Sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

13 december 2020

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik.

Innehåll

1 Lite om notation

I denna kursen kommer beteckningarna avvika något från de jag brukar använda. Differentialerna för längd, yta respektiva volym kommer betecknas $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}\tau$ för att inte skapa förvirring när man jämför med fysikaliska storheter som kommer dyka upp.

Vi kommer vara intresserade av interaktioner mellan kroppar ute i rymden och kroppar som ger upphov till elektromagnetiska fält. Vi inför därför källpunktsvektorn $\mathbf{r}'$ till någon punkt på källan och fältpunktsvektorn $\mathbf{r}$ till någon kropp som känner av det elektromagnetiska fältet. Vi inför även vektorn $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ från källpunkt till fältpunkt. Notera att ett $'$ även kommer användas i integration för att skilja mellan integraler över fältpunkter och källpunkter. Icke-primade differentialer kan även betyda integrationer över områden med både källpunkter och fältpunkter (typisk innehåller integranden källan, så att rena fältpunkter ej bidrar).

Apropå, om jag någon gång inte specifierar integrationsområde, betyder det typiskt att man integrerar över hela rummet.

2 Lite vektoranalys och annan matte

Diracs delta i högre dimensioner Diracs deltafunktion generaliserar utan vidare till högre dimensioner. Med andra ord är $\delta(\mathbf{r})$ en funktion som är noll överalt förutom origo och som uppfyller

$$\int_V \mathrm{d}V\, \delta(\mathbf{r}) = 1$$

om V innesluter origo.

Nablaoperatorn med avseende på fält- och källpunkt Med hjälp av de kartesiska basvektorerna kan vi skriva källpunktsvektorn och fältpunktsvektorn som

$$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e_i},\ \mathbf{r}' = r_i' \mathbf{e_i}.$$

Vidare kan vi skriva nablaoperatorn med avseende på de två vektorerna som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e_i}\partial_i,\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}' = \mathbf{e_i}\partial_i'.$$

Betrakta nu en funktion av $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Då gäller det att

$$\partial_i f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\partial_i R = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\partial_i' R = -\partial_i' f.$$

Detta ger alltså att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}' f.$$

Gradienten av R Betrakta funktionen

$$f(\mathbf{R}) = \sqrt{R_j R_j} = R.$$

Vi har

$$\partial_i R = \frac{1}{2}(R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2R_j \partial_i R_j = (R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} R_j \partial_i (r_j - r_j') = \frac{R_j}{R}\delta ij = \frac{R_i}{R}\delta ij.$$

Detta ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} R = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}' R = \mathbf{e_R}.$$

Divergensen av $\frac{1}{R^2}$-fältet Med resultatet ovan har vi

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^3}\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}R + \frac{1}{R^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{R} \\
&= -\frac{3}{R^4}\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{R} + \frac{3}{R^3} \\
&= -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

så länge $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.

Mer allmänt kan man visa att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R} = 4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Jag kan inte bevisa det, men jag kan rationalisera det kort. Utanför origo är det klart att detta stämmer. För att förstå vad som händer i origo, kan vi tillämpa den koordinatoberoende definitionen av divergens. Med den definitionen är divergensen av ett vektorfält kvoten av fältets flöde genom en litan yta kring en punkt och volymen den lilla ytan inneslutar. Med flervariabelanalys kan man visa att för fältet vi betraktar är flödet exakt 4π. Om vi jämför detta med Diracs delta, ser vi att det verkar stämma.

$\frac{1}{R}$ och Greenfunktioner Med resultaten vi har får vi även

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}R = -\frac{1}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R}.$$

Detta betyder att

$$\nabla^2\frac{1}{R} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{1}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Detta betyder att $\frac{1}{R}$ är en Greenfunktion till Laplaceoperatorn (i tre dimensioner).

3 Elektrostatik

Coulombs lag Elektrostatiken utgår från Coulombs lag, som är en experimentellt framtagen lag. Den säjer att om två laddningar Q och q är separerade med en sträcka $\mathbf{R}$, är kraften mellan dem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}\mathbf{R}.$$

Alternativt, i termer av enhetsvektorer,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R}.$$

Båda laddningarna antas ha försumbar utsträckning, och betecknas punktladdningar. ε_0 kallas vakuumpermittiviteten, och har enhet $\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Elektriskt fält Det elektriska fältet som genereras av en laddning Q definieras som att en liten testladdning q upplever en kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

från Q. I våran definition skulle vi kunna lägga på ett $\lim\limits_{q\to 0}$, för att vara tydliga.

Baserad på detta får vi att en punktladdning Q genererar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\mathbf{e}_\mathbf{R}.$$

Linjäritet och allmäna uttryck för elektriska fältet Eftersom krafter superponeras, gör även elektriska fält det. I diskreta fall motsvarar detta att summera över punktladdningar. I kontinuerliga fall integrerar vi i stället, där varje element i integrationen behandlas som en punktladdning, och vi får

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}q \, \frac{1}{R^2} \mathbf{e_R}.$$

Laddningen kan vara spridd ut på en linje, en yta eller en volym, i vilka fall vi får $\mathrm{d}q = \rho \, \mathrm{d}l$, $\mathrm{d}q = \sigma \, \mathrm{d}S$ respektiva $\mathrm{d}q = \lambda \, \mathrm{d}V$. Förutom de olika elementerna finns en linjeladdningstäthet, ytladdningstäthet eller volymladdningstäthet. Notera att med hjälp av Diracs delta kan alla dessa fallen skrivas som volymladdningstätheter.

Gauss lag För att härleda Gauss lag börjag vi med att titta på flödet av fältet $\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}$ genom en godtycklig yta. Integrationselementet

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathbf{e_R} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}{R^2}$$

är rymdvinkeln som areaelementet upptar när det ses från origo. Vi kan se på något sätt att detta motsvarar att projicera areaelementet ned på enhetssfären kring origo. Alternativt, om fältets källa är en linjeladdning, skulle man projicera ned på enhetscirkeln. Flödet vi betraktar ges då av fönsterfunktionen

$$f(\mathbf{r}') = \int\limits_S \mathrm{d}S \, \frac{\mathbf{e_R} \cdot \mathbf{e_n}}{R^2} = \int\limits_\Omega \mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \mathbf{r}' \text{ innanför } S, \\ 0, & \mathbf{r}' \text{ utanför } S. \end{cases}$$

Vi kommer nu ihåg hur elektriska fältet ser ut på integralform, specifikt som en volymintegral, och får då för flödet genom en godtycklig yta

$$\begin{aligned} \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{\rho}{R^2} \mathbf{e_R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \rho \frac{\mathbf{e_R}}{R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \, \rho f(\mathbf{r}') \\ &= \frac{Q_{\text{innesluten}}}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Den sista integralen är lika med laddningen som är innesluten i S eftersom fönsterfunktionen ger ett bidrag 4π om och endast om det finns laddning i den aktuella punkten.

Gauss' lag är ett bra verktyg för att beräkna elektriska fält för geometrier med mycket symmetri.

