

# Sammanfattning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

13 december 2017

## **Sammanfattning**

Denna sammanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Mängder</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Talföljder</b>	<b>1</b>
2.1	Definitioner . . . . .	1
2.2	Satser . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Funktioner</b>	<b>2</b>
3.1	Definitioner . . . . .	2
3.2	Satser . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Gränsvärden</b>	<b>6</b>
4.1	Definitioner . . . . .	6
4.2	Satser . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Derivata</b>	<b>7</b>
5.1	Definitioner . . . . .	7
5.2	Satser . . . . .	7

# 1 Mängder

## 1.1 Definitioner

**Delmängder** Låt  $A, B$  vara mängder.  $A$  är en delmängd av  $B$  om det för varje  $x \in A$  gäller att  $x \in B$ . Notation:  $A \subset B$ .

**Union och snitt** Låt  $A, B$  vara mängder. Unionen  $A \cup B$  består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet  $A \cap B$  består av de element som är i båda.

**Övre och undra begränsningar** Ett tal  $m$  är en övre begränsning av en mängd  $A$  om  $x \leq m$  för varje  $x \in A$ , och en undra begränsning om  $x \geq m$  för varje  $x \in A$ .

**Supremum och infimum** Ett tal  $m$  är supremum till en mängd  $A$  om  $m$  är den minsta övre begränsningen till  $A$ .  $m$  är infimum till  $A$  om  $m$  är den största undra begränsningen till  $A$ . Notation:  $\sup A, \inf A$ .

## 1.2 Satser

**Supremumsegenskapen** Varje uppåt begränsade delmängd av  $\mathbb{R}$  har en minsta övre begränsning.

# 2 Talföljder

## 2.1 Definitioner

**Definitionen av en talföljd** En talföljd är en följd av tal  $a_1, a_2, \dots$  och betecknas  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Växande och avtagande talföljder** En talföljd är växande om  $a_{n+1} \geq a_n$  för varje  $n \geq 1$ . Avtagande talföljder definieras analogt.

**Uppåt och nedåt begränsade talföljder** En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett  $M$  så att  $a_n \leq M$  för alla  $n \geq 1$ .

**Begränsade talföljder** En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

**Konvergens av talföljder** En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde  $A$  om det för alla  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a_n - A| < \varepsilon$  för varje  $n > N$ . Detta beteendet betecknas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

**Divergenta talföljder** En divergent talföljd är inte konvergent.

**Binomialsatsen** För  $n \in \mathbb{Z}$  har man

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Binomialkoefficienter**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**$e$ , Eulers tal**

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 2.2 Satser

**Gränsvärden för kombinationer av talföljder** Låt  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$  vara talföljder med gränsvärden  $A$  och  $B$ . Då följer att

- a)  $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$  är konvergent med gränsvärdet  $A + B$ .
- b)  $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$  är konvergent med gränsvärdet  $AB$ .
- c) om  $B \neq 0$  är  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^\infty$  konvergent med gränsvärdet  $\frac{A}{B}$ .
- d) om  $a_n \leq b_n$  för varje  $n$  så gäller att  $A \leq B$ .

**Bevis** Aa.

**Växande och uppåt begränsade talföljder** Om  $(a_n)_{n=1}^\infty$  är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

**Bevis** Oo.

**Gränsvärde för potenser**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

**Bevis** Meh.

**Standardgränsvärden** Låt  $a > 1$  och  $b > 0$ . Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$$

**Bevis** Nä.

**Endeligt värde av  $e$**  Talföljden  $(a_n)_{n=1}^\infty$  med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

**Bevis** Säkert någon gång.

**Bolzano-Weierstrass' sats** Låt  $(a_n)_{n=1}^\infty$  vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd. En delföljd av en talföljd är en del av talen som fortfarande är oändligt stor.

