Sammanfattning av

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

5 februari 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SI1200 Fysikens matematiska metoder. Den innehåller essentiella resultat och metoder som dyker upp i kursen.

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer

Sturm-Liouvilles sats Sturm-Liouvilles sats säjer att ett problem på formen

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + qf + \lambda wf = 0,\\
&Af(a) + B\,\mathrm{d}f\,x(a) = 0,\\
&Cf(b) + D\,\mathrm{d}f\,x(b) = 0,
\end{aligned}$$

där p, q och w är kontinuerliga reellvärda funktioner, har oändligt många lösningar f_n motsvarande distinkta egenvärden λ_n. Dessa lösningar utgör ett fullständigt ortogonalt system i ett Hilbertrum av funktioner med inreprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_a^b \mathrm{d}x\,(f(x))^* g(x).$$

Detta rummet betecknas även $L^2([a,b])$. Vi vet även att om

$$f = c_i f_i,$$

där f_i är basfunktioner för Hilbertrummet, är

$$c_i = \frac{\langle f|f_i\rangle}{\langle f_i|f_i\rangle},\ \text{ingen summation.}$$

2 Partiella differentialekvationer

Dirichletvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Dirichletvillkor är på formen

$$u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Neumannvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Neumannvillkor är på formen

$$n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$.

Robinvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Robinvillkor är på formen

$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$.

Homogena och inhomogena grejer En differentialekvation på formen

$$Lu = f$$

kallas för homogen om $f = 0$ och inhomogen annars. Vi definierar homogena och inhomogena randvillkor analogt.

Flerdimensionell variant av Sturm-Liouvilles sats Problemet

$$\Delta f = \lambda f,$$
$$f(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

har oändligt många lösningar f_n med distinkta egenvärden $\lambda_n > 0$ så att lösningarna bildar en fullständig mängd och är ortogonala med inreprodukten

$$\langle f|g\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^n x\, f^*(x)g(x).$$

För problemet

$$\Delta f = \lambda f,$$
$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$, finns det oändligt många ortogonala lösningar med distinkta egenvärden, där dessa bildar en fullständig mängd.

Spektralsatsen Låt A vara en självadjungerad operator med diskret spektrum. Då har A oändligt många egenfunktioner. Dessa är ortogonala och bildar en fullständig mängd.

Figur 1: Peak fysiker.

Lösning av PDE:er for dummies Fysiker hatar honom. Här kan du läsa hans tre enkla steg för att göra teoretisk fysik komplett vid att lösa partiella differentialekvationer:

1. Bestäm lösningar till det homogena problemet.
2. Välj lösningar som passar till randvillkoren. Sturm-Liouvilles sats garanterar att det finns lösningar. Låt den allmänna lösningen vara en linjärkombination av dessa.
3. Hitta motsvarande lösningar till variabler som inte har randvillkor.
4. Skriv upp den allmänna lösningen som en linjärkombination av lösningarna du har fått innan.
5. Välj koefficienter som passar till initialvillkoren. Det finns även satser som hjälper med detta.

Separationsmetoden Separationsmetoden är ett sätt att lösa homogena partiella differentialekvationer på.

Låt $u(x_1, \ldots, x_n)$ vara en lösning till $Lu = 0$, där L är en linjär differentialoperator. Separationsmetoden går ut på att göra ansatsen

$$u = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i).$$

Denna ansatsen gör förhoppningsvis att differentialekvationen kan skrivas som

$$\frac{1}{X_1} L_1 X_1 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} X_i} L' \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Varje sida beror av olika variabler, varför de måste vara lika med en konstant. På detta sättet kan det ursprungliga problemet förhoppningsvis separeras i delproblem som är enkla att lösa.

Lösningsstrategi för inhomogena problem Om man har ett problem med inhomogeniteter i differentialekvationen och/eller villkoren, finns det olika strategier för att lösa detta problemet:

- dela upp lösningen i en homogen och partikulär lösning. Den partikulära lösningen fås då vid att gissa en lösning.
- flytta inhomogeniteten från villkoren till differentialekvationen, för sen att försöka lösa det.
- serieutveckla ekvationen och lösningen, vilket ger ett ODE-problem för basfunktionerna.

Här specifieras hur metod två fungerar.

För att utdypa kring andra metoden, betrakta ekvationen

$$\begin{gathered} Lu = 0, \\ Au(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), x \in \partial\Omega, \end{gathered}$$

där både L och A är linjära operatorer. Antag att man hittar en funktion w som uppfyller $Aw = f$ på randen, och inför $v = u - w$, där u är en lösning. Denna uppfyller

$$\partial_t v + Lv = \partial_t u + Lu - \partial_t w - Lw = -\partial_t w - Lw, Av(\mathbf{x}, t) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Greenfunktioner För att prata om Greenfunktioner, behöver vi först introducera integralkärnor. Om en linjär operator L på ett intervall I uppfyller

$$Lf(x) = \int_I \mathrm{d}y\, K(x, y) f(y),$$

säjs K vara integralkärnan till L. Detta kan definieras analogt i flera dimensioner.

