Samanfatning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

18 november 2017

Sammanfattning

Denna samanfattning samlar centrala definitioner och satsar användt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

Innehåll

1 Mängder

1.1 Definitioner

Delmängder Låt A, B vara mängder. A är en delmängd av B om det för varje $x \in A$ gäller att $x \in B$. Notation: $A \subset B$.

Union och snitt Låt A, B vara mängder. Unionen $A \cup B$ består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet $A \cap B$ består av de element som är i båda.

Övre och undra begränsningar Ett tal m är en övre begränsning av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$, och en undra begränsning om $x \geq m$ för varje $x \in A$.

Supremum och infimum Ett tal m är supremum till en mängd A om m är den minsta övre begränsningen till A. m är infimum till A om m är den största undra begränsningen till A. Notation: $\sup A, \inf A$.

1.2 Satser

Supremumsegenskapen Varje uppåt begränsade delmängd av $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning.

2 Funktioner

2.1 Definitioner

Definition av en funktion Låt X, Y vara mängder. En funktion $f : X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi säger att x avbildas på y och att y är bilden av x. x kallas argumentet till f. X kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även D_f. Y kallas funktionen målmängd.

Värdemängd Värdemängden till $f : X \to Y$ definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden f antar.

Injektivitet f är injektiv om det för varje $x_1, x_2 \in X$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

Surjektivitet f är surjektiv om $V_f = Y$.

Bijektivitet Om f är injektiv och surjektiv, är f bijektiv.

Inversa funktioner Låt $f : X \to Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1} : Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där $y = f(x)$. Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

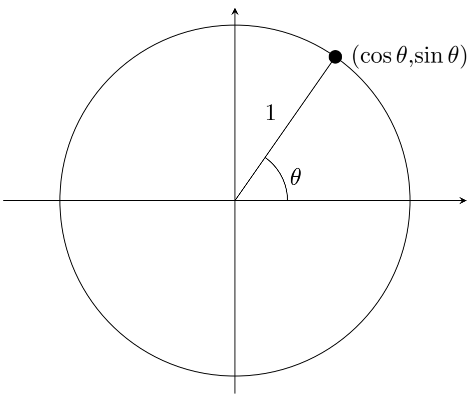
Växande och avtagande funktioner En funktion f är växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) \leq f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

Strängt växande och avtagande funktioner En funktion f är strängt växande på en mängd $M \in D_f$ om det för varje $x, y \in M : x < y$ gäller att $f(x) < f(y)$. Om $M = D_f$ kallas f strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

Monotona funktioner Om en funktioner är antingen strängt växande respektiva strängt avtagande eller växande respektiva avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektiva monoton.

Uppåt och nedåt begränsade funktioner En funktion f är uppåt begränsad om V_f är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedra begrensning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

Trigonometriska funktioner Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.



Figur 1: Enhetssirkeln.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel θ med x-axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av x-axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras sin och cos utifrån x- och y-koordinaterna till punkten för en given θ, var θ mäts i radianer. Vi definierar även $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Från definitonerna ser vi at $\sin x$ och $\cos x$ är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$, medan $\tan x$ är definierad för alla $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

Radianer Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 beväger sig från startpunktet och till nån

Trigonometriska funktioners egenskaper Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dissa. Några essensiella är listad under:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1\\
&\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta\\
&\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta\\
&\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\\
&\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta\\
&\sin(-\theta) = -\sin\theta\\
&\cos(-\theta) = -\cos\theta\\
&\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta\\
&\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta
\end{aligned}$$

Inversa trigonometriska funktioner Låt $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Låt $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Låt $f : (-\inf, \inf) \to \left[-\frac{\pi}{2}\right], \frac{\pi}{2}]$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till denna funktionen betecknas $f^{-1}(x) = \arctan x$.

