Sammanfattning av

Yashar Honarmandi

29 mars 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Grunläggande koncept inom slump

1.1 Definitioner

Slumpförsök Ett slumpförsök är en experiment där resultatet ej kan avgöras på förhand.

Utfall Ett utfall är resultatet av ett slumpförsök.

Utfallsrum Ett utfallsrum, betecknad Ω, är mängden av alla möjliga utfall för ett givet slumpförsök.

Händelser En händelse är en uppsättning intressanta utfall, alltså en delmängd av utfallsrummet, och betecknas $A, B, C, \ldots$.

Sannolikheter Sannolikheten för en given händelse A uppfyller följande axiom:

- För varje A gäller det att $0 \leq P(A) \leq 1$.
- För hela Ω gäller att $P(\Omega) = 1$.
- Om $A_1, A_2, \ldots$ är en följd av parvis disjunkta händelser så gäller att $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum P(A_i)$.

Disjunkta händelser Två händelser A, B är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$.

Betingade sannolikheter Sannolikheten $P(B \mid A)$ är sannolikheten för att B händer givet att A har händt, och definieras som

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

För tre händelser definieras det som

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid (A \cap B))$$

och motsvarande för flere händelser.

Oberoende händelser Två händelser är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Detta generaliseras till tre händelser om

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C), \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C), \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

1.2 Satser

de Morgans lagar När man ska hitta komplement till komplicerade mängder, byta alla delmängder med deras komplement och alla unioner ($\cup$) till snitt ($\cap$), och motsatt.

Regler för sannolikhetskalkyl

$$\begin{aligned} P(A*) &= 1 - P(A), \\ P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A*), \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Bevis Följer från mängdlära.

Lagen om total sannolikhet Låt $H_1, \ldots, H_n$ vara parvis oförenliga och låt $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Då gäller att

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$

Bevis

Bayes' sats Låt $H_1, \ldots, H_n$ vara parvis oförenliga och låt $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Då gäller att

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum P(H_j)P(A \mid H_j)}.$$

Bevis

Oberoende händelser där minst en inträffer Låt $A_1, \ldots, A_n$ vara oberoende och $P(A_i) = p_i$. Då ges sannolikheten för att minst en av dessa händer av

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Bevis

2 Stokastiska variabler

2.1 Definitioner

Stokastiska variabler En stokastisk variabel är en funktion definierad på ett utfallsrum.

Diskreta stokastiska variabler En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden.

Kontinuerliga stokastiska variabler En stokastisk variabel är kontinuerlig om det finns en funktion f så att

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\forall A,$$

eller motsvarande i flera variabler.

Sannolikhetsfunktioner Låt X vara en diskret stokastisk variabel. Då definieras sannolikhetsfunktionen som

$$p(k) = P(X = k).$$

Täthetsfunktioner Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel. Då definieras täthetsfunktionen som en funktion f som uppfyller

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \ \ \forall\ A,$$

$$f(x) \geq 0\ \forall\ x,$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Sannolikhetsfunktioner i flera variabler Låt (X, Y) vara en diskret stokastisk variabel. Då definieras sannolikhetsfunktionen som

$$p(j, k) = P(X = j, Y = k).$$

För kontinuerliga stokastiska variabler definieras den enligt

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

och uppfyller $f(x) \geq 0\ \forall\ x$ och

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Täthetsfunktioner i flera variabler Låt (X, Y) vara en kontinuerlig stokastisk variabel. Då definieras täthetsfunktionen som en funktion f som uppfyller

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= \int\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \ \forall\ A, \\ f(x,y) &\geq 0 \ \forall\ x, y, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\,\mathrm{d}x &= 1. \end{aligned}$$

Fördelningsfunktioner Låt X vara en stokastisk variabel. Funktionen $F : x \to P(X \leq x)$ är fördelningsfunktionen för X.

Fördelningsfunktioner i flera variabler Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel. Funktionen $F_{X,Y} : (x, y) \to P(X \leq x, Y \leq y)$ är den simultana fördelningsfunktionen för (X, Y).

Marginalfördelningar Låt $p_{X,Y}$ vara sannolikhetsfunktionen till den stokastiska variabeln (X, Y). Marginalfördelningnen p_X till X definieras då som

$$p_X(j) = \sum_k p(j,k)$$

i det kontinuerliga fallet och

$$f_X(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

En konsekvens av definitionen i det kontinuerliga fallet är

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} f(x,y).$$

Oberoende stokastiska variabler Variablerna X, Y är oberoende om

$$P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D)\ \forall\ C, D.$$

Väntevärde Låt X vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion p. Då definieras variabelns väntevärde som

$$\mathrm{E}\left(E\right) = \sum kp(k).$$

För en kontinuerlig stokastisk variabel definieras det som

$$\mathrm{E}\left(E\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Varians Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ. Variansen till X definieras som

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right).$$

Standardavvikelse Låt X vara en stokastisk variabel med varians σ^2. Standardavvikelsen till X definieras som

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Variationskoefficient Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och standardavvikelseσ^2. Variationskoeficienten till X definieras som

$$R = \frac{\sigma}{\mu}.$$

Kvantiler Lösningen till

$$F(x) = 1 - \alpha$$

kallas α-kvantilen till X.

2.2 Satser

Fördelningsfunktioners egenskaper Låt F vara en fördelningsfunktion. Då gäller att

- $$F(x) \to \begin{cases} 0, x \to -\infty, \\ 1, x \to \infty. \end{cases}$$
- F är växande (eller icke-avtagande för kontinuerliga stokastiska variabler).
- F är kontinuerlig till höger för varje X.

