# Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

5 december 2018

**Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

# Innehåll

# 1 Vektorrum

## 1.1 Definitioner

**Kroppar** En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ osv.

**Vektorrum** Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör $V$ till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp $k$ med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x+y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R},\ x, y \in V$.
- $(c+d)x = cx + dx,\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

**Delrum** En delmängd $V$ av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

**Inre direkt summa** Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

**Yttre direkt summa** Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

**Kvotrum** Om $W \subseteq V$ är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

**Operationer på sidoklasser** Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= x + y + W,\\ a(x + W) &= (ax) + W.\end{aligned}$$

**Linjärt oberoende mängder** $S$ är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla $x_i$ är elementer i $S$.

**Linjärt hölje** Det linjära höljet $\mathrm{Span}\,(S)$ av mängden $S$ är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i $S$.
- det minsta delrummet som innehåller $S$.
- $\bigcap\limits_{S \subset W} W$.
- $\sum\limits_{x \in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

**Bas** En bas $B$ för vektorrummet $W$ är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i $V$ är linjärkombinationer av vektorer i $B$ på ett unikt sätt.

**Duala rum** För ett vektorrum $V$ över kropp $k$ är duala rummet $V^*$ mängden av alla linjära former på $V$, dvs. alla linjära avbildningar $V \to k$.

**Dual bas** Givet en bas $\{e_i\}_{i \in I}$ för $V$, väljer vi en bas $\{e_i^*\}_{i \in I}$ fför $V^*$ som uppfyller

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

### 1.2 Satser

**Operationer på sidoklasser** Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

**Bevis**

# 2 Avbildningar

## 2.1 Definitioner

**Isomorfir** En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Linjära avbildningar** En avbildning $T$ är linjär om

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säjer att $T$ respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

**Isomorfir** En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Matriser för linjära avbildningar** Om $B$ är en bas för $V$ och $D$ är en bas för $W$ kan vi ordna en matris för $L : V \to W$ genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in I} a_{ji} y_j,$$

där alla $x_i \in B$, alla $y_i \in D$ och $I$ är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om $I$ är oändlig.

**Analytiska funktioner av operatorer** En analytisk funktion av en operator $L$ definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

**Matrisnorm** Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

**Nilpotenta operatorer** En operator $L$ är nilpotent om $L^n = 0$ för något $n$.

### 2.2 Satser

**Basbyte** Låt $L$ vara en avbildning från $V$ till $W$. Låt $]_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen $B$ i definitionsmängden till $D$ i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från $A$ till $B$ i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

**Bevis** Kommutativt diagram

**Koordinater** Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet $V$. Detta ger en isomorfi

$$\begin{aligned} V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k, \\ x = \sum a_i xi \to \{a_i\}_{i \in I}. \end{aligned}$$

**Bevis** Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \to \sum a_i xi$$

ger en avbildning $k^I \to V$ som är injektiv eftersom $B$ är linjärt oberoende och surjektiv eftersom $B$ spänner upp $V$.

**Kärna och injektivitet** En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

**Bevis**

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

**Kvotavbildning** Om $W \subseteq V$ är ett delrum , ger $x \to x + W$ en linjär kvotavbildning från $V$ till $\frac{V}{W}$.

**Bevis** Vi har

$$\begin{aligned} x + y \to x + y + W = x + W + y + W, \\ ax \to ax + W = a(x + W), \end{aligned}$$

och beviset är klart.

**Isomorfisatsen**

$$\mathrm{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

**Bevis** Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\mathrm{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty $L$ är linjär. $\Phi$ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) \colon L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. $\Phi$ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något $x$ ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \mathrm{Im}(L)$ ett $x$ så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

**Dimensionssatsen** Om $V$ är ändligdimensionellt är $\operatorname{rank} L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

**Bevis**

**Faktorisering med kvotrum** Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \to W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

**Bevis** Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.

**Norm av potenser av matriser**

$$\left\|A^i\right\| \leq \|A\|^i$$

**Bevis**

**Konvergens av funktioner av matriser** En funktion $f$ av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

# 3 Egenvärden och olika polynom

## 3.1 Definitioner

**Egenvektorer** $x$ är en egenvektor till $L$ om det finns ett $\lambda \in k$ så att

$$Lx = \lambda x.$$

$\lambda$ kallas det motsvarande egenvärdet.

