Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

8 oktober 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

Innehåll

1 Accelererande referensramar **1**

1.1 Kinematik 1

1.2 Dynamik 3

2 Partikelsystem **4**

3 Stela kroppar **8**

3.1 Kinematik 8

3.2 Dynamik 9

4 Variationskalkyl **16**

5 Analytisk mekanik **17**

1 Accelererande referensramar

1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram S' som rör sig relativt en inertialram S. S' rör sig med hastighet $\mathbf{v}_{O'}$ och roterar med vinkelhastighet ω kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$).

Vinkelhastighet Definitionen av ett koordinatsystems vinkelhastighet ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{z'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{x'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{x'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{y'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{z'}.$$

För att visa att vinkelhastigheter är additiva, inför tre system S_0, S_1, S_2, vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_{1,0}$ av S_1 relativt S_0 och derivatan

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A}.$$

Detta sambandet ges här utan bevis. Vid att använda derivationssambanden $1-2, 1-0, 2-0$ får man

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,1} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,0} \times \mathbf{A},$$

vilket implicerar

$$\boldsymbol{\omega}_{2,0} = \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0}.$$

Det gäller speciellt att

$$\boldsymbol{\omega}_{2,1} = -\boldsymbol{\omega}_{1,2}.$$

Vi betraktar vidare vinkelaccelerationen, och inför

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,0} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

Vid att tidsderivera additionssambandet för vinkelhastigheter får man

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{2,0} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\
&= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} \\
&= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \boldsymbol{\alpha}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1},
\end{aligned}$$

alltså är vinkelaccelerationer allmänt ej additiva. Man kan dock visa att

$$\boldsymbol{\alpha}_{2,1} = -\boldsymbol{\alpha}_{1,2}.$$

Transformation av vektorstorheter Betrakta en godtycklig vektorstorhet $\mathbf{A}$. Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_x\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_x}{\mathrm{d}t} + A'_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_y}{\mathrm{d}t} + A_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_z}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatorn

$$\mathring{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av $\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t}\right| = \omega \sin\alpha_i$, där α_i är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn ω och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på ω och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t} = \omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i$, och slutligen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{1}$$

Hastighet Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn i S, $\mathbf{r}'$ är ortsvektorn i S' och $\mathbf{r}_{O'}$ är ortsvektorn till origo i S' relativt S. Vi tidsderiverar och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi känner igen hastigheten i S och hastigheten till ramen S'. Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i S', vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i S' som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt S', vilket ger den hastighet i S lika med $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{v}',$$

där $\mathbf{v}_{\mathrm{sp}}$ är systempunktens hastighet.

Acceleration För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i S' för att få

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}'.\end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i S, accelerationen till ramen S' och hastigheten mätt i S', och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt S', ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger $\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration S'. Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen $\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'.$$

1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i S, får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'\right).$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}}$ och Corioliskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = \mathbf{F}_{\mathrm{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tl}} = -m\mathbf{a}_{O'}$.
- en transversell kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tv}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{tv}} = -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}'$.
- en centrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathrm{c}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.

2 Partikelsystem

Ett partikelsystem är en samling av N partiklar med (konstanta) massor m_i och total massa m som samverkar. Varje partikel påverkas av yttre krafter med summa $\mathbf{F}_i$ samt inre krafter $\mathbf{f}_{ij}$ med alla andra partikler i systemet.

Vi antar att alla inre krafter verkar parallellt med linjen mellan partiklerna. Newtons andra lag ger $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, vilket även implicerar $\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$.

