Sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

23 september 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik.

Innehåll

1 Lite vektoranalys och annan matte

Diracs delta i högre dimensioner Diracs deltafunktion generaliserar utan vidare till högre dimensioner. Med andra ord är $\delta(\mathbf{r})$ en funktion som är noll överalt förutom origo och som uppfyller

$$\int_V \mathrm{d}V\,\delta(\mathbf{r}) = 1$$

om V innesluter origo.

Nablaoperatorn i olika koordinatsystem Betrakta två olika koordinatsystem S och S'. Med hjälp av de kartesiska basvektorerna (som är lika i bägge koordinatsystemen) kan vi skriva ortsvektorn i de två som

$$\mathbf{r} = r_i\mathbf{e_i},\ \mathbf{r}' = r'_i\mathbf{e_i}.$$

Vidare kan vi skriva nablaoperatorn som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_i}\partial_i,\ \vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_i}\partial'_i.$$

Betrakta nu en funktion av $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Då kan vi visa att

$$\partial_i f = -\partial'_i f.$$

Gradienten av R Betrakta funktionen

$$f(\mathbf{R}) = \sqrt{R_j R_j} = R.$$

Vi har

$$\partial_i R = \frac{1}{2}(R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2R_j\partial_i R_j = (R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} R_j \partial_i(r_j - r'_j = \frac{R_j}{R}\delta ij = \frac{R_i}{R}\delta ij.$$

Detta ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} R = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}' R = \mathbf{e_R}.$$

Divergensen av $\frac{1}{R^2}$-fältet Med resultatet ovan har vi

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^3}\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} R + \frac{1}{R^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \mathbf{e_R} + \frac{3}{R^3} \\
&= -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

så länge $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.

Mer allmänt kan man visa att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} = 4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Jag kan inte bevisa det, men jag kan rationalisera det kort. Utanför origo är det klart att detta stämmer. För att förstå vad som händer i origo, kan vi tillämpa den koordinatoberoende definitionen av divergens. Med den definitionen är divergensen av ett vektorfält kvoten av fältets flöde genom en litan yta kring en punkt och volymen den lilla ytan inneslutar. Med flervariabelanalys kan man visa att för fältet vi betraktar är flödet exakt 4π. Om vi jämför detta med Diracs delta, ser vi att det verkar stämma.

$\frac{1}{R}$ och Greenfunktioner Med resultaten vi har får vi även

$$\vec{\nabla}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\vec{\nabla}R = -\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Detta betyder att

$$\nabla^2\frac{1}{R} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{R} = -\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Detta betyder att $\frac{1}{R}$ är en Greenfunktion till Laplaceoperatorn (i tre dimensioner).

2 Elektrostatik

Coulombs lag Elektrostatiken utgår från Coulombs lag, som är en experimentellt framtagen lag. Den säjer att om två laddningar Q och q är separerade med en sträcka $\mathbf{R}$, är kraften mellan dem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}\mathbf{R}.$$

Alternativt, i termer av enhetsvektorer,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Båda laddningarna antas ha försumbar utsträckning, och betecknas punktladdningar. ε_0 kallas vakuumpermittiviteten, och har enhet $\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Elektriskt fält Det elektriska fältet som genereras av en laddning Q definieras som att en liten testladdning q upplever en kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

från Q. I våran definition skulle vi kunna lägga på ett $\lim\limits_{q\to 0}$.

Baserad på detta får vi att en punktladdning Q genererar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Eftersom krafter superponeras, gör även elektriska fält det. I diskreta fall motsvarar detta att summera över punktladdningar. I kontinuerliga fall integrerar vi i stället, där varje element i integrationen behandlas som en punktladdning, och vi får

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}q\,\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Laddningen kan vara spridd ut på en linje, en yta eller en volym, i vilka fall vi får $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$ respektiva $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}V$. Förutom de olika elementerna finns en linjeladdningstäthet, ytladdningstäthet eller volymladdningstäthet. Notera att med hjälp av Diracs delta kan alla dessa fallen skrivas som volymladdningstätheter.

Gauss' lag För att härleda Gauss' lag börjag vi med att titta på flödet av fältet $\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}$ genom en godtycklig yta, där $\mathbf{R}$ pekar från en utgångspunkt $\mathbf{r}'$ till ett givet ytelement. Integrationselementet

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{R^2}$$

är rymdvinkeln som areaelementet upptar när det ses från origo. Vi kan se på något sätt att detta motsvarar att projicera areaelementet ned på enhetssfären kring origo. Alternativt, om kurvor är involverade, skulle man projicera ned på enhetscirkeln. Flödet vi betraktar ges då av fönsterfunktionen

$$f(\mathbf{r}') = \int\limits_S \mathrm{d}S\,\frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{e_n}}{R^2} = \int\limits_\Omega \mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \mathbf{r}' \text{ innanför } S, \\ 0, & \mathbf{r}' \text{ utanför } S. \end{cases}$$

Vi kommer nu ihåg hur elektriska fältet ser ut på integralform, specifikt som en volymintegral, och får då för flödet genom en godtycklig yta

$$\begin{aligned}
\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} &= \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\frac{\rho}{R^2}\mathbf{e_R} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\int\limits_S \mathrm{d}S\,\rho\frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{e_n}}{R^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho f(\mathbf{r}) \\
&= \frac{Q_{\text{innesluten}}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Vektorn $\mathbf{R}$ är nu specifierad för varje punkt på ytan och i hela rummet. Den sista integralen är lika med laddningen som är innesluten i S eftersom fönsterfunktionen ger ett bidrag 4π om och endast om det finns laddning i den aktuella punkten.