Exponentialfunktionen I häftet definieras inte exponentialfunktionen $a^x, a > 1$, utan den antas vara en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \inf)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

Logaritmfunktionen Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \inf)$ sådan att $f(x) = a^x$ för något $a > 1$. Inversen till denna funktionen betecknas som $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Absolutbelopp Absolutbeloppet definieras som $|x| = \sqrt{x^2}$. Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

2.2 Satser

Trigonometriska funktioner med vinkelsummor

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Cosinussatsen Låt a, b, c vara sidorna i en triangel och θ vinkeln där sidlängderna a och b möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Logaritmfunktionens egenskaper Låt $a > 1$. Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \tag{1}$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{2}$$
$$\log_a(x^y) = y\log_a(x) \tag{3}$$

Bevis Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen - $a^{\log_a x} = x$ - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att $a^{\log_a 1} = 1$ och att $a^0 = 1$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att $a^{\log_a xy} = xy$ och att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

Ekvation 3 fås från att $a^{\log_a x^y} = x^y$ och att $a^{y\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y$.

Absolutbeloppens egenskaper

$$|xy| = |x||y| \tag{4}$$
$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{5}$$

Bevis Kommer kanskje någon gång.

3 Talföljder

3.1 Definitioner

Definitionen av en talföjld En talföljd är en följd av tal $a_1, a_2, ...$ och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Växande och avtagande talföljder En talföljd är växande om $a_{n+1} \geq a_n$ för varje $n \geq 1$. Avtagande talföljder definieras analogt.

Uppåt och nedåt begränsade talföljder En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett M så att $a_n \leq M$ för alla $n \geq 1$.

Begränsade talföljder En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Konvergens av talföljder En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Detta beteendet betecknas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Divergenta talföljder En divergent talföljd är inte konvergent.

Binomialsatsen För $n \in \mathbb{Z}$ har man

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e, Eulers tal

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av talföljder Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara talföljder med gränsvärden A och B. Då följer att

a) $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$.

b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet AB.

c) om $B \neq 0$ är $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\frac{A}{B}$.

d) om $a_n \leq b_n$ för varje n så gäller att $A \leq B$.

Bevis Aa.

Växande och uppåt begränsade talföljder Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

Bevis Oo.

Gränsvärde för potenser

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

Bevis Meh.

Standardgränsvärden Låt $a > 1$ och $b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$$

Bevis Nä.

Endeligt värde av e Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

Bevis Säkert någon gång.

Bolzano-Weierstrass' sats Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd. En delföljd av en talföljd är en del av talen som fortfarande är oändligt stor.

4 Gränsvärden

4.1 Definitioner

Gränsvärde vid oändligheten Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f konvergerar mot gränsvärdet A när $x \to \infty$ om det for varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

eller $f(x) \to A$ när $x \to \infty$.

Divergens Om det för en funktion f inte finns ett sådant A, sägs f vara divergent då $x \to \ infty$.

Det oegentliga gränsvärdet Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞). f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x\ to\infty$ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Detta skrivs

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Lokalt gränsvärde Låt f vara en reellvärd funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f konvergerar mot A när x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyllar $0 < |x - a| < \delta$. Detta skrivs $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Vänster- och högergränsvärden Vid att endast studera $x > a$ eller $x < a$ kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion f. Dessa skrivs $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$ eller $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$. För en funktion f definierad i en punkterad omgivning till a existerar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

Det oegentliga lokala gränsvärdet Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \to a$ om det för varje K finns ett $delta$ sådant att $f(x) > K$ för varje $x \in D_f$ som uppfyll ar $0 < |x - a| < \delta$

4.2 Satser

Gränsvärden för kombinationer av funktioner Låt f, g vara kontinuerliga funktioner sådana att $f(x) \to A, g(x) \to B$ när $x \to \infty$. Då gäller att

a) $f(x) + g(x) \to A + B$ när $x \to \infty$.

b) $f(x)g(x) \to AB$ när $x \to \infty$.

c) om $B \neq 0$ så följer att $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ när $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$.

Bevis Mjo.

Gränsvärden och supremum Låt $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \to \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

Bevis Nä.

Standardgränsvärden Låt $a > 1, b > 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

Bevis Orkar inte.