

# Sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

6 november 2018

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SF1681 Linjär algebra, fortsättningskurs. Den innehåller förklaringar av centrala begrepp, definitioner och satser som täcks i kursen.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Vektorrum</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Avbildningar</b>	<b>2</b>
2.1	Definitioner . . . . .	2
2.2	Satser . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Egenvärden och olika polynom</b>	<b>5</b>
3.1	Definitioner . . . . .	5
3.2	Satser . . . . .	5

# 1 Vektorrum

## 1.1 Definitioner

**Kroppar** En kropp är något som har definierat multiplikation och addition, och som fungerar som (är isomorft med)  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  osv.

**Vektorrum** Ett vektorrum är en mängd med en operation som gör  $V$  till en abelsk grupp och för vilken det finns en kropp  $k$  med skalärer och en operation med skalären som uppfyller

- $c(x + y) = cx + cy, c \in \mathbb{R}, x, y \in V$ .
- $(c + d)x = cx + dx, c, d \in \mathbb{R}$ .
- $c(dx) = (cd)x$ .
- $1x = x$ .

**Delrum** En delmängd  $V$  av ett vektorrum är ett delrum om

- $0 \in V$ , där  $0$  är nollelementet.
- $x, y \in V \implies x + y \in V$ .
- $cx \in V$  för alla  $c \in \mathbb{R}$ .

**Inre direkt summa** Vi definierar den inre direkta summan

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i, a_i \in V_i \right\}.$$

**Yttre direkt summa** Den yttre direkte summan av två vektorrum definieras som

$$V \oplus W = \{(x, y), x \in V, y \in W\}.$$

**Kvotrum** Om  $W \subseteq V$  är delrum, kan vi bilda

$$\frac{V}{W} = \{x + W, x \in V\},$$

där vi har använt summan

$$x + W = \{x + y, y \in W\}.$$

Dessa kallas för sidoklasser.

**Operationer på sidoklasser** Till sidoklasser hör operationer

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= x + y + W, \\ a(x + W) &= (ax) + W.\end{aligned}$$

**Linjärt oberoende mängder**  $S$  är en linjärt oberoende mängd om

$$\sum a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \forall i,$$

där alla  $x_i$  är elementer i  $S$ .

**Linjärt hölje** Det linjära höljet  $\text{Span}(S)$  av mängden  $S$  är

- mängden av alla linjärkombinationer av vektorer i  $S$ .
- det minsta delrummet som innehåller  $S$ .
- $\bigcap_{S \subset W} W$ .
- $\sum_{x \in S} \text{Span}(x)$ .

**Bas** En bas  $B$  för vektorrummet  $W$  är en linjärt oberoende mängd så att  $V = \text{Span}(B)$ , dvs. att alla vektorer i  $V$  är linjärkombinationer av vektorer i  $B$  på ett unikt sätt.

## 1.2 Satser

**Operationer på sidoklasser** Operationer på sidoklasser är väldefinierade.

Bevis

## 2 Avbildningar

### 2.1 Definitioner

**Isomorfi** En isomorfi är en bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Linjära avbildningar** En avbildning  $T$  är linjär om

$$\begin{aligned}T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(cx) &= cT(x), c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vi säger att  $T$  respekterar eller bevarar strukturen som vektorrum.

**Isomorfi** En isomorfi är en linjär och bijektiv avbildning mellan vektorrum.

**Matriser för linjära avbildningar** Om  $B$  är en bas för  $V$  och  $D$  är en bas för  $W$  kan vi ordna en matris för  $L : V \rightarrow W$  genom

$$L(x_i) = \sum_{j \in I} a_{ji} y_j,$$

där alla  $x_i \in B$ , alla  $y_i \in D$  och  $I$  är en mängd av index som det skall summeras över. Linjära kombinationer är per definition ändliga, och därmed summeras det över ett ändligt antal termer även om  $I$  är oändlig.

**Analytiska funktioner av operatorer** En analytisk funktion av en operator  $L$  definieras som

$$f(L) = \sum a_i L^i.$$

**Matrisnorm** Normen av en matris definieras som

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

## 2.2 Satser

**Basbyte** Låt  $L$  vara en avbildning från  $V$  till  $W$ . Låt  $]_{B,D}$  vara en avbildning mellan vektorrum från basen  $B$  i definitionsområdet till  $D$  i målmängden, och låt  $P_{A,B}$  vara avbildningen som byter bas från  $A$  till  $B$  i samma vektorrum. Då gäller det att

$$L_{B,D} = P_{D',D} L_{B',D'} P_{B,B'}$$

**Bevis** Kommutativt diagram

**Koordinater** Låt  $B = \{x_i\}_{i \in I}$  vara en bas för vektorrummet  $V$ . Detta ger en isomorfi

$$V \rightarrow k^I \equiv \bigoplus_{i \in I} k,$$

$$x = \sum a_i x_i \rightarrow \{a_i\}_{i \in I}.$$

**Bevis** Avbildningen

$$\{a_i\}_{i \in I} \rightarrow \sum a_i x_i$$

ger en avbildning  $k^I \rightarrow V$  som är injektiv eftersom  $B$  är linjärt oberoende och surjektiv eftersom  $B$  spänner upp  $V$ .