Vi definierar kraftsummorna

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{f} &= \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}. \end{aligned}$$

Vi får

$$\mathbf{f} = \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} = -\sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f},$$

och därmed $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Masscentrum Vi kommer ihåg att masscentrum för ett partikelsystem definieras som

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

Rörelsemängd Systemets totala rörelsemängd ges av

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right) = \frac{\mathrm{d} m \mathbf{r}_G}{\mathrm{d}t} = m \mathbf{v}_G.$$

Kraftekvationen för ett partikelsystem Kraftekvationen för en enda partikel ger

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij}.$$

Om vi adderar alla dessa ekvationer, får man

$$\begin{aligned} \sum m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} &= \sum \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}, \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right) &= \mathbf{F} + \mathbf{f}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m \mathbf{v}_G\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F}, \end{aligned}$$

vilket är kraftekvationen som vi känner den. Med konstant massa kan detta även skrivas som

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{F}.$$

Energilagen för ett partikelsystem Arbetet som görs på en partikel i ett parikelsystem under en infinitesimal rörelse ges av

$$\mathrm{d}U_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{e})}\,.$$

Det totala arbetet som görs på partikelsystemet ges av

$$\mathrm{d}U = \sum \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{e})} = \mathrm{d}U^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U^{(\mathrm{e})}\,,$$

där vi har infört arbetet som görs av inre och yttre krafter. Vi kan från detta integrera för att få

$$U_{0-1} = T_1 - T_0,$$

där T nu är hela systemets kinetiska energi och U är det totala arbetet som görs av alla krafter.

Tolkning av kinetisk energi Vi undersöker vidare partikelsystemets kinetiska energi. För att göra detta, introducerar vi en masscentrumsram med origo i masscentrum och axlar som inte ändrar riktning. Hastighetssambandet ger

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i,$$

där apostrofen indikerar storheter i masscentrumsramen. Eftersom systemet inte roterar, förenklas detta till

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i.$$

Den kinetiska energin ges då av

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i v_G^2 + \sum m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i v_G^2 + \mathbf{v}_G \cdot \sum m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2. \end{aligned}$$

Det gäller att

$$\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

eftersom systemets masscentrum är i origo. Derivation med avseende på tiden ger

$$\sum m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0},$$

vilket ger

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'.$$

Bidragen till den kinetiska energin är alltså masscentrumsrörelse och partiklernas rörelse relativt masscentrum.

Momentekvationen Systemets totala rörelsemängdsmoment med avseende på punkten O ges av

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

För att härleda kraftekvationen, utgår vi från kraftekvationen

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij}.$$

Multiplicera med ortsvektorn från vänster och summera över alla partikler för att få

$$\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}.$$

Vi har att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

eftersom vektorerna i första termen är lika varandra. Vi har vidare att

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{f}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

då den inre kraften är parallell med linjen mellan partiklerna. Den återstående termen är det totala momentet till de yttre krafterna, och vi får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_O.$$

Rörelsemängdsmoment med avseende på olika punkter Betrakta rörelsemängdsmomentet kring två punkter A, B. Det gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_A &= \sum \mathbf{r}_{A,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{B,i}) \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{r}_{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{B,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{r}_{AB} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_B.
\end{aligned}$$

Tolkning av rörelsemängdsmomentet Betrakta rörelsemängdsmomentet med avseende på en fix punkt O och masscentrum G i ett masscentrumsystem. Sambandsformelen ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_G \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G.$$

Rörelsemängdsmomentet med avseende på masscentrum ges av

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

För att skriva denna enbart med storheter i masscentrumsystemet, tidsderiverar man relationen

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_i'$$

och får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i'}{\mathrm{d}t},\\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i'}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

För att derivera den sista termen, använder vi ekvation 1 i fallet $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ för att få

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i'.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= \sum \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'\\ &= \left(\sum m_i \mathbf{r}_i'\right) \times \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'\\ &= \sum \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'\\ &= \mathbf{H}_G'\end{aligned}$$

enligt definitionen av masscentrum och dens ortsvektor i ett masscentrumssystem. Vi har nu explicit skrivit att rörelsemängdsmomentet i ett masscentrumssystem endast beror av storheter som är relativa det systemet. Detta ger slutligen relationen

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G' + \mathbf{r}_G \times m\mathbf{v}_G.$$

Den första termen är rörelsemängdsmomentet relativt masscentrum, och den andra termen är banrörelsemängdsmomentet som uppstår från masscentrums rörelse.

