

Sammanfatning av SI1121 Termodynamik

Yashar Honarmandi

23 oktober 2017

Sammanfattning

Denna sammanfattning samlar centrala ekvationer användt i KTH:s kurs SI1121 Termodynamik. Den inkluderar även lite snygg information om enheter.

Innehåll

1	Enheter	1
2	Konstanter	1
3	Ekvationer	1
3.1	Allmänna ekvationer	2
3.2	Termodynamikens huvudsatser	2
3.3	Potensialer, derivator och annat diverse	2
3.4	Gaser	3
3.5	Adiabater och Carnotprocesser	4
3.6	Värmetransport	5
3.6.1	Värmeledning	5
3.6.2	Strålning	6

1 Enheter

Enheterna i denna tabell kan vara bra att ha när man ska göra dimensionsanalys.

Storhet	SI-enhet	Uttryck i fundamentala enheter
Kraft	N	kg m s^{-2}
Energi	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Tryck	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$

2 Konstanter

I följande tabell finns konstanter som kommer användas när ekvationer diskuteras.

Konstant	Symbol	Värde
Allmänna gaskonstanten	R	$8.3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Avogadros tal	N_A	$6.022 14 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmanns konstant	k	$1.380 65 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Ljusetfarten	c	$299 792 458 \text{ m s}^{-1}$
Plancks konstant	h	$6.626 07 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Stefan-Boltzmanns konstant	σ	$5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

3 Ekvationer

Om inte annat specificeras, kommer alla ekvationer följa symbolkonvention enligt denna tabellen.

Storhet	Symbol
Tryck	p
Volym	V
Temperatur	T
Antal partiklar	N
Antal mol	ν
Inre energi	U
Värme	Q
Arbete	W

3.1 Allmänna ekvationer

Konversion mellan m , ν och N

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

M är gasens molara massa, massan per mol partiklar. Flera relationer kan härledas vid att använda $R = N_A k$.

Täthet

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Tätheten av en substans kan även definieras som

$$n = \frac{N}{V}$$

3.2 Termodynamikens huvudsatser

Första huvudsatsen

$$dU = dQ - dW$$

Vid att definiera första huvudsatsen så, definieras arbete gjort på systemet implisitt som positivt. Arbetet ges av

$$dW = -p dV$$

Andra huvudsatsen

$$dS = \frac{dQ}{T} \geq 0$$

Likheten gäller för reversibla processer, och olikheten gäller för andra processer.

Tredje huvudsatsen

$$S(T = 0) = 0$$

3.3 Potensialer, derivator och annat diverse

Inre energiens differentiel Vid att kombinera termodynamikens första och andra huvudsats får man

$$dU = T dS - p dV$$

Fri energi

$$F = U - TS$$

$$dF = -S dT - p dV$$

Vid isoterma processer är $dW = dF$.

Entalpi

$$H = U + pV$$

$$dH = T dS + V dp$$

Ej kontinuerlig vid fasövergång.

Fri entalpi

$$G = H - TS$$

$$dG = -S dT + V dp$$

Kontinuerlig vid fasövergång.

Uppvärmning av ett ämne

$$dQ = mc dT$$

c är ämnets specifika värmekapacitet.

Molara värmekapaciteter När man värmer upp ett ämne, ger värmekapaciteten information om hur mycket temperaturen ökar när en given mängd värme tillförs. Den molara värmekapaciteten är värmekapaciteten per stoffmängd av ämnet, och är den samma för samma

substansen. Molara värmekapaciteter är definierade som

$$C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V,$$

$$C_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

C_V är den molara värmekapaciteten när värme tillförs vid konstant volym, och C_p är den molara värmekapaciteten när värme tillförs vid konstant tryck.

Utvidgning Kroppar kan utvidga sig vid ändringar i omgivningarna. Utvidgningen relativt till originalvolymen kan kvantiseras vid att definiera relativa utvidgningskoefficienter som

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T,$$

$$\alpha_V = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Vid att addera sådana ändringar kan man få den totala relativa volymändringen vid en given process enligt

$$\frac{dV}{V} = -\kappa dp + \alpha_V dT$$

Molar värmekapacitet för fasta ämnen

$$C = 3R$$

Mikroskopisk entropi Ett system i ett givet makrotillstånd, definierad av termodynamiska storlekar som tryck och temperatur, har en viss multiplicitet W associerad med det givna makrotillståndet. Multiplikiteten är antalet möjliga tillstånd

partiklarna i systemet kan befinna sig så att systemet fortfarande karakteriseras av dom samma termodynamiska storlekerna. Multipliciteten är kopplad till entropien vid Boltzmanns lag,

$$S = k \ln W$$

3.4 Gaser

Tillstånd

Ideala gaslagen

$$pV = \nu RT = NkT.$$

N är antalet partiklar i gasen och ν är antalet mol partiklar i gasen.

