Sammanfattning av SG1218 Strömningsmekanik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

19 november 2019

Sammanfattning

Innehåll

1 Kort om notation

Vi kommer här arbeta i ett vänsterhandssystem. Vi kallar x-riktningen strömriktningen därför att vi oftast orienterar x-axeln parallellt med den riktningen det strömmar mest i. y-riktningen kallas normalriktningen och z-riktningen för spänningsriktningen.

2 Vektoranalys

Vi kommer här demonstrera lite grundläggande vektoranalys för kontinua som flödar. Mer specifikt kommer vi demonstrera hur flödet påverkar hur man gör integraler i såna kontinua.

Hastighetsfältet Hastighetsfältet $\mathbf{u}$ är ett vektorfält som anger i vilken riktning och hur snabbt ett kontinuum flödar. Vi betecknar i bland dets komponenter som u, v, w.

Tidsändring och materiell derivata Betrakta ett volymselement. Om det vid en given tid befinner sig i $\mathbf{r}$, kommer det under en tid δt förflytta sig en sträcka $\delta\mathbf{r}$. Värdet av något fält ϕ i det fluidelementet kommer då vara

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t + \delta t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \partial_t\phi\delta t + \partial_i\phi\delta x_i.$$

Den totala tidsderivatan av ϕ för det givna elementet fås genom att beräkna ändringen av fältet och dela på den lilla tidsskillnaden. Vi får då

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \partial_t\phi + \partial_i\phi\frac{\delta x_i}{\delta t} = \partial_t\phi + \partial_i\phi u_i = \partial_t\phi + (\mathbf{u}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\phi.$$

Detta kallar vi för den materiella derivatan av ϕ.

Tidsderivator av integraler Det gäller att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \mathrm{d}V\,\phi = \int\limits_V \mathrm{d}V\,\partial_t\phi,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\phi = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\partial_t\phi + \int\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathcal{S}\cdot\phi\mathbf{u} = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\partial_t\phi + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\phi\mathbf{u}).$$

3 Grundläggande koncept

Fluider Stela kroppar ger typiskt motstånd om de utsätts för skjuvning. Vi definierar fluider som ämnen som inte gör detta utan deformeras snabbare ju mer skjuvspänning de utsätts för.

Kontinua Ett kontinuum är ett medium så att egenskaper som temperatur och tryck är definierade i varje punkt i mediet som ett fält. När vi nu vet att all materia består av atomer, kan vi förstå kontinuumsbaserad teori som en approximation där fält tas som medelvärden över regioner av rummet. Detta är typiskt en bra approximation så länge alla relevanta storleksskalor är mycket större än atomära storheter.

Strömlinjer Strömlinjer är linjer som är så att hastigheten är tangentiell till linjen.

Ekvation för strömlinjen För en strömlinje ger formlikhet att

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u}.$$

Acceleration Accelerationen är materiella derivatan av hastighetsfältet.

Kontrollvolymer I strömningsmekanik kommer vi betrakta fixa kontrollvolymer, som kommer betecknas V, och materiella kontrollvolymer, som betecknas $\mathcal{V}$. En materiell kontrollvolym rör sig med fluidet, så att dens gränsyta ändras.

Inkompressibla fluider En fluid är inkompresibel om volymsmåttet av en godtycklig materiell kontrollvolym ej ändras med tiden. Detta är automatiskt uppfyld för en fix kontrollvolym. För en materiell kontrollvolym gäller det att

$$dvt \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\, 0 + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\phi \mathbf{u}).$$

Kontrollvolymen är godtycklig, vilket ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Massa Massan av en fluid inom en volym V ges av

$$\int_{V} \mathrm{d}V\, \rho$$

där ρ är tätheten.

