

# Sammanfattning av SF1672 Linjär algebra

Yashar Honarmandi

20 december 2017

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av kursen SF1672 Linjär algebra. Den innehåller viktiga och nyttiga definitioner och satser, samt vissa algoritmer för att lösa vissa typer av problem.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Vektorer</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Matriser</b>	<b>1</b>
2.1	Definitioner . . . . .	1
2.2	Satser . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Vektorrum</b>	<b>5</b>
3.1	Definitioner . . . . .	5
3.2	Bevis . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Avbildningar</b>	<b>6</b>
4.1	Definitioner . . . . .	6
4.2	Satser . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Inreprodukt</b>	<b>9</b>
5.1	Definitioner . . . . .	9
5.2	Satser . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Geometri</b>	<b>9</b>
6.1	Definitioner . . . . .	9
6.2	Satser . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Volymer</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Algoritmer</b>	<b>12</b>

# 1 Vektorer

Begreppet vektor används här om elementer i vektorrum (eller inreprodukttrum).

## 1.1 Definitioner

**Linjärt hölje** Det linjära höljet av vektorerna  $v_1, \dots, v_n$  är

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

**Linjärt oberoende vektorer** Vektorerna  $v_1, \dots, v_n$  är linjärt oberoende om ekvationen

$$\sum_{i=1}^n t_i v_i = 0$$

endast har lösningen  $t_i = 0$  för  $i = 1, \dots, n$ . 0 refererar här till vektorrummets nollelement.

**Ortogonal mängd** Låt  $\{u_1, \dots, u_n\}$  vara en mängd elementer så att  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$  för alla  $i \neq j$ . En slik mängd kallas en ortogonal mängd.

**Enhetsvektorer i  $\mathbb{R}^m$**  Vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

i  $\mathbb{R}^m$  kallas enhetsvektorer. Man har att  $\text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m) = \mathbb{R}^m$ .

**Skalarprodukt** För två vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  med koefficienter  $u_i$  och  $v_i$  definierar man

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Detta är inreproduktet i  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Satser

**Ortogonalitet och linjärt beroende** Vektorerna i en ortogonal mängd är linjärt oberoende.

**Bevis** Många multiplikationer.

# 2 Matriser

## 2.1 Definitioner

**Matris-vektor-produkt** Betrakta  $m \times n$ -matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

och vektoren i  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrisproduktet  $A\mathbf{x}$  definieras som vektoren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

i  $\mathbb{R}^m$ .

**Homogena ekvationssystem** Ett homogent ekvationssystem kan skrivas på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Motsatsen kallas inhomogena ekvationssystem.

**Addition av matriser** För två matriser  $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$  har man

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

**Multiplikation av matriser med konstanter** För en matris  $A = (a_{i,j})$  har man

$$cA = (ca_{i,j}), c \in \mathbb{R}.$$

**Diagonalmatriser** En matris  $D = (d_{i,j})$  kallas en diagonal matris om  $d_{i,j} = 0$  när  $i \neq j$ .

**Transponat** För en matris  $A = (a_{i,j})$  definieras transponatet som  $A^T = (a_{j,i})$ .

**Matrismultiplikation** Matrismultiplikation av en  $m \times p$ -matris  $A$  och en  $p \times n$ -matris  $B$  ges av

$$AB = C : c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k}b_{k,j}.$$

**Inversen av en matris** En matris  $A$  sin invers  $A^{-1}$  uppfyller

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

**Elementärmatriser** En matris  $E$  är en elementärmatris om produktet  $EA$  kan fås vid att göra en radoperation på  $A$ .

**Rang** Rangén till en matris, skrivit som  $\text{rank}A$ , är  $\dim(\text{Col}A)$ .

**Determinant** För en  $n \times n$ -matris  $A$  ges determinanten av

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \end{aligned}$$

där  $A_{ij}$  är matrisen  $A$  utan rad  $i$  och kolumn  $j$ . De två summorna visar att man kan räkna ut determinanten vid att utveckla den längs en given kolumn  $j$  i första fallet eller en given rad  $i$  i det andra fallet. Formelen är rekursiv, och base case är  $n = 2$ , som ges av

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd$$

eller  $n = 1$ , som ges av

$$|a| = a.$$

**Egenvektorer, egenvärden och matriser** Egenvektorer och egenvärden definieras analogt för matriser som för linjära avbildningar. För detaljer, se 4.1.