Gauss' lag är ett bra verktyg för att beräkna elektriska fält för geometrier med mycket symmetri.

Gauss' lag på differentialform Betrakta nu en godtycklig yta S som exakt inneslutar volymen V. Gauss' lag ger då

$$\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \mathrm{d}V\,\rho.$$

Vi kan använda divergenssatsen för att skriva om vänstersidan som en integral över V. Därmed kan vi dra slutsatsen

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Randvillkor för elektrist fält Ytladdningar ger diskontinuiteter i elektriskt fält. För att studera det, betrakta en punkt på ytan. Gör en liten låda kring punkten så att fältet är ungefär konstant på sidorna som inte rör ytan. Gauss' lag ger oss, om bara tar med de nämnda sidorna, att elektriksa fältets normalkomponent relativt ytan uppfyller

$$E^{\perp}_{\text{ovan}}A - E^{\perp}_{\text{under}}A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

där A är sidornas yta. Positiv riktning för fältets normalkomponent är ut från ytan. Vid att låta lådan bli oändligt tunn kommer även de andra sidorna inte att ge något bidrag, varför det här måste stämma. Vi får därmed att

$$E^{\perp}_{\text{ovan}} - E^{\perp}_{\text{under}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Vi kan även betrakta en liten fyrkantig slinga på samma sätt, med två sidor parallella med ytan och två normala på ytan. Eftersom integralen av elektriska fältet kring en sluten kurva alltid är 0, får vi

$$E^{\parallel}_{\text{ovan}} - E^{\parallel}_{\text{under}} = 0.$$

Eftersom denna slingan kan ha vilken som helst orientering så länge man har två paralllella och två normala sidor, gäller det även på vektorform att

$$\mathbf{E}^{\parallel}_{\text{ovan}} - \mathbf{E}^{\parallel}_{\text{under}} = \mathbf{0}.$$

Dessa två resultat kan sammanfattas som

$$\mathbf{E}^{\parallel}_{\text{ovan}} - \mathbf{E}^{\parallel}_{\text{under}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}.$$

Elektrostatisk potential Med vår kunnskap från vektoranalysen kan vi skriva

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho\frac{1}{R}\right).$$

Vi definierar därmed den elektrostatiska potentialen enligt

$$\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V.$$

Från våran definition ser vi att nollnivån för potentialen kan sättas arbiträrt, då det elektriska fältet (som är det som är fysikaliskt) inte ändras om potentialen ändras med en konstant. Vi brukar lägga nollnivån i oändligheten.

Vi kan även från detta visa att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Potential och elektrisk spänning Betrakta storheten $\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Vi har

$$\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = E_i\,\mathrm{d}x_i = -\partial_i V\,\mathrm{d}x_i = -\,\mathrm{d}V\,.$$

Om vi nu jämför detta med den elektriska spänningen

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$$

mellan två punkter (som är den välkända spänningen vi känner från kretsvärlden), kan vi se att detta blir

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}V = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2),$$

oberoende av vägen mellan punkterna. Om vi lägger potentialens referens i oändligheten, ser vi då att

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E},$$

ett typ inverst påstående av $\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V$. Vi ser även från detta att

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}.$$

Potential och arbete Antag att du vill förflytta en laddning q i ett elektriskt fält. Den minsta kraften du måste verka med på laddningen för att göra detta är $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$, eftersom du arbetar mot det elektriska fältet. Arbetet du gör då är

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = -q\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = q(V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)).$$

Med andra ord är potentialskillnaden mellan två punkter lika med arbetet som måste göras för att förflytta en laddning från ena punkten till den andra per laddning.

Randvillkor för potentialen För att betrakta randvillkor för potentialen vid en ytladdning, kan man integrera elektriska fältet längs med en rak linje normalt på ytaddningen över ytan och låta linjen bli godtyckligt kort. Då försvinner integralen, och vi får att potentialen är kontinuerlig. Randvillkoret för elektriska fältet kan skrivas i termer av potentialen som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}}V_{\text{över}} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}}V_{\text{under}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

där $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}}$ är riktningsderivatan i normalriktningen.

Elektrostatisk energi Vi är nu intresserade av energin som krävs för att skapa en viss laddningsfördelning. Vi kommer därför beräkna energin som krävs för att transportera all laddningen från oändligheten och placera den på rätt sätt.

Vi börjar med att betrakta en samling laddningar som ska ligga på avstånd r_{ij} från varandra. Att placera första laddningen på rätt plats kräver inget arbete. Att sen placera ut andra laddningen kommer kräva att man arbetar mot elektriska fältet från första. Man måste alltså göra ett arbete

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$

På samma sätt måste laddning 3 motarbeta elektriska fältet från både 1 och 2. Det totala arbetet är därmed

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Eftersom $r_{ij} = r_{ji}$ kan vi nu skriva om den inre summan genom att i stället summera över alla andra partiklar än i, och lägga till en faktor $\frac{1}{2}$. Vi får då

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Vid att ordna om faktorerna får vi

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i(\mathbf{r}_i),$$

där V_i är potentialen som laddning i känner av på grund av alla de andra laddingarna. Ett uttryck man hade kunnat gissa sig fram till från början.