Kontinuitetsekvationen Eftersom randen för en materiell kontrollvolym följer med den strömmande vätskan måste massan av volymen vara konstant. Detta ger

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\, \partial_t \rho + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Om detta gäller överallt, måste integranden vara noll överallt. Detta kan skrivas som

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Man kan alternativt studera kontinuitetsekvationen i en fix kontrollvolym. Mssbevarandet ger i en källfri volym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V} \mathrm{d}V\, \rho = -\int_{S} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \rho \mathbf{u}.$$

Med Gauss' sats och derivering under integraltecknet kan detta skrivas som

$$\int_{V} \mathrm{d}V\, \partial_t \rho + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Härifrån går argumentet på exakt samma sätt.

Kontinuitetsekvationen för en inkompressibel fluid För en inkompressibel fluid är då

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0.$$

I praktiken antar vi att en inkompressibel fluid har ungefär konstant täthet överallt. Om alla relevanta hastigheter är mycket mindre än ljudhastigheten i mediet, kan fluidet approximeras som inkompressibelt.

Kontinuitetsekvationen kan även härledas ur betraktningar av produktion och förlust av fluid i en fix kontrollvolym, alla Vektoranalys.

Hjälpsats för fältintegraler i inkompressibla fluider Det gäller att

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\phi &= \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\partial_t\rho\phi + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\rho\phi\mathbf{u}) \\
&= \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\partial_t\phi + \phi\partial_t\rho + \phi\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\rho\mathbf{u}) + (\rho\mathbf{u}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\phi \\
&= \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \phi\partial_t\rho + \phi\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\rho\mathbf{u}).
\end{aligned}
$$

Kontinuitetsekvationen ger att de två andra termerna försvinner och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\phi = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.$$

Rörelsemängd Rörelsemängden av en fluid inom en volym V ges av

$$\int_V \mathrm{d}V\,\rho\mathbf{u}.$$

Spänningstensorn För en (liten) volym med ytnormal $\mathbf{n}$ gäller

$$f_i = \tau_{ji}n_j$$

där τ är spänningstensorn. Spänningstensorn är ett tensorfält då den ger ett kraftfält i fluiden som måste integreras för att få totala kraften. Den totala kraften ges av

$$F_i = \int_S \mathrm{d}S_j\,\tau_{ji} = \int_V \mathrm{d}V\,\partial_j\tau_{ji}.$$

Newtons andra lag Newtons andra lag för en fluid ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho u_i = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho g_i + \partial_j\tau_{ji},$$

där $\mathbf{g}$ är volymkraften. Med hjälp av hjälpsatsen från innan fås

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\,\rho g_i + \partial_j\tau_{ji}.$$

Detta gäller för en godtycklig materiell kontrollvolym, vilket ger

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = g_i + \frac{1}{\rho}\partial_j\tau_{ji}.$$

Kontinuitetsekvationen och Newtons andra lag är de fundamentala lagarna hastighetsfältet och spänningstensorns måste uppfylla. Tyvärr ger detta bara fyra ekvationer för att bestämma de tolv okända som ingår. Genom att betrakta bevarande av rörelsemängdsmoment får man att spänningstensorn är symmetrisk, men problemet återstår. Därför behöver vi göra approximationer och dylikt.

Vorticitet Vorticiteten för ett fluid definieras som

$$\boldsymbol{\omega} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{u}.$$

Eulers ekvationer Betrakta en fluid där det inte finns friktionskrafter internt i vätskan, en så kallad inviskös fluid. För denna är spänningstensorn $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$. Då förenklas Newtons andra lag till

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = g_i - \frac{1}{\rho}\partial_i p.$$

Detta är Eulers ekvationer. De har randvillkoret att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ på randytan.

Bernoullis ekvation Bernoullis ekvation är en ekvation som ger en förenklad beskrivning av en inviskös vätska. Det gäller att

$$(\mathbf{u} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{u} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Genom att betrakta konstanta kraftfält i z-riktning och definiera $B = \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + gz$ blir Newtons andra lag

$$\partial_t \mathbf{u} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}B = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Betrakta nu en stationär vätska. Genom att integrera ekvationen ovan längsmed en strömlinje försvinner högersidan, vilket ger att B är konstant längsmed strömlinjen.

