Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

7 januari 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är en mängd k med två binära operationer $+$ och $\cdot$ och två speciella element 0 och 1 som uppfyller

- k är en abelsk grupp under $+$ med 0 som identitet.
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \; \forall a, b, c \in k$.
- k är en abelsk grupp under $\cdot$ med 1 som identitet.
- för alla $a \neq 0$ i k finns det ett $b \in k$ så att $a \cdot b = 1$.
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \; \forall a, b, c \in k$.

$\cdot$ kommer ej skrivas ut efter detta.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd V med en operation $+$ så att den definierar en abelsk grupp. Till vektorrumet hör även en kropp k med skalärer och en operation $\cdot$ med skalären som uppfyller

- $c(x + y) = cx + cy, \; c \in \mathbb{R}, \; x, y \in V$.
- $(c + d)x = cx + dx, \; c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}$$

som ett vektorrum så att om $v \in V$ är linjärkombinationen av element från alla V_i unik.

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, definieras

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned} (x + W) + (y + W) &= x + y + W, \\ a(x + W) &= (ax) + W. \end{aligned}$$

Linjärt oberoende mängder $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i.$$

Linjärt hölje Det linjära höljet $\mathrm{Span}\,(S)$ av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S.
- det minsta delrummet som innehåller S.
- $\bigcap\limits_{S \subset W} W$.
- $\sum\limits_{x \in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

Duala rum För ett vektorrum V över kroppen k är duala rummet V^* mängden av alla linjära former på V, dvs. alla linjära avbildningar $V \to k$.

Dual bas Givet en bas $\{e_i\}_{i \in I}$ för V, definieras basen $\{e_i^*\}_{i \in I}$ för V^* som de linjära formarna som uppfyller

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis Vi vill visa att operationer på sidoklasser ger någonting som är entydigt.

Antag att $(a + W) + (b + W) = a + b + W = a' + b' + W$. Detta implicerar att $(a' + b') - (a + b) \in W$, och varje sida är därmed ekvivalenta sidoklasser.

Antag att $a(b + W) = ab + W = ab' + W, a \in k, a \neq 0$. Detta implicerar $a(b' - b) \in W$, och därmed är $b' + W$ och $b + W$ ekvivalenta sidoklasser.

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfir En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säjer att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om $B = \{x_i\}_{i \in I}$ är en bas för V och $D = \{y_j\}_{j \in J}$ är en bas för W definieras matrisen för $L : V \to W$ i de givna baserna genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in J} a_{ji} y_j.$$

Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om I är oändlig.

Analytiska funktioner av operatorer En analytisk funktion av en operator L definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

Matrisnorm Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nilpotenta operatorer En operator L är nilpotent om $L^n = 0$ för något n.

Duala avbildningar Om $L : V \to W$ är linjär, ges den duala avbildningen $L^* : W^* \to V^*$ av $L^*(\phi) = \phi \circ L$.

2.2 Satser

Basbyte Låt L vara en avbildning från V till W. Låt $L_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen B i definitionsmängden till D i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från A till B i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

Bevis Kommutativt diagram

Koordinatavbildning Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V. Detta ger en isomorfi

$$V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i x i \to \{a_i\}_{i \in I}.$$

Bevis Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \to \sum a_i x_i$$

ger en avbildning $k^I \to V$ som är injektiv eftersom B är linjärt oberoende och surjektiv eftersom B spänner upp V. Eftersom denna avbildningen är bijektiv, måste även den inversa avbildningen vara bijektiv.

Kärna och injektivitet En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

Bevis Antag att L är injektiv. Det gäller att

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element som ej nödvändigtvis är i kärnan. Eftersom L är injektiv, är $x - y = 0$, och kärnan innehåller endast 0.

Antag nu att $\ker(L) = \{0\}$. Detta ger

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y = 0,$$

och beviset är klart.

Kvotavbildning Om $W \subseteq V$ är ett delrum , ger $x \to x + W$ en linjär kvotavbildning från V till $\frac{V}{W}$.

Bevis Vi har

$$x + y \to x + y + W = x + W + y + W,$$
$$ax \to ax + W = a(x + W),$$

och beviset är klart.

Isomorfisatsen

$$\mathrm{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

Bevis Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\mathrm{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty L är linjär. Φ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) \colon L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. Detta implicerar att om $\Phi(x + \ker(L)) = \Phi(y + \ker(L))$, är $x - y \in \ker(L)$, och de två är ekvivalenta sidoklasser. Φ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något x ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \mathrm{Im}(L)$ ett x så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

Dimensionssatsen Om V är ändligdimensionellt är $\operatorname{rank} L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

Bevis

Faktorisering med kvotrum Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \to W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

Bevis Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.

Norm av potenser av matriser

$$\left\|A^i\right\| \leq \|A\|^i$$

Bevis

Konvergens av funktioner av matriser En funktion f av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

Bevis

Matris för duala avbildningar Låt $L : V \to W$ ha matris A för något val av baser för V och W. Då har L^* matris A^T för ett motsvarande val av dual bas.

Bevis Vi tittar på avbildningar av baselement. Låt $\{e_i\}$ vara basen för V och $\{f_i\}$ vara basen för W. Det motsvarande valet av bas för dualrummen är $\{e_i^*\}$ och $\{f_i^*\}$.

Definitionen ger att $L(e_i) = \sum\limits_k A_{ik} f_k$, vilket implicerar $L = \sum\limits_k \sum\limits_l A_{kl} f_l e_k^*$. Definitionen av L^* ger vidare

$$\begin{aligned}
L^*(f_i^*) &= f_i^* \circ \sum_k \sum_l A_{kl} f_l e_k^* \\
&= \sum_k \sum_l A_{kl} f_i^*(f_l) e_k^* \\
&= \sum_k \sum_l A_{kl} \delta_{il} e_k^* \\
&= \sum_k A_{ki} e_k^* \\
&= \sum_k A_{ik}^T e_k^*,
\end{aligned}$$

vilket bevisar satsen.