Vi generaliserar vidare vår definition till kontinuerliga laddningfördelningar som

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V\, \rho V.$$

Vi kan med hjälp av resultaten från tidigare skriva detta som

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V\, V \varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \mathrm{d}V\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot V\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\int \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot V\mathbf{E} + \int \mathrm{d}V\, E^2 \right).$$

Nu kan vi fundera lite över integrationsdomänder. Om man tittar på den ursprungliga integralen, ger den inget bidrag där det inte finns laddning. Därför kan vi börja med att integrera exakt över området där det finns laddning. Om vi gör området större, kommer den ursprungliga integralen att vara oändrad. Däremot kommer integralen av elektriska fältets belopp öka, så ytintegralen måste minska motsvarande. Vi kan nu repetera processen tills vi integrerar över hela rummet. Då försvinner ytintegralen, vilket man kan argumentera lite bättre för, och kvar står

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \mathrm{d}V\, E^2.$$

Det visar sig att om man använder resultatet för en laddningsfördelning på en diskret fördelning, får man inte samma svar. Detta är för att uttrycket för en diskret fördelning inte tar hänsyn till energin som krävs för att skapa punktladdningar till att börja med, vilket uttrycket för kontinuerliga fördelningar inkluderar. Denna finessen kom in i beräkningarna i övergången till kontinuerliga fördelningar, eftersom vi för diskreta fördelningar endast använde potentialen varje laddning känner på grund av alla andra. För kontinuerliga fördelningar är detta inte ett problem eftersom varje element har försvinnande liten laddning och därmed bidrar med försvinnande lite potential. För diskreta fördelningar gäller detta ej, dock.

Perfekta ledare En perfekt ledare har obegränsat med fria laddningar som kan röra sig i materialet. Från detta följer att

- $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ överallt inuti ledaren. Annars skulle någon av de fria laddningarna påverkas av fältet och röra sig sån att de kansellerade det.
- $\rho = \varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} = 0$ inuti ledaren. Därmed är alla fria laddningar på ytan.
- V är konstant inuti ledaren.
- $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{e_n}$ precis utanför ledaren på grund av elektriska fältets randvillkor, alternativt eftersom tangentiella komponenter skulle transportera laddningar på ytan som skulle kansellera fältet.

Kraften på en ytladdning Kring en ytladdning är elektriska fältet diskontinuerligt, så hur beräknar man kraften på en sådan? Med hjälp av superposition kan elektriska fältet skrivas som en summa av bidrag från själva laddningen och allt annat. Denna termen är kontinuerlig i ytan eftersom man skulle kunna ta bort ytladdningen utan att ändra den. Vidare ger randvillkoren att fältet på varje sida skiljer sig med en term $\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{e_n}$, som försvinner om man tar medelvärdet. Alltså ges kraften av laddningen gånger medelärdet av fältet på varje sida.

Kraften på en ledare Betrakta en ledare som specialfall. Här får vi en krafttäthet

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathbf{e_n},$$

som motsvarar ett tryck utåt på laddaren - oberoende av vilken sorts ytladdning man har! I termer av elektriska fältet kan trycket skrivas som

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Kapacitans Betrakta först två ledare med olika laddningar $\pm q$. Man kan se av integraluttrycket för elektriska fältet att det är proportionellt mot q. Eftersom potentialskillnaden mellan ledarna är en integral av elektriska fältet, är även denna proportionell mot q. Vi definierar därmed systemets kapacitans som proportionalitetskonstanten mellan de två, alltså

$$Q = CV.$$

Betrakta nu ett system av olika ledare, med var sin potential och laddning. Vi har även någon potentialreferens. Vi kan börja med att sätta alla potentialer förutom en till 0, och räkna ut alla Q_i. Vid att superponera alla dina resultat får du en mängd slutgiltiga samband på formen $Q_i = C_{ij}V_j$. Detta definierar kapacitansmatrisen. Man kan visa/argumentera för att matrisen är symmetrisk och positivt definit.

Energin för ett system av ledare För ett system av ledare har vi

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\, \rho V \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\text{ledare } i} \mathrm{d}S\, \sigma_i V_i \\
&= \frac{1}{2}V_i \int\limits_{\text{ledare } i} \mathrm{d}S\, \sigma_i \\
&= \frac{1}{2}V_i Q_i.
\end{aligned}$$

Om vi använder kapacitansmatrisen får vi

$$W = \frac{1}{2}V_i C_{ij} V_j.$$

För en enda kondensator blir detta

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2C}Q^2.$$

Poissons ekvation Om vi tittar på våra resultat, får vi nu Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Entydighetssats för potentialen Betrakta en region H med känd laddningstäthet som innehåller tre regioner avgränsade av ytorna S_D, S_N och S_Q (med normalvektorerna pekande in mot de avgränsade regionerna). På S_D är $V = V_\mathrm{S}$ känd. På S_N är $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V = -E_\mathbf{n}$ känd. S_Q är en perfekt ledare med känd total ytladdning Q. Vi vill försöka visa att elektriska fältet är entydigt i H.

För att visa detta, antag att vi har två lösningar V_1 och V_2 och bilda $V_0 = V_1 - V_2$. Då vet vi att $\nabla^2 V_0 = 0$ i H, $V_0 = 0$ på S_D och S_Q, att $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = 0$ på S_N och $\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\, \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = 0$. Detta stämmer eftersom

$$\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\, \sigma = \int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\, \sigma$$

Vi får därmed

$$\int\limits_{S_D+S_Q+S_N} \mathrm{d}S\, V_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = \int\limits_H \mathrm{d}V\, V_0 \nabla^2 V_0 + \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} V_0\right|^2 = \int\limits_H \mathrm{d}V \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} V_0\right|^2.$$

På S_D och S_N är en av faktorerna i integranden lika med 0, så vi behöver endast betrakta S_Q. Här har vi att V_0 måste vara konstant på ytan, vilket ger

$$\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\, V_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = V_0 \int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\, \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = 0,$$

vilket implicerar

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} V = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{0},$$

och beviset är klart.

