# Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

8 oktober 2018

**Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

# Innehåll

# 1 Accelererande referensramar

## 1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram $S'$ som rör sig relativt en inertialram $S$. $S'$ rör sig med hastighet $\mathbf{v}_{O'}$ och roterar med vinkelhastighet $\omega$ kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$).

**Vinkelhastighet** Definitionen av ett koordinatsystems vinkelhastighet ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{z'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{x'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{x'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{y'} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y'}\right)\hat{\mathbf{e}}_{z'}.$$

För att visa att vinkelhastigheter är additiva, inför tre system $S_0, S_1, S_2$, vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_{1,0}$ av $S_1$ relativt $S_0$ och derivatan

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A}.$$

Detta sambandet ges här utan bevis. Vid att använda derivationssambanden $1-2, 1-0, 2-0$ får man

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,1} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,0} \times \mathbf{A},$$

vilket implicerar

$$\boldsymbol{\omega}_{2,0} = \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0}.$$

Det gäller speciellt att

$$\boldsymbol{\omega}_{2,1} = -\boldsymbol{\omega}_{1,2}.$$

Vi betraktar vidare vinkelaccelerationen, och inför

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,0} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

Vid att tidsderivera additionssambandet för vinkelhastigheter får man

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{2,0} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\
&= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{\mathrm{d}t}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} \\
&= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \boldsymbol{\alpha}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1},
\end{aligned}$$

alltså är vinkelaccelerationer allmänt ej additiva. Man kan dock visa att

$$\boldsymbol{\alpha}_{2,1} = -\boldsymbol{\alpha}_{1,2}.$$

**Transformation av vektorstorheter** Betrakta en godtycklig vektorstorhet $\mathbf{A}$. Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_x\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= A'_x\hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y\hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z\hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_y \\ &= \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_x}{\mathrm{d}t} + A'_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_y}{\mathrm{d}t} + A_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_z}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatorn

$$\mathring{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av $\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t}\right| = \omega \sin\alpha_i$, där $\alpha_i$ är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn $\omega$ och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på $\omega$ och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}'_i}{\mathrm{d}t} = \omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i$, och slutligen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{1}$$

**Hastighet** Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn i $S$, $\mathbf{r}'$ är ortsvektorn i $S'$ och $\mathbf{r}_{O'}$ är ortsvektorn till origo i $S'$ relativt $S$. Vi tidsderiverar och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi känner igen hastigheten i $S$ och hastigheten till ramen $S'$. Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i $S'$, vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i $S'$ som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt $S'$, vilket ger den hastighet i $S$ lika med $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{v}',$$

där $\mathbf{v}_{\mathrm{sp}}$ är systempunktens hastighet.

**Acceleration** För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i $S'$ för att få

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathring{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}'\right) + \mathring{\mathbf{v}}'.\end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i $S$, accelerationen till ramen $S'$ och hastigheten mätt i $S'$, och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt $S'$, ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger $\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration $S'$. Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen $\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'.$$

## 1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i $S$, får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}} + \mathbf{a}'\right).$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}}$ och Corioliskraften $\mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$. Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathrm{sp}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cor}} = \mathbf{F}_{\mathrm{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tl}} = -m\mathbf{a}_{O'}$.
- en transversell kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{tv}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{tv}} = -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}'$.
- en centrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathrm{c}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.

## 2 Partikelsystem

Ett partikelsystem är en samling av $N$ partiklar med (konstanta) massor $m_i$ och total massa $m$ som samverkar. Varje partikel påverkas av yttre krafter med summa $\mathbf{F}_i$ samt inre krafter $\mathbf{f}_{ij}$ med alla andra partikler i systemet.

Vi antar att alla inre krafter verkar parallellt med linjen mellan partiklerna. Newtons andra lag ger $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, vilket även implicerar $\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$.

