

Sammanfattning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

2 december 2017

Sammanfattning

Denna sammanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

Innehåll

1	Mängder	1
1.1	Definitioner	1
1.2	Satser	1
2	Talföljder	1
2.1	Definitioner	1
2.2	Satser	2
3	Funktioner	2
3.1	Definitioner	2
3.2	Satser	4
4	Gränsvärden	6
4.1	Definitioner	6
4.2	Satser	6
5	Derivata	7
5.1	Definitioner	7
5.2	Satser	7

1 Mängder

1.1 Definitioner

Delmängder Låt A, B vara mängder. A är en delmängd av B om det för varje $x \in A$ gäller att $x \in B$. Notation: $A \subset B$.

Union och snitt Låt A, B vara mängder. Unionen $A \cup B$ består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet $A \cap B$ består av de element som är i båda.

Övre och undra begränsningar Ett tal m är en övre begränsning av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$, och en undra begränsning om $x \geq m$ för varje $x \in A$.

Supremum och infimum Ett tal m är supremum till en mängd A om m är den minsta övre begränsningen till A . m är infimum till A om m är den största undra begränsningen till A . Notation: $\sup A, \inf A$.

1.2 Satser

Supremumsegenskapen Varje uppåt begränsade delmängd av \mathbb{R} har en minsta övre begränsning.

2 Talföljder

2.1 Definitioner

Definitionen av en talföljd En talföljd är en följd av tal a_1, a_2, \dots och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Växande och avtagande talföljder En talföljd är växande om $a_{n+1} \geq a_n$ för varje $n \geq 1$. Avtagande talföljder definieras analogt.

Uppåt och nedåt begränsade talföljder En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett M så att $a_n \leq M$ för alla $n \geq 1$.

Begränsade talföljder En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Konvergens av talföljder En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Detta beteendet betecknas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Divergenta talföljder En divergent talföljd är inte konvergent.

Binomialsatsen För $n \in \mathbb{Z}$ har man

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e , Eulers tal

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av talföljder Låt $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ vara talföljder med gränsvärden A och B . Då följer att

- a) $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$.
- b) $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet AB .
- c) om $B \neq 0$ är $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^\infty$ konvergent med gränsvärdet $\frac{A}{B}$.
- d) om $a_n \leq b_n$ för varje n så gäller att $A \leq B$.

Bevis Aa.

Växande och uppåt begränsade talföljder Om $(a_n)_{n=1}^\infty$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

Bevis Oo.

Gränsvärde för potenser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

Bevis Meh.

Standardgränsvärden Låt $a > 1$ och $b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$$

Bevis Nä.

Endeligt värde av e Talföljden $(a_n)_{n=1}^\infty$ med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

Bevis Säkert någon gång.

Bolzano-Weierstrass' sats Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd. En delföljd av en talföljd är en del av talen som fortfarande är oändligt stor.

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Definition av en funktion Låt X, Y vara mängder. En funktion $f : X \rightarrow Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi säger att x avbildas på y och att y är bilden av x . x kallas argumentet till f . X kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även D_f . Y kallas funktionen målmängd.

Värdemängd Värdemängden till $f : X \rightarrow Y$ definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden f antar.

Injektivitet f är injektiv om det för varje $x_1, x_2 \in X$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

Surjektivitet f är surjektiv om $V_f = Y$.

Bijektivitet Om f är injektiv och surjektiv, är f bijektiv.

Inversa funktioner Låt $f : X \rightarrow Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där $y = f(x)$. Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

Växande och avtagande funktioner En funktion f är växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) \leq f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

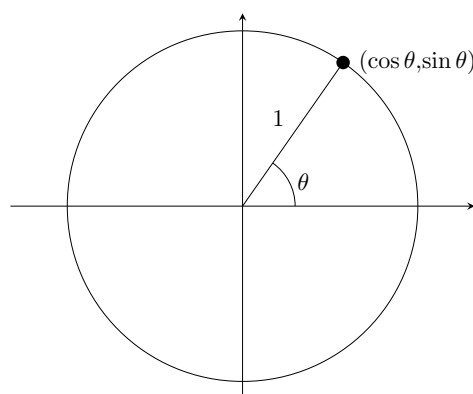
Strängt växande och avtagande funktioner En funktion f är strängt växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) < f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

Monotona funktioner Om en funktion är antingen strängt växande respektive strängt avtagande eller växande respektive avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektive monoton.

Uppåt och nedåt begränsade funktioner En funktion f är uppåt begränsad om V_f är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om

funktioner saknar övre eller nedre begränsning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

Trigonometriska funktioner Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.



