Samanfatning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

6 januari 2018

Sammanfattning

Denna samanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

Innehåll

1 Mängder

1.1 Definitioner

Delmängder Låt A, B vara mängder. A är en delmängd av B om det för varje $x \in A$ gäller att $x \in B$. Notation: $A \subset B$.

Union och snitt Låt A, B vara mängder. Unionen $A \cup B$ består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet $A \cap B$ består av de element som är i båda.

Övre och undra begränsningar Ett tal m är en övre begränsning av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$, och en undra begränsning om $x \geq m$ för varje $x \in A$.

Supremum och infimum Ett tal m är supremum till en mängd A om m är den minsta övre begränsningen till A. m är infimum till A om m är den största undra begränsningen till A. Notation: $\sup A, \inf A$.

1.2 Satser

Supremumsegenskapen Varje uppåt begränsade delmängd av $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning.

Bevis Överkurs.

2 Talföljder

2.1 Definitioner

Definitionen av en talföjld En talföljd är en följd av tal $a_1, a_2, ...$ och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Delföljder En delföljd av en talföljd är en selektion av tal i följden som fortfarande är oändligt stor.

Växande och avtagande talföljder En talföljd är växande om $a_{n+1} \geq a_n$ för varje $n \geq 1$. Avtagande talföljder definieras analogt.

Uppåt och nedåt begränsade talföljder En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett M så att $a_n \leq M$ för alla $n \geq 1$.

Begränsade talföljder En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Konvergens av talföljder En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Detta beteendet betecknas

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Divergenta talföljder En divergent talföljd är inte konvergent.

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e**, Eulers tal**

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av talföljder Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara talföljder med gränsvärden A och B. Då följer att

a) $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$.

b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet AB.

c) om $B \neq 0$ är $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\frac{A}{B}$.

d) om $a_n \leq b_n$ för varje n så gäller att $A \leq B$.

Bevis

Växande och uppåt begränsade talföljder Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

Bevis Enligt supremumsegenskapen finns det ett $K = \sup(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Då finns det även a_i godtyckligt nära K - med andra ord finns det ett N så att $|a_N - K| < \varepsilon$ för något $\varepsilon > 0$. Eftersom talföljden är växande, är detta även sant när $n > N$, vilket fullbördar beviset.

Binomialsatsen För $n \in \mathbb{Z}$ har man

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bevis

Gränsvärde för potenser

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

Bevis

Standardgränsvärden Låt $a > 1$ och $b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$$

Bevis

Ändligt värde av e Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

Bevis

Bolzano-Weierstrass' sats Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd.

Bevis

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Definition av en funktion Låt X, Y vara mängder. En funktion $f : X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi säger att x avbildas på y och att y är bilden av x. x kallas argumentet till f. X kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även D_f. Y kallas funktionen målmängd.

Värdemängd Värdemängden till $f : X \to Y$ definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden f antar.

Injektivitet f är injektiv om det för varje $x_1, x_2 \in X$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

Surjektivitet f är surjektiv om $V_f = Y$.

Bijektivitet Om f är injektiv och surjektiv, är f bijektiv.

Inversa funktioner Låt $f : X \to Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1} : Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där $y = f(x)$. Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

Växande och avtagande funktioner En funktion f är växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) \leq f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

Strängt växande och avtagande funktioner En funktion f är strängt växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) < f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

Monotona funktioner Om en funktioner är antingen strängt växande respektiva strängt avtagande eller växande respektiva avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektiva monoton.

Uppåt och nedåt begränsade funktioner En funktion f är uppåt begränsad om V_f är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedra begrensning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

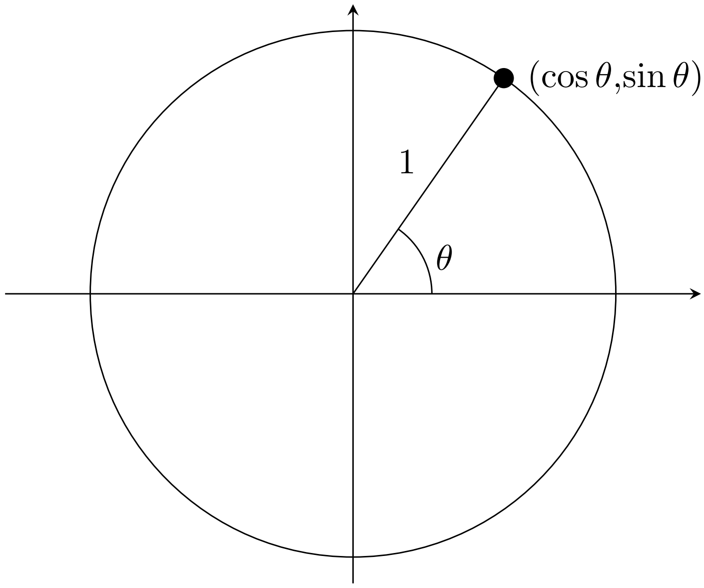
Minima och maxima En funktion f har ett lokalt maximum i x_0 om det finns en omgivning I till x_0 så att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in I \cap D_f$. Det analoga gäller för ett lokalt minimum. Om f har antingen ett lokalt maximum eller minimum i x_0 har f ett lokalt extrempunkt i f.

