Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

9 februari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter $x_1, \ldots, x_n$. Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerad i $\mathbf{a}$ med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum $\mathbf{a}$.

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M.

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M:s komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en randpunkt till M om varje öppet klot kring $\mathbf{a}$ innehåller punkter i M och M:s komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M. Denna betecknas ∂M.

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M:s komplement och sluten om ∂M är i M.

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

Bågvis sammanhängande mängder D är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ finns en kurva $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$ så att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

Axelparallella rektangler En axelparallell rektangel i $\mathbb{R}^2$ är på formen

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Nollmängder En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ är en nollmängd om vi för alla $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar med area mindre än eller lika med ε.

Kvadrerbara mängder En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ är kvadrerbar om ∂D är en nollmängd.

2.2 Satser

Grafer som mängder Grafen av en kontinuerlig funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ är en nollmängd.

Bevis

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Grafen av en funktion Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen av f är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Lokala gränsvärden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Gränsvärden mot oändligheten Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D$ om $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}$ existerar och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})$.

Likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Lokala extrempunkter Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i $\mathbf{a}$ om $\exists\delta > 0$ så att $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ för alla $\mathbf{x} \in D$ så att $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Lokala minima definieras analogt. Om $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ har f ett strängt lokalt maximum i $\mathbf{a}$.

Kvadratiska former Låt A, B, C vara konstanter. En kvadratisk form från $\mathbb{R}^2$ är på formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

För en mer allmän definition, se definitionen från sammanfattningen av SF1672.

Positivt och negativt definita kvadratiska former En kvadratisk form är

- positivt definit om $Q(h, k) > 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- positivt semidefinit om $Q(h, k) \geq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt definit om $Q(h, k) < 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt semidefinit om $Q(h, k) \leq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- indefinit om Q antar såväl positiva som negativa värden.

Trappfunktioner En funktion Φ definierat på en axelparallell rektangel Δ är en trappfunktion om det finns en indelning av Δ i mindre rektanglar

$$\Delta_{i,j} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

så att Φ är konstant på varje Δ_i.

3.2 Satser

Gränsvärden av funktioner och deras komponenter Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ är ekvivalent med att $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$, där subskriptet i indikerar den i-te komponenten av varje vektor.

Bevis Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - b_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^{p} |f_i(\mathbf{x}) - b_i|.$$

Största och minsta värde för funktioner Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då antar f ett största och ett minsta värde på D.

Bevis

Definitionsmängd och likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då är f likformigt kontinuerlig på D.

Bevis

Satsen om mellanliggande värden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara bågvis sammanhängande. Om f antar värderna $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ i D, antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Bevis

Inversa funktionssatsen Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen, f vara C^1 och $|\mathrm{d}f(\mathbf{a})| \neq 0$. Då finns det öppna omgivningar U, V till $\mathbf{a}, f(\mathbf{a})$ så att $f : U \to V$ är bijektiv och $f^{-1} : V \to U$ är C^1.

Bevis

Implicita funktionssatsen Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1 och $\mathbf{a}$ vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$. Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en öppen omgivning U av $\mathbf{a}$ så att restriktion av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1-funktion.

Bevis

Derivatan av en implicit funktion Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1, $\mathbf{a}$ vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$ och $F(\mathbf{x}) = C$ definiera en implicit funktion nära $\mathbf{a}$. Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ har man

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})}.$$

Bevis Eftersom F är konstant nära $\mathbf{a}$ använder vi kedjeregeln, vilket ger

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = 0.$$

Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ får man resultatet i satsen.

4 Derivata

4.1 Definitioner

Partiella derivator Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är partiellt deriverbar med avseende på x_i i den inre punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av f med avseende på x_i i $\mathbf{a}$ och betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Differentierbarhet Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är differentierbar i $\mathbf{a}$ om $\exists A_1, \ldots, A_n$ och en $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

och $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. f är differentierbar om detta är uppfylld för alla $\mathbf{a} \in D$.

C^1 Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

C^k Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^k om f alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D.