Newtons andra lag på integralform För en fix $\mathbf{g}$ kan vi integrera Newtons andra lag över en fix kontrollvolym för att ge

$$\int_V \mathrm{d}V\, \rho\partial_t u_i + \rho u_j \partial_j u_i = M g_i + \int_V \mathrm{d}V\, \partial_j \tau_{ij}.$$

För en inkompressibel fluid är $\rho u_j \partial_j u_i = \rho \partial_j (u_j u_i)$. I stationära fall fås då

$$\int_S \mathrm{d}S_j\, \rho u_j u_i = M g_i + \int_S \mathrm{d}S_j\, \tau_{ij},$$

vilket på vektorform (möjligtvis bara i inviskösa fall) blir

$$\int_S (\mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = M g_i - \int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\, p.$$

Kelvins teorem Betrakta cirkulationen

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathcal{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

kring en materiell kurva. Med hjälp av Eulers ekvationer kan man visa att för en inviskös, inkompressibel fluid är

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Töjningstensorn Betrakta ett litet fluidelement som rör sig i någon riktning x_i. Över elementets längd δx ändras hastigheten med $\partial_i u_i \delta x_i$. Över ett litet tidsintervall δt kommer då fluidelementet att förlängas med $\delta s = \partial_i u_i \delta x_i \delta t$. Den linjära töjningen definieras som förlängningen per längd och tid, och ges här i x_i-riktningen av $\partial_i u_i$.

Betrakta vidare ett fluidelement i ett hastighetsfält i x_1x_2-planet. Det kommer skjuvas över en tid δt så att det bildar en vinkel $\delta\alpha$ med x_2-axeln och $\delta\beta$ med x_1-axeln. Trigonometri ger

$$\delta\alpha = \frac{(u_1 + \partial_2 u_1 \delta x_2 - u_1)\delta t}{\delta x_2} = \partial_2 u_1 \delta t,\ \delta\beta = \partial_1 u_2 \delta t.$$

Skjuvningen per tid ges av $\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1$.

Vi definierar nu töjningstensorn

$$e_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i.$$

Från denna kan vi få töjningen av ett givet element.

Vi noterar två saker: Töjningstensorn är symmetrisk, och för inkompressibla vätskor är den spårlös. Som med andra tensorer finns det även ett huvudaxelsystem där töjningstensorn är diagonal.

Friktion i fluider Friktion i fluider uppkommer vid töjning. Vi kommer behandla den som om den är proportionell mot töjningen.

Konstitutiva relationer och Newtonska fluider För en inkompressibel fluid kommer vi arbeta med den konstitutiva relationen

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}.$$

En inkompressibel vätska som uppfyller denna konstitutiva relationen kallas för en Newtonsk fluid.

Viskositet I relationen ovan införde vi viskositeten μ.

Navier-Stokes' ekvation för en Newtonsk fluid . Vi har

$$\partial_j \tau_{ij} = -\partial_i p + \mu(\partial_j \partial_j u_i + \partial_j \partial_i u_j).$$

Genom att ordna om derivatorna innehåller den sista termen en derivata av hastighetsfältets divergens. Eftersom vi studerar Newtonska fluider är denna 0, och

$$\partial_j \tau_{ij} = -\partial_i p + \mu \partial_j \partial_j u_i.$$

Vi inför nu kinematiska ekvationen $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, och skriver då kraftekvationen som

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j \partial_j u_i + g_i.$$

Detta är Navier-Stokes' ekvation(er) för en Newtonsk fluid. På vektorform är den

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{\nabla}} p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}.$$

Eftersom det finns friktion i vätskan, har ekvationen som randvillkor att $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ på fasta ränder, eftersom vätskan kommer röra sig med randen.

Förenkling genom borttagning av kraftterm Antag att gravitationen inte driver flödet av en vätska utan bara sätter upp ett tryckfält i vätskan, och att detta är enda yttre kraften på vätskan. Då kan vi skriva $p = p' + p_g$, där p_g är trycket som uppstår på grund av gravitationen. Denna termen uppfyller $\rho\mathbf{g} - \vec{\boldsymbol{\nabla}} p_g = 0$. Då blir Navier-Stokes' ekvation

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{\nabla}} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Primmet tas oftast ej med.