3 Egenvärden och olika polynom

3.1 Definitioner

Egenvektorer x är en egenvektor till L om det finns ett $\lambda \in k$ så att

$$Lx = \lambda x.$$

λ kallas det motsvarande egenvärdet.

Karakteristiskt polynom Om V är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där I är identitetsavbildningen.

Minimalpolynom Om A är en matris, är minimalpolynomet $q_A(x) \in k[x]$ det moniska polynomet av lägst grad så att $q_A(A) = 0$.

Diagonaliserbarhet En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operatorns matris i den basen är diagonal.

Samtidig diagonaliserbarhet Två operatorer L_1 och L_2 är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

Konjugerade matriser Två matriser A och B är konjugerade om det finns en matris P så att

$$A = PBP^1.$$

3.2 Satser

Karakteristiska polynom och egenvärden Om λ är ett egenvärde till L så är $p_L(\lambda) = 0$.

Bevis Kärnan till avbildningen $A - \lambda I$ är icke-trivial i detta fallet.

Existens av minimalpolynom Om V är ändligdimensionellt, har L ett karakteristiskt polynom.

Bevis Betrakta matrisen A för L i någon bas. Det gäller att mängden $\{A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}\}$ är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

Cayley-Hamiltons sats $p_L(L) = 0$.

Bevis Om matrisen för L är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

Korrolar q_L är en faktor i p_L.

Bevis Följer av fundamentalsatser i algebra.

Multipliciteter och diagonaliserbarhet Om L är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla L:s egenvärden.

Bevis

Konjugering med övertriangulära matriser Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

Bevis

Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum och L_1, L_2 två operatorer på detta. Då går det att samtidigt diagonalisera L_1 och L_2 om de kommuterar.

Bevis

Kommutativitet och egenrum Låt L_1 och L_2 kommutera och E_1 vara egenrum till L_1. Då är $L_2(E_1) \subset E_1$.

Bevis Låt $x \in E_1$. Då är

$$L_1(L_2(x)) = L_2(\lambda x) = \lambda L_2(x),$$

och beviset är klart.

Nilpotens och blockdiagonalitet Om L är nilpotent finns det en bas för V så att matrisen för L blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Bevis Här kommer endast en bevisidé presenteras.
Det finns ett s så att $L^s = 0$ och $L^{s-1} \neq 0$. Vi väljer då ett delrum W_s så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$ så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$ och $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$. Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla W_i och bilderna av alla potenser av L. Dissa bildar en bas för V. Med en lämplig ordning på basen fås $\dim(W_i)$ block på formen ovan i matrisen, varje med storlek $i \times i$.

Jordans normalform Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för L är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att $\Lambda_i = \lambda_i I + N$, där N är nilpotent.

Bevis

4 Inreprodukt

4.1 Definitioner

Inreprodukt över $\mathbb{R}$ En inreprodukt $\langle x|y\rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{R}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{R}$ som är

- bilinjär, dvs.
  - $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
  - $\langle ax|y\rangle = a\langle x|y\rangle$.
  - $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$.
  - $\langle x|ay\rangle = a\langle x|y\rangle$.
- symmetrisk, dvs. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x\rangle > 0$ om $x \neq 0$.

Inreprodukt över $\mathbb{C}$ En inreprodukt $\langle x|y\rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{C}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{C}$ som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men $\langle ax|y\rangle = a^*\langle x|y\rangle$.
- konjugatsymmetrisk, dvs. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x\rangle > 0$ om $x \neq 0$. Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att $\langle x|x\rangle$ har ingen imaginärdel.

Metrik Låt $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$ och $B = \{e_i\}_{i\in I}$ vara en bas för vektorrummet V som x och y är i. Vi definierar en matris som beskriver inreprodukten genom

$$\langle x|y\rangle = \sum a_{ij} x_i^* y_j = (x^*)^T A y,$$

där $A_{ij} = \langle e_i|e_j\rangle$. A kallas för metriken.

Hermiteska matriser Låt A vara en matris. Om A uppfyller

$$A = (A^*)^T,$$

säjs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermitesk.

Norm Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Vinkel Vinkeln θ mellan två vektorer definieras som

$$\cos\theta = \frac{\langle x|x\rangle}{|x||y|}.$$

Ortogonalitet x och y är ortogonala om

$$\langle x|y\rangle = 0.$$

Ortogonalt komplement Om $W \subseteq V$ är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^\perp = \{x \in V : \langle x|y\rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

Projektion Låt V vara ett delrum med bas bas $B = \{e_i\}_{i=0}^n$. Då definieras projektionen som

$$\text{proj}_V(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle x_i | e_j \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

Adjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är $L^\dagger$ den adjungerade operatorn till L om

$$\left\langle L^\dagger(x) \middle| y \right\rangle = \langle x | L(y) \rangle \, \forall x, y \in V.$$

Om $L : V \to W$ definieras den adjungerade operatorn som $L^\dagger : W \to V$ som uppfyller

$$\left\langle L^\dagger y \middle| x \right\rangle = \langle y | Lx \rangle \;\; \forall x \in V, y \in W.$$

Adjungerade matriser Den adjungerade matrisen definieras som $A^\dagger = (A^*)^T$.

Självadjungerade operatorer På ett inreproduktrum V är L självadjungerad om $L^\dagger = L$.

Hermiteska matriser En matris är Hermitesk om $A^\dagger = A$.

Cauchyföljder En Cauchyföljd är en följd som indexeras med naturliga talen och som uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett N så att

$$i, j > N \implies \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

Fullständiga rum Ett rum V är fullständigt om alla Cauchy-följder konvergerar.

Hilbertrum Ett Hilbertrum är ett inreproduktrum som är fullständigt.