## 3 Funktioner

### 3.1 Definitioner

**Definition av en funktion** Låt  $X, Y$  vara mängder. En funktion  $f : X \rightarrow Y$  är ett sätt att till varje element  $x \in X$  tilldela ett välbestämt element  $y \in Y$ . Vi säger att  $x$  avbildas på  $y$  och att  $y$  är bilden av  $x$ .  $x$  kallas argumentet till  $f$ .  $X$  kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även  $D_f$ .  $Y$  kallas funktionen målmängd.

**Värdemängd** Värdemängden till  $f : X \rightarrow Y$  definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden  $f$  antar.

**Injektivitet**  $f$  är injektiv om det för varje  $x_1, x_2 \in X$  gäller att om  $f(x_1) = f(x_2)$  så är  $x_1 = x_2$ .

**Surjektivitet**  $f$  är surjektiv om  $V_f = Y$ .

**Bijektivitet** Om  $f$  är injektiv och surjektiv, är  $f$  bijektiv.

**Inversa funktioner** Låt  $f : X \rightarrow Y$  vara en bijektiv funktion. Inversen till  $f$  är avbildningen  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  som ges av  $f^{-1}(y) = x$ , där  $y = f(x)$ . Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

**Växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) \leq f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

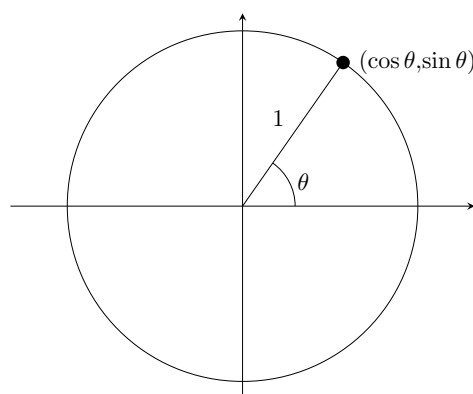
**Strängt växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är strängt växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) < f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

**Monotona funktioner** Om en funktion är antingen strängt växande respektive strängt avtagande eller växande respektive avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektive monoton.

**Uppåt och nedåt begränsade funktioner** En funktion  $f$  är uppåt begränsad om  $V_f$  är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om

funktioner saknar övre eller nedre begränsning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

**Trigonometriska funktioner** Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.



Figur 1: Enhetssirkeln.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel  $\theta$  med  $x$ -axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av  $x$ -axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras  $\sin$  och  $\cos$  utifrån  $x$ - och  $y$ -koordinaterna till punkten för en given  $\theta$ , var  $\theta$  mäts i radianer. Vi definierar även  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

Från definitionerna ser vi att  $\sin x$  och  $\cos x$  är definierade för alla  $x \in \mathbb{R}$ , medan  $\tan x$  är definierad för alla  $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Radianer** Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 bevägar sig från startpunkten och till nå

**Trigonometriska funktioners egenskaper** Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dessa. Några essentiella är listad under:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos \theta \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

**Inversa trigonometriska funktioner** Låt  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \sin x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .

Låt  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \cos x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arccos x$ .

Låt  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  sådan att  $f(x) = \tan x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arctan x$ .

**Exponentialfunktionen** I häftet definieras inte exponentialfunktionen  $a^x, a > 1$ , utan den antas vara en strängt växande funktion med

värdeomängd  $(0, \infty)$  som uppfyller

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$

**Logaritmfunktionen** Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  sådan att  $f(x) = a^x$  för något  $a > 1$ . Inversen till denna funktionen betecknas som  $f^{-1}(x) = \log_a x$ .

**Absolutbelopp** Absolutbeloppet definieras som  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Detta implikerar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Kontinuitet** Låt  $f$  vara en reellvärd funktion med  $D_f \subset \mathbb{R}$ , sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter från  $D_f$  och  $a \in D_f$ .  $f$  är kontinuerlig i  $a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

## 3.2 Satser

**Trigonometriska funktioner med vinkelsummor**

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

**Cosinussatsen** Låt  $a, b, c$  vara sidorna i en triangel och  $\theta$  vinkeln där sidlängderna  $a$  och  $b$  möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

**Logaritmfunktionens egenskaper** Låt  $a > 1$ . Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \quad (1)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (2)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad (3)$$

**Bevis** Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen -  $a^{\log_a x} = x$  - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att  $a^{\log_a 1} = 1$  och att  $a^0 = 1$ . Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att  $a^{\log_a xy} = xy$  och att  $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$ .

