

# Sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

31 augusti 2018

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SG1113 Mekanik, fortsättningskurs.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Accelererande referensramar</b>	<b>1</b>
1.1	Kinematik . . . . .	1
1.2	Dynamik . . . . .	2

# 1 Accelererande referensramar

## 1.1 Kinematik

Vi vill betrakta en referensram  $S'$  som rör sig relativt en inertialram  $S$ .  $S'$  rör sig med hastighet  $\mathbf{v}_{O'}$  och roterar med vinkelhastighet  $\omega$  kring en given axel (dessa två kommer slås i hop till en enda rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$ ).

**Transformation av vektorstorheter** Betrakta en godtycklig vektorstorhet  $\mathbf{A}$ . Denna kan skrivas i båda koordinatsystem, vilket ger likheten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= A'_x \hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y \hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z \hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi beräknar nu tidsderivatan och får

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{A} &= \partial_t A_x \hat{\mathbf{e}}_x + \partial_t A_y \hat{\mathbf{e}}_y + \partial_t A_z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \partial_t A'_x \hat{\mathbf{e}}'_x + \partial_t A'_y \hat{\mathbf{e}}'_y + \partial_t A'_z \hat{\mathbf{e}}'_z + A'_x \partial_t \hat{\mathbf{e}}'_x + A'_y \partial_t \hat{\mathbf{e}}'_y + A'_z \partial_t \hat{\mathbf{e}}'_z.\end{aligned}$$

Vi inför nu den nya operatören

$$\mathring{\mathbf{A}} = \partial_t A'_x \hat{\mathbf{e}}'_x + \partial_t A'_y \hat{\mathbf{e}}'_y + \partial_t A'_z \hat{\mathbf{e}}'_z,$$

som låter oss skriva om de tre första termerna i sista raden. Vi kan vidare visa att tidsderivatorna av enhetsvektorerna har belopp som ges av  $|\partial_t \hat{\mathbf{e}}'_i| = \omega \sin \alpha_i$ , där  $\alpha_i$  är vinkeln som bildas mellan rotationsvektorn  $\omega$  och den givna enhetsvektorn, samt att varje tidsderivata av en enhetsvektor är normal på  $\omega$  och själva enhetsvektoren. Därmed kan vi skriva  $\partial_t \hat{\mathbf{e}}'_i = \omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i$ , och slutligen

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathring{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (1)$$

**Hastighet** Ortsvektorn till en punkt kan skrivas som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

där  $\mathbf{r}$  är Ortsvektorn i  $S$ ,  $\mathbf{r}'$  är Ortsvektorn i  $S'$  och  $\mathbf{r}_{O'}$  är Ortsvektorn till origo i  $S'$  relativt  $S$ . Vi tidsderiverar och får

$$\partial_t \mathbf{r} = \partial_t \mathbf{r}_{O'} + \partial_t \mathbf{r}'.$$

Vi känner igen hastigheten i  $S$  och hastigheten till ramen  $S'$ . Vid att använda det härledda sambandet för transformation av vektorstorheter får man

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathring{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Vi känner även igen hastigheten till punkten i  $S'$ , vilket ger

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

För att tolka detta resultatet, inför vi systempunkten, som är en materiell punkt i  $S'$  som sammanfaller med punkten vi betraktar i ögonblicket vi betraktar. Denna punkten är fix relativt  $S'$ , vilket ger den hastighet i  $S$  lika med  $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Vi kan då skriva

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{sp}} + \mathbf{v}',$$

där  $\mathbf{v}_{\text{sp}}$  är systempunktens hastighet.

**Acceleration** För att beräkna accelerationen, tidsderiverar vi hastigheten, och får

$$\partial_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \partial_t \mathbf{r}' + \partial_t \mathbf{v}'.$$

Vi använder ekvation 1 på storheterna i  $S'$  för att få

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= \partial_t \mathbf{v}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' + \mathbf{v}') + \dot{\mathbf{v}}'. \end{aligned}$$

Vi känner igen accelerationen mätt i  $S$ , accelerationen till ramen  $S'$  och hastigheten mätt i  $S'$ , och får

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

För att tolka detta, inför vi igen systempunkten. Eftersom denna är fix relativt  $S'$ , ger de två sista termerna inget bidrag till dennas acceleration, vilket ger  $\mathbf{a}_{\text{sp}} = \mathbf{a}_{O'} + \partial_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Den sista termen känner vi även igen som punktens acceleration  $S'$ . Dock återstår en sista term, som döps Coriolisaccelerationen  $\mathbf{a}_{\text{cor}}$ . Vi får då

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{sp}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}'.$$

## 1.2 Dynamik

När vi nu tillämpar Newtons andra lag i  $S$ , får man

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{sp}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}').$$

Vi definierar nu två tröghetskrafter: systempunktskraften  $\mathbf{F}_{\text{sp}} = -m\mathbf{a}_{\text{sp}}$  och Corioliskraften  $\mathbf{F}_{\text{cor}} = -m\mathbf{a}_{\text{cor}}$ . Detta ger oss

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{sp}} + \mathbf{F}_{\text{cor}} = \mathbf{F}_{\text{rel}}.$$

Från detta drar vi slutsatsen att partikeldynamiken kan översättas till accelererande system om

- alla absoluta storheter och tidsderivator ersätts med motsvarande relativa storheter och derivator.
- de fysiska krafterna kompletteras med de två tröghetskrafterna.

Vi kan nu undersöka termerna systempunktskraften består av. Dessa är

- en translatorisk kraft  $\mathbf{F}_{tl} = -m\mathbf{a}_{O'}$ .
- en transversell kraft  $\mathbf{F}_{tv} = -m\mathbf{a}_{tv} = -m\partial_t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ .
- en centrifugalkraft  $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ .

## 2 Stela kroppar

En stel kropp är en massbelagd domän så att avståndet mellan två godtyckliga punkter är konstant.

En stel kropp kan ha translationshastighet eller rotationshastighet. Translationshastighet karakteriseras av att  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$  för alla  $A, B$ . Rotationshastighet karakteriseras av att det finns ett  $C$  som är stelt förenad med kroppen så att  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$  momentant.

För att beskriva rörelsen till en stel kropp, bilda en referensram med axlarna fixa relativt kroppen. betrakta två punkter  $A, B$  i kroppen, där origo i den nya referensramen är  $A$ . Då gäller det att

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B,sp} + \mathbf{v}_{B,rel}.$$

Eftersom axlarna är fixa relativt kroppen, ger andra termen inget bidrag, vilket ger

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

och bekräftar vårt påstående om att all rörelse för en stel kropp är antingen translation eller rotation.

Betrakta vidare kroppens acceleration, som ges av

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B,sp} + \mathbf{a}_{B,cor} + \mathbf{a}_{B,rel}.$$

Fixa axlar ger att de två sista termerna ej bidrar och

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}),$$

där den första termen är ett translatoriskt bidrag och de två andra är rotationsbidrag.

Plan rörelse för en stel kropp karakteriseras av att hastigheten i alla punkter är parallellt med ett och samma fixa plan. Om en stel kropp roterar under plan rörelse, finns det alltid en punkt  $C$  med  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ , som kallas

momentancentrum. Denna punkt uppfyller  $\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$ . För att hitta den, multiplicera med  $\boldsymbol{\omega}$  på båda sidor för att få

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AC})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AC}.\end{aligned}$$

Eftersom rörelsen är plan, behöver vi bara betrakta ett snitt av kroppen i rörelsesplanet, vilket gör att den första skalärprodukten blir 0. Detta ger då positionen till momentancentrumet enligt

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$