Sammanfattning av SE1055 Hållfasthetslära

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

28 januari 2019

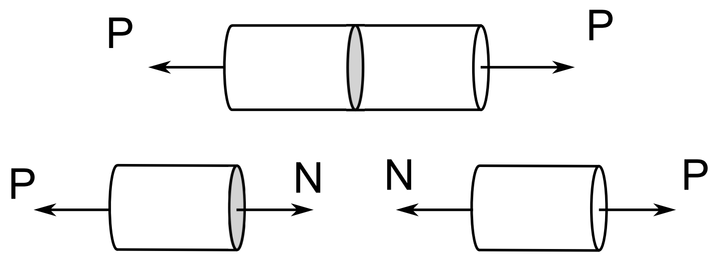
Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SE1055 Hållfasthetslära. Den innehåller essentiell teori.

Innehåll

1 Enaxliga problem

Krafter på en stång Betrakta en stång med tvärsnittsarea A som utsätts för en kraft P i varje ända, med motsatt riktning i varje ända, som visad i figur 1.



Figur 1: Illustration av en stång som utsätts för en dragkraft och de orsakade inre krafterna.

Kraften P i änderna propageras som inre krafter i stången. Om vi betraktar det indikerade tvärsnittet, manifesteras den inre kraften som en normalkraft på varje halva. Om vi definierar positiv riktning för normalkraften och dragkraften som i figuren, ger kraftjämvikten att $N = P$. Om dragkraften blir en tryckkraft, ändrar givetvis normalkraften riktning.

Spänning I hållfasthetslära är vi intresserade av påkänningen på materialet. Den beror av beloppet av normalkraften, men kan även spridas ut över tvärsnittet. Därför definierar vi spänningen

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Jämvikten från innan ger

$$\sigma = \frac{P}{A}.$$

Deformation När en stång utsätts för spänning, kommer den att deformeras. Mer specifikt kommer den förlängas med en längd δ. Eftersom förlängningen av varje del kommer från kraftjämvikten mellan normalkraften och dragkraften, kommer förlängningen för en given dragkraft bero av längden. Vi definierar därför töjningen

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

där L_0 är stångens ursprungliga längd.

Typer av samband i hållfasthetslära I hållfasthetsläran har vi tre typer av samband:

- samband mellan krafter.
- samband mellan deformationer.
- konstitutiva samband (beskrivar materialbeteende).

Hookes lag Om man gör dragningsprov på olika material för små deformationer, blir plottet av σ mot ε approximativt linjär. Från detta får vi Hookes lag:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

E är elasticitetsmodulen, och beskrivar hur styvt materialet är. Från detta kan vi få

$$P = \frac{EA}{L}\delta$$

för en stång.

Normalspänning Vi utvidgar våran definition av spänning till spänningar som fördelas inhomogent över tvärsnittet vid att betrakta en inre kraft ΔF som verkar på ett arealement ΔA, med riktningar som tidigare. Då definieras normalspänningen som

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Normaltöjning Vi utvidgar även definitionen av töjning till töjningar som fördelas ojämnt över stavens längd. Om deformationen i en punkt är $u(x)$, ges töjningen av ett litet element med längd Δx av

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Vi ser av detta att töjningen är linjär, så vi kan addera bidrag till den.

Termoelasticitet Låt T beteckna en stångs temperatur. En temperaturändring orsakar en termisk töjning

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T,$$

där α är längdutvidgningskoefficienten. Man behöver givetvis utgå från en referenstemperatur.

Allmänt enaxligt tillstånd Från det vi har sett hittils, kan vi skriva upp en differentialekvation som beskriver det enaxliga tillståndet.

Betrakta en stång med variabel tvärsnittsyta där det överallt i kroppen verkar en volymskraft $K(x)$ (kraft per volym), samt krafter P_V respektiva P_H i varje ända. Vi betraktar ett litet element med tjocklek dx. I ena ändan verkar kraften $K(x)A\,\mathrm{d}x$ och en normalkraft $N(x)$ på grund av krafterna på volymelementet till vänster, och i andra ändan verkar en normalkraft $N(x+\mathrm{d}x)$ på grund av krafterna på volyemelementet till höger.

Kraftjämvikten ger

$$\begin{aligned} N(x+\mathrm{d}x) - N(x) + K(x)A\,\mathrm{d}x &= 0, \\ \mathrm{d}N\,x + K(x) &= 0. \end{aligned}$$

Vi inför nu definitionen av töjninc och skriver den som en linjärkombination av bidrag från spänning och termoelasticitet, vilket ger

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T, \\ \sigma &= E(\varepsilon - \alpha \Delta T). \end{aligned}$$

Kombinerad med definitionen av töjning ger det

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sigma A) + K(x)A &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EA(\varepsilon - \alpha\Delta T)) + K(x)A &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + K(x)A &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EA\alpha\Delta T). \end{aligned}$$

Detta kommer med randvillkor, och är typiskt randvillkor i deformationen eller i spänningen. Eftersom spänningen är proportionell mot derivatan av deformationen, motsvarar dessa Dirichlet- respektiva Neumannvillkor.

