Sammanfattning av SI1146 Vektoranalys

Yashar Honarmandi

23 april 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Integraler och derivator

Linjeintegraler En linjeintegral skrivs på formen

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Det representerar hur mycket av ett vektorfält som är parallellt med en bana i rummet. Om det låter oklart, tänk att vektorfältet $\mathbf{v}$ puttar på en partikel som rär sig längs med banan C.

Rotation Från en linjeintegral kan rotationen definieras som

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

där A är arean som omslutas av kurvan C och $\mathbf{n}$ är normal på C. Denna tolkas fysikalisk som tätheten av virvlar i fältet $\mathbf{v}$ som roterar normalt på $\mathbf{n}$.

Flödesintegraler En flödesintegral skrivs på formen

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Den representerar hur mycket av ett vektorfält som flöder genom ytan S.

Divergens Från en flödesintegral kan divergensen definieras som

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

där V är volymen som omslutas av ytan S. Denna tolkas fysikalisk som tätheten av källor till fältet $\mathbf{v}$.

Potentialer Potentialer förekommer i två former: skalärpotentialer och vektorpotentialer.

Ett vektorfält har ett skalärpotential om det kan skrivas som $\mathrm{grad}f$ för någon funktion f, som då betecknas som potentialet. För sådana fält gäller att $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ett vektorfält har ett vektorpotentiale om det kan skrivas som $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ för något vektorfält $\mathbf{A}$, som betecknas vektorpotentialet. För sådana fält gäller att $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$.

Om ett vektorfält kan skrivas som en derivata på några av dessa två sätten, är det ekvivalent med att fältet har en potential.

Laplaceoperatorn Vi definierar Laplaceoperatorn för skalärer och vektorer som

$$\Delta f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} f,$$
$$\Delta \mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{v}.$$

Gauss' sats

$$\int\limits_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_{V} \mathrm{d}V \, \mathrm{div}\mathbf{v}$$

Stokes' sats

$$\int\limits_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{S} \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Gauss' sats på universalform

$$\int\limits_{\partial V} \mathrm{d}S_i \, f = \int\limits_{V} \mathrm{d}V \, \partial_i f.$$

f kan nu vara vad som helst.

Stokes' sats på universalform

$$\int\limits_{S} \mathrm{d}S_i \, \varepsilon_{ijk} \partial_j f = \int\limits_{\partial S} \mathrm{d}x_k \, f.$$

f kan vara vad som helst.

2 Indexräkning

I indexräkning använder man beteckningen

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i,$$

vilket förkortas till

$$[\mathbf{a}]_i = a_i.$$

Det är konvention att summan över i görs från 1 till 3.

Derivator är intressanta att göra även med indexräkning, och då använder vi beteckningen $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$.

En viktig grej som dyker upp i indexräkning-samanhang är Levi-Civitas symbol, definierat som $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} = 1$ när $(i_1, \ldots, i_n) = (1, \ldots, n)$ eller när indexerna är en jämn permutation av denna första kombinationen, -1 om indexerna är en udda permutation av den första kombinationen och 0 annars. Vad är jämna och udda permutationer? En permutation är jämn om den fås vid att byta plats på två element ett jämnt antal gånger, och en motsvarande definition gäller för udda permutationer.

En annan viktig grej är Kronecker-deltat, definierat som

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Några viktiga konsekvenser av detta är

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_i b_i, \\ [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \\ [\mathrm{grad}\phi]_i &= \partial_i \phi, \\ \mathrm{div}\mathbf{v} &= \partial_i v_i, \\ [\mathrm{rot}\mathbf{v}]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j b_k. \end{aligned}$$

Gauss' och Stokes' satser kan då skrivas som

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial V} \mathrm{d}S_i\, A_i &= \int\limits_{V} \mathrm{d}V\, \partial_i A_i, \\ \int\limits_{\partial S} \mathrm{d}r_i\, A_i &= \int\limits_{S} \mathrm{d}S_i\, \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k. \end{aligned}$$

3 Koordinatsystem

Ett koordinatsystem kan tänkas på som en avbildning från n-dimensionella kartesiska koordinater till andra koordinater som beskrivs av parametrar $u_1, \dots, u_n$. Vi krävjer att avbildningen ska vara inverterbar.

Ortogonalitet Vi säjer att koordinatsystemet är ortogonalt om $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u_i} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u_j} = 0$ för alla $i \neq j$. En ekvivalent definition är att alla koordinatytor ska vara normala.

Skalfaktorer Koordinatsystemets skalfaktorer definieras som

$$h_i = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u_i} \right|.$$

Enhetsvektorer Koordinatsystemets enhetsvektorer definieras som

$$\mathbf{e}_{u_i} = \frac{1}{h_i} \partial_{u_i} \mathbf{r}$$

utan summation.

