

# Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

23 februari 2018

## **Sammanfattning**

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Vektoralgebra</b>	<b>1</b>
1.1	Satser . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Mängdlära</b>	<b>1</b>
2.1	Definitioner . . . . .	1
2.2	Satser . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Funktioner</b>	<b>3</b>
3.1	Definitioner . . . . .	3
3.2	Satser . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Derivata</b>	<b>5</b>
4.1	Definitioner . . . . .	5
4.2	Satser . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Kurvor</b>	<b>13</b>
5.1	Definitioner . . . . .	13
5.2	Satser . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Kvadratiska ytor</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Optimering</b>	<b>16</b>
7.1	Optimering på mängder . . . . .	16
7.2	Optimering med bivillkor . . . . .	17
7.3	Optimering med flera bivillkor . . . . .	17
7.4	Minsta kvadratmetoden . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Integraler</b>	<b>19</b>
8.1	Definitioner . . . . .	19
8.2	Satser . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Ytor</b>	<b>25</b>
9.1	Definitioner . . . . .	25
9.2	Satser . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Samband mellan integraler</b>	<b>25</b>

# 1 Vektoralgebra

## 1.1 Satser

**Cauchy-Schwarz' olikhet** Låt  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

**Bevis**

**Triangelolikheten** Låt  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

**Bevis**

**Omvända triangelolikheten** Låt  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

**Bevis**

**Vektorer och förhållande mellan komponenter** Låt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  med komponenter  $x_1, \dots, x_n$ . Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Bevis**

# 2 Mängdlära

## 2.1 Definitioner

**Öppna klot** Ett öppet klot i  $\mathbb{R}^n$  centrerad i  $\mathbf{a}$  med radius  $r$  är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

**Omgivningar till punkter**  $U \subset \mathbb{R}^n$  är en omgivning till  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  om  $U$  innehåller något öppet klot med centrum  $\mathbf{a}$ .

**Inre punkter** Låt  $M \subset \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{a}$  är en inre punkt till  $M$  om det finns ett öppet klot kring  $\mathbf{a}$  i  $M$ .

**Yttre punkter** Låt  $M \subset \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{a}$  är en yttre punkt till  $M$  om det finns ett öppet klot kring  $\mathbf{a}$  i  $M$ 's komplement, definierad som  $\mathbb{R}^n \setminus M$ .

**Randpunkter** Låt  $M \subset \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{a}$  är en randpunkt till  $M$  om varje öppet klot kring  $\mathbf{a}$  innehåller punkter i  $M$  och  $M$ 's komplement.

**Rand** Mängden av alla randpunkter till en mängd  $M$  är randen till  $M$ . Denna betecknas  $\partial M$ .

**Öppna och slutna mängder** En mängd är öppen om  $\partial M$  är i  $M$ 's komplement och sluten om  $\partial M$  är i  $M$ .

**Begränsade mängder** En mängd  $M$  är begränsad om  $\exists c > 0$  så att  $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$ .

**Kompakta mängder** En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

**Bågvis sammanhängande mängder**  $D$  är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$  finns en kurva  $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$  så att  $\mathbf{x}(t) \in D$  för alla  $t$  och  $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$  och  $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$ .

**Axelparallella rektangler** En axelparallell rektangel i  $\mathbb{R}^2$  är på formen

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

**Nollmängder** En mängd  $N \subset \mathbb{R}^2$  är en nollmängd om vi för alla  $\varepsilon > 0$  kan täcka över  $N$  med ändligt många axelparallella rektanglar med area mindre än eller lika med  $\varepsilon$ .

**Kvadrerbara mängder** En mängd  $D \subset \mathbb{R}^2$  är kvadrerbar om  $\partial D$  är en nollmängd.

## 2.2 Satser

**Grafer som mängder** Grafen av en kontinuerlig funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  är en nollmängd.

### Bevis

### 3 Funktioner

#### 3.1 Definitioner

**Grafen av en funktion** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Grafen av  $f$  är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

**Lokala gränsvärden** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  och  $\mathbf{a}$  vara en inre punkt eller randpunkt till  $D$ .  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

**Gränsvärden mot oändligheten** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\omega > 0$  så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

**Kontinuitet** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är kontinuerlig i  $\mathbf{a} \in D$  om  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$  existerar och  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ .

**Likformig kontinuitet** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är likformigt kontinuerlig på  $D$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

**Lokala extrempunkter** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  har ett lokalt maximum i  $\mathbf{a}$  om  $\exists \delta > 0$  så att  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  för alla  $\mathbf{x} \in D$  så att  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ . Lokala minima definieras analogt. Om  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$  har  $f$  ett strängt lokalt maximum i  $\mathbf{a}$ .

**Kvadratiska former** Låt  $A, B, C$  vara konstanter. En kvadratisk form från  $\mathbb{R}^2$  är på formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

För en mer allmän definition, se definitionen från sammanfattningen av SF1672.

**Positivt och negativt definita kvadratiske former** En kvadratisk form är

- positivt definit om  $Q(h, k) > 0$  för  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- positivt semidefinit om  $Q(h, k) \geq 0$  för  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- negativt definit om  $Q(h, k) < 0$  för  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- negativt semidefinit om  $Q(h, k) \leq 0$  för  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- indefinit om  $Q$  antar såväl positiva som negativa värden.