4 Potentialteori

Potentialteorin som betraktas här är för fall med symmetri i z-riktning, tror jag.

Strömfunktionen Kontinuitetsekvationen för en inkompressibel fluid ger

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y = 0.$$

Lösningen av detta ges av strömfunktionen Ψ. Den definieras så att

$$\partial_y \Psi = u_x, \ \partial_x \Psi = -u_y.$$

En viktig karakteristik för strömfunktionen fås genom att betrakta en liten ändring

$$\mathrm{d}\Psi = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -u_y \,\mathrm{d}x + u_x \,\mathrm{d}y\,.$$

Om vi rör oss längsmed en strömlinje, är denna lilla ändringen lika med 0.

Potentiallösning för vorticitetsfria fluider Om en fluid är vorticitetsfri, gäller det att

$$\mathbf{u} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi.$$

Inkompressibilitetsvillkoret är då

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Potential för strömning kring en cylinder I cylinderkoordinater är gradientoperatorn $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_r}\partial_r + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\phi\partial_\phi$ och laplaceoperatorn $\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2$. För att studera strömningen av en inviskös fluid kring en cylinder med radien a centrerad i origo, söker vi då lösningen till

$$\partial_r^2\Phi + \frac{1}{r}\partial_r\Phi + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\Phi = 0,\ \partial_r\Phi\bigg|_{r=a} = 0,\ \left(\mathbf{e_r}\partial_r\Phi + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\phi\partial_\phi\Phi\right)\bigg|_{r=\infty} = U\mathbf{e_x}.$$

Vi löser detta med en separabel ansats - mer specifikt $\Phi = R(r)\cos\phi$. För att se att detta är en bra ansats, titta på det andra randvillkoret för $\theta = 0$. Givet detta fås

$$\begin{aligned}\cos\phi\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{\cos\phi}{r^2}R = 0,\\ r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - R = 0.\end{aligned}$$

Genom att ansätta $R = r^n$ för något n fås

$$(n(n-1) + n - 1)r^n = (n^2-1)r^n = 0.$$

Om detta skall gälla för alla r, måste $n = \pm 1$ och $R = Ar + \frac{B}{r}$. Första randvillkoret ger

$$A - \frac{B}{a^2} = 0,\ R = A\left(r + \frac{a}{r}a\right).$$

Andra randvillkoret ger för $\phi = 0$

$$\left(\mathbf{e_r}A\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sin\phi}{r}\mathbf{e}_\phi A\left(r + \frac{a}{r}a\right)\right)\bigg|_{\phi=0,\ r=\infty} = \mathbf{e_x}A,$$

och den slutgiltiga lösningen är

$$\Phi = U\cos\phi\left(r + \frac{a}{r}a\right).$$

Vi noterar att detta kan skrivas

$$\Phi = U\cos\phi r + U\cos(-\phi)\frac{a}{r}a = \mathrm{Re}\left(Uz + \frac{Ua^2}{z}\right).$$

Hastighetskomponenterna är

$$u_r = U\cos\phi\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),\ u_\phi = -U\sin\phi\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

d'Alemberts paradox d'Alemberts paradox är att teorin för potentialströmning ger att luftmotståndet på en godtycklig kropp är 0. Detta är rimligt eftersom vi inte tar med viskösa effekter, som kommer introduceras.

Komplex potential Vi inför nu den komplexa strömfunktionen $W = \Phi + i\Psi$. Om detta ska vara en analytisk funktion (alltså kunna skrivas som en funktion av ett komplext tal $w = x + iy$ så att realdelen och imaginärdelen behandlas likadant), måste den uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer

$$\partial_x\Phi = \partial_y\Psi,\ \partial_y\Phi = -\partial_x\Psi.$$

Genom att välja realdelen till att vara hastighetsfältets fås att imaginärdelen är strömfunktionen, och motsatt. Cauchy-Riemanns ekvationer implicerar nu direkt att både realdelen och imaginärdelen uppfyller Laplace' ekvation.

