  $b_n$  måste bestämmas.

- Om  $r_1 - r_2$  är ett positivt heltal, gör man ansatsen

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{r_2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right),$$

för några tal  $a, b_n$ .

## 1.7 Stabilitet

**Jämviktpunkter** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

En jämviktpunkt för detta systemet är en punkt  $\mathbf{x}(t_0)$  så att  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ , med implikationen att  $\mathbf{x}(t)$  är konstant för  $t > t_0$ .

**Stabila jämviktpunkter** En jämviktpunkt  $\mathbf{x}_0$  är stabil om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  så att alla lösningar  $\mathbf{x}$  som uppfyller  $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ , existerar för  $t > t_0$  och uppfyller  $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$ ,  $t > t_0$ . En jämviktpunkt som ej uppfyller detta är instabil.

**Asymptotiskt stabila jämviktpunkter** En jämviktpunkt  $\mathbf{x}_0$  är asymptotiskt stabil om den är stabil och det finns ett  $\delta_0 > 0$  så att om  $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0| < \delta_0$ , gäller det att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

**Stabilitet av autonom ODE** Betrakta

$$\frac{dy}{dt}(t) = g(y(t)), \quad g(y_0) = 0.$$

Då gäller att

- om  $\frac{dg}{dy}(y_0) < 0$ , är  $y_0$  asymptotiskt stabil.
- om  $\frac{dg}{dy}(y_0) > 0$ , är  $y_0$  instabil.

**Bevis** Här bevisas endast det första fallet.

Betrakta  $(y - y_0)^2$ . Nära  $y_0$  gäller att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t) - y_0)^2 &= 2(y(t) - y_0)g(y(t)) \\ &\approx 2(y(t) - y_0) \left( g(y_0) + \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0) + o((y(t) - y_0)^2) \right) \\ &= 2(y(t) - y_0) \left( \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0) + o((y(t) - y_0)^2) \right). \end{aligned}$$

Det gäller att  $o((y(t) - y_0)^2) < -\frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0)^2$  tillräckligt nära  $y_0$  (man skulle även kunna välja en annan nollskild konstant än  $-\frac{dg}{dy}(y_0)$ , men detta valet gör beviset snyggare). Detta ger

$$\frac{d}{dt}(y(t) - y_0)^2 < \frac{dg}{dy}(y_0)(y(t) - y_0)^2,$$

som kan lösas för att ge

$$(y(t) - y_0)^2 < e^{\frac{dg}{dy}(y_0)t} (y(0) - y_0)^2,$$

som går mot 0 för stora  $t$  enligt vårt antagande om  $g$ 's derivata.

## Karakterisering av jämviktpunkter för system    Betrakta systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där  $P$  är konstant och reellvärd. För enkelhetens skull kommer vi här att låta systemet vara ett system i två variabler. Låt även  $P$  ha egenvärden  $r_1, r_2 \neq 0$ . Då gäller att  $\mathbf{0}$  är en kritisk punkt. Lösningarnas banor kan nu beskrivas på följande sätt:

- Om  $r_1, r_2 < 0$  går alla lösningar in mot origo, och origo kallas en stabil nod.
- Om  $r_1, r_2 > 0$  går alla lösningar ut från origo, och origo kallas en instabil nod.
- Om egenvärdena har olika tecken går lösningarna in mot origo parallellt med en egenvektor och ut parallellt med den andra, och origo kallas en instabil sadelpunkt.
- Om  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$  gäller att:
  - Om  $\alpha > 0$  går lösningarna i spiraler ut från origo, och origo kallas en instabil spiralpunkt.
  - Om  $\alpha < 0$  går lösningarna i spiraler in mot origo, och origo kallas en stabil spiralpunkt.
  - Om  $\alpha = 0$  går lösningarna i bana kring origo, och origo kallas ett centrum.
- Om  $r_1 = r_2 = r$  och det finns två egenvektorer motsvarande egenvärdet  $r$  går banorna i linjer från eller till origo, beroende på tecknet till  $r$ , och origo är en instabil eller stabil nod.
- Om  $r_1 = r_2 = r$  och det bara finns en egenvektor motsvarande egenvärdet  $r$  går lösningarna i kurvade banor ut från eller in mot origo, där dessa banorna blir parallella med egenvektorn långt borta från origo, och origo är en stabil eller instabil degenererad nod.

