

# Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

10 december 2018

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Vektorrum</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Avbildningar</b>	<b>2</b>
2.1	Definitioner . . . . .	2
2.2	Satser . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Eigenvärden och olika polynom</b>	<b>4</b>
3.1	Definitioner . . . . .	4
3.2	Satser . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Inreprodukt</b>	<b>6</b>
4.1	Definitioner . . . . .	6
4.2	Satser . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Linjär rekursion</b>	<b>11</b>
5.1	Definitioner . . . . .	11
5.2	Satser . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Singulärvärden</b>	<b>11</b>
6.1	Definitioner . . . . .	11
6.2	Satser . . . . .	11
6.3	Algoritmer . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Sannolikhet</b>	<b>11</b>
7.1	Definitioner . . . . .	11
7.2	Satser . . . . .	12
<b>8</b>	<b>Multilinjär algebra</b>	<b>13</b>
8.1	Definitioner . . . . .	13
8.2	Satser . . . . .	13
<b>9</b>	<b>Yttre algebra</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>Kroppsutvidning</b>	<b>14</b>
10.1	Definitioner . . . . .	14
10.2	Satser . . . . .	14

# 1 Vektorrum

## 1.1 Definitioner

**Kroppar** En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med)  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  osv.

**Vektorrum** Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör  $V$  till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp  $k$  med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x + y) = cx + cy, c \in \mathbb{R}, x, y \in V.$
- $(c + d)x = cx + dx, c, d \in \mathbb{R}.$
- $c(dx) = (cd)x.$
- $1x = x.$

**Delrum** En delmängd  $V$  av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$ , där  $0$  är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V.$
- $cx \in V$  för alla  $c \in \mathbb{R}.$

**Inre direkt summa** Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

**Yttre direkt summa** Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

**Kvotrum** Om  $W \subseteq V$  är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har använt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

**Operationer på sidoklasser** Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= x + y + W, \\ a(x + W) &= (ax) + W.\end{aligned}$$

**Linjärt oberoende mängder**  $S$  är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla  $x_i$  är elementer i  $S$ .

**Linjärt hölje** Det linjära höljet  $\text{Span}(S)$  av mängden  $S$  är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i  $S$ .
- det minsta delrummet som innehåller  $S$ .
- $\bigcap_{S \subset W} W$ .
- $\sum_{x \in S} \text{Span}(x)$ .

**Bas** En bas  $B$  för vektorrummet  $W$  är en linjärt oberoende mängd så att  $V = \text{Span}(B)$ , dvs. att alla vektorer i  $V$  är linjärkombinationer av vektorer i  $B$  på ett unikt sätt.

**Duala rum** För ett vektorrum  $V$  över kropp  $k$  är duala rummet  $V^*$  mängden av alla linjära former på  $V$ , dvs. alla linjära avbildningar  $V \rightarrow k$ .

**Dual bas** Givet en bas  $\{e_i\}_{i \in I}$  för  $V$ , väljer vi en bas  $\{e_i^*\}_{i \in I}$  för  $V^*$  som uppfyller

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

## 1.2 Satser

**Operationer på sidoklasser** Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

**Bevis**

## 2 Avbildningar

### 2.1 Definitioner

**Isomorfi** En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Linjära avbildningar** En avbildning  $T$  är linjär om

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säger att  $T$  respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

**Isomorfi** En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Matriser för linjära avbildningar** Om  $B$  är en bas för  $V$  och  $D$  är en bas för  $W$  kan vi ordna en matris för  $L : V \rightarrow W$  genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in I} a_{ji} y_j,$$

där alla  $x_i \in B$ , alla  $y_i \in D$  och  $I$  är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om  $I$  är oändlig.

**Analytiska funktioner av operatorer** En analytisk funktion av en operator  $L$  definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

**Matrisnorm** Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

**Nilpotenta operatorer** En operator  $L$  är nilpotent om  $L^n = 0$  för något  $n$ .

## 2.2 Satser

**Basbyte** Låt  $L$  vara en avbildning från  $V$  till  $W$ . Låt  $]_{B,D}$  vara en avbildning mellan vektorrum från basen  $B$  i definitionsområdet till  $D$  i målmängden, och låt  $P_{A,B}$  vara avbildningen som byter bas från  $A$  till  $B$  i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

**Bevis** Kommutativt diagram

**Koordinater** Låt  $B = \{x_i\}_{i \in I}$  vara en bas för vektorrummet  $V$ . Detta ger en isomorfi

$$V \rightarrow k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i x_i \rightarrow \{a_i\}_{i \in I}.$$

**Bevis** Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \rightarrow \sum a_i x_i$$

ger en avbildning  $k^I \rightarrow V$  som är injektiv eftersom  $B$  är linjärt oberoende och surjektiv eftersom  $B$  spänner upp  $V$ .

