

# Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

11 oktober 2018

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Accelererande referensramar</b>	<b>1</b>
1.1	Kinematik . . . . .	1
1.2	Dynamik . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Partikelsystem</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Stela kroppar</b>	<b>8</b>
3.1	Allmän kinematik . . . . .	8
3.2	Allmän dynamik . . . . .	9
3.3	Plan rörelse . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Variationskalkyl</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Analytisk mekanik</b>	<b>17</b>

# 1 Accelererande referensramar

## 1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram  $S'$  som rör sig relativt en inertialram  $S$ .  $S'$  rör sig med hastighet  $\mathbf{v}_{O'}$  och roterar med vinkelhastighet  $\boldsymbol{\omega}$  kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$ ).

**Vinkelhastighet** Definitionen av ett koordinatsystems vinkelhastighet ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{y'}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{z'} \right) \hat{\mathbf{e}}_{x'} + \left( \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{z'}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{x'} \right) \hat{\mathbf{e}}_{y'} + \left( \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{x'}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y'} \right) \hat{\mathbf{e}}_{z'}.$$

För att visa att vinkelhastigheter är additiva, inför tre system  $S_0, S_1, S_2$ , vinkelhastigheten  $\boldsymbol{\omega}_{1,0}$  av  $S_1$  relativt  $S_0$  och derivatan

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A}.$$

Detta sambandet ges här utan bevis. Vid att använda derivationssambanden  $1-2, 1-0, 2-0$  får man

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,1} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{A} = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_2 + \boldsymbol{\omega}_{2,0} \times \mathbf{A},$$

vilket implicerar

$$\boldsymbol{\omega}_{2,0} = \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0}.$$

Det gäller speciellt att

$$\boldsymbol{\omega}_{2,1} = -\boldsymbol{\omega}_{1,2}.$$

Vi betraktar vidare vinkelaccelerationen, och inför

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,0} = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{dt} \right)_0.$$

Vid att tidsderivera additionssambandet för vinkelhastigheter får man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{2,0} &= \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{1,0}}{dt} \right)_0 + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{dt} \right)_0 \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{2,1}}{dt} \right)_1 + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \boldsymbol{\alpha}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1}, \end{aligned}$$

alltså är vinkelaccelerationer allmänt ej additiva. Man kan dock visa att

$$\boldsymbol{\alpha}_{2,1} = -\boldsymbol{\alpha}_{1,2}.$$

**Transformation av vektorstorheter** Betrakta en godtycklig vektorstorhet  $\mathbf{A}$ . Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= A'_x \hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y \hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z \hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dA_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \frac{dA'_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{dA'_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{dA'_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_x}{dt} + A'_y \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_y}{dt} + A'_z \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_z}{dt}.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatoren

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{dA'_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_x + \frac{dA'_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_y + \frac{dA'_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av  $\left| \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} \right| = \omega \sin \alpha_i$ , där  $\alpha_i$  är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn  $\boldsymbol{\omega}$  och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på  $\boldsymbol{\omega}$  och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva  $\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_i$ , och slutligen

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (1)$$

**Hastighet** Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där  $\mathbf{r}$  är Ortsvektorn i  $S$ ,  $\mathbf{r}'$  är Ortsvektorn i  $S'$  och  $\mathbf{r}_{O'}$  är Ortsvektorn till origo i  $S'$  relativt  $S$ . Vi tidsderiverar och får

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$

Vi känner igen hastigheten i  $S$  och hastigheten till ramen  $S'$ . Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i  $S'$ , vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i  $S'$  som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt  $S'$ , vilket ger den hastighet i  $S$  lika med  $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{sp} + \mathbf{v}',$$

där  $\mathbf{v}_{sp}$  är systempunktens hastighet.