Hastighetsfältet från potentialen Hastighetsfältet kan beräknas på tre olika sätt:

- Beräkna $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}w}$ längsmed en vilken som helst riktning. Om man exempelvis fixerar y fås $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}w} = u_x - iu_y$.
- Beräkna $\vec{\nabla}\,\mathrm{Re}(W)$.
- Beräkna $\vec{\nabla} \times (\mathrm{Im}(W)\mathbf{e_z})$.

Potential för friström

$$W = Uw.$$

Strömning kring ett hörn Betrakta funktionen

$$W = Aw^n = Ar^n e^{in\theta}$$

där A är en konstant och $n > \frac{1}{2}$. Strömlinjerna ges av att imaginärdelen av W är konstant. Två såna, som motsvarar $\mathrm{Im}(W) = 0$, är $\theta = 0$ och $\theta = \frac{\pi}{n}$. Därmed kan detta tolkas som potentialen för strömning kring ett hörn med öppningsvinkel $\frac{\pi}{n}$.

Potential för en källa och en sänka Betrakta funktionen

$$W = \frac{m}{2\pi}\ln w = \frac{m}{2\pi}(\ln r + i\theta).$$

De motsvarande hastighetskomponenterna är

$$u_r = \frac{m}{2\pi r},\ u_\theta = 0.$$

Flödet ut ur en kurva kring origo ges av

$$q = \int_C \mathrm{d}l\, u_r = m.$$

Tecknet på m ger alltså om det är en källa eller sänka, och beloppet ger styrkan.

Potential för virvel Betrakta funktionen

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln w = \frac{\Gamma}{2\pi}(-\theta + i\ln r).$$

De motsvarande hastighetskomponenterna är

$$u_r = 0,\ u_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Detta är en virvel med cirkulationen Γ i medurs riktning.

Dipol Betrakta funktionen

$$W = \frac{\mu}{z}.$$

Genom att sätta $\frac{\mu}{2\,\mathrm{Im}\{W\}} = -C$ kan man visa att strömlinjerna ges av

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2.$$

Detta är cirklar med radius C och centrum i $(0, C)$, vilket motsvarar strömningar från origo i cirklar som tangerar origo.

Kutta-Jukowskis sats Kutta-Jukowskis sats säjer att lyftkraften på en kropp ges av $\rho U\Gamma$, där Γ är cirkulationen kring kroppen. Detta är en god approximation för många olika kroppar, speciellt tunna, strömlinjeformade kroppar.

5 Lösningar av Navier-Stokes' ekvation för newtonska fluider

Detta är lösningar av Navier-Stokes' ekvation för newtonska fluider i vissa specifika geometrier.

Couetteströmning Betrakta en fluid mellan två plattor. Fluiden har kinematisk viskositet ν, täthet ρ, konstant tryck p och befinner sig långt från in- och utlopp (vi säjer att strömningen är fullt utbildad). Plattorna är på ett avstånd h i y-riktning. Ena plattan är fäst, och andra plattan rör sig med en hastighet U i x-riktning. Vi vill nu bestämma stationära hastighetsfältet, volymsflödet per enhet längd i z-riktning och spänningen på de två plattorna.

Vi noterar först att problemet är symmetriskt i både x och z. Eftersom det inte finns något som driver flöde i z-riktning, måste $u_z = 0$. Då ger inkompressibilitetsvillkoret att u_y är konstant och lika med 0 för att uppfylla randvillkoret. Det som återstår av Navier-Stokes' ekvation är

$$\nabla^2 u_x = \partial_y^2 u_x = 0,$$

och slutligen

$$u_x = U\frac{y}{h}.$$

Volymsflödet per längdenhet ges av

$$\Phi = \frac{1}{l}\int\limits_{x=c} \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \mathrm{d}z \int\limits_0^h \mathrm{d}y\, U\frac{y}{h} = \frac{1}{2}Uh.$$