ℓ^2 Vi definierar $\ell^2(\mathbb{C})$ som mängden av alla följder av tal i $\mathbb{C}$ så att

$$\sum_{i=0}^{N} |a_i|^2$$

är begränsad, med inreprodukten

$$\langle A | B \rangle = \sum_{i=0}^{N} a_i^* b_i.$$

L^2 Vi definierar $L^2([0,1], \mathbb{C})$ som mängden av alla komplexvärda funktioner på $[0,1]$ med inreprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f^*(t) g(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Ortogonala och unitära operatorer En ortogonal operator över ett reellt vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx | Ly \rangle = \langle x | y \rangle \, \forall x, y \in V$.

En unitär operator över ett komplext vektorrum V är en inverterbar operator som uppfyller $\langle Lx | Ly \rangle = \langle x | y \rangle \, \forall x, y \in V$.

Adjungerade avbildningar Om $L : V \to W$ är linjär och V och W är inreproduktrum, ges den adjungerade linjära avbildningen $L^\dagger : W \to V$ av $\left\langle L^\dagger y | x \right\rangle = \langle y | Lx \rangle \;\; \forall x \in V, y \in W$.

4.2 Satser

Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle x | y \rangle| \leq |x||y|.$$

Bevis Fallet då någon av dessa är 0 är trivialt. Antag då att detta inte stämmer, och definiera

$$z = x + ty.$$

Det gäller att

$$\langle z|y\rangle = \langle x|y\rangle + t\|y\|^2.$$

För $t = -\frac{\langle x|y\rangle}{\|y\|^2}$ (vilket motsvarar den ortogonala projektionen av x på y) är detta lika med 0. Vi kan skriva

$$x = z - ty,$$

och för vårat specifika val av t får man

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|z\|^2 + \frac{\langle x|y\rangle^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 \\ &= \|z\|^2 + \frac{\langle x|y\rangle^2}{\|y\|^2} \\ &\geq \frac{\langle x|y\rangle^2}{\|y\|^2},\end{aligned}$$

och beviset är klart.

Triangelolikheten

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

Bevis

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle u|v\rangle) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u|v\rangle| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

Eftersom båda sidor är kvadrater av positiva storheter, är beviset klart.

Krav på metriken Metriken är konjugatsymmetrisk.

Bevis Om metriken skall beskriva inreprodukten, måste den vara konjugatsymmetrisk. Detta ger

$$(x^*)^T Ay = ((y^*)^T Ax)^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T Ay = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Ortogonalt komplement och vektorrum Om V är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Bevis Det gäller att

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

Inreprodukt och minsta norm Låt $e_1, \ldots, e_N$ vara ortonormala basvektorer i inreproduktrummet V, och låt

$$V_N = \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\}.$$

Då ges

$$\inf_{\Phi \in V_N} \|u - \Phi\|$$

av

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \langle u|e_i \rangle \, e_i.$$

Bevis

Bra och dualrum Om V är ett inreproduktum, definierar båd $x \to \langle x|$ och $x \to \langle x^*|$ en injektiv avbildning $V \to V^*$. Om V är ändligdimensionellt, är detta dessutom en isomorfi.

Bevis

Inreproduktrum och ortogonal bas Ett ändligdimensionellt vektorrum har en ortogonal bas.

Bevis

Gram-Schmidts metod Låt V vara ett vektorrum med ändlig dimension eller en uppräknelig bas $B = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Då bildar vektorerna

$$e_i = x_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_j|x_i \rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

en ortogonal bas för V.

Bevis

Matrisen för en adjungerad operator Låt L beskrivas av matrisen A i någon ortonormal bas. Då beskrivs $L^\dagger$ av matrisen $(A^T)^*$, även om operatorn är mellan två olika vektorrum.

Bevis Vi har

$$L(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

vilket ger

$$\langle e_i|L(e_j)\rangle = \left\langle e_i \middle| \sum_k a_{jk} e_k \right\rangle = \sum_k \langle e_i|a_{jk} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i|e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji}.$$

Om B är matrisen för $L^\dagger$, så vi nu att dens komponenter kan skrivas som $b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle$. Vi utvecklar detta och får

$$b_{ji} = \left\langle e_i \middle| L^\dagger(e_j) \right\rangle = \left\langle L^\dagger(e_j) \middle| e_i \right\rangle^* = \langle e_j|L(e_i)\rangle^* = a_{ij}^*,$$

och därmed är beviset klart.

Alternativt bevis Vi tittar på avbildningar av baselement. Låt $\{e_i\}$ vara basen för V och $\{f_i\}$ vara basen för W.

Definitionen ger att $L(e_i) = \sum_k A_{ik} f_k$. Tillämpad på inreprodukten ger detta

$$\begin{aligned}
\langle f_j | L(e_i) \rangle &= \left\langle f_j \middle| \sum_k A_{ik} f_k \right\rangle \\
&= \sum_k A_{ik} \langle f_j | f_k \rangle \\
&= \sum_k \sum_l A_{lk} \langle f_j | f_k \rangle \delta_{il} \\
&= \sum_k \sum_l A_{lk} \langle f_j | f_k \rangle \langle e_l | e_i \rangle \\
&= \sum_l \sum_k A_{lk} \langle e_l | e_i \rangle \delta_{jk} \\
&= \sum_l A_{lj} \langle e_l | e_i \rangle \\
&= \left\langle \sum_l (A_{lj})^* e_l \middle| e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_l ((A_{lj})^*)^T e_l \middle| e_i \right\rangle .
\end{aligned}$$

Vi vill att bra:en skall motsvara $L^\dagger(f_j)$. Denna ges av $L^\dagger(f_j) = \sum_l B_{jl} e_j$, där B är matrisen för $L^\dagger$. Jämförelse med inreprodukten ovan fullför beviset.

