Sammanfattning av SF1672 Linjär algebra

Yashar Honarmandi

20 december 2017

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av kursen SF1672 Linjär algebra. Den innehåller viktiga och nyttiga definitioner och satser, samt vissa algoritmer för att lösa vissa typer av problem.

Innehåll

1 Vektorer

Begreppet vektor används här om elementer i vektorrum (eller inreproduktrum).

1.1 Definitioner

Linjärt hölje Det linjära höljet av vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ är

$$\mathrm{Span}\,(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Linjärt oberoende vektorer Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$\sum_{i=1}^{n} t_i v_i = 0$$

endast har lösningen $t_i = 0$ för $i = 1, \ldots, n$. 0 refererar här till vektorrummets nollelement.

Ortogonala mängder Låt $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vara en mängd elementer så att $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ för alla $i \neq j$. En slik mängd kallas en ortogonal mängd.

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^m$ Vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$ kallas enhetsvektorer. Man har att $\mathrm{Span}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m) = \mathbb{R}^m$.

Skalärprodukt För två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ med koefficienter u_i och v_i definierar man

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Detta är inreproduktet i $\mathbb{R}^n$.

1.2 Satser

Ortogonalitet och linjärt beroende Vektorerna i en ortogonal mängd är linjärt oberoende.

Bevis Många multiplikationer.

2 Matriser

2.1 Definitioner

Matris-vektor-produkt Betrakta $m \times n$-matrisen

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_n \end{array}\right]$$

och vektoren i $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrisproduktet $A\mathbf{x}$ definieras som vektoren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^m$.

Homogena ekvationssystem Ett homogent ekvationssystem kan skrivas på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Motsatsen är då inhomogena ekvationssystem.

Addition av matriser För två matriser $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ har man

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Mutliplikation av matriser med konstanter För en matris $A = (a_{i,j})$ har man

$$cA = (ca_{i,j}), c \in \mathbb{R}.$$

Diagonalmatriser En matris $D = (d_{i,j})$ kallas en diagonal matris om $d_{i,j} = 0$ när $i \neq j$.

Transponat För en matris $A = (a_{i,j})$ definieras transponatet som $A^T = (a_{j,i})$.

Matrismultiplikation Matrismultiplikation av en $m \times p$-matris A och en $p \times n$-matris B ges av

$$AB = C : c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Inversen av en matris En matris A sin invers A^{-1} uppfyller

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Elementärmatriser En matris E är en elementärmatris om produktet EA kan fås vid att göra en radoperation på A.

Rang Rangen till en matris, skrivit som rank$A$, är dim(Col$A$).

Determinant För en $n \times n$-matris A ges determinanten av

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_i j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_i j), \end{aligned}$$

var A_{ij} är matrisen A utan rad i och kolumn j. De två summorna visar att man kan räkna ut determinanten vid att utveckla den längs en given kolumn j i första fallet eller en given rad i i det andra fallet. Formelen är rekursiv, och base case är $n = 2$, som ges av

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd.$$

Egenvektorer, egenvärden och matriser Egenvektorer och egenvärden definieras analogt för matriser som för linjära avbildningar. För detaljer, se 4.1.

Similära matriser och diagonalisering Två matriser A och B är similära om det finns en matris P så att

$$A = PBP^{-1}.$$

Om B är en diagonalmatris säjs A vara diagonaliserbar.

Ortogonal diagonaliserbarhet $n \times n$-matrisen A är ortogonalt diagonaliserbar om det finns en ortonormal bas av egenvektorer.

Ortogonala matriser En ortogonal matris är en matris med ortonormala kolumner.

Markovkedjor En markovkedje representeras av en matris så att kolumnerna summeras till 1. Sådana matriser kan användas t.ex. för att beskriva stokastiska processer (processer baserade på sannolikhet).

2.2 Satser

Matriskolumner och linjära höljen Följande påståenden är ekvivalenta:

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje

b) Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjär kombination av kolumnerna i A.

c) $\operatorname{Span}(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}) = \mathbb{R}^m$.

d) Den reducerade matrisen till A har m ledande ettor.

Bevis Ekvivalensen till a, b och c är vel trivial eller någonting.

