

Sammanfattning av SH1014 Modern fysik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

8 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av kursen SH1014 Modern fysik.

Innehåll

1	Speciell relativitet	1
2	Kvantmekanik	7

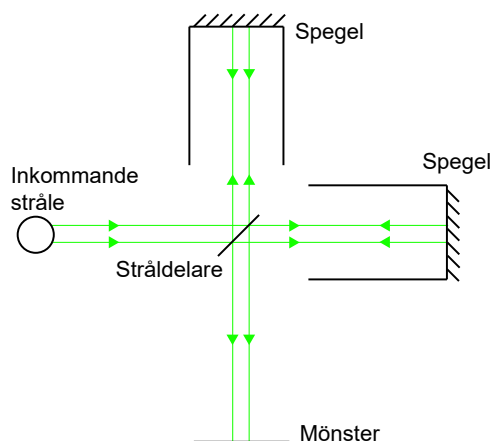
1 Speciell relativitet

Galileitransformationen Betrakta en statisk ram S och en ram S' som rör sig med konstant hastighet \mathbf{u} . Galileitransformen är den klassiska transformen av hastigheter och accelerationer mellan dessa system och ger

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{u}t + \mathbf{r}', \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{v}', \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}'.\end{aligned}$$

Michelson-Morleys experiment Michelson-Morleys experiment visade att ljus omöjligt kunde propageras genom den postulerade etern.

Uppställningen som användes är (en mer avancerad variant av) Michelson-Morley-interferometern, som illustreras i figur 1.



Figur 1:

Ideen bakom experimentet var att de två ”ärmarna” i uppställningen skulle röra sig med olika hastigheter relativt etern eftersom Jorden rör sig relativt Solen.

Om nu varje arm har längd L och etern rör sig med en hastighet u åt höger, tar ljuset tiden

$$\begin{aligned}t_{\text{höger}} &= \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} \\ &= L \frac{c-u+c+u}{c^2-u^2} \\ &= \frac{2cL}{c^2-u^2} \\ &= \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

att röra sig till och från stråldelaren åt höger och tiden

$$\begin{aligned} t_{\text{upp}} &= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} \\ &= \frac{2L}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

ty ljuset måste röra sig uppåt och motriktad hastigheten mot höger för att återvända till samma position i stråldelaren. Alltså borde skillnaden mellan tiden det tar för ljuset att röra sig de två vägarna ges av

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

För Michelson och Morleys fal förutspådde de att de skulle se 0.4 fransar i interferensmönstret, men de observerade < 0.01 fransar. Efter att ha upprepats sitt experiment ett halvår senare för att utesluta påverkan från Jordens position, konkluderade de med att det inte kunde finnas någon eter.

Einsteins postulat Baserad på Michelson-Morleys experiment, kom Einstein med följande postulat:

- Fysikens lagar är de samma i alla inertialsystem.
- Ljushastigheten i vakuum har samma värde c i alla inertialsystem.

Lorentztransformationen Lorentztransformationen är en transformation för att byta mellan olika referensramar. Den skiljer sig från Galileitransformationer, som inte är tillräcklig för att beskriva denna nya fysiken.

För att härleda Lorentztransformationen, betrakta två referensramar som sammanfaller vid $t = 0$ där den ena rör sig med en hastighet v i x -riktning. För att beskriva transformationen, ansätter vi

$$x' = k_i x_i,$$

där det summeras över alla rymdliga koordinater och tiden. Vi ansätter linjaritet eftersom det annars skulle kunna uppkomma accelererande rörelse i ett system utan att det är acceleration i ett annat, vilket skulle vara konstigt. Vidare antar vi att x' ej beror av andra rymdliga koordinater, men att den kan bero av origos rörelse, och ansätter

$$x' = k_1(x - vt).$$

Antag nu att vi skickar ut en ljuspuls från origo vid $t = 0$. Vågfrontens avstånd från origo kommer beskrivas av