**Acceleration** För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i  $S'$  för att få

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}') + \dot{\mathbf{v}}'. \end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i  $S$ , accelerationen till ramen  $S'$  och hastigheten mätt i  $S'$ , och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt  $S'$ , ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger  $\mathbf{a}_{\text{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration  $S'$ . Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen  $\mathbf{a}_{\text{cor}}$ . Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{sp}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}'.$$

## 1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i  $S$ , får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{sp}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}').$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften  $\mathbf{F}_{\text{sp}} = -m\mathbf{a}_{\text{sp}}$  och Corioliskraften  $\mathbf{F}_{\text{cor}} = -m\mathbf{a}_{\text{cor}}$ . Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{sp}} + \mathbf{F}_{\text{cor}} = \mathbf{F}_{\text{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft  $\mathbf{F}_{\text{tl}} = -m\mathbf{a}_{O'}$ .
- en transversell kraft  $\mathbf{F}_{\text{tv}} = -m\mathbf{a}_{\text{tv}} = -m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$ .
- en centrifugalkraft  $\mathbf{F}_{\text{c}} = -m\mathbf{a}_{\text{c}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ .

## 2 Partikelsystem

Ett partikelsystem är en samling av  $N$  partiklar med (konstanta) massor  $m_i$  och total massa  $m$  som samverkar. Varje partikel påverkas av yttre krafter med summa  $\mathbf{F}_i$  samt inre krafter  $\mathbf{f}_{ij}$  med alla andra partiklar i systemet.

Vi antar att alla inre krafter verkar parallellt med linjen mellan partiklarna. Newtons andra lag ger  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ , vilket även implicerar  $\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$ .

Vi definierar kraftsummorna

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{f} &= \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}.\end{aligned}$$

Vi får

$$\mathbf{f} = \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} = - \sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f},$$

och därmed  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

**Masscentrum** Vi kommer ihåg att masscentrum för ett partikelsystem definieras som

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

**Rörelsemängd** Systemets totala rörelsemängd ges av

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{d m \mathbf{r}_G}{dt} = m \mathbf{v}_G.$$

**Kraftekvationen för ett partikelsystem** Kraftekvationen för en enda partikel ger

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij}.$$

Om vi adderar alla dessa ekvationer, får man

$$\begin{aligned}\sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} &= \sum \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum m_i \mathbf{r}_i \right) &= \mathbf{F} + \mathbf{f}, \\ \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_G) &= \frac{d \mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},\end{aligned}$$

vilket är kraftekvationen som vi känner den. Med konstant massa kan detta även skrivas som

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{F}.$$

**Energilagen för ett partikelsystem** Arbetet som görs på en partikel i ett partikelsystem under en infinitesimal rörelse ges av

$$dU_i = \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = dU_i^{(i)} + dU_i^{(e)}.$$

Det totala arbetet som görs på partikelsystemet ges av

$$dU = \sum dU_i^{(i)} + dU_i^{(e)} = dU^{(i)} + dU^{(e)},$$

där vi har infört arbetet som görs av inre och yttre krafter. Vi kan från detta integrera för att få

$$U_{0-1} = T_1 - T_0,$$

där  $T$  nu är hela systemets kinetiska energi och  $U$  är det totala arbetet som görs av alla krafter.

**Tolkning av kinetisk energi** Vi undersöker vidare partikelsystemets kinetiska energi. För att göra detta, introducerar vi en masscentrumsram med origo i masscentrum och axlar som inte ändrar riktning. Hastighets-sambandet ger

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i,$$

där apostrofen indikerar storheter i masscentrumsramen. Eftersom systemet inte roterar, förenklas detta till

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i.$$

Den kinetiska energin ges då av

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_G^2 + \sum m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_G^2 + \mathbf{v}_G \cdot \sum m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2. \end{aligned}$$

Det gäller att

$$\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

eftersom systemets masscentrum är i origo. Derivation med avseende på tiden ger

$$\sum m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0},$$

vilket ger

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'.$$

Bidragen till den kinetiska energin är alltså masscentrumsrörelse och partiklernas rörelse relativt masscentrum.