Egenvärden för självadjungerade operatorer Självadjungerade operatorer har bara reella egenvärden.

Bevis

$$\langle L(x) | x \rangle = \langle x | L(x) \rangle .$$

Detta kan utvecklas om x är en egenvektor för att ge

$$\lambda^* \langle x | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle ,$$

och beviset är klart.

Självadjungerade operatorer och ortogonala egenvektorer Låt x vara en egenvektor till L med egenvärdet λoch y vara en egenvektor med egenvärde μ. Om $\lambda - \mu \neq 0$ är $\langle x | y \rangle = 0$.

Bevis

$$\langle L(x) | y \rangle = \langle x | L(y) \rangle .$$

Vi använder att x och y är egenvektorer och får

$$\lambda^* \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle .$$

Enligt antagandet måste då $\langle x | y \rangle = 0$.

Diagonalisering av självadjungerade operatorer Alla självadjungerade operatorer på ändligdimensionella inreproduktrum kan diagonaliseras.

Bevis Vi gör induktion över $\dim(V)$.

Det är trivialt för dimension 1.

Annars, om vi har en egenvektor x motsvarande egenvärdet λ, bilda $W = \mathrm{Span}\,(x)$. Då har man $L(W) \subseteq W$. Vidare, om $y \in W^{\perp}$, har man

$$\langle x|y\rangle = 0 \implies \langle \lambda x|y\rangle = \langle L(x)|y\rangle = \langle x|L(y)\rangle = 0,$$

och $L(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$. Man kan vidare bilda en bas för V med basen för $W^{\perp}$ och x. Matrisen för L med avseende på denna basen är

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

Per induktion finns det då en ortogonal bas för $W^{\perp}$ så att matrisen för L på $W^{\perp}$ blir diagonal.

Ortogonal bas och självadjungerade operatorer Om L är en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L.

Bevis

Längdbevarande operatorer För en operator L på ett reellt inreproduktrum V är följande ekvivalent:

- $\|Lx\| = \|x\| \forall x \in V$.
- $\langle x|y\rangle = \langle Lx|Ly\rangle \,\forall x, y \in V$.

Om vektorrummet är ändligdimensionellt, är påståenden även ekvivalenta med

- L avbildar ortonormala baser på ortonormala baser.

Bevis

Längdbevarande operatorer som bijektioner Längdbevarande operatorer på ändligdimensionella vektorrum är bijektiva.

Bevis Sådana operatorer är injektiva ty

$$\|Lx\| = 0 \implies x = 0.$$

De är surjektiva ty matrisen för avbildningen i någon bas måste ha linjärt oberoende kolumner för att vara injektiv. Detta implicerar att avbildningen är surjektiv.

Ortogonala grupper

- Mängden $O(V) = \{L : V \to V : L \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under sammansättning om V är ett reellt inreproduktrum med en ortogonal bas.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.
- Mängden $O_n(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1, A \text{ är ortogonal}\}$ är en grupp under matrismultiplikation.

Satsen stämmer även för de komplexa motsvarigheterna.

Bevis

Egenvärden och egenvektorer till ortogonala och unitära operatorer Om L är en unitär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, finns det en ortogonal bas av egenvektorer till L och alla egenvärden till L har belopp 1.

Bevis Det finns (möjligtvis) minst ett egenvärde λ. Välj en motsvarande egenvektor x. Detta ger

$$\|x\| = \|Lx\| \implies |\lambda| = 1.$$

Låt nu $W = \text{Span}\,(x)$. Vi har att $L(W^\perp) \to W^\perp$ eftersom L bevarar inreprodukten. Detta ger (?) per induktion att det finns en bas för $W^\perp$ av egenvektorer till L. Unionen av x och denna basen är därmed en bas för hela vektorrummet.

Exponentialavbidlningen och Hermiteska operatorer Låt H vara Hermitesk. Då är e^{iH} unitär.

Bevis Eftersom H är Hermitesk, finns det en ortogonal bas av egenvektorer. I denna basen är matrisen för H en diagonalmatris. Därmed är matrisen för e^{iH} en diagonalmatris med $e^{i\lambda}$ på diagonalen, där λ är något egenvärde. Alltså finns det en ortogonal bas av egenvektorer till e^{iH}, där varje egenvärde har belopp 1, och e^{iH} är unitär.

5 Linjär rekursion

5.1 Definitioner

Linjär rekursion En linjär rekursion definieras av en följd $\{x_i\}_{i\geq 0}$ av element i ett vektorrum, där

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i-j}, i \geq n$$

där $x_0, \ldots, x_{n-1}$ är givna. Detta kan alternativt skrivas på matrisform som

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{i-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} y_{i-1}.$$

Dessa matriserna kan ej diagonaliseras.

5.2 Satser

6 Singulärvärden

6.1 Definitioner

Singulärvärden och singulära vektorer Låt $L : V \to W$. Ett singulärvärde till L är ett icke-negativt tal σ så att

$$L(x) = \sigma y, L^\dagger(x) = \sigma x$$

där $x, y \neq 0$. x kallas en högersingulär vektor och y en vänstersingulär vektor.

Singulärvärdesuppdelning Singulärvärdesuppdelningnen av matrisen A för operatorn L är faktoriseringen

$$A = Y\Sigma X^\dagger,$$

där kolonnerna i Y är de vänstersingulära vektorerna, kolonnerna i Y är de högersingulära vektorerna och Σ är en diagonalmatris med singulärvärdena i fallande ordning på diagonalen. Konstruktionen ger att X och Y är unitära.