Antag att c gäller och att A ej har m ledande ettor. Då måste man vid Gauss-Jordan-elimination av A få en rad med bara nollor. Antag att detta är sista raden i matrisen. Betrakta vektorn

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom Gauss-Jordan-elimination inte ändrar det linjära höljet av kolummnerna till en matris, borde man kunne hitta en kombination av elementerna i den sista raden i A så att man får 1, eftersom $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$. Då alla elementerna i denna raden är nollor, är detta omöjligt.

Lösningen till inhomogena ekvationssystem Om det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har lösningen $\mathbf{x}_\mathrm{h}$, har det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{x}_\mathrm{i}$, var $\mathbf{x}_\mathrm{i}$ är någon vektor som uppfyllar ekvationssystemet.

Bevis Ganska enkelt.

Linjärt beroende av kolumner i en matris Kolumnerna i en matris är linjärt oberoende omm (om och endast om) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen. Specielt gäller det att om antal rader är mindre än antal kolumner är kolumnvektorerna linjärt beroende.

Bevis Någonting med radreduktion.

Inverterbarhet av en matris En matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) = 0$.

Bevis Använd elementärmatriser.

Rangsatsen För en $n \times m$-matris A är $\text{rank}A + \dim(\text{Null}A) = m$.

Bevis Something something pivotkolumner.

Determinanten för triangulära matriser För en triangulär $n \times n$-matris A, dvs. en matris som har endast nollor över eller under diagonalen, ges determinanten av

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Bevis Inses lätt.

Determinant och elementärmatriser För en elementärmatris E har man

$$\det(E) = \begin{cases} -1, & E \text{ byter plats på två rader.} \\ 1, & E \text{ adderar en multippel av en rad till en annan.} \\ t, & E \text{ multiplicerar en rad med en skalär } t \neq 0. \end{cases}$$

och att

$$B = EA \implies \det(B) = \det(E)\det(A)$$

Bevis Radreducera med matriser.

Determinant för matrisprodukt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis Fallindelning och annat bra.

Diagonaliserbarhet En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer. Detta ger även att kolumnerna i P är egenvektorerna till A och D är en diagonalmatris med egenvärden motsvarande kolumnerna i P på diagonalen.

Bevis Gör saker.

Ortogonal diagonaliserbarhet En matris är ortogonalt diagonaliserbar om den är symmetrisk, d.v.s. $A = A^T$, och den är doagonaliserbar.

Bevis Massa små roliga saker.

Ortogonala matriser och längd Låt A vara en ortogonal matris. Då är

$$|A\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|.$$

Bevis

$$A\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i$$

$$|A\mathbf{u}|^2 = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i$$

Eftersom kolumnerna i A är ortogonala blir skalärprodukterna

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

även känd som Kronecker-deltafunktionen. Detta ger

$$|A\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = |u|_i^2.$$

Spektralsatsen Låt A vara en $n \times n$-matris. Då gäller att:

- A har n reella egenvärden, upp till multiplicitet.
- Dimensionen till egenrummet motsvarande ett givet egenvärde är lika med egenvärdets multiplicitet.
- Egenrummen är ortogonala.
- A är ortogonalt diagonaliserbar.

Bevis

3 Inreprodukt

3.1 Definitioner

Definitionen av inreprodukt Inreproduktet är en avbildning $V \times V \to \mathbb{R}$, var V är ett vektorrum. Notationen är $\langle u, v \rangle$. Inreproduktet ska uppfylla

$$\begin{aligned} \langle u + w, v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle, \\ \langle cu, v \rangle &= c \langle u, v \rangle, c \in \mathbb{R}, \\ \langle v, u \rangle &= \langle u, v \rangle, \\ \langle u, u \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

där inreproduktet av ett element med sig själv är 0 om och endast om elementet är nollelementet.

Norm Normen till ett element, starkt analogt med längd, definieras som

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Ortogonalitet Två elementer u, v är ortogonala om

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Projektion Låt $L = \text{Span}(x_1, \ldots, x_n)$, var alla x_i är ortogonala. Då ges projektionen av ett element u på L av

$$\text{proj}_L(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, x_i \rangle}{\|x_i\|^2} x_i.$$

3.2 Satser

4 Avbildningar

4.1 Definitioner

Avbildningar En avbildning är en funktion som avbildar elementer från ett vektorrum till ett annat.

Bilden till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x}) : V \to W$ definierar man bildet till T som

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = T(\mathbf{x})\} \subset W.$$

Detta är ett delrum.

