Sammanfattning av SF1672 Linjär algebra

Yashar Honarmandi

2 november 2017

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av viktiga definitioner, teoremer och algoritmer i kursen SF1672 Linjär algebra.

Innehåll

1 Algoritmer

Dessa algoritmer kan vara smarta att kunna för att lösa problemer i linjär algebra.

Gauss-Jordan-elimination Ett ekvationssystem

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_n = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

kan lösas vid att konstruera en totalmatris

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & b_n
\end{array}\right]
$$

och göra Gauss-Jordan-elimination på denna.

Syftet med Gauss-Jordan-elimination är att varje kolumn ska ha ett och endast ett pivotelement, även kallad en ledande etta. En ledande etta är en etta som inte har någon andra tal i samma kolumn eller till vänster i samma rad. För att få sådana, gör man operationer på radarna i matrisen enligt följande regler:

- Radar kan multipliceras med konstanter. Forsöka, dock, att undveka 0, eftersom det fjärnar information, vilket är otrevligt.
- Radar kan adderas och subtraheras med andra rader, var båda potensielt multiplicerad med en lämplig konstant.
- Radar kan byta plats.

När man är klar, ska matrisen (förhoppingsvis) se ut så här:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_n
\end{array}\right]
$$

var alla a_i är reella tal.

2 Vektorer

2.1 Definitioner

Linjärt hölje Det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ är

$$
\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}
$$

2.2 Satser

3 Matrices

3.1 Definitioner

Matris-vektor-produkt Betrakta $m \times n$-matrisen

$$
A = \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_n
\end{array}\right]
$$

och vektoren i $\mathbb{R}^n$

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Matrisproduktet $A\mathbf{x}$ definieras som vektoren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$.

3.2 Satser

Linjärt hölje av matriskolumner
Följande påståenden är ekvivalenta:

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje

b) Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjär kombination av kolumnerna i A.

c) Span$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n} = \mathbb{R}^m$.

d) Den reducerade matrisen till A har m ledande ettor.

Bevis Ekvivalensen till a, b och c är vel trivial eller någonting.

Antag att c gäller och att A ej har m ledande ettor. Då måste man vid Gauss-Jordan-elimination av A få en rad med bara nollor. Antag att detta är sista raden i matrisen. Betrakta vektorn

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom Gauss-Jordan-elimination inte ändrar det linjära höljet av kolummnerna till en matris, borde man kunne hitta en kombination av elementerna i den sista raden i A så att man får 1, eftersom $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$. Då alla elementerna i denna raden är nållor, är detta omöjligt.