**Trappfunktioner** En funktion  $\Phi$  definierad på en axelparallell rektangel  $\Delta$  är en trappfunktion om det finns en indelning av  $\Delta$  i mindre rektanglar

$$\Delta_{i,j} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

så att  $\Phi$  är konstant på varje  $\Delta_i$ .

**Avskärningar** Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . En begränsad kvadrerbar delmängd  $D$  av  $\Omega$  är en avskärning om  $f$  är begränsad på  $D$ .

### 3.2 Satser

**Gränsvärden av funktioner och deras komponenter** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  är ekvivalent med att  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ , där subskriptet  $i$  indikerar den  $i$ -te komponenten av varje vektor.

**Bevis** Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - b_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^p |f_i(\mathbf{x}) - b_i|.$$

**Största och minsta värde för funktioner** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  och låt  $D$  vara kompakt. Då antar  $f$  ett största och ett minsta värde på  $D$ .

**Bevis**

**Definitionsmängd och likformig kontinuitet** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  och låt  $D$  vara kompakt. Då är  $f$  likformigt kontinuerlig på  $D$ .

**Bevis**

**Satsen om mellanliggande värden** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  och låt  $D$  vara bågvis sammanhängande. Om  $f$  antar värdena  $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$  i  $D$ , antar  $f$  också alla värden mellan  $f(\mathbf{a})$  och  $f(\mathbf{b})$ .

**Bevis**

**Inversa funktionssatsen** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  vara öppen,  $f$  vara  $C^1$  och  $|\mathrm{d}f(\mathbf{a})| \neq 0$ . Då finns det öppna omgivningar  $U, V$  till  $\mathbf{a}$ ,  $f(\mathbf{a})$  så att  $f : U \rightarrow V$  är bijektiv och  $f^{-1} : V \rightarrow U$  är  $C^1$ .

**Bevis**

**Implicita funktionssatsen** Låt  $F(\mathbf{x})$  vara  $C^1$  och  $\mathbf{a}$  vara på nivåkurvan  $F(\mathbf{x}) = C$ . Om  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$  finns det en öppen omgivning  $U$  av  $\mathbf{a}$  så att restriktion av nivåkurvan till  $U$  implicit definierar en  $C^1$ -funktion.

**Bevis**

**Derivatan av en implicit funktion** Låt  $F(\mathbf{x})$  vara  $C^1$ ,  $\mathbf{a}$  vara på nivåkurvan  $F(\mathbf{x}) = C$  och  $F(\mathbf{x}) = C$  definiera en implicit funktion nära  $\mathbf{a}$ . Om  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$  har man

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})}.$$

**Bevis** Eftersom  $F$  är konstant nära  $\mathbf{a}$  använder vi kedjeregeln, vilket ger

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = 0.$$

Om  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$  får man resultatet i satsen.

## 4 Derivata

### 4.1 Definitioner

**Partiella derivator** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är partiellt deriverbar med avseende på  $x_i$  i den inre punkten  $\mathbf{a} \in D$  om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $x_i$  i  $\mathbf{a}$  och betecknas  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ .

**Differentierbarhet** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är differentierbar i  $\mathbf{a}$  om  $\exists A_1, \dots, A_n$  och en  $\rho(\mathbf{h})$  så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n A_i h_i + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h})$$

och  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$ .  $f$  är differentierbar om detta är uppfyllt för alla  $\mathbf{a} \in D$ .

$C^1$  Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är klass  $C^1$  om  $f$  är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i  $D$ .

$C^k$  Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är klass  $C^k$  om  $f$  alla partiella derivator till och med ordning  $k$  existerar och är kontinuerliga i  $D$ .

**Gradient** Låt  $f$  vara reellvärd och differentierbar i  $\mathbf{x}$ . Gradienten definieras som

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i.$$

**Riktungsderivata** Låt  $|\mathbf{v}| = 1$ . Derivatan av  $f$  i punkten  $\mathbf{a}$  i riktningen  $\mathbf{v}$  är

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{u}} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

**Stationära punkter**  $\mathbf{a}$  är en stationär punkt till  $f$  om  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

**Differentialer** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  öppen och låt  $f$  vara differentierbar. Funktionen  $\mathbf{h} \rightarrow \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) h_i$  kallas differentialen av  $f$  i  $\mathbf{x}$  och betecknas  $df(\mathbf{x})$ . Vid att skriva differentialen som en matris

$$df(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right]$$

kan differentialet skrivas som en matrismultiplikation enligt

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{h}.$$



**Funktionalmatriser** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$ :s funktionalmatris definieras som

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_p}{dx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{df_p}{dx_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betecknas  $f'(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) = \frac{d(f_1 \dots f_p)}{d(x_1 \dots x_n)}(\mathbf{x})$ .

**Linjarisering** Linjariseringen av en funktion  $f$  ges av

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

## 4.2 Satser

**Differentierbarhet och kontinuitet** Låt  $f$  vara differentierbar i  $\mathbf{a}$ . Då är  $f$  kontinuerlig i  $\mathbf{a}$ .