Globala maxima och minima En funktion f har ett globalt maximum i x_0 om $f(x) \leq f(x_0$ för varje $x \in D_f$.

Trigonometriska funktioner Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel θ med x-axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av x-axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras sin och cos utifrån x- och y-koordinaterna till punkten för en given θ, var θ mäts i radianer. Vi definierar även $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Från definitonerna ser vi at $\sin x$ och $\cos x$ är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$, medan $\tan x$ är definierad för alla $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.



Figur 1: Enhetscirkeln.

Radianer Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 beväger sig från startpunktet och till nån

Trigonometriska funktioners egenskaper Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dissa. Några essensiella är listad under:

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
&\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta \\
&\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta \\
&\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \\
&\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta \\
&\sin(-\theta) = -\sin\theta \\
&\cos(-\theta) = -\cos\theta \\
&\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \\
&\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta
\end{aligned}
$$

Inversa trigonometriska funktioner Låt $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Låt $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Låt $f : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arctan x$.

Exponentialfunktionen I häftet definieras inte exponentialfunktionen $a^x, a > 1$, utan den antas vara en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller

$$
\begin{aligned}
&a^0 = 1 \\
&a^1 = a \\
&a^{x+y} = a^x a^y \\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x} \\
&(a^x)^y = a^{xy}
\end{aligned}
$$

Logaritmfunktionen Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$ för något $a > 1$. Inversen till denna funktionen betecknas som $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Absolutbelopp Absolutbeloppet definieras som $|x| = \sqrt{x^2}$. Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Kontinuitet Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Likformig kontinuitet f är likformig kontinuerlig på intervallet I om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in I$ som uppfyller att $|x - y| < \delta$.

Konvexitet En funktion f är konvex i $[a, b]$ om det för varje $x_1, x_2 \in [a, b]$ gäller att

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), t \in [0, 1].$$

Konkavitet En funktion f är konkav i $[a, b]$ om $-f$ är konvex i $[a, b]$.

Inflexionspunkt Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En punkt $x_0 \in I$ sägs vara en inflexionspunkt till f om det finns ett $\delta > 0$ sådan att f är konvex i $[x_0 - \delta, x_0]$ eller $[x_0, x_0 + \delta]$ och konkav i det andra.

Lodräta asymptoter Linjen $x = a$ är en lodrät asymptot till f om $f(x)$ går mot ∞ eller $-\infty$ när $x \to a^-$ eller $x \to a^+$.

Sneda asymptoter Linjen $y = kx + m$ är en sned asymptot till f om

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$$

eller

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0.$$

Givet att f har en sned asymptot, ger definitionen

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{k}, m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

eller analogt om asymptoten är vid $-\infty$.

Stora ordo vid oändligheten Låt f, g vara funktioner definierade i (a, ∞) för något a. f tillhör stora ordo av g då $x \to \infty$, med notation $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, om det finns M och x_0 så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje $x > x_0$.

Stora ordo kring en punkt Låt f, g vara funktioner definierade i en omgivning till a. f tillhör stora ordo av g kring a, med notation $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, om det finns M och $\delta > 0$ så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

3.2 Satser

Trigonometriska funktioner med vinkelsummor

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Cosinussatsen Låt a, b, c vara sidorna i en triangel och θ vinkeln där sidlängderna a och b möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Logaritmfunktionens egenskaper Låt $a > 1$. Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \tag{1}$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{2}$$
$$\log_a(x^y) = y\log_a(x) \tag{3}$$

Bevis Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen - $a^{\log_a x} = x$ - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att $a^{\log_a 1} = 1$ och att $a^0 = 1$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att $a^{\log_a xy} = xy$ och att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x}a^{\log_a y} = xy$.

Ekvation 3 fås från att $a^{\log_a x^y} = x^y$ och att $a^{y\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y$.