Kärnan till en avbildning För en avbildning $T(\mathbf{x}) : V \to W$ definierar man kärnan till T som

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset V.$$

Detta är ett delrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),$$
$$T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x}), c \in \mathbb{R}.$$

Egenvektorer och egenvärden Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning. Egenvektorerna till T är alla nollskilda vektorer $\mathbf{x} \in V$ så att

$$T(\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

λ är det motsvarande egenvärdet till $\mathbf{x}$.

Egenrum Låt $\mathbf{x}$ vara en egenvektor med motsvarande egenvärde λ till avbildningen T. Då definieras egenrummet motsvarande λ enligt

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in V : T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}.$$

Merk att nollvektoren även inkluderas i E_λ.

Karakteristisk polynom Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med standardmatris A. Då är det karakteristiska polynomet (av grad n) till T

$$C(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

var I är identitetsmatrisen.

Multiplicitet för egenvärden Ett egenvärdes algebraiska multipliciteten är multipliciteten till detta egenvärdet i det karakteristiska polynomet. Ett egenvärdes geometriska multiplicitet är dimensionen till egenrummet motsvarande detta egenvärdet. Det kommer ej göras en distinktion i denna sammanfattning.

Kvadratiska former En kvadratisk form är en avbildning på formen

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le i \le j \le n} d_{i,j} x_i x_j.$$

Positiv och negativ definitet En kvadratisk form är positivt definit om $Q(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x}$, och negativt definit om $Q(\mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{x}$. Om den ej är positivt eller negativt definit, är den indefinit.

Kvadratiska kurvor En kvadratisk kurva är lösningsmängden till ett andragradspolynom i n variabler.

4.2 Satser

Avildningar och enhetsvektorer För en linjär avbildning $T(\mathbf{x})$ har man att

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{e}_i)$$

var x_i är komponenterna av $\mathbf{x}$.

Bevis Borde gå.

Avbildningar och matriser För en avbildning $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan man definiera matrisen

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)]$$

var $\mathbf{e}_i$ är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$. Då kan avbildningen skrivas som

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Bevis Inte svårt alls.

Samansättning av linjära avbildningar För två linjära avbildningar S, T är avbildningen $S \circ T$ linjär.

Bevis Vi använder oss av definitionen.

Dimensionalitet och avbildningar För en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = n$.

Bevis Oklart?

Karakteristisk polynom och egenvärden Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Egenvärden till T är lösningerna till $C(\lambda) = 0$.

Bevis Lösa för det.

Egenrum och dimensionalitet Låt T vara en avbildning med p distinkta egenvärden. Då gäller:

- Dimensionen till egenrummet motsvarande något egenvärde är mindre än eller lika med multipliciteten till detta egenvärdet.
- Standardmatrisen A, givet en avbildning mellan rum med samma dimensionalitet n, är diagonaliserbar om och endast om summan av egenrummens dimension är n.
- Om standardmatrisen är diagoniserbar och B_k är en bas för egenrummet till egenvärdet λ_k, bilder samlingen av basvektorerna till alla B_I en bas för $\mathbb{R}^n$.

Diagonalisering och avbildningar Låt $A = PDP^{-1}$ vara standardmatrisen för en avbildning, och B en basis för $\mathbb{R}^n$ bildat av kolumnerna i P. Då är D matrisen för avbildningen i bas B.

Bevis Ganska enkelt.

Definitet och egenvärden Låt Q vara en kvadratisk form. Då gäller:

- Q är positivt definit om och endast om alla egenvärden år positiva.
- Q är negativt definit om och endast om alla egenvärden år negativa.
- Q är indefinit om det finns båda negativa och positiva egenvärden.

5 Vektorrum

5.1 Definitioner

Grupper En grupp G definieras av en mängd X och en binär operation $\cdot$ på två elementer i X (kommer ej skrivas ut). Denna operationen ska uppfylla

- operationen är assosiativ, dvs. $a(bc) = (ab)c$.
- grupen är stängd under operationen, dvs. för $a, b \in G$ är $ab \in G$.
- det finns ett enhetselement e så att $ae = ea = a$.
- det för varje element finns en invers så att $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Abelska grupper En grupp är abelsk om den uppfyllar $ab = ba$ för alla $b, a \in X$.

Vektorrum Om man definierar skalärmultiplikation med elementer i en abelsk grupp, bildar grupen ett vektorrum V under addition om

- $cx \in V,\ c \in \mathbb{R},\ x \in V$.
- $c(x + y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R},\ x, y \in V$.
- $(c + d)x = cx + dx,\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $e \in V$.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Bas $v_1, \ldots, v_k \in V$ är en bas för V om

- $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k) = V$.
- vektorerna i basen är linjärt oberoende.