van der Waals' tillståndsekvation

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - a \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

$$\left(p + \frac{a_0}{v^2} \right) (v - b_0) = RT$$

Dessa är båda ekvivalenta versioner av van der Waals' tillståndsekvation, var man introducerar $a_0 = aN_A^2$, $b_0 = bN_A$ och $v = \frac{V}{\nu}$. a innehåller information om växelverkan mellan partiklarna och b innehåller information om partiklarnas volym.

Maxwell-Boltzmann-fördelningen

Partiklarna i en ideal gas har olika fart. Antalet partiklar med en given fart v per volym är fördelad enligt

$$n(v) = C v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

var m är en partikels massa. Vi kräver att fördelningen är normaliserad,

dvs.

$$\int_0^\infty dv n(v) = \frac{N}{V},$$

som ger

$$K = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Från detta kan man räkna ut en mest sannolik fart v_p , en förväntad fart $\langle v \rangle$ och en RMS-fart v_{RMS} . Dessa är

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\ \langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \\ v_p &= \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \end{aligned}$$

Man kan även räkna ut en medelenergi per partikel, som är

$$\langle E \rangle = \frac{n}{2}kT,$$

var n är antalet kvadratiske frihetsgrader per partikel. För en enatomig ideal gas är det

$$\langle E \rangle = \frac{3kT}{2}.$$

Det följer även att

$$\begin{aligned} U &= NE = N \frac{n}{2}kT \\ pV &= \frac{2}{n}U \end{aligned}$$

Medelfri väg Medelavståndet mellan två kollisioner i en ideal gas är

$$l = \frac{kT}{p\pi d^2 \sqrt{2}} = \frac{1}{n\pi d^2 \sqrt{2}}$$

var n är partikeltätheten och d är partiklernas diameter.

Stöttal Stöttalet är antalet partikler som kolliderar med en yta per enhet area och tid, och fås som

$$\nu_* = \frac{1}{4}n \langle v \rangle = \frac{p}{\sqrt{2\pi m kT}}$$

var n är partikeltätheten.

Molara värmekapaciteter för ideala gaser Vid att använda definitionerna av molara värmekapaciteter och uttrycket för indragenergin till en ideal gas kan man visa att den molara värmekapaciteten är

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

för en enatomig gas,

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

för en tvåatomig gas och

$$C_V = \frac{n}{2}R$$

för en gas var partiklerna har n kvadratiske frihetsgrader. Man kan även visa att generellt för ideala gaser är

$$C_p = C_V + R$$

3.5 Adiabater och Carnot-processer

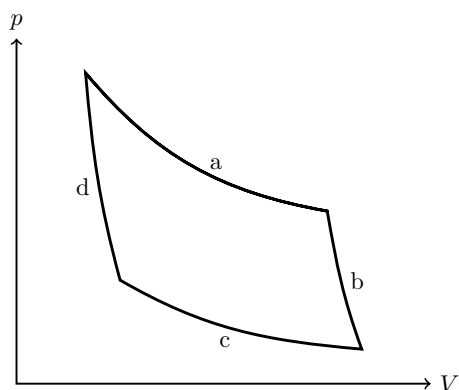
pV -representation av adiabatiska processer För reversibla adiabatiska processer gäller att $dQ = 0$. Detta implicerar att

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= c_1, \\ TV^{\gamma-1} &= c_2, \\ Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= c_3, \end{aligned}$$

var alla c_i är olika konstanter och γ ges av

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Carnotprocesser I en Carnotprocess opereras det mellan två reservoarer med olika temperaturer. Kretsprocessen består av två isotermer a och c, samt två adiabater b och d, som illustrerad i figur 1.



Figur 1: Carnotprocess i ett pV -diagram.