**Slutsats**    Det gäller alltså att

- Om alla  $P$ s egenvärden har negativ realdel, är origo en stabil jämviktpunkt.
- Om något av  $P$ s egenvärden har positiv realdel, är origo en instabil jämviktpunkt.

## Stabilitet av jämviktpunkter för icke-linjära system av ODE    Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

Låt detta ha en kritisk punkt  $\mathbf{x}_0$  och låt  $\mathbf{g} \in C^1$  i en öppen mängd kring  $\mathbf{x}_0$ . Vi linjariserar kring  $\mathbf{x}_0$ , vilket går om

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))|}{|\mathbf{x}(t)|} = 0,$$

vilket uppfylls om  $\mathbf{f} \in C^2$ . Inför funktionalmatrisen aka Jacobimatrisen

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_p}{dx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{df_p}{dx_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betrakta  $J(\mathbf{x}_0)$ . Då gäller att

- Om alla  $J(\mathbf{x}_0)$ s egenvärden har negativ realdel, är  $\mathbf{x}_0$  en stabil jämviktpunkt.
- Om något av  $J(\mathbf{x}_0)$  egenvärden har positiv realdel, är  $\mathbf{x}_0$  en instabil jämviktpunkt.



**Lyapunovfunktioner** Betrakta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Antag att systemet har en kritisk punkt  $\mathbf{0}$ . Om det finns en positivt definitiv funktion  $V \in C^1$  och en negativt definitiv funktion

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2$$

på någon omgivning av  $\mathbf{0}$ , är  $\mathbf{0}$  en stabil jämviktspunkt. Om  $V'$  är negativt semidefinitiv, är  $\mathbf{0}$  en stabil jämviktspunkt.

## 2 Fourierserier

### 2.1 Definitioner

**Positiva summationskärnor** En positiv summationskärna är en Riemannintegrerbar funktion  $K_n$  på  $(-a, a)$  som uppfyller

- $K_n(x) \geq 0, x \in (-a, a)$ .
- $\int_{-a}^a K_n(x) dx = 1$ .
- för varje  $\delta > 0$  så gäller att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) dx = 0$ .

**Cesaro-sommerbarhet** Låt

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

och

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k.$$

Då är  $\sum_{k=0}^n a_k$  Cesarosummerbar om  $\sigma_N$  konvergerar.

**Summationskärnor** Borde definieras

**Feijerkärnan** Vi definierar Feijerkärnan som

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(t).$$

### 2.2 Satser

**Formel för Fourierkoefficienter** Antag att en funktion  $f$  kan skrivas som

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

där  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$  är begränsad. Då gäller det att

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

**Bevis** Om antagandet är sant, skulle det gälla att

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt} e^{-int} dt.$$

Antag först att det finns ett  $N$  så att  $c_n = 0$  för  $|n| > N$ . Detta ger

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt} e^{-int} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt.$$

Den återstående integralen ges av

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi, & m = n, \\ \frac{1}{i(m-n)} (e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}) = \frac{e^{i(m-n)\pi}}{i(m-n)} (1 - e^{-2\pi i(m-n)}) = 0, & m \neq n, \end{cases}$$

och satsen stämmer.

Låt nu  $n$  vara givet och välj ett  $N$  så att  $n < N$  och  $\sum_{|n| > N} |c_n| < \varepsilon$ , vilket är möjligt eftersom serien ovan är konvergent. Detta ger

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt} e^{-int} dt \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|m| > N} c_m e^{i(m-n)t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|m| > N} |c_m e^{i(m-n)t}| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|m| > N} |c_m| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| > N} 2\pi |c_m| \\ &= \sum_{|m| > N} |c_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Enligt vårt tidigare argument gäller det även att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt} e^{-int} dt = c_n,$$

och vi har alltså visat

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt} e^{-int} dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|m| > N} c_m e^{i(m-n)t} dt \right| < \varepsilon,$$

vilket ger att satsen stämmer.