Vi definierar kraftsummorna

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i,\\ \mathbf{f} &= \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}.\end{aligned}$$

Vi får

$$\mathbf{f} = \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} = -\sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f},$$

och därmed $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

**Masscentrum** Vi kommer ihåg att masscentrum för ett partikelsystem definieras som

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

**Rörelsemängd** Systemets totala rörelsemängd ges av

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right) = \frac{\mathrm{d} m \mathbf{r}_G}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{v}_G.$$

**Kraftekvationen för ett partikelsystem** Kraftekvationen för en enda partikel ger

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij}.$$

Om vi adderar alla dessa ekvationer, får man

$$\begin{aligned}\sum m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} &= \sum \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij},\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right) &= \mathbf{F} + \mathbf{f},\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}_G\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F},\end{aligned}$$

vilket är kraftekvationen som vi känner den. Med konstant massa kan detta även skrivas som

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}.$$

**Energilagen för ett partikelsystem** Arbetet som görs på en partikel i ett parikelsystem under en infinitesimal rörelse ges av

$$\mathrm{d}U_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{e})}\,.$$

Det totala arbetet som görs på partikelsystemet ges av

$$\mathrm{d}U = \sum \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U_i^{(\mathrm{e})} = \mathrm{d}U^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}U^{(\mathrm{e})}\,,$$

där vi har infört arbetet som görs av inre och yttre krafter. Vi kan från detta integrera för att få

$$U_{0-1} = T_1 - T_0,$$

där $T$ nu är hela systemets kinetiska energi och $U$ är det totala arbetet som görs av alla krafter.

**Tolkning av kinetisk energi** Vi undersöker vidare partikelsystemets kinetiska energi. För att göra detta, introducerar vi en masscentrumsram med origo i masscentrum och axlar som inte ändrar riktning. Hastighetssambandet ger

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i,$$

där apostrofen indikerar storheter i masscentrumsramen. Eftersom systemet inte roterar, förenklas detta till

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i.$$

Den kinetiska energin ges då av

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i v_G^2 + \sum m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i v_G^2 + \mathbf{v}_G \cdot \sum m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2. \end{aligned}$$

Det gäller att

$$\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

eftersom systemets masscentrum är i origo. Derivation med avseende på tiden ger

$$\sum m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0},$$

vilket ger

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'.$$

Bidragen till den kinetiska energin är alltså masscentrumsrörelse och partiklernas rörelse relativt masscentrum.

**Momentekvationen** Systemets totala rörelsemängdsmoment med avseende på punkten $O$ ges av

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

För att härleda kraftekvationen, utgår vi från kraftekvationen

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij}.$$

Multiplicera med ortsvektorn från vänster och summera över alla partikler för att få

$$\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}.$$

Vi har att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

eftersom vektorerna i första termen är lika varandra. Vi har vidare att

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{f}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

då den inre kraften är parallell med linjen mellan partiklerna. Den återstående termen är det totala momentet till de yttre krafterna, och vi får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_O.$$

**Rörelsemängdsmoment med avseende på olika punkter** Betrakta rörelsemängdsmomentet kring två punkter $A, B$. Det gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_A &= \sum \mathbf{r}_{A,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{B,i}) \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{r}_{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{B,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{r}_{AB} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_B.
\end{aligned}$$

**Tolkning av rörelsemängdsmomentet** Betrakta rörelsemängdsmomentet med avseende på en fix punkt $O$ och masscentrum $G$ i ett masscentrumsystem. Sambandsformelen ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_G \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G.$$

Rörelsemängdsmomentet med avseende på masscentrum ges av

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

För att skriva denna enbart med storheter i masscentrumsystemet, tidsderiverar man relationen

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$$

och får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t}, \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

För att derivera den sista termen, använder vi ekvation 1 i fallet $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ för att få

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \left(\sum m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{H}'_G\end{aligned}$$

enligt definitionen av masscentrum och dens ortsvektor i ett masscentrumssystem. Vi har nu explicit skrivit att rörelsemängdsmomentet i ett masscentrumssystem endast beror av storheter som är relativa det systemet. Detta ger slutligen relationen

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}'_G + \mathbf{r}_G \times m\mathbf{v}_G.$$

Den första termen är rörelsemängdsmomentet relativt masscentrum, och den andra termen är banrörelsemängdsmomentet som uppstår från masscentrums rörelse.