Ekvation 3 fås från att  $a^{\log_a x^y} = x^y$  och att  $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ .

**Absolutbeloppens egenskaper**

$$|xy| = |x||y| \quad (4)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

**Bevis** Kommer kanske någon gång.

**Kontinuitet av samansatta funktioner** Låt  $f$  vara kontinuerlig i  $b$  och låt  $g(x) \rightarrow b$  när  $x \rightarrow a$ . Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

givet att vänsterledet är definierat.

**Bevis** Meh.

**Kontinuitet och begränsning**

Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då är  $f$  begränsad.

**Bevis** Kanske man borde starta på dessa.

**Inversfunktioners kontinuerlighet**

Låt  $f : A \rightarrow B$  vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen  $f^{-1} : B \rightarrow A$  är kontinuerlig och strängt växande.

**Bevis** Oo.

**Elementära funktioners kontinuerlighet**

Elementära funktioner är kontinuerliga.

**Bevis** Många av dom.

**Kontinuerlighet av summa och produkt**

Summan och produkt av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

**Bevis** Inses lätt.

**Satsen om mellanliggande värde**

Låt  $f$  vara kontinuerlig i  $[a, b]$ . Då antar  $f$  alla värden mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ .

**Bevis** Inte så långt.

**Största och minsta värden**

Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då finns  $x_1, x_2 \in [a, b]$  så att  $\sup V_f = f(x_1)$  och  $\inf V_f = f(x_2)$ .

**Bevis** yez.

### Standardgränsvärden

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1\end{aligned}$$

**Bevis** Too much.

## 4 Gränsvärden

### 4.1 Definitioner

#### Gränsvärde vid oändligheten

Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$ .  $f$  konvergerar mot gränsvärdet  $A$  när  $x \rightarrow \infty$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

eller  $f(x) \rightarrow A$  när  $x \rightarrow \infty$ .

**Divergens** Om det för en funktion  $f$  inte finns ett sådant  $A$ , sägs  $f$  vara divergent då  $x \rightarrow \infty$ .

#### Det oegentliga gränsvärdet

Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$ .  $f$  har det oegentliga gränsvärdet  $\infty$  då  $x \rightarrow \infty$  om det för varje  $M$  finns ett  $N$  sådant att  $f(x) > M$  för varje  $x > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

**Lokalt gränsvärde** Låt  $f$  vara en reellvärd funktion med  $D_f \subset \mathbb{R}$  sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ .  $f$  konvergerar mot  $A$  när  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyllar  $0 < |x - a| < \delta$ . Detta skrivs  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

#### Vänster- och högergränsvärden

Vid att endast studera  $x > a$  eller  $x < a$  kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion  $f$ . Dessa skrivs  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  eller  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ . För en funktion  $f$  definierad i en punkterad omgivning till  $a$  existerar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

#### Det oegentliga lokala gränsvärdet

Låt  $f$  vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ .  $f$  har det oegentliga gränsvärdet  $\infty$  då  $x \rightarrow a$  om det för varje  $K$  finns ett  $\delta$  sådant att  $f(x) > K$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyller  $0 < |x - a| < \delta$ .

### 4.2 Satser

#### Gränsvärden för kombinationer av funktioner

Låt  $f, g$  vara kontinuerliga funktioner sådana att  $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$  när  $x \rightarrow \infty$ . Då gäller att

a)  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$  när  $x \rightarrow \infty$ .

b)  $f(x)g(x) \rightarrow AB$  när  $x \rightarrow \infty$ .



- c) om  $B \neq 0$  så följer att  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$  när  $x \rightarrow \infty$ .
- d) om  $f(x) \leq g(x)$  för alla  $x \in (a, \infty)$  så gäller att  $A \leq B$ .