**Similära matriser och diagonalisering** Två matriser  $A$  och  $B$  är similära om det finns en matris  $P$  så att

$$A = PBP^{-1}.$$

Om  $B$  är en diagonalmatris säjs  $A$  vara diagonaliserbar.

**Ortogonal diagonaliserbarhet**  $n \times n$ -matrisen  $A$  är ortogonalt diagonaliserbar om den är diagonaliserbar och det finns en ortonormal bas av egenvektorer. För mer om ortogonalitet, se 5.1.

**Ortogonal matriser** En ortogonal matris är en matris med ortonormala kolumner.

**Markovkedjor** En markovkedje representeras av en matris så att kolumnerna summeras till 1. Sådana matriser kan användas t.ex. för att beskriva stokastiska processer (processer baserade på sannolikhet).

## 2.2 Satser

**Matriskolumner och linjära höljen** Följande påståenden är ekvivalenta:

- a)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har lösning för varje  $\mathbf{b}$ .
- b) Varje  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  är en linjär kombination av kolumnerna i  $A$ .
- c)  $\text{Span}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \mathbb{R}^m$ , där  $\mathbf{A}_i$  är kolumnerna i  $A$ .
- d)  $A$  kan reduceras till en matris med  $m$  ledande ettor.

**Bevis** Ekvivalensen till a, b och c är vel trivial eller någonting.

Låt  $U$  vara en echelonform av  $A$ . Då kan ekvationssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  sin totalmatris  $[A|\mathbf{b}]$  radreduceras till  $[U|\mathbf{d}]$  för något  $\mathbf{d}$ .

Om  $\mathbf{d}$  är sann, har systemet en unik lösning, och a är även uppfylld. Om  $\mathbf{d}$  ej är sann, låt den sista raden i  $U$  endast vara nollor och låt det siste elementet i  $\mathbf{d}$  vara 1. Detta representerar ett inkonsekvent ekvationssystem. Radoperationerna kan reverseras till man får en totalmatris som representerar  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , som fortfarande är inkonsekvent. Då har systemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ej en lösning, och a är falsk. Detta beviser ekvivalensen.

**Lösningen till inhomogena ekvationssystem** Om det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har lösningen  $\mathbf{x}_h$ , har det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lösningen  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_i$ , var  $\mathbf{x}_i$  är någon vektor som uppfyllar det inhomogena ekvationssystemet.

**Bevis**

**Linjärt beroende av kolumner i en matris** Kolumnerna i en matris är linjärt oberoende omm (om och endast om)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  endast har den triviala lösningen. Speciellt gäller det att om antal rader är mindre än antal kolumner är kolumnvektorerna linjärt beroende.

**Bevis**

**Inverterbarhet av en matris** En matris  $A$  är inverterbar om och endast om  $\det(A) \neq 0$ .

**Bevis**

**Rangsatsen** För en  $n \times m$ -matris  $A$  är  $\text{rank}A + \dim(\text{Null}A) = m$ .

**Bevis**

**Determinanten för triangulära matriser** För en triangulär  $n \times n$ -matris  $A$ , dvs. en matris som har endast nollor över eller under diagonalen, ges determinanten av

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Bevis**

**Determinant och elementärmatriser** För en elementärmatris  $E$  har man

$$\det(E) = \begin{cases} -1, & E \text{ byter plats på två rader.} \\ 1, & E \text{ adderar en multipel av en rad till en annan.} \\ t, & E \text{ multiplicerar en rad med en skalär } t \neq 0. \end{cases}$$

och att

$$B = EA \implies \det(B) = \det(E)\det(A)$$

**Bevis**

**Determinant för matrisprodukt**

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**Bevis**

**Diagonaliserbarhet** En  $n \times n$ -matris  $A$  är diagonaliserbar om och endast om den har  $n$  linjärt oberoende egenvektorer. Detta ger även att kolumnerna i  $P$  är egenvektorerna till  $A$  och  $D$  är en diagonalmatris med egenvärden motsvarande kolumnerna i  $P$  på diagonalen.

**Bevis**

**Ortogonal diagonaliserbarhet** En matris är ortogonalt diagonaliserbar om den är symmetrisk, d.v.s.  $A = A^T$ , och den är diagonaliserbar.