Speglingsmetoder Vissa problem kan lösas med speglingsmetoder. Då kan man ersätta vissa komponenter av ett problem med andra på ett sådant sätt att randvillkor som ges i problemet fortfarande är uppfylda.

Spegling och potentialen från två linjeladdningar Vi kommer behöva lite standardlösningar för att använda när vi speglar problem. Vi betraktar därför först två oändligt långa parallella linjeladdningar med laddning $\pm\lambda$ per längd separerade med ett avstånd $2h$. Problemet är tvådimensionellt, och vi inför $\mathbf{s}$ som vektorn från punkten mitt emellan laddningarna till en godtycklig punkt i planet. Elektriska fältet från laddningen till höger, som vi döper nummer 1, ges av $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_\mathbf{s}$, där $\mathbf{s}_1 = h\mathbf{e_x}$ och $\mathbf{e}'_\mathbf{s}$ pekar i samma riktning som $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$. Vi definierar $V = 0$ där $\mathbf{s} = 0$ och får

$$V(\mathbf{s}) = -\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} \mathrm{d}\mathbf{s}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0|\mathbf{s}' - \mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_\mathbf{s} = -\int\limits_{-\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}-\mathbf{s}_1} \mathrm{d}\mathbf{u}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 u'}\mathbf{e}'_\mathbf{u}.$$

Vi har rotationssymmetri i planet, och kan därmed välja en radiell riktning för integrationen, vilket ger

$$V(\mathbf{s}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{|-\mathbf{s}_1|} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{h}.$$

Den totala potentialen är därmed

$$V(\mathbf{s}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}.$$

Ekvipotentialytorna uppfyller $V = V_0$, vilket ger

$$\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|} = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}}.$$

Vi definierar $u = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}$ och skriver om avstånden på vänstersidan för att få

$$\frac{(x+h)^2+y^2}{(x-h)^2+y^2} = e^{2u}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
x^2+2xh+h^2+y^2 &= e^{2u}(x^2-2xh+h^2+y^2),\\
x^2(1-e^{2u})+2xh(1+e^{2u})+y^2(1-e^{2u}) &= h^2(e^{2u}-1),\\
x^2(e^{-u}-e^{u})+2xh(e^{-u}+e^{u})+y^2(e^{-u}-e^{u}) &= h^2(e^{u}-e^{-u}),\\
-x^2\sinh u+2xh\cosh u-y^2\sinh u &= h^2\sinh u,\\
x^2-2xh\coth u+h^2+y^2 &= 0,\\
x^2-2xh\coth u+h^2\left(\coth^2 u-\frac{1}{\sinh^2 u}\right)+y^2 &= 0,\\
(x-h\coth u)^2+y^2 &= \frac{h^2}{\sinh^2 u}
\end{aligned}$$

Det är alltså en cirkel med centrum i $h\coth u\mathbf{e_x}$ och radie $a = \frac{h}{|\sinh u|}$. Avstånden från cirkelns centrum till de två laddningarna är

$$d_1 = h|\coth u - 1|,\ d_2 = h|\coth u + 1|.$$

Eftersom $|\coth u| > 1$, får vi

$$d_1 d_2 = h^2(\coth^2 u - 1) = \frac{h^2}{\sinh^2 u} = a^2.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en linjeladdning λ parallell med en ledande cirkulärcylindrisk yta med radien a och laddning $-\lambda$ per längd, och avståndet från cylinderaxeln till linjeladdningen är d, kan cylinderytan ersättas med en linjeladdning $\lambda_\mathrm{s} = -\lambda$ ett avstånd $d_\mathrm{s} = \frac{a^2}{d}$ från cylinderaxeln.

Spegling och potentialen från två punktladdningar Betrakta två punktladdningar liggande på z-axeln, där den översta, döpt nummer 1, ligger i punkten $h\mathbf{e_z}$ och den andra i origo. Problemet är cylindersymmetriskt, så vi inför cylinderkoordinater. Potentialen är då

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right).$$

Ekvipotentialytorna för en nollskild potential är komplicerade, men ekvipotentialytan för $V = 0$ ges av

$$\begin{aligned}
\frac{q_1}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} &= 0,\\
k = \frac{q_1}{q_2} &= -\frac{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}}{\sqrt{\rho^2+z^2}},\\
\rho^2(k^2-1)+k^2z^2 &= (z-h)^2,\\
z^2(1-k^2)-2zh+h^2 &= \rho^2(k^2-1),\\
\rho^2+z^2-\frac{2zh}{1-k^2}+\frac{h^2}{1-k^2} &= 0,\\
\rho^2+\left(z-\frac{h}{1-k^2}\right)-\frac{h^2}{(1-k^2)^2}+\frac{h^2}{1-k^2} &= 0,\\
\rho^2+\left(z-\frac{h}{1-k^2}\right) &= \frac{h^2k^2}{(1-k^2)^2}.
\end{aligned}$$

Detta är en sfär med centrum i $\frac{1}{1-k^2}h\mathbf{e_z}$ och radius $a = h\left|\frac{k}{1-k^2}\right|$. Notera att det är en förutsättning att $k < 0$, alltså att laddningarna har olika tecken.