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, x'^2 + y^2 + z^2 = c^2 t'^2,$$

eftersom ljuset skall ha samma fart i båda referensramer. Vi använder nu vår ansats för att transformera den andra ekvationen tillbaka, och får

$$k_1^2 x^2 + y^2 + z^2 + k_1^2 (v^2 t^2 - 2xvt) = c^2 t'^2.$$

Om vi sätter $t = t'$, får vi nu andra termer, och transformationen mislyckades. Vi åtgärder detta vid att ansätta

$$t' = k_{t,1}x + k_{t,2}t.$$

Detta ger

$$k_1^2 x^2 + y^2 + z^2 + k_1^2 (v^2 t^2 - 2xvt) = c^2 (k_{t,1}^2 x^2 + k_{t,2}^2 t^2 + 2k_{t,1}k_{t,2}xt).$$

För att transformationen skall lyckas, ger detta

$$\begin{aligned} k_1^2 - c^2 k_{t,1}^2 &= 1, \\ vk_1^2 + k_{t,1}k_{t,2}c^2 &= 0, \\ c^2 k_{t,2}^2 - k_1^2 v^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vid att införa

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

kan lösningarna skrivas som

$$k_1 = k_{t,2} = \gamma, k_{t,1} = -\frac{\beta\gamma}{c}.$$

Lorentztransformationerna ges då av

$$x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right).$$

Den inversa Lorentztransformationen fås vid att lösa ut ekvationerna för x och t , och ges av

$$x = \gamma(x' + vt'), t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right).$$

Med de givna skalfaktorerna ser vi att för små hastigheter går detta över i Galileitransformer, medan inga hastigheter över c tillåts.

Samtidighet Betrakta två händelser som inträffar vid olika tidpunkter och positioner. Lorentztransformationen ger

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x').$$

Detta implicerar att om händelserna är simultana i en referensram, är de inte nödvändigtvis det i den andra.

Tidsdilation Betrakta två händelser som inträffar vid samma position i den rörliga ramen. Lorentztransformationen ger

$$\Delta t = \gamma \Delta t',$$

och det mäts en längre tidsskillnad mellan händelserna i inertialramen.

Längdkontraktion Betrakta två händelser som inträffar vid samma tidspunkt i inertialramen. Lorentztransformationen ger

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x,$$

och det mäts ett kortare avstånd mellan händelserna i inertialramen.

Relativistisk Dopplereffekt Betrakta återigen två olika system. Från O' skickas det ut ljuspulser vid t'_1 och t'_2 . Lorentztransformationerna ger att ljuset skickas ut vid tider

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma t'_1, \\ t_2 &= \gamma t'_2 \end{aligned}$$

och vid avstånd

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma v t'_1, \\ x_2 &= \gamma v t'_2. \end{aligned}$$

Ljuspulserna når därmed origo vid tid

$$\begin{aligned} t_{O1} &= t_1 + \frac{x_1}{c} = \gamma t'_1(1 + \beta), \\ t_{O2} &= t_2 + \frac{x_2}{c} = \gamma t'_2(1 + \beta). \end{aligned}$$

Vi inför periodtiden $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, och får

$$\Delta t_O = \gamma(1 + \beta)\Delta t'.$$

Frekvensen för ljuspulsen ges då av

$$f_{\text{obs}} = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)} f_{\text{källa}}.$$

Lorentztransformation av hastigheter Vi använder differentialerna

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + v dt'), \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{\beta}{c} dx') \end{aligned}$$

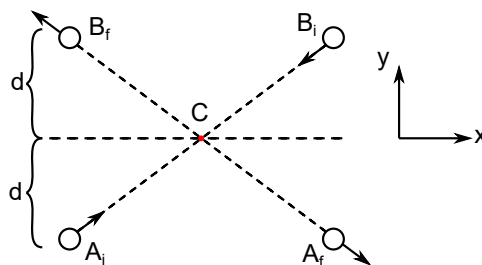
och får hastigheterna

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x},$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x},$$

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}.$$

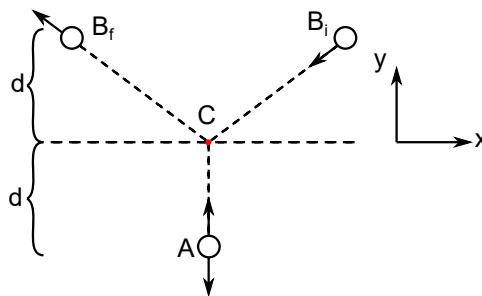
Relativistisk rörelsemängd Betrakta studsens som illustreras i figur 2.