Om vi kallar basen till V för β kan alla vektorer i V skrivas som basvektorer på följande sätt:

$$x = \sum_{i=0}^{k} c_i v_i,$$

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Detta är en vektor i $\mathbb{R}^k$.

Ortogonal bas En ortogonal bas för ett vektorrum W är en ortogonal mängd av vektorer som bildar en bas för W.

Dimension Dimensionen till ett vektorrum är antalet vektorer i basis.

5.2 Bevis

Delrum i $\mathbb{R}^n$ Om V är ett delrum i R^n kan det skrivas som $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

Bevis 2 ez.

Linjärt beroende och basstorlek Låt $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vara en bas för V och $\{w_1, \ldots, w_p\}$ vara vektorer i V med $p > n$. Då är $\{w_1, \ldots, w_p\}$ linjärt beroende.

Bevis Basvektorer.

Antal vektorer i en bas Antalet vektorer i basen för ett delrum V är oberoende av valet av bas.

Bevis Typ det samma.

Val av bas För ett delrum med dimension n är vilken som helst mängd av n linjärt oberoende vektorer i V en bas för V.

Bevis Mer av det här?!

Avbildningar med val av bas Låt $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vara en bas för delrummet V, C en bas för delrummet W och T en linjär avbildning från V till W. Då ges avbildningen i koordinatvektorer av

$$[T(x)]_C = A[x]_B,$$

där A ges av

$$A = [[T(b_1)]_C \ldots [T(b_n)]_C].$$

Vektorer och ortogonala baser Låt $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vara en ortogonal bas för W. Alla vektorer $w \in W$ kan skrivas som

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle w, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Bevis Oklart.

Projektion Låt $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vara en ortogonal bas för W. Då gäller

$$\mathrm{proj}_W(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Bevis Varför behövs det?

Bästa approximationers sats Låt W vara ett delrum till R^n och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$|\mathbf{x} - \mathrm{proj}_W(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{w}|, \mathbf{w} \in W.$$

Bevis Schmart.

6 Geometri

6.1 Definitioner

Linjer i $\mathbb{R}^2$ En linje i R^2 definieras av en ekvation på formen $ax + by + c = 0$. Linjen är normal på

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Plan i R^3 Ett plan i R^3 definieras av en ekvation på formen $ax + by + cz + d = 0$. Planet är normalt på

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Kryssprodukt i $\mathbb{R}^3$ Kryssproduktet av två vektorer ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.2 Satser

Distanser till hyperplan i $\mathbb{R}^n$ Låt H vara ett hyperplan definierad av ekvationen

$$d + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

och

$$N = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)$$

vara dess ortogonala komplement. Då ges avstandet från en punkt Q med koordinater $q_i, i = 1, 2, \ldots, n$ av

$$s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i q_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

Bevis Aa.

Kryssproduktens egenskaper

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Bevis

Plan med punkter Givet tre punkter P, Q, R är vektorn

$$\mathbf{n} = (Q - P) \times (R - P)$$

normal på planet som innehåller de tre punkterna.

Bevis

Area av parallellogrammer i $\mathbb{R}^3$ Arean av ett parallellogram i $\mathbb{R}^3$ definierad av två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ges av

$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

Bevis

Avstånd mellan linjer Låt L_1, L_2 vara två linjer.
Om linjerna är parallella är avståndet

$$s = \left|(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) - \text{proj}_{L_2'}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)\right|$$

där L_2' är parallell med L_2 och går genom origo.
Om linjerna är i parallella plan H_1, H_2 definierar man först

$$P_1' = \{\mathbf{p}_1 + t\mathbf{n}_1, \mathbf{p}_1 \in H_1\} \cap H_2$$

som är parallell med L_1 och ligger i H_2 för ett smart val av t. Avståndet är då

$$s = t|\mathbf{n}|.$$

7 Volymer

Denna delen diskuterar hur man beräknar storheten volym för objekter i $\mathbb{R}^n$. Ordet volym kommer att användas om area i $\mathbb{R}^2$, volym i $\mathbb{R}^3$ och en analog storhet i andra $\mathbb{R}^n$.

