Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

27 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ osv.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör V till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp k med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x+y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R},\ x, y \in V$.
- $(c+d)x = cx + dx,\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= x + y + W,\\ a(x + W) &= (ax) + W.\end{aligned}$$

Linjärt oberoende mängder S är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla x_i är elementer i S.

Linjärt hölje Det linjära höljet $\mathrm{Span}\,(S)$ av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S.
- det minsta delrummet som innehåller S.
- $\bigcap\limits_{S\subset W} W$.
- $\sum\limits_{x\in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

Duala rum För ett vektorrum V över kropp k är duala rummet V^* mängden av alla linjära former på V, dvs. alla linjära avbildningar $V \to k$.

Dual bas Givet en bas $\{e_i\}_{i\in I}$ för V, väljer vi en bas $\{e_i^*\}_{i\in I}$ fför V^* som uppfyller

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfir En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säjer att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Isomorfir En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om B är en bas för V och D är en bas för W kan vi ordna en matris för $L : V \to W$ genom

$$L(x_i) = \sum_{j\in I} a_{ji} y_j,$$

där alla $x_i \in B$, alla $y_i \in D$ och I är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om I är oändlig.

Analytiska funktioner av operatorer En analytisk funktion av en operator L definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

Matrisnorm Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nilpotenta operatorer En operator L är nilpotent om $L^n = 0$ för något n.

2.2 Satser

Basbyte Låt L vara en avbildning från V till W. Låt $]_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen B i definitionsmängden till D i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från A till B i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

Bevis Kommutativt diagram

Koordinater Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V. Detta ger en isomorfi

$$V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i xi \to \{a_i\}_{i \in I}.$$

Bevis Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \to \sum a_i xi$$

ger en avbildning $k^I \to V$ som är injektiv eftersom B är linjärt oberoende och surjektiv eftersom B spänner upp V.

Kärna och injektivitet En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

Bevis

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

Kvotavbildning Om $W \subseteq V$ är ett delrum , ger $x \to x + W$ en linjär kvotavbildning från V till $\frac{V}{W}$.

Bevis Vi har

$$x + y \to x + y + W = x + W + y + W,$$
$$ax \to ax + W = a(x + W),$$

och beviset är klart.

Isomorfisatsen

$$\mathrm{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

Bevis Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\mathrm{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty L är linjär. Φ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) \colon L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. Φ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något x ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \mathrm{Im}(L)$ ett x så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

Dimensionssatsen Om V är ändligdimensionellt är $\operatorname{rank} L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

Bevis

Faktorisering med kvotrum Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \to W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

Bevis Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.

Norm av potenser av matriser

$$\left\|A^i\right\| \leq \|A\|^i$$

Bevis

Konvergens av funktioner av matriser En funktion f av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

3 Egenvärden och olika polynom

3.1 Definitioner

Egenvektorer x är en egenvektor till L om det finns ett $\lambda \in k$ så att

$$Lx = \lambda x.$$

λ kallas det motsvarande egenvärdet.

Karakteristiskt polynom Om V är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där I är identitetsavbildningen.

Minimalpolynom Om A är en matris, är minimalpolynomet $q_A(x) \in k[x]$ det moniska polynomet av lägst grad så att $q_A(A) = 0$.

Diagonaliserbarhet En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operatorns matris i den basen är diagonal.

Samtidig diagonaliserbarhet Två operatorer L_1 och L_2 är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

3.2 Satser

Karakteristiska polynom och egenvärden Om *lambda* är ett egenvärde till L så är $p_L(\lambda) = 0$.

Bevis Ez

Existens av minimalpolynom Om V är ändligdimensionellt, har L ett karakteristiskt polynom.

Bevis Betrakta matrisen A för L i någon bas. Det gäller att mängden $\{A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}\}$ är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

Cayley-Hamiltons sats $p_L(L) = 0$.

Bevis Om matrisen för L är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

Korrolar q_L är en faktor i p_L.

Multipliciteter och diagonaliserbarhet Om L är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla L:s egenvärden.

Bevis

Konjugerade matriser Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum och L_1, L_2 två operatorer på detta. Då går det att diagonalisera L_1 och L_2 om de kommuterar.

Bevis

Kommutativitet och egenrum Låt L_1 och L_2 kommutera och E_1 vara egenrum till L_1. Då är $L_2(E_1) \subset E_1$.

Bevis

Nilpotens och blockdiagonalitet Om L är nilpotent finns det en bas för V så att matrisen för L blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Bevis Här kommer endast en bevisidé presenteras.
Det finns ett s så att $L^s = 0$ och $L^{s-1} \neq 0$. Vi väljer då ett delrum W_s så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$ så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$ och $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$. Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla W_i och bilderna av alla potenser av L. Dissa bildar en bas för V. Med en lämplig ordning på basen fås $\dim(W_i)$ block på formen ovan i matrisen, varje med storlek $i \times i$.

Jordans normalform Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för L är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att $\Lambda_i = \lambda_i I + N$, där N är nilpotent.

