Samanfatning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

19 december 2017

Sammanfattning

Denna samanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

Innehåll

1 Mängder **1**
1.1 Definitioner 1
1.2 Satser 1

2 Talföljder **1**
2.1 Definitioner 1
2.2 Satser 1

3 Funktioner **2**
3.1 Definitioner 2
3.2 Satser 3

4 Gränsvärden **4**
4.1 Definitioner 4
4.2 Satser 5

5 Derivata **5**
5.1 Definitioner 5
5.2 Satser 6

1 Mängder

1.1 Definitioner

Delmängder Låt A, B vara mängder. A är en delmängd av B om det för varje $x \in A$ gäller att $x \in B$. Notation: $A \subset B$.

Union och snitt Låt A, B vara mängder. Unionen $A \cup B$ består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet $A \cap B$ består av de element som är i båda.

Övre och undra begränsningar Ett tal m är en övre begränsning av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$, och en undra begränsning om $x \geq m$ för varje $x \in A$.

Supremum och infimum Ett tal m är supremum till en mängd A om m är den minsta övre begränsningen till A. m är infimum till A om m är den största undra begränsningen till A. Notation: $\sup A, \inf A$.

1.2 Satser

Supremumsegenskapen Varje uppåt begränsade delmängd av $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning.

Bevis Överkurs.

2 Talföljder

2.1 Definitioner

Definitionen av en talföjld En talföljd är en följd av tal $a_1, a_2, ...$ och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Växande och avtagande talföljder En talföljd är växande om $a_{n+1} \geq a_n$ för varje $n \geq 1$. Avtagande talföljder definieras analogt.

Uppåt och nedåt begränsade talföljder En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett M så att $a_n \leq M$ för alla $n \geq 1$.

Begränsade talföljder En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Konvergens av talföljder En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Detta beteendet betecknas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Divergenta talföljder En divergent talföljd är inte konvergent.

Binomialsatsen För $n \in \mathbb{Z}$ har man

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e, Eulers tal

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av talföljder Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara talföljder med gränsvärden A och B. Då följer att

a) $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$.

b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet AB.

c) om $B \neq 0$ är $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\frac{A}{B}$.

d) om $a_n \leq b_n$ för varje n så gäller att $A \leq B$.

Bevis Aa.

Växande och uppåt begränsade talföljder Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

Bevis Enligt supremumsegenskapen finns det ett $K = \sup (a_n)_{n=1}^{\infty}$. Då finns det även a_i godtyckligt nära K - med andra ord finns det ett N så att $|a_N - K| < \varepsilon$ för något $\varepsilon > 0$. Eftersom talföljden är växande, är detta även sant när $n > N$, vilket fullbördar beviset.

Gränsvärde för potenser

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

Bevis Meh.

Standardgränsvärden Låt $a > 1$ och $b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$$

Bevis Nä.

Endeligt värde av e Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

Bevis Säkert någon gång.

Bolzano-Weierstrass' sats Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd. En delföljd av en talföljd är en del av talen som fortfarande är oändligt stor.

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Definition av en funktion Låt X, Y vara mängder. En funktion $f : X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi säger att x avbildas på y och att y är bilden av x. x kallas argumentet till f. X kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även D_f. Y kallas funktionen målmängd.

Värdemängd Värdemängden till $f : X \to Y$ definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden f antar.

Injektivitet f är injektiv om det för varje $x_1, x_2 \in X$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

Surjektivitet f är surjektiv om $V_f = Y$.

Bijektivitet Om f är injektiv och surjektiv, är f bijektiv.

Inversa funktioner Låt $f : X \to Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1} : Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där $y = f(x)$. Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

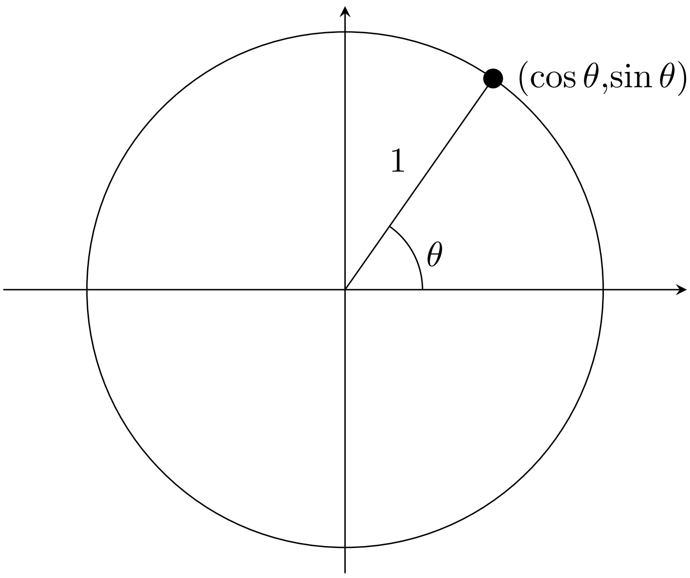
Växande och avtagande funktioner En funktion f är växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) \leq f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

