

Sammanfattning av SK1104

Yashar Honarmandi

3 mars 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SK1104, med viktigt skit.

Innehåll

1	Notation	1
2	Harmoniska vågor	1
3	Klassiska vågor	2
3.1	Principer	2
3.2	Ekvationer	2
4	Modellering av systemer	9
4.1	Vätskor och gaser	10
5	Elektricitet	12
5.1	Ekvationer	12
5.2	Principer	15
6	Magnetism	15
6.1	Ekvationer	15
6.2	Principer	17
7	Elektrodynamik	17
7.1	Ekvationer	17
7.2	Principer	18
8	Elektricitet	18
8.1	Ekvationer	18
8.2	Principer	22
9	Elektromagnetiska vågor	22
9.1	Principer	22
9.2	Ekvationer	23
10	Teckenkonvention i optik	26

1 Notation

Om inte annat specificeras, kommer alla ekvationer använda notationen som ges i denna tabellen.

Storhet	Symbol
Position	\mathbf{r}
Tid	t
Period	T
Frekvens	f
Vinkelfrekvens	ω
Våglängd	λ
Vågvektor	\mathbf{k}
Vågtal	k
Amplitud	A
Vågfart	c
Tryck	p
Elektronladdning	e
Laddningstäthet	ρ
Permeabilitet	ε
Permittivitet	μ
Brytningsindex	n

2 Harmoniska vågor

Harmoniska vågor, även kallad plana vågor, är periodiska störningar i ett medium, och beskrivs typisk av en funktion på formen $e^{i\phi}$. För dessa kan man identifiera vissa storheter, som vi kommer göra här.

Perioden Perioden är tiden det tar för en harmonisk våg att gå genom en cykel.

Frekvens och vinkelfrekvens Av större intresse är frekvens, som ges av

$$f = \frac{1}{T},$$

som då är antalet cykler vågen går genom per enhet tid. Av ännu större intresse är vinkelfrekvensen, som ges av

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},$$

och ger antalet radianer vågen går genom per enhet tid.

Våglängd Våglängden är det minsta avståndet mellan två punkter som är i fas.

Vågvektor och vågtal För vågor i flera dimensioner är det smartare att använda en vågvektor. Denna har riktning motsvarande riktningen vågen propagerar i och längd

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

k kallas även vågtalet. Anledningen till att man heller använder vågvektorn är exakt den samma som att man heller använder frekvens än period.

Amplitud Harmoniska vågor representerar periodiska störningar. Denna störningen uppnår vid vissa tider ett maxvärde. Detta är vågens amplitud.

3 Klassiska vågor

3.1 Principer

Superposition Eftersom vågekvationen är linjär, interagerar vågor vid att man adderar störningarna.

Vågor i fas Två vågor är i fas om de har en fasskillnad lika med ett heltalsmultipel av 2π .

Koherenta vågor Två vågor är koherenta om de har konstant fasskillnad.

Stående vågor En stående våg bildas när en våg reflekteras och interfererar med sig själv. En sådan våg har ingen netto transport av energi.

Resonans Om en yttre kraft driver en svängning med en frekvens som naturligt ger stående vågor, växer amplituden obegränsat och man får stående vågor.

Fermats princip Strålgången till en klassisk våg mellan två punkter följer den snabbaste vägen.

Huygens' princip Om en våg utbridas sig i ett medium, kan varje punkt i mediet anses som en ny vågkälla som skickar ut en ny våg när den ursprungliga vågen träffar den givna punkten.

3.2 Ekvationer

Vågekvationen

$$\nabla^2 s = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Vågekvationen är fellesnämnen för alla klassiska vågfenomen. Denna ekvation beskriver hur vågor med en väldefinierad fart c propagerar i rummen över tid. s är storheten som propagerar, t.ex. en tryckskillnad eller ett elektromagnetiskt fält.