Bevis

4 Inreprodukt

4.1 Definitioner

Inreprodukt över $\mathbb{R}$ En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{R}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{R}$ som är

- bilinjär, dvs.
  - $\langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$.
  - $\langle ax|y \rangle = a \langle x|y \rangle$.
  - $\langle x|y + z \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$.
  - $\langle x|ay \rangle = a \langle x|y \rangle$.
- symmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$.

Inreprodukt över $\mathbb{C}$ En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{C}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{C}$ som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men $\langle ax|y \rangle = a^* \langle x|y \rangle$.
- konjugatsymmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$. Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att $\langle x|x \rangle$ har ingen imaginärdel.

Inreprodukt från matris Vi kan få en inreprodukt i $\mathbb{C}^n$ från en matris genom

$$\langle x|y \rangle = \sum a_{ij} x_i^* y_j = (x^*)^T Ay.$$

Om detta skall uppfylla konjugatsymmetri, ger det

$$(x^*)^T Ay = (y^*)^T Ax^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T Ay = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Om matrisen uppfyller detta, säjs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermitesk.

Norm Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Vinkel Vinkeln θ mellan två vektorer definieras som

$$\cos\theta = \frac{\langle x|x\rangle}{|x||y|}.$$

Ortogonalitet x och y är ortogonala om

$$\langle x|y\rangle = 0.$$

Ortogonalt komplement Om $W \subseteq V$ är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^{\perp} = \{x \in V : \langle x|y\rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

Projektion Låt V vara ett delrum med bas bas $B = \{e_i\}_{i=0}^{n}$. Då definieras projektionen som

$$\text{proj}_V(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle x_i|e_j\rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

Adjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är $L^\dagger$ den adjungerade operatorn till L om

$$\left\langle L^\dagger(x) \middle| y \right\rangle = \langle x|L(y)\rangle \, \forall x, y \in V.$$

Om $L : V \to W$ definieras den adjungerade operatorn som $L^\dagger : W \to V$ som uppfyller

$$\langle y|L(x)\rangle = \left\langle x \middle| L^\dagger(y) \right\rangle \forall x \in V, y \in W.$$

Självadjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är L självadjungerad om

$$\langle L(x)|y\rangle = \langle x|L(y)\rangle \, \forall x, y \in V.$$

Matrisen för en sådan operator sägs vara Hermitesk.

Cauchyföljder En Cauchyföljd är en följd som indexeras med naturliga talen och som uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett N så att

$$i, j > N \implies \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

Fullständiga rum Ett rum V är fullständigt om alla Cauchy-följder konvergerar.

Hilbertrum Ett Hilbertrum är ett inreproduktrum som är fullständigt.

ℓ^2 Vi definierar $\ell^2(\mathbb{C})$ som mängden av alla följder av tal i $\mathbb{C}$ så att

$$\sum_{i=0}^{N} |a_i|^2$$

är begränsad, med inreprodukten

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=0}^{N} a_i^* b_i.$$

L^2 Vi definierar $L^2([0,1],\mathbb{C})$ som mängden av alla komplexvärda funktioner på $[0,1]$ med inreprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ortogonala och unitära operatorer En ortogonal operator över ett reellt vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly\rangle = \langle x|y\rangle\,\forall x,y\in V$.

En unitär operator över ett komplext vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly\rangle = \langle x|y\rangle\,\forall x,y\in V$.

4.2 Satser

Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle x|y\rangle| \leq |x||y|.$$

Bevis

Triangelolikheten

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Ortogonalt komplement och vektorrum Om V är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$W = W \oplus W^{\perp}.$$

Bevis Det gäller att

$$W \cap W^{\perp} = \{0\}.$$

Bra och dualrum Om V är ett inreproduktum, definierar båd $x \to \langle x|$ och $x \to \langle x^*|$ en injektiv avbildning $V \to V^*$. Om V är ändligdimensionellt, är detta dessutom en isomorfi.

Bevis

Inreproduktrum och ortogonal bas Ett ändligdimensionellt vektorrum har en ortogonal bas.

Bevis

Gram-Schmidts metod Låt V vara ett vektorrum med ändlig dimension eller en uppräknelig bas $B = \{x_i\}_{i=0}^n$. Då bildar vektorerna

$$e_i = x_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_j|x_i\rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

en ortogonal bas för V.

Bevis

Matrisen för en adjungerad operator Låt L beskrivas av matrisen A i någon ortonormal bas. Då beskrivs $L^\dagger$ av matrisen $(A^T)^*$, även om operatorn är mellan två olika vektorrum.

Bevis Vi har

$$L(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

vilket ger

$$\langle e_i | L(e_j) \rangle = \left\langle e_i \middle| \sum_k a_{jk} e_k \right\rangle = \sum_k \langle e_i | a_{jk} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i | e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji}.$$

Om B är matrisen för $L^\dagger$, så vi nu att dens komponenter kan skrivas som $b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle$. Vi utvecklar detta och får

$$b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle = \left\langle L^\dagger(e_j) \middle| e_i \right\rangle^* = \langle e_j | L(e_i) \rangle^* = a_{ij}^*,$$

och därmed är beviset klart.

Egenvärden för självadjungerade operatorer Självadjungerade operatorer har bara reella egenvärden.