Gauss' lag på differentialform Betrakta nu en godtycklig yta S som exakt inneslutar (den lite godtyckliga) volymen V. Gauss' lag ger då

$$\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}\tau \, \rho.$$

Vi kan använda divergenssatsen för att skriva om vänstersidan som en integral över V. Detta ger

$$\int\limits_V \mathrm{d}\tau \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}\tau \, \rho.$$

Eftersom V är godtyckligt vald, måste det gälla att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Randvillkor för elektrist fält Ytladdningar ger diskontinuiteter i elektriskt fält. För att studera det, betrakta en punkt på en yta. Gör en liten låda kring punkten så att fältet är ungefär konstant på sidorna som inte rör ytan, och döp varje sida 1 och 2. Inför även (enhets)normalvektorn $\mathbf{n}_{12}$. Gauss' lag ger oss, om bara tar med de nämnda sidorna, att elektriksa fältets normalkomponent relativt ytan uppfyller

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} A - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

där A är sidornas yta. Positiv riktning för fältets normalkomponent är ut från ytan. Vid att låta lådan bli oändligt tunn kommer även de andra sidorna inte att ge något bidrag, varför det här måste stämma. Vi får därmed att

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Vi kan även betrakta en liten fyrkantig slinga på samma sätt, med två sidor parallella med ytan och två normala på ytan. Eftersom integralen av elektriska fältet kring en sluten kurva alltid är 0, får vi

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0,$$

där fältets komponenter ges med avseende på någon riktning. Eftersom denna slingan kan ha vilken som helst orientering så länge man har två paralllella och två normala sidor, måste det gälla för ala tangentiella riktningar, vilket ger

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}.$$

Dessa två resultat kan sammanfattas som

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}_{12}.$$

Kraften på en ytladdning Kring en ytladdning är elektriska fältet diskontinuerligt, så hur beräknar man kraften på en sådan? Med hjälp av superposition kan elektriska fältet skrivas som en summa av bidrag från själva laddningen och allt annat. Termen från andra saker, som är den som ger kraften, är kontinuerlig i ytan eftersom man skulle kunna ta bort ytladdningen utan att ändra den. Vidare är fältet tillräcklig nära ytladdningen $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}_{12}$, som försvinner om man tar medelvärdet. Alltså ges kraften av laddningen gånger medelärdet av fältet på varje sida.

Elektrostatisk potential Med vår kunskap från vektoranalysen kan vi skriva

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \, \rho \vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{R} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \, \rho \frac{1}{R} \right).$$

Vi definierar därmed den elektrostatiska potentialen enligt

$$\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V.$$

Från våran definition ser vi att nollnivån för potentialen kan sättas arbiträrt, då det elektriska fältet (som är det som är fysikaliskt) inte ändras om potentialen ändras med en konstant. Vi brukar lägga nollnivån i oändligheten, vilket för ändliga laddningstätheter ger

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \, \rho \frac{1}{R}.$$

En konsekvens av detta är

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Potential och elektrisk spänning Betrakta storheten $\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Vi har

$$\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = E_i\,\mathrm{d}x_i = -\partial_i V\,\mathrm{d}x_i = -\,\mathrm{d}V\,.$$

Om vi nu jämför detta med den elektriska spänningen

$$U_{12} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}$$

mellan två punkter (som är den välkända spänningen vi känner från kretsvärlden), kan vi se att detta blir

$$U_{12} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{E} = -\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}V = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2),$$

oberoende av vägen mellan punkterna. Om vi lägger potentialens referens i oändligheten, ser vi då att

$$V(\mathbf{r}_0) = -\int\limits_{\infty}^{\mathbf{r}_0} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{E},$$

ett typ inverst påstående av $\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V$. Intgrationsbanan parametriseras från ∞ till $\mathbf{r}_0$, ett misstag jag gör lite för många gånger. Vi ser även från detta att

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}.$$

Potential och arbete Antag att du vill förflytta en laddning q i ett elektriskt fält. Den minsta kraften du måste verka med på laddningen för att göra detta är $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$, eftersom du arbetar mot det elektriska fältet. Arbetet du gör då är

$$W = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{F} = -q\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{E} = q(V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)).$$

Med andra ord är potentialskillnaden mellan två punkter lika med arbetet som måste göras för att förflytta en laddning från ena punkten till den andra per laddning.

Entydighetssats för potentialen Betrakta en region H med känd laddningstäthet. Inuti (men inte en del av) H finns tre regioner avgränsade av ytorna S_D, S_N och S_Q (med normalvektorerna pekande in mot de avgränsade regionerna). På S_D är $V = V_\mathrm{S}$ känd. På S_N är $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V = -\mathbf{E}_\mathbf{n}$ känd. S_Q är en perfekt ledare med känd total ytladdning Q. Vi vill försöka visa att elektriska fältet är entydigt i H.

För att visa detta, antag att vi har två lösningar V_1 och V_2 och bilda $V_0 = V_1 - V_2$. Då vet vi att $\nabla^2 V_0 = 0$ i H, $V_0 = 0$ på S_D och S_Q, $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = 0$ på S_N och $\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}S\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = \mathbf{0}$. Detta stämmer eftersom

$$\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}a\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = \int\limits_{S_Q} \mathrm{d}a\,\sigma$$

enligt randvillkoret fär elektriska fältet. Vi får därmed

$$\int\limits_{S_D+S_Q+S_N} \mathrm{d}a\,V_0\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = \int\limits_{H} \mathrm{d}\tau\,V_0\nabla^2 V_0 + \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}}V_0\right|^2 = \int\limits_{H} \mathrm{d}\tau\left|\vec{\boldsymbol{\nabla}}V_0\right|^2.$$

På S_D och S_N är en av faktorerna i integranden på vänstersidan lika med 0, så vi behöver endast betrakta S_Q. Här har vi att V_0 är konstant på ytan, vilket ger

$$\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}a\,V_0\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0 = V_0\int\limits_{S_Q} \mathrm{d}a\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{n} V_0.$$

Gauss' lag ger att detta är 0 (även fast ytan har omvänd orientering, då Gauss' lag ändå bara innehåller laddningen i ytans inre), vilket implicerar

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} V = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{0},$$

och beviset är klart.

Randvillkor för potentialen För att betrakta randvillkor för potentialen vid en ytladdning, kan man integrera elektriska fältet längs med en rak linje normalt på ytaddningen över ytan och låta linjen bli godtyckligt kort. Då fås randvillkoret för elektriska fältet i termer av potentialen som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}_{12}} V_1 - \vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}_{12}} V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

där $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{n}_{12}}$ är riktningsderivatan i normalriktningen från område 2 mot område 1.

Poissons ekvation Gauss' lag på differentialform kombinerad med definitionen av potentialen ger Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Laplace' ekvation i sfäriska koordinater Genom att ställa upp Poissons ekvation i sfäriska koordinater på ett laddningsfritt domän som avgränsas av två sfäriska skal får man Laplace' ekvation. Den har allmän lösning på formen

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

där Y_{lm} är klotytefunktionerna. A_{lm} bestäms av laddningarna utanför det yttre skalet och B_{lm} av laddningarna innanför det inre skalet.

Det gäller att

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi},$$

där P_l^m är Legendrepolynomen. I fall som är rotationssymmetriska med avseende på xy-planet kan lösningen därför förenklas till

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^0(\cos\theta).$$

Anpassningsmetod Betrakta ett fall likt fallet ovan, med rotationssymmetri kring z-axeln, där vi även känner V på z-axeln. Eftersom $P_l(1) = 1$ och $P_l(-1) = (-1)^l$ får vi längs z-axeln

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l |z|^l + \frac{B_l}{|z|^{l+1}} \right) \begin{cases} 1, & z > 0, \\ (-1)^l, & z < 0. \end{cases}$$

Detta kan jämföras med den kända lösningen för att identifiera koefficienterna i serien och utvidga lösningen.

Elektrostatisk energi Vi är nu intresserade av energin som krävs för att skapa en viss laddningsfördelning. Vi kommer därför beräkna energin som krävs för att transportera all laddningen från oändligheten och placera den på rätt sätt.

Vi börjar med att betrakta en samling laddningar som ska ligga på avstånd r_{ij} från varandra. Att placera första laddningen på rätt plats kräver inget arbete. Att sen placera ut andra laddningen kommer kräva att man arbetar mot elektriska fältet från första. Man måste alltså göra ett arbete

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$

På samma sätt måste laddning 3 motarbeta elektriska fältet från både 1 och 2. Det totala arbetet är därmed

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Eftersom $r_{ij} = r_{ji}$ kan vi nu skriva om den inre summan genom att i stället summera över alla andra partiklar än i, och lägga till en faktor $\frac{1}{2}$. Vi får då

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Vid att ordna om faktorerna får vi

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i(\mathbf{r}_i),$$

där V_i är potentialen som laddning i känner av på grund av alla de andra laddingarna. Ett uttryck man hade kunnat gissa sig fram till från början.