**Rörelsemängdsmomentlagen för en rörlig punkt** Jämför rörelsemängdsmomenten relativt en fix punkt $O$ och relativt en annan punkt $A$. Vårt samband ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{OA} \times m\mathbf{v}_G.$$

Tidsderivation ger

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{OA}}{\mathrm{d}t} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_G}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m\mathbf{a}_G \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G - \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Vi skriver om och använder rörelsemängdsmomentlagen för att få

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.$$

Högersiden ger förflytningen av momentet till en ny punkt, som vi såg i grundkursen (ja, jag blev också chockad över att den fanns kvar), och vi får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_A}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_A.$$

# 3 Stela kroppar

En stel kropp är en massbelagd domän så att avståndet mellan två godtyckliga punkter är konstant.

## 3.1 Allmän kinematik

En stel kropp kan ha translationshastighet eller rotationshastighet. Translationshastighet karakteriseras av att $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$ för alla $A, B$. Rotationshastighet karakteriseras av att det finns ett $C$ som är stelt förenad med kroppen så att $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ momentant.

**Hastighet** För att beskriva rörelsen till en stel kropp, bilda en referensram med axlerna fixa relativt kroppen. Betrakta två punkter $A, B$ i kroppen, där origo i den nya referensramen är $A$. Då gäller det att

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{v}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Eftersom axlerna är fixa relativt kroppen, ger andra termen inget bidrag, vilket ger

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

och bekräftar vårt påstående om att all rörelse för en stel kropp är antingen translation eller rotation.

**Acceleration** Kroppens acceleration ges av

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B,\mathrm{sp}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{cor}} + \mathbf{a}_{B,\mathrm{rel}}.$$

Fixa axler relativt kroppen ger att de två sista termerna ej bidrar och

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}),$$

där den första termen är ett translatoriskt bidrag och de två andra är rotationsbidrag.

### 3.2 Allmän dynamik

**Allmän rotation kring fix axel** Vi betraktar en stel kropps rotation kring en fix punkt $O$ parallellt med en axel $Q$. Vi inför vinklarna $\alpha, \beta, \gamma$ mellan $\boldsymbol{\omega}$ och axlarna, enhetsvektorn

$$\hat{\mathbf{e}}_Q = \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\beta\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\gamma\hat{\mathbf{e}}_z,$$

vinkeln $\theta_k$ mellan $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}_k$ och avståndet $\rho_k$ från rotationsaxeln till partikeln. Vi beräknar först

$$\begin{aligned}
\rho_k^2 =& r_k^2 \sin^2\theta \\
=& |\mathbf{r_k} \times \hat{\mathbf{e}}_Q|^2 \\
=& |(y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)\hat{\mathbf{e}}_x + (z_k \cos\alpha - x_k \cos\gamma)\hat{\mathbf{e}}_y + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)\hat{\mathbf{e}}_z|^2 \\
=& (y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)^2 + (z_k \cos\alpha - x_k \cos\gamma)^2 + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)^2 \\
=& (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma \\
& - 2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet

$$\begin{aligned}
I_Q =& \sum m_i \rho_i^2 \\
=& \sum m_i (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + \sum m_i (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + \sum m_i (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma \\
& - 2\sum m_i y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2\sum m_i x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2\sum m_i x_k y_k \cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

och definierar tröghetstensorn $I$ med komponenter

$$I_{xx} = \sum m_i y_i^2 + z_i^2, I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$$

och motsvarande för andra subskript. Detta ger

$$\begin{aligned}
I_Q =& I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \\
& + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \\
=& \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I\hat{\mathbf{e}}_Q.
\end{aligned}$$

**Mer om tröghetstensorn** Tröghetstensorn är symmetrisk, och kan därmed diagonaliseras. Axlarna så att tröghetsmatrisen är diagonal relativt dessa kallas huvudaxlar.

**Parallellförflyttningssatsen för diagonalelementer** Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer $S, S'$, där den primmade ramen är ett masscentrumssystem, kroppen roterar kring $z'$-axeln, $z$-axeln är parallell med $z'$-axeln och avståndet mellan dessa är $d$. Vi inför tröghetsmomenten

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2), \\
I_{z'z'} &= \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2).
\end{aligned}$$

Vi skriver om första enligt

$$\begin{aligned}
I_z &= \sum m_i(x_G^2 + 2x_i' x_G + x_i'^2 + y_G^2 + 2y_i' y_G + y_i'^2) \\
&= \sum m_i(x_G^2 + y_G^2) + \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G \sum m_i x_i' + 2y_G \sum m_i y_i' \\
&= md^2 + I_{z'z'},
\end{aligned}$$

där de två sista summorna försvinner eftersom $S'$ är ett masscentrumssystem. Härledningen är analog för de andra diagonalelementen.