**Kärna och injektivitet** En linjär avbildning är injektiv om och endast om  $\ker(L) = \{0\}$ .

**Bevis**

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

**Kvotavbildning** Om  $W \subseteq V$  är ett delrum, ger  $x \rightarrow x + W$  en linjär kvotavbildning från  $V$  till  $\frac{V}{W}$ .

**Bevis** Vi har

$$x + y \rightarrow x + y + W = x + W + y + W,$$
$$ax \rightarrow ax + W = a(x + W),$$

och beviset är klart.

**Isomorfisatsen**

$$\text{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

**Bevis** Avbildningen  $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$  ger en väldefinierad avbildning från  $\frac{V}{\ker(L)}$  till  $\text{Im}(L)$  eftersom  $x + \ker(L) = y + \ker(L)$  implicerar  $L(x) = L(y)$  ty  $L$  är linjär.  $\Phi$  är injektiv eftersom  $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) : L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$ .  $\Phi$  är surjektiv eftersom  $y = L(x)$  för något  $x$  ger  $y = \Phi(x + \ker(L))$ , och alltså finns det för alla  $y \in \text{Im}(L)$  ett  $x$  så att  $y = \Phi(x + \ker(L))$ .

**Dimensionssatsen** Om  $V$  är ändligdimensionellt är  $\text{rank } L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$ .

**Bevis**

**Faktorisering med kvotrum** Om  $U \subseteq \ker(L)$  finns det en unik avbildning  $\Phi : \frac{V}{U} \rightarrow W$  sådan att  $L = \Phi \circ \Psi$ .

**Bevis** Definiera  $\Phi(x + U) = L(x)$ .

**Norm av potenser av matriser**

$$\|A^i\| \leq \|A\|^i$$

**Bevis**

**Konvergens av funktioner av matriser** En funktion  $f$  av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

## 3 Egenvärden och olika polynom

### 3.1 Definitioner

**Egenvektorer**  $x$  är en egenvektor till  $L$  om det finns ett  $\lambda \in k$  så att

$$Lx = \lambda x.$$

$\lambda$  kallas det motsvarande egenvärdet.

**Karakteristiskt polynom** Om  $V$  är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där  $I$  är identitetsavbildningen.

**Minimalpolynom** Om  $A$  är en matris, är minimalpolynomet  $q_A(x) \in k[x]$  det moniska polynomet av lägst grad så att  $q_A(A) = 0$ .

**Diagonaliserbarhet** En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operators matris i den basen är diagonal.

**Samtidig diagonaliserbarhet** Två operatorer  $L_1$  och  $L_2$  är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

### 3.2 Satser

**Karakteristiska polynom och egenvärden** Om  $\lambda$  är ett egenvärde till  $L$  så är  $p_L(\lambda) = 0$ .

**Bevis** Ez

**Existens av minimalpolynom** Om  $V$  är ändligdimensionellt, har  $L$  ett karakteristiskt polynom.

**Bevis** Betrakta matrisen  $A$  för  $L$  i någon bas. Det gäller att mängden  $\{A^0, A^1, \dots, A^{n^2}\}$  är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter  $a_0, \dots, a_n$  så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

**Cayley-Hamiltons sats**  $p_L(L) = 0$ .

**Bevis** Om matrisen för  $L$  är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

**Korollar**  $q_L$  är en faktor i  $p_L$ .

**Multipliciteter och diagonaliserbarhet** Om  $L$  är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla  $L$ :s egenvärden.

**Bevis**

**Konjugerade matriser** Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

**Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet** Låt  $V$  vara ett ändligdimensionellt vektorrum och  $L_1, L_2$  två operatorer på detta. Då går det att diagonalisera  $L_1$  och  $L_2$  om de kommuterar.