Vi generaliserar vidare vår definition till kontinuerliga laddningfördelningar som

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}\tau\, \rho V,$$

där V är en region som innehåller all laddning. Vi kan med hjälp av resultaten från tidigare skriva detta som

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}\tau\, V\varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \mathrm{d}\tau\, \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(V\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_S \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot V\mathbf{E} + \int_V \mathrm{d}\tau\, E^2\right),$$

där S är ytan som omsluter V.

Om man tittar på den ursprungliga integralen, ger den inget bidrag där det inte finns laddning. Därför kan vi börja med att låta V vara exakt området där det finns laddning. Om vi gör V större, kommer den ursprungliga integralen att vara oändrad. Däremot kommer integralen av elektriska fältets belopp öka, så ytintegralen måste minska motsvarande. Att ytintegralen avtar kan man se eftersom ytan ökar som r^2, medan fältet avtar som $\frac{1}{R^2}$ och potentialen som $\frac{1}{R}$. Vi kan nu repetera processen tills vi integrerar över hela rummet. Då försvinner ytintegralen, och kvar står

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathrm{d}\tau\, E^2.$$

Det visar sig att om man använder resultatet för en laddningsfördelning på en diskret fördelning, får man inte samma svar. Detta är för att uttrycket för en diskret fördelning inte tar hänsyn till energin som krävs för att skapa punktladdningar till att börja med, vilket uttrycket för kontinuerliga fördelningar inkluderar. Denna finessen kom in i beräkningarna i övergången till kontinuerliga fördelningar, eftersom vi för diskreta fördelningar endast använde potentialen varje laddning känner på grund av alla andra. För kontinuerliga fördelningar är detta inte ett problem eftersom varje element har försvinnande liten laddning och därmed bidrar med försvinnande lite potential. För diskreta fördelningar gäller detta ej, dock.

Perfekta ledare En perfekt ledare har obegränsat med fria laddningar som kan röra sig i materialet. Från detta följer att

- $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ överallt inuti ledaren. Annars skulle någon av de fria laddningarna påverkas av fältet och röra sig sån att de kancellerade det.
- $\rho = \varepsilon_0\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = 0$ inuti ledaren. Därmed är alla fria laddningar på ytan.
- V är konstant inuti ledaren.
- $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{e_n}$ precis utanför ledaren på grund av elektriska fältets randvillkor, alternativt eftersom tangentiella komponenter skulle transportera laddningar på ytan som skulle kancellera fältet.

Kraften på en ledare Betrakta en perfekt ledare. Randvillkoret för elektriska fältet ger

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$$

precis utanför ytan. Då verkar en krafttäthet

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathbf{e_n}$$

på ytan. Detta motsvarar ett tryck utåt på laddaren - oberoende av vilken sorts ytladdning man har! I termer av elektriska fältet kan trycket skrivas som

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Kapacitans Betrakta först två ledare med olika laddningar $\pm Q$. Man kan se av integraluttrycket för elektriska fältet att det är proportionellt mot Q. Eftersom potentialskillnaden mellan ledarna är en integral av elektriska fältet, är även denna proportionell mot Q. Vi definierar därmed systemets kapacitans som proportionalitetskonstanten mellan de två, alltså

$$Q = CV.$$

Denna beror enbart av systemets geometri.

Betrakta nu ett system av olika ledare, med var sin potential och laddning. Vi har även någon potentialreferens. Vi kan börja med att sätta alla potentialer förutom en till 0, och räkna ut alla Q_i. Vid att superponera alla dina resultat får du en mängd slutgiltiga samband på formen $Q_i = C_{ij}V_j$. Detta definierar kapacitansmatrisen. Man kan visa/argumentera för att matrisen är symmetrisk och positivt definit. Om man vill visa det, kan man göra en energibetraktning av tillföringen av en extra laddning till systemet, och jämföra energin om man först tillför laddningen och sen tillför ytladdning till ledarna för att höja potentialerna, eller ändrar ordningen, och använder elektrostatiska kraftens konservativitet.

Energin för ett system av ledare För ett system av ledare D_i har vi

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\, \rho V \\
&= \frac{1}{2}\sum \int_{D_i} \mathrm{d}a\, \sigma_i V_i \\
&= \frac{1}{2}\sum V_i \int_{D_i} \mathrm{d}a\, \sigma_i \\
&= \frac{1}{2}\sum V_i Q_i.
\end{aligned}$$

Om vi använder kapacitansmatrisen får vi

$$W = \frac{1}{2}V_i C_{ij} V_j.$$

För en enda kondensator blir detta

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2C}Q^2.$$

Speglingsmetoder Vissa problem kan lösas med speglingsmetoder. Då kan man ersätta vissa komponenter av ett problem med andra på ett sådant sätt att randvillkor som ges i problemet fortfarande är uppfylda.

Spegling och potentialen från två linjeladdningar Vi kommer behöva lite standardlösningar för att använda när vi speglar problem. Vi betraktar därför först två oändligt långa parallella linjeladdningar med laddning $\pm\lambda$ per längd separerade med ett avstånd $2h$. Problemet är tvådimensionellt, och vi inför $\mathbf{s}$ som vektorn från punkten mitt emellan laddningarna till en godtycklig punkt i planet. Elektriska fältet från laddningen till höger, som vi döper nummer 1, ges av $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_{\mathbf{s}}$, där $\mathbf{s}_1 = h\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ och $\mathbf{e}'_{\mathbf{s}}$ pekar i samma riktning som $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$. Vi definierar $V = 0$ där $\mathbf{s} = 0$ och får

$$V(\mathbf{s}) = -\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} \mathrm{d}\mathbf{s}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0|\mathbf{s}'-\mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_{\mathbf{s}} = -\int_{-\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}-\mathbf{s}_1} \mathrm{d}\mathbf{u}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 u'}\mathbf{e}'_{\mathbf{u}}.$$

Vi har rotationssymmetri i planet, och kan därmed välja en radiell riktning för integrationen, vilket ger

$$V(\mathbf{s}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{|-\mathbf{s}_1|} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{h}.$$

Den totala potentialen är därmed

$$V(\mathbf{s}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}.$$

Ekvipotentialytorna uppfyller $V = V_0$, vilket ger

$$\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|} = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}}.$$

Vi definierar $u = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}$ och skriver om avstånden på vänstersidan för att få

$$\frac{(x+h)^2+y^2}{(x-h)^2+y^2} = e^{2u}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
x^2+2xh+h^2+y^2 &= e^{2u}(x^2-2xh+h^2+y^2),\\
x^2(1-e^{2u})+2xh(1+e^{2u})+y^2(1-e^{2u}) &= h^2(e^{2u}-1),\\
x^2(e^{-u}-e^{u})+2xh(e^{-u}+e^{u})+y^2(e^{-u}-e^{u}) &= h^2(e^{u}-e^{-u}),\\
-x^2\sinh u+2xh\cosh u-y^2\sinh u &= h^2\sinh u,\\
x^2-2xh\coth u+h^2+y^2 &= 0,\\
x^2-2xh\coth u+h^2\left(\coth^2 u-\frac{1}{\sinh^2 u}\right)+y^2 &= 0,\\
(x-h\coth u)^2+y^2 &= \frac{h^2}{\sinh^2 u}
\end{aligned}$$

Det är alltså en cirkel med centrum i $h\coth u\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ och radie $a = \frac{h}{|\sinh u|}$. Avstånden från cirkelns centrum till de två laddningarna är

$$d_1 = h|\coth u-1|,\ d_2 = h|\coth u+1|.$$

Eftersom $|\coth u| > 1$, får vi

$$d_1 d_2 = h^2(\coth^2 u-1) = \frac{h^2}{\sinh^2 u} = a^2.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en linjeladdning λ parallell med en ledande cirkulärcylindrisk yta med radien a och laddning $-\lambda$ per längd, och avståndet från cylinderaxeln till linjeladdningen är d, kan cylinderytan ersättas med en linjeladdning $\lambda_{\mathrm{s}} = -\lambda$ ett avstånd $d_{\mathrm{s}} = \frac{a^2}{d}$ från cylinderaxeln.