**Bevis**

**Ortogonal matriser och längd** Låt  $A$  vara en ortogonal matris. Då är

$$|A\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|.$$

**Bevis**

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i \\ |A\mathbf{u}|^2 &= A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \left( \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i \cdot \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i \end{aligned}$$

Eftersom kolumnerna i  $A$  är ortogonala blir skalärprodukterna

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

även känd som Kronecker-deltafunktionen. Detta ger

$$|A\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 = |\mathbf{u}|_i^2.$$

**Spektralsatsen** Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris. Då gäller att:

- $A$  har  $n$  reella egenvärden, upp till multiplicitet.
- Dimensionen till egenrummet motsvarande ett givet egenvärde är lika med egenvärdets multiplicitet.
- Egenrummen är ortogonala.
- $A$  är ortogonalt diagonaliserbar.

**Bevis**

## 3 Vektorrum

### 3.1 Definitioner

**Grupper** En grupp  $G$  definieras av en mängd  $X$  och en binär operation  $\cdot$  på två elementer i  $X$  (multiplikationstecknet kommer ej skrivas ut). Denna operationen ska uppfylla

- operationen är associativ, dvs.  $a(bc) = (ab)c$ .
- gruppen är stängd under operationen, dvs. för  $a, b \in G$  är  $ab \in G$ .
- det finns ett enhetselement  $e$  så att  $ae = ea = a$ .
- det för varje element finns en invers så att  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ .

**Abelska grupper** En grupp är abelsk om den uppfyllar  $ab = ba$  för alla  $b, a \in X$ .

**Vektorrum** Om man definierar skalärmultiplikation med elementer i en abelsk grupp, bildar gruppen ett vektorrum  $V$  under addition om

- $cx \in V$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x \in V$ .
- $c(x + y) = cx + cy$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$ .
- $(c + d)x = cx + dx$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ .
- $c(dx) = (cd)x$ .
- $1x = x$ .

**Delrum** En delmängd  $V$  av ett vektorrum är ett delrum om

- $e \in V$ .
- $x, y \in V \implies x + y \in V$ .
- $cx \in V$  för alla  $c \in \mathbb{R}$ .

**Bas**  $v_1, \dots, v_k \in V$  är en bas för  $V$  om

- $\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$ .
- vektorerna i basen är linjärt oberoende.

Om vi kallar basen till  $V$  för  $\beta$  kan alla vektorer i  $V$  skrivas som basvektorer på följande sätt:

$$x = \sum_{i=1}^k c_i v_i,$$
$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Detta är en vektor i  $\mathbb{R}^k$ .

**Dimension** Dimensionen till ett vektorrum är antalet vektorer i basis.

### 3.2 Bevis

**Delrum i  $\mathbb{R}^n$**  Om  $V$  är ett delrum i  $\mathbb{R}^n$  kan det skrivas som  $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ .

**Bevis**

**Linjärt beroende och basstorlek** Låt  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  vara en bas för  $V$  och  $\{w_1, \dots, w_p\}$  vara vektorer i  $V$  med  $p > n$ . Då är  $\{w_1, \dots, w_p\}$  linjärt beroende.

**Bevis**

**Antal vektorer i en bas** Antalet vektorer i basen för ett delrum  $V$  är oberoende av valet av bas.

**Bevis**

**Val av bas** För ett delrum med dimension  $n$  är vilken som helst mängd av  $n$  linjärt oberoende vektorer i  $V$  en bas för  $V$ .

**Bevis**

**Bästa approximationers sats** Låt  $W$  vara ett delrum till  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Då gäller

$$|\mathbf{x} - \text{proj}_W(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{w}|, \mathbf{w} \in W.$$

**Bevis**

## 4 Avbildningar

### 4.1 Definitioner

**Avbildningar** En avbildning är en funktion som avbildar elementer från ett vektorrum till ett annat.

**Bilden till en avbildning** För en avbildning  $T(\mathbf{x}) : V \rightarrow W$  definierar man bildet till  $T$  som

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = T(\mathbf{x})\} \subset W.$$

Detta är ett delrum.



**Kärnan till en avbildning** För en avbildning  $T(\mathbf{x}) : V \rightarrow W$  definierar man kärnan till  $T$  som

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset V.$$

Detta är ett delrum.

**Linjära avbildningar** En avbildning  $T$  är linjär om

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}), \\ T(c\mathbf{x}) &= cT(\mathbf{x}), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Egenvektorer och egenvärden** Låt  $T : V \rightarrow V$  vara en linjär avbildning. Egenvektorerna till  $T$  är alla nollskilda vektorer  $\mathbf{x} \in V$  så att

$$T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}.$$

$\lambda$  är det motsvarande egenvärdet till  $\mathbf{x}$ .