Om vi nu antar $k^2 > 1$ ligger sfärens centrum under laddning 2. Avstånden från sfärens centrum till de två punktladdningarna är då

$$d_2 = \frac{1}{k^2 - 1} h,\ d_1 = h + d_2 = \frac{k^2}{k^2 - 1} h.$$

Detta ger

$$d_1 d_2 = a^2,\ k = -\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = -\frac{d_1}{a} = -\frac{a}{d_2}.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en punktladdning q ett avstånd d från centrum av en jordad ledande sfärisk yta med radien a, kan ledaren ersättas med en punktladdning $q_s = -q\frac{a}{d}$ ett avstånd $d_s = \frac{a^2}{d}$ från sfärens centrum (bort från punktladdningen).

Laplace' ekvation i sfäriska koordinater Vid att ställa upp Poissons ekvation i sfäriska koordinater på ett laddningsfritt domän som avgränsas av två sfäriska skal får man Laplace' ekvation. Den har allmän lösning på formen

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

där Y_{lm} är klotytefunktionerna. A_{lm} bestäms av laddningarna utanför det yttre skalet och B_{lm} av laddningarna innanför det inre skalet.

Vi har allmänt att

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi},$$

där P_l^m är Legendrepolynomen. I fall som är rotationssymmetriska med avseende på xy-planet kan lösningen därför förenklas till

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^0(\cos\theta).$$

Anpassningsmetod Betrakta ett fall likt fallet ovan där vi även känner V på z-axeln. Eftersom $P_l(1) = 1$ och $P_l(-1) = (-1)^l$ får vi längs z-axeln

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l |z|^l + \frac{B_l}{|z|^{l+1}} \right) \begin{cases} 1, & z > 0, \\ (-1)^l, & z < 0. \end{cases}$$

Elektriska dipolen Betrakta två punktladdningar på en linje. Linjen går genom origo, och laddningarna ligger lika långa avstånd $\frac{1}{2}d$ från origo. Potentialen i punkten $\mathbf{r}$, som ligger ett avstånd R_+ respektiva R_- från de två laddningarna, ges av

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-}.$$

Om $r >> d$ fås

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{r}$ och linjen. Vi kan då skriva detta som

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{e_r}}{r^2}.$$

Vi definierar nu dipolmomentet $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, och får då

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Notera att vi kan skriva dipolmomentet som $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$.

Ideala dipoler En ideal dipol fås i gränsen för en dipol när d blir oändligt liten på ett sådant sätt att $\mathbf{p}$ hålls konstant.

Fältet från en dipol Fältet från en dipol ges av

$$\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

I nämnaren har vi

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_i r_i \implies \partial_i \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_i \implies \vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{p}.$$

Vi får då

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\vec{\boldsymbol{\nabla}} r\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} - \mathbf{p}\right).$$

Dipolmoment för en laddningsfördelning För en laddningsfördelning ges dipolmomentet av

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}V\, \mathbf{r}\rho.$$

Förflyttning av koordinatsystem och dipolmoment Vid förflyttning av origo en sträcka $\mathbf{a}$ fås

$$\mathbf{p}' = \int \mathrm{d}V\, \mathbf{r}'\rho = \int \mathrm{d}V\, (\mathbf{r}-\mathbf{a})\rho = \mathbf{p} - q\mathbf{a}.$$

Alltså beror dipolmomentet av origos position om det finns en netto mängd laddning i systemet.

Multipolutveckling Betrakta en punkt $\mathbf{r}$ och en annan punkt $\mathbf{r}'$. Vid att definiera $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ får vi att om de två punkterna inte är samma, är $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$ överallt förutom där $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Vid att lägga vårat koordinatsystem så att $\mathbf{r}'$ är parallell med z-axeln och definiera vinkeln mellan $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}'$ som γ fås

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\gamma), & r < r', \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^l} P_l(\cos\gamma), & r > r'. \end{cases}$$

Speciellt, på z-axeln är $\gamma = 0$ och

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_> - r_<} = \frac{1}{r_>}\left(1 - \frac{r_<}{r_>}\right)^{-1} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}},$$

där $r_< = \min(r', r)$ och $r_> = \max(r', r)$. Vi utvidgar därmed lösningen till

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma).$$

Vi söker nu potentialen utanför en sfär som omsluter en rumladdning. Vid att låta $\mathbf{r}$ peka utanför sfären och $\mathbf{r}'$ inuti fås $r_< = r',\ r_> = r$ och

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\rho}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int \mathrm{d}V'\,(r')^l \rho P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l.$$

De olika V_l kommer ge oss termer som ser ut som olika multipoler, och vi vill nu studera dem. Vi noterar först att om e_i respektiva e_i' är komponenterna av $\mathbf{e_r}$ respektiva $\mathbf{e_r'}$, kan vi skriva

$$\cos(\gamma) = e_i e_i',\ \cos^2(\gamma) = e_i e_i' e_i e_j',\ 1 = e_i e_i = e_i e_j \delta_{ij}.$$

För $l = 0$ får vi

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}V'\,\rho,$$

alltså ett bidrag motsvarande en punktladdning med samma totala laddning i origo. För $l = 1$ fås

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \mathrm{d}V'\,r'\rho P_1(\cos\gamma) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}V'\,r'\cos\gamma\rho \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}V'\,r' e_i e_i'\rho \\
&= \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}V'\,r_i'\rho \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e_r}\cdot\int \mathrm{d}V'\,r_i'\rho
\end{aligned}$$

alltså ett bidrag motsvarande en dipol med samma totala dipolmoment i origo. För $l = 2$ fås

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \mathrm{d}V'\,r'^2\rho P_2(\cos\gamma) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}V'\,r_i' r_i'\rho(3\cos^2(\gamma) - 1) \\
V_2 &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}V'\,r_k' r_k'\rho(3\cos^2(\gamma) - 1) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}V'\,r_k' r_k'\rho(3e_i e_i' e_i e_j' - e_i e_j\delta_{ij}) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}e_i e_j\int \mathrm{d}V'\,r_k' r_k'\rho(3e_i' e_j' - \delta_{ij}) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}e_i e_j\int \mathrm{d}V'\,\rho(3r_i' r_j' - (r')^2\delta_{ij}).
\end{aligned}$$

Vi definierar nu kvadrupolmomentstensorn

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V'\,\rho(3r_i' r_j' - (r')^2\delta_{ij}),$$

vilket ger

$$V = \frac{e_i Q_{ij} e_j}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Detta är kvadrupolbidraget.