Figur 1: Enhetssirkeln.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel θ med x -axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av x -axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras \sin och \cos utifrån x - och y -koordinaterna till punkten för en given θ , var θ mäts i radianer. Vi definierar även $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

Från definitionerna ser vi att $\sin x$ och $\cos x$ är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$, medan $\tan x$ är definierad för alla $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

Radianer Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 bevägar sig från startpunkten och till nå

Trigonometriska funktioners egenskaper Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dessa. Några essentiella är listad under:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos \theta \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

Inversa trigonometriska funktioner Låt $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Låt $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Låt $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arctan x$.

Exponentialfunktionen I häftet definieras inte exponentialfunktionen $a^x, a > 1$, utan den antas vara en strängt växande funktion med

värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$

Logaritmfunktionen Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$ för något $a > 1$. Inversen till denna funktionen betecknas som $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Absolutbelopp Absolutbeloppet definieras som $|x| = \sqrt{x^2}$. Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kontinuitet Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

3.2 Satser

Trigonometriska funktioner med vinkelsummor

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

Cosinussatsen Låt a, b, c vara sidorna i en triangel och θ vinkeln där sidlängderna a och b möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Logaritmfunktionens egenskaper Låt $a > 1$. Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \quad (1)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (2)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad (3)$$

Bevis Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen - $a^{\log_a x} = x$ - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att $a^{\log_a 1} = 1$ och att $a^0 = 1$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att $a^{\log_a xy} = xy$ och att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

Ekvation 3 fås från att $a^{\log_a x^y} = x^y$ och att $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$.

Absolutbeloppens egenskaper

$$|xy| = |x||y| \quad (4)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

Bevis Kommer kanske någon gång.

Kontinuitet av sammansatta funktioner Låt f vara kontinuerlig i b och låt $g(x) \rightarrow b$ när $x \rightarrow a$. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

givet att vänsterledet är definierat.

Bevis Meh.

Kontinuitet och begränsning

Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.

Bevis Kanske man borde starta på dessa.

Inversfunktioners kontinuerlighet

Låt $f : A \rightarrow B$ vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen $f^{-1} : B \rightarrow A$ är kontinuerlig och strängt växande.

Bevis Oo.

Elementära funktioners kontinuerlighet

Elementära funktioner är kontinuerliga.

Bevis Många av dom.

Kontinuerlighet av summa och produkt

Summan och produkt av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Bevis Inses lätt.

Satsen om mellanliggande värde

Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Bevis Inte så långt.

Största och minsta värden

Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då finns $x_1, x_2 \in [a, b]$ så att $\sup V_f = f(x_1)$ och $\inf V_f = f(x_2)$.

Bevis yez.

Standardgränsvärden

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1\end{aligned}$$

Bevis Too much.

4 Gränsvärden

4.1 Definitioner

Gränsvärde vid oändligheten

Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) . f konvergerar mot gränsvärdet A när $x \rightarrow \infty$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

eller $f(x) \rightarrow A$ när $x \rightarrow \infty$.

Divergens Om det för en funktion f inte finns ett sådant A , sägs f vara divergent då $x \rightarrow \infty$.

Det oegentliga gränsvärdet

Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) . f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \rightarrow \infty$ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Lokalt gränsvärde Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f . f konvergerar mot A när x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyllar $0 < |x - a| < \delta$. Detta skrivs $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Vänster- och högergränsvärden

Vid att endast studera $x > a$ eller $x < a$ kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion f . Dessa skrivs $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$ eller $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$. För en funktion f definierad i en punkterad omgivning till a existerar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

Det oegentliga lokala gränsvärdet

Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f . f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \rightarrow a$ om det för varje K finns ett δ sådant att $f(x) > K$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller $0 < |x - a| < \delta$.

4.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av funktioner

Låt f, g vara kontinuerliga funktioner sådana att $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$ när $x \rightarrow \infty$. Då gäller att

a) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ när $x \rightarrow \infty$.

b) $f(x)g(x) \rightarrow AB$ när $x \rightarrow \infty$.

c) om $B \neq 0$ så följer att $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$ när $x \rightarrow \infty$. **5.2 Satser**

d) om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$.

Bevis Mjo.

Gränsvärden och supremum

Låt $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

Bevis Nä.

Standardgränsvärden Låt $a > 1, b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

Bevis Orkar inte.

5 Derivata

5.1 Definitioner

Derivatans definition Låt f vara en funktion definierad i en omgivning kring x_0 . f är deriverbar i x_0 om

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. Värdet kallas derivatan i x_0 .

Deriverbara funktioner Om en funktion f är deriverbar i alla punkter i definitionsmängden, är funktionen deriverbar. Funktionen $f' = \frac{df}{dx}$ med $D_{f'} = D_f$ kallas derivatan.