

Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

7 september 2018

Sammanfattning

Innehåll

1	Ordinarie differentialekvationer (ODE)	1
1.1	Användbara definitioner och satser	1
1.2	Första ordningen	2
1.3	Andra ordningen	4
1.4	Annat	7

1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

1.1 Användbara definitioner och satser

Lipschitzkontinuitet En funktion f är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett K så att det för varje x_1, x_2 gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet Låt $f \in C^1$. Då är f Lipschitzkontinuerlig.

Grönwalls lemma Antag att det finns positiva A, K så att $h : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s) \, ds + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

Bevis Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s) \, ds.$$

Då gäller att

$$\frac{dI}{dt}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{d}{dt} (e^{-Kt} I(t)) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till r och använder att $I(0) = 0$ för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

Linjära differentialekvationer Om en differentialekvation kan skrivas på formen $F(t, y, \frac{dy}{dx}, \dots) = 0$, är den linjär om F är linjär i alla sina argument förutom t .

Wronskianen Wronskianen definieras som

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \frac{dy_1}{dt}(t) & \frac{dy_2}{dt}(t) \end{vmatrix}.$$

Linjärt beroende funktioner $f : I \rightarrow \mathbf{R}, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ är linjärt beroende om det finns k_1, k_2 så att

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

1.2 Första ordningen

Entydighet av lösning Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= f(y), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Detta har en unik lösning om f är Lipschitzkontinuerlig.

Observera att beviset kan även göras för en funktion $f(t, y)$ vid att skriva differentialekvationen som ett system och komma med en motsvarande sats för system av differentialekvationer.

Bevis Betrakta två lösningar y, z av differentialekvationen. Vi får

$$y(\tau) - y_0 = \int_0^\tau f(y) dt$$

och samma för z . Vi subtraherar dessa två resultat och får

$$y(\tau) - z(\tau) = y_0 - z_0 + \int_0^\tau f(y) - f(z) dt.$$

Vid att beräkna absolutbeloppet av båda sidor och använda Cauchy-Schwarz' oliket får man vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau |f(y) - f(z)| dt.$$

Kravet om Lipschitzkontinuitet av f ger vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau K|y(t) - z(t)| dt.$$

Grönwalls lemma ger slutligen

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0|e^{K\tau}.$$

Om $y_0 = z_0$ är $y = z$, och beviset är klart.

Lösning av linjära ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{dy}{dt}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p \, dx$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)} \frac{dy}{dt}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{d}{dt}(ye^P)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{dH}{dt}(t).$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p \, dx} + \int_a^t g(x) e^{-\int_x^t p \, ds} \, dx.$$

Separabla ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna betecknas som en separabel ODE av första ordning.

För att lösa den, beräkna primitiv funktion på båda sidor, vilket ger

$$M(x) + N(y(x)) = c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Om N är inverterbar, får man då y enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

1.3 Andra ordningen

Entydighet av lösning Betrakta den andra ordningens ODE

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) &= g(t), \quad y > t_0, \\ y(t_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dt}(t_0) &= y'_0. \end{aligned}$$

Den har en entydig lösning om p, q är Lipschitzkontinuerliga.

Form på lösning av andra ordningens ODE Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = L(t, y) = g(t).$$

Låt y_P vara en partikulär lösning till denna. Då är y en lösning om och endast om

$$y = y_H + y_P,$$

där y_H löser den homogena ekvationen.

Bevis Vi har

$$L(t, y) = L(t, y_P + y_H) = L(t, y_P) + L(t, y_H) = g(t) + 0 = g(t),$$

och därmed löser y differentialekvationen. Vi har även

$$L(t, y - y_P) = g(t) - g(t) = 0,$$

och $y - y_P$ löser den homogena ekvationen. Eftersom detta är sant, har vi visat ekvivalens.

Fundamentala lösningar Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

där p, q, g är kontinuerliga på I . Låt y_1 uppfylla

$$y_1(t_0) = 1, \quad \frac{dy_1}{dt}(t_0) = 0$$

och y_2 uppfylla

$$y_2(t_0) = 0, \quad \frac{dy_2}{dt}(t_0) = 1.$$

Då definieras y_1, y_2 som mängden av fundamentala lösningar av differentialekvationen.

Linjär kombination av lösningar Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t > t_0,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då finns det c_1, c_2 så att $y = c_1y_1 + c_2y_2$ är en lösning om $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.

Abels sats Betrakta

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då gäller att

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

Bevis

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= \frac{dy_1}{dt}(t)\frac{dy_2}{dt}(t) - \frac{dy_1}{dt}(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + y_1\frac{d^2y_2}{dt^2}(t) - y_2\frac{d^2y_1}{dt^2}(t) \\ &= y_1\left(-p(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + q(t)y_2(t)\right) - y_2\left(-p(t)\frac{dy_1}{dt}(t) + q(t)y_1(t)\right) \\ &= -p(t)W(y_1, y_2)(t). \end{aligned}$$

Denna differentialekvationen har lösning

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds},$$

vilket skulle visas.

Linjärt beroende av lösningar Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = y'_0$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då är dessa linjärt beroende på I om och endast om $W(y_1, y_2)(t) = 0$.

Bevis Om dessa är linjärt beroende, ser man att Wronskianen blir lika med 0, då kolumnerna i matrisen vars determinant ger Wronskianen kommer vara multipler av varandra.

Lösning av andra ordningens ODE med konstanta koefficienter

Låt r_1, r_2 vara lösningar till

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Då ges lösningarna till

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p \frac{dy}{dt}(t) + qy(t) = L(t, y) = 0$$

av

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2, \\ (c_1 t + c_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2. \end{cases}$$

Variation av parametrar Betrakta

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + p(t) \frac{dy}{dt}(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

där p, q, g är kontinuerliga på I och y_1, y_2 är lösningar av den motsvarande homogena ekvationen, ges en partikulär lösning av ekvationen av

$$y_p = -y_1 \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2 \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds$$

där $t_0 \in I$.

1.4 Annat

Exakta differentialekvationer Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{d\psi}{dx}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

Exakthet av differentialekvationer Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$

Eulers metod Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y), \quad 0 < t < T, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Vi gör indelningen $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N$ så att $\Delta t = \frac{T}{N}$ och inför $y_n = y(t_n)$. Vidare gör vi approximationen

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n).$$