**Egenrum** Låt  $\mathbf{x}$  vara en egenvektor med motsvarande egenvärde  $\lambda$  till avbildningen  $T$ . Då definieras egenrummet motsvarande  $\lambda$  enligt

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in V : T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}.$$

Merk att nollvektoren även inkluderas i  $E_\lambda$ , så att egenrummet är ett delrum.

**Karakteristisk polynom** Låt  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  med standardmatris  $A$ . Då är det karakteristiska polynomet (av grad  $n$ ) till  $T$

$$C(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

där  $I$  är identitetsmatrisen.

**Multiplicitet för egenvärden** Ett egenvärdes algebraiska multipliciteten är multipliciteten till detta egenvärdet i det karakteristiska polynomet. Ett egenvärdes geometriska multiplicitet är dimensionen till egenrummet motsvarande detta egenvärdet. Det kommer ej göras en distinktion i denna sammanfattning.

**Kvadratiske former** En kvadratisk form är en avbildning på formen

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{i,j} x_i x_j.$$

**Positiv och negativ definitet** En kvadratisk form  $Q$  är positivt definit om  $Q(\mathbf{x}) > 0$  för alla  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , och negativt definit om  $Q(\mathbf{x}) < 0$  för alla  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Om det finns ett nollställe, är  $Q$  antingen positivt eller negativt semidefinit. Om den ej hamnar i några av dessa kategorier, är  $Q$  indefinit.

**Kvadratiske kurvor** En kvadratisk kurva är lösningsmängden till ett andragradspolynom i  $n$  variabler.

## 4.2 Satser

**Avbildningar och enhetsvektorer** För en linjär avbildning  $T(\mathbf{x})$  har man att

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i T(\mathbf{e}_i)$$

där  $x_i$  är komponenterna av  $\mathbf{x}$ .

## Bevis

**Avbildningar och matriser** För en avbildning  $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  kan man definiera matrisen

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

var  $\mathbf{e}_i$  är enhetsvektorerna i  $\mathbb{R}^n$ . Då kan avbildningen skrivas som

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

**Bevis**

**Samansättning av linjära avbildningar** För två linjära avbildningar  $S, T$  är avbildningen  $S \circ T$  linjär.

**Bevis**

**Dimensionalitet och avbildningar** För en avbildning  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  är  $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = n$ .

**Bevis**

**Avbildningar med val av bas** Låt  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  vara en bas för delrummet  $V$ ,  $C$  en bas för delrummet  $W$  och  $T$  en linjär avbildning från  $V$  till  $W$ . Då ges avbildningen i koordinatvektorer av

$$[T(x)]_C = A[x]_B,$$

där  $A$  ges av

$$A = [[T(b_1)]_C \ \dots \ [T(b_n)]_C].$$

**Bevis**

**Karakteristisk polynom och egenvärden** Låt  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Egenvärden till  $T$  är lösningarna till  $C(\lambda) = 0$ , där  $C$  är det karakteristiska polynomet till  $T$ .

**Bevis**

**Eigenrum och dimensionalitet** Låt  $T$  vara en avbildning med  $p$  distinkta egenvärden. Då gäller:

- Dimensionen till egenrummet motsvarande något egenvärde är mindre än eller lika med multipliciteten till detta egenvärde.
- Standardmatrisen  $A$ , givet en avbildning mellan rum med samma dimensionalitet  $n$ , är diagonaliserbar om och endast om summan av egenrummens dimension är  $n$ .
- Om standardmatrisen är diagonaliserbar och  $B_k$  är en bas för egenrummet till egenvärdet  $\lambda_k$ , bilder samlingen av basvektorerna till alla  $B_i$  en bas för  $\mathbb{R}^n$ .

**Bevis**

**Diagonalisering och avbildningar** Låt  $A = PDP^{-1}$  vara standardmatrisen för en avbildning, och  $B$  en basis för  $\mathbb{R}^n$  bildat av kolumnerna i  $P$ . Då är  $D$  matrisen för avbildningen i bas  $B$ .

**Bevis**

**Definitet och egenvärden** Låt  $Q$  vara en kvadratisk form. Då gäller:

- $Q$  är positivt definit om och endast om alla egenvärden är positiva.
- $Q$  är negativt definit om och endast om alla egenvärden är negativa.
- $Q$  är indefinit om det finns både negativa och positiva egenvärden.