För att hitta spänningarna längsmed ytorna, konstaterar vi först att ytorna har normalvektor $n_i = \pm\delta_{i2}$. Ytspänningarna ges då av

$$\tau_{ij}n_j = \pm\tau_{i2} = \pm\mu(\partial_i u_2 + \partial_2 u_i).$$

Den enda nollskilda kraftkomponenten är den första, och ges av

$$f_1 = \tau_{1j}n_j = \pm\mu\frac{U}{h} = \pm\frac{\rho\nu U}{h}.$$

Poiseuille-strömning Betrakta en fluid mellan två plattor. Fluiden har kinematisk viskositet ν, täthet ρ, tryck p med konstant gradient $-K\mathbf{e_x}$ och strömningen är stationär och fullt utbildad. Plattorna är båda fästa på ett avstånd h i y-riktning. Vi vill nu bestämma stationära hastighetsfältet, volymsflödet per längdenhet i z-riktning och spänningen på de två plattorna.

På samma sätt som för Couetteströmning fås $u_y = u_z = 0$ och symmetri i x och z. Navier-Stokesä ekvation ger då

$$\nu\nabla^2 u_x = \nu\partial_y^2 u_x = \frac{1}{\rho}\mathbf{e_x}\partial_x p = -\frac{K}{\rho},\ \partial_y^2 u_x = -\frac{K}{\mu}.$$

Detta har lösning

$$u_x = \frac{1}{2}\frac{Kh^2}{\mu}\left(\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right).$$

Volymsflödet per längdenhet ges av

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{l}\int\limits_{x=c} \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{l}\int\limits_0^l \mathrm{d}z \int\limits_0^h \mathrm{d}y\, \frac{1}{2}\frac{Kh^2}{\mu}\left(\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{Kh^3}{\mu}\int\limits_0^1 \mathrm{d}u\,(u - u^2) \\ &= \frac{1}{12}\frac{Kh^3}{\mu}.\end{aligned}$$

Normalvektorn ges på samma sätt som innan, och vi får

$$\tau_{ij}n_j = \pm\mu(\partial_i u_2 + \partial_2 u_i).$$

Enda nollskilda komponenten är

$$f_1 = \pm\frac{1}{2}Kh\left(1 - 2\frac{y}{h}\right).$$

Denna är lika med $\frac{1}{2}Kh$ på båda ytorna.

Stokes' första problem Betrakta en newtonsk fluid med kinematisk viskositet ν och täthet ρ i det halvoändliga rummet $y > 0$. Vid randen börjar en platta röra sig med hastighet U i x-riktningen vid $t = 0$. Vi vill nu bestämma hastighetsfältet.

Systemet är symmetriskt i xz-planet, och inkompressibiliteten ger då $\partial_y u_y = 0$. För att uppfylla randvillkoret måste då $u_y = 0$. Återigen finns det inget som driver flöde i z-riktning, så $u_z = 0$. Navier-Stokes' ekvation ger då

$$\partial_t u_x = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu\nabla^2 u_x.$$

Återigen använder vi symmetrin för att skriva detta som

$$\partial_t u_x = \nu\partial_y^2 u_x.$$

Vi kommer lösa detta med en likformighetsansats med den dimensionslösa variabeln $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$ på formen

$$u_x = Uf(\eta).$$

Jag borde lösa klart det här någon gång.

6 Viskösa effekter

Bildningen av gränsskikt Vidhäftningsvillkoret gör att nära ytor ändras hastigheten extremt snabbt i ett tunt skikt nära ytan, det så kallade gränsskiktet. Vi kommer studera beteendet i och utanför såna gränsskikt i fall som är symmetriska i z-riktning.