Härledning Låt störningen vara någon $f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$, där \mathbf{n} är en enhetsvektor i samma riktning som vågens utbredning. f har denna form eftersom vågen efter en tid t ser likadan ut om man beveger sig ett avstånd ct i riktning av vågens utbredning. Med $u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct$ får man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = n_x^2 \frac{d^2 f}{du^2}, \\ &\vdots \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= \frac{d}{dx} \frac{df}{du} \frac{du}{dt} = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2}. \end{aligned}$$

Om man adderar derivatorna med avseende på rymdliga koordinater får man

$$\nabla^2 s = \sum \frac{d^2 s}{dx_i^2} = \sum n_i^2 \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \sum n_i^2 = \frac{d^2 f}{du^2}$$

då \mathbf{n} är en enhetsvektor. Detta ger då

$$\nabla^2 s = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Dispersionsrelation för harmoniska vågor

$$\omega = ck$$

Härledning Ta en harmonisk våg i en dimension, på formen $Ae^{i(kx - \omega t)}$, och testa om den uppfyller vågekvationen. Då ser du att detta uppfylls under förutsättningen att dispersionsrelationen är uppfylld.

Harmoniska vågor En lösning till vågekvationen är

$$s = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

och detta kommer vara basen för vidare analys av vågfenomen. Merk att A kan vara komplex och innehålla information om fasförskjutningen till vågen.

Härledning s tillfredsställer vågekvationen om dispersionsrelationen är uppfylld. Under denna förutsettnig, skriv

$$s = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = Ae^{ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)},$$

vilket är en funktion av $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct$, som vi ville.

Harmonisk sfärisk våg

$$s = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Faktorn $\frac{1}{r}$ kommer eftersom vågens intensitet måste vara den samma överalt.

Akustisk impedans

$$Z = \frac{\Delta p}{v_p}$$

v_p är partikelhastigheten i mediet.

Svängningar Om två vågor med samma amplitud men olika vågvektorer och frekvenser superponeras, uppstår en svängning. Störningen beskrivs av

$$s = 2A \cos\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) e^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}.$$

Denna består av två faktorer. Den sista faktorn är en ny våg som uppstår, och den första faktorn är en ny amplitudsom även propagerar periodiskt. Det är denna amplituden som gör att den nya vågen varierar i intensitet, och denna variationen är upphovet till namnet.

Härledning Om två vågor på formen $Ae^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)}$ ges superpositionen av

$$\begin{aligned} s &= A \left(e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)} \right) \\ &= Ae^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)} \left(e^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)} + e^{i\left(\frac{-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{-\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)} \right) \\ &= Ae^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)} \left(e^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)} + e^{-i\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)} \right) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) e^{i\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}. \end{aligned}$$

Definition av intensitet Intensiteten till en våg ges av

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A}$$

där $\langle P \rangle$ tidsmedelvärdet av den totala effekten vågen utövar och A är arean av ytan vågen träffar.

Ljudintensitet i decibel

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

I_0 är en referensintensitet.

Intensitet för superposition

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$$

Två vågor med fasskillnad $\Delta\phi$ har denna intensitet när de superponeras. Märk att om vågorna ej är koherenta, blir tidsmedelvärdet av den sista termen 0, och intensiteterna kan adderas.

Härledning

Stående vågor i öppen pipa Om en våg i en pipa reflekteras i $x = 0$ kommer den totala vågprofilen för $x < 0$ att vara

$$s = 2A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Denna har noder, ställen där störningen konstant är lika med 0, där

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

som i en dimension reduceras till

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Härledning För en öppen pipa är trycket högre i röret än utanför, vilket gör att den akustiska impedansen i pipan är högre än utanför. I vår approximation är skillnaden extremt stor, och därmed kommer vågen att fasskiftas med 0 och reflekteras i pipan öppning. Den totala vågprofilen blir

$$\begin{aligned} s &= A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + A e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= A e^{-i\omega t} (e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \\ &= 2A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Det sista resultatet fås vid att hitta störningens nollställen, som endast fås om $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0$.

Stående vågor i slutna pipa Om en våg reflekteras i $x = 0$ kommer den totala vågprofilen för $x < 0$ att vara

$$s = 2A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Denna har noder, ställen där störningen konstant är lika med 0, där

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = n\pi,$$

som i en dimension reduceras till

$$x = n \frac{\lambda}{2}.$$

Härledning För en slutna pipa träffar vågen pipans ända, där impedansen är högre än i pipan. I vår approximation är skillnaden extremt stor, och därmed kommer vågen att fasskiftas med π och reflekteras i rörets öppning. Den totala vågprofilen blir

$$\begin{aligned} s &= Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + Ae^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \pi)} \\ &= Ae^{-i\omega t} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{i\pi} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \\ &= Ae^{-i\omega t} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \\ &= 2iA \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ &= 2A' \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

där vi har dragit i in i amplituden som en fassfaktor. Det sista resultatet fås vid att hitta störningens nollställena, som endast fås om $\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0$.