Absolutbeloppens egenskaper

$$|xy| = |x||y| \tag{4}$$
$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{5}$$

Bevis Kommer kanskje någon gång.

Kontinuitet av samansatta funktioner Låt f vara kontinuerlig i b och låt $g(x) \to b$ när $x \to a$. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

givet att vänsterledet är definierat.

Bevis Meh.

Kontinuitet och begränsning Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.

Bevis

Inversfunktioners kontinuerlighet Låt $f : A \to B$ vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen $f^1 : B \to A$ är kontinuerlig och strängt växande.

Bevis

Elementära funktioners kontinuerlighet Elementära funktioner är kontinuerliga.

Bevis

Kontinuerlighet av summa och produkt Summan och produktet av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Bevis

Intervallhalvering låt $[a_i, b_i]$ vara intervall så att $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ vid att låta en vara mittpunktet på $[a_i, b_i]$ och den andra vara oändrat. Då finns det ett unikt x så att $x \in [a_i, b_i]$ för alla $i \in \mathbb{N}$.

Bevis

Satsen om mellanliggande värde Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Bevis I fallet $f(a) = f(b)$ är beviset trivialt.

Anta att $f(a) < m < f(b)$ för något m (ett analogt bevis gäller i motsatta fallet). Definiera $a_0 = a$ och $b_0 = b$, bilda intervallet $[a_0, b_0]$ och beräkna funktionsvärdet i mittpunktet. Om detta är större än m, välj b_1 till att vara mittpunktet och $a_1 = a_0$, eller motsatt i motsatt fall. Fortsätta så med intervallhalvering. Då har vi $f(a_i) \leq m \leq f(b)$ för varje $i \in \mathbb{N}$.

Mängden av alla a_i är växande och uppåt begränsad av b_i, och mängden av alla b_i är avtagande och nedåt begränsad av a_i. Vi kan da låta $j \to \infty$, och får $f(x) \leq m \leq f(x) \implies f(x) = m$ för något $x \in [a, b]$. Detta gäller för alla m som uppfyllar kravet, och beviset är klart.

Största och minsta värden Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då finns $x_1, x_2 \in [a, b]$ så att $\sup V_f = f(x_1)$ och $\inf V_f = f(x_2)$.

Bevis Vi vet enligt 3.2 att funktionens värdemängd är begränsad. Definiera $M = \sup V_f$, som då existerar, och anta att $M \neq f(x)$ på $[a, b]$. Då är funktionen g så att

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

definierad på $[a, b]$, kontinuerlig och därmed begränsad. Då finns $C = \sup V_g$, och

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq X \implies f(x) \leq M - \frac{1}{C}.$$

Enligt antagandet är $M > f(x)$, och då är C positiv. Då är $M - \frac{1}{C} < M$, och vi har hittat en mindre övre begränsning för f. Detta motsäjer antagandet, och då måste det finns ett $x \in [a, b]$ så att $f(x) = M$.

Ett analogt bevis gäller för att visa att f antar ett minsta värde.

Likformig kontinuitet och kontinuitet Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$. Då är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.

Bevis

Stora ordos egenskaper Låt f, g vara funktioner sådana att $\mathcal{O}(f(x)), \mathcal{O}(g(x))$ är definierade kring en punkt eller vid ∞. Då gäller:

$$\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x)g(x)),$$
$$\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(|f(x)| + |g(x)|).$$

Bevis

4 Gränsvärden

4.1 Definitioner

Gränsvärde vid oändligheten Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f konvergerar mot gränsvärdet A när $x \to \infty$ om det for varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

eller $f(x) \to A$ när $x \to \infty$.

Divergens Om det för en funktion f inte finns ett sådant A, sägs f vara divergent då $x \to \ infty$.

Det oegentliga gränsvärdet Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x\ to \infty$ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Lokalt gränsvärde Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f konvergerar mot A när x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyllar $0 < |x - a| < \delta$. Detta skrivs $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Vänster- och högergränsvärden Vid att endast studera $x > a$ eller $x < a$ kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion f. Dessa skrivs $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ eller $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$. För en funktion f definierad i en punkterad omgivning till a existerar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

Det oegentliga lokala gränsvärdet Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \to a$ om det för varje K finns ett $delta$ sådant att $f(x) > K$ för varje $x \in D_f$ som uppfyll ar $0 < |x - a| < \delta$

4.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av funktioner Låt f, g vara kontinuerliga funktioner sådana att $f(x) \to A, g(x) \to B$ när $x \to \infty$. Då gäller att

a) $f(x) + g(x) \to A + B$ när $x \to \infty$.

b) $f(x)g(x) \to AB$ när $x \to \infty$.

c) om $B \neq 0$ så följer att $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ när $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$.