**Momentekvationen** Systemets totala rörelsemängdsmoment med avseende på punkten  $O$  ges av

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

För att härleda kraftekvationen, utgår vi från kraftekvationen

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij}.$$

Multiplicera med Ortsvektorn från vänster och summera över alla partikler för att få

$$\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}.$$

Vi har att

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \sum \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

eftersom vektorerna i första termen är lika varandra. Vi har vidare att

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{f}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

då den inre kraften är parallell med linjen mellan partiklarna. Den återstående termen är det totala momentet till de yttre krafterna, och vi får

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{M}_O.$$

**Rörelsemängdsmoment med avseende på olika punkter** Betrakta rörelsemängdsmomentet kring två punkter  $A, B$ . Det gäller att

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_A &= \sum \mathbf{r}_{A,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{B,i}) \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{B,i} \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_B. \end{aligned}$$

**Tolkning av rörelsemängdsmomentet** Betrakta rörelsemängdsmomentet med avseende på en fix punkt  $O$  och masscentrum  $G$  i ett masscentrumsystem. Sambandsformeln ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_G \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G.$$

Rörelsemängdsmomentet med avseende på masscentrum ges av

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$



För att skriva denna enbart med storheter i masscentrumsystemet, tidsderiverar man relationen

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$$

och får

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_G}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}, \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}.\end{aligned}$$

För att derivera den sista termen, använder vi ekvation 1 i fallet  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  för att få

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \left( \sum m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{H}'_G\end{aligned}$$

enligt definitionen av masscentrum och dens ortsvektor i ett masscentrumsystem. Vi har nu explicit skrivit att rörelsemängdsmomentet i ett masscentrumsystem endast beror av storheter som är relativa det systemet. Detta ger slutligen relationen

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}'_G + \mathbf{r}_G \times m \mathbf{v}_G.$$

Den första termen är rörelsemängdsmomentet relativt masscentrum, och den andra termen är banrörelsemängdsmomentet som uppstår från masscentrums rörelse.

**Rörelsemängdsmomentlagen för en rörlig punkt** Jämför rörelsemängdsmomenten relativt en fix punkt  $O$  och relativt en annan punkt  $A$ . Vårt samband ger

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{OA} \times m \mathbf{v}_G.$$

Tidsderivation ger

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{OA}}{dt} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \mathbf{v}_{OA} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times m \mathbf{a}_G \\ &= \frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \mathbf{v}_{OA} \times m \mathbf{v}_G + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} \\ &= \frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \mathbf{v}_{OA} \times m \mathbf{v}_G - \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Vi skriver om och använder rörelsemängdsmomentlagen för att få

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}.$$

Högersiden ger förflyttningen av momentet till en ny punkt, som vi såg i grundkursen (ja, jag blev också chockad över att den fanns kvar), och vi får

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \mathbf{v}_{OA} \times m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_A.$$

### 3 Stela kroppar

En stel kropp är en massbelagd domän så att avståndet mellan två godtyckliga punkter är konstant.

#### 3.1 Allmän kinematik

En stel kropp kan ha translationshastighet eller rotationshastighet. Translationshastighet karakteriseras av att  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$  för alla  $A, B$ . Rotationshastighet karakteriseras av att det finns ett  $C$  som är stelt förenad med kroppen så att  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$  momentant.

**Hastighet** För att beskriva rörelsen till en stel kropp, bilda en referensram med axlarna fixa relativt kroppen. Betrakta två punkter  $A, B$  i kroppen, där origo i den nya referensramen är  $A$ . Då gäller det att

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B,\text{sp}} + \mathbf{v}_{B,\text{rel}}.$$

Eftersom axlarna är fixa relativt kroppen, ger andra termen inget bidrag, vilket ger

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

och bekräftar vårt påstående om att all rörelse för en stel kropp är antingen translation eller rotation.

**Acceleration** Kroppens acceleration ges av

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B,\text{sp}} + \mathbf{a}_{B,\text{cor}} + \mathbf{a}_{B,\text{rel}}.$$

Fixa axlar relativt kroppen ger att de två sista termerna ej bidrar och

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}),$$

där den första termen är ett translatoriskt bidrag och de två andra är rotationsbidrag.