Rörelsemängdsmomentlagen för en rörlig punkt Jämför rörelsemängdsmomenten relativt en fix punkt O och relativt en annan punkt A. Vårt samband ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{OA} \times m\mathbf{v}_G.$$

Tidsderivation ger

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{OA}}{\mathrm{d}t} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_G}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m\mathbf{a}_G\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G - \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Vi skriver om och använder rörelsemängdsmomentlagen för att få

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.$$

Högersiden ger förflytningen av momentet till en ny punkt, som vi såg i grundkursen (ja, jag blev också chockad över att den fanns kvar), och vi får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_A.$$

3 Stela kroppar

En stel kropp är en massbelagd domän så att avståndet mellan två godtyckliga punkter är konstant.

3.1 Kinematik

En stel kropp kan ha translationshastighet eller rotationshastighet. Translationshastighet karakteriseras av att $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$ för alla A, B. Rotationshastighet karakteriseras av att det finns ett C som är stelt förenad med kroppen så att $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ momentant.

För att beskriva rörelsen till en stel kropp, bilda en referensram med axlerna fixa relativt kroppen. betrakta två punkter A, B i kroppen, där origo i den nya referensramen är A. Då gäller det att

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{v}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Eftersom axlerna är fixa relativt kroppen, ger andra termen inget bidrag, vilket ger

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

och bekräftar vårt påstående om att all rörelse för en stel kropp är antingen translation eller rotation.

Betrakta vidare kroppens acceleration, som ges av

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{cor}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Fixa axler relativt kroppen ger att de två sista termerna ej bidrar och

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}),$$

där den första termen är ett translatoriskt bidrag och de två andra är rotationsbidrag.

Plan rörelse Plan rörelse för en stel kropp karakteriseras av att hastigheten i alla punkter är parallellt med ett och samma fixa plan. Om rörelsen är i xy-planet, kommer $\boldsymbol{\omega}$ peka längs med z-axeln.

Om en stel kropp roterar under plan rörelse, finns det alltid en punkt C med $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, som kallas momentancentrum. Denna punkt uppfyller $\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$. För att hitta den, multiplicera med $\boldsymbol{\omega}$ på båda sidor för att få

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AC})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AC}.\end{aligned}$$

Eftersom rörelsen är plan, behöver vi bara betrakta ett snitt av kroppen i rörelsesplanet, vilket gör att den första skalärprodukten blir 0. Detta ger då positionen till momentancentrumet enligt

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$

Vi studerar vidare accelerationssambandet för plan rörelse, som ger

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}).$$

Vi skriver ut termerna och får

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

Eftersom rörelsen är plan, blir skalärprodukten 0, och man får slutligen

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

3.2 Dynamik

Energilagen Definiera effekten

$$P_{ij} = \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j).$$

Vi använder att $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_i)$ och får

$$P_{ij} = -\mathbf{f}_{ij} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_i) = 0$$

eftersom $\mathbf{f}_{ij}$ verkar längs linjen mellan partikel i och j. Därmed gör de indre krafterna inget arbete, och

$$U_{0-1}^{(\mathrm{e})} = T_1 - T_0.$$

2D-rotation kring fix axel Låt punkten O vara på rotationsaxeln och välg cylindriska koordinater så att kroppen roterar kring z-axeln. För någon partikel i den stela kroppen har man

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Den kinetiska energin ges nu av

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_k \rho_i^2$$

och rörelsemängdsmomentet kring O ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \sum m_i \rho_i^2 \omega \hat{\mathbf{e}}_z - \sum m_i \rho_i z_i \omega \hat{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet kring z-axeln

$$I_z = \sum m_k \rho_i^2,$$

med motsvarande definitioner kring andra axlar. Då gäller att

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_z \omega^2, \\ H_z &= I_z \omega. \end{aligned}$$

Kraftekvationens komponenter ger

$$\begin{aligned} F_r &= -ml \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right)^2, \\ F_\theta &= ml \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}$$

Momentekvationen ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_z \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) = M_z.$$

Arbetet som görs på kroppen ges av

$$\mathrm{d}U_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = F_{i,\theta} \rho_i \omega \, \mathrm{d}t = M_{i,z} \, \mathrm{d}\theta \, .$$

Mer om tröghetsmoment Tröghetsmomentet dyker upp i många sammanhang som har att göra med stela kroppars dynamik, så vi vill lära oss känna denna storhet bättre.