**Bevis** Definitionen implicerar  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$ .

**Differentierbarhet och partiell deriverbarhet** Låt  $f$  vara differentierbar i  $\mathbf{a}$ . Då är  $f$  partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i  $\mathbf{a}$  och  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$ .

**Bevis** Med  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$  ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när  $t$  går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och  $A_i$  på andra sidan.

**Differentierbarhet av funktioner i  $C^1$**  Varje  $f \in C^1$  är differentierbar.

**Bevis** Låt  $\mathbf{a} \in D$ . Enligt envariabelanalysens medelvärdesats har vi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a} + \theta_1 h_1\mathbf{e}_1) \\ f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1 + \theta_2 h_2\mathbf{e}_2) \\ &\vdots \\ f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n h_i\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i + \theta_n h_n\mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

där alla  $\theta_i \in [0, 1]$ . Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \mathbf{e}_i + \theta_k h_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),$$

där  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$ . Då får man

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h}) \right) h_i.$$

Den sista delen av beviset använder

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{h}) h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

**Allmänna kedjeregeln** Låt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  och  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  och låt alla komponenter av  $f, g$  vara differentierbara. Då är alla komponenter av  $f \circ g$  differentierbara. Med  $u = f \circ g$  har vi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{t})$$

för varje komponent.

**Specialfall:**  $p = 1$  Låt  $f$  vara en differentierbar funktion av  $n$  variabler och  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , där alla  $g_i$  är partiellt deriverbara. Då är  $f \circ g$  deriverbar och

$$\frac{df \circ g}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \frac{dg_i}{dt}(t).$$

## Bevis

**Konstantfunktioner och gradient** Låt  $D \subset \mathbb{R}^n$  vara öppen och bågvis sammanhängande och  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Om  $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}) = 0$  för alla  $\mathbf{x} \in D$ , är  $f$  konstant i  $D$ .

**Bevis** Använd att

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}(t)) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = 0.$$

**Gradient och riktningsderivata** Gradienten i riktning  $\mathbf{v}$  ges av

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

**Bevis** Bilda  $u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = u(\mathbf{g}(t))$ , vilket ger  $\vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{du}{dt}(0)$ . Enligt kedjeregeln blir detta

$$\sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(0) \frac{dg_i}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{d(\mathbf{a} + t\mathbf{v})}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

**Maximal riktningsderivata**  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a})$  pekar i den riktning i vilken  $f$  växer snabbast i  $\mathbf{a}$ , och den maximala tillväxthastigheten är  $|\vec{\nabla} f(\mathbf{a})|$ .

**Bevis** Cauchy-Schwarz-olikheten ger

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{u}} f = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq |\vec{\nabla} f(\mathbf{a})| |\mathbf{v}|,$$

med likhet om och endast om  $\mathbf{v}$  är parallell med gradienten.

**Gradient och nivåötor** Låt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  och  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ . Då är gradienten normal på nivåötan  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ .

**Bevis** Låt  $\mathbf{x}(t)$  vara en  $C^1$ -kurva i nivåötan  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$  så att  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ . Detta ger

$$0 = \frac{df \circ \mathbf{x}}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0).$$

Eftersom  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)$  är parallell med nivåötan är beviset klart.

**Symmetri av derivator i  $C^2$**  För varje  $f \in C^2$  gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

**Bevis** Vi beviser endast för en tvåvariabelfunktion, då det allmänna fallet följer direkt från detta. Låt  $q(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$ ,  $\phi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$ . Detta ger

$$\begin{aligned} q(h, k) &= \phi(y + k) - \phi(y) \\ &= k \frac{d\phi}{dt}(y + \theta k) \\ &= k \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta k) \right) \\ &= kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \eta h, y + \theta k), \end{aligned}$$

där vi har använt medelvärdesatsen två gånger. Då har vi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{q(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Beviset kan upprepas i motsatt ordning, och detta fullförar beviset.

**Taylor's formel** Låt  $D \subset \mathbb{R}^2$  vara öppen,  $(a,b) \in D$  och  $f$  vara  $C^3$ . Då gäller:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 \right) \\ & + \left( \sqrt{h^2 + k^2} \right)^3 B(h,k), \end{aligned}$$

där  $B(h,k)$  är begränsad i en omgivning av origo.

**Bevis** Låt  $F(t) = f(a+th, b+tk)$ . Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk), \\ \frac{d^2 F}{dt^2}(t) &= h \left( h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right) + k \left( h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk) + h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right), \\ \frac{d^3 F}{dt^3}(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3. \end{aligned}$$

$F$ 's Taylorpolynom kring 0 är

$$F(t) = F(0) + \frac{dF}{dt}(0)t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 F}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(0)t^3.$$

Vi evaluerar i 1:

$$\begin{aligned} F(1) = & F(0) + \frac{dF}{dt}(0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 F}{dt^2}(0) + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(\theta) \\ f(a+h, b+k) = & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 \right) \\ & + \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dt^3}(\theta). \end{aligned}$$

Vi analyserar sen den sista termen:

$$\frac{\frac{d^3 F}{dt^3}(t)}{\left( \sqrt{h^2 + k^2} \right)^3} = \frac{1}{\left( \sqrt{h^2 + k^2} \right)^3} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3 \right).$$

Vi ser att detta är konvergent eftersom vi t.ex. kan betrakta

$$\left| \frac{3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b) h^2 k}{(\sqrt{h^2 + k^2})^3} \right| \leq C \frac{|h|^2}{h^2 + k^2} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq C.$$

Derivatan är kontinuerlig, vilket enligt sats garanterar att den är begränsad. Därmed är den sista termen på rätt form, och beviset är klart.