Spegling och potentialen från två punktladdningar Betrakta två punktladdningar liggande på z-axeln, där den översta, döpt nummer 1, ligger i punkten $h\mathbf{e_z}$ och den andra i origo. Problemet är cylindersymmetriskt, så vi inför cylinderkoordinater. Potentialen är då

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right).$$

Ekvipotentialytorna för en nollskild potential är komplicerade, men ekvipotentialytan för $V = 0$ ges av

$$\begin{aligned}
\frac{q_1}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} &= 0,\\
k = \frac{q_1}{q_2} &= -\frac{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}}{\sqrt{\rho^2+z^2}},\\
\rho^2(k^2-1)+k^2z^2 &= (z-h)^2,\\
z^2(1-k^2)-2zh+h^2 &= \rho^2(k^2-1),\\
\rho^2+z^2-\frac{2zh}{1-k^2}+\frac{h^2}{1-k^2} &= 0,\\
\rho^2+\left(z-\frac{h}{1-k^2}\right)-\frac{h^2}{(1-k^2)^2}+\frac{h^2}{1-k^2} &= 0,\\
\rho^2+\left(z-\frac{h}{1-k^2}\right) &= \frac{h^2k^2}{(1-k^2)^2}.
\end{aligned}$$

Detta är en sfär med centrum i $\frac{1}{1-k^2}h\mathbf{e_z}$ och radie $a = h\left|\frac{k}{1-k^2}\right|$. Notera att det är en förutsättning att $k < 0$, alltså att laddningarna har olika tecken.

Om vi nu antar $k^2 > 1$ ligger sfärens centrum under laddning 2. Avstånden från sfärens centrum till de två punktladdningarna är då

$$d_2 = \frac{1}{k^2-1}h,\ d_1 = h + d_2 = \frac{k^2}{k^2-1}h.$$

Detta ger

$$d_1d_2 = a^2,\ k = -\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = -\frac{d_1}{a} = -\frac{a}{d_2}.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en punktladdning q ett avstånd d från centrum av en jordad ledande sfärisk yta med radien a, kan ledaren ersättas med en punktladdning $q_s = -q\frac{a}{d}$ ett avstånd $d_s = \frac{a^2}{d}$ från sfärens centrum (bort från punktladdningen).

4 Dipoler och dielektrika

Elektriska dipolen Betrakta två punktladdningar på en linje. Linjen går genom origo, och laddningarna ligger lika långa avstånd $\frac{1}{2}d$ från origo. Potentialen i punkten $\mathbf{r}$, som ligger ett avstånd R_+ respektiva R_- från de två laddningarna, ges av

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_- - R_+}{R_+R_-}.$$

Om $r >> d$ fås

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{r}$ och linjen. Vi kan då skriva detta som

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{e_r}}{r^2}.$$

Vi definierar nu dipolmomentet $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, och får då

$$V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Notera att vi kan skriva dipolmomentet som $\mathbf{p} = \sum q_i\mathbf{r}'_i$.

Ideala dipoler En ideal dipol fås i gränsen för en dipol när d blir oändligt liten på ett sådant sätt att $\mathbf{p}$ hålls konstant.

Fältet från en dipol Fältet från en dipol ges av

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\vec{\nabla}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

I nämnaren har vi

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_i r_i \implies \partial_i \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_i \implies \vec{\nabla}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{p}.$$

Vi får då

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\vec{\nabla}r\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} - \mathbf{p}\right).$$

Dipolmoment för en laddningsfördelning För en laddningsfördelning ges dipolmomentet av

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{r}'\rho.$$

Förflyttning av koordinatsystem och dipolmoment Vid förflyttning av origo en sträcka $\mathbf{a}$ fås

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{r}'\rho = \int \mathrm{d}\tau'\,(\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})\rho = \mathbf{p}_0 - q\mathbf{a},$$

där subskriptet 0 indikerar ursprungliga koordinater. Alltså beror dipolmomentet av origos position om det finns en netto mängd laddning i systemet.

Multipolutveckling Vi vet att $\nabla^2\frac{1}{R} = 0$ överallt förutom där $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Genom att lägga våràt koordinatsystem så att $\mathbf{r}'$ är parallell med z-axeln och definiera vinkeln mellan $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}'$ som γ fås

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\gamma), & r < r', \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^l} P_l(\cos\gamma), & r > r'. \end{cases}$$

Speciellt, på den positiva z-axeln är $\gamma = 0$ och

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_> - r_<} = \frac{1}{r_>}\left(1 - \frac{r_<}{r_>}\right)^{-1} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}},$$

där $r_< = \min(r', r)$ och $r_> = \max(r', r)$. Vi utvidgar därmed lösningen till

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma).$$

Vi söker nu potentialen utanför en sfär som omsluter en rumladdning. Då fås $r_< = r'$, $r_> = r$ och

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{\rho}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int \mathrm{d}\tau'\,(r')^l \rho P_l(\cos\gamma') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l.$$

De olika V_l kommer ge oss termer som ser ut som olika multipoler, och vi vill nu studera dem. Vi noterar först att om e_i respektiva e_i' är komponenterna av $\mathbf{e_r}$ respektiva $\mathbf{e_{r'}}$, kan vi skriva

$$\cos(\gamma) = e_i e_i',\ \cos^2(\gamma) = e_i e_i' e_j e_j',\ 1 = e_i e_i = e_i e_j \delta_{ij}.$$

För $l = 0$ får vi

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}\tau'\,\rho,$$

alltså ett bidrag motsvarande en punktladdning med samma totala laddning i origo. För $l = 1$ fås

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \mathrm{d}\tau'\,r'\rho P_1(\cos\gamma)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}\tau'\,r'\cos\gamma\rho\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}\tau'\,r' e_i e_i'\rho\\
&= \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}\tau'\,r_i'\rho\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e_r}\cdot\int \mathrm{d}\tau'\,\rho r_i'
\end{aligned}$$

alltså ett bidrag motsvarande en dipol med samma totala dipolmoment i origo. För $l = 2$ fås

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \mathrm{d}\tau'\,r'^2\rho P_2(\cos\gamma)\\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}\tau'\,r_i'r_i'\rho(3\cos^2(\gamma)-1)\\
V_2 &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}\tau'\,r_k'r_k'\rho(3\cos^2(\gamma)-1)\\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\int \mathrm{d}\tau'\,r_k'r_k'\rho(3e_ie_i'e_ie_j' - e_ie_j\delta_{ij})\\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}e_ie_j\int \mathrm{d}\tau'\,r_k'r_k'\rho(3e_i'e_j' - \delta_{ij})\\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3}e_ie_j\int \mathrm{d}\tau'\,\rho(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}).
\end{aligned}$$

Vi definierar nu kvadrupolmomentstensorn

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau'\,\rho(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}),$$

vilket ger

$$V = \frac{e_iQ_{ij}e_j}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Detta är kvadrupolbidraget.

Allmänt blir det l:te bidraget på formen

$$V_l = \frac{Q_{i_1\ldots i_l}e_{i_1}\ldots e_{i_l}}{4\pi\varepsilon_0 r^{l+1}}.$$

Additionssatsen Hellre än att hantera komponenterna av kvadrupolmomentstensorn, använder vi en sats som säger

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi').$$

Då kan vi skriva

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} V_l,\ V_l = \frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0 r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l} q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi),$$

där q_{lm} är det sfäriska multipolmomentet

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}\tau'\,\rho(r')^l Y^*_{lm}(\theta',\phi').$$

Varje V_l har alltså $2l+1$ oberoende komponenter, vilket på grund av multipolmomenttensorernas symmetri och spårlöshet är lika med antalet oberoende komponenter i multipolmomenttensorn.