Låt oss först betrakta en plan kropp som roterar i planet. Då kan det visas att

$$I_z = I_x + I_y.$$

Parallellförflyttningssatsen Vi vill nu försöka att relatera tröghetsmomentet med avseende på en axel genom masscentrum till tröghetsmomentet med avseende på en godtycklig axel som är parallell med den första.

Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer S, S', där det primmade koordinatsystemets z'-axel går genom kroppens masscentrum, z-axeln är parallell med z'-axeln och avståndet mellan dessa är d. Vi inför tröghetsmomenten

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2), \\ I_{z'} &= \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2). \end{aligned}$$

Vi skriver om första enligt

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i(x_G^2 + 2x_i'x_G + x_i'^2 + y_G^2 + 2y_i'y_G + y_i'^2) \\ &= \sum m_i(x_G^2 + y_G^2) + \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G \sum m_i x_i' + 2y_G \sum m_i y_i' \\ &= md^2 + I_{z'}, \end{aligned}$$

där de två sista summorna försvinner eftersom S' är ett masscentrumssystem. För att förtydiga, skriver vi nu

$$I_A = I_G + md^2,$$

där d är avståndet mellan axlarna A och G och G går genom masscentrum.

Plan rörelse Vi betraktar en kropp som undergår plan rörelse i ett koordinatsystem med masscentrum i origo som ej roterar.

Kinematik Vid att införa cylindriska koordinater kring origo fås ortsvektorn till någon partikel i kroppen som $\mathbf{r}_i' = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\rho$. Partikelns hastighet ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \\ &= \mathbf{v}_G + \omega \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned}$$

Kinetisk energi Den relativa kinetiska energin ges då av

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I_G \omega^2 \end{aligned}$$

och den totala kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2,$$

som innehåller en banterm och en spinnterm.

Rörelsemängdsmoment Det relativa rörelsemängdsmomentet ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'_G &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \sum \rho_i^2 m_i \hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z .\end{aligned}$$

Det totala rörelsemängdsmomentet är då

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{v}_G + I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z$$

som också består av en banterm och en spinnterm.

Dynamiska lagar För en stel kropp i plan rörelse gäller att

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}, I_G \alpha = M_z .$$

Arbete Effekten som utövs under en kropps rörelse ges av

$$\begin{aligned}P = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= m\mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + I\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} .\end{aligned}$$

Arbetet som görs ges då av

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U &= P \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \,\mathrm{d}t + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \,\mathrm{d}t + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_G + M_z \,\mathrm{d}\theta \,,\end{aligned}$$

där vi har användt att $\mathbf{M}_G$ pekar i z-riktning.

3D-rotation kring fix axel Vi betraktar en stel kropps rotation kring en fix punkt O parallellt med en axel Q. Vi inför vinklarna α, β, γ mellan $\boldsymbol{\omega}$ och axlarna, enhetsvektorn

$$\hat{\mathbf{e}}_Q = \cos\alpha \hat{\mathbf{e}}_x + \cos\beta \hat{\mathbf{e}}_y + \cos\gamma \hat{\mathbf{e}}_z ,$$

vinkeln θ_k mellan $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}_k$ och avståndet ρ_k från rotationsaxeln till partikeln. Vi beräknar först

$$\begin{aligned}\rho_k^2 =& r_k^2 \sin^2\theta \\ =& |\mathbf{r_k} \times \hat{\mathbf{e}}_Q|^2 \\ =& |(y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)\hat{\mathbf{e}}_x + (z_k \cos\alpha - x_k \cos\gamma)\hat{\mathbf{e}}_y + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)\hat{\mathbf{e}}_z|^2 \\ =& (y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)^2 + (z_k \cos\alpha - x_k \cos\gamma)^2 + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)^2 \\ =& (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma \\ & - 2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta .\end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet

$$
\begin{aligned}
I_Q &= \sum m_i \rho_i^2 \\
&= \sum m_i (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + \sum m_i (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + \sum m_i (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma \\
&\quad - 2\sum m_i y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2\sum m_i x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2\sum m_i x_k y_k \cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

och definierar tröghetstensorn I med komponenter

$$I_{xx} = \sum m_i y_i^2 + z_i^2, I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$$

och motsvarande för andra subskript. Detta ger

$$
\begin{aligned}
I_Q =& I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \\
&+ 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \\
=& \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I\hat{\mathbf{e}}_Q.
\end{aligned}
$$