**Konvergens och Cesarosummerbarhet** Låt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s.$$

Då är  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  Cesarosummerbar och har värdet  $s$  även i denna mening.

**Bevis** Vi har

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} s_i - s \right| \\ &= \left| \frac{(s_0 - s) + \cdots + (s_{n-1} - s)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(s_0 - s) + \cdots + (s_N - s)}{n} \right| + \left| \frac{(s_{N+1} - s) + \cdots + (s_{n-1} - s)}{n} \right|. \end{aligned}$$

Eftersom  $s_n$  konvergerar, finns det ett  $N$  så att när  $n > N$  är  $|s_n - s| < \varepsilon$  för något  $\varepsilon > 0$ . Låt nu  $N$  i ekvationen över vara så att när  $n > N$  är  $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Detta ger

$$\left| \frac{(s_{N+1} - s) + \cdots + (s_{n-1} - s)}{n} \right| < \frac{n - N - 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olikheten över kan då skrivas som

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{C_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Välj nu  $N$  igen så att  $N = \frac{2C_N}{\varepsilon}$ . Då blir olikheten:

$$|\sigma_n - s| \leq \varepsilon,$$

och beviset är klart.

**Riemann-Lebesgues lemma** Antag att  $f$  är Riemannintegrerbar på  $(-\pi, \pi]$ . Då är

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

**Bevis** Låt  $s(x)$  vara en undertrappa till  $f$ . Eftersom  $f$  är Riemannintegrerbar så finns det ett  $s$  så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s(t)) e^{i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s(t)| dt \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Vi har vidare

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{i\lambda t} dt \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda t} dt \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{i\lambda} (e^{i\lambda x_j} - e^{i\lambda x_{j-1}}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \frac{2|m_j|}{\lambda} \\ &\leq \frac{2nM}{\lambda}, \end{aligned}$$

där  $M = \sup \{|m_1|, \dots, |m_n|\}$ . För  $\lambda > \frac{4nM}{\varepsilon}$  fås

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon,$$

och beviset är klart.

**Begränsning av Fourierkoefficienter** Låt  $f \in C^1$  på enhetscirkeln. Då gäller att

$$|c_n| \leq \frac{C}{n}, \quad n \neq 0.$$

**Bevis** Vi har

$$\begin{aligned} \left| c_n \left( \frac{df}{dx} \right) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{df}{dx}(t) e^{-int} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right|. \end{aligned}$$

Eftersom  $f$  är kontinuerlig på enhetscirkeln, ger detta

$$f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} = f(\pi)(e^{-in\pi} - e^{in\pi}) = -2f(\pi) \sin n\pi = 0,$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \left| c_n \left( \frac{df}{dx} \right) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| in \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &= \frac{|n|}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &= |n| |c_n(f)|. \end{aligned}$$

Riemann-Lebesgues sats ger att  $\left| c_n \left( \frac{df}{dx} \right) \right|$  är begränsad, vilket ger

$$C \geq \left| c_n \left( \frac{df}{dx} \right) \right| = |n| |c_n(f)|,$$

och beviset är klart.

**Följsats** Låt  $f \in C^2$  på enhetscirkeln. Då konvergerar dens Fourierserie mot funktionen.

**Bevis** Med samma resonemang som i förra satsen får man

$$|c_n| \leq \frac{C}{n^2},$$

och

$$\sum_{i=-N}^N |c_n(f) e^{inx}| \leq \sum_{i=-N}^N |c_n(f)| \leq \sum_{i=-N}^N \frac{C}{n^2},$$

och därmed konvergerar summan.

