Sammanfattning av SG1121 Mekanik

Yashar Honarmandi

14 februari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller essensiella ekvationer i kursen SG1121.

Innehåll

1 Fundamentala koncepter

Krafter En kraft $\mathbf{F}$ beskrivs av en vektor med belopp och rikting, samt en angrepspunkt.

Kraftmoment En kraft kan ha en viss vridningsförmåga med avseende på en punkt. Detta är kraftens kraftmoment. Om en kraft vrider kring punkten O, ges kraftmomentet av

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

där $\mathbf{r}$ är vektorn från O till $\mathbf{F}$:s angrepspunkt och $\mathbf{F}$ är själva kraften.

Riktingen till kraftmomentet anger den positiva rotationsriktningen. Vad betyder detta? Jo, låt en linje gå genom O och parallellt med $\mathbf{M}$. Då skapar $\mathbf{M}$ en vridning mot klockan kring denna linjen.

Kraftmomentet ändras inte av att kraften förskjutas längs med dens verkningslinje. Detta ser man vid att låta den angripa i två punkter A, B på verkningslinjen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} \\
\mathbf{M}'_O &= \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} \\
&= (\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB}) \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{M},
\end{aligned}$$

då den andra vektoren är parallell med $\mathbf{F}$.

Från detta kan vi räkna ut ett kraftmoments komponent med avseende på en axel vid att välja en punkt P på axeln och beräkna kraftmomentet med avseende på denna punkten. Kraftmomentets komponent med avseende på axeln ges då av

$$M_\lambda = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{e}_\lambda$$

där $\mathbf{e}_\lambda$ är en enhetsvektor parallell med axeln.

Denna komponenten är oberoende av valet av P. Detta ser man vid att välja en ny punkt Q och beräkna

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_P &= \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F} \\
\mathbf{M}_Q &= \mathbf{r}_{QA} \times \mathbf{F} \\
&= (\mathbf{r}_{QP} + \mathbf{r}_{PA}) \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Komponenten med avseende på axeln ges då av

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_\lambda &= (\mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda + (\mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\
&= (\mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\
&= \mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_\lambda,
\end{aligned}$$

eftersom $\mathbf{r}_{QP}$ är parallell med $\mathbf{e}_\lambda$, och kryssprodukten vi beräknar då måste vara normal på båda dessa.

Stel kropp En stel kropp är en kropp som uppfyller att

$$\frac{\mathrm{d}|\mathbf{r}_{AB}|}{\mathrm{d}t} = 0 \ \forall \ A, B.$$

Masscentrum Masscentrum definieras av

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

Detta är en punkt så att i ett homogent kraftfält är fältets verkan på partiklerna ekvivalent med att kraftsumman verkar i masscentrum. För en kontinuerlik kropp går detta mot

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int \mathrm{d}m\, \mathbf{r}}{\int \mathrm{d}m}.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_G &= \frac{1}{M} \sum \int\limits_{V_i} \mathrm{d}m\, \mathbf{r} \\
&= \frac{1}{M} \sum \frac{M_i}{M_i} \int\limits_{V_i} \mathrm{d}m\, \mathbf{r} \\
&= \frac{1}{M} \sum M_i \mathbf{r}_{G,i}.
\end{aligned}$$

Kroppen kan då partitioneras på lämpliga sätt, och man kan använda enkla resultat för att beräkna mer komplicerade masscentra.

Tyngdpunkt Tyngdpunktet spelar samma roll som masscentrum, fast i det allmäna tyngdfältet.

Jämviktsläge Jämviktsläge är ett läge som är konstant i tiden relativt en referensram. Två nödvändiga jämviktsvillkor är att

$$\sum \mathbf{F} = 0, \sum \mathbf{M}_A = 0 \ \forall \ A.$$

Villkoret är även tillräckligt om det gäller för alla delsystem av det totala systemet.

Friläggning Att frilägga en kropp består i att betrakta hela eller delar av system och alla krafter och moment som verkar på varje del. Här kan även inre krafter uppstå för delsystemerna som inte finns i det totala systemet.

Friktionskraft Friktionskraften är en speciell kraft, och förtjäner en lite mer noggrann beskrivning.

Friktionskraften är en kontaktkraft som uppstår när två ytor i kontakt rör sig med nollskild relativ hastighet. Friktion förekommer som statisk eller kinematisk friktion, beroende på om objektet som upplever friktion rör på sig eller inte. Friktionskraftens belopp beror av friktionskoefficienten μ. Denna beror igen på t.ex. om friktionen är statisk eller kinematisk och egenskaperna till ytorna som är i kontakt. Friktionskraften pekar alltid i motsatt riktning av ytornas relativa rörsle.

Vad är så beloppet av friktionskraften? I det statiska fallet är friktionskraften alltid så att kraftsumman på objektet är noll, och dens belopp är mindre än μN, där N är normalkraften på den ena ytan från den andra. I det kinematiska fallet är friktionskraftens belopp lika med μN.