Vi kan då skriva kinetiska energin som

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} I_Q \omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I\hat{\mathbf{e}}_Q \omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\omega\hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I\omega\hat{\mathbf{e}}_Q \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

och rörelsemängdsmomentet som

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\
&= \sum m_i ((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i).
\end{aligned}
$$

Vi betraktar nu x-komponenten, som ges av

$$
\begin{aligned}
H_{O,x} &= \sum m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) \\
&= \sum m_i ((y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) \\
&= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z.
\end{aligned}
$$

Från detta fås

$$\mathbf{H}_O = I\boldsymbol{\omega}$$

och vidare

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}.$$

Mer om tröghetstensorn Tröghetstensorn är symmetrisk, och kan därmed diagonaliseras. Axlarna så att tröghetsmatrisen är diagonal relativt dessa kallas huvudaxlar.

Allmäna parallellförflyttningssatsen Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer S, S', där den primmade ramen har origo i masscentrum, enhetsvektorerna är parallella och avståndet mellan dessa är d. Vi har

$$\begin{aligned}I_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i \\ &= -\sum m_i(x_G y_G + x_i' y_G + x_G y_i' + x_i' y_i') \\ &= -m x_G y_G - y_G \sum m_i x_i - x_G \sum m_i y_i - \sum m_i x_i' y_i' \\ &= I_{x'y'} - m x_G y_G.\end{aligned}$$

Eulers dynamiska ekvationer Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt O. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en kroppsfix ram $Oxyz$. Det gäller att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O.$$

Eftersom kroppen är stel, har vi vidare

$$\mathring{\mathbf{H}}_O = I_O \mathring{\boldsymbol{\omega}}.$$

Rörelsemängdsmomentlagen ger då Eulers dynamiska ekvation

$$I_O \mathring{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_O}{\mathrm{d}t}.$$

Med den kroppsfixa ramen orienterat längs med kroppens huvudaxler blir detta på komponentform

$$\begin{aligned}I_{xx}\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z &= M_{O,x}, \\ I_{yy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x &= M_{O,y}, \\ I_{zz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y &= M_{O,z}.\end{aligned}$$

Eulers kinematiska ekvation Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt O. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en kroppsfix ram $Oxyz$. Låt linjen där xy-planet skär XY-planet vara parallell med $\mathbf{n}$, som igen är parallell med $\hat{\mathbf{e}}_Z \times \hat{\mathbf{e}}_z$. Introducera vinkeln θ mellan Z- och z-axeln, vinkeln ψ mellan X-axeln och $\mathbf{n}$ och vinkeln ϕ mellan $\mathbf{n}$ och x-axeln. Dessa kallas för Eulervinklarna. Vinkelhastigheten är en summa av vinkelhastigheter motsvarande ändring av varje vinkel, och ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_n + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Projektion på det kroppsfixa systemet ger

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_Z &= \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z + \sin\theta(\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y),\\ \hat{\mathbf{e}}_n &= \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y.\end{aligned}$$

Från detta fås Eulers kinematiska ekvationer

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\sin\phi + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\phi,\\ \omega_y &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\cos\phi - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\phi,\\ \omega_z &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

3D-rotation av en axisymmetrisk kropp Betrakta en axisymmetrisk stel kropp som roterar kring en fix punkt O. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en ram $Oxyz$, där z-axeln pekar längs med kroppens symmetriaxel och kroppen kan rotera fritt kring detta. Denna sortens ram kallas en resalram. Nu kan x-axeln väljas parallellt med $\mathbf{n}$. Kroppens rotation kan nu delas i resalramens vinkelhastighet

$$\boldsymbol{\omega}_S = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_n$$

och kroppens vinkelhastighet relativt resalramen

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Nu får vi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O$$

och

$$\mathring{\mathbf{H}}_O = I_O\mathring{\boldsymbol{\omega}}_0,$$

vilket slutligen ger

$$I_O\mathring{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O = \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_O}{\mathrm{d}t}.$$

4 Variationskalkyl

Vi betraktar en funktional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x$$

och söker dens extremum.