En kropp i R^n En kropp i R^n är en mängd punkter. Ett enkelt exempel är ett prism P, som ges av

$$P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i\}.$$

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ definierar då prismet.

Volym av ett prism Ett prism P i $\mathbb{R}^n$ definieras av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Konstruera en matris A vars kolumner är vektorerna som definierar prismet. Då ges volymen till P av

$$V_P = \det(A).$$

Volym av en transformerad kropp Om man använder en linjär avbildning T med standardmatris A på punkterna i en kropp K, ges volymen av kroppen som fås efter avbildningen av

$$V_{T(K)} = \det(A) V_K.$$

8 Algoritmer

Dessa algoritmer kan vara smarta att kunna för att lösa problemer i linjär algebra.

Gauss-Jordan-elimination Ett ekvationssystem

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

kan lösas vid att konstruera en totalmatris

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n
\end{array}\right]
$$

och göra Gauss-Jordan-elimination på denna.
Syftet med Gauss-Jordan-elimination är att varje kolumn ska ha ett och endast ett pivotelement, även kallad en ledande etta. En ledande etta är en etta som inte har någon andra tal i samma kolumn eller till vänster i samma rad. För att få sådana, gör man operationer på radarna i matrisen enligt följande regler:

- Radar kan multipliceras med konstanter. Forsöka, dock, att undveka 0, eftersom det fjärnar information, vilket är otrevligt.
- Radar kan adderas och subtraheras med andra rader, var båda potensielt multiplicerad med en lämplig konstant.
- Radar kan byta plats.

När man är klar, ska matrisen (förhoppingsvis) se ut så här:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_n
\end{array}\right]
$$

var alla a_i är reella tal.

Invertering av en matris Ställ upp en totalmatris $[A|I]$. Vid att radreducera A till identitetsmatrisen blir I radreducerad till A^{-1}. Att visa detta är enkelt om man använder elementärmatriser.

Basbyte Om man har två baser $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ för ett delrum W, kan man bilda matrisen

$$P = [[\mathbf{b}_1]_C \dots [\mathbf{b}_n]_C]$$

så att

$$[\mathbf{x}]_C = P[\mathbf{x}]_B.$$

Då byter man bas mellan B och C vha. multiplikation med P eller dens invers.

Gram-Schmidts algoritm Låt $\{x_1, \dots, x_n\}$ vara en bas för delrummet $W \neq \{0\}$. Gram-Schmidts algoritm ger dig ett sätt att få en ortogonal basis för W från den gamla basen. Vektorerna (var vi här använder begreppet vektor i en vid förstånd) i basen ges av

$$
\begin{aligned}
w_1 &= x_1, \\
w_2 &= x_2 - \mathrm{proj}_{W_1}(x_2), \\
&\vdots \\
w_i &= x_i - \mathrm{proj}_{W_i}(x_i),
\end{aligned}
$$

var vi har definierat

$$W_i = \mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1})\,.$$

Minstakvadratmetoden Givet ett delrum W av $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, söker vi $\mathrm{proj}_W(\mathbf{b})$. Om $W = \mathrm{Span}\,(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ och $A = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_m]$ söker vi en $\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{b})$. Denna ges av

$$A^T\mathbf{b} = A^T A\mathbf{x}.$$

Kvadratiska former Given en kvadratisk form

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le i \le j \le n} d_{i,j} x_i x_j,$$

bilda en matris $Q = (q_{i,j})$ så att

$$q_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} d_{i,j}, & i \neq j \\ d_{i,j}, & i = j \end{cases}$$

Detta ger

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}.$$

Q är symmetrisk, och därmed ortogonalt diagonaliserbar. Låt matrisen P vara övergångsmatrisen från en ortonormal bas till standardbasen, och definiera $\mathbf{x} = P\mathbf{s}$. Detta ger

$$Q(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T D\mathbf{s},$$

var D är en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen. Avbildningen kan då skrivas som

$$Q(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2.$$

Kvadratiska kurvor Givet ett andragradspolynom i n variabler, hitta en matris Q så att de kvadratiska termerna ges av $\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ och en vektor $\mathbf{v}$ så att de linjära termerna kan skrivas som $\mathbf{v}^T\mathbf{x}$. Gör sen ett variabelbyte enligt beskrivningen ovan av kvadratiska formar, och skriv polynomet i dessa nya variablerna. Kvadratkomplettera sen, och du får en ekvation som beskriver lösningsmängden.