2 Kraftsystem

Ett kraftsystem är ett system av krafter som verkar på en kropp och deras angrepspunkter.

Ekvimomenta kraftsystem Två kraftsystem är ekvimomenta om

- $\sum(\mathbf{F}_i)_1 = \sum(\mathbf{F}_i)_2$, där subskriptet utanför parentesen bestämmer vilket kraftsystem kraften är i.
- $(\mathbf{M}_A)_1 = (\mathbf{M}_A)_2$, där $\mathbf{M}_A$ anger summan av alla kraftmoment med avseende på A.

Två ekvimomenta kraftsystem har samma moment i alla punkter eftersom

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_B)_1 &= (\mathbf{M}_A)_1 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_1, \\
(\mathbf{M}_B)_2 &= (\mathbf{M}_A)_2 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_2 \\
&= (\mathbf{M}_A)_1 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_1 \\
&= (\mathbf{M}_B)_1.
\end{aligned}$$

Kraftpar Ett kraftpar består av två lika stora och motsatt riktade krafter som ej ligger på samma linje. Kraftsumman är $\mathbf{0}$ och beloppet av det totala momentet är

$$M_O = dF,$$

där F är kraftens belopp och d är avståndet mellan linjerna de två krafterna ligger på. Man kan visa att momentvektorn ej beror på val av O, och därmed kan placeras var som hälst i kroppen.

Förflyttning av krafter För ett kraftsystem av n krafter kan man flytta alla dessa till punkten A vid att för varje kraft $\mathbf{F}_i$ lägga till $\mathbf{F}_i, -\mathbf{F}_i$ i punkten A. Kraften i A och kraften i P_i bildar då ett kraftpar med moment $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i$ i punkten A. Momentet kan placeras i A eftersom beloppet av momentet för ett kraftpar ej beror av valet av punkt. Då finns även en $\mathbf{F}_i$ kvar. Resultatet blir att kraftsystemet är ekvivalent med en enkelt kraft och ett enkelt moment som ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{M} &= \sum \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i. \end{aligned}$$

Förflyttning till ny punkt Låt oss försöka flytta krafterna till en ny punkt. Det är klart att kraftsumman är den samma, och

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BP_i}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_B \end{aligned}$$

Kraftskruven Om man vill förenkla ett system mest möjligt, dekomponera $\mathbf{M}$ i dens komponenter parallellt och vinkelrät på $\mathbf{F}$. Ersätt den vinkelräta komponenten med ett krafpar ett avstånd $d = \frac{M_\perp}{F}$ från den förra punkten. Då blir resultatet en kraft och ett kraftmoment på samma linje, och detta kallas en kraftskruv. Att det ursprungliga totala kraftmomentet och kraftsumman är ortogonala är ekvivalent med att systemet har en enkraftsresultant. Tillräckligheten kommer direkt från härledningen. Nödvendigheten visas om vi antar att det finns en enkraftsresultant, men $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A \neq 0$ i något A. Om enkraftsresultanten är i B ger detta

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}) = 0. \end{aligned}$$

Detta ger en motsägelse, och ekvivalensen är bevisat.

3 Kinematik

I kinematiken beskrivs rörelser utan att diskutera deras uppkomst. Här kommer vi diskutera kinematik för partiklar.

Essensiella storheter Ortsvektorn $\mathbf{r}$ beskriver positionen till partikeln. Dens derivata

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

kallas hastighet och dens andraderivata

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

kallas acceleration.

Cirkelrörelse För cirkelrörelse med konstant radius är hastigheten vinkelrät på ortsvektorn, och har storlek $v = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Den tangentiala accelerationen har storlek $a_\parallel = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ och den centripetala accelerationen, som är riktad in mot centrum av rörelsen, har storlek $a_\perp = \frac{v^2}{R}$.

Naturliga komponenter En lämplig beskrivning av en partikels bana är att skriva den som beroende av sträckan partikeln har förflyttat sig. Med $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ får vi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Enligt definitionen är $\mathbf{e}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$ en enhetsvektor parallell med partikelns bana. Vi får även

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Den nya vektorn $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s}$ är av intresse. Vi har att

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mathrm{t} \cdot \mathbf{e}_\mathrm{t} &= 0 \\ 2\mathbf{e}_\mathrm{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s} &= 0, \end{aligned}$$

så denna vektorn är normal på banan. Dens belopp ges av $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\rho}$, där ρ är kurvans krökningsradie i någon given punkt. Vi använder definitionen av farten och skriver accelerationen som

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_\mathrm{n}.$$

Vid att betrakta $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ och använda kedjeregeln kan banans krökningsradie skrivas som

$$\rho = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right|^3}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}u^2}\right|}$$

där u är någon godtycklig parameter.