**Kärna och injektivitet** En linjär avbildning är injektiv om och endast om  $\ker(L) = \{0\}$ .

**Bevis**

$$L(x) = L(y) \implies L(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(L).$$

Alltså kan alla element i kärnan skrivas som differansen av två element på detta sättet, och det enda som garanterar injektivitet är om bara identiteten finns i kärnan.

**Kvotavbildning** Om  $W \subseteq V$  är ett delrum, ger  $x \rightarrow x + W$  en linjär kvotavbildning från  $V$  till  $\frac{V}{W}$ .

**Bevis** Vi har

$$\begin{aligned}x + y &\rightarrow x + y + W = x + W + y + W, \\ax &\rightarrow ax + W = a(x + W),\end{aligned}$$

och beviset är klart.

**Isomorfisatsen**

$$\operatorname{Im}(L) \cong \frac{V}{\ker(L)}$$

**Bevis** Avbildningen  $\Phi(x + \ker(L)) = L(x)$  ger en väldefinierad avbildning från  $\frac{V}{\ker(L)}$  till  $\operatorname{Im}(L)$  eftersom  $x + \ker(L) = y + \ker(L)$  implicerar  $L(x) = L(y)$  ty  $L$  är linjär.  $\Phi$  är injektiv eftersom  $\ker(\Phi) = \{x + \ker(L) : L(x) = 0\} = \{\ker(L)\}$ .  $\Phi$  är surjektiv eftersom  $y = L(x)$  för något  $x$  ger  $y = \Phi(x + \ker(L))$ , och alltså finns det för alla  $y \in \operatorname{Im}(L)$  ett  $x$  så att  $y = \Phi(x + \ker(L))$ .

**Dimensionssatsen** Om  $V$  är ändligdimensionellt är  $\operatorname{rank} L + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$ .

**Bevis**

**Faktorisering med kvotrum** Om  $U \subseteq \ker(L)$  finns det en unik avbildning  $\Phi : \frac{V}{U} \rightarrow W$  sådan att  $L = \Phi \circ \Psi$ .

**Bevis** Definiera  $\Phi(x + U) = L(x)$ .

**Norm av potenser av matriser**

$$\|A^i\| \leq \|A\|^i$$

## Bevis

**Konvergens av funktioner av matriser** En funktion  $f$  av en matris konvergerar om

$$f(\|A\|) = \sum a_i \|A\|^i$$

konvergerar.

## 3 Egenvärden och olika polynom

### 3.1 Definitioner

**Egenvektorer**  $x$  är en egenvektor till  $L$  om det finns ett  $\lambda \in k$  så att

$$Lx = \lambda x.$$

$\lambda$  kallas det motsvarande egenvärdet.

**Karakteristiskt polynom** Om  $V$  är ändligdimensionellt ges det karakteristiska polynomet av

$$p_L(x) = \det(xI - L) \in k[x],$$

där  $I$  är identitetsavbildningen.

**Minimalpolynom** Om  $A$  är en matris, är minimalpolynomet  $q_A(x) \in k[x]$  det moniska polynomet av lägst grad så att  $q_A(A) = 0$ .

**Diagonaliserbarhet** En operator är diagonaliserbar om det finns en bas så att operators matris i den basen är diagonal.

**Samtidig diagonaliserbarhet** Två operatorer  $L_1$  och  $L_2$  är samtidigt diagonaliserbara om båda är diagonaliserbara och det finns en gemensam bas av egenvektorer.

### 3.2 Satser

**Karakteristiska polynom och egenvärden** Om  $\lambda$  är ett egenvärde till  $L$  så är  $p_L(\lambda) = 0$ .

**Bevis** Ez

**Existens av minimalpolynom** Om  $V$  är ändligdimensionellt, har  $L$  ett karakteristiskt polynom.

**Bevis** Betrakta matrisen  $A$  för  $L$  i någon bas. Det gäller att mängden  $\{A^0, A^1, \dots, A^{n^2}\}$  är linjärt beroende, och därmed finns det koefficienter  $a_0, \dots, a_n$  så att

$$\sum a_i A^i = 0.$$

**Cayley-Hamiltons sats**  $p_L(L) = 0$ .

**Bevis** Om matrisen för  $L$  är diagonal så är det uppenbart, ty

$$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

I övrigt oklart.

**Korollar**  $q_L$  är en faktor i  $p_L$ .

**Multipliciteter och diagonaliserbarhet** Om  $L$  är diagonaliserbar, är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla  $L$ 's egenvärden.

**Bevis**

**Konjugerade matriser** Alla matriser är konjugerade med en övertriangulär matris med matrisens egenvärden på diagonalen.

**Samtidig diagonaliserbarhet och kommutativitet** Låt  $V$  vara ett ändligdimensionellt vektorrum och  $L_1, L_2$  två operatorer på detta. Då går det att diagonalisera  $L_1$  och  $L_2$  om de kommuterar.

**Bevis**

**Kommutativitet och egenrum** Låt  $L_1$  och  $L_2$  kommutera och  $E_1$  vara egenrum till  $L_1$ . Då är  $L_2(E_1) \subset E_1$ .

**Bevis**



**Jordans normalform** Om en operator har karakteristiskt polynom

$$p_L(x) = \prod (x - \lambda_i),$$

finns det en bas så att matrisen för  $L$  är på formen

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix},$$

med

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

En sådan matris är på Jordans normalform.

**Bevis**