## 5 Inreprodukt

### 5.1 Definitioner

**Definitionen av inreprodukt** Inreproduktet är en avbildning  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , var  $V$  är ett vektorrum. Notationen är  $\langle u, v \rangle$ . Inreproduktet ska uppfylla

$$\begin{aligned}\langle u + w, v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle, \\ \langle cu, v \rangle &= c \langle u, v \rangle, c \in \mathbb{R}, \\ \langle v, u \rangle &= \langle u, v \rangle, \\ \langle u, u \rangle &\geq 0\end{aligned}$$

där inreproduktet av ett element med sig själv är 0 om och endast om elementet är nollelementet.

**Norm** Normen till ett element, starkt analogt med längd, definieras som

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Ortogonalitet** Två elementer  $u, v$  är ortogonala om

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

**Projektion** Låt  $L = \text{Span}(x_1, \dots, x_n)$ , var alla  $x_i$  är ortogonala. Då ges projektionen av ett element  $u$  på  $L$  av

$$\text{proj}_L(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, x_i \rangle}{\|x_i\|^2} x_i.$$

**Ortogonal bas** En ortogonal bas för ett vektorrum  $W$  är en ortogonal mängd av vektorer som bildar en bas för  $W$ .

### 5.2 Satser

**Vektorer och ortogonala baser** Låt  $\{u_1, \dots, u_n\}$  vara en ortogonal bas för  $W$ . Alla vektorer  $w \in W$  kan skrivas som

$$w = \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Bevis

## 6 Geometri

### 6.1 Definitioner

**Linjer i  $\mathbb{R}^2$**  En linje i  $\mathbb{R}^2$  definieras av en ekvation på formen  $ax + by + c = 0$ . Linjen är normal på

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

**Plan i  $\mathbb{R}^3$**  Ett plan i  $\mathbb{R}^3$  definieras av en ekvation på formen  $ax + by + cz + d = 0$ . Planet är normalt på

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

**Kryssprodukt i  $\mathbb{R}^3$**  Kryssproduktet av två vektorer ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 6.2 Satser

**Distanser till hyperplan i  $\mathbb{R}^n$**  Låt  $H$  vara ett hyperplan definierad av ekvationen

$$d + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

och

$$N = \text{Span} \left( \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$$

vara dess ortogonala komplement. Då ges avståndet från en punkt  $Q$  med koordinater  $q_i, i = 1, 2, \dots, n$  av

$$s = \frac{\left| \sum_{i=1}^n a_i q_i \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

**Bevis**

**Kryssproduktens egenskaper**

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u}\end{aligned}$$

**Bevis**

**Plan med punkter** Givet tre punkter  $P, Q, R$  är vektorn

$$\mathbf{n} = (Q - P) \times (R - P)$$

normal på planet som innehåller de tre punkterna.

**Bevis**

**Area av parallelogrammer i  $\mathbb{R}^3$**  Arealen av ett parallelogram i  $\mathbb{R}^3$  definierad av två vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ges av

$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

**Bevis**

**Avstånd mellan linjer** Låt  $L_1, L_2$  vara två linjer och  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  vara vektorer till två punkter på de två linjerna. Om linjerna är parallella är avståndet

$$s = \left| (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) - \text{proj}_{L'_2}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \right|$$

där  $L'_2$  är parallell med  $L_2$  och går genom origo.

Om linjerna är i parallella plan  $H_1, H_2$  definierar man först

$$P'_1 = \{\mathbf{p}_1 + t\mathbf{n}_1, \mathbf{p}_1 \in L_1\} \cap H_2.$$

Avståndet är då  $|\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1|$ .

## Bevis

### 6.3 Volym

Denna delen diskuterar hur man beräknar storheten volym för objekter i  $\mathbb{R}^n$ . Ordet volym kommer att användas om area i  $\mathbb{R}^2$ , volym i  $\mathbb{R}^3$  och en analog storhet i andra  $\mathbb{R}^n$ .

**En kropp i  $\mathbb{R}^n$**  En kropp i  $\mathbb{R}^n$  är en mängd punkter. Ett enkelt exempel är ett prism  $P$ , som ges av

$$P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i\}.$$

Vektorerna  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  definierar då prismet.