Omvänt gäller även att alla funktioner som uppfyller dessa egenskaper är fördelningsfunktioner.

Bevis

Fördelningsfunktioner och sannolikheter Låt F vara en fördelningsfunktion för variabeln X. Då gäller att

$$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b).$$

Bevis

Fördelningsfunktioner och sannolikhetsfunktioner Låt F och p vara fördelnings- respektiva sannolikhetsfunktionen till en diskret stokastisk variabel X. Då gäller att

$$F(x) = \sum_{j \leq x} p(j),$$
$$p(x) = \begin{cases} F(x), x = 0, \\ F(x) - F(x-1), \text{annars}. \end{cases}$$

En motsvarande relation till första ekvationen gäller även för sannolikhets- och fördelningsfunktioner i flera variabler.

Bevis

Fördelningsfunktioner och täthetsfunktioner Låt F och f vara fördelnings- respektiva täthetsfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel X och låt f vara kontinuerlig i x. Då gäller att

$$F(x) = \int_{-\infty} x f(u)\, \mathrm{d}u\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x).$$

Fördelningsfunktioner och täthetsfunktioner i flera variabler Låt F och f vara fördelnings- respektiva täthetsfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel (X, Y) och låt f vara kontinuerlig i (x, y). Då gäller att

$$F(x, y) = \int_{-\infty} x \int_{-\infty} y f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y).$$

Normalisering av sannolikhetsfunktioner Låt p vara en sannolikhetsfunktion. Då gäller att

$$\sum p(j) = 1.$$

Bevis

Sannolikhetsfunktioner och sannolikheter Låt p vara en sannolihetsfunktion för den stokastiska variabeln X. Då gäller att

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i=a}^{b} p(i).$$

Bevis

Funktioner av stokastiska variabler Låt X vara en stokastisk variabel. Då har den stokastiska variabeln $Y = g(X)$ sannolikhetsfuktionen $p_Y(k) = \sum\limits_{g(i)=k} p_X(i)$.

Bevis

Väntevärde för funktioner av stokastiska variabler Låt X vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion p_X. Då ges väntevärdet till $g(X)$ av

$$\mathrm{E}\left(g(X)\right) = \sum g(k) p_X(k),$$

med en motsvarande relation i det kontinuerliga fallet och i det flerdimensionella fallet.

Bevis

Förenklad formel för varians Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ. Då ges variansen till X av

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu^2.$$

Bevis

Oberoende variabler och funktioner X, Y är oberoende om

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

eller

$$p_{X,Y}(j, k) = p_X(j) p_Y(k)$$

i det diskreta fallet och

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Bevis

Oberoende variabler och väntevärde av produktet Låt X, Y vara oberoende. Då gäller att

$$\mathrm{E}\left(XY\right) = \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right).$$

Bevis

3 Diskreta sannolikhetsfunktioner

Enpunktsfördelningen Enpunktsfördelningen ges av $p(a) = 1$ och $p(x) = 0, x \neq a$.

Tvåpunktsfördelningen Tvåpunktsfördelningen ges av $p(a) = p$, $p(b) = 1 - p$ och $p(x) = 0, x \neq a, b$.

Likformiga fördelningen Om X antar m olika värden, är $p(x) = \frac{1}{m}$ för dessa värden och 0 annars.

För-första-gången-fördelningen Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Om en stokastisk variabl är fördelat så, skrivs det som $X \in \mathrm{ffg}(p)$.

Geometrisk fördelning Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = (1-p)^{k}p.$$

Om en stokastisk variabl är fördelat så, skrivs det som $X \in \mathrm{Ge}(p)$.

Binomisk fördelning Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Om en stokastisk variabl är fördelat så, skrivs det som $X \in \mathrm{Bin}(n, p)$.

Hypergeometrisk fördelning Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Om en stokastisk variabl är fördelat så, skrivs det som $X \in \mathrm{Hyp}(N, n, K)$, där det kanske är andra variabler som är specifierat i notationen.

Poissonfördelning Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}.$$

Om en stokastisk variabl är fördelat så, skrivs det som $X \in \mathrm{Po}(\mu)$. Fun fact: Poisson betyder fisk på franska.

3.1 Satser

Två binomiskt fördelade variabler Låt $X \in \mathrm{Bin}(n_1, p), Y \in \mathrm{Bin}(n_2, p)$. Då gäller att $X + Y \in \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Bevis

Två Poissonfördelade variabler Låt $X \in \mathrm{Po}(\mu_1), Y \in \mathrm{Po}(\mu_2)$. Då gäller att $X + Y \in \mathrm{Po}(\mu_1 + \mu_2)$.

Bevis

4 Kombinatorik

4.1 Definitioner

Permutationer Permutationerna av k element bland n är antalet sätt du kan dra" k element från n utan återläggning.

Kombinationer Kombinationerna av k element bland n är antalet sätt du kan dra" k element från n utan återläggning där ordningen ej spelar någon roll.

4.2 Satser

Multiplikationsprincipet Låt åtgärd 1 kunna utföras på a_1 sätt och åtgärd 2 kunna utföras på a_2 sätt. Då kan båda utföras på $a_1 a_2$ sätt.

Bevis

Dragning med återläggning Dragning av k element ur n med återläggning kan utföras på n^k sätt.

Bevis

Dragning utan återläggning Dragning av k element ur n utan återläggning kan utföras på $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ sätt.

Bevis

Dragning utan återläggning eller ordning Dragning av k element ur n utan återläggning och där ordning ej spelar någon roll kan utföras på $\binom{n}{k}$ sätt.

Bevis