Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

31 augusti 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer

Linjära differentialekvationer Om en differentialekvation kan skrivas på formen $L(y) = g$, är den linjär om

- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.
- $L(\alpha y) = \alpha L(y),\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Separabla ordinarie differentialekvationer Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Vi beräknar primitiv funktion på båda sidor och får

$$M(x) + N(y(x)) = c,\ c \in \mathbf{R}.$$

Om N är inverterbar, får man då y enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

Linjära första ordningens ordinarie differentialekvationer Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p\,\mathrm{d}x$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ye^{P}\right)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t)\,.$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int\limits_a^t p\,\mathrm{d}x} + \int\limits_a^t g(x) e^{-\int\limits_x^t p\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lipschitzkontinuerlighet En funktion f är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett K så att det för varje x_1, x_2 gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Grönwalls lemma Antag att det finns positiva A, K så att $h : [0, T \to \mathbf{R}]$ uppfyller

$$h(t) \leq K \int\limits_0^t h(s)\,\mathrm{d}s + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

Bevis Definiera

$$I(t) = \int\limits_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Då gäller att

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-Kt}I(t)\right) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till r och använder att $I(0) = 0$ för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

Entydighet av lösning av en första ordnings ordinarie differentialekvation Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = f(y(t)),\ 0 < t < \tau,$$
$$y_0 = 0.$$

Denna har en entydig lösning om f är Lipschitzkontinuerlig.

1.1 Bevis

Betrakta två lösningar y, z av denna ekvationen. Då gäller att

$$y(t) - y_0 = \int_0^t f(y(s))\,\mathrm{d}s$$

och motsvarande för z, vilket ger

$$y(t) - z(t) = y_0 - z_0 + \int_0^t f(y(s)) - f(z(s))\,\mathrm{d}s\,,$$
$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| + \left|\int_0^t f(y(s)) - f(z(s))\,\mathrm{d}s\right|.$$

Vid att tillämpa kriteriet om Lipschitzkontinuitet av f för att få

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq |y_0 - z_0| + \left|\int_0^t K(y(s) - z(s))\,\mathrm{d}s\right| \\ &= |y_0 - z_0| + K\left|\int_0^t y(s) - z(s)\,\mathrm{d}s\right|. \end{aligned}$$

Vi tillämpar nu Grönwalls lemma och får

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|e^{Kt}.$$

Om nu startvärden y_0, z_0 är lika, får man att $y(t) = z(t)$ för alla t.