Toner i öppna pipa I en öppna pipa med längd L är endast frekvenser motsvarande

$$\lambda = \frac{n}{2} L$$

tillåtna.

Härledning Låt x -axeln gå längs med vågens utbredning, som även är parallell med pipans utsträckning. Vågen skickas från $x = -L$, som är en antinod. Detta hender endast om

$$\begin{aligned} |\cos(-kL)| &= 1 \\ kL &= n\pi \\ \lambda &= \frac{n}{2} L. \end{aligned}$$

Toner i slutna pipor I en sluten pipa med längd L är endast frekvenser motsvarande

$$\lambda = \frac{n}{2}L$$

tillåtna.

Härledning Låt x -axeln gå längs med vågens utbredning, som även är parallell med pipans utsträckning. Vågen skickas från $x = -L$, som är en antinod. Detta hender endast om

$$\begin{aligned} |\sin(-kL)| &= 1 \\ kL &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \lambda &= \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)L. \end{aligned}$$

Dopplereffekt

$$f' = f_0 \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}$$

Detta är den fullständiga formeln som beskriver Dopplereffekten. Dopplereffekten uppstår om en mottagar rör sig relativt en källa med hastighet v_o och källan, som skickar ut en frekvens f_0 , även rör sig med hastigheten v_s (alla betraktningar är här i en dimension). Mottagaren kommer då observera att vågen har en frekvens f' . Om de två närmar sig varandra, välj det överste tecknet.

Härledning

Relativistisk Dopplereffekt

$$f' = f_0 \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

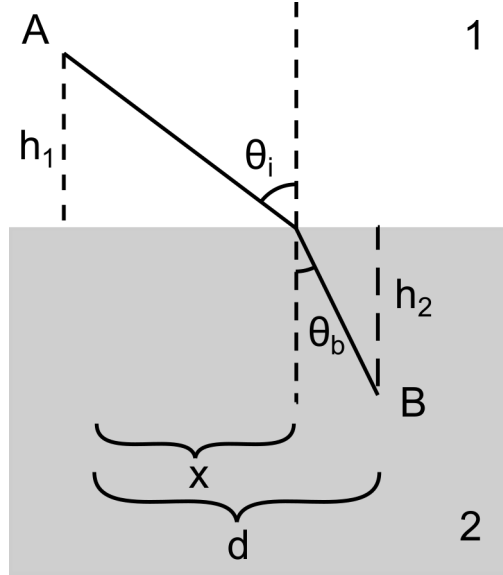
Denna ekvation beskriver Dopplereffekten med en relativistisk korrektion. v är nu relativhastigheten mellan källa och mottagare. Igen, välj + om avståndet minskar.

Brytningslagen Om en våg går från ett medium till ett annat, kommer banan ändra riktning. Om vågen träffar gränsytan med en vinkel θ_i relativt gränsytans normal, har man att

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = \frac{c_1}{c_2}$$

där θ_b är vinkeln banan har relativt gränsytan efter brytningen och vågfartens subskript anger vilket mediums vågfart det refereras till.

Härledning Betrakta figur 1. Tiden det tar för vågens strålgång att



Figur 1: Illustration av brytning i en platt yta.

gå från A till B ges av

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{c_2}.$$

Derivatan med avseende på x ges av

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{x-d}{c_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}.$$

Minimumet finns där derivatan är noll, vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} &= \frac{x-d}{c_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} \\ \frac{c_1}{c_2} &= \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{x-d} \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}. \end{aligned}$$

Trigonometrin ger

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{\sin \theta_b} \sin \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b}.$$

Villkor för totalreflektion

$$\theta_i = \arcsin \frac{v_1}{v_2}$$

Härledning Kommer direkt från brytningslagen när $\theta_i = \frac{\pi}{2}$.

Definitionen av reflektionskoefficient

$$R = \frac{I_R}{I_I}$$

Subskriptet indikerar om det är intensiteten till den inkommande eller reflekterade vågen.

Definition av transmissionskoefficient

$$T = \frac{I_T}{I_I} = 1 - R$$

Reflektionskoefficient för akustisk våg

$$R = \left(\frac{|Z_1| - |Z_2|}{|Z_1| + |Z_2|} \right)^2$$

Transmissionskoefficient för akustisk våg

$$T = \left(\frac{2Z_1Z_2}{|Z_1| + |Z_2|} \right)^2$$

Ljudabsorption

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

Detta är ett sätt att beskriva energiförluster när vågen propagerar. α kallas för absorptionskoefficienten.