Kraft på en laddningsfördelning Betrakta en laddningsfördelning i ett yttre måttligt varierande elektriskt fält. Kraften på laddningsfördelningen ges då av

$$\mathbf{F} = \int \mathrm{d}\tau'\,\rho\mathbf{E}.$$

Vi vill nu approximera elektriska fältet i laddningsfördelningen vid att utveckla den kring en referenspunkt $\mathbf{r}_0$. Komponentvis har vi

$$E_i \approx E_{i,0} + (r_j - r_{j,0})\partial_j E_i,$$

varför

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}$$

och

$$\mathbf{F} \approx \int \mathrm{d}\tau'\,\rho\left(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}\right).$$

Vidare, under antagandet att fältet varierar måttligt kan alla derivator antas vara konstanta, vilket ger

$$\mathbf{F} \approx \int \mathrm{d}\tau'\,\rho\mathbf{E}_0 + \int \mathrm{d}\tau'\,\rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E} = Q\mathbf{E}_0 + (\mathbf{p}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E},$$

där dipolmomentet mäts relativ $\mathbf{r}_0$. Att dra ut elektriska fältet i andra termen från integralen är helt okej - eftersom derivatorna inte varierar i laddningsfördelningen, kan man tänka sig att integrationen skapar en operator som sedan får verka på fältet.

Vridmoment på en laddningsfördelning På en punktladdning har vi

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = q\mathbf{r}\times\mathbf{E}.$$

För en laddningsfördelning fås då, relativt en referenspunkt O, vridmomentet

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int \mathrm{d}\tau'\,\rho\mathbf{r}\times\mathbf{E}\\ &\approx \int \mathrm{d}\tau'\,\rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Vi försummar nu termer av andra ordningen i $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ och får

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int \mathrm{d}\tau'\,\rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times(\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E})) \\
&= \left(\int \mathrm{d}\tau'\,\rho((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{E}_0 + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E} \\
&= \mathbf{p}\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0\times\mathbf{F}.
\end{aligned}$$

Polarisation Polarisationen $\mathbf{P}$ uppfyller

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{P}.$$

Detta fältet uppfyller inga speciella randvillkor, och är allmänt ej rotationsfritt.

Polariserbarhet Polariserbarheten α uppfyller

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}.$$

Fält och potential från polarisation Från ett litet rymdelement fås

$$\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{P}\,\mathrm{d}\tau',\ \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_R}}{R^2},\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{e_R}}{R^2}.$$

Elektriska fältet kommer ha en singularitet som beter sig som $\frac{1}{R^3}$. Denna kommer inte upphävas av volymelementet, och kräver specialbehandling. Vi löser detta genom att använda att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{R} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R},$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{P}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\frac{\mathbf{P}}{R^2} - \frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\mathbf{P} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\mathbf{a}'\cdot\frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\mathbf{P},
\end{aligned}$$

vilket motsvara coulombpotentialen från två ekvivalenta laddningsfördelningar

$$\rho_\mathrm{b} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\mathbf{P},\ \sigma_\mathrm{b} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}.$$

Vi kunde ta bort primet från divergensoperatorn därför att divergensen kommer vara 0 där $\mathbf{P}=\mathbf{0}$. Vi kalla dessa för bundna laddningsfördelningar. Nu kan vi beräkna elektriska fältet som

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}S\,\frac{\sigma_\mathrm{b}}{R^2}\mathbf{e_R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\rho_\mathrm{b}\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Introduktion av D-fältet Gauss' lag på integralform ger oss nu

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{P}+\rho_\mathrm{f}}{\varepsilon_0},$$

där ρ_f är den fria laddningstätheten. Detta implicerar

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}) = \rho_\mathrm{f},$$

vilket uppmanar oss att definiera

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}.$$

Randvillkor för D-fältet Vi kan visa att

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_\mathrm{f},\ (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \times \mathbf{n}_{12} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \times \mathbf{n}_{12}.$$

Linjära dielektrika Linjära dielektrika uppfyller

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_\mathrm{e} \mathbf{E}$$

för måttliga fältstyrkor. χ_e är dielektrikumets elektriska susceptibilitet.

D-fält i linjära dielektrika I ett linjärt dielektrikum fås

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_\mathrm{e}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

ε_r är dielektrikumets relativa permittivitet, och ε är dets permittivitet.

Elektrisk energi och linjära dielektrika Vi är intresserade av att studera energin för att skapa ett system som innehåller linjära isotropa dielektrika. För att göra detta, placera först ut alla dielektrika, och ta sedan med in den fria laddningen en bit i taget. Om man tar med en bit laddning $\mathrm{d}\rho_\mathrm{f}$, kräver det energin

$$\mathrm{d}W = \int \mathrm{d}\tau\, V\, \mathrm{d}\rho_\mathrm{f}\,.$$

Superposition ger $\mathrm{d}\rho_\mathrm{f} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{D})$, där $\mathrm{d}\mathbf{D}$ är ändringen i D-fältet. Detta ger

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \int \mathrm{d}\tau\, V \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{D}) \\
&= \int \mathrm{d}\tau\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (V\, \mathrm{d}\mathbf{D}) - \mathrm{d}\mathbf{D} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} V \\
&= \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot V\, \mathrm{d}\mathbf{D} + \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

På samma sätt som tidigare skickar vi integrationsområdets rand till oändligheten, vilket ger att ytintegralen försvinner och

$$\mathrm{d}W = \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

För ett linjärt dielektrikum har vi

$$\mathrm{d}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \mathrm{d}\big(\varepsilon E^2\big) = 2\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{E} = 2\, \mathrm{d}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E},$$

vilket ger

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\right),$$

och integration över tillförd laddning ger

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

Hur skiljer detta sig från uttrycket vi fick utan att betrakta dielektrika? Jo, det förra uttrycket ger energin för att placera ut alla laddningar, både bundna och fria, i sin slutgiltiga position. Detta kommer inte inkludera energin för att ompolarisera dielektrikumet som är utplacerad. Det nya uttrycket inkluderar inte energin för att placera ut de bundna laddningarna, men denna kommer vara 0 eftersom dielektrikumet är opolariserad till att börja med och vi behandlar dielektrikumet som bestående av ideala dipoler. Därifrån kommer dielektrikumet att ge en respons när fri laddning tillförs, och att skapa denna responsen kräver en viss energi som bara inkluderas i det nya uttrycket. En illustration av detta ges i exemplet under.

Energi för linjära dielektrika Betrakta en atom, approximerad som en punktladdning q och en laddning $-q$ jämnt fördelad över ett klot med radie a. Det negativt laddade molnet skapar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r},\ r < a.$$

Kraften på laddningen i mitten blir då

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{2}r^2.$$

Arbetet som krävs för att förflytta laddningen i mitten från centrum blir då

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_{-q}.$$

Om nu atomen är i ett yttre elektriskt fält $\mathbf{E}$, kommer det elektriska fältet att förflytta laddningen i centrum. Jämvikt fås när $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{-q}$, och arbetet som görs för att förflytta laddningen i mitten är då

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}.$$

Med detta argumentet i bakgrunden ställer vi upp energin i ett dielektrikum som

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}.$$

I tillägg har vi det övriga bidraget för att skapa det elektriska fältet, och totala energin ges av

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P})\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}.$$

Krafter på ett dielektrikum Betrakta ett dielektrikum någonstans i närheten av två perfekta ledare med laddning $\pm Q$ på de respektiva och spänningsskillnad V mellan dem. Ledarna kan antingen vara isärkopplade eller kopplade ihop med ett batteri som upprätthåller en konstant spänningsskillnad. Systemet har en energi W_e. Dielektrikumets position beskrivs av dets geometri och en referensvektor $\mathbf{r}$ (till exempel till dets geometriska centrum). Att beräkna elektriska fältet är allmänt svårt, men vi ska försöka undveka detta med ett trick.