Betrakta nu differentialekvationen

$$Lf = g$$

i d dimensioner på området Ω med homogena randvillkor och begynnelsevillkor. Nu har L givetvis ingen integralkärna, då det är en derivationsoperator. Däremot kan L^{-1} tänkas ha det. Antag vidare att L^{-1} har integralkärnan G. Då skulle lösningen på problemet ovan vara

$$f = \int_\Omega \mathrm{d}^d y\, G(x, y) g(y).$$

Vi definierar då G att vara Greenfunktionen till L.

Hur kan vi hitta Greenfunktioner till en given operator? Vi använder superpositionsprincipen

$$Lf_1 = g_1, Lf_2 = g_2 \implies L(f_1 + f_2) = g_1 + g_2.$$

Detta implicerar att om vi kan dela upp g i hanterbara delar och lösa

$$Lf_i = g_i,$$

kan vi hitta Greenfunktionen. Vi väljer uppdelningen

$$Lf_y(x) = \delta(x - y), y \in \Omega.$$

Låt nu $f_y(x) = G(x,y)$. Multiplicera med g på båda sidor och integrera över y. Högersidan blir då

$$\int_\Omega \mathrm{d}^d y\, \delta(x-y) g(y) = g(x).$$

Vänstersidan blir

$$\int_\Omega \mathrm{d}^d y\, g(y) L G(x,y).$$

Eftersom L bara verkar på x, kan operatorn L tas ut från integraltecknet, vilket gör vänstersidan till

$$L \int_\Omega \mathrm{d}^d y\, g(y) G(x,y).$$

Därmed ser vi att

$$f(x) = \int_\Omega \mathrm{d}^d y\, g(y) G(x,y)$$

löser problemet, och det enda som återstår är att lösa differentialekvationen

$$LG(x,y) = \delta(x-y).$$

Denna ekvationen är alltså ett sätt att beräkna Greenfunktioner på. Notera att även randvillkoren kommer dyka upp i mer avancerade problem. Att beskriva detta i allmänna fall är svårt. Se till exempel för en mer komplett beskrivning av sådana fall.

3 Speciella funktioner

Trigonometriska och hyperbolskap funktioner Trigonometriska funktioner kan utvidgas via deras Taylorpolynom till att även ta komplexa argument. Det samma kan hyperbolska funktioner, vilket ger relationen

$$\begin{aligned} \cos(ix) &= \cosh x, \\ \sin(ix) &= i \sinh x. \end{aligned}$$

Γ-funktionen Γ-funktionen definieras som

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1} e^{-t}, \ \mathrm{Re}\{z\} > \frac{1}{2}.$$

Γ-funktionen uppfyller

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

För att visa detta, använd partiell integration för att få

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^z e^{-t} \\ &= \left[-e^z t^z\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{d}t\, z t^{z-1} e^{-t}. \end{aligned}$$

Evaluering i gränserna för den första termen ger 0 under våra antaganden, och

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, z t^{z-1} e^{-t} \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Vi har även

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t}$$
$$= 1.$$

En konsekvens av det vi har visat är att för heltaliga z är $\Gamma(z+1) = z!$.

Vi har vidare

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots z\Gamma(z).$$

Detta implicerar att Γ har en pol för $z = 0, -1, -2, \dots$.

För stora z har vi även approximativt

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z},$$

vilket även kallas Stirlings formel. För att visa detta, skriv

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^z e^{-t}$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t+z\ln t}.$$

Vi kan Taylorutveckla exponenten för att få

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t+z\left(\ln z + \frac{1}{z}(x-z) - \frac{1}{2z^2}(x-z)^2\right)}$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-z+z\ln z - \frac{1}{2z}(t-z)^2}.$$

Drar man ut faktorerna som ej beror av t fås

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-\frac{1}{2z}(t-z)^2}$$
$$= z^z e^{-z} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^\infty \mathrm{d}u\, \sqrt{2z} e^{-u^2}$$
$$= \sqrt{2} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^\infty \mathrm{d}u\, e^{-u^2}.$$

Vi approximerar Gaussintegralen ovan med en integral äver hela tallinjen, vilket ger

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u\, e^{-u^2}$$
$$= \sqrt{2\pi} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

Alternativt kan detta skrivas som

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

Besselfunktioner I lösning av Laplaces ekvation på enhetsskivan dyker det upp två funktioner J_n och Y_n. Dessa har följande egenskaper:

- J_n är begränsad när $r \to \infty$.
- $J_n \propto r^{|n|}$ då $r \to 0$.
- $J_n \propto r^{-|n|}$ då $r \to 0$.