Gradient Låt f vara reellvärd och differentierbar i $\mathbf{x}$. Gradienten definieras som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i.$$

Riktningsderivata Låt $|\mathbf{v}| = 1$. Derivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{v}$ är

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Stationära punkter $\mathbf{a}$ är en stationär punkt till f om $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Differentialer Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen och låt f vara differentierbar. Funktionen $\mathbf{h} \to \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i$ kallas differentialen av f i $\mathbf{x}$ och betecknas $\mathrm{d}f\,(\mathbf{x})$. Vid att skriva differentialen som en matris

$$\mathrm{d}f\,(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right]$$

kan differentialet skrivas som en matrismultiplikation enligt

$$\mathrm{d}f\,(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right] \mathbf{h}.$$

Funktionalmatriser Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f:s funktionalmatris definieras som

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betecknas $f'(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f\,(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}(f_1 \dots f_p)}{\mathrm{d}(x_1 \dots x_n)}(\mathbf{x})$.

Linjarisering Linjariseringen av en funktion f ges av

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f\,(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

4.2 Satser

Differentierbarhet och kontinuitet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Bevis Definitionen implicerar $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Differentierbarhet och partiell deriverbarhet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i $\mathbf{a}$ och $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$.

Bevis Med $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$ ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när t går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och A_i på andra sidan.

Differentierbarhet av funktioner i C^1 Varje $f \in C^1$ är differentierbar.

Bevis Låt $\mathbf{a} \in D$. Enligt envariabelsanalysens medelvärdesats har vi

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a} + \theta_1 h_1 \mathbf{e}_1) \\
&f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a} + h_1\mathbf{e}_1 + \theta_2 h_2 \mathbf{e}_2) \\
&\vdots \\
&f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i + \theta_n h_n \mathbf{e}_n),
\end{aligned}$$

där alla $\theta_i \in [0,1]$. Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \mathbf{e}_i + \theta_k h_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),$$

där $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Då får man

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h}) \right) h_i.$$

Den sista delen av beviset använder

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{h}) h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

Allmänna kedjeregeln Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ och låt alla komponenter av f, g vara differentierbara. Då är alla komponenter av $f \circ g$ differentierbara. Med $u = f \circ g$ har vi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{t})$$

för varje komponent.

Specialfall: $p = 1$ Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, där alla g_i är partiellt deriverbara. Då är $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d} f \circ g}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(t).$$

Bevis

Konstantfunktioner och gradient Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och bågvis sammanhängande och $f \in C^1(D, R^n)$. Om $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in D$, är f konstant i D.

Bevis Använd att

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x}(t)) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = 0.$$

Gradient och riktningsderivata Gradienten i riktning $\mathbf{v}$ ges av

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Bevis Bilda $u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = u(\mathbf{g}(t))$, vilket ger $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)$. Enligt kedjeregeln blir detta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}(0)\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Maximal riktningsderivata $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken f växar snabbast i $\mathbf{a}$, och den maximala tillväxthastigheten är $\left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right|$.

Bevis Cauchy-Schwarz-olikheten ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right| |\mathbf{v}|,$$

med likhet om och endast om $\mathbf{v}$ är parallell med gradienten.

Gradient och nivåytor Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Då är gradienten normal på nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Bevis Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1-kurva i nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$. Detta ger

$$0 = \frac{\mathrm{d}f \circ \mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0).$$

Eftersom $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0)$ är parallell med nivåytan är beviset klart.

Symmetri av derivator i C^2 För varje $f \in C^2$ gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Bevis Vi beviser endast för en tvåvariabelfunktion, då det allmänna fallet följer direkt från detta. Låt $q(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y), \phi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$. Detta ger

$$\begin{aligned}
q(h, k) &= \phi(y + k) - \phi(y) \\
&= k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(y + \theta k) \\
&= k(\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta k)) \\
&= kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \eta h, y + \theta k),
\end{aligned}$$

där vi har användt medelvärdesatsen två gånger. Då har vi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{q(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Beviset kan upprepas i motsatt ordning, och detta fullförar beviset.