Bevis Mjo.

Gränsvärden och supremum Låt $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \to \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

Bevis Nä.

Standardgränsvärden mot oändligheten Låt $a > 1, b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

Bevis

Standardgränsvärden mot 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln 1 + x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bevis Too much.

Bevis Orkar inte.

5 Derivata

5.1 Definitioner

Derivatans definition Låt f vara en funktion definierad i en omgvning krin x_0. f är deriverbar i x_0 om

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

existerar. Värdet kallas derivatan i x_0.

Deriverbara funktioner Om en funktion f är deriverbar i alla punkter i definitionsmängden, är funktionen deriverbar. Funktionen $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ med $D_{f'} = D_f$ kallas derivatan.

Stationära punkt En funktion f har ett stationärt punkt x_0 om $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x_0} = 0$.

Taylorpolynomet Låt f vara n gånger deriverbar. Polynomet

$$p_n(x) = \sum_{i=0} n\frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!}(x-a)^i$$

kallas Taylorpolynomet av grad n till f kring a. Specialfallet där $a = 0$ kallas Maclaurinpolynomet till f av grad n.

Primitiva funktioner Låt f vara definierad på $[a, b]$ och F vara kontinuerlig på $[a, b]$. F är en primitiv funktion till f om $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$ för varje $x \in (a, b)$.

5.2 Satser

Derivata och kontinuitet Låt f vara deriverbar i (a, b). Då är f kontinuerlig i (a, b).

Bevis Kan man tänka.

Derivationsregler Låt f, g vara deriverbara i punkten x. Då följer att $f+g$, fg är deriverbara i x. Derivatorna har sambandet

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x),\\ &\frac{\mathrm{d}(af)}{\mathrm{d}x}(x) = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x), a\in\mathbb{R},\\ &\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).\end{aligned}$$

Om $g(x) \neq 0$ är även $\frac{f}{g}$ deriverbar i x och

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f}{g}\right|_x = \frac{\left(g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)\big|_x}{g^2(x)}.$$

Bevis De två första följer nästan direkt från definitionen.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}+\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right) \\
\frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}+\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right) \\
&= f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)+g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).
\end{aligned}$$

Kedjeregeln Låt f vara deriverbar i y, g deriverbar i x och $y = g(x)$. Då är den sammansatta funktionen $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\bigg|_{g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\bigg|_x.$$

Bevis

Derivatan av inversfunktioner Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då är inversen f^{-1} deriverbar i alla punkter $y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x$ där $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x \neq 0$ med derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}\bigg|_y = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_x}.$$

Bevis

Extrempunkt och derivata Låt f vara deriverbar i x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då är $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.

Bevis Låt f ha ett maximum i x_0. Detta ger $f(x_0) \geq f(x)$ i en omgivning till x_0. Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

När $h \to 0$ från det positival hållet har man

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

eftersom nämnaren är negativ enligt antagandet. När $h \to 0$ från det negativa hållet har man

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Vi räknar ut gränsvärdet när h går mot 0. Eftersom det existerar, måste vi ha att $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.

Rolles sats Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) så att $f(a) = f(b)$. Då existerar $p \in (a, b)$ så att $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_p = 0$.

Bevis Om f är konstant på $[a, b]$ är beviset trivialt.

Annars, låt $f(x) > f(a)$ för något $x \in (a, b)$. Eftersom f är kontinuerlig på $[a, b]$, antar den enligt sats ett största värde. Eftersom $f(a) = f(b)$ måste detta största värdet antas i något $q \in (a, b)$. Då f är deriverbar i q, gäller det enligt sats att $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(q) = 0$. Detta är punkten vi söker.

Ett analogt bevis gäller om $f(x) < f(a)$ för något $x \in (a, b)$.

Generaliserade medelvärdessatsen Låt f och g vara reellvärda, kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara på (a,b). Då existerar $p \in (a,b)$ så att

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p)(g(b)-g(a)) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(p)(f(b)-f(a)).$$

Om $g(a) \neq g(b)$ och $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_p \neq 0$, gäller

$$\frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(p)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(p)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Medelvärdesatsen Välj $g(x) = x$. Detta ger

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_p (b-a) = f(b) - f(a).$$

Bevis Bilda

$$h(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a)),$$

som är kontinuerlig och deriverbar på intervallet enligt annan sats. Denna uppfyller $h(a) = h(b)$, och då existerar enligt Rolles sats ett $p \in (a,b)$ så att $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(p) = 0$. Vi har

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(g(b)-g(a)) - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)(f(b)-f(a)),$$

vilket ger

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p)(g(b)-g(a)) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(p)(f(b)-f(a)).$$

Följder av dessa satser Låt f vara deriverbar på (a,b). Då gäller:

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är konstant på (a,b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \geq 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är växande på (a,b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ implicerar att f är strängt växande på (a,b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \leq 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är avtagande på (a,b).
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) < 0$ implicerar att f är strängt avtagande på (a,b).