Tillämpningar på linjeintegraler Med detta kan vi skriva

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_i \mathbf{e}_{u_i} \, \mathrm{d}u_i \, .$$

Tillämpningar på ytintegraler Med detta kan vi skriva

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \pm \mathbf{e}_{u_3} h u_1 \, \mathrm{d}u_1 \, h u_2 \, \mathrm{d}u_2 \, .$$

Tillämpningar på volymintegraler Med detta kan vi skriva

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_3 = \prod_{i=1}^{3} h_i \, \mathrm{d}u_i \, .$$

Gradient i godtyckligt koordinatsystem

$$[\mathrm{grad} f]_i = \frac{1}{h_i} \partial_{u_i} f.$$

Vi kan även tillämpa detta för att få

$$h_i = \frac{1}{|\mathrm{grad} u_i|}, \ \mathbf{e}_{u_i} = \frac{1}{|\mathrm{grad} u_i|} \mathrm{grad} u_i.$$

Divergens i godtyckligt koordinatsystem

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (\partial_{u_1} v_{u_1} h_2 h_3 + \partial_{u_2} h_1 v_{u_2} h_3 + \partial_{u_3} h_1 h_2 v_{u_3}).$$

Rotation i godtyckligt koordinatsystem

$$[\mathrm{rot}\mathbf{v}]_i = \frac{1}{h_j h_k} \varepsilon_{ijk} \partial_{u_j} h_k A_k.$$

Allmäna koordinatsystem I allmäna koordinatsystem inför vi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \ldots, u^n)$, med indexet som superskript i stället för subskript. Vi definierar då vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u^i} = \partial_i \mathbf{r}, \\ \mathbf{E}^i &= \mathrm{grad} u^i, \end{aligned}$$

där dessa ej normeras. Det gäller att

$$\mathbf{E}_i = h_i \mathbf{e}_i, \ \mathbf{E}^i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i.$$

Vi skriver då

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{E}_i = v_i \mathbf{E}^i.$$

Vi definierar även den metriska tensorn som

$$g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i,\ g^{ij} = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}^i.$$

I ortogonala koordinatsystem gäller att

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij},\ g^{ij} = \frac{1}{h_i^2}\delta_{ij}.$$

4 Tensorer

Låt oss betrakta två observatörer A och B. Dessa beskriver någon storhet som vektorn $\mathbf{v}$. I de två observatörerna sina koordinatsystem skrivs $\mathbf{v}$ som $v_i\mathbf{e}_i$ respektiva $v_i'\mathbf{e}_i'$. Vi söker någon metod att transformera oss mellan dessa.

Vi kan skriva komponenten v_i' som

$$v_i' = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot (v_j\mathbf{e}_j) = L_{ij}v_j,$$

där vi har användt indexnotation och definierat vinkeln

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j.$$

Detta definierar en matris L som låter oss transformera mellan koordinatsystemerna.

En matris L kan representera en koordinattransform om och endast om

$$LL^T = L^TL = I.$$

För att visa detta, skriv

$$(LL^T)_{ij} = L_{ik}L_{kj}^T = L_{ij}L_{jk}.$$

Om L har samma struktur som vi förväntade för koordinattransformationer, har man

$$L_{ij}L_{jk} = (\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{e}_k).$$

Vi kommer ihåg att vi har

$$\mathbf{e}_i' = (\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j$$

och kan då skriva

$$L_{ij}L_{jk} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j'.$$

Vi jobbar med ortogonala koordinatsystemer, vilket ger $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij}$, vilket skulle visas.

Vi har även att $\det(L) = \pm 1$. För att visa detta, skriv

$$1 = \det(I) = \det\big(LL^T\big) = \det(L)\det\big(L^T\big) = \det(L)^2.$$

Mängden av alla koordinattransformationer som uppfyller dessa relationerna kallas $O(3)$, där O står för ortogonal. Mängden av alla transformationer i $O(3)$ vars matriser har positiv determinant kallas $SO(3)$, där S står för speciell. Vid att kombinera dessa med sammansättning av flera transformationer, definierar de en gruppstruktur.

Gruper uppfyller

- Om g, g' är i grupen G, är gg' i G.
- Det finns ett element e i G så att $eg = ge = g$ för alla g.
- För alla g finns det ett g^{-1} så att $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
- $a(bc) = (ab)c$ för a, b, c i G.

Vi definierar rotationstransformen kring $\mathbf{e}_i$-axeln med en vinkel α. Då gäller att alla transformationer i $SO(3)$ kan skrivas som $L = L^3_\gamma L^1_\beta L^3_\alpha$, där de tre vinklarna kallas Eulervinklar.

Tensorprodukt Tensorprodukten mellan två tensorer av ordning 1 definieras som

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} = a_i b_j.$$

Vi tar det ssom ett axiom att tensorprodukten bevarar linjäritet.

Generering av tensorer Tensorer av ordning 2 genereras med hjälp av tensorprodukten mellan två tensorer av ordning 1. Vi kan då skriva

$$T = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Vi låter alla $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ vara en bas för vektorrummet $V \otimes V$.

Transformation av tensorer Vi har redan definierat hur man transformerar vektorer. Vi definierar transformationen av en tensor av ordning 2 som

$$T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl}.$$

För tensorer av ordning 3 definieras det som

$$T'_{ijk} = L_{il}L_{jm}L_{kn}T_{lmn}.$$