**Lokala extrempunkter och partiella derivator** Om  $f$  har ett lokalt extremvärde i  $\mathbf{a} \in D$  och  $f$  är partiellt deriverbar i  $\mathbf{a}$  är  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, i = 1, \dots, n$ .

**Bevis** Följer av motsvarande sats i en variabel applicerad på  $x_i \rightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$ .

**Kvadratiske former och extrempunkt** Låt  $(a, b)$  vara en inre punkt till  $D$  och en stationär punkt till  $f$ . Om  $f$ 's Taylorpolynom kring  $(a, b)$  ges av  $f(a + h, b + k) = c + Q(h, k)$ . Då gäller att:

- Om  $Q$  är positivt definit har  $f$  ett strängt lokalt minimum i  $(a, b)$ .
- Om  $Q$  är negativt definit har  $f$  ett strängt lokalt maximum i  $(a, b)$ .
- Om  $Q$  är indefinit har  $f$  en sadelpunkt (varken ett maximum eller ett minimum) i  $(a, b)$ .

**Små ändringar och funktionalmatriser** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  med  $D \subset \mathbb{R}^n$  vara  $C^1$ . Då kan vi för små  $|\mathbf{h}|$  skriva

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

där  $\rho$  tar värden i  $\mathbb{R}^p$  och  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$ .

**Bevis** Betrakta varje komponent.

**Kedjeregeln och funktionalmatriser**

$$d(f \circ g)(\mathbf{t}) = df(g(\mathbf{t})) dg(\mathbf{t})$$

**Bevis** Inses lätt.

**Derivation under integraltecken** Antag att  $f, \frac{\partial f}{\partial s}$  är kontinuerliga i  $\alpha < s < \beta, a \leq x \leq b$ . Då är funktionen  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \int_a^b f(s, x) dx$  deriverbar i  $\alpha < s < \beta$  och

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_a^b \frac{df}{ds}(s, x) dx.$$

### Bevis

**Utvidgad derivation under integraltecken** Antag att  $f, \frac{\partial f}{\partial s}$  är kontinuerliga i  $\alpha < s < \beta, A \leq x \leq B$ . Låt  $b$  vara en  $C^1$ -funktion av  $\alpha < s < \beta$  med  $A < b(s) < B$ . Då är  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \int_a^{b(s)} f(s, x) dx$  deriverbar och

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_a^{b(s)} \frac{df}{ds}(s, x) dx + f(s, b(s)) \frac{db}{ds}(s).$$

**Derivation under integraltecken för generaliserade integraler** Antag att

- $f, \frac{\partial f}{\partial s}$  är kontinuerliga i  $\alpha < s < \beta, x \geq a$ .
- $F(s) = \int_a^\infty f(s, x) dx$  är konvergent för  $\alpha < s < \beta$ .
- Till varje kompakta delintervall  $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$  finns en majorerande funktion  $g$  så att
  - $\left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, x) \right| < g(x) \quad \forall s \in [\alpha_1, \beta_1], x \geq a$ .
  - $\int_a^\infty g(x) dx$  är konvergent.

Då är  $F$  deriverbar och

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_a^\infty \frac{df}{ds}(s, x) dx.$$

### Bevis

## 5 Kurvor

### 5.1 Definitioner

**Kurvor i  $\mathbb{R}^p$**  En kurva i  $\mathbb{R}^p$  är en funktion  $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ .

**$C^1$ -kurvor** En kurva är klass  $C^1$  om alla dess komponenter är  $C^1$ .

**Enkla kurvor** En kurva är enkel om den inte skär sig själv.

**Slutna kurvor** En kurva är sluten om dens start- och slutpunkter sammanfaller.

**Tangentvektor** Låt  $\mathbf{x}(t)$  vara en  $C^1$ -kurva definierad på  $[\alpha, \beta]$ ,  $\phi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  vara strängt växande och  $\phi, \phi^{-1}$  vara  $C^1$ . Då definieras tangentvektorn till kurvan av

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

**Längd** Längden av en kurva ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right| dt.$$

**Integral av skalärfunktioner längs med kurvor** Integralen av en funktion  $f$  längs med kurvan med parametrisering  $\mathbf{r}(t)$  ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

**Kurvintegraler** Låt  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}))$  vara kontinuerlig på en öppen mängd  $D \subset \mathbb{R}^2$  och låt  $\gamma$  vara en  $C^1$ -kurva med parametrisering  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  för  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Kurvintegralen av  $\mathbf{F}$  längs  $\gamma$  ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(\mathbf{r}(t)) \frac{dr_x}{dt}(t) + Q(\mathbf{r}(t)) \frac{dr_y}{dt}(t) dt$$

och betecknas

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

eller, om du är en omoralsk människa,

$$\int_{\gamma} P(\mathbf{r}) dx + Q(\mathbf{r}) dy.$$

**Cirkulation** Låt  $\gamma$  vara enkel och sluten. Då definieras  $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  som cirkulationen av  $\mathbf{F}$  längs  $\gamma$ .