För att göra detta, antag att y är den sökta funktionen och lägg till en störningsterm $\varepsilon\eta(x)$ som uppfyller $\varepsilon\eta(x_1) = \varepsilon\eta(x_2) = 0$. Undersök nu

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x\,.$$

Vi vet att $I(0)$ är en extremalpunkt, vilket ger $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0$. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u'}\eta'\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

med $u = y + \varepsilon\eta$. Detta ger vidare

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y'}(x_2)\eta(x_2) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Randvillkoren ger att de två termerna i mitten båda är 0, och detta ger

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x\,.$$

Eftersom η ej specifieras, ger detta Euler-Lagrange-ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Vi betraktar nu

$$\begin{aligned}\Delta I &= I(\varepsilon) - I(0) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}) - f(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Taylorutveckling av integranden ger

$$\begin{aligned}\Delta I &\approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon}\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon}\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right)\varepsilon\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Vi definierar detta som δI, och får då $\delta I = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)\varepsilon$.

5 Analytisk mekanik

Betrakta ett system av n partiklar. Dessa beskrivs av $3n$ koordinater i 3 dimensioner. Systemet kan även begränsas av

- holonoma tvång på formen $f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0$.
- icke-holonoma tvång, som ej kan uttryckas som holonoma tvång och endast ger samband mellan differentialerna.

Vi kommer endast betrakta konservativa system.

Frihetsgrader Systemets antal frihetsgrader är det minsta antalet parametrar som entydigt bestämmer systemets läge.

Om systemet begränsas av k holonoma tvång, har systemet $s = 3n - k$ frihetsgrader.

Generaliserade koordinater Systemets generaliserade koordinater är ett val av parametrar som beskriver systemets läge. Dessa betecknas som q_i.

Med dessa inför vi även tidsderivatorna $\dot{q}_i$.

Virtuell förflyttning Vi introducerar nu den virtuella förflyttningen $\delta\mathbf{r}$. Denna är förenlig med villkoren (som ecentuellt är frysta i tid) och i övrigt godtycklig.

Variation av generaliserad koordinat Vi introducerar variationen av en generaliserad koordinat som

$$\delta q_i = \varepsilon\eta_i(t),$$

där η är 0 i ändpunkterna.

Konfigurationsrum Konfigurationsrummet är ett rum vars koordinater är de generaliserade koordinaterna. Rörelse i detta rummet representerar alltså ändring av systemets tillstånd.

Hastighet Vi kan nu skriva hastigheten för en given partikel som

$$\mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i.$$

Lagrangefunktionen Vi inför nu Lagrangefunktionen

$$L = T - V.$$

Verkningsfunktionalen Vi inför även verkningsfunktionalen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L.$$

Hamiltons variationsprincip Hamiltons variationsprincip kan behandlas som en naturlag, och representerar ett alternativt sätt till Newtons lagar att beräkna partikelsystemets beteende på. Variationsprincipen säjer att S har ett extremum längs den verkliga banan i konfigurationsrummet. Med variationskalkylen kan detta skrivas som

$$\delta S = 0.$$

Lagranges ekvationer Vi tillämpar nu vår kunnskap om variationskalkyl på verkningsintegralen och får

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta \dot{q}_i = 0.$$

Den sista familjen av termer ges av

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

då variationen är 0 i ändpunkterna. Då kan variationsprincipen skrivas som

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{k} \Delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) = 0.$$

Om detta skall gälla för alla val av tidsintervall, ger detta Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$