Sammanfattning av SF1672 Linjär algebra

Yashar Honarmandi

7 november 2017

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av viktiga definitioner, teoremer och algoritmer i kursen SF1672 Linjär algebra.

Innehåll

1 Algoritmer

Dessa algoritmer kan vara smarta att kunna för att lösa problemer i linjär algebra.

Gauss-Jordan-elimination Ett ekvationssystem

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_n = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_n = b_n
\end{aligned}$$

kan lösas vid att konstruera en totalmatris

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array}\right]$$

och göra Gauss-Jordan-elimination på denna.

Syftet med Gauss-Jordan-elimination är att varje kolumn ska ha ett och endast ett pivotelement, även kallad en ledande etta. En ledande etta är en etta som inte har någon andra tal i samma kolumn eller till vänster i samma rad. För att få sådana, gör man operationer på radarna i matrisen enligt följande regler:

- Radar kan multipliceras med konstanter. Försöka, dock, att undveka 0, eftersom det fjärnar information, vilket är otrevligt.
- Radar kan adderas och subtraheras med andra rader, var båda potensielt multiplicerad med en lämplig konstant.
- Radar kan byta plats.

När man är klar, ska matrisen (förhoppingsvis) se ut så här:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{array}\right]$$

var alla a_i är reella tal.

2 Vektorer

2.1 Definitioner

Linjärt hölje Det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ är

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Linjärt oberoende vektorer Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

endast har lösningen $t_i = 0$ för $i = 1, 2, \dots, n$.

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^m$ Vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$ kallas enhetsvektorer. Man har att $\text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{}\} = \mathbb{R}^m$.

2.2 Satser

3 Matriser

3.1 Definitioner

Matris-vektor-produkt Betrakta $m \times n$-matrisen

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_n \end{array}\right]$$

och vektoren i $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrisproduktet $A\mathbf{x}$ definieras som vektoren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$.

Homogena ekvationssystem Ett homogent ekvationssystem kan skrivas på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Motsatsen är då inhomogena ekvationssystem.

3.2 Satser

Matriskolumner och linjära höljen Följande påståenden är ekvivalenta:

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje

b) Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjär kombination av kolumnerna i A.

c) $\text{Span}\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n} = \mathbb{R}^m$.

d) Den reducerade matrisen till A har m ledande ettor.

Bevis Ekvivalensen till a, b och c är vel trivial eller någonting.

Antag att c gäller och att A ej har m ledande ettor. Då måste man vid Gauss-Jordan-elimination av A få en rad med bara nollor. Antag att detta är sista raden i matrisen. Betrakta vektorn

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom Gauss-Jordan-elimination inte ändrar det linjära höljet av kolummnerna till en matris, borde man kunne hitta en kombination av elementerna i den sista raden i A så att man får 1, eftersom $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$. Då alla elementerna i denna raden är nållor, är detta omöjligt.

Lösningen till inhomogena ekvationssystem Om det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har lösningen $\mathbf{x}_\mathrm{h}$, har det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{x}_\mathrm{i}$, var $\mathbf{x}_\mathrm{i}$ är någon vektor som uppfyllar ekvationssystemet.

Bevis Ganska enkelt.

Linjärt beroende av kolumner i en matris Kolumnerna i en matris är linjärt oberoende omm (om och endast om) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen. Specielt gäller det att om antal rader är mindre än antal kolumner är kolumnvektorerna linjärt beroende.

Bevis Någonting med radreduktion.

4 Linjära avbildningar

4.1 Definitioner

Linjära avbildningar En avbildning $T(\mathbf{x})$ är linjär om

- $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ och
- $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$ för något c.

Bilden till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x})$ definierar man bildet till T som

$$Im(T) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = T(\mathbf{x})\}.$$

Nollrummet till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x})$ definierar man nollrummet till T som

$$\mathrm{Null}(T) = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

4.2 Satser

Avildningar och enhetsvektorer För en avbildning $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har man att

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{e}_i)$$

var x_i är komponenterna av $\mathbf{x}$.

Bevis Borde gå.

Avbildningar och matriser För en avbildning $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan man definiera matrisen

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)]$$

var $\mathbf{e}_i$ är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$. Då kan avbildningen skrivas som

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Bevis Inte svårt alls.