Strängt växande och avtagande funktioner En funktion f är strängt växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) < f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

Monotona funktioner Om en funktioner är antingen strängt växande respektiva strängt avtagande eller växande respektiva avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektiva monoton.

Uppåt och nedåt begränsade funktioner En funktion f är uppåt begränsad om V_f är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedra begrensning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

Trigonometriska funktioner Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.



Figur 1: Enhetscirkeln.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel θ med x-axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av x-axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras sin och cos utifrån x- och y-koordinaterna till punkten för en given θ, var θ mäts i radianer. Vi definierar även $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Från definitonerna ser vi at $\sin x$ och $\cos x$ är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$, medan $\tan x$ är definierad för alla $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

Radianer Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 beväger sig från startpunktet och till nån

Trigonometriska funktioners egenskaper Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dissa. Några essensiella är listad under:

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1\\
&\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta\\
&\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta\\
&\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\\
&\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta\\
&\sin(-\theta) = -\sin\theta\\
&\cos(-\theta) = -\cos\theta\\
&\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta\\
&\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta
\end{aligned}
$$

Inversa trigonometriska funktioner Låt $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Låt $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Låt $f : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arctan x$.

Exponentialfunktionen I häftet definieras inte exponentialfunktionen $a^x, a > 1$, utan den antas vara en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1\\
a^1 &= a\\
a^{x+y} &= a^x a^y\\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x}\\
(a^x)^y &= a^{xy}
\end{aligned}
$$

Logaritmfunktionen Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$ för något $a > 1$. Inversen till denna funktionen betecknas som $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Absolutbelopp Absolutbeloppet definieras som $|x| = \sqrt{x^2}$. Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Kontinuitet Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Konvexitet En funktion f är konvex i $[a, b]$ om det för varje $x_1, x_2 \in [a, b]$ gäller att

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), t \in [0, 1].$$

Konkavitet En funktion f är konkav i $[a, b]$ om $-f$ är konvex i $[a, b]$.

Lodräta asymptoter Linjen $x = a$ är en lodrät asymptot till f om $f(x)$ går mot ∞ eller $-\infty$ när $x \to a^-$ eller $x \to a^+$.

Sneda asymptoter Linjen $y = kx + m$ är en sned asymptot till f om

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$$

eller

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0.$$

Givet att f har en sned asymptot, ger definitionen

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{k}, m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

eller analogt om asymptoten är vid $-\infty$.

Stora ordo vid oändligheten Låt f, g vara funktioner definierade i (a, ∞) för något a. f tillhör stora ordo av g då $x \to \infty$, med notation $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, om det finns M och x_0 så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje $x > x_0$.

Stora ordo kring en punkt Låt f, g vara funktioner definierade i en omgivning till a. f tillhör stora ordo av g kring a, med notation $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, om det finns M och $\delta > 0$ så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

3.2 Satser

Trigonometriska funktioner med vinkelsummor

$$
\begin{aligned}
\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}
$$

Cosinussatsen Låt a, b, c vara sidorna i en triangel och θ vinkeln där sidlängderna a och b möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Logaritmfunktionens egenskaper Låt $a > 1$. Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \tag{1}$$
$$\log_a (xy) = \log_a (x) + \log_a (y) \tag{2}$$
$$\log_a (x^y) = y \log_a (x) \tag{3}$$

Bevis Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen - $a^{\log_a x} = x$ - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att $a^{\log_a 1} = 1$ och att $a^0 = 1$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att $a^{\log_a xy} = xy$ och att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

Ekvation 3 fås från att $a^{\log_a x^y} = x^y$ och att $a^{y \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y$.

Absolutbeloppens egenskaper

$$|xy| = |x||y| \tag{4}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{5}$$

Bevis Kommer kanskje någon gång.

Kontinuitet av samansatta funktioner Låt f vara kontinuerlig i b och låt $g(x) \to b$ när $x \to a$. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

givet att vänsterledet är definierat.

Bevis Meh.

Kontinuitet och begränsning Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.