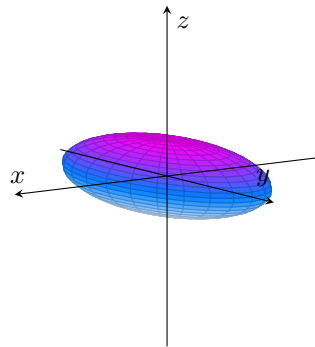
## 5.2 Satser

## 6 Kvadratiska ytor

Detta är de flesta kvadratiska ytorna man kan träffa på i  $\mathbb{R}^3$ , komplett med snygga illustrationer.

**Ellipsoider** En ellipsoid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 1: Illustration av en ellipsoid.

**Koner** En kon beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

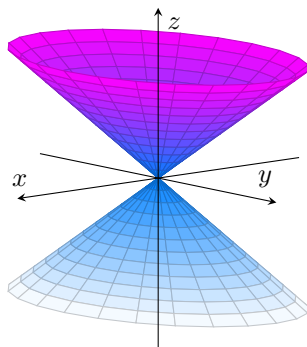
**Cylindrar** En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

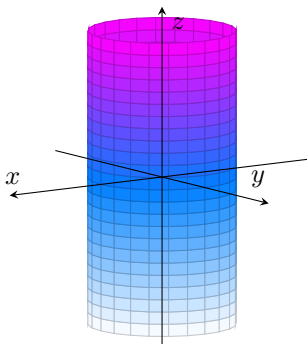
**Elliptiska paraboloider** En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

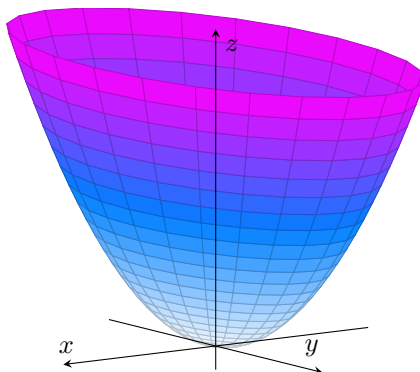




Figur 2: Illustration av en kon.



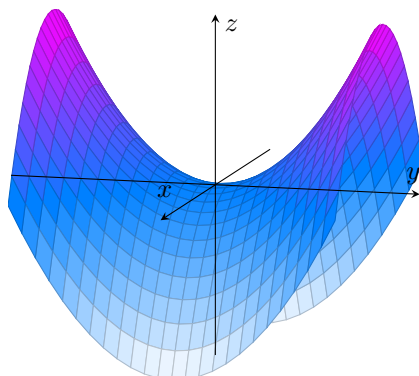
Figur 3: Illustration av en cylinder.



Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.

**Hyperbolska paraboloider** En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

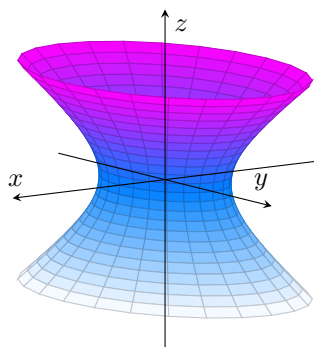
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.

**Enmantlade hyperboloider** En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.

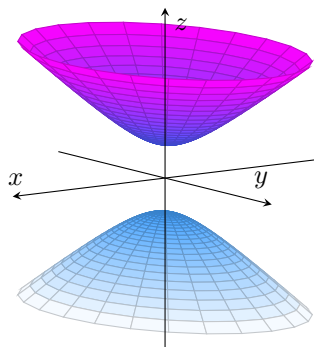
**Tvåmantlade hyperboloider** En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

## 7 Optimering

### 7.1 Optimering på mängder

Låt  $K \subset \mathbb{R}^n$  vara en kompakt mängd och  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig. Då antar  $f$  ett största värde  $M$  på  $K$ , förmodligen enligt sats. Om vi även



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.

antar att  $f$  är  $C^1$  på  $K$  och att  $f(\mathbf{a}) = M$ , är  $\mathbf{a}$  antingen

- en inre punkt av  $K$  så att  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) = 0$ , enligt sats.
- en punkt på  $\partial K$ .

För att optimera på icke-kompakta mängder, kan man hitta en punkt  $\mathbf{a}$  i den icke-kompakta mängden  $U$  så att  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) = 0$ . Därefter väljer man en smart kompakt delmängd  $K$  till  $U$  kring denna punkten så att man kan visa att  $f$  antar ett extremvärde på  $K$  i  $\mathbf{a}$ . Om man har valt  $K$  smart, kan man då även använda detta för att visa att  $f$  antar ett globalt extremvärde för  $U$  i  $\mathbf{a}$ .