**Bevis**

**Kommutativitet och egenrum** Låt  $L_1$  och  $L_2$  kommutera och  $E_1$  vara egenrum till  $L_1$ . Då är  $L_2(E_1) \subset E_1$ .

**Bevis**

**Nilpotens och blockdiagonalitet** Om  $L$  är nilpotent finns det en bas för  $V$  så att matrisen för  $L$  blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

**Bevis** Här kommer endast en bevisidé presenteras.

Det finns ett  $s$  så att  $L^s = 0$  och  $L^{s-1} \neq 0$ . Vi väljer då ett delrum  $W_s$  så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare  $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$  så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom  $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$  och  $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$ . Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla  $W_i$  och bilderna av alla potenser av  $L$ . Dessa bildar en bas för  $V$ . Med en lämplig ordning på basen fås  $\dim(W_i)$  block på formen ovan i matrisen, varje med storlek  $i \times i$ .

**Jordans normalform** Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för  $L$  är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att  $\Lambda_i = \lambda_i I + N$ , där  $N$  är nilpotent.

## Bevis

## 4 Inreprodukt

### 4.1 Definitioner

**Inreprodukt över  $\mathbb{R}$**  En inreprodukt  $\langle x|y \rangle$  på ett vektorrum  $V$  över  $\mathbb{R}$  är en avbildning  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  som är

- bilinjär, dvs.
  - $\langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$ .
  - $\langle ax|y \rangle = a \langle x|y \rangle$ .
  - $\langle x|y + z \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$ .
  - $\langle x|ay \rangle = a \langle x|y \rangle$ .
- symmetrisk, dvs.  $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$ .
- positivt definit, dvs.  $\langle x|x \rangle > 0$  om  $x \neq 0$ .

**Inreprodukt över  $\mathbb{C}$**  En inreprodukt  $\langle x|y \rangle$  på ett vektorrum  $V$  över  $\mathbb{C}$  är en avbildning  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men  $\langle ax|y \rangle = a^* \langle x|y \rangle$ .
- konjugatsymmetrisk, dvs.  $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$ .
- positivt definit, dvs.  $\langle x|x \rangle > 0$  om  $x \neq 0$ . Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att  $\langle x|x \rangle$  har ingen imaginärdel.

**Inreprodukt från matris** Vi kan få en inreprodukt i  $\mathbb{C}^n$  från en matris genom

$$\langle x|y \rangle = \sum a_{ij} x_i^* y_j = (x^*)^T A y.$$

Om detta skall uppfylla konjugatsymmetri, ger det

$$(x^*)^T A y = (y^*)^T A x^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T A y = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Om matrisen uppfyller detta, säjs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermitesk.



**Norm** Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x \rangle}.$$

**Vinkel** Vinkeln  $\theta$  mellan två vektorer definieras som

$$\cos \theta = \frac{\langle x|x \rangle}{|x||y|}.$$

**Ortogonalitet**  $x$  och  $y$  är ortogonala om

$$\langle x|y \rangle = 0.$$

**Ortogonalt komplement** Om  $W \subseteq V$  är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^\perp = \{x \in V : \langle x|y \rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

**Projektion** Låt  $V$  vara ett delrum med bas  $B = \{e_i\}_{i=0}^n$ . Då definieras projektionen som

$$\text{proj}_V(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\langle x|e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

**Adjungerade operatorer** På ett inreproduktrum  $V$  är  $L^\dagger$  den adjungerade operatoren till  $L$  om

$$\langle L^\dagger(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle \forall x, y \in V.$$

Om  $L : V \rightarrow W$  definieras den adjungerade operatoren som  $L^\dagger : W \rightarrow V$  som uppfyller

$$\langle y|L(x) \rangle = \langle x|L^\dagger(y) \rangle \forall x \in V, y \in W.$$

**Självadjungerade operatorer** På ett inreproduktrum  $V$  är  $L$  självadjungerad om

$$\langle L(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle \forall x, y \in V.$$

Matrisen för en sådan operator sägs vara Hermitesk.