Bevis Kanske man borde starta på dessa.

Inversfunktioners kontinuerlighet Låt $f : A \to B$ vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen $f^1 : B \to A$ är kontinuerlig och strängt växande.

Bevis Oo.

Elementära funktioners kontinuerlighet Elementära funktioner är kontinuerliga.

Bevis Många av dom.

Kontinuerlighet av summa och produkt Summan och produktet av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Bevis Inses lätt.

Intervallhalvering låt $[a_i, b_i]$ vara intervall så att $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ vid att låta en vara mittpunktet på $[a_i, b_i]$ och den andra vara oändrat. Då finns det ett unikt x så att $x \in [a_i, b_i]$ för alla $i \in \mathbb{N}$.

Bevis

Satsen om mellanliggande värde Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Bevis I fallet $f(a) = f(b)$ är beviset trivialt.

Anta att $f(a) < m < f(b)$ för något m (ett analogt bevis gäller i motsatta fallet). Definiera $a_0 = a$ och $b_0 = b$, bilda intervallet $[a_0, b_0]$ och beräkna funktionsvärdet i mittpunktet. Om detta är större än m, välj b_1 till att vara mittpunktet och $a_1 = a_0$, eller motsatt i motsatt fall. Fortsätta så med intervallhalvering. Då har vi $f(a_i) \leq m \leq f(b)$ för varje $i \in \mathbb{N}$.

Mängden av alla a_i är växande och uppåt begränsad av b_i, och mängden av alla b_i är avtagande och nedåt begränsad av a_i. Vi kan da låta $j \to \infty$, och får $f(x) \leq m \leq f(x) \implies f(x) = m$ för något $x \in [a, b]$. Detta gäller för alla m som uppfyllar kravet, och beviset är klart.

Största och minsta värden Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då finns $x_1, x_2 \in [a, b]$ så att $\sup V_f = f(x_1)$ och $\inf V_f = f(x_2)$.

Bevis yez.

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln 1 + x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bevis Too much.

Stora ordos egenskaper Låt f, g vara funktioner sådana att $\mathcal{O}(f(x)), \mathcal{O}(g(x))$ är definierade kring en punkt eller vid ∞. Då gäller:

$$\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x)g(x)),$$
$$\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(|f(x)| + |g(x)|).$$

Bevis

4 Gränsvärden

4.1 Definitioner

Gränsvärde vid oändligheten Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f konvergerar mot gränsvärdet A när $x \to \infty$ om det for varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

eller $f(x) \to A$ när $x \to \infty$.

Divergens Om det för en funktion f inte finns ett sådant A, sägs f vara divergent då $x \to \ infty$.

Det oegentliga gränsvärdet Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x\ to \infty$ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Lokalt gränsvärde Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f konvergerar mot A när x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyllar $0 < |x - a| < \delta$. Detta skrivs $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Vänster- och högergränsvärden Vid att endast studera $x > a$ eller $x < a$ kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion f. Dessa skrivs $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ eller $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$. För en funktion f definierad i en punkterad omgivning till a existerar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

Det oegentliga lokala gränsvärdet Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \to a$ om det för varje K finns ett $delta$ sådant att $f(x) > K$ för varje $x \in D_f$ som uppfyll ar $0 < |x - a| < \delta$

4.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av funktioner Låt f, g vara kontinuerliga funktioner sådana att $f(x) \to A, g(x) \to B$ när $x \to \infty$. Då gäller att

a) $f(x) + g(x) \to A + B$ när $x \to \infty$.

b) $f(x)g(x) \to AB$ när $x \to \infty$.

c) om $B \neq 0$ så följer att $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ när $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$.

Bevis Mjo.

Gränsvärden och supremum Låt $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \to \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

Bevis Nä.

Standardgränsvärden Låt $a > 1, b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

Bevis Orkar inte.

5 Derivata

5.1 Definitioner

Derivatans definition Låt f vara en funktion definierad i en omgvning krin x_0. f är deriverbar i x_0 om

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. Värdet kallas derivatan i x_0.

Deriverbara funktioner Om en funktion f är deriverbar i alla punkter i definitionsmängden, är funktionen deriverbar. Funktionen $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ med $D_{f'} = D_f$ kallas derivatan.

Minima och maxima En funktion f har ett lokalt maximum i x_0 om det finns en omgivning I till x_0 så att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in I \cap D_f$. Det analoga gäller för ett lokalt minimum. Om f har antingen ett lokalt maximum eller minimum i x_0 har f ett lokalt extrempunkt i f.