Pseudoinverser Låt A ha singulärvärdesuppdelning $Y\Sigma X^\dagger$. Då definieras pseudoinversen till A som

$$A^+ = X\Sigma^{-1}Y^\dagger,\ \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.2 Satser

Förenkling av linjära avbildningar Låt $L : V \to W$. Då kan man välja baser för V och W så att matrisen för L ges av

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bevis Välj delrum V' och W' så att $V = V' \oplus \ker(L)$ och $W = W' \oplus \operatorname{Im}(L)$, och bilda baser för V och W som utgår från baser för V' respektiva bilden av basen till V'. Då verkar L på dessa baserna enligt matrisen i satsen, och beviset är klart.

Möjlighet för singulärvärdesuppdelning Låt $L : V \to W$ vara linjär och V och W vara (ändligdimensionella) inreproduktrum. Då kan man välja ortonormala baser för V och W så att matrisen för L ges av

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

där D är en positiv reell diagonalmatris.

Bevis Det gäller att $V = \ker(L) \oplus (\ker(L))^\perp$ och $W = \operatorname{Im}(L) \oplus (\operatorname{Im}(L))^\perp$. Restriktionen av L till $(\ker(L))^\perp$ är injektiv på grund av linjariteten och surjektiv på grund av dimensionssatsen. Därmed är L en isomorfi mellan $(\ker(L))^\perp$ och $\operatorname{Im}(L)$. Satsen är därmed bevisat om L har rätt form i fallen där den är inverterbar.

Bilda nu $H : V \times W \to V \times W, H(x, y) = (L^\dagger(y), L(x))$. Denna har matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

H kommuterar vidare med H^2, och därmed är dessa två samtidigt diagonaliserbara. Egenvektorerna är på formen (x_i, y_i), och uppfyller

$$A^\dagger y_i = \lambda_i x_i,\ Ax_i = \lambda_i y_i,\ A^\dagger A x_i = \mu_i x_i,\ AA^\dagger y_i = \mu_i y_i$$

Vi får från detta att $\mu_i = \lambda_i^2$ och att $(x_i, -y_i)$ även är en egenvektor med egenvärde $-\lambda_i$ ty

$$\begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ -y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^\dagger y_i \\ Ax_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_i x_i \\ \lambda_i y_i \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu anta att alla egenvektorer är normerade och ordnade så att de positiva egenvärden kommer först. Då utgör $\{x_i\}$ och $\{y_j\}$ ortonormala baser för V respektiva W. Vi vet att matrisen för L med avseende på dessa baser är en diagonalmatris, men hur fan det här bevisar att elementerna är positiva vet inte ens Mats Boij.

Delvis singulärvärdesuppdelning Låt $A = Y\Sigma X^\dagger$, där X har kolumner x_i och Y kolumner y_i som motsvarar singulärvärdet σ_i. Då är

$$A_s = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i y_i y_i^\dagger$$

den matris av rang s som minimerar $\|A_s - A\|$.

Bevis

Pseudoinversens egenskaper Pseudoinversen är den unika lösningen till ekvationssystemet

$$XAX = X,\ AXA = A,\ (AX)^\dagger = AX,\ (XA)^\dagger = XA.$$

Bevis

Minsta kvadrat-problem Bland alla minsta kvadrat-lösningar till $Ax = b$ är $x = A^+ b$ den lösningen som själv har minst norm.

Bevis

6.3 Algoritmer

Singulärvärdesuppdelning Högst tveksamt.

Låt $L : V \to W$. Vi vill hitta baser för V och W så att matrisen för L blir på formen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta görs vid att

- välja en bas för $\ker(L)$.
- utvidga detta till en bas för V vid att lägga till vektorer i början av basen.
- välja en bas för W vid att utgå från avbildningarna av vektorerna i basen för V och lägga på vektorer.

Om V och W är inreproduktrum och du vill välja en ON-bas för båda, kommer du få en diagonalmatris i stället för identitetsmatrisen.

7 Sannolikhet

7.1 Definitioner

Sannolikhetsmatriser En sannolikhetsmatris är en kvadratisk matris där alla element är positiva och summan i varje kolonn är 1.

Stokastiska processer En stokastisk process är en följd av stokastiska variabler.

Markovprocesser En Markovprocess är en stokastisk process som endast beror av förra steget i processen.

Om den stokastiska variabeln är på vektorform, kan rekursionen skrivas som

$$X_{n+1} = AX_n.$$

7.2 Satser

Egenvärden till sannolikhetsmatriser 1 är alltid ett egenvärde till en sannolikhetsmatris.

Bevis Låt A vara en sannolikhetsmatris. Om $e = [1 \dots 1]^T$ är

$$e^T A = e^T$$

enligt definitionen, vilket implicerar

$$ATe = e.$$

Eftersom $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$ är beviset klart.

Perron-Frobenius' sats Om A är en reguljär sannolikhetsmatris, dvs. uppfyller att A^m för något m bara har positiva element, gäller följande:

- Det finns en egenvektor med egenvärde 1 så att alla element i denna är positiva.
- Den algebraiska och geometriska multipliciteten till egenvärdet 1 är båda lika med 1.
- Om λ är ett annat egenvärde är $|\lambda| < 1$.
- Alla andra egenvektorer har koordinater som summerar till 1.

Bevis Det finns ett $x \neq 0$ så att $Ax = x$. Vi bildar nu x^+ så att $x_i^+ = |x_i|$. Då kan vi skriva

$$\begin{aligned} x &= x_+ - x_-, \\ x^+ &= x_+ + x_- \end{aligned}$$

Där x_+ och x_- innehåller de positiva respektiva negativa elementen i x. Detta ger

$$\begin{aligned} Ax_+ &= A(x + x_-) = x + Ax_- \geq x, \\ Ax_- &= A(x_+ - x) = Ax_+ - x \geq -x, \\ Ax^+ &= A(x_+ + x_-) = Ax_+ + Ax_- \geq x^+ \end{aligned}$$

där olikheterna jämför varje koordinat för sig. Vi inför igen vektorn $e^T = [1 \ldots 1]$ och får

$$e^T x^+ \leq e^T A x^+ = e^T x^+,$$

alltså måste dessa vara lika och $Ax^+ = x^+$, vilket beviser första påståendet.