### 3.2 Allmän dynamik

**Allmän rotation kring fix axel** Vi betraktar en stel kropps rotation kring en fix punkt  $O$  parallellt med en axel  $Q$ . Vi inför vinklarna  $\alpha, \beta, \gamma$  mellan  $\omega$  och axlarna, enhetsvektorn

$$\hat{\mathbf{e}}_Q = \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \beta \hat{\mathbf{e}}_y + \cos \gamma \hat{\mathbf{e}}_z,$$

vinkeln  $\theta_k$  mellan  $\omega$  och  $\mathbf{r}_k$  och avståndet  $\rho_k$  från rotationsaxeln till partikeln. Vi beräknar först

$$\begin{aligned} \rho_k^2 &= r_k^2 \sin^2 \theta \\ &= |\mathbf{r}_k \times \hat{\mathbf{e}}_Q|^2 \\ &= |(y_k \cos \gamma - z_k \cos \beta) \hat{\mathbf{e}}_x + (z_k \cos \alpha - x_k \cos \gamma) \hat{\mathbf{e}}_y + (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) \hat{\mathbf{e}}_z|^2 \\ &= (y_k \cos \gamma - z_k \cos \beta)^2 + (z_k \cos \alpha - x_k \cos \gamma)^2 + (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)^2 \\ &= (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (x_k^2 + z_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet

$$\begin{aligned} I_Q &= \sum m_i \rho_i^2 \\ &= \sum m_i (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + \sum m_i (x_k^2 + z_k^2) \cos^2 \beta + \sum m_i (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2 \sum m_i y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2 \sum m_i x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2 \sum m_i x_k y_k \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

och definierar tröghetstensorerna  $I$  med komponenter

$$I_{xx} = \sum m_i y_i^2 + z_i^2, I_{xy} = - \sum m_i x_i y_i$$

och motsvarande för andra subskript. Detta ger

$$\begin{aligned} I_Q &= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma \\ &\quad + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &= \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I \hat{\mathbf{e}}_Q. \end{aligned}$$

**Mer om tröghetstensorerna** Tröghetstensorerna är symmetrisk, och kan därmed diagonaliseras. Axlarna så att tröghetsmatrisen är diagonal relativt dessa kallas huvudaxlar.

**Parallellförflyttningssatsen för diagonalelementer** Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer  $S, S'$ , där den primade ramen är ett masscentrumssystem, kroppen roterar kring  $z'$ -axeln,  $z$ -axeln är parallell med  $z'$ -axeln och avståndet mellan dessa är  $d$ . Vi inför tröghetsmomenten

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \\ I_{z'z'} &= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2). \end{aligned}$$

Vi skriver om första enligt

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i(x_G^2 + 2x'_i x_G + x_i'^2 + y_G^2 + 2y'_i y_G + y_i'^2) \\ &= \sum m_i(x_G^2 + y_G^2) + \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G \sum m_i x'_i + 2y_G \sum m_i y'_i \\ &= md^2 + I_{z'z'}, \end{aligned}$$

där de två sista summorna försvinner eftersom  $S'$  är ett masscentrumssystem. Härledningen är analog för de andra diagonalelementen.

**Parallellförflyttningssatsen för tröghetsprodukter** Betrakta en stel kropp. Inför två referensramer  $S, S'$ , där den primmade ramen är ett masscentrumssystem och enhetsvektorerna är parallella. Vi har

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \sum m_i x_i y_i \\ &= - \sum m_i (x_G y_G + x'_i y_G + x_G y'_i + x'_i y'_i) \\ &= -m x_G y_G - y_G \sum m_i x'_i - x_G \sum m_i y'_i - \sum m_i x'_i y'_i \\ &= I_{x'y'} - m x_G y_G. \end{aligned}$$

**Kinetisk energi** Den relativa kinetiska energin ges av

$$T' = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2.$$

Med  $\rho_i$  som avståndet till rotationsaxeln ger hastighetssambandet

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \sum m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I_G \omega^2. \end{aligned}$$

Den totala kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2,$$

som innehåller en banterm och en spinnterm. Med hjälp av tröghetstensorn kan den andra termen skrivas som

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} I_Q \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I \hat{\mathbf{e}}_Q \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega \hat{\mathbf{e}}_Q \cdot I \omega \hat{\mathbf{e}}_Q \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

**Rörelsemängdsmoment** Rörelsemängdsmomentet kan skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum m_i ((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i).\end{aligned}$$