**Cauchyföljder** En Cauchyföljd är en följd som indexeras med naturliga talen och som uppfyller att för varje  $\varepsilon > 0$  finns det ett  $N$  så att

$$i, j > N \implies \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

**Fullständiga rum** Ett rum  $V$  är fullständigt om alla Cauchy-följder konvergerar.

**Hilbertrum** Ett Hilbertrum är ett inreproduktrum som är fullständigt.

$\ell^2$  Vi definierar  $\ell^2(\mathbb{C})$  som mängden av alla följder av tal i  $\mathbb{C}$  så att

$$\sum_{i=0}^N |a_i|^2$$

är begränsad, med inreprodukten

$$\langle A|B \rangle = \sum_{i=0}^N a_i^* b_i.$$

$L^2$  Vi definierar  $L^2([0, 1], \mathbb{C})$  som mängden av alla komplexvärda funktioner på  $[0, 1]$  med inreprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f^*(t)g(t) dt.$$

**Ortogonala och unitära operatorer** En ortogonal operator över ett reellt vektorrum  $V$  är en inverterbar operator som uppfyller  $\langle Lx|Ly \rangle = \langle x|y \rangle \forall x, y \in V$ .

En unitär operator över ett komplext vektorrum  $V$  är en inverterbar operator som uppfyller  $\langle Lx|Ly \rangle = \langle x|y \rangle \forall x, y \in V$ .

## 4.2 Satser

### Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle x|y \rangle| \leq |x||y|.$$

**Bevis**

### Triangelolikheten

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

**Ortogonalt komplement och vektorrum** Om  $V$  är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$W = W \oplus W^\perp.$$

**Bevis** Det gäller att

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

**Bra och dualrum** Om  $V$  är ett inreproduktum, definierar båd  $x \rightarrow \langle x|$  och  $x \rightarrow \langle x^*|$  en injektiv avbildning  $V \rightarrow V^*$ . Om  $V$  är ändligdimensionellt, är detta dessutom en isomorfi.

**Bevis**

**Inreproduktum och ortogonal bas** Ett ändligdimensionellt vektorrum har en ortogonal bas.

**Bevis**

**Gram-Schmidts metod** Låt  $V$  vara ett vektorrum med ändlig dimension eller en uppräknelig bas  $B = \{x_i\}_{i=0}^n$ . Då bildar vektorerna

$$e_i = x_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_j|x_i \rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

en ortogonal bas för  $V$ .

**Bevis**

**Matrisen för en adjungerad operator** Låt  $L$  beskrivas av matrisen  $A$  i någon ortonormal bas. Då beskrivs  $L^\dagger$  av matrisen  $(A^T)^*$ , även om operatoren är mellan två olika vektorrum.

**Bevis** Vi har

$$L(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

vilket ger

$$\langle e_i | L(e_j) \rangle = \left\langle e_i \left| \sum_k a_{jk} e_k \right. \right\rangle = \sum_k \langle e_i | a_{jk} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i | e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji}.$$

Om  $B$  är matrisen för  $L^\dagger$ , så vi nu att dens komponenter kan skrivas som  $b_{ji} = \langle e_i | L^\dagger(e_j) \rangle$ . Vi utvecklar detta och får

$$b_{ji} = \langle e_i | L^\dagger(e_j) \rangle = \langle L^\dagger(e_j) | e_i \rangle^* = \langle e_j | L(e_i) \rangle^* = a_{ij}^*,$$

och därmed är beviset klart.

**Eigenvärden för självdjungerade operatorer** Självdjungerade operatorer har bara reella eigenvärden.

**Bevis**

$$\langle L(x) | x \rangle = \langle x | L(x) \rangle.$$

Detta kan utvecklas om  $x$  är en egenvektor för att ge

$$\lambda^* \langle x | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle,$$

och beviset är klart.

**Diagonalisering av självdjungerade operatorer** Alla självdjungerade operatorer på ändligdimensionella inreproduktrum kan diagonaliseras.

**Bevis** Vi gör induktion över  $\dim(V)$ .

Det är trivialt för dimension 1.

Annars, om vi har en egenvektor  $x$  motsvarande eigenvärdet  $\lambda$ , bilda  $W = \text{Span}(x)$ . Då har man  $L(W) \subseteq W$ . Vidare, om  $y \in W^\perp$ , har man

$$\langle x | y \rangle = 0 \implies \langle \lambda x | y \rangle = \langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle = 0,$$

och  $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$ . Man kan vidare bilda en bas för  $V$  med basen för  $W^\perp$  och  $x$ . Matrisen för  $L$  med avseende på denna basen är

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

Per induktion finns det då en ortogonal bas för  $W^\perp$  så att matrisen för  $L$  på  $W^\perp$  blir diagonal.