**Bevis** Mjo.

**Gränsvärden och supremum** Låt  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  för något  $a \in \mathbb{R}$  vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

**Bevis** Nä.

**Standardgränsvärden** Låt  $a > 1, b > 0$ . Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

**Bevis** Orkar inte.

## 5 Derivata

### 5.1 Definitioner

**Derivatans definition** Låt  $f$  vara en funktion definierad i en omgivning kring  $x_0$ .  $f$  är deriverbar i  $x_0$  om

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. Värdet kallas derivatan i  $x_0$ .

**Deriverbara funktioner** Om en funktion  $f$  är deriverbar i alla punkter i definitionsmängden, är funktionen deriverbar. Funktionen  $f' = \frac{df}{dx}$  med  $D_{f'} = D_f$  kallas derivatan.

**Minima och maxima** En funktion  $f$  har ett lokalt maximum i  $x_0$  om det finns en omgivning  $I$  till  $x_0$  så att  $f(x) \leq f(x_0)$  för alla  $x \in I \cap D_f$ . Det analoga gäller för ett lokalt minimum. Om  $f$  har antingen ett lokalt maximum eller minimum i  $x_0$  har  $f$  ett lokalt extrempunkt i  $f$ .

**Stationära punkt** En funktion  $f$  har ett stationärt punkt  $x_0$  om  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = 0$ .

**Globala maxima och minima** En funktion  $f$  har ett globalt maximum i  $x_0$  om  $f(x) \leq f(x_0)$  för varje  $x \in D_f$ .

### 5.2 Satser

**Derivata och kontinuitet** Låt  $f$  vara deriverbar i  $(a, b)$ . Då är  $f$  kontinuerlig i  $(a, b)$ .

**Bevis** Kan man tänka.

**Derivationsregler** Låt  $f, g$  vara deriverbara i punkten  $x$ . Då följer att  $f + g, fg$  är deriverbara i  $x$ . Deriva-

torna har sambandet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f+g)\Big|_x &= \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}\right)\Big|_x, \\ \frac{d}{dx}(af)\Big|_0 &= a\frac{df}{dx}\Big|_x, \quad a \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dx}(fg)\Big|_x &= \left(f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}\right)\Big|_x.\end{aligned}$$

Om  $g(x) \neq 0$  är även  $\frac{f}{g}$  deriverbar i  $x$  och

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} \Big|_x = \frac{\left(g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}\right)\Big|_x}{g^2(x)}.$$

**Bevis** Inte omöjligt.

**Kedjeregeln** Låt  $f$  vara deriverbar i  $y$ ,  $g$  deriverbar i  $x$  och  $y = g(x)$ . Då är den sammansatta funktionen  $f \circ g$  deriverbar och

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)\Big|_x = \frac{d}{dx}f\Big|_{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}g\Big|_x.$$

**Derivatan av inversfunktioner**

Låt  $f$  vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då är inversen  $f^{-1}$  deriverbar i alla punkter  $y = \frac{d}{dx}f\Big|_x$  där  $\frac{d}{dx}f\Big|_x \neq 0$  med derivatan

$$\frac{d}{dy}f^{-1}\Big|_y = \frac{1}{\frac{d}{dx}f\Big|_x}.$$

**Extrempunkt och derivata** Låt  $f$  vara deriverbar i  $x_0$  och ha en lokal extrempunkt i  $x_0$ . Då är  $\frac{df}{dx}\Big|_{x_0} = 0$ .

**Generaliserade medelvärdesatsen** Låt  $f$  och  $g$  vara reellvärda, kontinuerliga på

$[a, b]$  och deriverbara på  $(a, b)$ . Då existerar  $p \in (a, b)$  så att

$$\frac{df}{dx}\Big|_p (g(b) - g(a)) = \frac{dg}{dx}\Big|_p (f(b) - f(a)).$$

Om  $g(a) \neq g(b)$  och  $\frac{dg}{dx}\Big|_p \neq 0$ , gäller

$$\frac{\frac{df}{dx}\Big|_p}{\frac{dg}{dx}\Big|_p} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Medelvärdesatsen** Välj  $g(x) = x$ . Detta ger