Figur 2: Illustration

Vi antar här att rörelsen kan vara relativistisk i x , men approximeras som klassisk i y . Om partiklerna har samma massa (och hastighet), är mas-sentrum statiskt i C .

Vi kan alternativt betrakta studsens i ett system som följer partikeln A i x -riktning, vilket illustreras i figur 3.



Figur 3: Illustration

Båda system är inertialsystem, och därmed är rörelsesmängden bevarad i båda system.

Vi definierar tiden t_0 som det tar för A att röra sig avståndet d upp och

ned i A :s referensram. Ändringen i rörelsemängd ges då av

$$\begin{aligned}\Delta p_{A,y} &= -2m_A \frac{d}{t_0} - 2m_A \frac{d}{t_0} = -4m_A \frac{d}{t_0}, \\ \Delta p_{B,y} &= 2m_B \frac{d}{t_0} + 2m_B \frac{d}{t_0} = 4m_B \frac{d}{t_0},\end{aligned}$$

där tiden t är tiden det tar för B att röra sig upp och ned i den betraktade referensramen. Eftersom rörelsen i y -riktning är klassisk, är denna tiden t_0 i B :s referensram. Vi transformerar därmed tillbaka och får

$$\Delta p_{B,y} = 4m_B \frac{d}{\gamma t_0}.$$

Fysikens lagar gäller i alla inertialsystem, vilket systemet vi betraktar är, och därmed är den totala ändringen i rörelsemängdsmoment lika med 0, vilket ger

$$m_B = \gamma m_A.$$

Eftersom rörelsen i y -riktning är klassisk, kan A :s massa nu ersättas av vilomassan m_0 , som är A :s massa mätt i sitt eget inertialsystem. Eftersom de två har samma vilomassa, ger detta

$$m = \gamma m_0.$$

Den relativistiska rörelsemängden ges därmed av

$$p = mv = \gamma m_0 v.$$

Relativistisk energi Newtons andra lag ger

$$F = \frac{d}{dt}(mv).$$

Om kraftsumman F får verka på en partikel som börjar från vilo, ges dens kinetiska energi av

$$T = \int F \cdot ds = \int \frac{d}{dt}(mv) \cdot v dt = \int v \cdot d(mv) = \int v^2 dm + mv \cdot dv.$$

Lorentztransformationen av massa ger

$$m^2 \gamma^2 = m_0^2, m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2.$$

Vid att beräkna differentialen av båda sidor får

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v \cdot dv = 0, c^2 m = v^2 dm + mv \cdot dv,$$

vilket insatt i integralen ger

$$T = \int c^2 dm = c^2(m - m_0) = m_0 c^2 (\gamma - 1).$$

Detta kan alternativt skrivas som

$$mc^2 = T + m_0 c^2,$$

vilket tolkades som ett uttryck för totala energin som innehåller en konstant viloenergi $m_0 c^2$ (obs: Ej en potentiell energi!). Därmed ges den totala energin av

$$E = mc^2 = T + m_0 c^2.$$

Relation mellan energi och rörelsemängd Vi har nu fått

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2, E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4.$$

Energien i kvadrat kan skrivas som

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \right),$$

eftersom $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Vi får vidare

$$\begin{aligned} E^2 &= m_0^2 c^4 + m_0^2 v^2 c^2 \\ &= m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \end{aligned}$$

2 Kvantmekanik

Brister i klassisk fysik Redan innan kvantmekaniken formulerades, fanns det brister i det experimentella beviset för den klassiska fysiken.

Ultraviolette katastrofen Ett bevis var att den klassiska förutsägelsen av svartkroppsstrålning var

$$I(\nu, T) = \frac{2kT\nu^2}{c^2},$$

som divergerar för stora frekvenser. Observationer av svartkroppsstrålning var naturligtvis inte i närheten av detta utan gick mot 0 även för höga frekvenser.