Allmänt blir det l:te bidraget på formen

$$V_l = \frac{Q_{i_1\ldots i_l} e_{i_1}\ldots e_{i_l}}{4\pi\varepsilon_0 r^{l+1}}.$$

Additionssatsen Hellre än att hantera komponenterna av kvadrupolmomentstensorn, använder vi en sats som säjer

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi').$$

Då kan vi skriva

$$\sum_{l=0}^{\infty} V_l,\ V_l = \frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0 r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l} q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi),$$

där q_{lm} är det sfäriska multipolmomentet

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}V * \rho(r')^l)Y^*_{lm}(\theta',\phi').$$

Varje V_l har alltså $2l+1$ oberoende komponenter, vilket på grund av multipolmomenttensorernas symmetri och spårlöshet är lika med antalet oberoende komponenter i multipolmomenttensorn.

Kraft på en laddningsfördelning Betrakta en laddningsfördelning i ett yttre måttligt varierande elektriskt fält. Kraften på laddningsfördelningen ges då av

$$\mathbf{F} = \int \mathrm{d}V\, \rho\mathbf{E}.$$

Vi vill nu approximera elektriska fältet i laddningsfördelningen vid att utveckla den kring en referenspunkt $\mathbf{r}_0$. Komponentvis har vi

$$E_i \approx E_{i,0} + (r_j - r_{j,0})\partial_j E_i,$$

varför

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}$$

och

$$\mathbf{F} \approx \int \mathrm{d}V\, \rho\left(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}\right).$$

Vidare, under antagandet att fältet varierar måttligt kan alla derivator antas vara konstanta, vilket ger

$$\mathbf{F} \approx \int \mathrm{d}V\, \rho\mathbf{E}_0 + \int \mathrm{d}V\, \rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E} = Q\mathbf{E}_0 + (\mathbf{p}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E},$$

där dipolmomentet mäts relativ $\mathbf{r}_0$. Att dra ut elektriska fältet i andra termen från integralen är helt okej - man kan tänka sig att integrationen skapar en operator som sedan får verka på fältet.

Vridmoment på en laddningsfördelning På en punktladdning har vi

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = q\mathbf{r}\times\mathbf{E}.$$

För en laddningsfördelning fås då, relativt en referenspunkt O, vridmomentet

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int \mathrm{d}V\, \rho\mathbf{r}\times\mathbf{E}\\ &\approx \int \mathrm{d}V\, \rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Vi försummar nu termer av andra ordningen i $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ och får

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int \mathrm{d}V\, \rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E})) \\
&= \left(\int \mathrm{d}V\, \rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times\int \mathrm{d}V\, \mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}) \\
&= \mathbf{p}\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times\mathbf{F}.
\end{aligned}
$$

Polarisation Polarisationen $\mathbf{P}$ uppfyller

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}V\, \mathbf{P}.$$

Detta fältet uppfyller inga speciella randvillkor, och är allmänt ej rotationsfritt.

Polariserbarhet Polariserbarheten α uppfyller

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}.$$

Fält och potential från polarisation Från ett litet rymdelement fås

$$\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{P}\,\mathrm{d}V\,,\ \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_R}}{R^2},\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\, \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{e_R}}{R^2}.$$

Elektriska fältet kommer ha en singularitet som beter sig som $\frac{1}{R^3}$. Denna kommer inte upphävas av volymelementet, och kräver specialbehandling.

Vi kommer dock lösa detta genom att använda att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{R} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R},$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\, \mathbf{P}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\, \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\frac{\mathbf{P}}{R^2} - \frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{P} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\, \frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{P},
\end{aligned}
$$

vilket motsvara coulombpotentialen från två ekvivalenta laddningsfördelningar

$$\rho_\mathrm{b} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{P},\ \sigma_\mathrm{b} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{e_n}.$$

Vi kalla dessa för bundna laddningsfördelningar. Nu kan vi beräkna elektriska fältet som

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}S\, \frac{\sigma_\mathrm{b}}{R^2}\mathbf{e_R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\, \rho_\mathrm{b}\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Introduktion av D-fältet Gauss' lag på integralform ger oss nu

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{P} + \rho_\mathrm{f}}{\varepsilon_0},$$

där ρ_f är den fria laddningstätheten. Detta implicerar

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_\mathrm{f},$$

vilket uppmanar oss att definiera

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Randvillkor för D-fältet Vi kan visa att

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_\mathrm{b},\ \mathbf{D}_1^\parallel - \mathbf{D}_2^\parallel = \mathbf{P}_1^\parallel - \mathbf{P}_2^\parallel.$$

Linjära dielektrika Linjära dielektrika uppfyller

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}\mathbf{E}$$

för måttliga fältstyrkor. χ_e är dielektrikumets elektriska susceptibilitet.

D-fält i linjära dielektrika I ett linjärt dielektrikum fås

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e})\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}.$$

ε_r är dielektrikumets relativa permittivitet, och ε är dets permittivitet.