Taylors formel Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, $(a,b) \in D$ och f vara C^3. Då gäller:

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) =& f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) \\ &+ \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(h,k), \end{aligned}$$

där $B(h,k)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Bevis Låt $F(t) = f(a+th, b+tk)$. Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk), \\ \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t) &= h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th,b+tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th,b+tk) + h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right), \\ \frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}t^3}(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3. \end{aligned}$$

F:s Taylorpolynom kring 0 är

$$F(t) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0)t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta)t^3.$$

Vi evaluerar i 1:

$$\begin{aligned} F(1) =& F(0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(0) + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta) \\ f(a+h,b+k) =& f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta). \end{aligned}$$

Vi analyserar sen den sista termen:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}t^3}(t)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3\right).$$

Vi ser att detta är konvergent eftersom vi t.ex. kan betrakta

$$\left| \frac{3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3} \right| \leq C\frac{|h|^2}{h^2+k^2}\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq C.$$

Derivatan är kontinuerlig, vilket enligt sats garanterar att den är begränsad. Därmed är den sista termen på rätt form, och beviset är klart.

Lokala extrempunkter och partiella derivator Om f har ett lokalt extremvärde i $\mathbf{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i $\mathbf{a}$ är $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, i = 1, \ldots, n$.

Bevis Följer av motsvarande sats i en variabel applicerad på $x_i \to f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$.

Kvadratiska former och extrempunkt Låt (a,b) vara en inre punkt till D och en stationär punkt till f. Om f:s Taylorpolynom kring (a,b) ges av $f(a+h, b+k) = c + Q(h,k)$. Då gäller att:

- Om Q är positivt definit har f ett strängt lokalt minimum i (a,b).
- Om Q är negativt definit har f ett strängt lokalt maximum i (a,b).
- Om Q är indefinit har f en sadelpunkt (varken ett maximum eller ett minimum) i (a,b).

Små ändringar och funktionalmatriser Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ vara C^1. Då kan vi för små $|\mathbf{h}|$ skriva

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f\,(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

där ρ tar värden i $\mathbb{R}^p$ och $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Bevis Betrakta varje komponent.

Kedjeregeln och funktionalmatriser

$$\mathrm{d}(f \circ g)\,(\mathbf{t}) = \mathrm{d}f\,(g(\mathbf{t}))\,\mathrm{d}g\,(\mathbf{t})$$

Bevis Inses lätt.

Derivation under integraltecken Antag att $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, a \leq x \leq b$. Då är funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \to \int\limits_a^b f(s,x)\,\mathrm{d}x$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$ och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis

Utvidgad derivation under integraltecken Antag att $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, A \leq x \leq B$. Låt b vara en C^1-funktion av $\alpha < s < \beta$ med $A < b(s) < B$. Då är $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \to \int\limits_a^{b(s)} f(s,x)\,\mathrm{d}x$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x + f(s,b(s))\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}(s).$$

Derivation under integraltecken för generaliserade integraler Antag att

- $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, x \geq a$.
- $F(s) = \int\limits_a^\infty f(s,x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent för $\alpha < s < \beta$.
- Till varje kompakta delintervall $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ finns en majorerande funktion g så att
  - $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right| < g(x)\ \forall\ s \in [\alpha_1, \beta_1], x \geq a$.
  - $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Då är F deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^\infty \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis

5 Kurvor

5.1 Definitioner

Kurvor i $\mathbb{R}^p$ En kurva i $\mathbb{R}^p$ är en funktion $t \to \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

C^1-kurvor En kurva är klass C^1 om alla dess komponenter är C^1.

Tangentvektor Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1-kurva definierad på $[\alpha, \beta]$, $\phi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ vara strängt växande och ϕ, ϕ^{-1} vara C^1. Då definieras tangentvektorn till kurvan av

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

Längd Långden av en kurva ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \mathrm{d}t\,.$$

5.2 Satser

6 Ytor

6.1 Definitioner

Ytor En yta är en funktion $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$.