## 7.2 Optimering med bivillkor

Låt  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  med  $D_f, D_g \subset \mathbb{R}^2$ , och anta att  $f$  optimeras under bivillkoret  $g(x, y) = 0$  i någon inre punkt  $(a, b) \in D_f \cap D_g$ . Då är  $\vec{\nabla} f(a, b), \vec{\nabla} g(a, b)$  parallella.

För att bevisa detta antar vi  $\vec{\nabla} f(a, b) \neq \mathbf{0}$ . Implicita funktionssatsen säger då att det finns en parametrisering  $(x(t), y(t))$  av nivåkurvan  $g(x, y) = 0$  nära  $(a, b)$ , som vi väljer så att den startar i  $(a, b)$ . Funktionen  $\phi(t) = f(x(t), y(t))$  har ett lokalt extremvärde i  $t = 0$ , och vi har

$$0 = \frac{d\phi}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(a, b) \cdot \left( \frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0) \right).$$

Eftersom gradienten är vinkelrät på nivåytan, är den parallell med  $\vec{\nabla} g(a, b)$  enligt sats.

## 7.3 Optimering med flera bivillkor

Låt  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : D_{g_i} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  med  $D_f, D_{g_1}, \dots, D_{g_p} \subset \mathbb{R}^n$ , och anta att  $f$  optimeras under bivillkoret  $g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_p(\mathbf{x}) = 0$  i någon inre punkt  $\mathbf{a} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_p}$ . Då är  $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}), \vec{\nabla} g_1(\mathbf{a}), \dots, \vec{\nabla} g_p(\mathbf{a})$  linjärt beroende.

## 7.4 Minsta kvadratmetoden

Låt  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$  vara en mängd punkter där minst två  $a_i$  är olika. Vi vill välja en linje  $y = kx + l$  så att

$$Q(k, l) = \sum_{i=1}^n (b_i - (ka_i + l))^2$$

minimeras.

Vi vill visa att  $Q$  har ett entydigt minimum och att detta minimum löser normalekvationerna

$$\begin{aligned} k \sum_{i=1}^n a_i^2 + l \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i, \\ k \sum_{i=1}^n a_i + nl &= \sum_{i=1}^n b_i. \end{aligned}$$

Vi beviser detta vid att definiera  $M = Q(K_0, l_0)$  och bilda strimlan  $S_1$  som begränsas av linjerna

$$ka_1 + l = b_1 \pm \sqrt{M}$$

och strimlan  $S_2$  som begränsas av linjerna

$$ka_2 + l = b_2 \pm \sqrt{M}.$$

Vi har då att  $(ka_1 + l - b_1)^2 \geq M$  för  $(k, l) \notin S_1$  och  $(ka_2 + l - b_2)^2 \geq M$  för  $(k, l) \notin S_2$ . Då minst två  $a_i$  är olika kan vi anta att  $S_1, S_2$  inte är parallella. Då är  $K = S_1 \cap S_2$  kompakt och  $Q(k, l) > M, (k, l) \notin K$ . Det minsta värdet av  $Q$  på  $K$  är även det minsta värdet på  $\mathbb{R}^2$ .

För ett minimum på  $K$  har vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial k}(k, l) &= \sum_{i=1}^n 2(b_i - ka_i - l)(-a_i) = 2l \sum_{i=1}^n a_i + 2k \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial l}(k, l) &= 2k \sum_{i=1}^n a_i + 2nl - 2 \sum_{i=1}^n b_i = 0, \end{aligned}$$

vilket ger normalekvationerna. Dessa har en lösning ty om man skriver systemet på matrisform, ges determinanten av vänsterledets matris av

$$\begin{aligned} & n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ &= |(a_1, \dots, a_n)|^2 |(1, \dots, 1)|^2 - |(a_1, \dots, a_n) \cdot (1, \dots, 1)|^2. \end{aligned}$$

Enligt Cauchy-Schwarz' olikhet är detta alltid nollskild ty minst två  $a_i$  är olika, och de involverade vektorerna aldrig är parallella.

## 8 Integraler

### 8.1 Definitioner

**Dubbelintegraler av trappfunktioner** Dubbelintegralen av en trappfunktion  $\Phi$  över  $\Delta$  definieras som

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \sum c_{i,j} A_{i,j},$$

där  $c_{i,j}$  är värdet  $\Phi$  antar på  $\Delta_{i,j}$  och  $A_{i,j}$  är arean av  $\Delta_{i,j}$ .

**Riemann-integrerbarhet** En begränsad funktion  $f$  är integrerbar över en rektangulär region  $\Delta$  om det till varje  $\varepsilon > 0$  finns trappfunktioner  $\Phi, \Psi$  så att  $\Phi \leq f \leq \Psi$  och  $\iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy - \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy < \varepsilon$ .

**Dubbelintegraler** Låt  $f$  vara integrerbar över rektanglet  $\Delta$ . Då finns det ett  $\lambda$  så att  $\iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy \leq \lambda \leq \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy$  för alla trappfunktioner  $\Phi, \Psi$  så att  $\Phi \leq f \leq \Psi$ . Detta  $\lambda$  definieras som dubbelintegralen av  $f$  över  $\Delta$  och betecknas  $\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy$ .