**Ortogonal bas och självdjungerade operatorer** Om  $L$  är en självdjungerad operator på ett ändligdimensionellt vektorrum  $V$ , finns det en ortogonal bas av egenvektorer till  $L$ .

**Bevis**

**Självdjungerade operatorer och ortogonala egenvektorer** Låt  $x$  vara en egenvektor till  $L$  med eigenvärdet  $\lambda$  och  $y$  vara en egenvektor med eigenvärde  $\mu$ . Om  $\lambda - \mu \neq 0$  är  $\langle x | y \rangle = 0$ .

**Bevis**

$$\langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle.$$

Vi använder att  $x$  och  $y$  är egenvektorer och får

$$\lambda^* \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle.$$

Enligt antagandet måste då  $\langle x | y \rangle = 0$ .

**Längdbevarande operatorer** För en operator  $L$  på ett reellt inreprodukttrum  $V$  är följande ekvivalent:

- $\|Lx\| = \|x\| \forall x \in V$ .
- $\langle x|y \rangle = \langle Lx|Ly \rangle \forall x, y \in V$ .

Om vektorrummet är ändligdimensionellt, är påståenden även ekvivalenta med

- $L$  avbildar ortonormala baser på ortonormala baser.

### Bevis

**Längdbevarande operatorer som bijektioner** Längdbevarande operatorer på ändligdimensionella vektorrum är bijektiva.

**Bevis** Sådana operatorer är injektiva ty

$$\|Lx\| = 0 \implies x = 0.$$

De är surjektiva ty matrisen för avbildningen i någon bas måste ha linjärt oberoende kolumner för att vara injektiv. Detta implicerar att avbildningen är surjektiv.

### Ortogonala grupper

- Mängden  $O(V) = \{L : V \rightarrow V : L \text{ är ortogonal}\}$  är en grupp under sammansättning om  $V$  är ett reellt inreprodukttrum med en ortogonal bas.
- Mängden  $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ är ortogonal}\}$  är en grupp under matrismultiplikation.
- Mängden  $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1, A \text{ är ortogonal}\}$  är en grupp under matrismultiplikation.

Satsen stämmer även för de komplexa motsvarigheterna.

### Bevis

**Eigenvärden och egenvektorer till ortogonala och unitära operatorer** Om  $L$  är en unitär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till  $L$  och alla eigenvärden till  $L$  har belopp 1.

**Bevis** Det finns (möjligtvis) minst ett eigenvärde  $\lambda$ . Välj en motsvarande egenvektor  $x$ . Detta ger

$$\|x\| = \|Lx\| \implies |\lambda| = 1.$$

Låt nu  $W = \text{Span}(x)$ . Vi har att  $L(W^\perp) \rightarrow W^\perp$  eftersom  $L$  bevarar inreprodukten. Detta ger (?) per induktion att det finns en bas för  $W^\perp$  av egenvektorer till  $L$ . Unionen av  $x$  och denna basen är därmed en bas för hela vektorrummet.

**Exponentialavbildningen och Hermiteska operatorer** Låt  $H$  vara Hermitesk. Då är  $e^{iH}$  unitär.

**Bevis** Eftersom  $H$  är Hermitesk, finns det en ortogonal bas av egenvektorer. I denna basen är matrisen för  $H$  en diagonalmatris. Därmed är matrisen för  $e^{iH}$  en diagonalmatris med  $e^{i\lambda}$  på diagonalen, där  $\lambda$  är något eigenvärde. Alltså finns det en ortogonal bas av egenvektorer till  $e^{iH}$ , där varje eigenvärde har belopp 1, och  $e^{iH}$  är unitär.

## 5 Linjär rekursion

### 5.1 Definitioner

**Linjär rekursion** En linjär rekursion definieras av en följd  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  av element i ett vektorrum, där

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_j x_{i-j}, i \geq n$$

där  $x_0, \dots, x_{n-1}$  är givna. Detta kan alternativt skrivas på matrisform som

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{i-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} y_{i-1}.$$

Dessa matriserna kan ej diagonaliseras.