Antag vidare att det finns en annan egenvektor y motsvarande egenvärdet 1. Det finns då ett α så att vektorn $x^+ + \alpha y$ har en koordinat lika med 0. Detta ger (säkert) motsägelse enligt argumentet ovan eftersom $(x^+ + \alpha y)^+ > 0$, vilket bevisar andra påståendet.

Vi definierar vidare $A_\infty = x^+ e^T$ och får

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T.$$

Om x^+ är normerad så att summan av elementen är lika med 1, ger detta

$$A_\infty^2 = x^+ e^T x^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty.$$

Vi har vidare

$$\begin{aligned} AA_\infty &= Ax^+ e^T = x^+ e^T = A_\infty, \\ A_\infty A &= x^+ e^T A = x^+ e^T = A_\infty. \end{aligned}$$

Vi antar att alla element i A är positiva, och därmed finns det ett $\varepsilon > 0$ så att $B = A - \varepsilon A_\infty$ också är en positiv matris. Vi har vidare

$$\begin{aligned} B^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty^i A^{n-i} \\ &= A^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty A^{n-i} \\ &= A^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\ &= A^n - A_\infty + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\varepsilon)^i A_\infty \\ &= A^n - A_\infty + (1-\varepsilon)^n A_\infty. \end{aligned}$$

Det gäller att $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ eftersom kolumnerna i B nu summerar till något mindre än 1, vilket implicerar $\lim_{n\to\infty} A^n = A_\infty$. Betrakta vidare en egenvektor motsvarande egenvärdet λ. Eftersom $\lim_{n\to\infty} A^n$ existerar, existerar även $\lim_{n\to\infty} A^n y = \lim_{n\to\infty} \lambda^n y$. Detta är bara möjligt om $|\lambda| < 1$ eller $\lambda = 1$ ($|\lambda| = 1$ uppfylls ju bara om $\lambda = 1$, vilket redan har täckts).

8 Multilinjär algebra

Observera att Einsteinnotation kommer användas i denna del.

8.1 Definitioner

Tensorprodukt av vektorrum från produkter Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen V och W definieras här som vektorrummet med bas $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ om $\{e_i\}_{i\in I}$ och $\{f_j\}_{j\in J}$ är baser för V respektiva W.

Basbyten med tensorprodukt från produkter Vi utgår från definitionen av tensorprodukt ovan. Betrakta $V \otimes W$, med baser om $\{e_i\}_{i\in I}$ och $\{f_j\}_{j\in J}$ för V respektiva W. Vid basbytet

$$e_i' = p_{ik}e_k, f_j' = q_{jl}f_l$$

ges basvektorerna för $V \otimes W$ av

$$e_i' \otimes f_j' = (p_{ik}e_k) \otimes (q_{jl}f_l).$$

Tensorprodukten definieras här som att det uppfyllar distributiva lagen, vilket ger

$$e_i' \otimes f_j' = p_{ik}q_{jl}e_k \otimes f_l.$$

Tensorprodukt av vektorrum från dualer Tensorprodukten $V \otimes W$ av vektorrummen V och W som verkas på av kroppen k definieras här som $\{L : V^* \times W^* \to k : \ L \text{ är bilinjär}\}$. Elementen $x \otimes y$ i $V \otimes W$ definieras som $x \otimes y(\phi, psi) = \phi(x)\psi(y)$.

Tensorprodukt av avbildningar Låt L_1 och L_2 vara linjära avbildningar på V_1 respektiva V_2. Givet universella egenskapen finns det en unik avbildning $L_1 \otimes L_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ som definieras av $f(x, y) = L_1(x) \otimes L_2(y)$ och ges av $L_1 \otimes L_2(x, y) = L_1(x) \otimes L_2(y)$. Denna definieras som tensorprodukten av L_1 och L_2.

Spåravbildningen Givet universella egenskapen definierar vi $\mathrm{Tr} : V^* \otimes V \to k$ som den avbildningen som kommer från evalueringsavbildningen $V^* \times V \to k, (\phi, x) \to \phi(x)$.

Symmetriska tensorer Delrummet av symmetriska tensorer definieras som

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \mathrm{Span}\left(x \otimes x,\ x \in V\right).$$

Alternerande tensorer Delrummet av alternerande tensorer definieras som

$$\mathrm{Alt}^2(V) = \mathrm{Span}\left(x \otimes y - y \otimes x,\ x, y \in V\right).$$

8.2 Satser

Bas för tensorprodukt från dualer Om $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ är en bas för V och $V = \{f_1, \dots, f_m\}$ är en bas för W ger $B = \{e_i \otimes f_j\}_{i=1,j=1}^{m,n}$ en bas för $V \otimes W$.

Bevis Alla avbildningar i $V \otimes W$ bestäms entydigt av hur de verkar på (e_i*, f_j*) eftersom dessa är bilinjära. Låt $e_k \otimes f_l$ vara så att $e_k \otimes f_l(e_i*, f_j*) = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Då kan en ny linjär avbildning f som uppfyller $f(e_i*, f_j*) = a_{ij}$ skrivas som

$$f = a_{kl}e_k \otimes f_l.$$

Eftersom f nu kan vara godtycklig, är beviset klart.

Homomorfisats Låt $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ vara mängden av alla linjära avbildningar från V till W. Då är $\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Bevis $V^* \otimes W$ har bas med element $e_i^* \otimes f_j$. Varje sådant element motsvarar en linjär avbildning $V \to W$ genom $L_{ij}(x) = e_i^*(x)f_j$.

