Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

18 januari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter $x_1, \ldots, x_n$. Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; i = 1, \ldots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerad i $\mathbf{a}$ med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum $\mathbf{a}$.

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M.

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M:s komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en randpunkt till M om varje öppet klot kring $\mathbf{a}$ innehåller punkter i M och M:s komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M. Denna betecknas ∂M.

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M:s komplement och sluten om ∂M är i M.

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

2.2 Satser