Bevis Om f är konstantfunktionen, är första påståendet triviellt. Om $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$ på (a,b), välj x_0, x_1 i intervallet så att $x_0 < x_1$. Då ger medelvärdesatsen att $f(x_1) - f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(x_1 - x_0) = 0$, med $p \in (x_0, x_1)$, vilket bevisar omvändingen.

Om nu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ på intervallet, ger medelvärdesatsen på samma sätt $f(x_1) - f(x_0) > 0$, med ett analogt argument om nollan inkluderas. Anta nu att f är växande. Detta ger

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Anledningen till att det inte är en ekvivalens när derivatan är strikt positiv är att detta gränsvärdet kan bli 0 även om f är växande. Med ett analogt bevis för de två sista påståenden är beviset klart.

L'Hôpitals regel Låt f, g vara reellvärda, deriverbara funktioner i en omgivning I av a sådana att

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)}.$$

Bevis

Oändliga kvoter Låt

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)} = L,$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Då gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bevis

Konvexitet och derivata Låt f vara deriverbar i (a, b). Då är f konvex i (a, b) omm $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ är växande i (a, b).

Bevis

Andrederivata och konvexitet Låt f vara två gånger deriverbar i (a, b). Då är $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) \geq 0$ för varje $x \in (a, b)$ omm f är konvex.

Bevis

Andrederivata och inflexionspunkt Låt f vara två gånger deriverbar och låt $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ vara kontinuerlig. Om f har en inflexionspunkt i x_0 så är $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$.

Bevis

Taylors formel Låt f vara n gånger deriverbar och definierad i en omgivning av 0, sådan att $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ är kontinuerlig. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!} x^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(\alpha)}{n!} x^n$$

för något $\alpha \in [0, x]$. Kring en godtycklig punkt a blir formeln

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\alpha)}{n!} (x-a)^n \tag{6}$$

för något $\alpha \in [a, x]$.

Bevis Vi beviser satsen först för $a = 0$. Det är klart att formeln stämmer för $x = 0$, så bilda

$$C = \frac{f(x) - p(x)}{x^n}, x \neq 0.$$

Då är beviset ekvivalent med att visa att $Cn! = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\alpha)$ för et lämpligt α.

Notera att $\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0) = \frac{\mathrm{d}^i p}{\mathrm{d}x^i}(0), i = 0, \ldots, n-1$, och bilda

$$g(t) = f(t) - p(t) - Ct^n \implies \frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}x^i}(0) = 0, i = 0, \ldots, n-1.$$

Från definitionen är även $g(x) = 0$, och eftersom g är kontinuerlig finns det enligt Rolles sats $x_1 \in (0, x)$ så att $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_1) = 0$. Et motsvarande argument användt flera gånger ger att det finns $x_n \in (0, x_{n-1}) \subseteq [0, x]$ så att $\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n}(x_n) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n}(x_n) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_n) - Cn!,$$

och nollstället ger önskad likhet.

För att visa satsen kring något $a \neq 0$, bilda $g(t) = f(t+a)$. Denna uppfyller förutsättningarna för formeln vi har bevist, vilket ger

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!} t^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}x^i}(\alpha_0)}{n!} t^n = f(t+a), \alpha_0 \in [0, t].$$

Vi använder att $\frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}t^i}(t) = \frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}(t+a), i = 0, \ldots, n$ för att få

$$f(t+a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}(a)}{i!} t^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}(\alpha_0 + a)}{n!} t^n, \alpha \in [0, t].$$

Definiera $x = t + a$ och $\alpha = \alpha_0 + a \in [a, x]$ för att få

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}(a)}{i!} t^i + \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}(\alpha)}{n!} t^n, \alpha \in [a, x].$$

Taylors formel och stora ordo Låt f vara n gånger deriverbar och $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ vara kontinuerlig i en omgivning av 0. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(0)}{i!} x^i + \mathcal{O}(x^n).$$

Bevis

6 Serier

6.1 Definitioner

Delsummor Låt $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Den motsvarande delsumman är

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Serier En serie definieras som

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Konvergens Om $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ existerar, är serien konvergent mot dens summa. Annars är den divergent.