Stationära punkt En funktion f har ett stationärt punkt x_0 om $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$.

Inflexionspunkt Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En punkt $x_0 \in I$ sägs vara en inflexionspunkt till f om det finns ett $\delta > 0$ sådan att f är konvex i $[x_0 - \delta, x_0]$ eller $[x_0, x_0 + \delta]$ och konkav i det andra.

Globala maxima och minima En funktion f har ett globalt maximum i x_0 om $f(x) \leq f(x_0$ för varje $x \in D_f$.

Taylorpolynomet Låt f vara n gånger deriverbar. Polynomet

$$p_n(x) = \sum_{i=0} n \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!}(x-a)^i$$

kallas Taylorpolynomet av grad n till f kring a. Specialfallet där $a = 0$ kallas Maclaurinpolynomet till f av grad n.

5.2 Satser

Derivata och kontinuitet Låt f vara deriverbar i (a, b). Då är f kontinuerlig i (a, b).

Bevis Kan man tänka.

Derivationsregler Låt f, g vara deriverbara i punkten x. Då följer att $f + g, fg$ är deriverbara i x. Derivatorna har sambandet

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)\bigg|_x &= \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_x, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af)\bigg|_x &= a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_x, a \in \mathbb{R}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)\bigg|_x &= \left(f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_x.
\end{aligned}$$

Om $g(x) \neq 0$ är även $\frac{f}{g}$ deriverbar i x och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f}{g}\bigg|_x = \frac{\left(g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)\big|_x}{g^2(x)}.$$

Bevis Inte omöjligt.

Kedjeregeln Låt f vara deriverbar i y, g deriverbar i x och $y = g(x)$. Då är den sammansatta funktionen $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\bigg|_{g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\bigg|_x.$$

Bevis

Derivatan av inversfunktioner Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då är inversen f^{-1} deriverbar i alla punkter $y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x$ där $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x \neq 0$ med derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}\bigg|_y = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x}.$$

Bevis

Extrempunkt och derivata Låt f vara deriverbar i x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då är $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x_0} = 0$.

Bevis

Rolles sats Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) så att $f(a) = f(b)$. Då existerar $p \in (a, b)$ så att $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_p = 0$.

Bevis

Generaliserade medelvärdessatsen Låt f och g vara reellvärda, kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b). Då existerar $p \in (a, b)$ så att

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_p (g(b) - g(a)) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\bigg|_p (f(b) - f(a)).$$

Om $g(a) \neq g(b)$ och $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\big|_p \neq 0$, gäller

$$\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_p}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\big|_p} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Medelvärdesatsen Välj $g(x) = x$. Detta ger

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_p (b - a) = f(b) - f(a).$$

Bevis Använd Rolles sats.

Följder av dessa satser Låt f vara deriverbar på (a, b). Då gäller:

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$ för varje $x \in (a, b)$ omm f är konstant på (a, b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \geq 0$ för varje $x \in (a, b)$ omm f är växande på (a, b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} > 0$ implicerar att f är strängt växande på (a, b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \leq 0$ för varje $x \in (a, b)$ omm f är avtagande på (a, b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} < 0$ implicerar att f är strängt avtagande på (a, b).

Bevis

L'Hôpitals regel Låt f, g vara reellvärda, deriverbara funktioner i en omgivning I av a sådana att

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)}.$$

Bevis

Oändliga kvoter Låt

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)} = L,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bevis

Konvexitet och derivata Låt f vara deriverbar i (a, b). Då är f konvex i (a, b) omm $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ är växande i (a, b).

Bevis

Andrederivata och konvexitet Låt f vara två gånger deriverbar i (a, b). Då är $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) \geq 0$ för varje $x \in (a, b)$ omm f är konvex.

Bevis

Andrederivata och inflexionspunkt Låt f vara två gånger deriverbar och låt $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ vara kontinuerlig. Om f har en inflexionspunkt i x_0 så är $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$.

Bevis

Taylors formel Låt f vara n gånger deriverbar och definierad i en omgivning av 0, sådan att $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ är kontinuerlig. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!} x^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\alpha)}{n!} x^n$$

för något $\alpha \in [0, x]$. Kring en godtycklig punkt a blir formeln

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\alpha)}{n!} (x-a)^n$$

för något $\alpha \in (a, x)$.

Bevis

Taylors formel och stora ordo Låt f vara n gånger deriverbar och $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ vara kontinuerlig i en omgivning av 0. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!} x^i + \mathcal{O}\left(x^n\right).$$

Bevis