Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

31 oktober 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ osv.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör V till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp k med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x+y) = cx + cy, \ c \in \mathbb{R}, \ x, y \in V$.
- $(c+d)x = cx + dx, \ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$(x+W)+(y+W)=x+y+W,$$
$$a(x+W)=(ax)+W.$$

Linjärt oberoende mängder S är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla x_i är elementer i S.

Linjärt hölje Det linjära höljet $\mathrm{Span}\,(S)$ av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S.
- det minsta delrummet som innehåller S.
- $\bigcap\limits_{S \subset W} W$.
- $\sum\limits_{x \in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfir En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$T(x+y)=T(x)+T(y),$$
$$T(cx)=cT(x), c \in \mathbb{R}.$$

Vi säjer att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om B är en bas för V och D är en bas för W kan vi ordna en matris för $L : V \to W$ genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in I} a_{ji} y_j,$$

där alla $x_i \in B$, alla $y_i \in D$ och I är en mängd av index som det skall summeras över.

Koordinater Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V. Vi definierar då en avbildning

$$V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i x i \to \{a_i\}_{i \in I}.$$

Detta är en isomorfi.

Basbyte Låt $_D$