Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

13 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

Innehåll

1 Vektorrum

1.1 Definitioner

Kroppar En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ osv.

Vektorrum Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör V till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp k med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x+y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R},\ x, y \in V$.
- $(c+d)x = cx + dx,\ c, d \in \mathbb{R}$.
- $c(dx) = (cd)x$.
- $1x = x$.

Delrum En delmängd V av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$, där 0 är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$.
- $cx \in V$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

Inre direkt summa Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

Yttre direkt summa Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

Kvotrum Om $W \subseteq V$ är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har användt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

Operationer på sidoklasser Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned} (x + W) + (y + W) &= x + y + W, \\ a(x + W) &= (ax) + W. \end{aligned}$$

Linjärt oberoende mängder S är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla x_i är elementer i S.

Linjärt hölje Det linjära höljet $\mathrm{Span}\,(S)$ av mängden S är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i S.
- det minsta delrummet som innehåller S.
- $\bigcap\limits_{S\subset W} W$.
- $\sum\limits_{x\in S} \mathrm{Span}\,(x)$.

Bas En bas B för vektorrummet W är en linjärt oberoende mängd så att $V = \mathrm{Span}\,(B)$, dvs. att alla vektorer i V är linjärkombinationer av vektorer i B på ett unikt sätt.

1.2 Satser

Operationer på sidoklasser Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis

2 Avbildningar

2.1 Definitioner

Isomorfir En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Linjära avbildningar En avbildning T är linjär om

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi säjer att T respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

Isomorfir En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

Matriser för linjära avbildningar Om B är en bas för V och D är en bas för W kan vi ordna en matris för $L : V \to W$ genom

$$L(x_i) = \sum_{j\in I} a_{ji} y_j,$$

där alla $x_i \in B$, alla $y_i \in D$ och I är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om I är oändlig.

Analytiska funktioner av operatorer En analytisk funktion av en operator L definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

Matrisnorm Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nilpotenta operatorer En operator L är nilpotent om $L^n = 0$ för något n.

2.2 Satser

Basbyte Låt L vara en avbildning från V till W. Låt $]_{B,D}$ vara en avbildning mellan vektorrum från basen B i definitionsmängden till D i målmängden, och låt $P_{A,B}$ vara avbildningen som byter bas från A till B i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

Bevis Kommutativt diagram

Koordinater Låt $B = \{x_i\}_{i \in I}$ vara en bas för vektorrummet V. Detta ger en isomorfi

$$V \to k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$
$$x = \sum a_i x i \to \{a_i\}_{i \in I}.$$

Bevis Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \to \sum a_i x i$$

ger en avbildning $k^I \to V$ som är injektiv eftersom B är linjärt oberoende och surjektiv eftersom B spänner upp V.

Kärna och injektivitet En linjär avbildning är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$.

Bevis

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

Kvotavbildning Om $W \subseteq V$ är ett delrum , ger $x \to x + W$ en linjär kvotavbildning från V till $\frac{V}{W}$.

Bevis Vi har

$$x + y \to x + y + W = x + W + y + W,$$
$$ax \to ax + W = a(x + W),$$

och beviset är klart.

Isomorfisatsen

$$\operatorname{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

Bevis Avbildningen $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$ ger en väldefinierad avbildning från $\frac{V}{\ker(L)}$ till $\operatorname{Im}(L)$ eftersom $x + \ker(L) = y + \ker(L)$ implicerar $L(x) = L(y)$ ty L är linjär. Φ är injektiv eftersom $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L)\colon L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$. Φ är surjektiv eftersom $y = L(x)$ för något x ger $y = \Phi(x + \ker(L))$, och alltså finns det för alla $y \in \operatorname{Im}(L)$ ett x så att $y = \Phi(x + \ker(L))$.

Dimensionssatsen Om V är ändligdimensionellt är $\operatorname{rank} L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$.

Bevis

Faktorisering med kvotrum Om $U \subseteq \ker(L)$ finns det en unik avbildning $\Phi : \frac{V}{U} \to W$ sådan att $L = \Phi \circ \Psi$.

Bevis Definiera $\Phi(x + U) = L(x)$.

Norm av potenser av matriser

$$\left\|A^i\right\| \leq \|A\|^i$$

Bevis

Konvergens av funktioner av matriser En funktion f av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

3 Egenvärden och olika polynom

3.1 Definitioner

Egenvektorer x är en egenvektor till L om det finns ett $\lambda \in k$ så att

$$Lx = \lambda x.$$

λ kallas det motsvarande egenvärdet.

Karakteristiskt polynom Om V är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där I är identitetsavbildningen.

Minimalpolynom Om A är en matris, är minimalpolynomet $q_A(x) \in k[x]$ det moniska polynomet av lägst grad så att $q_A(A) = 0$.

Diagonaliserbarhet En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operatorns matris i den basen är diagonal.