### 5.2 Satser

## 6 Singulärvärden

### 6.1 Definitioner

### 6.2 Satser

**Möjlighet för singulärvärdesuppdelning** Låt  $L : V \rightarrow W$ . Då kan man välja baser för  $V$  och  $W$  så att matrisen för  $L$  ges av

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 6.3 Algoritmer

**Singulärvärdesuppdelning** Låt  $L : V \rightarrow W$ . Vi vill hitta baser för  $V$  och  $W$  så att matrisen för  $L$  blir på formen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta görs vid att

- välja en bas för  $\ker(L)$ .
- utvidga detta till en bas för  $V$  vid att lägga till vektorer i början av basen.
- välja en bas för  $W$  vid att utgå från avbildningarna av vektorerna i basen för  $V$  och lägga på vektorer.

Om  $V$  och  $W$  är inreproduktum och du vill välja en ON-bas för båda, kommer du få en diagonalmatris i stället för identitetsmatrisen.

## 7 Sannolikhet

### 7.1 Definitioner

**Sannolikhetsmatriser** En sannolikhetsmatris är en kvadratisk matris där alla element är positiva och summan i varje kolonn är 1.

**Stokastiska processer** En stokastisk process är en följd av stokastiska variabler.

**Markovprocesser** En Markovprocess är en stokastisk process som endast beror av förra steget i processen. Om den stokastiska variabeln är på vektorform, kan rekursionen skrivas som

$$X_{n+1} = AX_n.$$

## 7.2 Satser

**Eigenvärden till sannolikhetsmatriser** 1 är alltid ett egenvärde till en sannolikhetsmatris.

**Bevis** Låt  $A$  vara en sannolikhetsmatris. Om  $e = [1 \dots 1]^T$  är

$$e^T A = e^T$$

enligt definitionen, vilket implicerar

$$A T e = e.$$

Eftersom  $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$  är beviset klart.

**Perron-Frobenius' sats** Om  $A$  är en reguljär sannolikhetsmatris, dvs. uppfyller att  $A^m$  för något  $m$  bara har positiva element, gäller följande:

- Det finns en egenvektor med egenvärde 1 så att alla element i denna är positiva.
- Den algebraiska och geometriska multipliciteten till egenvärdet 1 är båda lika med 1.
- Om  $\lambda$  är ett annat egenvärde är  $|\lambda| < 1$ .
- Alla andra egenvektorer har koordinater som summerar till 1.

**Bevis** Det finns ett  $x \neq 0$  så att  $Ax = x$ . Vi bildar nu  $x^+$  så att  $x_i^+ = |x_i|$ . Då kan vi skriva

$$\begin{aligned}x &= x_+ - x_-, \\x^+ &= x_+ + x_-\end{aligned}$$

Där  $x_+$  och  $x_-$  innehåller de positiva respektive negativa elementen i  $x$ . Detta ger

$$\begin{aligned}Ax_+ &= A(x + x_-) = x + Ax_- \geq x, \\Ax_- &= A(x_+ - x) = Ax_+ - x \geq -x, \\Ax^+ &= A(x_+ + x_-) = Ax_+ + Ax_- \geq x^+\end{aligned}$$

där olikheterna jämför varje koordinat för sig. Vi inför igen vektorn  $e^T = [1 \dots 1]$  och får

$$e^T x^+ \leq e^T Ax^+ = e^T x^+,$$

alltså måste dessa vara lika och  $Ax^+ = x^+$ , vilket beviser första påståendet.

Antag vidare att det finns en annan egenvektor  $y$  motsvarande egenvärdet 1. Det finns då ett  $\alpha$  så att vektorn  $x^+ + \alpha y$  har en koordinat lika med 0. Detta ger (säkert) motsägelse enligt argumentet ovan eftersom  $(x^+ + \alpha y)^+ > 0$ , vilket bevisar andra påståendet.

Vi definierar vidare  $A_\infty = x^+ e^T$  och får

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T.$$

Om  $x^+$  är normerad så att summan av elementen är lika med 1, ger detta

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty.$$

Vi har vidare

$$\begin{aligned}AA_\infty &= Ax^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty, \\A_\infty A &= x^+ e^T A = x^+ e^T = A_\infty.\end{aligned}$$

Vi antar att alla element i  $A$  är positiva, och därmed finns det ett  $\varepsilon > 0$  så att  $B = A - \varepsilon A_\infty$  också är en positiv matris. Vi har vidare

$$\begin{aligned} B^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\ &= A^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\ &= A^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\ &= A^n - A_\infty + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\ &= A^n - A_\infty + (1 - \varepsilon)^n A_\infty. \end{aligned}$$

Det gäller att  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n = 0$  eftersom kolumnerna i  $B$  nu summerar till något mindre än 1, vilket implicerar  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_\infty$ . Betrakta vidare en egenvektor motsvarande egenvärdet  $\lambda$ . Eftersom  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  existerar, existerar även  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n y = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n y$ . Detta är bara möjligt om  $|\lambda| < 1$  eller  $\lambda = 1$  ( $|\lambda| = 1$  uppfylls ju bara om  $\lambda = 1$ , vilket redan har täckts).