**Integraler med positiva summationskärnor** Låt  $f$  vara en Riemannintegrerbar funktion på  $(-a, a)$ , specifikt så att  $|f(x)| \leq M, x \in (-a, a)$ , och kontinuerlig i  $x = 0$ . Antag vidare att  $K_n$  är en positiv summationskärna på  $(-a, a)$ . Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a K_n(x) f(x) dx = f(0).$$

**Bevis** Vi vill visa att för alla  $\varepsilon > 0$  existerar ett  $M > 0$  så att om  $n > M$  så är

$$\left| \int_{-a}^a K_n(x) f(x) dx - f(0) \right| < \varepsilon.$$

Vi har att

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-a}^a K_n(x) f(x) dx - f(0) \right| \\ &= \left| \int_{-a}^a K_n(x) f(x) dx - f(0) \int_{-a}^a K_n(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{-a}^a K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &= \left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx + \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| + \left| \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right|. \end{aligned}$$

Eftersom  $f$  är kontinuerlig, finns det ett  $J > 0$  sådant att  $|f(x) - f(0)| < J$  när  $|x| < a$ . Då kan vi skriva

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| + \left| \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| + J \left| \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Tills nu har vi inte specificerat vårt  $\delta$ . Välj nu det så att  $|x| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Använd vidare att eftersom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) dx = 0$  finns det ett  $M > 0$  så att  $n > M \implies \left| \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2J}$ . Alltså har vi för ett tillräckligt stort  $n$  att

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| + J \left| \int_{\delta < |x| < a} K_n(x) dx \right| < \frac{1}{2}\varepsilon \left| \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) dx \right| + J \frac{\varepsilon}{2J} = \varepsilon,$$

och beviset är klart.

**Följdsats** Låt  $K_n$  vara en positiv summationskärna och  $f$  vara kontinuerlig och integrerbar i  $x$ . Då gäller det att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x - t) dt = f(x).$$

**Bevis** Tillämpa satsen ovan på  $g(t) = f(x - t)$ .

## Konvergens av Fourierserier

**Bevis** Vi vill hitta ett villkor på  $f$  så att för alla  $\varepsilon > 0$  finns det ett  $K > 0$  så att

$$N > K \implies \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| < \varepsilon,$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Vi definierar

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

och beräknar den som

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{in(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - e^{-i(2N+1)(x-t)}}{1 - e^{-i(x-t)}} e^{-iN(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Vi definierar Dirichletkärnan

$$\begin{aligned} D_N(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} e^{-iN\alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iN\alpha} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\alpha} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\alpha}}{e^{\frac{1}{2}i\alpha} - e^{-\frac{1}{2}i\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}. \end{aligned}$$

Då kan vi skriva

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt.$$

**Hjälpsats för Feijerkärnan**  $F_N$  är en positiv summationskärna på  $[-\pi, \pi]$ .

**Bevis**  $F_N$  är en summa av Riemannintegrerbara funktioner, och är därmed Riemannintegrerbar. För att visa att  $F_N \geq 0$ , skriv

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^N \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^N \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{-n-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \end{aligned}$$

där  $\lambda = e^{\frac{1}{2}ix}$ . Det kan visas att detta ger

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2.$$

För att visa det andra påståendet, använder vi att

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum e^{ikx} dx = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum e^{ikx} \dots = 1,$$

vilket ger

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \frac{1}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum D_n(x) dx = \frac{1}{N+1} \sum 1.$$

För att visa det tredje påståendet, skriv

$$\begin{aligned} \int_{\delta < |x| < \pi} F_N(t) dt &= \int_{\delta < |x| < \pi} \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2 dt \\ &\leq \int_{\delta < |x| < \pi} \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{1}{(N+1)} \left( \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \right)^2 \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

## Följdsats

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) f(x-t) dt = f(x).$$

## Bevis

**Annan följsats** Antag att  $f$  är integrerbar på enhetscirkeln och att alla dens Fourierkoefficienter är 0. Då är  $f(x) = 0$  överallt där  $f$  är kontinuerlig.