Vi betraktar nu  $x$ -komponenten, som ges av

$$\begin{aligned}H_{O,x} &= \sum m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i) \\ &= \sum m_i ((y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i) \\ &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z.\end{aligned}$$

Från detta fås

$$\mathbf{H}_O = I \boldsymbol{\omega}.$$

Med detta kan den kinetiska energin i masscentrumssystemet skrivas som

$$T' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega}.$$

**Energilagen** Definiera effekten

$$P_{ij} = \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j).$$

Vi använder att  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$  och får

$$P_{ij} = -\mathbf{f}_{ij} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = 0$$

eftersom  $\mathbf{f}_{ij}$  verkar längs linjen mellan partikel  $i$  och  $j$ . Därmed gör de indre krafterna inget arbete, och

$$U_{0-1}^{(e)} = T_1 - T_0.$$

**Arbete** För att beräkna arbetet som görs på en stel kropp i allmän rörelse, betrakta

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega}.$$

Med energilagen fås nettoeffekten  $P$  på kroppen av

$$\begin{aligned}P &= \frac{dT}{dt} \\ &= m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} \cdot \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

Arbetet ges då av

$$dU = P dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_G + M_{G,n} d\theta$$

där  $M_{G,n}$  är momentets komponent normalt på rotationsplanet.

**Eulers dynamiska ekvationer** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt  $O$ . Välj en rumsfixt inertialram  $OXYZ$  och en kroppsfix ram  $Oxyz$ . Det gäller att

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \dot{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O.$$

Eftersom kroppen är stel, har vi vidare

$$\dot{\mathbf{H}}_O = I_O \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Rörelsemängdsmomentlagen ger då Eulers dynamiska ekvation

$$I_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \frac{d\mathbf{M}_O}{dt}.$$

Med den kroppsfixa ramen orienterat längs med kroppens huvudaxler blir detta på komponentform

$$\begin{aligned} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z &= M_{O,x}, \\ I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x &= M_{O,y}, \\ I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y &= M_{O,z}. \end{aligned}$$

**Eulers kinematiska ekvationer** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt  $O$ . Välj en rumsfixt inertialram  $OXYZ$  och en kroppsfix ram  $Oxyz$ . Låt linjen där  $xy$ -planet skär  $XY$ -planet vara parallell med  $\mathbf{n}$ , som igen är parallell med  $\hat{\mathbf{e}}_Z \times \hat{\mathbf{e}}_z$ . Introducera vinkeln  $\theta$  mellan  $Z$ - och  $z$ -axeln, vinkeln  $\psi$  mellan  $X$ -axeln och  $\mathbf{n}$  och vinkeln  $\phi$  mellan  $\mathbf{n}$  och  $x$ -axeln. Dessa kallas för Eulervinklarna. Vinkelhastigheten är en summa av vinkelhastigheter motsvarande ändring av varje vinkel, och ges av

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{e}}_n + \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Projektion på det kroppsfixa systemet ger

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_Z &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z + \sin \theta (\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y), \\ \hat{\mathbf{e}}_n &= \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned}$$

Från detta fås Eulers kinematiska ekvationer

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \phi + \frac{d\theta}{dt} \cos \phi, \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \phi - \frac{d\theta}{dt} \sin \phi, \\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned}$$

**3D-rotation av en axisymmetrisk kropp** Betrakta en axisymmetrisk stel kropp som roterar kring en fix punkt  $O$ . Välj en rumsfixt inertialram  $OXYZ$  och en ram  $Oxyz$ , där  $z$ -axeln pekar längs med kroppens symmetri-axel och kroppen kan rotera fritt kring detta. Denna sortens ram kallas en resalram. Nu kan  $x$ -axeln väljas parallellt med  $\mathbf{n}$ . Kroppens rotation kan nu delas i resalramens vinkelhastighet

$$\boldsymbol{\omega}_S = \frac{d\psi}{dt} \hat{\mathbf{e}}_Z + \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{e}}_n$$

och kroppens vinkelhastighet relativt resalramen

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Nu får vi

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \dot{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O$$

och

$$\dot{\mathbf{H}}_O = I_O \dot{\boldsymbol{\omega}}_0,$$

vilket slutligen ger

$$I_O \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_O = \frac{d\mathbf{M}_O}{dt}.$$

### 3.3 Plan rörelse

Plan rörelse för en stel kropp karakteriseras av att hastigheten i alla punkter är parallellt med ett och samma fixa plan. Om rörelsen är i  $xy$ -planet, kommer  $\boldsymbol{\omega}$  peka längs med  $z$ -axeln.

