Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

29 augusti 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

Innehåll

1 Accelererande referensramar

1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram S' som rör sig relativt en inertialram S. S' rör sig med hastighet $\mathbf{v}_{O'}$ och roterar med vinkelhastighet ω kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$).

Transformation av vektorstorheter Betrakta en godtycklig vektorstorhet $\mathbf{A}$. Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_x\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\partial_t\mathbf{A} &= \partial_t A_x\hat{\mathbf{e}}_x + \partial_t A_y\hat{\mathbf{e}}_y + \partial_t A_z\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= \partial_t A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + \partial_t A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + \partial_t A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x\partial_t\hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y\partial_t\hat{\mathbf{e}}'_y + A_z\partial_t\hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatorn

$$\mathring{\mathbf{A}} = \partial_t A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + \partial_t A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + \partial_t A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av $|\partial_t\hat{\mathbf{e}}'_i| = \omega\sin\alpha_i$, där α_i är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn ω och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på ω och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva $\partial_t\hat{\mathbf{e}}'_i = \omega\times\hat{\mathbf{e}}'_i$, och slutligen

$$\partial_t\mathbf{A} = \mathring{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} \tag{1}$$

Hastighet Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn i S, $\mathbf{r}'$ är ortsvektorn i S' och $\mathbf{r}_{O'}$ är ortsvektorn till origo i S' relativt S. Vi tidsderiverar och får

$$\partial_t\mathbf{r} = \partial_t\mathbf{r}_{O'} + \partial_t\mathbf{r}'.$$

Vi känner igen hastigheten i S och hastigheten till ramen S'. Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i S', vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i S' som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt S', vilket ger den hastighet i S lika med $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{v}',$$

där $\mathbf{v}_{\mathrm{sp}}$ är systempunktens hastighet.

Acceleration För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\partial_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \partial_t \mathbf{r}' + \partial_t \mathbf{v}'.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i S' för att få

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} &= \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}'.\end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i S, accelerationen till ramen S' och hastigheten mätt i S', och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt S', ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger $\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration S'. Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen $\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'.$$

1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i S, får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'\right).$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}}$ och Corioliskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = \mathbf{F}_{\mathrm{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tl}} = -m\mathbf{a}_{O'}$.
- en transversell kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tv}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{tv}} = -m\partial_t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.
- en centrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathrm{c}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.