## Bevis

**Yttersta konvergenssats för Fourierserier** Antag att  $f$  uppfyller

- $f$  är styckvis  $C^1$  på  $(-\pi, \pi]$ .
- Höger- och vänstergränsvärdet existerar även mellan de olika intervallen där  $f$  är  $C^1$ .

Då konvergerar Fourierserien  $S_N$  till

- $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$  på något av intervallen.
- $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$  på gränsen mellan två intervall, där  $f(x^\pm) = \lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t)$ .

**Bevis** Vi vill att

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| \rightarrow 0.$$

Om detta stämmer, gäller det att

$$\left| \int_0^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt - \frac{f(x^-)}{2} \right| + \left| \int_{-\pi}^0 f(x-t) D_N(t) dt - \frac{f(x^+)}{2} \right| \rightarrow 0.$$

Vi betraktar ett av dessa uttrycken, då beviset är analogt för det andra.

Det gäller att Dirichletkärnan är jämn och integreras till 1 på  $[-\pi, \pi]$ . Detta ger

$$\frac{f(x^-)}{2} = \int_0^\pi f(x^-) D_N(t) dt,$$

och vi får

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(x-t) D_N(t) dt - \frac{f(x^-)}{2} \right| &= \left| \int_0^\pi (f(x-t) - f(x^-)) D_N(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \frac{t}{\sin(\frac{1}{2}t)} \sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) dt \right|. \end{aligned}$$

Det första bråket är begränsad och kontinuerligt när  $x-t$  ej är på gränsen mellan två intervall, och är därmed Riemannintegrerbar. Det samma är det andra bråket, och vi kan skriva detta som

$$\left| \int_0^\pi f(x-t) D_N(t) dt - \frac{f(x^-)}{2} \right| = \left| \int_0^\pi R(t) \sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) dt \right|,$$

där  $R$  är Riemannintegrerbar. Enligt Riemann-Lebesgues lemma går detta mot 0, och beviset är klart.

### 3 Funktioner, vektorrum och dylikt

#### 3.1 Definitioner

**Inreprodukt** På kontinuerliga funktioner  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definierar vi inreprodukten

$$\langle u|v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi u(t) v^*(t) dt.$$

**Fullständiga mängder** Låt  $\{e_i\}_{i \in I}$  vara en ortonormal mängd vektorer i  $V$ . Då är  $\{e_i\}_{i \in I}$  en fullständig mängd i  $V$  om det för varje  $u \in V$  och  $\varepsilon > 0 \exists N > 0$  så att

$$n > N \implies \left| u - \sum_{i \in I} \langle u|e_i \rangle e_i \right| < \varepsilon.$$

$\ell^2$  Vi definierar  $\ell^2(\mathbb{Z})$  som mängden av alla följder av komplexa tal med inreprodukt

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i^*.$$

$L^2$  Vi definierar  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  som mängden av alla komplexvärda Riemannintegrerbara funktioner på  $[-\pi, \pi]$  med inreprodukten

$$\langle u|v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi u(x) v^*(x) dx.$$

I denna klassen definieras två funktioner som lika om  $\|u - v\| = 0$ .

**Legendrepolynomen** Legendrepolynomen är en följd av polynom så att  $p_0(x) = 1$ ,  $p_i(1) = 1$  och  $p_n$  är ortogonal på  $p_0, \dots, p_{n-1}$  med inreprodukten

$$\langle u|v \rangle = \int_{-1}^1 u(x) v^*(x) dx.$$



**Hermiteiska operatorer** En Hermiteisk operator uppfyller  $\langle Av|w\rangle = \langle v|Aw\rangle$ . Se sammanfattningen från SF1681 för mer information.