Samtidig diagonaliserbarhet Två operatorer L_1 och L_2 är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

3.2 Satser

Karakteristiska polynom och egenvärden Om *lambda* är ett egenvärde till L så är $p_L(\lambda) = 0$.

Bevis Ez

Existens av minimalpolynom Om V är ändligdimensionellt, har L ett karakteristiskt polynom.

Bevis Betrakta matrisen A för L i någon bas. Det gäller att mängden $\{A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}\}$ är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

Cayley-Hamiltons sats $p_L(L) = 0$.

Bevis Om matrisen för L är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

Korrolar q_L är en faktor i p_L.

Multipliciteter och diagonaliserbarhet Om L är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla L:s egenvärden.

Bevis

Konjugerade matriser Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum och L_1, L_2 två operatorer på detta. Då går det att diagonalisera L_1 och L_2 om de kommuterar.

Bevis

Kommutativitet och egenrum Låt L_1 och L_2 kommutera och E_1 vara egenrum till L_1. Då är $L_2(E_1) \subset E_1$.

Bevis

Nilpotens och blockdiagonalitet Om L är nilpotent finns det en bas för V så att matrisen för L blir blockdiagonal, där varje block är på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Bevis Här kommer endast en bevisidé presenteras.
Det finns ett s så att $L^s = 0$ och $L^{s-1} \neq 0$. Vi väljer då ett delrum W_s så att

$$V = \ker(L^s) = W_s \oplus \ker(L^{s-1}).$$

Vi väljer vidare $W_{s-1} \subseteq \ker(L^{s-1})$ så att

$$\ker(L^{s-1}) = W_{s-1} \oplus L(W_s) \oplus \ker(L^{s-2}).$$

Detta går eftersom $L(W_s) \subseteq \ker(L^{s-2})$ och $L(W_s) \cap \ker(L^{s-2}) = \{0\}$. Upprepa prosedyren tills man får

$$\ker(L) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} L^i(W_{i+1}).$$

Välj nu baser för alla W_i och bilderna av alla potenser av L. Dissa bildar en bas för V. Med en lämplig ordning på basen fås $\dim(W_i)$ block på formen ovan i matrisen, varje med storlek $i \times i$.

Jordans normalform Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för L är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform. Vi noterar att $\Lambda_i = \lambda_i I + N$, där N är nilpotent.

Bevis

4 Inreprodukt

4.1 Definitioner

Inreprodukt över $\mathbb{R}$ En inreprodukt $\langle x|y\rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{R}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{R}$ som är

- bilinjär, dvs.
  - $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
  - $\langle ax|y\rangle = a\langle x|y\rangle$.
  - $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$.
  - $\langle x|ay\rangle = a\langle x|y\rangle$.
- symmetrisk, dvs. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x\rangle > 0$ om $x \neq 0$.

Inreprodukt över $\mathbb{C}$ En inreprodukt $\langle x|y\rangle$ på ett vektorrum V över $\mathbb{C}$ är en avbildning $V \times V \to \mathbb{C}$ som är

- seskvilinjär, dvs. bilinjär, men $\langle ax|y\rangle = a^*\langle x|y\rangle$.
- konjugatsymmetrisk, dvs. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$.
- positivt definit, dvs. $\langle x|x\rangle > 0$ om $x \neq 0$. Notera att detta och konjugatsymmetrin implicerar att $\langle x|x\rangle$ har ingen imaginärdel.

Inreprodukt från matris Vi kan få en inreprodukt i $\mathbb{C}^n$ från en matris genom

$$\langle x|y\rangle = \sum a_{ij}x_i^*y_j = (x^*)^T Ay.$$

Om detta skall uppfylla konjugatsymmetri, ger det

$$(x^*)^T Ay = (y^*)^T Ax^* = y^T A^* x^*.$$

Transponering av högersidan ger

$$(x^*)^T Ay = (x^*)^T (A^*)^T y,$$

och därmed uppfylls konjugatsymmetrin om

$$A = (A^*)^T.$$

Om matrisen uppfyller detta, säjs den vara konjugatsymmetrisk eller Hermitesk.

Norm Normen eller längden av en vektor definieras som

$$|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Vinkel Vinkeln θ mellan två vektorer definieras som

$$\cos\theta = \frac{\langle x|x\rangle}{|x||y|}.$$

Ortogonalitet x och y är ortogonala om

$$\langle x|y\rangle = 0.$$

Ortogonalt komplement Om $W \subseteq V$ är ett delrum så finns det ett ortogonalt komplement

$$W^\perp = \{x \in V : \langle x|y\rangle = 0 \forall y \in W\} \subseteq V.$$

4.2 Satser

Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle x|y\rangle| \leq |x||y|.$$

Bevis

Triangelolikheten

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Ortogonalt komplement och vektorrum Om V är ett ändligdimensionellt vektorrum, är

$$W = W \oplus W^{\perp}.$$

Bevis Det gäller att

$$W \cap W^{\perp} = \{0\}.$$