Vinkel för Mach-kon

$$\sin \alpha = \frac{c}{v_s}$$

Om en ljudkälla rör sig med en fart v_s som är snabbare än ljuden, kommer det bildas en så kallad Mach-kon bakom planet, där den inre vinkeln från källans bana till konens yta ges av denna ekvationen.

Härledning

4 Modellering av systemer

Syftet i denna delen är att diskutera systemer som kan modelleras med teorin bak klassiska vågor.

4.1 Vätskor och gaser

Vi tänker oss att vi trycker på vätskan eller gasen i en behållare med tvärsnittsarea A och volym V . Detta får mediet att komprimeras. För $dp \ll p_0$ har man

$$dp = -B \frac{dV}{V},$$

där B är mediets bulkmodul. Kompressionen kan tänkas få oändligt tunna volymelementer i mediet att förflytta sig ett avstånd $s(x)$, där x är en koordinat som indikerar hur djupt i behållaren volymelementet är.

Betrakta nu vätskan eller gasen mellan två punkter x och $x + dx$. Tryckskillnaden mellan dessa två punkterna ges av

$$dp = -B \frac{dV}{V} = -B \frac{A(s(x+dx) - s(x))}{A dx} \rightarrow -B \frac{ds}{dx},$$

där vi förutsätter att $s(x), s(x+dx) \ll dx$. Newtons andra lag ger då

$$ma = A\Delta p.$$

Om vi stoppar in för p, m, a får vi

$$\begin{aligned} \rho A dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= AB\Delta \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{B}{\rho} \frac{\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x}}{dx} = \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

och vågfarten är $c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$.

Om vi även antar att vågen propagerar via adiabatiska kompressioner, har vi

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= C \\ \ln p + \gamma \ln V &= c \\ \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} &= 0, \end{aligned}$$

vilket ger

$$B = -\frac{dp}{\left(\frac{dV}{V}\right)} = \gamma p.$$

Om man använder ideala gaslagen på detta, får man

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

där M är gasens molära massa.

För gaser görs även lite extra diskussioner, som både illustrerar hur man härledar saker för klassiska vågor och ger information om själva gassystemet.

För en våg i en gas ges den akustiska impedansen av

$$Z = \frac{\Delta p}{v_p} = \frac{-B \frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial t}} = \frac{Bk}{\omega} = \frac{\rho c^2}{c} = \rho c.$$

Om vågen propagera längs med x -axeln, ges arbetet vågen gör av

$$dW = F ds = dp A ds$$

där A nu är arean av tvärsnittsytan vågen träffar. Effekten ges av

$$P = \frac{dW}{dt} = dp A \frac{\partial s}{\partial t} = -BA \frac{\partial \text{Re}(s)}{\partial t} \frac{\partial \text{Re}(s)}{\partial x}$$

där vi har använt ett resultat från tidigare. Med en harmonisk våg $Ce^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ får man

$$\langle P \rangle = -BA(ikC)(-i\omega C) \left\langle \text{Re} \left(e^{2i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right) \right\rangle.$$

Med hjälp av dispersionsrelationen för vågor omformulerar vi till

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{BA}{c}(\omega C)^2 \left\langle \text{Re} \left(e^{2i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right) \right\rangle \\ &= \rho v A(\omega C)^2 \left\langle \text{Re} \left(e^{2i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right) \right\rangle \\ &= \rho v A(\omega C)^2 \left\langle \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \rho v A(\omega C)^2. \end{aligned}$$

Från detta kan man ersätta vissa storheter med andra för att få

$$I = \frac{1}{2}|Z|(\omega A)^2 = \frac{1}{2}|Z|v_{p, \max}^2 = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2|Z|}.$$

Vid att införa

$$\Delta p_{\text{eff}} = \frac{\Delta p_{\max}}{\sqrt{2}}, v_{p, \text{eff}} = \frac{v_{p, \max}}{\sqrt{2}}$$

kan man fjärna lite tvåor i uttrycken för intensitet. Märk analogien till ellära och Joules lag när man tar bort tvåorna.