**Sturm-Liouville-operatorn** Sturm-Liouville-operatorn är en operator  $L : C^2([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{C})$  definierat som

$$L(f) = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + q(x)f(x) + \lambda w(x)f(x).$$

**Reguljära Sturm-Liouvilleproblem** Ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + q(x)f(x) + \lambda w(x)f(x) &= 0, & Af(a) + B \frac{df}{dx}(a) &= 0, \\ Cf(b) + D \frac{df}{dx}(b) &= 0, \end{aligned}$$

där  $p$ ,  $q$  och  $w$  är kontinuerliga reellvärda funktioner, är ett reguljärt Sturm-Liouvilleproblem på  $[a, b]$  om  $p(a) \neq 0$ ,  $p(b) \neq 0$ ,  $w(x) > 0$ ,  $(A, B) \neq (0, 0)$  och  $(C, D) \neq (0, 0)$ .

### 3.2 Satser

**Projektion och minsta avstånd** Låt  $e_1, \dots, e_N$  vara ortonormala basvektorer i inreprodukttrummet  $V$ , och låt

$$V_N = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i e_i, i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Då ges

$$\inf_{\Phi \in V_N} |u - \Phi|$$

av

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \langle u | e_i \rangle e_i.$$

#### Bevis

**Följdsats** De komplexa tal  $c_{-N}, \dots, c_N$  som minimerar

$$\left\| u - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\|$$

är

$$c_n = \langle u | e^{inx} \rangle.$$

**Bevis** Betrakta

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|.$$

Vi utvecklar inreprodukten och får

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|^2 = \|u\|^2 - \left\langle u \left| \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right. \right\rangle - \left\langle u \left| \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right. \right\rangle^* + \left\| \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|^2.$$

Vid att skriva  $u$  som sin Fourierserie fås

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i - \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^* + \sum_{i=1}^N |\gamma_i|^2.$$

Vid att lägga till och ta bort  $\sum_{i=1}^N |c_i|^2$  fås

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{i=1}^N |c_i|^2 + \sum_{i=1}^N |c_i|^2 - \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i - \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^* + \sum_{i=1}^N |\gamma_i|^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{i=1}^N |c_i|^2 + \sum_{i=1}^N |c_i - \gamma_i|^2. \end{aligned}$$

Vid att välja  $c_i = \gamma_i$  fås det efterfrågade minimumet.

### Mindre följsats

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^N |c_i|^2.$$

**Parsevals sats** Låt  $\{\phi_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$  vara ett ortonormalt system i  $V$  och det för varje  $u$  gälla att

$$\|u\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\langle \phi_i | u \rangle|^2.$$

Då är  $\{\phi_i\}_{i=0}^N$  fullständig. Det omvända gäller även.

**Bevis** Om  $\{e_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$  är ett fullständigt ortonormalt system, kan vi välja  $c_i$  så att för  $N > M$  gäller det att

$$\left\| u - \sum_{i=-N}^N c_i \phi_i \right\| < \varepsilon.$$

Vänstersidan kan med satsen ovan skrivas som

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{i=-N}^N c_i \phi_i \right\|^2 &= \|u\|^2 - \left\| \sum_{i=-N}^N c_i \phi_i \right\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \left\| \sum_{i=-N}^N \langle \phi_i | u \rangle \phi_i \right\|^2. \end{aligned}$$

Vi får

$$\|u\|^2 - \left\| \sum_{i=-N}^N \langle \phi_i | u \rangle \phi_i \right\|^2 < \varepsilon,$$

och eftersom  $\varepsilon$  kan väljas godtyckligt, ger detta

$$\|u\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\langle \phi_i | u \rangle|^2.$$

Om vi vidare antar att

$$\|u\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\langle \phi_i | u \rangle|^2,$$

följer motsatsen från definitionen.

