Sammanfattning av SF1544 Numeriska metoder, grundkurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

14 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1544 Numeriska metoder, grundkurs.

Innehåll

1 Användbar matte

Allmän begränsning av globalt fel Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, y(t)),$$
$$y(a) = b,$$

löst på $[a, T]$, där f är Lipschitzkontinuerlig. Betrakta en numerisk lösning med lokalt fel begränsad av Mh^{p+1}. Då begränsas det globala felet av

$$|y(T) - y_N| \leq \frac{e^{L(T-a)}M}{L} h^p.$$

Bevis Vi inför $y(t; t_n)$ som den exakta lösningen som startar i (t_n, y_n). Det globala felet ges då av

$$\begin{aligned} |y(T) - y_N| &= |y(T) - y(T; t_{N-1}) + y(T; t_{N-1}) + \cdots - y(T; t_1) + y(T; t_1) - y_N| \\ &\leq |y(T) - y(T; t_{N-1})| + |y(T; t_{N-1}) - y(T; t_{N-2})| + \cdots + |y(T; t_1) - y_N|. \end{aligned}$$

Den första termen ges simpelthen av det lokala felet. Satsen om entydighet av lösning för en sådan differentialekvation ger vidare

$$|y(T; t_i) - y(T; t_{i-1})| \leq e^{L(T-t_i)} |y(t_i; t_i) - y(t_i; t_{i-1})|.$$

Det som står kvar i absolutbeloppstecknet är det lokala felet, eftersom den vänstra termen är exakt och den högra kommer från en iteration. Detta ger

$$|y(T; t_i) - y(T; t_{i-1})| \leq e^{L(T-t_i)} M h^{p+1} = e^{L(N-i)h} M h^{p+1}$$

och vidare

$$\begin{aligned} |y_N - y(T)| &\leq Mh^{p+1} + Mh^{p+1}e^{Lh} + \cdots + Mh^{p+1}e^{L(N-1)h}. \\ &= Mh^{p+1}\frac{1 - e^{LNh}}{1 - e^{Lh}} \\ &= Mh^{p+1}\frac{e^{LNh} - 1}{e^{Lh} - 1} \\ &\leq Mh^{p+1}\frac{e^{LNh}}{Lh}, \end{aligned}$$

och beviset är klart.

2 Grundläggande definitioner för numeriska metoder

3 Lösning av ekvationer

Fixpunktsmetoden Betrakta ekvationen

$$x = g(x).$$

Fixpunktsmetoden är en enkel iterationsmetod för att lösa denna ekvationen, med den enkla iterationsformeln

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `x0` där det itereras tills lösningen stämmer med en tolerans `t` är:

```
define g(x)
input x0
input t
while abs(x - g(x)) > t
        x = g(x)
end
```

Konvergens Om $g \in C^1$, $\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(\alpha)\right| < 1$ och α är en fixpunkt. finns det en omgivning till α så att om x_0 är i denna omgivningen, går $x_n \to \alpha$. Metoden konvergerar linjärt med reduktionsfaktor $S = \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(\alpha)\right|$.

För att visa detta, skriver vi

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c)(x_n - \alpha),$$

där vi har användt medelvärdesatsen och det faktum att α är en fixpunkt. Vidare, eftersom $g \in C^1$ finns det en omgivning till α så att $\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right| \leq \frac{S+1}{2}$. Om x_0

4 Lösning av ordinarie differentialekvationer

Eulers metod (framåt) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= f(t, y(t)),\\ y(a) &= b.\end{aligned}$$

Eulers metod går ut på att

1. Dela upp intervallet vi vill lösa problemet på i diskreta steg, där steg n finns i punkten $t_n = a + nh$, där h är steglängden.

2. Linjarisera problemet till

$$y_{n+1} - y_n = f(t_n, y_n)h,$$

där $y_n = y(t_n)$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `t0` och `y0`, steglängd `h` och `N` steg är:

```
define f(t, y)
input t0 and y0
input h and N
t = t0
y = y0
for 1 < i < N
        y = y + f(t, y)*h
        t = t + h
end
```

Felanalys Om vi betraktar det första steget i iterationen, har man lokalt

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(t_0) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(\alpha)(t_1 - t_0)^2 \\ &= y(t_0) + hf(t_0, y_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(\alpha)h^2. \end{aligned}$$

Om andraderivatan av y är begränsad, ger detta

$$|y_1 - y(t_1)| \leq Mh^2,$$

och det lokala felet är $O\left(h^2\right)$.

Det globala felet kan nu uppskattas som det lokala felet multiplicetar med antal steg. Om vi försöker lösa ekvationen på intervallet $[a, T]$ med N steg, har man

$$Nh = T - a,$$

och det globala felet kan uppskattas som

$$|y_N - y(t_N)| \approx h^2 \frac{T - a}{h} = Ch.$$

Eulers metod för system av differentialekvationer Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Eulers metod går ut på att

1. Dela upp intervallet vi vill lösa problemet på i diskreta steg, där steg n finns i punkten $t^n = a + nh$, där h är steglängden.

2. Linjarisera problemet till

$$y^{n+1} - y_n = \mathbf{f}(t^n, y^n)h,$$

där $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}(t^n)$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `t0` och `y0`, där denna är en lista med `M` element, steglängd `h` och `N` steg är:

```
define f(t, y)
input t0 and y0
input h and N
t = t0
y = y0
for 1 < i < N
        for 1 < j < M
                y[j] = y[j] + f[j](t, y)*h
        end
        t = t + h
end
```

Observera att `f` nu är en lista av `M` funktioner, och kom ihåg att högre ordningens ekvationer med en funktion kan skrivas som ett system av differentialekvationer.