Samanfatning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

9 oktober 2017

Sammanfattning

Denna samanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

Innehåll

1 Mängder

1.1 Definitioner

Delmängder Låt A, B vara mängder. A är en delmängd av B om det för varje $x \in A$ gäller att $x \in B$. Notation: $A \subset B$.

Union och snitt Låt A, B vara mängder. Unionen $A \cup B$ består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet $A \cap B$ består av de element som är i båda.

Övre och undra begränsningar Ett tal m är en övre begränsning av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$, och en undra begränsning om $x \geq m$ för varje $x \in A$.

Supremum och infimum Ett tal m är supremum till en mängd A om m är den minsta övre begränsningen till A. m är infimum till A om m är den största undra begränsningen till A. Notation: $\sup A, \inf A$.

1.2 Satser

Supremumsegenskapen Varje uppåt begränsade delmängd av $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning.

2 Funktioner

2.1 Definitioner

Definition av en funktion Låt X, Y vara mängder. En funktion $f : X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi säger att x avbildas på y och att y är bilden av x. x kallas argumentet till f. X kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även D_f. Y kallas funktionen målmängd.

Värdemängd Värdemängden till $f : X \to Y$ definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden f antar.

Injektivitet f är injektiv om det för varje $x_1, x_2 \in X$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

Surjektivitet f är surjektiv om $V_f = Y$.

Bijektivitet Om f är injektiv och surjektiv, är f bijektiv.

Inversa funktioner Låt $f : X \to Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1} : Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där $y = f(x)$. Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

Växande och avtagande funktioner En funktion f är växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) \leq f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

Strängt växande och avtagande funktioner En funktion f är strängt växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) < f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

Monotona funktioner Om en funktioner är antingen strängt växande respektiva strängt avtagande eller växande respektiva avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektiva monoton.

Uppåt och nedåt begränsade funktioner En funktion f är uppåt begränsad om V_f är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedra begrensning är den uppåt eller nedåt obegränsad.