**Inreprodukt och ortonormal bas** Låt  $u$  och  $v$  vara element i  $V$ , vars bas är ett fullständigt ortonormalt system  $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ . Då gäller att

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i=0}^N \langle u|\phi_i \rangle \langle v|\phi_i \rangle^*.$$

**Bevis** Med projektionen på  $V_N$  med bas  $\{\phi_i\}_{i=-\infty}^\infty$  får man

$$\langle \text{proj}_{V_N}(u) | \text{proj}_{V_N}(v) \rangle =$$

**Komplexa exponentialfunktionen och  $L^2$**   $e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  är ett fullständigt system av ortonormala vektorer i  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

**Bevis** Låt  $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Då finns det för alla  $\varepsilon > 0$  en styckvist konstant funktion  $s$  så att

$$\|u(x) - s(x)\| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Vi kan skriva

$$\left\| u - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\| \leq \left\| s - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\| + \|s - u\|,$$

så beviset är klart om vi kan visa att det finns ett  $N$  så att

$$\left\| s - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Vi approximerar  $s$  med en kontinuerlig funktion  $h$  så att  $\|s - h\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Enligt Fejers sats konvergerar  $F_N * h$  mot  $h$  likformigt. Alltså är

$$\|F_N * h - h\| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

för tillräckligt stora  $N$ . Eftersom  $F_N * h$  är ett trigonometriskt polynom, kan vi välja det och skriva

$$\|s - F_N * h\| < \|F_N * h - h\| + \|s - h\| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

och därmed är beviset klart.

**Polynomapproximation av funktioner** Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Då finns det för varje  $\varepsilon > 0$  ett polynom  $p$  så att

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

**Bevis** Gör en Taylorapproximation av Fourierserien till  $f$ . Detta ger

$$|f(x) - p(x)| \leq \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| + \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} - p(x) \right| < \varepsilon.$$

**Legendrepolynomens fullständighet** Legendrepolynomen är ett fullständigt system i  $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ .

**Bevis** Ideén är att det finns ett polynom  $p$  av grad  $n$  så att en funktion  $f$  kan approximeras godtyckligt väl av detta polynomet i norm-mening. Detta ger

$$\|f - p\|^2 = \int_{-1}^1 |f(x) - p(x)|^2 dx \leq 2\varepsilon^2.$$

Det räcker därmed att visa att alla polynom kan skrivas som en linjärkombination av Legendrepolynom. Detta stämmer eftersom man kan hitta  $n + 1$  linjärt oberoende Legendrepolynom.

**Jämna och udda Legendrepolynom**  $p_n$  är jämn om  $n$  är jämn och udda om  $n$  är udda.

**Bevis** Följer från Gram-Schmidt.

**Rodrigues' formel**

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

**Bevis**

**Sturm-Liouvilleoperatorns symmetri** Operatören

$$L = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) + \lambda w(x)$$

med inreprodukten

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g^*(x) w(x) dx$$

på  $C^2([a, b])$  har en icke-trivial kärna om det finns  $(A, B) \neq (0, 0)$  och  $(C, D) \neq (0, 0)$  så att

$$Af(a) + B \frac{df}{dx}(a) = 0,$$

$$Cf(b) + D \frac{df}{dx}(b) = 0,$$

$$Ag^*(a) + B \frac{dg^*}{dx}(a) = 0,$$

$$Cg^*(b) + D \frac{dg^*}{dx}(b) = 0.$$

**Bevis** Vi betraktar i stället operatören

$$A = \frac{1}{w(x)} \left( \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right).$$

Om denna är symmetrisk, har vi visat satsen. Vi får

$$\begin{aligned} \langle Af | g \rangle &= \int_a^b \frac{1}{w(x)} \left( \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + q(x)f(x) \right) g^*(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) g^*(x) dx + \int_a^b q(x)f(x)g^*(x) dx \\ &= \left[ p(x) \frac{df}{dx}(x) g^*(x) \right]_a^b - \int_a^b p(x) \frac{df}{dx}(x) \frac{dg^*}{dx}(x) dx + \int_a^b q(x)f(x)g^*(x) dx. \end{aligned}$$