**Integration över godtyckliga områden** Låt  $D \in \mathbb{R}^2$  vara en begränsad mängd,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  vara en begränsad funktion och

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$f$  är integrerbar över  $D$  om  $f_D$  är integrerbar över någon rektangel  $\Delta$  som innehåller  $D$ . Givet detta sätter vi

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f_D(x, y) \, dx \, dy.$$

**Riemannsummor** En Riemannsumma är på formen

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) A_{i,j}$$

där  $A_{i,j}$  betecknar arean till den lilla fyrkanten som  $(\xi_i, \eta_j)$  ligger i. Summan är ment att approximera

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy.$$

**Generaliserade integraler** Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  med  $f(x, y) \geq 0$  på  $\Omega$ .  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$  är konvergent om mängden

$$M = \left\{ \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \mid D \text{ är en avskärning av } \Omega \right\}$$

är uppåt begränsad och divergent annars. Om integralen är konvergent definierar vi

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \sup M.$$

**Dubbelintegraler av funktioner med varierande tecken** Givet funktionen  $f$ , bilda

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & f(x, y) \geq 0, \\ 0, & f(x, y) < 0 \end{cases}, f^-(x, y) = \begin{cases} 0, & f(x, y) \geq 0, \\ f(x, y), & f(x, y) < 0 \end{cases}.$$

Detta ger egenskaperna  $|f(x, y)| = f^+(x, y) + f^-(x, y)$ ,  $f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$ .

Integralen  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$  är konvergent om  $\iint_{\Omega} f^+(x, y) \, dx \, dy$  och  $\iint_{\Omega} f^-(x, y) \, dx \, dy$  är konvergenta. Vi sätter då

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f^+(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\Omega} f^-(x, y) \, dx \, dy$$

**Multipelintegraler** För  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierar vi

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

som ett gränsvärde av Riemannsummor.

**Volym i  $\mathbb{R}^n$**  Funktionen

$$\mu(D) = \int_D d\mathbf{x}$$

är volymen av mängden  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

## 8.2 Satser

**Egenskaper för dubbelintegraler av trappfunktioner** För integralet av två trappfunktioner  $\Phi, \Psi$  gäller att

- $\iint_{\Delta} \alpha \Phi \, dx \, dy = \alpha \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy, \alpha \in \mathbb{R}.$
- $\iint_{\Delta} (\Phi + \Psi) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy + \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy.$
- Om  $\Phi \leq \Psi$  på  $\Delta$  är  $\iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy.$
- $\left| \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Phi| \, dx \, dy.$
- Om  $\Delta$  har gränserna  $a, b$  i  $x$ -led och  $c, d$  i  $y$ -led är  $\iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d \Phi \, dy \right) dx.$

### Bevis

**Ordning av dubbelintegraler** Låt  $f$  vara integrerbar över rektanglet  $\Delta$ . Då gäller att

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

### Bevis

**Integration över områden begränsade av kurvor** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$  och låt  $\alpha, \beta$  vara kontinuerliga på  $[a, b]$ . Då är  $f$  integrerbar över  $D$  och

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

### Bevis

**Integration över nollmängder** Varje begränsad funktion  $f$  är integrerbar över en nollmängd  $N$  och

$$\iint_N f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

**Bevis** Låt  $\Delta$  vara en rektangel så att  $N \subset \Delta$ , låt  $\varepsilon > 0$  och låt  $R$  vara unionen av ändligt många axelparallella rektanglar så att

- $N \subset R$ .
- $R$  har area mindre än  $\varepsilon$ .
- $R \subset \Delta$ .

Definiera den utvidgade funktionen

$$f_N(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in N, \\ 0, & (x, y) \notin N. \end{cases}$$

Låt  $m = \min_{\Delta} f_N, M = \max_{\Delta} f_N$  och välj trappfunktioner  $\Phi, \Psi$  så att

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} m, & (x, y) \in R, \\ 0, & (x, y) \in \Delta \setminus R, \end{cases} \quad \Psi(x, y) = \begin{cases} M, & (x, y) \in R, \\ 0, & (x, y) \in \Delta \setminus R. \end{cases}$$

Då är  $\Phi \leq f \leq \Psi$ . Vi har att

$$\iint_{\Delta} (\Psi - \Phi) \, dx \, dy = \iint_R (\Psi - \Phi) \, dx \, dy \leq (M - m)\varepsilon,$$

och därmed är  $f$  integrerbar över  $N$ . Dessutom gäller att

$$\iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} f_N \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy,$$

vilket implicerar att

$$m\varepsilon \leq \iint_N f \, dx \, dy \leq M\varepsilon.$$

Detta implicerar att

$$\iint_N f \, dx \, dy = 0,$$

och beviset är klart.