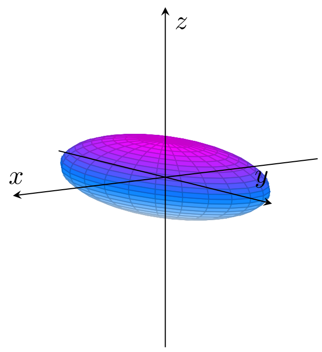
Tangentplan Tangentplanet till en kurva spänns upp av vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s(s,t) &= (\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}s}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}s}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}s}(s,t)), \\ \mathbf{r}_t(s,t) &= (\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}(s,t)), \\ &\quad . \end{aligned}$$

6.2 Satser

7 Kvadratiska ytor

Detta är de flesta kvadratiska ytorna man kan träffa på i $\mathbb{R}^3$, komplett med snygga illustrationer.



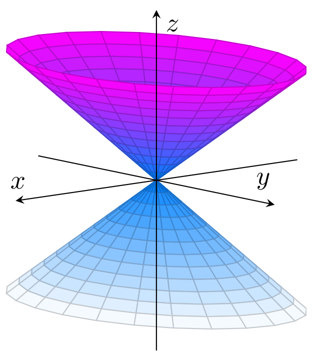
Figur 1: Illustration av en ellipsioid.

Ellipsioider En ellipsioid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Koner En kon beskrivs av en ekvation på formen

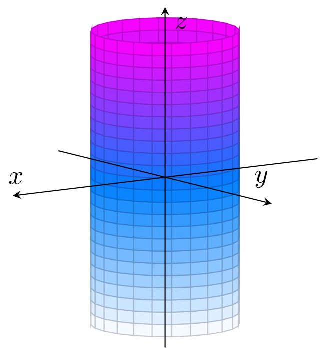
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$



Figur 2: Illustration av en kon.

Cylindrar En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

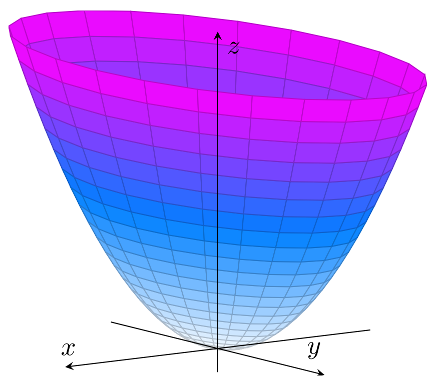
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Figur 3: Illustration av en cylinder.

Elliptiska paraboloider En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



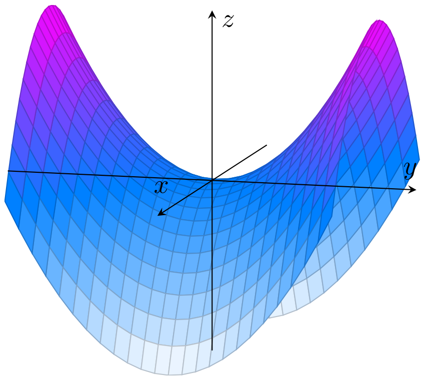
Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.

Hyperbolska paraboloider En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

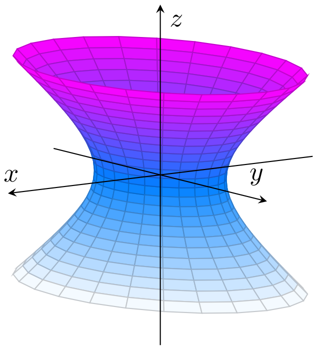
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

Enmantlade hyperboloider En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvationpå formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



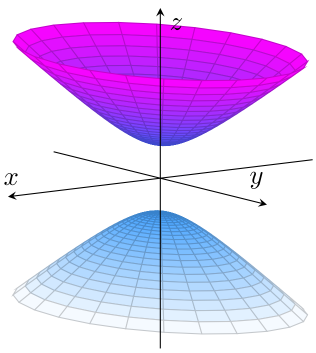
Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.

Tvåmantlade hyperboloider En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.

8 Optimering

8.1 Optimering på mängder

Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och $f : K \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f ett största värde M på K, förmodligen enligt sats. Om vi även antar att f är C^1 på K och att $f(\mathbf{a}) = M$, är $\mathbf{a}$ antingen

- en inre punkt av K så att $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = 0$, enligt sats.
- en punkt på ∂K.