Betrakta dielektrikumet först. Om det förflyttas en sträcka $\mathrm{d}\mathbf{r}$, görs ett arbete $\mathrm{d}W$ av kraften $\mathbf{F}$. Kraftjämvikten ger

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_\mathrm{e} = \mathbf{0},$$

och därmed

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,,\ \mathbf{F}_\mathrm{e} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}W.$$

Betrakta första fallet först. Om dielektrikumet förflyttas en sträcka $\mathrm{d}\mathbf{r}$, görs ett arbete $\mathrm{d}W$ av kraften $\mathbf{F}$, som måste vara lika med totala ändringen i elektrisk energi. Detta ger

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\mathrm{e}\,.$$

Därmed gäller att

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}W_\mathrm{e} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}C = \frac{1}{2}V^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}C.$$

Betrakta nu det andra fallet. Om spänningen mellan ledarna hålls konstant, kommer det totala arbetet på systemet komma både från dielektrikumets translation i elektriska fältet och arbetet som krävs för att transportera laddning mellan ledarna för att hålla spänningsskillnaden mellan dem konstant, som båda är positiva bidrag. Vi får

$$\mathrm{d}W = -V\,\mathrm{d}Q + \mathrm{d}W_\mathrm{e}\,.$$

Samtidigt gäller det att $\mathrm{d}W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}V\,\mathrm{d}Q$, så

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = -\,\mathrm{d}W\,.$$

Om vi jämför detta med kraftjämvikten på dielektrikumet, ger detta

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}V^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}C.$$

Moment på ett dielektrikum Genom att göra en liknande analys som den ovan fås

$$\mathbf{N}_\mathrm{e} = \pm\partial_\phi W_\mathrm{e}\mathbf{e_z},$$

där + och − är fallen där Q respektiva V är konstant.

5 Magnetostatik

Ström Ström definieras som $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Strömtäthet I fall där strömmen inte flödar längs med linjer utan längs ytor eller fritt i rummet definierar vi strömtätheten $\mathbf{J}$ som vektorfältet som beskriver flödet av laddningar. Strömtäthetens belopp ges av $J = \rho v$, där $\mathbf{v}$ är hastighetsfältet för laddningarna.

Kontinuitetsekvation för strömtätheten Strömtätheten uppfyller

$$\partial_t\rho + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J} = 0.$$

Kraft på strömslingor Betrakta två slingor C och C'. Genom varje slinga går en ström I respektiva I' i samma riktning som kurvans orientering. Experiment har visat att kraften på C från C' ges av

$$\mathbf{F} = \int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{r}\, I \times \left(\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int\limits_{C'} \mathrm{d}\mathbf{r}' \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\right)$$

där $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Magnetiska fältet Genom att definiera det magnetiska fältet från C' i punkten $\mathbf{r}$ som

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int\limits_{C'} \mathrm{d}\mathbf{r}' \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}$$

fås

$$\mathbf{F} = \int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{r}\, I \times \mathbf{B}.$$

Magnetfält från strömtätheter För strömmar fördelade i rummet eller på en yta kan vi utvidga definitionen av magnetiska fältet till att bli

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}a'\,\mathbf{J} \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} \text{ eller } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{J} \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Vi skriver gärna integrationselementen, som innehåller strömmen och differnetialen, som d$\mathbf{C}$. Även ytströmmar och linjeströmmar kan skrivas som volymströmmar.

Potential för magnetfältet Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{J} \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{J} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{R}\\ &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{R}\mathbf{J}\right).\end{aligned}$$

Rotationsoperatorn kan tas utanför integrationen då den verkar på koordinater som det ej integreras över. Vi definierar då vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R}\mathbf{J},$$

och har då

$$\mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A}.$$

Entydighet för vektorpotentialen Vektorpotentialen kan även definieras som

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R}\mathbf{J} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Lambda,$$

där Λ är en godtycklig funktion. Eftersom gradienter ej har rotation, kommer denna vektorpotentialen att ge samma magnetfält. Vi kommer oftast sätta $\Lambda = 0$.

Magnetfältets divergens Eftersom $\mathbf{B}$ är rotationen av en vektorpotential, gäller det att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Vektorpotentialens divergens Vi har

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R}\mathbf{J} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \mathbf{J} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{R} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \mathbf{J} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \frac{1}{R} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R} \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \cdot \mathbf{J} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \cdot \frac{1}{R}\mathbf{J} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R} \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \cdot \mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\mathbf{a}' \cdot \frac{1}{R}\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

I elektrostatiska fall är alla laddningar statiska, varför den första termen ej ger något bidrag. Genom att utvidga integrationsområdet till hela rummet som tidigare fås

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Magnetiskt flöde Det magnetiska flödet definieras som

$$\Phi = \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}.$$

Med hjälp av Stokes' sats fås

$$\Phi = \int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot A.$$

Detta blir alltid 0 genom en sluten yta.

Vektorpotentialens laplacian På samma sätt som för elektriska potentialen fås

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Magnetfältets rotation Vi har

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Ampères cirkulationslag Strömmen genom en yta ges av

$$I = \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}.$$

Randvillkor för magnetfältet Som med elektriska fältet betraktar vi magnetfältet nära en ytströmtäthet. Kring denna lägger vi en yta och beräknar flödet genom den när ytans tjocklek blir liten. Detta ger

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0.$$

Vidare kan vi skriva

$$\int \mathrm{d}\tau \, \mu_0 \mathbf{J} = \int \mathrm{d}\tau \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}.$$

Med indexräkning fås

$$\left[\int \mathrm{d}\tau \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}\tau \, \partial_j B_k = \varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}a_j \, B_k = \left[\int \mathrm{d}\mathbf{a} \times \mathbf{B} \right]_i .$$

Detta ger

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Ett motsvarande bevis kan även göras med Ampères lag för en liten strömslinga.

6 Magnetiska dipoler och magneter

Magnetiskt dipolmoment för en slinga Betrakta en strömslinga C som för en ström I. Vi söker vektorpotentialen på stort avstånd från slingan. Det exakta uttrycket ges av

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \mathrm{d}\mathbf{l}' \, \frac{I}{R}.$$

Om C omkransar en yta S, fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \mathrm{d}\mathbf{a} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \frac{1}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \mathrm{d}\mathbf{a} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_\mathbf{R}.$$

Vid stora avstånd fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(I \int_S \mathrm{d}\mathbf{a} \right) \times \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\mathbf{r},$$

där vi har definierat det magnetiska dipolmomentet

$$\mathbf{m} = I \int_S \mathrm{d}\mathbf{a} = I\mathbf{S}.$$

Igen har vi definierat slingans vektorarea $\mathbf{S}$.

Hur ska man välja vektorarean? Tänk dig att C är randen till två olika ytor S_1 och S_2, som till sammans innesluter området V. Detta ger

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \int_{S_1} \mathrm{d}\mathbf{a} - \int_{S_2} \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{S_1 + S_2} \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_V \mathrm{d}\tau \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} 1 = \mathbf{0},$$

och därmed spelar inte valet roll.