Eftersom $I \propto (\Delta p_{\text{eff}})^2$ kan intensiteten till en våg i en gas skrivas som

$$L = 10 \log \frac{(\Delta p_{\text{eff}})^2}{(\Delta p_{\text{eff},0})^2} = 20 \log \frac{\Delta p_{\text{eff}}}{\Delta p_{\text{eff},0}}.$$

Fasta materialer i bulk Betrakta ett material som sträcks mellan $x, x + dx$. Materialet sträcks då en längd $s(x, t)$. Om $s(x, t)$ är litet jämfört med dx upplevs samma kraft i båda punkter. Spänningen i materialet är då

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E(s(x + dx) - s(x))}{dx} \rightarrow E \frac{\partial s}{\partial x},$$

där vi har använt Hookes lag för fasta materialer, som ger $\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l_0}$, där E är materialets elasticitetsmodul.

Materialet mellan $x, x + dx$ har enligt ovan en position som ges av s . Då ger Newtons andra lag

$$\begin{aligned} \rho A dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \Delta F \\ \rho A \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{\partial F}{\partial x} = AE \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \end{aligned}$$

och vågfarten är

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Märk att resonnemanget ovan är för longitudinella vågor. För transversella vågor ges farten av

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

där G är materialets skjuvmodul.

Transversella vågor i snören Av någon magisk årsak ges vågfarten av

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

där T är snörets spänning och μ är massan per längdenhet.

5 Elektricitet

5.1 Ekvationer

Coulombs lag

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{\mathbf{r}}$$

Coulombs lag ger den elektriska kraften mellan två laddningar. $\bar{\mathbf{r}}$ är en enhetsvektor mellan laddningarna.

Härledning Ursprungligt ett experimentellt resultat, fås alternativt via Maxwells ekvationer.

Elektriskt fält

$$\mathbf{E} = \frac{1}{q_1} \mathbf{F}$$

Detta definierar det elektriska fältet som upplevs av en testladdning q_1 .

Elektriskt potensiale Om en kropp påverkas av en kraft medan den förflyttar sig längs en bana C , gör den arbetet

$$W = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

mot kraften. Om man definierar potensialet $V = \frac{1}{q_1} W$ får man

$$V = -\frac{1}{q_1} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

vilket vi tar som vår definition på potensialet.

Man måste alltdi välja någon referens för potensialet. Om man väljer denna i oändligheten, ges potensialet från en punktladdning av

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Enligt superpositionsprincipen ges potensialet från en laddningstäthet ρ av

$$V = \int dV \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Kraftmoment på dipol

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Detta är ekvationen för kraftmomentet på en dipol. \mathbf{p} pekar från den negativa till den positiva laddningen, medan dess längd beror på hur stora laddningarna i dipolen är.

Härledning

Gauss' lag

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV \rho$$

Gauss' lag relaterar flödet av det elektriska fältet genom en yta till mängden laddning innanför ytan.

I ett dielektrikum blir Gauss' lag

$$\oint_{\partial V} \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V dV \rho,$$

där vi nu integrerar över den fria laddningstätheten.

Härledning

Kirchoffs lagar I en förgrening:

$$\sum I = 0.$$

I en sluten krets:

$$\sum V = 0.$$

Härledning

Elektrisk energitäthet

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Härledning

Strömtäthet

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$$

n är tätheten av laddade partiklar, q är laddningen till en partikel och \mathbf{v}_d är partikelns drifhastighet (?).

Härledning

Ledning i metaller

$$\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau}$$

m_e är elektronmassan, n är elektrontätheten och τ är medeltiden mellan kollisioner mellan två elektroner.

5.2 Principer

Metaller I metaller är laddningar fria, vilket ger att det elektriska fältet inuti metallet alltid är noll. Då är potencialet inuti metallet konstant. Om det finns någon laddningstäthet i metallet, inducerad eller ej, kommer den vara lokaliserad på metallens yta. Detta utnyttjas i t.ex. Faradaybur, som är behållare av metall som även har noll elektriskt fält inuti sig.

Superpositionsprincipen Potensialet från flera laddningar kan adderas.

Dielektrikas påverkan av elektriska fältet Dielektrika består av massadipoler. När ett dielektrikum placeras i ett elektriskt fält, kommer dipolerna orienteras med fältet, vilket kommer skapa en laddningstäthet på ytan. Eftersom elektriska fält får de positiva ändarna av dipolerna att peka bort, kommer de inducerade laddningstätheterna att skapa ett elektriskt fält riktad mot det yttre fältet.