**Volym av ett prism** Ett prism  $P$  i  $\mathbb{R}^n$  definieras av vektorerna  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Konstruera en matris  $A$  vars kolumner är vektorerna som definierar prismet. Då ges volymen till  $P$  av

$$V_P = \det(A).$$

**Volym av en transformerad kropp** Om man använder en linjär avbildning  $T$  med standardmatris  $A$  på punkterna i en kropp  $K$ , ges volymen av kroppen som fås efter avbildningen av

$$V_{T(K)} = \det(A)V_K.$$

## 7 Algoritmer

Dessa algoritmer kan vara smarta att kunna för att lösa problem i linjär algebra.

**Gauss-Jordan-elimination** Ett ekvationssystem

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_n &= b_1 \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_n &= b_n\end{aligned}$$

kan lösas vid att konstruera en totalmatris

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right]$$

och göra Gauss-Jordan-elimination på denna.

Syftet med Gauss-Jordan-elimination är att varje kolumn ska ha ett och endast ett pivotelement, även kallad en ledande etta. En ledande etta är en etta som inte har någon andra tal i samma kolumn eller till vänster i samma rad. För att få sådana, gör man operationer på radarna i matrisen enligt följande regler:

- Radar kan multipliceras med konstanter. Forsöka, dock, att undveka 0, eftersom det fjärrnar information, vilket är oönskat.
- Radar kan adderas och subtraheras med andra rader, var båda potentiellt multiplicerad med en lämplig konstant.
- Radar kan byta plats.

När man är klar, ska matrisen (förhoppningsvis) se ut så här:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{array} \right]$$

var alla  $a_i$  är reella tal.

**Invertering av en matris** Ställ upp en totalmatris  $[A|I]$ . Vid att radreducera  $A$  till identitetsmatrisen blir  $I$  radreducerad till  $A^{-1}$ . Att visa detta är enkelt om man använder elementärmatriser.

**Basbyte** Om man har två baser  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  och  $C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  för ett delrum  $W$ , kan man bilda matrisen

$$P = [[\mathbf{b}_1]_C \dots [\mathbf{b}_n]_C]$$

så att

$$[\mathbf{x}]_C = P[\mathbf{x}]_B.$$

Då byter man bas mellan  $B$  och  $C$  vha. multiplikation med  $P$  eller dens invers.

**Gram-Schmidts algoritm** Låt  $\{x_1, \dots, x_n\}$  vara en bas för delrummet  $W \neq \{0\}$ . Gram-Schmidts algoritm ger dig ett sätt att få en ortogonal basis för  $W$  från den gamla basen. Vektorerna (var vi här använder begreppet vektor i en vid förstånd) i basen ges av

$$\begin{aligned}w_1 &= x_1, \\w_2 &= x_2 - \text{proj}_{W_1}(x_2), \\&\vdots \\w_i &= x_i - \text{proj}_{W_i}(x_i),\end{aligned}$$

var vi har definierat

$$W_i = \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

**Minstakvadratmetoden** Givet ett delrum  $W$  av  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , söker vi  $\text{proj}_W(\mathbf{b})$ . Om  $W = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  och  $A = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_m]$  söker vi en  $\mathbf{x}$  så att  $A\mathbf{x} = \text{proj}_W(\mathbf{b})$ . Denna ges av

$$A^T \mathbf{b} = A^T A \mathbf{x}.$$

**Kvadratiska former** Given en kvadratisk form

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{i,j} x_i x_j,$$

bilda en matris  $Q = (q_{i,j})$  så att

$$q_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}d_{i,j}, & i \neq j \\ d_{i,j}, & i = j \end{cases}$$

Detta ger

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}.$$

$Q$  är symmetrisk, och därmed ortogonalt diagonaliserbar. Låt matrisen  $P$  vara övergångsmatrisen från en ortonormal bas till standardbasen, och definiera  $\mathbf{x} = P\mathbf{s}$ . Detta ger

$$Q(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T D \mathbf{s},$$

var  $D$  är en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen. Avbildningen kan då skrivas som

$$Q(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^2.$$

**Kvadratiska kurvor** Givet ett andragradspolynom i  $n$  variabler, hitta en matris  $Q$  så att de kvadratiske termerna ges av  $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$  och en vektor  $\mathbf{v}$  så att de linjära termerna kan skrivas som  $\mathbf{v}^T \mathbf{x}$ . Gör sen ett variabelbyte enligt beskrivningen ovan av kvadratiske former, och skriv polynomet i dessa nya variablerna. Kvadratkomplettera sen, och du får en ekvation som beskriver lösningsmängden.