Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

1 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ osv.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör V till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp k med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x+y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R},\ x, y \in V$.
- $(c+d)x = cx + dx,\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$(x+W)+(y+W)=x+y+W,$$
$$a(x+W)=(ax)+W.$$

Linjärt oberoende mängder S är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla x_i är elementer i S.

Linjärt hölje Det linjära höljet Span (S) av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S.
- det minsta delrummet som innehåller S.
- $\bigcap\limits_{S\subset W} W$.
- $\sum\limits_{x\in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfir En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$T(x+y)=T(x)+T(y),$$
$$T(cx)=cT(x), c\in\mathbb{R}.$$

Vi säjer att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Isomorfir En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om B är en bas för V och D är en bas för W kan vi ordna en matris för $L : V \to W$ genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in I} a_{ji} y_j,$$

där alla $x_i \in B$, alla $y_i \in D$ och I är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om I är oändlig.

2.2 Satser

Basbyte Låt L vara en avbildning från V till W. Låt $]_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen B i definitionsmängden till D i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från A till B i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

Bevis Kommutativt diagram

Koordinater Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V. Detta ger en isomorfi

$$V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$

$$x = \sum a_i xi \to \{a_i\}_{i \in I}.$$

Bevis Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \to \sum a_i xi$$

ger en avbildning $k^I \to V$ som är injektiv eftersom B är linjärt oberoende och surjektiv eftersom B spänner upp V.

Kärna och injektivitet En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

Bevis

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

Kvotavbildning Om $W \subseteq V$ är ett delrum , ger $x \to x + W$ en linjär kvotavbildning från V till $\frac{V}{W}$.

Bevis Vi har

$$\begin{aligned} x + y &\to x + y + W = x + W + y + W, \\ ax &\to ax + W = a(x + W), \end{aligned}$$

och beviset är klart.

Isomorfisatsen

$$\mathrm{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

Bevis Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\mathrm{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty L är linjär. Φ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) : L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. Φ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något x ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \mathrm{Im}(L)$ ett x så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

Dimensionssatsen Om V är ändligdimensionellt är $\mathrm{rank}(L) + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

Bevis

Faktorisering med kvotrum Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \to W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

Bevis Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.