Formulering av problem Vi kommer betrakta strömning av en fluid i x-riktning med friströmshastighet U. Fluiden strömmar förbi en platta som är parallell med x-riktningen och har längd L. Över ytan finns ett gränsskikt med tjocklek δ

Reynoldstalet Navier-Stokes' ekvation ger

$$u_x\partial_x u_x + u_y\partial_y u_x = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu(\partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x).$$

Vi studerar först problemet i gränsskiktet. Här är viskösa krafter viktiga, så y-derivatan kommer vara stor här. Om vi av någon oklar anledning antar att x-derivatan är av ledande ordning på vänstersidan, blir detta

$$u_x\partial_x u_x = \nu\partial_y^2 u_x.$$

Detta låter oss göra en grov storleksuppskattning

$$\frac{U^2}{L} = \nu\frac{U}{\delta^2},\ \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}}},$$

där $\mathcal{R} = \frac{UL}{\nu}$ är Reynoldstalet. I de flesta tillämpningar är Reynoldstalet stort, så gränsskiktet är tunt.

Dimensionslösa variabler Vi vill nu förenkla Navier-Stokes' ekvationer för stora Reynoldstal. För att göra detta låter vi U och p_∞ vara hastigheten och trycket långt uppströms. Vi antar att u_x är av storleksordning U och att $\partial_x p = \rho u_x \partial_x u_x$. Detta ger storleksordningsuppskattningen

$$p_\infty - p \approx \rho U^2.$$

Vi kan även skatta vertikala hastigheten med hjälp av inkompressibilitetsvillkoret som

$$u_y \approx \frac{\delta}{L} U = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}}} U.$$

Detta motiverar oss att införa de dimensionslösa variablerna

$$x' = \frac{x}{L},\ y' = \frac{y}{\delta} = \sqrt{\mathcal{R}} \frac{y}{L},\ u_x' = \frac{u_x}{U},\ u_y' = \sqrt{\mathcal{R}} \frac{u_y}{U},\ p' = \frac{p_\infty - p}{\rho U^2}.$$

I termer av dessa variabler är Navier-Stokes' ekvationer

$$\begin{aligned}
u_x' \partial_{x'} u_x' + u_y' \partial_{y'} u_x' &= -\partial_{y'} p' + \frac{1}{\mathcal{R}} \partial_{x'}^2 u_x' + \partial_{y'}^2 u_x', \\
\frac{1}{\mathcal{R}} (u_x' \partial_{x'} u_y' + u_y' \partial_{y'} u_y') &= -\partial_{y'} p' + \frac{1}{\mathcal{R}^2} \partial_{x'}^2 u_x' + \frac{1}{\mathcal{R}} \partial_{y'}^2 u_x', \\
\partial_{x'} u_x' + \partial_{y'} u_y' &= 0.
\end{aligned}$$

För stora Reynoldstal kan vi nu bortse från många termer här. I våra ursprungliga variabler fås då

$$\begin{aligned}
u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x &= -\partial_y p + \partial_y^2 u_x, \\
0 &= -\partial_y p, \\
\partial_x u_x + \partial_y u_y &= 0.
\end{aligned}$$

Man kan tydligen även använda Bernoullis ekvation (fast inte) längsmed en strömlinje som följer gränsskiktets rand. Vi får då

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = c,\ -\frac{1}{\rho} \partial_x p = U \partial_x U.$$

Nu har vi ställt upp alla ekvationer, och vi har randvillkoren

$$u_x(x, 0) = u_y(x, 0) = 0,\ u_x(x, \infty) = U,$$

Mått på tjocklek Härifrån måste vi välja någon definition av gränsskiktets tjocklek. Detta är tre olika sätt att göra det på.

Delta-nittinio Delta-nittinio-måttet definieras av

$$u(x, \delta_{99}) = 0.99U.$$

Förträngningstjockleken Förträngningstjockleken definieras som avståndet i vertikal riktning en strömlinje långt från väggen förflyttas på grund av väggen.