6 Magnetism

6.1 Ekvationer

Kraft på partikel i magnetfält

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Flödet av magnetfält

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Cirkelbana för ladd partikel i magnetfält

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

Hastighetsfiltrering för vinkelrät elektriskt och magnetiskt fält

$$v = \frac{E}{B}$$

Kraft på ledare i magnetfält

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Magnetfält från laddning i rörelse

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

Magnetfält kring ledare

$$dB = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

Ampères lag

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Magnetfält kring oändlig ledare

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Kraft per längd mellan två ledare

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

Magnetfält i mitten av cirkulär ledare

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Moment på kretsslinga i magnetfält

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Potensiell energi för kretsslinga i magnetfält

$$U = -\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Hall-effekt

$$nq = -\frac{J_x B_y}{E_z}$$

n representerar här tätheten av laddningsbärare.

Energi i en spola

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

Energitäthet i magnetiska fält

$$u = \frac{B^2}{2\mu}$$

6.2 Principer

Magnetiska dipoler Maxwells ekvationer förutspår att magnetism endast förekommer som dipoler.

Magnetiska material Elektroners bana och spinn ger upphov till magnetiska dipoler i material. I magnetiska material är dessa dipolerna i någon grad orienterade och ger upphov till ett makroskopiskt magnetiskt moment.

7 Elektrodynamik

7.1 Ekvationer

Maxwells ekvationer

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Alternativt på integralform:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV \rho, \\ \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0, \\ \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \\ \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \left(\int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right).\end{aligned}$$

Man skulle kunna skriva en hel paragraf om varje ekvation för sig, men jag tyckte det blev snyggare att presentera de så här. Φ är flödet av fältet indikerat av subskriptet.

Den första ekvationen är Gauss' lag som vi känner den.

Den andra är Gauss' teorem för magnetfältet, även från statiken.

Den tredje ekvationen är Faradays lag. I praktiken betyder den att man kan inducera spänningar i kretsslingar.

Den fjärde ekvationen är Ampère-Maxwells lag, som även finns i statiken, men modifieras med en extra term.

Alla ekvationerna är formulerade i vakuum.

Inducerad spänning i kretsslinga

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Härledning

Induktion mellan två spolar Två spolar inducerar en EMK i varandra.
Dens storhet ges av

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

för spola 2 och motsvarande för den andra.

Härledning

Definitionen av ömsesidig induktans

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{B_1}}{I_2}$$

Den ömsesidiga induktansen mellan två spolar är lika för de två spolarna.

Självinduktans Spolar inducerar även en EMK i sig själv. Denna ges av

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}.$$

Härledning

Definitionen av självinduktans Självinduktansen till en spola ges av

$$L = \frac{N \Phi_B}{I}.$$

Härledning

7.2 Principer

8 Elektricitet

8.1 Ekvationer

Effektutveckling i en krets

$$P = VI$$

RMS-ström- och spänning

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\langle I \rangle}, \quad V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle V \rangle}$$

I en sinusoidal krets har man

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

och motsvarande för spänningen.

Ohms lag

$$V = ZI$$

Definitionen av resistivitet

$$\rho = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{J}|}$$

Motstånd i en ledare

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Seriekoppling av resistorer

$$R_t = \sum R_i$$

Härledning

Parallellkoppling av resistorer

$$\frac{1}{R_t} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Härledning

Effektutveckling i resistiv komponent

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Definitionen av kapacitans

$$C = \frac{Q}{V}$$

Q är beloppet av laddningen som lagras i kondensatorn (endast den positiva eller endast den negativa), och V är spänningen som upprätthållas av kondensatorn.

Impedans i en kondensator

$$Z = i \frac{1}{\omega C}$$

Seriekoppling av kondensatorer

$$\frac{1}{C_t} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Härledning

Parallellkoppling av kondensatorer

$$C_t = \sum C_i$$

Dielektrisk konstant

$$K = \frac{C}{C_0}$$

C_0 betecknar kondensatorns kapacitans utan dielektrikum mellan plattarna. För en parallellplattkondensator har vi $K = \varepsilon_r$.

Kretser och elektromotiv kraft

$$V = \varepsilon - IR_i$$

Den elektromotiva kraften ε är spänningen som driver ström i kretsen. R_i är kretsens inra motstånd, och då ges den faktiska spänningen i kretsen av denna formeln.