**Momentancentrum** Om en stel kropp roterar under plan rörelse, finns det alltid en punkt  $C$  med  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ , som kallas momentancentrum. Denna punkt uppfyller  $\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$ . För att hitta den, multiplicera med  $\boldsymbol{\omega}$  på båda sidor för att få

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AC})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AC}. \end{aligned}$$

Eftersom rörelsen är plan, behöver vi bara betrakta ett snitt av kroppen i rörelsesplanet, vilket gör att den första skalärprodukten blir 0. Detta ger då positionen till momentancentrumet enligt

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$

**Hastighet** Vid att införa cylindriska koordinater kring origo fås Ortsvektorn till någon partikel i kroppen som  $\mathbf{r}'_i = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\rho$ . Partikelns hastighet ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \\ &= \mathbf{v}_G + \omega \rho_i \hat{\mathbf{e}}_\theta.\end{aligned}$$

**Acceleration** Accelerationssambandet för plan rörelse ger

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}).$$

Vi skriver ut termerna och får

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

Eftersom rörelsen är plan, blir skalärprodukten 0, och man får slutligen

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

**2D-rotation kring fix axel** Låt punkten  $O$  vara på rotationsaxeln och välj cylindriska koordinater så att kroppen roterar kring  $z$ -axeln. För någon partikel i den stela kroppen har man

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Den kinetiska energin ges nu av

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_k \rho_i^2$$

och rörelsemängdsmomentet kring  $O$  ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \rho_i \omega \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \sum m_i \rho_i^2 \omega \hat{\mathbf{e}}_z - \sum m_i \rho_i z_i \omega \hat{\mathbf{e}}_r.\end{aligned}$$

Vi inför nu tröghetsmomentet kring  $z$ -axeln

$$I_z = \sum m_k \rho_i^2,$$

med motsvarande definitioner kring andra axlar (högst analog till elementer i tröghetstensor). Då gäller att

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_z \omega^2, \\ H_z &= I_z \omega.\end{aligned}$$



Kraftekvationens komponenter ger

$$F_r = -ml \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

$$F_\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Momentekvationen ger

$$\frac{d}{dt} \left( I_z \frac{d\theta}{dt} \right) = M_z.$$

Arbetet som görs på kroppen ges av

$$dU_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = F_{i,\theta} \rho_i \omega dt = M_{i,z} d\theta.$$

**Tröghetsmoment för en plan kropp** Låt oss först betrakta en plan kropp som roterar i planet. Då kan det visas att

$$I_z = I_x + I_y.$$

**Rörelsemängdsmoment** Det relativa rörelsemängdsmomentet ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_G &= \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \sum \rho_i^2 m_i \hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Det totala rörelsemängdsmomentet är då

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_{OG} \times m \mathbf{v}_G + I_G \omega \hat{\mathbf{e}}_z$$

som också består av en banterm och en spinnterm.

**Dynamiska lagar** För en stel kropp i plan rörelse gäller att

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{F}, I_G \alpha = M_z.$$

**Arbete** Effekten som utövs under en kropps rörelse ges av

$$\begin{aligned} P &= \frac{dT}{dt} = m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + I \alpha \cdot \omega \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G \cdot \omega. \end{aligned}$$

Arbetet som görs ges då av

$$\begin{aligned} dU &= P dt \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G dt + \mathbf{M}_G \cdot \omega dt \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G dt + \mathbf{M}_G \cdot \omega dt \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_G + M_z d\theta, \end{aligned}$$

där vi har använt att  $\mathbf{M}_G$  pekar i  $z$ -riktning.

## 4 Variationskalkyl

Vi betraktar en funktional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \frac{dy}{dx}) dx$$

och söker dens extremum.