**Karakteristiskt polynom** Om $V$ är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där $I$ är identitetsavbildningen.

**Minimalpolynom** Om $A$ är en matris, är minimalpolynomet $q_A(x) \in k[x]$ det moniska polynomet av lägst grad så att $q_A(A) = 0$.

**Diagonaliserbarhet** En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operatorns matris i den basen är diagonal.

**Samtidig diagonaliserbarhet** Två operatorer $L_1$ och $L_2$ är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

## 3.2 Satser

**Karakteristiska polynom och egenvärden** Om *lambda* är ett egenvärde till $L$ så är $p_L(\lambda) = 0$.

**Bevis** Ez

**Existens av minimalpolynom** Om $V$ är ändligdimensionellt, har $L$ ett karakteristiskt polynom.

**Bevis** Betrakta matrisen $A$ för $L$ i någon bas. Det gäller att mängden $\{A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}\}$ är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

**Cayley-Hamiltons sats** $p_L(L) = 0$.

**Bevis** Om matrisen för $L$ är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

**Korrolar** $q_L$ är en faktor i $p_L$.

**Multipliciteter och diagonaliserbarhet** Om $L$ är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla $L$:s egenvärden.

**Bevis**

**Konjugerade matriser** Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

**Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet** Låt $V$ vara ett ändligdimensionellt vektorrum och $L_1, L_2$ två operatorer på detta. Då går det att diagonalisera $L_1$ och $L_2$ om de kommuterar.

**Bevis**

**Kommutativitet och egenrum** Låt $L_1$ och $L_2$ kommutera och $E_1$ vara egenrum till $L_1$. Då är $L_2(E_1) \subset E_1$.

**Bevis**

**Nilpotens och blockdiagonalitet** Om $L$ är nilpotent finns det en bas för $V$ så att matrisen för $L$ blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

**Bevis** Här kommer endast en bevisidé presenteras.
Det finns ett $s$ så att $L^s = 0$ och $L^{s-1} \neq 0$. Vi väljer då ett delrum $W_s$ så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$ så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$ och $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$. Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla $W_i$ och bilderna av alla potenser av $L$. Dissa bildar en bas för $V$. Med en lämplig ordning på basen fås $\dim(W_i)$ block på formen ovan i matrisen, varje med storlek $i \times i$.

**Jordans normalform** Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för $L$ är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att $\Lambda_i = \lambda_i I + N$, där $N$ är nilpotent.

**Bevis**

# 4 Inreprodukt

## 4.1 Definitioner

**Inreprodukt över $\mathbb{R}$** En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum $V$ över $\mathbb{R}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{R}$ som är

- bilinjär, dvs.
  - $\langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$.
  - $\langle ax|y \rangle = a \langle x|y \rangle$.
  - $\langle x|y + z \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$.
  - $\langle x|ay \rangle = a \langle x|y \rangle$.
- symmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$.

**Inreprodukt över $\mathbb{C}$** En inreprodukt $\langle x|y \rangle$ på ett vektorrum $V$ över $\mathbb{C}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{C}$ som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men $\langle ax|y \rangle = a^* \langle x|y \rangle$.
- konjugatsymmetrisk, dvs. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$. Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att $\langle x|x \rangle$ har ingen imaginärdel.

**Inreprodukt från matris** Vi kan få en inreprodukt i $\mathbb{C}^n$ från en matris genom

$$\langle x|y \rangle = \sum a_{ij} x_i^* y_j = (x^*)^T Ay.$$

Om detta skall uppfylla konjugatsymmetri, ger det

$$(x^*)^T Ay = (y^*)^T Ax^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T Ay = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Om matrisen uppfyller detta, säjs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermitesk.