Energi för linjära dielektrika I linjära dielektrika tillkommer även arbete för att polarisera dielektrikumet. Om man betraktar en atom som en punktladdning q och en laddning $-q$ jämnt fördelad över ett klot med radie a, skapar det negativt laddade molnet ett elektriskt fält

$$\mathbf{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r},\ r < a.$$

Kraften på laddningen i mitten blir då

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{2}r^2.$$

Arbetet som krävs för att förflytta laddningen i mitten från centrum blir då

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_{-q}.$$

Om nu atomen är i ett yttre elektriskt fält $\mathbf{E}$, kommer det elektriska fältet att förflytta laddningen i centrum. Jämvikt fås när $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{-q}$, och arbetet som görs för att förflytta laddningen i mitten är då

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}.$$

Med detta argumentet i bakgrunden ställer vi upp energin i ett dielektrikum som

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}.$$

I tillägg har vi det övriga bidraget för att skapa det elektriska fältet, och totala energin ges av

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}.$$

Krafter på ett dielektrikum Betrakta ett dielektrikum någonstans i närheten av två perfekta ledare med laddning $\pm Q$ på de respektiva. Ledarna kan antingen vara isärkopplade eller kopplade ihop med ett batteri som upprätthåller en konstant spänningsskillnad U mellan dem. Dielektrikumets position beskrivs av dets geometri och en referensvektor $\mathbf{r}$ (till exempel till dets geometriska centrum). Att beräkna elektriska fältet är allmänt svårt, men vi ska försöka undveka detta med ett trick.

Betrakta första fallet först. Om dielektrikumet förflyttas en sträcka d$\mathbf{r}$, gör elektriska fältet från ledarna ett arbete på det, som nödvändigtvis måste balanseras av ett mekaniskt arbete. Arbetet som görs på systemet är

$$\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{\nabla}}W\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\,\mathrm{d}W_\mathrm{e} = -\mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Samtidigt kan vi skriva systemets energi W i termer av parameterna i systemets beskrivning. Därmed är kraften på dielektrikumet

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} W = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\vec{\boldsymbol{\nabla}} C = \frac{1}{2}V^2\vec{\boldsymbol{\nabla}} C.$$

Betrakta nu det andra fallet. Om spänningen mellan ledarna hålls konstant, kommer translation av dielektrikumet behöva balansera arbetet både från translation i elektriska fältet och arbetet som krävs för att transportera laddning mellan ledarna för att hålla spänningsskillnaden mellan dem konstant. Vi får

$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}Q - \mathrm{d}W_\mathrm{e} = U\,\mathrm{d}Q - \mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Samtidigt ges vänstersidan av $\mathrm{d}W = \frac{1}{2}U\,\mathrm{d}Q$, så $U\,\mathrm{d}Q = 2\,\mathrm{d}W = 2\vec{\boldsymbol{\nabla}} W\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, vilket ger

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} W = \frac{1}{2}U^2\vec{\boldsymbol{\nabla}} C.$$

Moment på ett dielektrikum Vid att göra en liknande analys som den ovan fås

$$\mathbf{N}_\mathrm{e} = \pm\partial_\phi W_\mathrm{e}\mathbf{e_z},$$

där $+$ och $-$ är fallen där Q respektiva U är konstant.

3 Magnetostatik

Ström Ström definieras som $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Strömtäthet I fall där strömmen inte flödar längs med linjer utan längs ytor eller fritt i rummet definierar vi strömtätheten $\mathbf{J}$ som vektorfältet som beskriver flödet av laddningar. Strömtäthetens belopp ges av $J = \rho v$, där $\mathbf{v}$ är hastighetsfältet för laddningarna.

Kontinuitetsekvation för strömtätheten Strömtätheten uppfyller

$$\partial_t\rho + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J} = 0.$$

Kraft på strömslingor Betrakta två slingor C och C'. Genom varje slinga går en ström I respektiva I' i samma riktning som kurvans orientering. Experiment har visat att kraften på C från C' ges av

$$\mathbf{F} = \int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{r}\,I\times\left(\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int\limits_{C'}\mathrm{d}\mathbf{r}'\times\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\right)$$

där $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Magnetiska fältet Genom att definiera det magnetiska fältet från C' i punkten $\mathbf{r}$ som

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int\limits_{C'}\mathrm{d}\mathbf{r}'\times\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}$$

fås

$$\mathbf{F} = \int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{r}\,I\times\mathbf{B}.$$

Magnetfält från strömtätheter För strömmar fördelade i rummet eller på en yta kan vi utvidga definitionen av magnetiska fältet till att bli

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}S\,\mathbf{J}\times\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\text{ eller }\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}V\,\mathbf{J}\times\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Potential för magnetfältet Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}\times\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} \\
&= \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Rotationsoperatorn kan tas utanför integrationen då den verkar på koordinater som det ej integreras över. Vi definierar då vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\mathbf{J},$$

och har då

$$\mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{A}.$$

Entydighet för vektorpotentialen Vektorpotentialen kan även definieras som

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\mathbf{J} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Lambda,$$

där Λ är en godtycklig funktion. Eftersom gradienter ej har rotation, kommer denna vektorpotentialen att ge samma magnetfält. Vi kommer oftast sätta $\Lambda = 0$.

Magnetfältets divergens Eftersom $\mathbf{B}$ är rotationen av en vektorpotential, gäller det att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

Vektorpotentialens divergens Vi har

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{A} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\mathbf{J} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{1}{R} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\frac{1}{R} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{J} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\frac{1}{R}\mathbf{J} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot'\mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\frac{1}{R}\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

I elektrostatiska fall är alla laddningar statiska, och detta ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{A} = 0.$$

Magnetiskt flöde Det magnetiska flödet definieras som

$$\Phi = \int \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

Med hjälp av Stokes' sats fås

$$\Phi = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot A.$$

Detta blir alltid 0 genom en sluten yta.