För att göra detta, antag att  $y$  är den sökta funktionen och lägg till en störningsterm  $\varepsilon\eta(x)$  som uppfyller  $\varepsilon\eta(x_1) = \varepsilon\eta(x_2) = 0$ . Undersök nu

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{dy}{dx} + \varepsilon\frac{d\eta}{dx}) dx.$$

Vi vet att  $I(0)$  är en extremalpunkt, vilket ger  $\frac{dI}{d\varepsilon}(0) = 0$ . Vi har

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon}(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \frac{\partial f}{\partial u'} \eta' dx, \end{aligned}$$

med  $u = y + \varepsilon\eta$ . Detta ger vidare

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon}(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(x_2)\eta(x_2) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta dx. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger att de två termerna i mitten båda är 0, och detta ger

$$\frac{dI}{d\varepsilon}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx.$$

Eftersom  $\eta$  ej specificeras, ger detta Euler-Lagrange-ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Vi betraktar nu

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\varepsilon) - I(0) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, \frac{dy}{dx} + \varepsilon\frac{d\eta}{dx}) - f(x, y, \frac{dy}{dx}) dx. \end{aligned}$$

Taylorutveckling av integranden ger

$$\begin{aligned}\Delta I &\approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\varepsilon} \varepsilon \, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\varepsilon} \varepsilon \, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) \varepsilon \, dx.\end{aligned}$$

Vi definierar detta som  $\delta I$ , och får då  $\delta I = \frac{dI}{d\varepsilon}(0)\varepsilon$ .

## 5 Analytisk mekanik

Betrakta ett system av  $n$  partiklar. Dessa beskrivs av  $3n$  koordinater i 3 dimensioner. Systemet kan även begränsas av

- holonoma tvång på formen  $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$ .
- icke-holonoma tvång, som ej kan uttryckas som holonoma tvång och endast ger samband mellan differentialerna.

Vi kommer endast betrakta konservativa system.

**Frihetsgrader** Systemets antal frihetsgrader är det minsta antalet parametrar som entydigt bestämmer systemets läge.

Om systemet begränsas av  $k$  holonoma tvång, har systemet  $s = 3n - k$  frihetsgrader.

**Generaliserade koordinater** Systemets generaliserade koordinater är ett val av parametrar som beskriver systemets läge. Dessa betecknas som  $q_i$ .

Med dessa inför vi även tidsderivatorna  $\dot{q}_i$ .

**Virtuell förflyttning** Vi introducerar nu den virtuella förflyttningen  $\delta \mathbf{r}$ . Denna är förenlig med villkoren (som egentligen är frysta i tid) och i övrigt godtycklig.

**Variation av generaliserad koordinat** Vi introducerar variationen av en generaliserad koordinat som

$$\delta q_i = \varepsilon \eta_i(t),$$

där  $\eta$  är 0 i ändpunkterna.

**Konfigurationsrum** Konfigurationsrummet är ett rum vars koordinater är de generaliserade koordinaterna. Rörelse i detta rummet representerar alltså ändring av systemets tillstånd.

**Hastighet** Vi kan nu skriva hastigheten för en given partikel som

$$\mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

**Lagrangefunktionen** Vi inför nu Lagrangefunktionen

$$L = T - V.$$

**Verkningsfunktionalen** Vi inför även verkningsfunktionalen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L.$$

**Hamiltons variationsprincip** Hamiltons variationsprincip kan behandlas som en naturlag, och representerar ett alternativt sätt till Newtons lagar att beräkna partikelsystemets beteende på. Variationsprincipen säger att  $S$  har ett extremum längs den verkliga banan i konfigurationsrummet. Med variationskalkylen kan detta skrivas som

$$\delta S = 0.$$

**Lagranges ekvationer** Vi tillämpar nu vår kunnskap om variationskalkyl på verkningsintegralen och får

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i = 0.$$

Den sista familjen av termer ges av

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

då variationen är 0 i ändpunkterna. Då kan variationsprincipen skrivas som

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^k \Delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0.$$

Om detta skall gälla för alla val av tidsintervall, ger detta Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0.$$