Carnotmaskiner Vi betraktar tre olika sorter Carnotmaskiner:

- värmemaskiner, som använder värme till att göra ett arbete
- värmepumpar, som använder arbete till att värma upp ett reservoar
- kylmaskiner, som använder arbete till att kyla ned ett reservoar

Om processen körs medurs, avger den värma reservoaren värmen Q_H vid

temperatur T_H , medan den kalla reservoaren tar upp värmen Q_L vid temperaturen T_L . Maskinen gör då arbetet $-W$. För en Carnotprocess kan man då visa att

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_L}{T_L},$$

$$W = Q_H - Q_L.$$

Carnotmaskiners verkningsgrad Om man definierar en verkningsgrad η som

$$\eta = \frac{\text{Nyttig energi}}{\text{Energi vi putter in}}$$

kan man visa följande verkningsgrader för Carnotprocesser:

- Värmemaskin: $\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{T_H - T_L}{T_H}$
- Värmepump: $\eta = \frac{Q_H}{Q_W} = \frac{T_H}{T_H - T_L}$
- Kylmaskin: $\eta = \frac{Q_L}{W} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$

3.6 Värmetransport

I denna sektion kommer olika mekanismer för värmeflöde att diskuteras. Vid termisk jämvikt är alla flöden 0, medan vid stationära betingelser är alla flöden lika och konstanta med avseende på tid.

3.6.1 Värmeledning

Värmeledning genom ett fast ämne Värmeflödet Φ är givet av

$$\Phi = \frac{\lambda}{d} A (T_i - T_y),$$

var λ är ämnets värmeledningsförmåga, d är tjockleken och T_i, T_y är temperaturen på varje sida av ämnet.

Man kan även definiera ett värmeffödet per area $\phi = \frac{\Phi}{A}$.

Vid att definiera en värmeledning $U = \frac{\lambda}{d}$, kan man skriva

$$\Phi = UA(T_i - T_y),$$

analogt med i elläran. I denna analogien representerar Φ strömmen, $T_i - T_y$ spänningen och $\frac{1}{UA}$ motståndet. Vi definierar därför värmemotståndet $R = \frac{1}{U}$.

Värmeledning via gas Om ett fast ämne med temperatur T_2 är i kontakt med en gas med temperatur $T_1 > T_2$, är värmeffödet från gasen till det fasta ämnet

$$\Phi = \alpha A(T_1 - T_2).$$

Igen definierar vi värmemotståndet $R = \frac{1}{\alpha}$.

Värmeledning genom flera föremål Om det sker värmeledning genom flera föremål, kan man räkna ut (medel)värmeffödet vid att använda temperaturerna på varje sida, samt det totala värmemotståndet, analogt med i dom två tidigare fallen. Det totala värmemotståndet, analogt med elläran, är

$$R = \sum R_i,$$

var summan göras över alla föremål.

3.6.2 Strålning

En svart kropp är en kropp som absorberar all inkommande strålning. I slika kroppar skapas elektromagnetiska vågor med alla möjliga frekvenser. För att analysera hur mycke energi svarta kroppar strålar ut, måste man först förstå hur mycke energi dom har lagrad i sig.

Elektromagnetisk strålning

Elektromagnetiska vågor karakteriseras av en frekvens ν och en våglängd λ , som uppfyllar sambandet

$$c = \nu\lambda.$$

Strålningen transporteras av enskilda partikler som kallas fotoner. Ett foton har energi

$$E = h\nu.$$

Plancks lag Den inra energien per volym är $u = \frac{U}{V}$. Dens spektraltäthet, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, är

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Svarta kroppars inre strålningsenergi Vid att integrera Plancks lag kan man räkna ut inre energin som

$$U = V \frac{\pi^5}{15} \frac{8h}{c^3} \left(\frac{kT}{h} \right)^4$$

Stefan-Boltzmanns lag Vid att kombinera det man vet om strålningsenergi med kinetisk gasteori, var man betrakter strålningen i en svart kropp som en gas av fotoner, får man Stefan-Boltzmanns lag

$$\Phi = \sigma AT^4,$$

var σ kan uttryckas med andra konstanter som

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

Extremvärden för svartkroppsstrålning Svartkroppsstrålning har maxima, båda med avseende på frekvens och våglängd. Dessa maxima inträffar inte samtidigt! Dom kan räknas ut som

$$\frac{h\nu_{\max}}{kT} = 2.821,$$
$$\lambda_{\max}T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}.$$

Strålning på en kropp Om en kropp träffs av strålning, kan strålningen antingen absorberas, reflekteras eller transmittas. Sannolikheten för varje av dessa anges med sannolikhetsfaktorer, som generellt är frekvensavhengiga. För absorptionsfaktoren α , reflektionsfaktoren ρ och transmissionsfaktoren τ gäller sambandet

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Kirchoffs lag En kropp har även en emissivitet ε , som anger hur effektivt ytan strålar ut termisk energi. För en svart kropp är denna 1. För att termisk jämvikt ska vara möjligt för strålande kroppar, måste varje kropp ha

$$\varepsilon = \alpha$$