Geometriska serier En geometrisk serie är på formen $a_i = x^i$.

Absolut konvergens Serien $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ är absolutt konvergent om $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ är konvergent.

Taylorserier Låt f vara oändligt deriverbar. Funktionens Taylorserie kring a är

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}}{i!} (x-a)^i.$$

Konvergensradie Enligt ekvation 6 är

$$f(x) - p_{n-1}(x) = R_n(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\alpha)}{n!}(x-a)^n.$$

f konvergerar mot sin Taylorserie om denna resttermen går mot 0 när $n \to \infty$ för ett givet x. Detta händer för x så att $|x-a| < r$, där r är Taylorseriens konvergensradie.

6.2 Satser

Seriers egenskaper Låt $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i, \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ vara två konvergenta serier. Då gäller

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c\sum_{i=1}^{\infty} a_i, c \in \mathbb{R}.$$

Bevis

Konvergens och termernas beteende Om $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ är konvergent är $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Bevis Låt s_n beteckna seriens delsumma och S dens summa. Vi har

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Om serien är konvergent, kan vi räkna ut gränsvärdet enligt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

Summan av en geometrisk serie Om $|x| < 1$ är

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Bevis Betrakta $s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}$. Detta ger

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Om $|x| < 1$ har man

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Jamförelse av termer och konvergens Låt $0 \le a_i \le b_i$ för alla i. Då gäller att

- om $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ är konvergent är $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.
- om $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ är divergent är $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

Bevis

Kvoten av termer och konvergens Låt $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ vara två positiva serier vars termer uppfyller

$$\lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{b_i} = K \neq 0.$$

Då konvergerar $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ om och endast om $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergerar.

Bevis

Absolut konvergens och konvergens En absolut konvergent serie är konvergent.

Bevis

Summan av potenser Serien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis

7 Integraler

7.1 Definitioner

Trappfunktioner En trappfunktion på intervallet $[a, b]$ är på formen

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1, a \leq x \leq x_1 \\ c_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots \\ c_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Mängden av alla x_i kallas en uppdelning av intervallet och intervallerna $[x_{i-1}, x_i]$ kallas delintervall av uppdelningen.

Integralen av en trappfunktion Låt Ψ vara en trappfunktion. Då definieras integralen av denna som

$$\int_a^b \Psi(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Övertrappor och undertrappor En övertrappa Ψ för en funktion f är en funktion så att

$$f(x) \leq \Psi(x).$$

Undertrappor definieras analogt. Integralerna av dessa kallas översummor och undersummor.

Integrerbarhet Låt f, definierad på $[a, b]$, vara en begränsad funktion, $L(f)$ vara mängden av alla undersummor till f och $U(f)$ mängden av alla översummor till f. $L(f)$ är uppåt begränsad av talen i $U(f)$ och vice versa, så $\sup L(f), \inf U(f)$ existerar. Om

$$\sup L(f) = \inf U(f)$$

är f integrerbar.

Integralen Låt f vara integrerbar på $[a, b]$. Då definieras integralen av f på intervallet som

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup L(f).$$

Byte av ordning av integrationsgränser

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Integration med oändliga gränser Låt f vara integrerbar på $[a, R]$ för varje $R > a$. Då definieras

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

och integration från $-\infty$ analogt. Om gränsvärdet existerar, är integralet konvergent. Annars är det divergent.

Lokala integraler Låt $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ vara integrerbar i $[a + \varepsilon, b]$, för varje litet ε. Då är

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

och analogt om f ej är definierad i b eller i någon inre punkt av $[a, b]$. Om sådana gränsvärden existerar är integralen konvergent. Annars är den divergent.

Riemannsummor Låt $P_n = \{x_{n,i}\}_{i=0}^{N(n)}$ vara en uppdelning av $[a, b]$ för ett givet n med $N(n)$ delintervall. Låt $\alpha_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$, $\Delta_{n,i} = x_{n,i} - x_{n,i-1}$. Summan

$$\sum_{i=1}^{N(n)} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i}$$

är en Riemannsumma för f i $[a, b]$.

7.2 Satser

Integralen och ε Låt f vara begränsad på $[a, b]$. Då är f integrerbar om och endast om det för varje ε finns en övertrappa Ψ och en undertrappa Φ till f sådana att

$$\int_a^b \Psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Bevis

Summor mot integraler Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^n$ vara en uppdelning, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ och $M_i = \max f(x), m_i = \min f(x)$ på $[x_{i-1}, x_i]$. Då gäller att

$$\sum_{i=0}^n M_i\Delta_i \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\sum_{i=0}^n m_i\Delta_i \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

då $\max \Delta_i \to 0$.