Härledning

Uppladdning av kondensator i RC-krets

$$q = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}}),$$
$$I = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Härledning

Utladdning av kondensator i RC-krets

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$
$$I = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Härledning

Uppladdning av spola i RL-krets

$$I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Härledning

Utladdning av spola i RL-krets

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Impedans i en spola

$$Z = i\omega L$$

Fasvinkel i AC-krets

$$\tan \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Medeleffekt i AC-krets

$$\langle P \rangle = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi$$

Eigenfrekvens i LC-krets

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Dämpningskriterie för RLC-krets

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$$

Härledning Kan vara fel.

Eigenfrekvens i underdämpad RLC-krets

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Härledning

Spänningsrelation i transformator

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Spänningsrelation för transformator med motstånd

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}$$

Korrigerad medelström i ett galvanometer

$$I_{\text{rav}} = \frac{2}{\pi} I_{\text{max}}$$

Med rätt kretsuppsätt ger detta strömmen i galvanometeret så att i löpet av en cykel får man samma laddningsflöde i galvanometeret som om den konstanta strömmen I_{rav} .

8.2 Principer

9 Elektromagnetiska vågor

Från Maxwells ekvationer kan man visa att flera storheter kopplade till elektromagnetism följer vågekvationen. Dessa vågor kallas för elektromagnetiska vågor. Experimenter visade att ljus propagerade med samma farten som den teoretiska farten till elektromagnetiska vågor, och därmed blev det snabbt etablerat att ljus är elektromagnetiska vågor. Därmed kommer vi ägna en hel sektion åt att diskutera de.

9.1 Principer

Essensiell information från Maxwells ekvationer Från Maxwells ekvation får man veta att

- elektromagnetiska vågor är transversella.
- elektromagnetiska vågor utbreddar sig med ljusfarten $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ i vakuum, och motsvarande i andra media.
- $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$.
- $B = \frac{1}{c} E$.
- $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ pekar i utbredningsriktningen.

Fermats princip Strålgången till ljus mellan två punkter följer den snabbaste vägen.

Dispersion Dispersion är när ett mediums brytningsindex beror på vågens våglängd.

Polarisation Elektriskt och magnetiskt fält är vektorstorheter, och det betyder att de kan svänga i olika plan. Ljusets polarisation refererar till hur fälterna svängar i planet normalt på utbredningen.

Ljus kan vara

- linjärpolariserat, så att fältet oscillerar på en linje i det normala planet.
- elliptiskt polariserat, så att fältet oscillerar på en ellips i det normala planet.
- opolariserat, så att fältet oscillerar godtyckligt utan preferens för någon riktning.

Dubbeltbrytande material Ett dubbeltbrytande material har brytningsindex som beror på polarisationen.

Optisk aktivitet Det finns väl typ saker som kan vrida polarisationsriktningen på polariserat ljus, eller någonting.

9.2 Ekvationer

Vågekvationen för \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Härledning

Definitionen av brytningsindex

$$n = \frac{c_0}{c}$$

Här är c_0 ljusfarten i vakuum. Per definition är $n \geq 1$ i linjära materialer. Definitionen ger

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

där ε_r, μ_r är relativa permeabiliteter och permittiviteter.

Reflektionskoefficient för elektromagnetiska vågor

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Våglängd i medium

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

λ_0 är våglängden i vakuum. En direkt konsekvens av detta är att

$$k = nk_0$$

för vågvektorn, där k_0 är vågvektorns längd i vakuum.

Härledning Vi har från innan att vid transmission mellan två medier ändras inte frekvens. Detta ger att

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{nf} = \frac{\lambda_0}{n}$$

där c_0 är vågfarten i vakuum.

Definitionen av optisk väg För en given bana definieras den optiska vägen ljus tar som

$$L = \int_C dl n,$$

som för materialer med konstant brytningsindex reduceras till

$$L = \sum L_i n_i,$$

där L_i är sträckan vägen rör sig i materialet med brytningsindex n_i .

Poyntingvektorn

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Poyntingvektorn ger information om energitransport från en elektromagnetisk våg. Dens riktning indikerar i vilken riktning energin transporteras, och dens belopp indikerar hur mycket energi som transporteras. I den komplexa formalismen definieras den som

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} * \times \mathbf{B}.$$

Härledning I ett litet tidsintervall flödar energin

$$dU = u dV = uAc dt$$

genom arean A . För en elektromagnetisk våg har man

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Med relationen $B = \frac{E}{c}$ får man

$$u = \varepsilon_0 E^2,$$

vilket ger

$$dU = u dV = \varepsilon_0 E^2 A c dt.$$

Flödet per tidsenhet och area ges av

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

Givet detta, definierar man

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

som uppfyller

$$|\mathbf{S}| = \frac{EB}{\mu_0}$$

och vars riktning även ger information om i vilken riktning energin transporteras. Denna vektorn används som inspiration till definitionen i den komplexa beskrivningen.