## 8 Multilinjär algebra

Observera att Einsteinnotation kommer användas ofta i denna del.

Olika definitioner

### 8.1 Definitioner

**Tensorprodukt av vektorrum från produkter** Tensorprodukten  $V \otimes W$  av vektorrummen  $V$  och  $W$  definieras som vektorrummet med bas  $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$  om  $\{e_i\}_{i \in I}$  och  $\{f_j\}_{j \in J}$  är baser för  $V$  respektive  $W$ .

**Basbyten under tensorprodukt** Betrakta  $V \otimes W$ , med baser om  $\{e_i\}_{i \in I}$  och  $\{f_j\}_{j \in J}$  för  $V$  respektive  $W$ . Vid basbytet

$$e'_i = p_{ik} e_k, f'_j = q_{jl} f_l$$

ges basvektorerna för  $V \otimes W$  av

$$e'_i \otimes f'_j = (p_{ik} e_k) \otimes (q_{jl} f_l).$$

Detta definieras som att det uppfyllar distributiva lagen, vilket ger

$$e'_i \otimes f'_j = p_{ik} q_{jl} e_k \otimes f_l.$$

**Tensorprodukt av vektorrum från dualer** Tensorprodukten  $V \otimes W$  av vektorrummen  $V$  och  $W$  som verkas på av kroppen  $k$  definieras som  $\{L : V^* \times W^* \rightarrow k : L \text{ är bilinjär}\}$ .

**Bas för tensorprodukt** Vid att använda bilinjariteten till ett godtyckligt  $L$  kan det skrivas som

$$L(a_i e_i^*, b_j f_j^*) = a_i b_j L(e_i^*, f_j^*).$$

Eftersom en linjär avbildning ges unikt av dens verkan på basvektorerna, tar vi varje  $L(e_i^*, f_j^*)$  som ett element i en bas för tensorprodukten. Vi låter även denna vara

$$e_i \otimes f_j = L(e_i^*, f_j^*) = e_i^*(e_k) f_j^*(f_l) = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

### 8.2 Satser

**Homomorfitsats eller någonting** Låt  $\text{Hom}_k(V, W)$  vara mängden av alla linjära avbildningar från  $V$  till  $W$ . Då är  $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$ .

**Bevis**  $V^* \otimes W$  har bas  $e_i^* \otimes f_j$  och ges av  $(e_i^* \otimes f_j)(x) = e_i^*(x)f_j$ .

**Universella egenskapen** Om  $f : V \times W \rightarrow U$  är bilinjär finns en unik linjär avbildning  $\phi : V \otimes W \rightarrow U$  så att  $f = \psi \circ \phi$  där  $\psi : V \times W \rightarrow U$ .

**Bevis**

## 9 Yttre algebra

Vi utgår från något vektorrum  $V$  med en bas  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Vi bildar ett nytt vektorrum  $\wedge V$  med dimension  $2^n$  vars bas ges av  $\{e_S\}$ .  $S$  är alla delmängder av indexmängden. Vi skriver även  $e_{\{1,2\}} = e_1 \wedge e_2$ .

Vid att definiera  $e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$ .

## 10 Kroppsutvidning

### 10.1 Definitioner

**Kroppar** En kropp är en mängd  $k$  med två binära operationer  $+$  och  $\cdot$  och två speciella element  $0$  och  $1$  som uppfyller

- $k$  är en abelsk grupp under  $+$  med  $0$  som identitet.
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in k$ .
- $\cdot$  kommuterar.
- $1 \cdot a = a \quad \forall a \in k$ .
- för alla  $a \neq 0$  i  $k$  finns det ett  $b \in k$  så att  $a \cdot b = 1$ .
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in k$ .

### 10.2 Satser