**Norm** Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

**Vinkel** Vinkeln $\theta$ mellan två vektorer definieras som

$$\cos\theta = \frac{\langle x|x\rangle}{|x||y|}.$$

**Ortogonalitet** $x$ och $y$ är ortogonala om

$$\langle x|y\rangle = 0.$$

**Ortogonalt komplement** Om $W \subseteq V$ är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^{\perp} = \{x \in V : \langle x|y\rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

**Projektion** Låt $V$ vara ett delrum med bas bas $B = \{e_i\}_{i=0}^{n}$. Då definieras projektionen som

$$\mathrm{proj}_V(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle x_i|e_j\rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

**Adjungerade operatorer** På ett inreproduktrum $V$ är $L^\dagger$ den adjungerade operatorn till $L$ om

$$\left\langle L^\dagger(x) \middle| y \right\rangle = \langle x|L(y)\rangle \, \forall x, y \in V.$$

Om $L : V \to W$ definieras den adjungerade operatorn som $L^\dagger : W \to V$ som uppfyller

$$\langle y|L(x)\rangle = \left\langle x \middle| L^\dagger(y) \right\rangle \forall x \in V, y \in W.$$

**Självadjungerade operatorer** På ett inreproduktrum $V$ är $L$ självadjungerad om

$$\langle L(x)|y\rangle = \langle x|L(y)\rangle \, \forall x, y \in V.$$

Matrisen för en sådan operator sägs vara Hermitesk.

**Cauchyföljder** En Cauchyföljd är en följd som indexeras med naturliga talen och som uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $N$ så att

$$i, j > N \implies \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

**Fullständiga rum** Ett rum $V$ är fullständigt om alla Cauchy-följder konvergerar.

**Hilbertrum** Ett Hilbertrum är ett inreproduktrum som är fullständigt.

$\ell^2$ Vi definierar $\ell^2(\mathbb{C})$ som mängden av alla följder av tal i $\mathbb{C}$ så att

$$\sum_{i=0}^{N} |a_i|^2$$

är begränsad, med inreprodukten

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=0}^{N} a_i^* b_i.$$

**$L^2$** Vi definierar $L^2([0,1],\mathbb{C})$ som mängden av alla komplexvärda funktioner på $[0,1]$ med inreprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_0^1 f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

**Ortogonala och unitära operatorer** En ortogonal operator över ett reellt vektorrum $V$ är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly\rangle = \langle x|y\rangle\,\forall x,y\in V$.

En unitär operator över ett komplext vektorrum $V$ är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx|Ly\rangle = \langle x|y\rangle\,\forall x,y\in V$.

## 4.2 Satser

**Cauchy-Schwarz olikhet**

$$|\langle x|y\rangle| \leq |x||y|.$$

**Bevis**

**Triangelolikheten**

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

**Ortogonalt komplement och vektorrum** Om $V$ är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$W = W \oplus W^\perp.$$

**Bevis** Det gäller att

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

**Bra och dualrum** Om $V$ är ett inreproduktum, definierar båd $x \to \langle x|$ och $x \to \langle x^*|$ en injektiv avbildning $V \to V^*$. Om $V$ är ändligdimensionellt, är detta dessutom en isomorfi.

**Bevis**

**Inreproduktrum och ortogonal bas** Ett ändligdimensionellt vektorrum har en ortogonal bas.

**Bevis**

**Gram-Schmidts metod** Låt $V$ vara ett vektorrum med ändlig dimension eller en uppräknelig bas $B = \{x_i\}_{i=0}^n$. Då bildar vektorerna

$$e_i = x_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_j|x_i\rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

en ortogonal bas för $V$.

**Bevis**

**Matrisen för en adjungerad operator** Låt $L$ beskrivas av matrisen $A$ i någon ortonormal bas. Då beskrivs $L^\dagger$ av matrisen $(A^T)^*$, även om operatorn är mellan två olika vektorrum.

**Bevis** Vi har

$$L(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

vilket ger

$$\langle e_i | L(e_j) \rangle = \left\langle e_i \middle| \sum_k a_{jk} e_k \right\rangle = \sum_k \langle e_i | a_{jk} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i | e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji}.$$

Om $B$ är matrisen för $L^\dagger$, så vi nu att dens komponenter kan skrivas som $b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle$. Vi utvecklar detta och får

$$b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle = \left\langle L^\dagger(e_j) \middle| e_i \right\rangle^* = \langle e_j | L(e_i) \rangle^* = a_{ij}^*,$$

och därmed är beviset klart.