**Parallellförflyttningssatsen för tröghetsprodukter** Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer $S, S'$, där den primmade ramen är ett masscentrumssystem och enhetsvektorerna är parallella. Vi har

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i \\
&= -\sum m_i(x_G y_G + x_i' y_G + x_G y_i' + x_i' y_i') \\
&= -m x_G y_G - y_G \sum m_i x_i - x_G \sum m_i y_i - \sum m_i x_i' y_i' \\
&= I_{x'y'} - m x_G y_G.
\end{aligned}$$

**Kinetisk energi** Den relativa kinetiska energin ges av

$$T' = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i'^2.$$

Med $\rho_i$ som avståndet till rotationsaxeln ger hastighetssambandet

$$\begin{aligned}
T' &= \frac{1}{2} \sum m_i \rho_i^2 \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} I_G \omega^2.
\end{aligned}$$

Den totala kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2,$$

som innehåller en banterm och en spinnterm. Med hjälp av tröghetstensorn kan den andra termen skrivas som

$$\begin{aligned}
T' &= \frac{1}{2} I_Q \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot \boldsymbol{I} \hat{\mathbf{e}}_Q \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} \omega \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot \boldsymbol{I} \omega \hat{\mathbf{e}}_Q \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}$$

**Rörelsemängdsmoment** Rörelsemängdsmomentet kan skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i \\ &= \sum m_i\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum m_i((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i).\end{aligned}$$

Vi betraktar nu $x$-komponenten, som ges av

$$\begin{aligned}H_{O,x} &= \sum m_i((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) \\ &= \sum m_i((y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) \\ &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z.\end{aligned}$$

Från detta fås

$$\mathbf{H}_O = I\boldsymbol{\omega}.$$

Med detta kan den kinetiska energin i masscentrumssystemet skrivas som

$$T' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}.$$

**Energilagen** Definiera effekten

$$P_{ij} = \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j).$$

Vi använder att $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_i)$ och får

$$P_{ij} = -\mathbf{f}_{ij} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_i) = 0$$

eftersom $\mathbf{f}_{ij}$ verkar längs linjen mellan partikel $i$ och $j$. Därmed gör de indre krafterna inget arbete, och

$$U_{0-1}^{(\mathrm{e})} = T_1 - T_0.$$

**Eulers dynamiska ekvationer** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt $O$. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en kroppsfix ram $Oxyz$. Det gäller att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O.$$

Eftersom kroppen är stel, har vi vidare

$$\mathring{\mathbf{H}}_O = I_O\mathring{\boldsymbol{\omega}}.$$

Rörelsemängdsmomentlagen ger då Eulers dynamiska ekvation

$$I_O\mathring{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_O}{\mathrm{d}t}.$$

Med den kroppsfixa ramen orienterat längs med kroppens huvudaxler blir detta på komponentform

$$\begin{aligned}
I_{xx}\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z &= M_{O,x}, \\
I_{yy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x &= M_{O,y}, \\
I_{zz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y &= M_{O,z}.
\end{aligned}$$

**Eulers kinematiska ekvationer** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt $O$. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en kroppsfix ram $Oxyz$. Låt linjen där $xy$-planet skär $XY$-planet vara parallell med $\mathbf{n}$, som igen är parallell med $\hat{\mathbf{e}}_Z \times \hat{\mathbf{e}}_z$. Introducera vinkeln $\theta$ mellan $Z$- och $z$-axeln, vinkeln $\psi$ mellan $X$-axeln och $\mathbf{n}$ och vinkeln $\phi$ mellan $\mathbf{n}$ och $x$-axeln. Dessa kallas för Eulervinklarna. Vinkelhastigheten är en summa av vinkelhastigheter motsvarande ändring av varje vinkel, och ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_n + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Projektion på det kroppsfixa systemet ger