Max Planck sägs att ha upptäckt kvantmekaniken vid att härleda intensitetsfördelningen för svartkroppsstrålning under antagandet att energinivåerna i kroppen var diskreta kvanta av $h\nu$, där h är den nu införda Plancks konstant. Han fick

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Denna går både mot 0 för höga frekvenser och beter sig som den klassiska förutsägelsen vid låga frekvenser. Einstein gissade senare att $h\nu$ var energien för partiklarna som bygger upp ljus - fotoner.

Fotoelektriska effekten Om man bestrålar metaller med elektromagnetisk strålning, frigörs elektroner (upptäckta vid det här laget) från metallet. Man kunne sätta metallet i närheten av en anod så att en spänningsskillnad mellan metallet och anoden kunde attrahera metaller till anoden. Vid att elektrisk koppla de två samman, kunde man mäta strömmen som orsakades av de frigjorda elektronerna. Det som observerades var:

- Det frigjordes bara elektroner om den inkommande strålningen hade en frekvens över en viss gränsfrekvens.
- Under denna gränsfrekvensen spelade strålningsintensiteten ingen roll.
- Över gränsfrekvensen mättes den maximala elektronenergin som $E = h\nu - W$.

Detta var svårt att förklara med klassisk fysik.

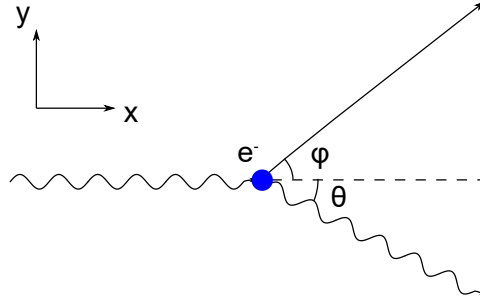
Comptonspridning Elektromagnetisk strålning kan spridas på elektroner. Klassiskt är det svårt att förklara spridningsmönstret som uppstår, eftersom elektromagnetisk strålning är vågor. Däremot kan man anta att strålningen består av fotoner med rörelsemängd och energi enligt speciell relativitetsteori och resultaten från fotoelektriska effekten, som illustrerad i figur 4.

Energins bevarande ger

$$h\nu + m_{e,0}c^2 = E_e + h\nu'$$

och rörelsemängdens bevarande ger

$$\begin{aligned} h\frac{\nu}{c} &= h\frac{\nu'}{c} \cos \phi + p'_e \cos \theta, \\ h\frac{\nu'}{c} \sin \phi - p'_e \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$



Figur 4: Illustration av studs mellan en foton och en elektron.

Vi omformulerar förste rörelsemängdekvationen till

$$h\frac{\nu}{c} - h\frac{\nu'}{c} \cos \phi = p'_e \cos \theta$$

och kvadrerar för att få

$$h^2\frac{\nu^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \phi + h^2\frac{\nu'^2}{c^2} \cos^2 \phi = p_e'^2 \cos^2 \theta.$$

Kombinerat med kvadratet av den andra rörelsemängdekvationen ger detta

$$h^2\frac{\nu^2}{c^2} + h^2\frac{\nu'^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \phi = p_e'^2.$$

Energins bevarande ger vidare

$$E_e = h\nu - h\nu' + m_{e,0}c^2.$$

Vi kvadrerar och kombinerar med massa-energi-sambandet från speciell relativitet och får

$$\begin{aligned} h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_{e,0}c^2 + m_{e,0}^2c^4 &= p_e'^2c^2 + m_{e,0}^2c^4 \\ &= h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \phi + m_{e,0}^2c^4, \\ (\nu - \nu')m_{e,0}c^2 &= h\nu\nu'(1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

Vi skriver nu om till våglängd och får

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right)m_{e,0}c^2 &= h\frac{c^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos \phi), \\ (\lambda' - \lambda)m_{e,0}c &= h(1 - \cos \phi), \\ \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_{e,0}c}h(1 - \cos \phi), \end{aligned}$$

alternativt i termer av energi

$$E' = \frac{1}{\frac{1 - \cos \phi}{m_{e,0}c^2} + \frac{1}{E}},$$

vilket stämde överens med experiment.