För att optimera på icke-kompakta mängder, kan man hitta en punkt $\mathbf{a}$ i dne icke-kompakta mängden U så att $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = 0$. Därefter väljer man en smart kompakt delmängd K till U kring denna punkten så att man kan visa att f antar ett extremvärde på K i $\mathbf{a}$. Om man har valt K smart, kan man då även använda detta för att visa att f antar ett globalt extremvärde för U i $\mathbf{a}$.

8.2 Optimering med bivillkor

Låt $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ med $D_f, D_g \subset \mathbb{R}^2$, och anta att f optimeras under bivillkoret $g(x, y) = 0$ i någon inre punkt $(a, b) \in D_f \cap D_g$. Då är $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a, b), \vec{\boldsymbol{\nabla}} g(a, b)$ parallella.

För att bevisa detta antar vi $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Implicita funktionssatsen säjer då att det finns en parametrisering $(x(t), y(t))$ av nivåkurvan $g(x, y) = 0$ nära (a, b), som vi väljer så att den startar i (a, b). Funktionen $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ har ett lokalt extremvärde i $t = 0$, och vi har

$$0 = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a, b) \cdot (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)).$$

Eftersom gradienten är vinkelrät på nivåytan, är den parallell med $\vec{\boldsymbol{\nabla}} g(a, b)$ enligt sats.

8.3 Optimering med flera bivillkor

Låt $f : D_f \to \mathbb{R}, g_i : D_{g_i} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$ med $D_f, D_{g_1}, \ldots, D_{g_p} \subset \mathbb{R}^n$, och anta att f optimeras under bivillkoret $g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_n(\mathbf{x}) = 0$ i någon inre punkt $\mathbf{a} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \cdots \cap D_{g_p}$. Då är $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}), \vec{\boldsymbol{\nabla}} g_1(\mathbf{a}), \ldots, \vec{\boldsymbol{\nabla}} g_p(\mathbf{a})$ linjärt beroende.

8.4 Minsta kvadratmetoden

Låt $\{(a_i, b_i\}_{i=1}^n$ vara en mängd punkter där minst två a_i är olika. Vi vill välja en linje $y = kx + l$ så att

$$Q(k, l) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - (ka_i + l))^2$$

minimeras.

Vi vill visa att Q har ett entydigt minimum och att detta minimum löser normalekvationerna

$$\begin{aligned} k\sum_{i=1}^n a_i^2 + l\sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i, \\ k\sum_{i=1}^n a_i + nl &= \sum_{i=1}^n b_i. \end{aligned}$$

Vi beviser detta vid att definiera $M = Q(K_0, l_0)$ och bilda strimlan S_1 som begränsas av linjerna

$$ka_1 + l = b_1 \pm \sqrt{M}$$

och strimlan S_2 som begränsas av linjerna

$$ka_2 + l = b_2 \pm \sqrt{M}.$$

Vi har då att $(ka_1 + l - b_1)^2 \geq M$ för $(k, l) \notin S_1$ och $(ka_2 + l - b_2)^2 \geq M$ för $(k, l) \notin S_2$. Då minst två a_i är olika kan vi anta att S_1, S_2 inte är parallella. Då är $K = S_1 \cap S_2$ kompakt och $Q(k, l) > M, (k, l) \notin K$. Det minsta värdet av Q på K är även det minsta värdet på $\mathbb{R}^2$.

För ett minimum på K har vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial k}(k,l) = \sum_{i=1}^n 2(b_i - ka_i - l)(-a_i) = 2l\sum_{i=1}^n a_i + 2k\sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial l}(k,l) = 2k\sum_{i=1}^n a_i + 2nl - 2\sum_{i=1}^n b_i = 0, \end{aligned}$$

vilket ger normalekvationerna. Dessa har en lösning ty om man skriver systemet på matrisform, ges determinanten av vänsterledets matris av

$$\begin{aligned} & n\sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \\ = & \sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \\ = & |(a_1, \ldots, a_n)|^2 |(1, \ldots, 1)|^2 - |(a_1, \ldots, a_n) \cdot (1, \ldots, 1)|^2. \end{aligned}$$

Enligt Cauchy-Schwarz' olikhet är detta alltid nollskild ty minst två a_i är olika, och de involverade vektorerna aldrig är parallella.