Vektorpotentialens laplacian På samma sätt som för elektriska potentialen fås

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Magnetfältets rotation Vi har

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Ampères cirkulationslag Strömmen genom en yta ges av

$$I = \int \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}.$$

Randvillkor för magnetfältet Som med elektriska fältet rör vi oss nära en ytströmtäthet. Kring denna lägger vi en yta och beräknar flödet genom den när ytans tjocklek blir liten. Detta ger

$$B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0.$$

Vidare kan vi skriva

$$\int \mathrm{d}V\, \mu_0 \mathbf{J} = \int \mathrm{d}V\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}.$$

Med indexräkning fås

$$\left[\int \mathrm{d}V\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}\right]_i = \varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}V\, \partial_j B_k = \varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}S_j\, B_k = \left[\int \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B}\right]_i.$$

Detta ger

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Ett motsvarande bevis kan även göras med Ampères lag för en liten strömslinga.

Magnetiskt dipolmoment för en slinga Betrakta en strömslinga C som bär en ström I. Vi söker vektorpotentialen på stort avstånd från slingan. Det exakta uttrycket ges av

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{r}\, \frac{I}{R}.$$

Om C omkransar en yta S, fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \frac{1}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e_R}.$$

Vid stora avstånd fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(I\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\right) \times \frac{1}{r^2}\mathbf{e_r} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\mathbf{m}\times\mathbf{e_r},$$

där vi har definierat det magnetiska dipolmomentet

$$\mathbf{m} = I\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} = I\mathbf{S}.$$

Igen har vi definierat slingans vektorarea $\mathbf{S}$.

Hur ska man välja vektorarean? Tänk dig att C är randen till två olika ytor S_1 och S_2. Detta ger

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \int\limits_{S_1} \mathrm{d}\mathbf{r} - \int\limits_{S_2} \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{S_1+S_2} \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_V \mathrm{d}V\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}1 = \mathbf{0},$$

och därmed spelar inte valet roll.

Magnetiskt dipolmoment för en allmän strömtäthet För att studera en allmän strömtäthet, vill vi dela den upp i slingor. Betrakta då konen med $\mathbf{r}$, som ligger på C, som generatris. För denna är ytelementet $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{r}$ fås

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int\limits_C \mathbf{r}\times I\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Vi generaliserar detta genom att låta $I\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ gå mot $\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$ och integrera över dessa resultat för att få

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{r}\times\mathbf{J}.$$

Dipolmomentets beroende av origo Om vi förflyttar vårat koordinatsystem fås

$$\mathbf{m}_O = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_O)\times\mathbf{J} = \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_O\times\int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}.$$

Vi har

$$\int \mathrm{d}V\,J_i = \int \mathrm{d}V\,\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}r_i + r_i\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J} = \int \mathrm{d}V\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot r_i\mathbf{J} + r_i\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J}.$$

Vi använder nu att vi arbetar med magnetostatik för att ta bort sista termen, vilket ger

$$\int \mathrm{d}V\,J_i = \int \mathrm{d}V\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot r_i\mathbf{J} = \int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot r_i\mathbf{J}.$$

Slingan förutsätts vara ändlig, och då behöver vi bara integrera över en yta som innesluter den. På den ytan är $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, vilket ger att integralen av komponenten blir 0, och slutligen

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{m}.$$

Magnetiska fältet från en dipol Vi får

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e_r} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{3}{r^4} \vec{\boldsymbol{\nabla}} r \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{3}{r^4} \mathbf{e_r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{m} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}) \mathbf{r}) \right) \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-3 \mathbf{e_r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e_r}) + \frac{1}{r^3} (3\mathbf{m} - \mathbf{m}) \right) \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-3(\mathbf{e_r} \cdot \mathbf{e_r}) \mathbf{m} + 3 \times (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e_r}) \mathbf{e_r} + 2\mathbf{m} \right) \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e_r}) \mathbf{e_r} - \mathbf{m} \right).
\end{aligned}
$$

Kraft på en magnetisk dipol Kraften på en strömslinga C ges av

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int_C I \, \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B} \\
&= I \int_S (\mathrm{d}\mathbf{S} \, times \vec{\boldsymbol{\nabla}}') \times \mathbf{B} \\
&= I \int_S \mathrm{d}S \, \vec{\boldsymbol{\nabla}}' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e_n}) - \mathbf{e_n} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{B}).
\end{aligned}
$$

Komponentvis fås

$$F_i = I \int_S \mathrm{d}S \, \partial_i' B_j n_j.$$

Vi antar att magnetfältet varierar måttligt över slingan, och approximerar derivatornas värde i mittpunkten, varför den faktorn kan tas utanför integralen. Detta ger

$$F_i = I \partial_i B_j \int_S \mathrm{d}S_j = \partial_i B_j S_j,$$

och slutligen

$$\mathbf{F} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

Vridmoment på en slinga Vridmomentet ges av

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int_C \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F} \\
&= I \int_C \mathbf{r} \times (\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \\
&= I \int_C (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}) \mathbf{B}.
\end{aligned}
$$

Vi approximerar fältet till att vara konstant och lika med fältet i mitten, vilket ger

$$\mathbf{B} \int_C (\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}) = \mathbf{B} \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= I \int_C \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \\
&= I \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \\
&= I \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B} \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{B}.
\end{aligned}
$$