**Egenvärden för självadjungerade operatorer** Självadjungerade operatorer har bara reella egenvärden.

**Bevis**

$$\langle L(x) | x \rangle = \langle x | L(x) \rangle .$$

Detta kan utvecklas om $x$ är en egenvektor för att ge

$$\lambda^* \langle x | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle ,$$

och beviset är klart.

**Diagonalisering av självadjungerade operatorer** Alla självadjungerade operatorer på ändligdimensionella inreproduktrum kan diagonaliseras.

**Bevis** Vi gör induktion över $\dim(V)$.

Det är trivialt för dimension 1.

Annars, om vi har en egenvektor $x$ motsvarande egenvärdet $\lambda$, bilda $W = \operatorname{Span}(x)$. Då har man $L(W) \subseteq W$. Vidare, om $y \in W^\perp$, har man

$$\langle x | y \rangle = 0 \implies \langle \lambda x | y \rangle = \langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle = 0,$$

och $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Man kan vidare bilda en bas för $V$ med basen för $W^\perp$ och $x$. Matrisen för $L$ med avseende på denna basen är

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

Per induktion finns det då en ortogonal bas för $W^\perp$ så att matrisen för $L$ på $W^\perp$ blir diagonal.

**Ortogonal bas och självadjungerade operatorer** Om $L$ är en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt vektorrum $V$, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till $L$.

**Bevis**

**Självadjungerade operatorer och ortogonala egenvektorer** Låt $x$ vara en egenvektor till $L$ med egenvärdet $\lambda$och $y$ vara en egenvektor med egenvärde $\mu$. Om $\lambda - \mu \neq 0$ är $\langle x | y \rangle = 0$.

**Bevis**

$$\langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle .$$

Vi använder att $x$ och $y$ är egenvektorer och får

$$\lambda^* \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle .$$

Enligt antagandet måste då $\langle x | y \rangle = 0$.

**Längdbevarande operatorer** För en operator $L$ på ett reellt inreproduktrum $V$ är följande ekvivalent:

- $\|Lx\| = \|x\| \forall x \in V$.
- $\langle x|y\rangle = \langle Lx|Ly\rangle \, \forall x, y \in V$.

Om vektorrummet är ändligdimensionellt, är påståenden även ekvivalenta med

- $L$ avbildar ortonormala baser på ortonormala baser.

**Bevis**

**Längdbevarande operatorer som bijektioner** Längdbevarande operatorer på ändligdimensionella vektorrum är bijektiva.

**Bevis** Sådana operatorer är injektiva ty

$$\|Lx\| = 0 \implies x = 0.$$

De är surjektiva ty matrisen för avbildningen i någon bas måste ha linjärt oberoende kolumner för att vara injektiv. Detta implicerar att avbildningen är surjektiv.

**Ortogonala grupper**

- Mängden $O(V) = \{L : V \to V : L \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under sammansättning om $V$ är ett reellt inreproduktrum med en ortogonal bas.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1, A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.

Satsen stämmer även för de komplexa motsvarigheterna.

**Bevis**

**Egenvärden och egenvektorer till ortogonala och unitära operatorer** Om $L$ är en unitär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till $L$ och alla egenvärden till $L$ har belopp 1.

**Bevis** Det finns (möjligtvis) minst ett egenvärde $\lambda$. Välj en motsvarande egenvektor $x$. Detta ger

$$\|x\| = \|Lx\| \implies |\lambda| = 1.$$

Låt nu $W = \mathrm{Span}\,(x)$. Vi har att $L(W^\perp) \to W^\perp$ eftersom $L$ bevarar inreprodukten. Detta ger (?) per induktion att det finns en bas för $W^\perp$ av egenvektorer till $L$. Unionen av $x$ och denna basen är därmed en bas för hela vektorrummet.

**Exponentialavbidlningen och Hermiteska operatorer** Låt $H$ vara Hermitesk. Då är $e^{iH}$ unitär.

**Bevis** Eftersom $H$ är Hermitesk, finns det en ortogonal bas av egenvektorer. I denna basen är matrisen för $H$ en diagonalmatris. Därmed är matrisen för $e^{iH}$ en diagonalmatris med $e^{i\lambda}$ på diagonalen, där $\lambda$ är något egenvärde. Alltså finns det en ortogonal bas av egenvektorer till $e^{iH}$, där varje egenvärde har belopp 1, och $e^{iH}$ är unitär.