Bevis

$$\langle L(x) | x \rangle = \langle x | L(x) \rangle .$$

Detta kan utvecklas om x är en egenvektor för att ge

$$\lambda^* \langle x | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle ,$$

och beviset är klart.

Diagonalisering av självadjungerade operatorer Alla självadjungerade operatorer på ändligdimensionella inreproduktrum kan diagonaliseras.

Bevis Vi gör induktion över $\dim(V)$.

Det är trivialt för dimension 1.

Annars, om vi har en egenvektor x motsvarande egenvärdet λ, bilda $W = \text{Span}\,(x)$. Då har man $L(W) \subseteq W$. Vidare, om $y \in W^\perp$, har man

$$\langle x | y \rangle = 0 \implies \langle \lambda x | y \rangle = \langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle = 0,$$

och $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Man kan vidare bilda en bas för V med basen för $W^\perp$ och x. Matrisen för L med avseende på denna basen är

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

Per induktion finns det då en ortogonal bas för $W^\perp$ så att matrisen för L på $W^\perp$ blir diagonal.

Ortogonal bas och självadjungerade operatorer Om L är en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L.

Bevis

Självadjungerade operatorer och ortogonala egenvektorer Låt x vara en egenvektor till L med egenvärdet λoch y vara en egenvektor med egenvärde μ. Om $\lambda - \mu \neq 0$ är $\langle x | y \rangle = 0$.

Bevis

$$\langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle .$$

Vi använder att x och y är egenvektorer och får

$$\lambda^* \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle .$$

Enligt antagandet måste då $\langle x | y \rangle = 0$.

Längdbevarande operatorer För en operator L på ett reellt inreproduktrum V är följande ekvivalent:

- $\|Lx\| = \|x\| \forall x \in V$.
- $\langle x|y\rangle = \langle Lx|Ly\rangle \,\forall x, y \in V$.

Om vektorrummet är ändligdimensionellt, är påståenden även ekvivalenta med

- L avbildar ortonormala baser på ortonormala baser.

Bevis

Längdbevarande operatorer som bijektioner Längdbevarande operatorer på ändligdimensionella vektorrum är bijektiva.

Bevis Sådana operatorer är injektiva ty

$$\|Lx\| = 0 \implies x = 0.$$

De är surjektiva ty matrisen för avbildningen i någon bas måste ha linjärt oberoende kolumner för att vara injektiv. Detta implicerar att avbildningen är surjektiv.

Ortogonala grupper

- Mängden $O(V) = \{L : V \to V : L \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under sammansättning om V är ett reellt inreproduktrum med en ortogonal bas.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1, A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.

Satsen stämmer även för de komplexa motsvarigheterna.

Bevis

Egenvärden och egenvektorer till ortogonala och unitära operatorer Om L är en unitär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L och alla egenvärden till L har belopp 1.

Bevis Det finns (möjligtvis) minst ett egenvärde λ. Välj en motsvarande egenvektor x. Detta ger

$$\|x\| = \|Lx\| \implies |\lambda| = 1.$$

Låt nu $W = \mathrm{Span}\,(x)$. Vi har att $L(W^\perp) \to W^\perp$ eftersom L bevarar inreprodukten. Detta ger (?) per induktion att det finns en bas för $W^\perp$ av egenvektorer till L. Unionen av x och denna basen är därmed en bas för hela vektorrummet.

Exponentialavbidlningen och Hermiteska operatorer Låt H vara Hermitesk. Då är e^{iH} unitär.

Bevis Eftersom H är Hermitesk, finns det en ortogonal bas av egenvektorer. I denna basen är matrisen för H en diagonalmatris. Därmed är matrisen för e^{iH} en diagonalmatris med $e^{i\lambda}$ på diagonalen, där λ är något egenvärde. Alltså finns det en ortogonal bas av egenvektorer till e^{iH}, där varje egenvärde har belopp 1, och e^{iH} är unitär.

5 Linjär rekursion

5.1 Definitioner

Linjär rekursion En linjär rekursion definieras av en följd $\{x_i\}_{i\geq 0}$ av element i ett vektorrum, där

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i-j}, i \geq n$$

där $x_0, \ldots, x_{n-1}$ är givna. Detta kan alternativt skrivas på matrisform som

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{i-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} y_{i-1}.$$

Dessa matriserna kan ej diagonaliseras.

5.2 Satser

6 Singulärvärden

6.1 Definitioner

6.2 Satser

Möjlighet för singulärvärdesuppdelning Låt $L : V \to W$. Då kan man välja baser för V och W så att matrisen för L ges av

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3 Algoritmer

Singulärvärdesuppdelning Låt $L : V \to W$. Vi vill hitta baser för V och W så att matrisen för L blir på formen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta görs vid att

- välja en bas för $\ker(L)$.
- utvidga detta till en bas för V vid att lägga till vektorer i början av basen.
- välja en bas för W vid att utgå från avbildningarna av vektorerna i basen för V och lägga på vektorer.

Om V och W är inreproduktrum och du vill välja en ON-bas för båda, kommer du få en diagonalmatris i stället för identitetsmatrisen.