**Medelvärdesatsen för integraler** Antag att  $f$  är kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar och bågvis sammanhängande mängd  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Låt  $m = \min_D f, M = \max_D f$ . Integration ger

$$mA_D \leq \iint_D f \, dx \, dy \leq MA_D.$$

Alltså finns ett  $C \in [m, M]$  så att

$$\frac{1}{A_D} \iint_D f \, dx \, dy = C.$$



**Bevis** Satsen om mellanliggande värden ger att  $\exists(\xi, \eta) \in D$  så att  $f(\xi, \eta) = C$ . Alltså

$$\frac{1}{A_D} \iint_D f \, dx \, dy = f(\xi, \eta).$$

**Variabelbyte i dubbelintegraler** Låt  $(u, v) \rightarrow (g(u, v), h(u, v))$  vara en bijektiv  $C^1$ -avbildning  $E \rightarrow D$ , där  $E$  och  $D$  är öppna och kvadrerbara delmängder av  $\mathbb{R}^2$ , och antag  $J(u, v) = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| \neq 0$ . Då är

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

**Bevis**

**Integration med nivåkurvor** Antag att

- $D \subset \mathbb{R}^2$  är ett kvadrerbart område.
- $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  är  $C^1$ .
- $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  är  $C^1$ , där  $a = \min_D g(x, y)$ ,  $b = \max_D g(x, y)$ .
- Areafunktionen  $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  given av

$$A(u) = A_{G_u}, G_u = \{(x, y) \in D \mid g(x, y) \leq u\}$$

är  $C^1$ . Då gäller att

$$\begin{aligned} \iint_D h(g(x, y)) \, dx \, dy &= \int_a^b h(u) \frac{dA}{du}(u) \, du, \\ \iint_D g(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b u \frac{dA}{du}(u) \, du \end{aligned}$$

**Konvergens av generaliserade integraler** För generaliserade integraler med positiv integrand gäller att om den inre enkelintegralen är konvergent, är dubbelintegralen konvergent om och endast om den yttre enkelintegralen är konvergent.

**Bevis**

**Ordningsbyte i generaliserade integraler** Låt dubbelintegralen av  $f$  över  $D$  vara så att både den yttre och inre integralen är konvergent. Då kan man byta ordning på integralen.

**Bevis**

**Konvergens av dubbelintegraler av funktioner med varierande tecken**  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$  är konvergent om och endast om  $\iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx \, dy$  är konvergent.

**Bevis**

**Volym av  $n$ -dimensionella enhetsklotet** Låt  $B_n$  vara enhetsklotet i  $\mathbb{R}^n$ . Detta uppfyller

$$\mu(B_n) = \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}).$$

**Bevis**

$$\begin{aligned} \mu(B_n) &= \int_{B_n} d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq 1} \left( \iint_{x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2)} dx_{n-1} \, dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-2} \\ &= \int_{B_{n-2}} \pi(1 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2)) \, dx_1 \cdots dx_{n-2} \\ &= \int_0^1 \pi(1 - r^2) \frac{dV}{dr}(r) \, dr \end{aligned}$$

där  $V(r) = r^{n-2} \mu(B_{n-2})$ . Detta ger

$$\begin{aligned} \mu(B_n) &= \pi(n-2) \mu(B_{n-2}) \int_0^1 (1-r^2) r^{n-3} \, dr \\ &= \pi(n-2) \mu(B_{n-2}) \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}). \end{aligned}$$

$$\int_D f(x, \dots, z) \, dx \, dz$$

## 9 Ytor

### 9.1 Definitioner

**Ytor** En yta är en funktion  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  med  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Tangentplan** Tangentplanet till en kurva spänns upp av vektorerna

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_s(s, t) &= \left( \frac{dr_1}{ds}(s, t), \frac{dr_2}{ds}(s, t), \frac{dr_3}{ds}(s, t) \right), \\ \mathbf{r}_t(s, t) &= \left( \frac{dr_1}{dt}(s, t), \frac{dr_2}{dt}(s, t), \frac{dr_3}{dt}(s, t) \right),\end{aligned}$$

**Area av yta** Låt  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara en parametrisering av en yta  $Y$ . Då ges arean av

$$A_Y = \int_D \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| ds dt.$$

Detta skrivs även

$$A_Y = \iint_Y dS,$$

där  $dS = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| ds dt$ .

### 9.2 Satser

## 10 Samband mellan integraler

**Greens sats** Låt

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  vara öppen.
- $P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  är  $C^1$ .
- $D \subset \Omega$  är kompakt.
- $\partial D$  vara styckvis  $C^1$ .

Då gäller att

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Märk att det första integralet kan skrivas som ett kurvintegral av ett vektorfält.

**Bevis** Beviset visas enbart för en rektangel. Det allmänna beviset involverar att betrakta flera små rektanglar.

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \, dx \\ &= \int_c^d Q(b, y) - Q(a, y) \, dy - \int_a^b P(x, d) - P(x, c) \, dx.\end{aligned}$$

Dela randen till rektangeln upp i  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , där dessa beskrivas av  $x = b, y = d, x = a, y = c$  respektive. Då kan det sista integralet skrivas som

$$\int_{\gamma_1} Q(x, y) \, dy + \int_{\gamma_2} P(x, y) \, dx + \int_{\gamma_3} Q(x, y) \, dy + \int_{\gamma_4} P(x, y) \, dx.$$

Varje integral över randen involverar enbart en variabel och en funktion. Därmed kan vi lägga till integralet över den andra variabeln av den andra funktionen och få

$$\left( \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{\partial D} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

och beviset är klart.