# 5 Linjär rekursion

## 5.1 Definitioner

**Linjär rekursion** En linjär rekursion definieras av en följd $\{x_i\}_{i\geq 0}$ av element i ett vektorrum, där

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i-j}, i \geq n$$

där $x_0, \dots, x_{n-1}$ är givna. Detta kan alternativt skrivas på matrisform som

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{i-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} y_{i-1}.$$

Dessa matriserna kan ej diagonaliseras.

## 5.2 Satser

# 6 Singulärvärden

## 6.1 Definitioner

## 6.2 Satser

**Möjlighet för singulärvärdesuppdelning** Låt $L : V \to W$. Då kan man välja baser för $V$ och $W$ så att matrisen för $L$ ges av

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 6.3 Algoritmer

**Singulärvärdesuppdelning** Låt $L : V \to W$. Vi vill hitta baser för $V$ och $W$ så att matrisen för $L$ blir på formen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta görs vid att

- välja en bas för $\ker(L)$.
- utvidga detta till en bas för $V$ vid att lägga till vektorer i början av basen.
- välja en bas för $W$ vid att utgå från avbildningarna av vektorerna i basen för $V$ och lägga på vektorer.

Om $V$ och $W$ är inreproduktrum och du vill välja en ON-bas för båda, kommer du få en diagonalmatris i stället för identitetsmatrisen.

# 7 Sannolikhet

## 7.1 Definitioner

**Sannolikhetsmatriser** En sannolikhetsmatris är en kvadratisk matris där alla element är positiva och summan i varje kolonn är 1.

**Stokastiska processer** En stokastisk process är en följd av stokastiska variabler.

**Markovprocesser** En Markovprocess är en stokastisk process som endast beror av förra steget i processen.

Om den stokastiska variabeln är på vektorform, kan rekursionen skrivas som

$$X_{n+1} = AX_n.$$

## 7.2 Satser

**Egenvärden till sannolikhetsmatriser** 1 är alltid ett egenvärde till en sannolikhetsmatris.

**Bevis** Låt $A$ vara en sannolikhetsmatris. Om $e = [1 \dots 1]^T$ är

$$e^T A = e^T$$

enligt definitionen, vilket implicerar

$$ATe = e.$$

Eftersom $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$ är beviset klart.

**Perron-Frobenius' sats** Om $A$ är en reguljär sannolikhetsmatris, dvs. uppfyller att $A^m$ för något $m$ bara har positiva element, gäller följande:

- Det finns en egenvektor med egenvärde 1 så att alla element i denna är positiva.
- Den algebraiska och geometriska multipliciteten till egenvärdet 1 är båda lika med 1.
- Om $\lambda$ är ett annat egenvärde är $|\lambda| < 1$.
- Alla andra egenvektorer har koordinater som summerar till 1.

**Bevis** Det finns ett $x \neq 0$ så att $Ax = x$. Vi bildar nu $x^+$ så att $x_i^+ = |x_i|$. Då kan vi skriva

$$\begin{aligned} x &= x_+ - x_-, \\ x^+ &= x_+ + x_- \end{aligned}$$

Där $x_+$ och $x_-$ innehåller de positiva respektiva negativa elementen i $x$. Detta ger

$$\begin{aligned} Ax_+ &= A(x + x_-) = x + Ax_- \geq x, \\ Ax_- &= A(x_+ - x) = Ax_+ - x \geq -x, \\ Ax^+ &= A(x_+ + x_-) = Ax_+ + Ax_- \geq x^+ \end{aligned}$$

där olikheterna jämför varje koordinat för sig. Vi inför igen vektorn $e^T = [1 \dots 1]$ och får

$$e^T x^+ \leq e^T A x^+ = e^T x^+,$$

alltså måste dessa vara lika och $Ax^+ = x^+$, vilket beviser första påståendet.

Antag vidare att det finns en annan egenvektor $y$ motsvarande egenvärdet 1. Det finns då ett $\alpha$ så att vektorn $x^+ + \alpha y$ har en koordinat lika med 0. Detta ger (säkert) motsägelse enligt argumentet ovan eftersom $(x^+ + \alpha y)^+ > 0$, vilket bevisar andra påståendet.