Magnetiskt dipolmoment för en allmän strömtäthet För att studera en allmän strömtäthet, vill vi dela den upp i slingor. Betrakta då konen med spets i origo, rand C och $\mathbf{r}$, som ligger på C, som generatris. För denna är ytelementet $\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$, vilket ger

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I\int_S \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\int_C \mathbf{r}' \times I\,\mathrm{d}\mathbf{l}'.$$

Vi generaliserar detta genom att ersätta $I\,\mathrm{d}\mathbf{l}'$ med $\mathbf{J}\,\mathrm{d}\tau'$ och integrera över resultatet för varje litet slingelement för att få

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{r}' \times \mathbf{J}.$$

Dipolmomentets beroende av origo Om vi förflyttar vårat koordinatsystem fås

$$\mathbf{m}_O = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau'\,(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{J} = \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_O \times \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{J}.$$

Vi har

$$\int \mathrm{d}\tau'\,J_i = \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}' r_i' = \int \mathrm{d}\tau\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot(r_i'\mathbf{J}) - r_i'\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\mathbf{J}.$$

Vi använder nu att vi arbetar med magnetostatik för att ta bort sista termen, vilket ger

$$\int \mathrm{d}\tau'\,J_i = \int \mathrm{d}\tau'\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot(r_i'\mathbf{J}) = \int \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot r_i'\mathbf{J}.$$

Slingan förutsätts vara ändlig, och då behöver vi bara integrera över en yta som inneslutar den. På den ytan är $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, vilket ger att integralen av komponenten blir 0, och slutligen

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{m}.$$

Magnetiska fältet från en dipol Vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{1}{r^2}\mathbf{m} \times \mathbf{e_r}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{3}{r^4}\vec{\boldsymbol{\nabla}}r \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{3}{r^4}\mathbf{e_r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3}(\mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{r} - (\mathbf{m}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{r})\right) \\
&= \frac{1}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-3\mathbf{e_r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e_r}) + \frac{1}{r^3}(3\mathbf{m} - \mathbf{m})\right) \\
&= \frac{1}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-3(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{m} + 3 \times (\mathbf{m}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} + 2\mathbf{m}\right) \\
&= \frac{1}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\left(3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} - \mathbf{m}\right).
\end{aligned}$$

Kraft på en magnetisk dipol Kraften på en strömslinga C ges av

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int_C I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\
&= I\int_S (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}') \times \mathbf{B} \\
&= I\int_S \mathrm{d}a\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e_n}) - \mathbf{e_n}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Andra termen är 0. Första termen ger komponentvis

$$F_i = I \int\limits_S \mathrm{d}a\, \partial'_i(B_j n_j).$$

Vi antar att magnetfältet varierar måttligt över slingan, och approximerar derivatornas värde i mittpunkten, varför den faktorn kan tas utanför integralen. Detta ger

$$F_i = I\partial_i B_j \int\limits_S \mathrm{d}a_j = \partial_i(B_j I a_j),$$

och slutligen

$$\mathbf{F} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}).$$

Det här var oklart, så vi testar ett annat sätt: Skriv

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B},$$

där derivatan av $\mathbf{B}$ antas vara konstant. Detta ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= I\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}_0 + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B} \\
&= I\left(\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\right)\times\mathbf{B}_0 + I\left(\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\times(\mathbf{r}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}\right) - I\left(\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\right)\times(\mathbf{r}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B} \\
&= I\left(\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\times(\mathbf{r}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}\right).
\end{aligned}$$

På indexform fås

$$\begin{aligned}
F_i &= I\int\limits_C \mathrm{d}l_j\,\varepsilon_{ijk}[(\mathbf{r}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}]_k \\
&= I\int\limits_C \mathrm{d}l_j\,\varepsilon_{ijk} r_m \partial_m B_k \\
&= \varepsilon_{ijk} I \partial_m B_k \int\limits_V \mathrm{d}l_j\, r_m \\
&= \varepsilon_{ijk} I \partial_m B_k \int\limits_S \mathrm{d}a_b\,\varepsilon_{jbc}\partial_c r_m \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jbc}\delta_{cm} I \partial_m B_k \int\limits_S \mathrm{d}a_b \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{cjb} m_b \partial_c B_k \\
&= (\delta_{ic}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{kc}) m_b \partial_c B_k \\
&= m_k \partial_i B_k - m_i \partial_k B_k \\
&= \partial_i m_k B_k - m_i \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{B},
\end{aligned}$$

vilket slutligen ger

$$\mathbf{F} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}).$$

Vridmoment på en slinga Vridmomentet ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int\limits_C \mathbf{r}\times \mathrm{d}\mathbf{F}\\ &= I\int\limits_C \mathbf{r}\times(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B})\\ &= I\int\limits_C (\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{l} - (\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l})\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Vi approximerar fältet till att vara konstant och lika med fältet i mitten, vilket ger

$$\mathbf{B}\int\limits_C (\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}) = \mathbf{B}\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= I\int\limits_C \mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}\\ &= I\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a}\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})\\ &= I\int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{a}\times\mathbf{B}\\ &= \mathbf{m}\times\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Magnetisering Magnetiseringen $\mathbf{M}$ uppfyller

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{M}.$$

I en atom har elektronerna omloppstid

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

vilket ger strömmen

$$\mathbf{I} = -\frac{e}{T}\mathbf{e}_\phi = -\frac{ev}{2\pi r}\mathbf{e}_\phi.$$

Dessa ger då magnetiska momentet

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times I\,\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{2}erv\mathbf{e}_\mathbf{z}.$$

Vektorpotential från magnetisering Vi har

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{R^2}\mathbf{M}\times\mathbf{e}_\mathbf{R}.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\mathbf{M}\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{R}\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\times\mathbf{M} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}'\times\left(\frac{1}{R}\mathbf{M}\right)\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{r}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\times\mathbf{M} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{a}'\times\frac{1}{R}\mathbf{M}.\end{aligned}$$

Detta motsvarar magnetiska fältet från en volymström

$$\mathbf{J}_{\text{bv}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \times \mathbf{M}$$

och en ytström

$$\mathbf{J}_{\text{bs}} = \mathbf{M} \times \mathbf{e_n}.$$

Multipolutveckling av vektorpotentialen Vi har

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta'),$$

vilket för en strömslinga ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\mathbf{l}\, \frac{I}{R} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta') \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, r'^l P_l(\cos\theta').
\end{aligned}$$

Den första termen ges av

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^1} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, P_0(\cos\theta') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^1} \int \mathrm{d}\mathbf{l}' = \mathbf{0}$$

för en sluten strömslinga. Inte oförväntad, då vi inte känner till magnetiska monopoler. Den andra termen ges av

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, r'^1 P_1(\cos\theta') \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, r' \cos\theta' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \mathrm{d}\mathbf{l}'\, \mathbf{r}' \cdot \mathbf{e_r} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{e_r} \times I \int \mathrm{d}\mathbf{a}',
\end{aligned}$$

vilket motsvarar en dipolterm. Vidare skulle man kunna skriva upp kvadrupoltermen också.

***H*-fältet** Ampères lag ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Med resultatet ovan fås

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{\text{fri}} + \mu_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{M}, \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}\right) &= \mathbf{J}_{\text{fri}}.
\end{aligned}$$

Vi definierar då

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M},$$

vilket ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{fri}}.$$

Amperes lag för H-fältet Vi får

$$I_{\mathrm{fri}} = \int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}.$$

Linjära magnetiserbara material Betrakta ett material som uppfyller

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu 0} \chi_{\mathrm{m}} \mathbf{B}.$$

Dessa uppfyller

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\
\mathbf{M} &= \chi_{\mathrm{m}}(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\
\mathbf{M} &= \frac{\chi_{\mathrm{m}}}{1 - \chi_{\mathrm{m}}} \mathbf{H} = \chi_{\mathrm{m}}^H \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Detta ger slutligen

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{m}}^H)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}} \mathbf{H} = \mu \mathbf{H},$$

där $\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{m}}^H$ kallas den relativa permeabiliteten och μ kallas permeabiliteten.

Klassificering av magnetiska material Det finns olika sorters magnetism i material. Bland dessa är:

- diamagnetiska material, med $\chi_{\mathrm{m}} < 0$, typiskt kring $-1 \cdot 10^{-5}$.
- paramagnetiska material, med $\chi_{\mathrm{m}} > 0$, typiskt kring $1 \cdot 10^{-4}$.
- ferromagnetiska material, med $\chi_{\mathrm{m}} >> 1$. Dessa är dock ofta icke-linjära.