2 Koncept i tre dimensioner

Tvärkontraktion När man gör ett dragningsprov på en stång, genomgår den deformation i längdriktning samtidigt som tjockleken minskar. Detta kallas tvärkontraktion. Töjningen ε_t av tjockleken är relaterad till töjningen i längdriktning genom

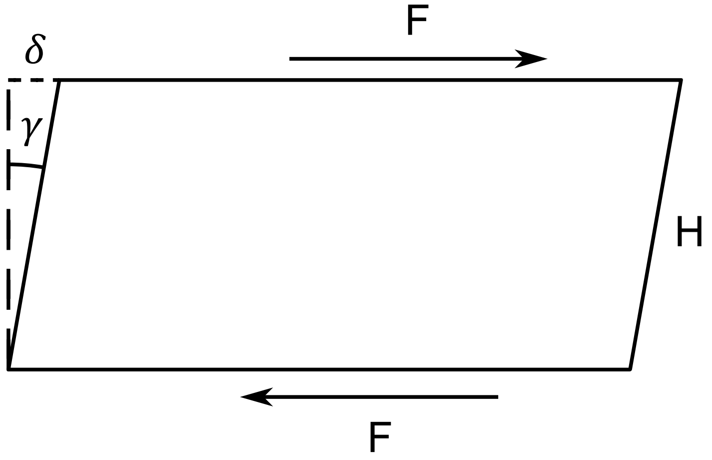
$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon,$$

där ν är Poissons konstant. Termodynamiken ger att $-1 \leq \nu \leq 0.5$.

Skjuvspänning Betrakta två plattor som ligger på varandra och dras åt motsatta håll av en kraft F på varje. Om de inte dras isär, balanseras dragkrafterna av krafter i kontaktytan. Låt A vara kontaktytan mellan plattorna. Då definieras skjuvspänningen som

$$\tau = \frac{F}{A}.$$

Deformation från skjuvkrafter Betrakta ett rätblock med basarea A och höjd H som dras av motsatt riktade krafter med belopp F på varje sida, illustrerad i figur 2.



Vi kan här definiera skjuvspänningen som

$$\tau = \frac{F}{A},$$

då vi kan tänka oss att plattorna som dras isär är tunna skikt i materialet. Skjuvkrafterna kommer skapa en deformation δ på en sida motsvarande vridning med en vinkel γ. Denna vinkeln uppfyller

$$\tan\gamma = \frac{\delta}{H}.$$

För små deformationer kan vi approximera

$$\gamma = \frac{\delta}{H}.$$

Experimentellt har man sett att

$$\tau = G\gamma,$$

där G är skjuvmodulen.

Samband mellan materialstorheter För ett isotropt material gäller att

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Statiskt bestämta och obestämta problem Ett problemt är statiskt bestämt om alla inre krafter och reaktionskrafter kan bestämmas enbart med jämvikt. Detta är möjligt om det verkar maximalt 3 krafter i planet eller 6 i rymden.

Om ett problem ej är statiskt bestämt, är det statiskt obestämt. Då räcker icke jämviktsekvationerna, och det motsvarar att man kan ta bort ett element och vara kvar i jämvikt.

Elastisk vridning Antag att man har en stång med cirkulärt tvärsnitt fäst i ena ändan som man vrider med ett moment M_v (i varje ända). Detta ger en vinkeldeformation θ i det yttersta tvärsnittet och γ relativt linjen parallellt med stångens riktning. Om stången har en längd l och en radius a, ger detta

$$L\gamma = a\theta.$$

Kombinerad med resultatet från delen om skjuvspänning ger detta

$$\frac{\theta}{L} = \frac{\tau}{G}.$$

Antag nu att $\tau = \frac{M_\mathrm{v}}{K}$. Detta ger

$$\frac{\theta}{L} = \frac{M_\mathrm{v}}{GK}.$$

K är en konstant som beror av stångens geometri.

Hur beräknar vi K? Jo, man integrerar momentets differential över tvärsnittet. Vi vet att detta differentialet ges av kraft gånger arm, och det är så skjuvspänningen kommer in.

3 Materialers beteende

Idealplastisk deformation De flesta material beter sig så att när de deformeras förbi en viss punkt, deformeras de plastiskt i stället för elastiskt. En approximation för att beskriva detta beteendet är att låta deformationen vara elastisk upp till en töjningsgräns ε_s, och låta σ vara konstant lika med en sträckgräns σ_s för större töjningar.