Om V^* har dimension m och W dimension n, skulle man nu kunna ställa upp en matris för en godtycklig avbildning i $\mathrm{Hom}_k(V, W)$. Denna skulle haft storlek $n \times m$. Matrisen för L_{ij} är av samma storlek, och har nollor i alla element förutom element (i, j), som är en etta. Om matrisen för en godtycklig avbildning har element a_{ij}, kan denna avbildningen därmed skrivas som $a_{ji}L_{ij}$ (transponeringen kommer av att andra indexet i L_{ij} motsvarar element i basen för W, vilket motsvarar radindex i matrisen för avbildningen). Denna summan innehåller lika många termer som det är i basen för $V^* \otimes W$, och därmed är beviset klart.

Universella egenskapen Om $f : V \times W \to U$ är bilinjär finns en unik bilinjär avbilding $\phi : V \otimes W \to U$ så att $f = \phi \circ \psi$, där $\psi : V \times W \to V \otimes W$, för alla $f : V \times W \to U$.

Bevis Avbildningen $\psi : V \times W \to V \otimes W, (x, y) \to x \otimes y$ är bilinjär. Om nu f är bilinjär kan vi definiera en bilinjär avbildning $\phi : V \otimes W \to U$ som $\phi(e_i \otimes f_j) = f(e_i, f_j)$, där e_i och f_j är i basen för V respektiva W. Vi ser nu att $f = \psi \circ \phi$.

För att visa att ϕ är unik, anta att F uppfyller $F(e_i \otimes f_j) = f(e_i, f_j)$. Då är $\phi - F$ noll på hela basen för $V \otimes W$, och måste därmed vara noll som linjär avbildning.

Tensorprodukt av avbildningar Låt L_1 och L_2 vara linjära avbildningar på V_1 respektiva V_2 med matriser A_1 respektiva A_2 för några val av baser för V_1 och V_2. Då ges matrisen för $L_1 \otimes L_2$ av

$$\begin{bmatrix} A_{1,11}A_2 & A_{1,12}A_2 & \dots & A_{1,1,\dim(V_1)}A_2 \\ A_{1,21}A_2 & A_{1,22}A_2 & \dots & A_{1,2,\dim(V_1)}A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,\dim(V_1),1}A_2 & A_{1,\dim(V_1),2}A_2 & \dots & A_{1,\dim(V_1),\dim(V_1)}A_2 \end{bmatrix}.$$

Bevis Låt V_1 och V_2 ha baser $\{e_i\}_{i \in I}$ respektiva $\{f_j\}_{j \in J}$, och W_1 och W_2 ha baser $\{g_k\}_{k \in K}$ respektiva $\{h_m\}_{m \in M}$. De linjära avbildningarna ges av

$$\begin{aligned} L_1(e_i) &= A_{1,ki}g_k, \\ L_2(f_j) &= A_{2,mj}h_m. \end{aligned}$$

Med definitionen av tensorprodukten av L_1 och L_2 fås

$$\begin{aligned} L_1 \otimes L_2(e_i, f_j) &= L_1(e_i) \otimes L_2(f_j) \\ &= A_{1,ki}g_k \otimes A_{2,mj}h_m \\ &= A_{1,ki}A_{2,mj}g_k \otimes h_m \end{aligned}$$

För att kunna fortsätta, behöver vi en idé om ordning i båda baserna. Vi ordnar dessa först efter indexet till vänster och därefter efter indexet till höger, så att ordningen blir $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots$ i $V_1 \otimes V_2$ och motsvarande i $W_1 \otimes W_2$. Lite fundering ger då att $e_i \otimes f_j$ är element nummer $\dim(V_2)(i-1) + j$ i basen. Om nu $L_1 \otimes L_2$ har matris B med det givna valet av baser, ger detta

$$B_{\dim(W_2)(k-1)+m, \dim(V_2)(i-1)+j} = A_{1,ki}A_{2,mj}.$$

Det här kanske säjer inte så mycket, men fixera nu alla index förutom m. Koefficienten framför nästa basvektor fås vid att röra sig ned rätt kolumn i A_2. På samma sättet ser vi att fixering av alla index förutom j motsvarar att röra sig längsmed rätt rad i A_2. I båda fall multipliceras det med ett element från A_1, vilket ger att matrisen för $L_1 \otimes L_2$ med det givna valet av bas blir

$$B = \begin{bmatrix} A_{1,11}A_2 & A_{1,12}A_2 & \dots & A_{1,1,\dim(V_1)}A_2 \\ A_{1,21}A_2 & A_{1,22}A_2 & \dots & A_{1,2,\dim(V_1)}A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,\dim(V_1),1}A_2 & A_{1,\dim(V_1),2}A_2 & \dots & A_{1,\dim(V_1),\dim(V_1)}A_2 \end{bmatrix}.$$

Tensorprodukt som direkt summa Om $1 + 1 \neq 0$ i kroppen k som verkar på V är

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

Bevis Vi vill först visa att ett godtyckligt $x \otimes y$ kan skrivas som en linjär kombination av element från de två delrummen. Definiera $a = x + y$ och $b = x - y$. Detta ger

$$x \otimes y = \frac{a+b}{2} \otimes \frac{a-b}{2} = \frac{1}{4}(a \otimes a - a \otimes b + b \otimes a - b \otimes b).$$

Det är klart att de två termerna i mitten till sammans är från $\mathrm{Alt}^2(V)$, medan den första och sista är från $\mathrm{Sym}^2(V)$, vilket visar första delen av påståendet.