Bevis

Integralens egenskaper Låt f vara integrerbar på $[a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Om $f(x) \leq g(x)$ på $[a,b]$ gäller

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis

Medelvärdesatsen för integraler Låt f, g vara kontinuerliga på $[a,b]$ och $g \geq 0$. Då finns det ett $\alpha \in (a,b)$ sådant att

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Specialfall Välj $g(x) = 1$. Då blir satsen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\alpha)(b-a).$$

Bevis

Analysens huvudsats Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$. Då är

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

en primitiv funktion till f på $[a,b]$.

Bevis

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Enligt specialfallet av medelvärdesatsen finns ett $\alpha \in (x, x+h)$ sådant att

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x+h-x}{h}f(\alpha) = f(\alpha).$$

När h går mot 0 går vänstersidan mot $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)$ och högersidan mot $f(x)$, och beviset är klart.

Primitiva funktioner och integralers värde Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Bevis Låt $G(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, där F är någon primitiv funktion till f. Enligt analysens huvudsats är $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = f$. Vi ser även att $G(x) = F(x) + C$. Vi jämförar de två uttryckerna vi har för G i a och ser att $C = 0$. Då är $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$, och beviset är klart.

Partiell integration Låt $u, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ vara kontinuerliga på $[a, b]$ och v vara en primitiv funktion till $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Då gäller:

$$\int_a^b u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = uv(b) - uv(a) - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis Där u, v är deriverbara har vi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} &= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\ u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

Båda sider är integrerbara enligt sats som inte finns i boken, så vi integrerar och användar analysens huvudsats:

$$\begin{aligned}\int_a^b u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= uv(b) - uv(a) - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Variabelbyte Låt $g, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ vara kontinuerliga i $[a, b]$ och låt f vara kontinuerlig i $(g(a), g(b))$. Då gäller:

$$\int_a^b f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis Enligt kedjeregeln har vi

$$\frac{\mathrm{d}(F \circ g)}{\mathrm{d}x}(x) = f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x),$$

där F är en primitiv funktion till f. Vänstersidan är integrerbar eftersom f är kontinuerlig, och högersidan är integrerbar eftersom $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ även är kontinuerlig, så vi integrerar på båda sidor.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}F \circ g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vänstersidan är

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}(F \circ g)}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

och beviset är klart.

Integration av potenser över obegränsade intervall Integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis

Jämförelsessats för två integraler Låt f, g vara integrerbara i $[a, R]$ för alla $R > a$, sådana $0 \neq f(x) \neq g(x)$ för varje $x > a$. Då gäller att om $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent är även $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, och om $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ är divergent är även $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ divergent.

Bevis Övning till läsaren.

Gräns av kvot och integral Låt f, g vara positiva och integrerbara i $[a, R]$ för alla $R > a$ sådana att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0.$$

Då är $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent om och endast om $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Bevis Övning till läsaren.

Samband mellan summor och integraler Låt f vara en avtagande funktion i $[m, n]$, där m, n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller:

$$\sum_{i=m+1}^{n} f(i) \leq \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=m}^{n-1} f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leq \sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(m).$$

Låt f vara en växande funktion i $[m, n]$, där m, n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller:

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) \leq \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=m+1}^{n} f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(m) \leq \sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n).$$

Bevis De två summorna i det första sättet av olikheter representerar areaor av $n - m - 1$ rektangler med brädd 1 jämnt fördelade under grafen till f på intervallet. I det avtagande fallet bestämms höjden till rektanglerna i den första summan av funktionsvärdet vid rektanglets högra kant, medan höjden till rektanglerna i den andra summan bestämms av funktionsvärdet vid rektanglets vänstra kant. Eftersom f är avtagande är den andra summan störra. Eftersom f är avtagande, har integralet av f på intervallet ett värde mellan dessa två summorna. Den andra olikheten fås vid att betrakta de två första och två sista delarna av den första olikheten och addera en lämplig term för att få samma summa. Beviset är analogt i det växande fallet.

Cauchys integralkriterium Låt f vara positiv och avtagande i (m, ∞). Då är $\sum\limits_{i=m}^{\infty} f(i)$ konvergent om och endast om $\int\limits_{m}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Bevis

Integral av potenser över 0 Integralen

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x$$

är konvergent om och endast om $q < 1$.