Om materialet komprimeras, visar det sig att det elastiska beteendet ofta är likt.

När lasten sedan tas bort, kommer stången förkortas igen tills lasten blir lika med noll. Denna kontraktionen är parallell med det elastiska regimet, och konsekvensen är att man får en permanent deformation.

Enkelriktad fiberkomposit En enkelriktad fiberkomposit är ett material som består av fibrar som alla är parallella och ett omkransande material som kallas en matris. Matrisen och fibern finns i volymfraktioner v_m respektiva v_f, och de har elasticitetsmoduler E_m respektiva E_f.

Som en modell för belastning längsmed fibrernas riktning betraktar vi uppställningen som ges i figur 2.

Figur 2: Illustration av en del av en enkelriktad fiberkomposit som belastas längsmed fiberns riktning.

Kraftjämvikten ger $F = \sigma A$. Vi antar att den utskurna biten är ett rätblock, så de två delarna har tvärsnittsareor som ges av totala tvärsnittsarean och volymfraktionerna. Detta ger

$$F = \sigma A = (\sigma_\mathrm{f} v_\mathrm{f} + \sigma_\mathrm{m} v_\mathrm{m})A.$$

Därmed ges spänningen av

$$\sigma = \sigma_\mathrm{f} v_\mathrm{f} + \sigma_\mathrm{m} v_\mathrm{m}.$$

Vi antar att fibern och matrisen inte glider relativt varandra, och därmed har de samma deformation och töjning. Hookes lag ger

$$\sigma_\mathrm{f} = E_\mathrm{f}\varepsilon, \sigma_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}\varepsilon,$$

vilket insatt i uttrycket ovan ger

$$\begin{aligned}\sigma &= v_\mathrm{f} E_\mathrm{f}\varepsilon + v_\mathrm{m} E_\mathrm{m}\varepsilon \\ &= (v_\mathrm{f} E_\mathrm{f} + v_\mathrm{m} E_\mathrm{m})\varepsilon.\end{aligned}$$

För hela biten med fiberkomposit ger Hookes lag då

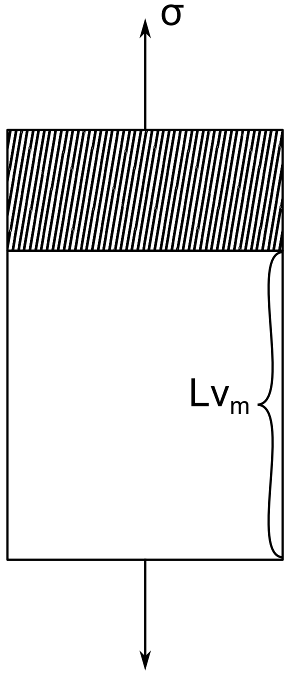
$$E_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{f}} E_{\mathrm{f}} + v_{\mathrm{m}} E_{\mathrm{m}}$$

som elasticitetsmodulen vid längsgående spänning. Vi får även

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{f}} &= E_{\mathrm{f}} \varepsilon \\ &= \frac{E_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{L}}} \sigma \end{aligned}$$

som spänning i fibrerna, och motsvarande för matrisen.

På samma sättet beskriver vi även fallet när spänningen går på tvärs av fibrernas riktning, som illustrerad i figur 3.



Figur 3: Illustration av en del av en enkelriktad fiberkomposit som belastas normalt på fiberns riktning.

Här kan vi snitta och se att $\sigma_{\mathrm{f}} = \sigma_{\mathrm{m}}$. Den totala förlängningen i denna biten ges av

$$\delta = \delta_{\mathrm{f}} + \delta_{\mathrm{m}} = L_{\mathrm{f}} \varepsilon_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{m}} \varepsilon_{\mathrm{m}}.$$

Töjningen ges då av

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\delta}{L_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{m}}} \\ &= \varepsilon_{\mathrm{f}} \frac{L_{\mathrm{f}}}{L_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{m}}} + \varepsilon_{\mathrm{m}} \frac{L_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{m}}} \\ &= v_{\mathrm{f}} \varepsilon_{\mathrm{f}} + v_{\mathrm{m}} \varepsilon_{\mathrm{m}}. \end{aligned}$$

Hookes lag ger

$$\varepsilon = v_{\mathrm{f}} \frac{\sigma}{E_{\mathrm{f}}} + v_{\mathrm{m}} \frac{\sigma}{E_{\mathrm{m}}},$$

och vi ser att

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{f}}} + \frac{v_{\mathrm{m}}}{E_{\mathrm{m}}}.$$