För att visa att linjärkombinationen är unik, visar vi att skärningen mellan delrummen endast är 0. Vi kan utveckla termerna från de olika delrummen och få

$$\begin{aligned}
a \otimes a - b \otimes b &= (x+y) \otimes (x+y) - (x-y) \otimes (x-y) \\
&= x \otimes x + x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y - x \otimes x + x \otimes y + y \otimes x - y \otimes y \\
&= (1+1)x \otimes y + (1+1)y \otimes x, \\
b \otimes a - a \otimes b &= (x-y) \otimes (x+y) - (x+y) \otimes (x-y) \\
&= x \otimes x + x \otimes y - y \otimes x - y \otimes y - x \otimes x + x \otimes y - y \otimes x + y \otimes y \\
&= (1+1)x \otimes y - (1+1)y \otimes x.
\end{aligned}$$

Om $x \otimes y \in \mathrm{Alt}^2(V)$ är termerna från $\mathrm{Sym}^2(V)$ lika med noll, vilket medför $x \otimes y = -y \otimes x$, och om $x \otimes y \in \mathrm{Sym}^2(V)$ är termerna från $\mathrm{Alt}^2(V)$ lika med noll, vilket medför $x \otimes y = y \otimes x$. Om båda dessa skall uppfyllas samtidigt, måste $x \otimes y = 0$. Därmed är beviset klart.

9 Yttre algebra

9.1 Definitioner

Yttre algebran Låt V vara ett vektorrum med bas $\{e_i\}_{i=1}^n$. Den yttre algebran på V, betecknad $\bigwedge V$, är vektorrummet vars bas ges av $\{e_S\}$, där S är alla delmängder av indexmängden. Vi skriver även $e_{\{i,j\}} = e_i \wedge e_j$.

Delrum av yttre algebran Delrummet $\bigwedge^l V$ av yttre algebran på V definieras som delrummet vars basvektorer ges av $\{e_S \colon S \text{ har } l \text{ element}\}$.

$\wedge$-produkten $\wedge$-produkten definieras som en bilinjär avbildning

$$\begin{aligned}
\wedge : \bigwedge^i V \times \bigwedge^j V &\to \bigwedge^{i+j} V, \\
e_{S_1} \wedge e_{S_2} &= \begin{cases} (-1)^{m(S_1,S_2)} e_{S_1 \cup S_2}, & S_1 \cap S_2 = \emptyset, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}
\end{aligned}$$

där $m(S_1, S_2)$ är antal elemenet i mängden $\{(i,j)\colon i > j, i \in S_1, j \in S_2\}$. I normala termer motsvarar detta att man ställer upp alla element i S_1 och S_2 på en linje och räknar antalet gånger man måste byta plats på två angränsande element för att alla element skall stå i växande ordning.

9.2 Satser

Yttre algebran som direkt summa

$$\bigwedge V = \bigoplus_{i=0}^{n} \bigwedge^i V$$

Bevis Att alla element i $\bigwedge V$ kan skrivas som en linjärkombination av element från $\bigwedge^i V$ följer av definitionen av yttre algebran. Vi ser även att om $e_S \in \bigwedge^i V, e_T \in \bigwedge^j V, i \neq j$ kan de två omöjligt vara lika eftersom S och T har olika antal element. Eftersom de två delrummen ej delar baselement, måste $\bigwedge^i V \cap \bigwedge^j V = \{0\}$om $i \neq j$, och beviset är klart.

Dimension för yttre algebran Låt V ha dimension n. Då har $\bigwedge V$ dimension 2^n.

Bevis Med förra satsen vet vi att $\dim(\bigwedge V) = \sum_{i=0}^{n} \dim(\bigwedge^i V)$.

Betrakta nu $\bigwedge^i V$. Att konstruera en bas för detta delrummet motsvarar att hitta alla delmängder av mängden av naturliga tal upp till n med i element, där ordningen inte spelar roll. Detta kan göras på $\binom{n}{i}$ olika sätt, och därmed är $\dim(\bigwedge^i V) = \binom{n}{i}$. Detta ger vidare

$$\begin{aligned}\dim(\bigwedge V) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\ &= (1+1)^n,\end{aligned}$$

och beviset är klart.

10 Kroppsutvidning

10.1 Definitioner

Heltal modulo p Låt p vara ett primtal. Då är heltalen modulo p, betecknad $\mathbb{Z}_p$, en kropp med alla operationer modulo p. Mer specifikt ger alla operationer det positiva ttalet som fås när alla positiva heltalsmultipler av p subtraheras bort från resultatet.

Primkroppar Den minsta delkroppen av K som innehåller 1 kallas för primkroppen till K.

Irreducibla polynom Ett polynom p i $k[x]$ (koefficienterna är i k) är irreducibelt om det inte kan skrivas som ett polynom av lägre grad.

10.2 Satser

Delkroppar och isomorfir Om K är en kropp så innehåller K en delkropp som är isomorf med $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{Z}_p$ för något primtal modulo p.

Bevis Addera en och en etta i taget. Om detta fortsätter med nya värden hela tiden fås isomorfi med $\mathbb{Q}$. Annars finns det ett n så att $1+\cdots+1 = 0$, där det summeras n ettor. Om $n = km$ är $(1+\cdots+1)_m(1+\cdots+1)_k = 0$, där subskriptet indikerar hur många termer som finns i parentesen. Om n är det minsta sådana talet, måste n då vara ett primtal. Därav följer isomorfin med $\mathbb{Z}_n$.

Korollar För en ändlig kropp är primärkroppen alltid $\mathbb{Z}_p$ för något primtal p.

Bevis

Delkroppar och vektorrum Om $k \subseteq K$ är en delkropp av K är K ett vektorrum över K.

Bevis

Korollar En ändlig kropp har p^n element för något primtal p och positivt n.

Bevis Kroppen är isomorf med

Kroppens ordning och potenser av elementer Om K har ordning $q = p^n$, där n är ett primtal, är $a^q = 1\ \forall a \in K$.

Bevis

- Om en operator A har irreducibelt minimalpolynom av grad n över $\mathbb{Z}_p$ så är $K = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{Z}_p[x]\}$ en kropp med p^n element.

Bevis