Intensitet för elektromagnetisk våg

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E^2$$

Härledning Enligt definitionen är

$$I = \langle S \rangle.$$

För enkla harmoniska fält har man

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} * \times \mathbf{B} = \frac{E^2}{2c\mu_0}.$$

Detta ger

$$I = \langle S \rangle = \frac{E^2}{2c\mu_0}.$$

Malus' lag Om ljus med intensitet I_0 skickas in på en polariserande skärm, har ljuset på andra sidan intensitet

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

θ är vinkeln det inkommande ljusets polarisation bildar med skärmens polarisationsriktning.

Härledning Följer av att $I \propto E^2$ och att en polariserande skärm fjärnar komponenten av \mathbf{E} som är normal på skärmens polarisationsriktning.

Fresnels formler

$$\begin{aligned}\frac{E_{rp}}{E_{ip}} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_b)}{\tan(\theta_i + \theta_b)} \\ \frac{E_{tp}}{E_{ip}} &= \frac{2 \sin(\theta_b) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_b) \cos(\theta_i - \theta_b)} \\ \frac{E_{rs}}{E_{is}} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_b)}{\sin(\theta_i + \theta_b)} \\ \frac{E_{ts}}{E_{is}} &= \frac{2 \sin(\theta_b) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_b)}\end{aligned}$$

Det första indexet indikerar om ljuset är reflekterat eller transmitterat. Det andra indexet indikerar om ljuset är polariserat parallellt eller normalt mot infallsplanet.

Härledning Fås från gränsvillkoren för elektriskt och magnetiskt fält.

Brewstervinkeln När ljus skickas in på en gränssyta med infallsvinkeln θ_B så att

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

är det reflekterade ljuset linjärpolariserat vinkelrät mot infallsplanet. Denna vinkeln kallas Brewstervinkeln.

Härledning Fresnels formler ger att $E_{rp} = 0$ när $\theta_i + \theta_b = \frac{\pi}{2}$. Brytningslagen ger då

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = \frac{\sin \theta_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_i)} = \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Från definitionen av brytningsindex får man då

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}.$$

Vinkeln som uppfyller detta döps till θ_B .

10 Teckenkonvention i optik

Utseendet till ekvationerna vi använder i optik ska beror på teckenkonventionen man använder. En möjlighet är att använda kartesisk teckenkonvention. Denna baseras på att

- allt ljus kommer från höger mot vänster.
- Koordinatsystemet definieras med origo i centrum av den optiska komponenten, x -axeln med positiv riktning mot höger och y -axeln med positiv riktning uppåt.

Detta implicerar följande konvention:

	+	-
Objektavstånd	Objekt till höger om optisk objekt	Objekt till vänster om optisk objekt
Bildavstånd	Bild till höger om optisk objekt	Bild till vänster om optisk objekt
Fokallängd för lins	Samlar ljus till höger (konvex)	Samlar ljus till vänster (konkav)
Fokallängd för spegel	Centrum till höger (konvex)	Centrum till vänster (konkav)

Alternativt kan man använda den så kallade Real Is Positive- konventionen (R.I.P) som används i kurslitteraturen. Denna definieras av följande tabell:

	+	-
Objektavstånd för linser	Objekt till vänster om lins	Objekt till höger om lins
Bildavstånd för linser	Bild till höger om lins	Bild till vänster om lins
Fokallängd för lins	Samlar ljus till höger (konvex)	Samlar ljus till vänster (konkav)
Objektavstånd för speglar	Objekt till vänster om spegel	Objekt till höger om spegel
Bildavstånd för speglar	Bild till vänster om spegel	Bild till höger om spegel
Fokallängd för spegel	Centrum till vänster (konkav)	Centrum till höger (konvex)
Objektavstånd för sfärisk yta	Objekt till vänster om yta	Objekt till höger om yta
Bildavstånd för sfärisk yta	Bild till höger om spegel	Bild till vänster om yta
Krökningsradie för sfärisk yta	Centrum till höger	Centrum till vänster

Varför en konvention är klart överlegen är triviellt och lämnas som en övning till läsaren.