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_Z &= \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z + \sin\theta(\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y), \\
\hat{\mathbf{e}}_n &= \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y.
\end{aligned}$$

Från detta fås Eulers kinematiska ekvationer

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\sin\phi + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\phi, \\
\omega_y &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\cos\phi - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\phi, \\
\omega_z &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

**3D-rotation av en axisymmetrisk kropp** Betrakta en axisymmetrisk stel kropp som roterar kring en fix punkt $O$. Välj en rumsfixt inertialram $OXYZ$ och en ram $Oxyz$, där $z$-axeln pekar längs med kroppens symmetriaxel och kroppen kan rotera fritt kring detta. Denna sortens ram kallas en resalram. Nu kan $x$-axeln väljas parallellt med $\mathbf{n}$. Kroppens rotation kan nu delas i resalramens vinkelhastighet

$$\boldsymbol{\omega}_S = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_n$$

och kroppens vinkelhastighet relativt resalramen

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Nu får vi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathring{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O$$

och

$$\mathring{\mathbf{H}}_O = I_O \mathring{\boldsymbol{\omega}}_0,$$

vilket slutligen ger

$$I_O \mathring{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O = \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_O}{\mathrm{d}t}.$$

## 3.3 Plan rörelse

Plan rörelse för en stel kropp karakteriseras av att hastigheten i alla punkter är parallellt med ett och samma fixa plan. Om rörelsen är i $xy$-planet, kommer $\boldsymbol{\omega}$ peka längs med $z$-axeln.

**Momentancentrum** Om en stel kropp roterar under plan rörelse, finns det alltid en punkt $C$ med $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, som kallas momentancentrum. Denna punkt uppfyller $\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$. För att hitta den, multiplicera med $\boldsymbol{\omega}$ på båda sidor för att få

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AC})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AC}.\end{aligned}$$

Eftersom rörelsen är plan, behöver vi bara betrakta ett snitt av kroppen i rörelsesplanet, vilket gör att den första skalärprodukten blir 0. Detta ger då positionen till momentancentrumet enligt

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$

**Hastighet** Vid att införa cylindriska koordinater kring origo fås ortsvektorn till någon partikel i kroppen som $\mathbf{r}'_i = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\rho$. Partikelns hastighet ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \\ &= \mathbf{v}_G + \omega \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\theta.\end{aligned}$$

**Acceleration** Accelerationssambandet för plan rörelse ger

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}).$$

Vi skriver ut termerna och får

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

Eftersom rörelsen är plan, blir skalärprodukten 0, och man får slutligen

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

**2D-rotation kring fix axel** Låt punkten $O$ vara på rotationsaxeln och välg cylindriska koordinater så att kroppen roterar kring $z$-axeln. För någon partikel i den stela kroppen har man

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Den kinetiska energin ges nu av

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_k \rho_i^2$$

och rörelsemängdsmomentet kring $O$ ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \sum m_i \rho_i^2 \omega \hat{\mathbf{e}}_z - \sum m_i \rho_i z_i \omega \hat{\mathbf{e}}_r.\end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet kring $z$-axeln

$$I_z = \sum m_k \rho_i^2,$$

med motsvarande definitioner kring andra axlar (högst analog till elementer i tröghetstensorn). Då gäller att

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_z \omega^2, \\ H_z &= I_z \omega.\end{aligned}$$

Kraftekvationens komponenter ger

$$\begin{aligned}F_r &= -ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2, \\ F_\theta &= ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.\end{aligned}$$

Momentekvationen ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_z \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = M_z.$$

Arbetet som görs på kroppen ges av

$$\mathrm{d}U_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = F_{i,\theta} \rho_i \omega \, \mathrm{d}t = M_{i,z} \, \mathrm{d}\theta \, .$$

**Tröghetsmoment för en plan kropp** Låt oss först betrakta en plan kropp som roterar i planet. Då kan det visas att

$$I_z = I_x + I_y.$$

**Rörelsemängdsmoment** Det relativa rörelsemängdsmomentet ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_G &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \sum \rho_i^2 m_i \hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Det totala rörelsemängdsmomentet är då

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{v}_G + I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z$$

som också består av en banterm och en spinnterm.