Vi jämför detta med

$$\begin{aligned} \langle f | Ag \rangle &= \int_a^b f(x) \left( \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dg^*}{dx}(x) \right) + q(x)g^*(x) \right)^* w(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dg^*}{dx}(x) \right) dx + \int_a^b q(x)f(x)g^*(x) dx \\ &= \left[ p(x)f(x) \frac{dg^*}{dx}(x) \right]_a^b - \int_a^b p(x) \frac{df}{dx}(x) \frac{dg^*}{dx}(x) dx + \int_a^b q(x)f(x)g^*(x) dx, \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att  $p$ ,  $q$  och  $w$  är reellvärda. Detta ger

$$\langle Af|g\rangle - \langle f|Ag\rangle = \left[ p(x) \frac{df}{dx}(x) g^*(x) \right]_a^b - \left[ p(x) f(x) \frac{dg^*}{dx}(x) \right]_a^b.$$

Detta ger att  $A$  är symmetrisk om det finns  $(A, B) \neq (0, 0)$  och  $(C, D) \neq (0, 0)$  så att

$$\begin{aligned} Af(a) + B \frac{df}{dx}(a) &= 0, \\ Cf(b) + D \frac{df}{dx}(b) &= 0, \\ Ag^*(a) + B \frac{dg^*}{dx}(a) &= 0, \\ Cg^*(b) + D \frac{dg^*}{dx}(b) &= 0. \end{aligned}$$

Inreprodukten över kan även skrivas som

$$\begin{aligned} \langle Af|g\rangle - \langle f|Ag\rangle &= p(b) \frac{df}{dx}(b) g^*(b) - p(a) \frac{df}{dx}(a) g^*(a) - p(b) f(b) \frac{dg^*}{dx}(b) + p(a) f(a) \frac{dg^*}{dx}(a) \\ &= p(b) \left[ \begin{matrix} f(b) \\ \frac{df}{dx}(b) \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} -\frac{dg^*}{dx}(b) \\ g^*(b) \end{matrix} \right] - p(a) \left[ \begin{matrix} f(a) \\ \frac{df}{dx}(a) \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} -\frac{dg^*}{dx}(a) \\ g^*(a) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

- Låt  $D_L$  vara alla  $C^2$ -funktioner på  $[a, b]$  så att

$$\begin{aligned} Af(a) + B \frac{df}{dx}(a) &= 0, \\ Cf(b) + D \frac{df}{dx}(b) &= 0. \end{aligned}$$

Då är Sturm-Liouville-operatorn symmetrisk om  $(A, B) \neq (0, 0)$  och  $(C, D) \neq (0, 0)$ .

**Sturm-Liouvilles sats** Sturm-Liouville-operatorn har oändligt många reella egenvärden.

Om  $\phi_n$  är en egenfunktion som motsvarar  $\lambda_n$  är  $\phi_n$  unik och  $\{\phi_n\}$  är en fullständig ortogonal mängd i  $L^2([a, b], \mathbb{C})$ .

**Bevis** Vi visar inte fullständighet.

För att visa att egenvärdena är reella, låter vi  $L\phi_n = \lambda_n \phi_n$ . Detta ger

$$\lambda_n \langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle L\phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | L\phi_n \rangle = \langle \phi_n | \lambda_n \phi_n \rangle = \lambda_n^* \langle \phi_n | \phi_n \rangle,$$

och beviset är klart.

För att visa ortogonaliteten, låt  $\lambda_n \neq \lambda_m$ . Detta ger

$$\lambda_n \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \langle L\phi_n | \phi_m \rangle = \langle \phi_n | L\phi_m \rangle = \langle \phi_n | \lambda_m \phi_m \rangle = \lambda_m^* \langle \phi_n | \phi_m \rangle.$$

Om egenvektorer inte är ortogonala, måste egenvärdena vara lika. Eftersom detta strider mot antagandet, måste egenvektorer vara ortogonala.

**Följsats** Reguljära Sturm-Liouvilleproblem har en lösning. Om

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + q(x) f(x),$$

ges lösningen av

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_i | g \rangle}{\langle \phi_i | \phi_i \rangle} \frac{1}{\lambda_i} \phi_i.$$

**Bevis** Följer vid att låta

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

verka på  $f$ .