Sammanfattning av SI1146 Vektoranalys

Yashar Honarmandi

29 mars 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Integraler och derivator

Linjeintegraler En linjeintegral skrivs på formen

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Det representerar hur mycket av ett vektorfält som är parallellt med en bana i rummet. Om det låter oklart, tänk att vektorfältet $\mathbf{v}$ puttar på en partikel som rär sig längs med banan C.

Rotation Från en linjeintegral kan rotationen definieras som

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

där A är arean som omslutas av kurvan C och $\mathbf{n}$ är normal på C. Denna tolkas fysikalisk som tätheten av virvlar i fältet $\mathbf{v}$ som roterar normalt på $\mathbf{n}$.

Flödesintegraler En flödesintegral skrivs på formen

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Den representerar hur mycket av ett vektorfält som flöder genom ytan S.

Divergens Från en flödesintegral kan divergensen definieras som

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

där V är volymen som omslutas av ytan S. Denna tolkas fysikalisk som tätheten av källor till fältet $\mathbf{v}$.

Potentialer Potentialer förekommer i två former: skalärpotentialer och vektorpotentialer.

Ett vektorfält har ett skalärpotential om det kan skrivas som $\mathrm{grad}f$ för någon funktion f, som då betecknas som potentialet. För sådana fält gäller att $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ett vektorfält har ett vektorpotentiale om det kan skrivas som $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ för något vektorfält $\mathbf{A}$, som betecknas vektorpotentialet. För sådana fält gäller att $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$.

Om ett vektorfält kan skrivas som en derivata på några av dessa två sätten, är det ekvivalent med att fältet har en potential.

Gauss' sats

$$\int\limits_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_{V} \mathrm{div}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{d}V$$

Stokes' sats

$$\int\limits_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{S} \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

2 Indexräkning

I indexräkning använder man beteckningen

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i,$$

vilket förkortas till

$$[\mathbf{a}]_i = a_i.$$

Det är konvention att summan över i görs från 1 till 3.

Derivator är intressanta att göra även med indexräkning, och då använder vi beteckningen $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$.

En viktig grej som dyker upp i indexräkning-samanhang är Levi-Civitas symbol, definierat som $\varepsilon_{i_1,\dots,i_n} = 1$ när $(i_1, \dots, i_n) = (1, \dots, n)$ eller när indexerna är en jämn permutation av denna första kombinationen, -1 om indexerna är en udda permutation av den första kombinationen och 0 annars.

En annan viktig grej är Kronecker-deltat, definierat som

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Några viktiga konsekvenser av detta är

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_i b_i, \\ [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \\ [\mathrm{grad}\phi]_i &= \partial_i \phi, \\ \mathrm{div}\mathbf{v} &= \partial_i v_i, \\ [\mathrm{rot}\mathbf{v}]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j b_k. \end{aligned}$$