Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

30 augusti 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer

Linjära differentialekvationer Om en differentialekvation kan skrivas på formen $L(y) = g$, är den linjär om

- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.
- $L(\alpha y) = \alpha L(y),\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Separabla ordinarie differentialekvationer Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Vi beräknar primitiv funktion på båda sidor och får

$$M(x) + N(y(x)) = c,\ c \in \mathbf{R}.$$

Om N är inverterbar, får man då y enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

Linjära första ordningens ordinarie differentialekvationer Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p\,\mathrm{d}x$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ye^{P}\right)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t)\,.$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p \mathrm{d}x} + \int_a^t g(x) e^{-\int_x^t p \mathrm{d}s} \mathrm{d}x \,.$$

Lipschitzkontinuerlighet En funktion f är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett K så att det för varje x_1, x_2 gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Entydighet av lösning av en första ordnings ordinarie differentialekvation Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = f(y(t)), \; 0 < t < \tau,$$
$$y_0 = 0.$$

Denna har en entydig lösning om f är Lipschitzkontinuerlig.