Bevis

Jämförelsessatser för lokala integraler Låt f, g vara integrerbara i $[a+\varepsilon, b]$ för alla $\varepsilon > 0$, sådana att $0 \neq f(x) \neq g(x)$ för varje $x \in (a, b]$. Då gäller att om $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent är även $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, och om $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ är divergent är även $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ divergent.

Bevis Övning till läsaren.

Gräns av kvot och lokalt integral Låt f, g vara positiva och integrerbara i $[a+\varepsilon, b]$ för alla $\varepsilon > 0$ sådana att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0.$$

Då är $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent om och endast om $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Bevis Övning till läsaren.

Riemannsummor och integraler Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$ och låt $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av uppdelningar av intervallet sådana att

$$\max\{\Delta_{n,i} :\ 1 \leq i \leq N(n)\} \to 0$$

då $n \to \infty$. Då gäller att

$$\sum_{i=1}^{N(n)} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i} \to \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

då $n \to \infty$.

Bevis

8 Integralens tillämpningar

8.1 Volymberäkning

Rotation kring x-axeln Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Om vi roterar regionen begränsad av linjerna $x = a, x = b$, x-axeln och grafen till f kring x-axeln bildas en kropp vars volym vi ska beräkna. Vi approximerar volymet med n cylindrar. Dessa ligger under grafen, är centrerade i x-axeln, har lik höjd och är jämnt fördelade på $[a, b]$. Varje cylinder har då radius $f(x_i)$ och höjd $\frac{b-a}{n} = \Delta$. Det approximerade volymet är då

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta.$$

Denna summan har formen till en Riemannsumma, och går då för stora n mot kroppens volym

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Rotation kring y-axeln Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Om vi roterar regionen begränsad av linjerna $x = a, x = b$, x-axeln och grafen till f kring y-axeln bildas en kropp vars volym vi ska beräkna. Vi approximerar volymet med n cylinderskal. Dessa är centrerade i y-axeln, har lik tjocklek och ligger lag för lag på $[a, b]$ under grafen. Vart skal har då tjocklek $\frac{b-a}{n} = \Delta$ och höjd $f(x_i)$. Det approximerade volymet är då

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi (x_{i+1}^2 - x_i^2) f(x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)(2x_i + \Delta)\Delta \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i) x_i \Delta + \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)\Delta.
\end{aligned}$$

Den första summan har formen till en Riemannsumma, och går då för stora n mot

$$2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Den andra summan går för stora n mot 0 eftersom summan går mot ett ändligt integral medan faktoren framför går mot 0. Då ges kroppens volym av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

9 Differentialekvationer

9.1 Definitioner

Ordinära differentialekvationer En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation som innehåller en eller flere envariabelfunktioner och deras derivator.

Ordning En differentialekvations ordning är ordningen av dne högsta derivatan som är i ekvationen.

Linjära ODE En linjär differentialekvation är på formen

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x) \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i} = h. \tag{7}$$

Homogena och inhomogena ODE Betrakta ekvation 7. Om $h = 0$ är ekvationen homogen. Annars är den inhomogen.

Karakteristisk polynom för ODE av andra ordning Låt $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$ vara en differentialekvation. Dens karakteristiska polynom är

$$r^2 + ar + b.$$

Karakteristisk ekvation för ODE av andra ordning Låt $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$ vara en differentialekvation. Dens karakteristiska ekvation är

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Separabla differentialekvationer En separabel differentialekvation är på formen

$$g(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = f(x).$$

9.2 Satser

Lösning av homogena ODE av första ordning En funktion y löser

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0, a \in \mathbb{R}$$

om och endast om

$$y = Ce^{-ax}, C \in \mathbb{R}.$$

Bevis

Lösning av homogena ODE av andra ordning Låt $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by = 0, a, b \in \mathbb{R}$ vara en differentialekvation och r_1, r_2 rötterna till den karakteristika ekvationen. En funktion y löser ekvationen om och endast om:

- I fallet $r_1 \neq r_2$ och båda är reella är

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x},$$

- I fallet $r_1 = r_2$ är

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{r_1x},$$

- I fallet $r_1 = c + di, r_2 = r_1*$, med $d \neq 0$, är

$$y(x) = e^{cx}(C_1 \cos{(dx)} + C_2 \sin{(dx)}),$$

med $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bevis

Lösning av separabla differentialekvationer Låt $g(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$ vara en separabel differentialekvation sådan att g har en inverterbar primitiv funktion G och f har en primitiv funktion F. Då är lösningen till differentialekvationen

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), C \in \mathbb{R}.$$