Sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

28 augusti 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik.

Innehåll

1 Lite vektoranalys och annan matte

Diracs delta i högre dimensioner Diracs deltafunktion generaliserar utan vidare till högre dimensioner. Med andra ord är $\delta(\mathbf{r})$ en funktion som är noll överallt förutom origo och som uppfyller

$$\int_V \mathrm{d}V\, \delta(\mathbf{r}) = 1$$

om V innesluter origo.

Nablaoperatorn i olika koordinatsystem Betrakta två olika koordinatsystem S och S'. Med hjälp av de kartesiska basvektorerna (som är lika i bägge koordinatsystemen) kan vi skriva ortsvektorn i de två som

$$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e_i},\ \mathbf{r}' = r_i' \mathbf{e_i}.$$

Vidare kan vi skriva nablaoperatorn som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_i}\partial_i,\ \vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_i}\partial_i'.$$

Betrakta nu en funktion av $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Då kan vi visa att

$$\partial_i f = -\partial_i' f.$$

Gradienten av R Betrakta funktionen

$$f(\mathbf{R}) = \sqrt{R_j R_j} = R.$$

Vi har

$$\partial_i R = \frac{1}{2}(R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2R_j \partial_i R_j = (R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} R_j \partial_i (r_j - r_j' = \frac{R_j}{R}\delta ij = \frac{R_i}{R}\delta ij.$$

Detta ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} R = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}' R = \mathbf{e_R}.$$

Divergensen av $\frac{1}{R^2}$-fältet Med resultatet ovan har vi

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^3}\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} R + \frac{1}{R^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \mathbf{e_R} + \frac{3}{R^3} \\
&= -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

så länge $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.

Mer allmänt kan man visa att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} = 4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Jag kan inte bevisa det, men jag kan rationalisera det kort. Utanför origo är det klart att detta stämmer. För att förstå vad som händer i origo, kan vi tillämpa den koordinatoberoende definitionen av divergens. Med den definitionen är divergensen av ett vektorfält kvoten av fältets flöde genom en litan yta kring en punkt och volymen den lilla ytan inneslutar. Med flervariabelanalys kan man visa att för fältet vi betraktar är flödet exakt 4π. Om vi jämför detta med Diracs delta, ser vi att det verkar stämma.

$\frac{1}{R}$ och Greenfunktioner Med resultaten vi har får vi även

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}R = -\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Detta betyder att

$$\nabla^2\frac{1}{R} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Detta betyder att $\frac{1}{R}$ är en Greenfunktion till Laplaceoperatorn (i tre dimensioner).

2 Elektrostatik

Coulombs lag Elektrostatiken utgår från Coulombs lag, som är en experimentellt framtagen lag. Den säjer att om två laddningar Q och q är separerade med en sträcka $\mathbf{R}$, är kraften mellan dem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}\mathbf{R}.$$

Alternativt, i termer av enhetsvektorer,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Båda laddningarna antas ha försumbar utsträckning, och betecknas punktladdningar. ε_0 kallas vakuumpermittiviteten, och har enhet $\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Elektriskt fält Det elektriska fältet som genereras av en laddning Q definieras som att en liten testladdning q upplever en kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

från Q. I våran definition skulle vi kunna lägga på ett $\lim\limits_{q\to 0}$.

Baserad på detta får vi att en punktladdning Q genererar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Eftersom krafter superponeras, gör även elektriska fält det. I diskreta fall motsvarar detta att summera över punktladdningar. I kontinuerliga fall integrerar vi i stället, där varje element i integrationen behandlas som en punktladdning, och vi får

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}q\,\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Laddningen kan vara spridd ut på en linje, en yta eller en volym, i vilka fall vi får $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$ respektiva $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}V$. Förutom de olika elementerna finns en linjeladdningstäthet, ytladdningstäthet eller volymladdningstäthet. Notera att med hjälp av Diracs delta kan alla dessa fallen skrivas som volymladdningstätheter.

Gauss' lag För att härleda Gauss' lag börjag vi med att titta på flödet av fältet $\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}$ genom en godtycklig yta, där $\mathbf{R}$ pekar från en utgångspunkt $\mathbf{r}'$ till ett givet ytelement. Integrationselementet

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{R^2}$$

är rymdvinkeln som areaelementet upptar när det ses från origo. Vi kan se på något sätt att detta motsvarar att projicera areaelementet ned på enhetssfären kring origo. Alternativt, om kurvor är involverade, skulle man projicera ned på enhetscirkeln. Flödet vi betraktar ges då av fönsterfunktionen

$$f(\mathbf{r}') = \int\limits_S \mathrm{d}S\,\frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{e_n}}{R^2} = \int\limits_\Omega \mathrm{d}\Omega = \begin{cases}4\pi, & \mathbf{r}' \text{ innanför } S,\\ 0, & \mathbf{r}' \text{ utanför } S.\end{cases}$$

Vi kommer nu ihåg hur elektriska fältet ser ut på integralform, specifikt som en volymintegral, och får då för flödet genom en godtycklig yta

$$\begin{aligned}\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} &= \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\frac{\rho}{R^2}\mathbf{e_R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V \int\limits_S \mathrm{d}S\,\rho\frac{\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{e_n}}{R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho f(\mathbf{r}) \\ &= \frac{Q_{\text{innesluten}}}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Vektorn $\mathbf{R}$ är nu specifierad för varje punkt på ytan och i hela rummet. Den sista integralen är lika med laddningen som är innesluten i S eftersom fönsterfunktionen ger ett bidrag 4π om och endast om det finns laddning i den aktuella punkten.

Gauss' lag är ett bra verktyg för att beräkna elektriska fält för geometrier med mycket symmetri.

Gauss' lag på integralform Betrakta nu en godtycklig yta S som exakt inneslutar volymen V. Gauss' lag ger då

$$\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \mathrm{d}V\,\rho.$$

Vi kan använda divergenssatsen för att skriva om vänstersidan som en integral över V. Därmed kan vi dra slutsatsen

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Elektrostatisk potential Med vår kunnskap från vektoranalysen kan vi skriva

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho\frac{1}{R}\right).$$

Vi definierar därmed den elektrostatiska potentialen enligt

$$\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V.$$

Från våran definition ser vi att nollnivån för potentialen kan sättas arbiträrt, då det elektriska fältet (som är det som är fysikaliskt) inte ändras om potentialen ändras med en konstant. Vi brukar lägga nollnivån i oändligheten.

Vi kan även från detta visa att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Potential och elektrisk spänning Betrakta storheten $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$. Vi har

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = E_i\,\mathrm{d}x_i = -\partial_i V\,\mathrm{d}x_i = -\,\mathrm{d}V\,.$$

Om vi nu jämför detta med den elektriska spänningen

$$U_{12} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$$

mellan två punkter (som är den välkända spänningen vi känner från kretsvärlden), kan vi se att detta blir

$$U_{12} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}V = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2),$$

oberoende av vägen mellan punkterna. Om vi lägger potentialens referens i oändligheten, ser vi då att

$$V(\mathbf{r}) = -\int\limits_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E},$$

ett typ inverst påstående av $\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V$.