Vi definierar vidare $A_\infty = x^+ e^T$ och får

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T.$$

Om $x^+$ är normerad så att summan av elementen är lika med 1, ger detta

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty.$$

Vi har vidare

$$\begin{aligned} AA_\infty &= Ax^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty, \\ A_\infty A &= x^+ e^T A = x^+ e^T = A_\infty. \end{aligned}$$

Vi antar att alla element i $A$ är positiva, och därmed finns det ett $\varepsilon > 0$ så att $B = A - \varepsilon A_\infty$ också är en positiv matris. Vi har vidare

$$\begin{aligned}
B^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\
&= A^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty A^{n-i} \\
&= A^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\
&= A^n - A_\infty + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\
&= A^n - A_\infty + (1-\varepsilon)^n A_\infty.
\end{aligned}$$

Det gäller att $\lim\limits_{n\to\infty} B^n = 0$ eftersom kolumnerna i $B$ nu summerar till något mindre än 1, vilket implicerar $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = A_\infty$. Betrakta vidare en egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda$. Eftersom $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ existerar, existerar även $\lim\limits_{n\to\infty} A^n y = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n y$. Detta är bara möjligt om $|\lambda| < 1$ eller $\lambda = 1$ ($|\lambda| = 1$ uppfylls ju bara om $\lambda = 1$, vilket redan har täckts).

# 8 Multilinjär algebra

Observera att Einsteinnotation kommer användas ofta i denna del.

Olika definitioner

## 8.1 Definitioner

**Tensorprodukt av vektorrum från produkter** Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen $V$ och $W$ definieras som vektorrummet med bas $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ om $\{e_i\}_{i\in I}$ och $\{f_j\}_{j\in J}$ är baser för $V$ respektiva $W$.

**Basbyten under tensorprodukt** Betrakta $V \otimes W$, med baser om $\{e_i\}_{i\in I}$ och $\{f_j\}_{j\in J}$ för $V$ respektiva $W$. Vid basbytet

$$e'_i = pike_k, f'_j = qjlf_l$$

ges basvektorerna för $V \otimes W$ av

$$e'_i \otimes f'_j = (p_{ik} e_k) \otimes (q_{jl} f_l).$$

Detta definieras som att det uppfyllar distributiva lagen, vilket ger

$$e'_i \otimes f'_j = p_{ik} q_{jl} e_k \otimes f_l.$$

**Tensorprodukt av vektorrum från dualer** Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen $V$ och $W$ som verkas på av kroppen $k$ definieras som $\{L : V^* \times W^* \to k :\ L \text{ är bilinjär}\}$.

**Bas för tensorprodukt** Vid att använda bilinjariteten till ett godtyckligt $L$ kan det skrivas som

$$L(a_i e_i^*, b_j f_j^*) = a_i b_j L(e_i^*, f_j^*).$$

Eftersom en linjär avbildning ges unikt av dens verkan på basvektorerna, tar vi varje $L(e_i^*, f_j^*)$ som ett element i en bas för tensorprodukten. Vi låter även denna vara

$$e_i \otimes f_j = L(e_i^*, f_j^*) = e_i^*(e_k) f_j^*(f_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

## 8.2 Satser

**Homomorfisats eller någonting** Låt $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ vara mängden av alla linjära avbildningar från $V$ till $W$. Då är $\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$.

**Bevis** $V^* \otimes W$ har bas $e_i^* \otimes f_j$ och ges av $(e_i^* \otimes f_j)(x) = e_i^*(x) f_j$.

**Universella egenskapen** Om $f : V \times W \to U$ är bilinjär finns en unik linjär avbilding $\phi : V \otimes W \to U$ så att $f = \psi \circ \phi$ där $\psi : V \times W \to V \otimes W$.

**Bevis**

# 9 Yttre algebra

Vi utgår från något vektorrum $V$ med en bas $\{e_i\}_{i=1}^n$. Vi bildar ett nytt vektorrum $\wedge V$ med dimension $2^n$ vars bas ges av $\{e_S\}$. $S$ är alla delmängder av indexmängden. Vi skriver även $e_{\{1,2\}} = e_1 \wedge e_2$.

Vid att definiera $e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$.