För att beräkna den observerar vi att masskonserveringen ger

$$\int_0^h \mathrm{d}y\, U = \int_0^{h+\delta_\star} \mathrm{d}y\, u_x,$$

där vi gör andra integralen på ett (långt?) avstånd från där strömningen möter plattan. Eftersom vi pratar om strömlinjer långt från väggen, gör vi skattningen $u_x = U$ långt borta, vilket ger

$$\delta_\star = \int_0^h \mathrm{d}y\, 1 - \frac{u_x}{U}.$$

Rörelsemängdtjocklek Om tryckgradienten är noll fås för kontrollvolymen vi studerade ovan

$$-f = -\int_0^h \mathrm{d}y\, \rho U^2 + \int_0^{h+\delta_\star} \mathrm{d}y\, \rho u_x^2$$

där

$$f = \int_0^x \mathrm{d}x\, \mu \partial_y u_x(x,0)$$

är friktionskraften i x-riktning på den delen av plattan som är innanför kontrollvolymen. Vi definierar nu rörelsemängdstjockleken

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{f}{\rho U^2} \\ &= \int_0^h \mathrm{d}y\, 1 - \left(\frac{u_x}{U}\right)^2 + \frac{1}{U^2}\int_h^{h+\delta_\star} \mathrm{d}y\, u_x^2 \\ &\approx \int_0^h \mathrm{d}y\, 1 - \left(\frac{u_x}{U}\right)^2 + \delta_\star \\ &= \int_0^h \mathrm{d}y\, \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right).\end{aligned}$$

Vi kan tydligen skriva detta som

$$\theta = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right).$$

Blasius' gränsskikt Blasius' lösning för gränsskiktet är en något annorlunda lösning av samma problemet vi har studerat. I detta fall är tryckgradienten lika med noll och strömningen möter plattan i origo. Inkompressibilitetsvillkoret låter oss införa strömfunktionen Ψ, och Navier-Stokes' ekvationer ger

$$\partial_y \Psi \partial_y \partial_x \Psi - \partial_x \Psi \partial_y^2 \Psi = \nu \partial_y^3 \Psi.$$

Eftersom systemet ej ändras under addition av en konstant till strömfunktionen, kan vi välja $\Psi(x,0) = 0$. De övriga randvillkoren blir

$$\partial_y \Psi(x,0) = 0,\ \partial_y \Psi(x,y) \to U.$$

Vi kommer lösa detta problemet med en likformighetsansats

$$u_x = U f'(\eta),\ \eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Detta ger

$$\Psi = \int_0^y \mathrm{d}y\, u_x = U\delta \int_0^\eta \mathrm{d}\eta\, f'(\eta) = U\delta f(\eta).$$

Insatt i Navier-Stokes' ekvation ger detta

$$f''' = -\left(\frac{U\delta}{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\right) f f''.$$

Om detta skall gälla, måste prefaktorn vara en konstant. Vi kan sätta den till $\frac{1}{2}$, vilket ger

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Att ändra den konstanten skulle bara motsvara en omskalning av enheterna, så vi ser att valet av konstant är godtyckligt. Den återstående ekvationen är

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0,$$

med randvillkor

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f'(\eta) \to 1.$$

Vi kan även beräkna väggskjuvspänningen

$$\tau = \mu \partial_y u_x(x, 0) = \frac{0.332 \rho U^2}{\sqrt{\mathcal{R}_x}}$$

där $\mathcal{R}_x$ är Reynoldstalet beräknad med x. Det totala aerodynamiska moståndet på plattan ges då av

$$F = \int_0^L \mathrm{d}x\, \tau = \frac{0.664 \rho U^2}{\sqrt{\mathcal{R}_L}}.$$

Vi kan även definiera en motståndskoefficient

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1.33}{\sqrt{\mathcal{R}_L}}.$$

Avlösning Kring kroppar som omges av strömning kommer det bildas gränsskikt där vorticiteten är hög. Detta kommer påverka strömningen med olik karaktär beroende på ett Reynoldstal som beskriver strömningen.

Motståndskraft på kropp i fluid Betrakta en statisk kropp i en fluid med friströmshastighet $U\mathbf{e_x}$. På denna är motståndskraften

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 S$$

där S är den projicerade arean i strömriktningen och C_D är en motståndskoefficient som beror på Reynoldstalet.