9 Integraler

9.1 Definitioner

Dubbelintegraler av trappfunktioner Dubbelintegralen av en trappfunktion Φ över Δ definieras som

$$\iint\limits_{\Delta} \Phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum c_{i,j} A_{i,j},$$

där $c_{i,j}$ är värdet Φ antar på $\Delta_{i,j}$ och $A_{i,j}$ är arean av $\Delta_{i,j}$.

Riemann-integrerbarhet En begränsad funktion f är integrerbar över en rektangulär region Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ så att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $\iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \varepsilon$.

Dubbelintegraler Låt f vara integrerbar över rektanglet Δ. Då finns det ett λ så att $\iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \lambda \leq \iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ för alla trappfunktioner Φ, Ψ så att $\Phi \leq f \leq \Psi$. Detta λ definieras som dubbelintegralen av f över Δ och betecknas $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Integration över godtyckliga områden Låt $D \in \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd, $f : D \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion och

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ som innehåller D. Givet detta sätter vi

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} f_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

9.2 Satser

Egenskaper för dubbelintegraler av trappfunktioner För integralet av två trappfunktioner Φ, Ψ gäller att

- $\iint\limits_{\Delta} \alpha\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\iint\limits_{\Delta} (\Phi + \Psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Om $\Phi \leq \Psi$ på Δ är $\iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- $\left|\iint\limits_{\Delta} \Phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leq \iint\limits_{\Delta} |\Phi| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Om Δ har gränserna a, b i x-led och c, d i y-led är $\iint\limits_{\Delta} \Phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \Phi \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$.

Bevis

Ordning av dubbelintegraler Låt f vara integrerbar över rektanglet Δ. Då gäller att

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\,.$$

Bevis

Integration över områden begränsade av kurvor Låt f vara kontinuerlig på $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ och låt α, β vara kontinuerliga på $[a,b]$. Då är f integrerbar över D och

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\,.$$

Bevis

Integration över nollmängder Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint\limits_{N} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Bevis Låt Δ vara en rektangel så att $N \subset \Delta$, låt $\varepsilon > 0$ och låt R vara unionen av ändligt många axelparallella rektanglar så att

- $N \subset R$.
- R har area mindre än ε.
- $R \subset \Delta$.

Definiera den utvidgade funktionen

$$f_N(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in N, \\ 0, & (x,y) \notin N. \end{cases}$$

Låt $m = \min\limits_{\Delta} f_N, M = \max\limits_{\Delta} f_N$ och välj trappfunktioner Φ, Ψ så att

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} m, & (x,y) \in R, \\ 0, & (x,y) \in \Delta \setminus R, \end{cases} \quad \Psi(x,y) = \begin{cases} M, & (x,y) \in R, \\ 0, & (x,y) \in \Delta \setminus R. \end{cases}$$

Då är $\Phi \leq f \leq \Psi$. Vi har att

$$\iint\limits_{\Delta} (\Psi - \Phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R} (\Psi - \Phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq (M - m)\varepsilon,$$

och därmed är f integrerbar över N. Dessutom gäller att

$$\iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\Delta} f_N\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

vilket implicerar att

$$m\varepsilon \leq \iint\limits_{N} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M\varepsilon.$$

Detta implicerar att

$$\iint\limits_{N} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

och beviset är klart.

Medelvärdesatsen för integraler Antag att f är kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar och bågvis sammanhängande mängd $D \subset \mathbb{R}^2$. Låt $m = \min\limits_{D} f, M = \max\limits_{D} f$. Integration ger

$$mA_D \leq \iint\limits_{D} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq MA_D.$$

Alltså finns ett $C \in [m, M]$ så att

$$\frac{1}{A_D} \iint\limits_{D} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C.$$

Bevis Satsen om mellanliggande värden ger att $\exists(\xi, \eta) \in D$ så att $f(\xi, \eta) = C$. Alltså

$$\frac{1}{A_D} \iint\limits_{D} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(\xi, \eta).$$