**Dynamiska lagar** För en stel kropp i plan rörelse gäller att

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}, I_G \alpha = M_z.$$

**Arbete** Effekten som utövs under en kropps rörelse ges av

$$\begin{aligned} P = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= m\mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + I\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Arbetet som görs ges då av

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= P \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \,\mathrm{d}t + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \,\mathrm{d}t + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_G + M_z \,\mathrm{d}\theta \,, \end{aligned}$$

där vi har användt att $\mathbf{M}_G$ pekar i $z$-riktning.

# 4 Variationskalkyl

Vi betraktar en funktional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \,\mathrm{d}x$$

och söker dens extremum.

För att göra detta, antag att $y$ är den sökta funktionen och lägg till en störningsterm $\varepsilon\eta(x)$ som uppfyller $\varepsilon\eta(x_1) = \varepsilon\eta(x_2) = 0$. Undersök nu

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x\,.$$

Vi vet att $I(0)$ är en extremalpunkt, vilket ger $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0$. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u'}\eta'\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

med $u = y + \varepsilon\eta$. Detta ger vidare

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y'}(x_2)\eta(x_2) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Randvillkoren ger att de två termerna i mitten båda är 0, och detta ger

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x\,.$$

Eftersom $\eta$ ej specifieras, ger detta Euler-Lagrange-ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Vi betraktar nu

$$\begin{aligned}\Delta I &= I(\varepsilon) - I(0) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}) - f(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Taylorutveckling av integranden ger

$$\begin{aligned}\Delta I &\approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon}\varepsilon \,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon}\varepsilon \,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right)\varepsilon \,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Vi definierar detta som $\delta I$, och får då $\delta I = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)\varepsilon$.

## 5 Analytisk mekanik

Betrakta ett system av $n$ partiklar. Dessa beskrivs av $3n$ koordinater i 3 dimensioner. Systemet kan även begränsas av

- holonoma tvång på formen $f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0$.
- icke-holonoma tvång, som ej kan uttryckas som holonoma tvång och endast ger samband mellan differentialerna.

Vi kommer endast betrakta konservativa system.

**Frihetsgrader** Systemets antal frihetsgrader är det minsta antalet parametrar som entydigt bestämmer systemets läge.

Om systemet begränsas av $k$ holonoma tvång, har systemet $s = 3n - k$ frihetsgrader.

**Generaliserade koordinater** Systemets generaliserade koordinater är ett val av parametrar som beskriver systemets läge. Dessa betecknas som $q_i$.

Med dessa inför vi även tidsderivatorna $\dot{q}_i$.

**Virtuell förflyttning** Vi introducerar nu den virtuella förflyttningen $\delta\mathbf{r}$. Denna är förenlig med villkoren (som ecentuellt är frysta i tid) och i övrigt godtycklig.

**Variation av generaliserad koordinat** Vi introducerar variationen av en generaliserad koordinat som

$$\delta q_i = \varepsilon\eta_i(t),$$

där $\eta$ är 0 i ändpunkterna.

**Konfigurationsrum** Konfigurationsrummet är ett rum vars koordinater är de generaliserade koordinaterna. Rörelse i detta rummet representerar alltså ändring av systemets tillstånd.

**Hastighet** Vi kan nu skriva hastigheten för en given partikel som

$$\mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

**Lagrangefunktionen** Vi inför nu Lagrangefunktionen

$$L = T - V.$$

**Verkningsfunktionalen** Vi inför även verkningsfunktionalen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L.$$

**Hamiltons variationsprincip** Hamiltons variationsprincip kan behandlas som en naturlag, och representerar ett alternativt sätt till Newtons lagar att beräkna partikelsystemets beteende på. Variationsprincipen säjer att $S$ har ett extremum längs den verkliga banan i konfigurationsrummet. Med variationskalkylen kan detta skrivas som

$$\delta S = 0.$$

**Lagranges ekvationer** Vi tillämpar nu vår kunnskap om variationskalkyl på verkningsintegralen och får

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i = 0.$$

Den sista familjen av termer ges av

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

då variationen är 0 i ändpunkterna. Då kan variationsprincipen skrivas som

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{k} \Delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0.$$

Om detta skall gälla för alla val av tidsintervall, ger detta Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$