Dessa definieras, för heltaliga n och positiva argument, av

$$J_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}r\, r e^{-in\theta + ir\sin\theta},$$

$$Y_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{d}r \sin(\theta \sin r - nr) - \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, (e^{nr} + (-1)^n e^{-nr}) e^{-\theta \sinh r} \right).$$

J uppfyller i sådana fall $J_n = (-1)^n J_{-n}$.

Var kommer dessa ifrån? Utgå från egenvärdesekvationen för Laplaceoperatorn i två dimensioner:

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

I polära koordinater blir detta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0.$$

u är 2π-periodisk, så vi skriver

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in\theta}.$$

Insatt i differentialekvationen ger detta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}r} - \frac{n^2}{r^2} J_n + \lambda J_n \right) e^{in\theta} = 0,$$

vilket uppfylls om och endast om

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}r} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n = 0.$$

Alla J_n uppfyller denna ekvationen.

Gör nu substitutionen $v = \sqrt{\lambda} r$. Detta ger

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}r} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n = \lambda \frac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}v^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{v}\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}v} \left(\lambda - \frac{n^2 \lambda}{v^2}\right) J_n.$$

Eftersom detta är lika med 0 kan vi dela på λ och få

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}v^2} + \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}v} + \left(1 - \frac{n^2}{v^2}\right) J_n = 0.$$

Vi har alltså lyckats med att lösa ekvationen om vi kan hitta en egenfunktion motsvarande $\lambda = 1$.

Om vi tittar på Laplaces ekvation i kartesiska koordinater, ser vi att e^{iy} är en sådan funktion. I polära koordinater kan denna skrivas som $e^{ir\sin\theta}$. Denna funktionens Fourierkoefficienter enligt serieutvecklingen ovan löser ekvationen. Vi har

$$J_n(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{iv\sin\theta} e^{-in\theta},$$

och egenfunktionen motsvarande ett godtyckligt $\lambda > 0$ är därmed

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{i\sqrt{\lambda}r\sin\theta}e^{-in\theta}.$$

Detta kan även utvidgas till godtyckliga ν som ej är negativa heltal enligt

$$J_\nu(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(-\frac{r^2}{4}\right)^k.$$

Detta kan visas vid att ansätta en serielösning till Bessels differentialekvation. Vi testar mer specifikt en potensserielösning

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s}$$

till Bessels ekvation

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0.$$

Vi får

$$\sum_{i=0}^{\infty}(s+i)(s+i-1)a_i x^{i+s-2} + \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{\infty}(s+i)a_i x^{i+s-1} + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s} = 0.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned}&(s(s-1)+s-\nu^2)a_0x^{s-2} + ((s+1)s+s+1-\nu^2)a_1x^{s-1}\\ &+\sum_{i=2}^{\infty}(s+i)(s+i-1)a_ix^{i+s-2} + \sum_{i=2}^{\infty}(s+i)a_ix^{i+s-2} + \lambda\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^{i+s} - \nu^2\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^{i+s-2} = 0.\end{aligned}$$

Detta skriver vi som

$$(s^2-\nu^2)a_0x^{s-2} + ((s+1)^2-\nu^2)a_1x^{s-1} + \sum_{i=2}^{\infty}((s+i)(s+i-1)+s+i-\nu^2)a_ix^{i+s-2} + \lambda\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^{i+s} = 0,$$

$$(s^2-\nu^2)a_0x^{s-2} + ((s+1)^2-\nu^2)a_1x^{s-1} + \sum_{i=2}^{\infty}(((s+i+2)^2-\nu^2)a_{i+2}+\lambda a_i)x^{i+s} = 0$$

Vi vet att om ν ej är ett heltal, är J_ν och $J_{-\nu}$ linjärt oberoende.

För att få den andra sortens funktion, använd reduktion av ordning? Vi får då

$$Y_\nu(r) = \frac{J_\nu(r)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(r)}{\sin\nu\pi}$$

om ν ej är ett heltal. Detta har ett icke-trivialt gränsvärde när n går mot ett heltal, och det är denna lösningen som används som andra term för heltaliga ν.

Sfäriska Besselfunktioner Sfäriska Besselfunktioner definieras som

$$\begin{aligned}j_l(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{l+\frac{1}{2}}(r),\\ y_l(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}}Y_{l+\frac{1}{2}}(r)\end{aligned}$$

för heltaliga l. Dessa dyker upp som egenfunktioner till radiella delen av Laplaceoperatorn i tre dimensioner.

Legendrepolynom

Klotytefunktioner Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater innehåller en del som endast beror på r och en del som beror av vinklarna. Dens egenfunktioner är klotytefunktionerna

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = Ne^{im\phi}P_m^l(\cos\theta).$$

För ett fixt l finns det $2l+1$ möjliga värden av m. Dessa är alla heltal som uppfyller $|m| \leq l$.