Randvillkor för H-fältet I en gränsyta fås

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \cdot \mathbf{n}_{12},\ \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mu_0 \mathbf{J}_{\mathrm{f}}.$$

Ömsesidig induktans Betrakta två strömslingor C_1 och C_2. En ström I_1 ger ett magnetiskt flöde Φ_{21} genom C_2. Vi har att

$$\Phi_{12} = \int\limits_{C_2} \mathrm{d}\mathbf{l_2} \cdot \mathbf{A} = \int\limits_{C_2} \mathrm{d}\mathbf{l_2} \cdot \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int\limits_{C_1} \mathrm{d}\mathbf{l}_1 \frac{1}{R} = M_{21} I_1,$$

där $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ och M_{21} är C_2:s ömsesidiga induktans från C_1. Med andra ord:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{C_2} \mathrm{d}\mathbf{l_2} \cdot \int\limits_{C_1} \mathrm{d}\mathbf{l}_1 \frac{1}{R}.$$

Det gäller att $M_{12} = M_{21}$.

Egeninduktans Om det går en ström i en slinga induceras även ett magnetiskt flöde från slingas egna fält. Vi döper denna $M_{11} = L_1$, och har $\Phi_{11} = L_1 I_1$.

Induktansmatris Om man har ett problem med n strömslingor, får man

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j,$$

som kan skrivas som ett matrisproblem som involverar induktansmatrisen M.

7 Lite om elektronik

Ledningsförmåga Fria laddningar kan transporteras av krafter per laddning. Om det i ett ämne finns en krafttäthet $\mathbf{f}$ ger denna alltså upphov till en inducerad strömtäthet. Vi antar att denna är linjär ock skriver

$$J_i = \sigma_{ij} f_j,$$

där σ är ledningsförmågan. Den har enhet $\mathrm{S\,m^{-1}}$ eller $\Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$. En perfekt ledare har oändlig (och diagonal) sådan.

Resistans och Ohms lag Betrakta ett batteri (en ideal spänningskälla) som är kopplad til två ideala ledare. De ideala ledarna har potential V_+ respektiva V_-, och är förbundna av ett material med ledningsförmåga σ. I det ledande området är $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Om kontaktytan mellan det ledande området och ledarna är S_+ respektiva S_- fås

$$U = V_+ - V_- = -\int_{S_-}^{S_+} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E},\ I = \int_{S_-} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = -\int_{S_+} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}.$$

Vägintegralen för spänningen kan tas för att vara mellan två godtyckliga punkter på ytorna. Vi definierar (av någon anledning) nu det ledande områdets resistans som

$$R = \frac{U}{I}.$$

Randvillkor mellan ledare För att bevara $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{J} = 0$ fås kravet

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0.$$

Randvillkoret för elektriska fältet ger även

$$\mathbf{n}_{12} \times \left(\sigma_1^{-1}\mathbf{J}_1 - \sigma_2^{-1}\mathbf{J}_2\right) = \mathbf{0}.$$

Effektutveckling och Joules lag Betrakta en punktladdning q. På denna uträtter det elektriska och magnetiska fältet arbetet

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Då tillförs q effekten

$$P = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}.$$

Betrakta nu en volymström $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Ett litet element i detta tillförs effekten

$$\mathrm{d}P = \rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathrm{d}\tau\,\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Vi kan nu införa effekttätheten

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Denna integreras över ledarens volym för att ge

$$\begin{aligned}
P &= \int \mathrm{d}\tau\, p \\
&= \int \mathrm{d}\tau\,\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \\
&= -\int \mathrm{d}\tau\,\mathbf{J} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} V \\
&= -\int \mathrm{d}\tau\,\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (V\mathbf{J}) - V\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{J} \\
&= -\int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Om det ledande området är omringad av en isolator har $\mathbf{J}$ ingen normalkomponent där, och

$$\begin{aligned} P &= -\int_{S_+} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J} - \int_{S_-} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J} \\ &= (V_+ - V_-)I, \end{aligned}$$

alltså

$$P = UI.$$

Elektromotorisk kraft Betrakta en smal resistiv slinga med tvärsnitt A som beskrivs av en naturlig rymdkoordinat l. Om slingan för strömmen I fås

$$\mathbf{J} = \frac{I}{A}\mathbf{e_l} = \sigma\mathbf{f}.$$

Detta ger

$$\mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{I}{A}\sigma^{-1}\,\mathrm{d}l\,.$$

Om vi jämför detta med resultatet för ett cylindriskt motstånd fås

$$\mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I\,\mathrm{d}R\,.$$

Resistansen hos ett kort segment i slingan är alltså

$$\mathrm{d}R\,\frac{\mathrm{d}l}{A\sigma}.$$

Vi får nu

$$\int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{f} = I \int \mathrm{d}R = IR.$$

För att få en ström krävs det alltså att

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{f}$$

är nollskild. Vi definierar $\mathcal{E}$ som den elektromotoriska kraften.

8 Grunderna i elektrodynamik

Lite om kvasistatiska fält Vi kommer här betrakta kvasistatiska fall, alltså fall där ρ och $\mathbf{J}$ ändras långsamt. I såna fall kommer vi försöka bilda en dynamisk teori genom att extrapolera Biot-Savarts och Coulombs lagar trivialt, fast nu med integration av tidsberoende källor. Notera att det totala elektriska fältet även får en extra term från ändringen av magnetiska fältet, som vi kommer se.

Elektromagnetisk induktion Betrakta en strömslinga C som rör sig godtyckligt och ändrar form under en liten tid $\mathrm{d}t$. Vi är nu intresserade av ändringen i magnetiska flödet

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{1}{\mathrm{d}t}\left(\int_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t + \mathrm{d}t) - \int_{S(t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) \right).$$

Vi serieutvecklar magnetfältet med avseende på tid (den följande variationen av koordinater tas med i det faktum att vi integrerar över olika ytor) för att få

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \approx \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{1}{\mathrm{d}t}\left(\int_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int_{S(t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathrm{d}t \int_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \partial_t\mathbf{B}(t) \right).$$

Låt nu kurvan vid t och $t + \mathrm{d}t$ förbindas av ytan S_o. Då fås

$$\int\limits_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int\limits_{S(t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) + \int\limits_{S_\mathrm{o}} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) = \int\limits_{V} \mathrm{d}\tau\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

där vi har lagt på ett minustecken för att ändra orienteringen på ena ytan. Om varje punkt på C rör sig med en hastighet $\mathbf{v}$ fås

$$\int\limits_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int\limits_{S(t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) = -\int\limits_{C(t)} \mathrm{d}\,\mathbf{B} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{v}\,\mathrm{d}t).$$

Vi har

$$\mathbf{B} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = B_i \varepsilon_{ijk}\, \mathrm{d}l_j\, v_k = \mathrm{d}l_j\, \varepsilon_{jki} v_k B_i = \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Detta ger slutligen

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \int\limits_{S(t+\mathrm{d}t)} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B}(t) - \int\limits_{C(t)} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Rörlig slinga i statiskt fält Betrakta fallet då en slinga rör sig i ett statiskt fält. Vi får då

$$\int\limits_{C(t)} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Vi känner igen vänstra termen som elektromotoriska kraften, alltså linjeintegralen av kraft per laddning över slingan, och får

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Varierande magnetiskt fält och fältlagar Betrakta en statisk strömslinga i ett varierande magnetiskt fält. Michael Faraday upptäckte att även en sån upplever en kraft. Hans hypotes var att detta berodde på att det inducerades en elektromotorisk spänning på grund av ett elektriskt fält. Mer specifikt,

$$\int \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\int\limits_{S} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B}(t).$$

Maxwell generaliserade detta genom att ta bort den fysikaliska slingan och i stället betrakta en integrationsbana i rummet. Om Faradays hypotes stämde, skulle Stokes' sats ge

$$\int\limits_{S} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t)\right) = 0.$$

Om integrationsbanan är godtycklig, ger det

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t) = \mathbf{0}.$$

Detta är en dynamisk fältlag för det elektriska och magnetiska fältet.

Elektriska fältets nya term Vi ser att elektriska fältet har nollskild rotation i dynamiken, så vi delar upp det i en rotationsfri del och en divergensfri del. Om vi nu tittar på den divergensfria delen, fås

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}V\, \partial_t \mathbf{B} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e_R}$$

i analogi med Biot-Savarts lag. Den rotationsfria har redan beskrivits.

Potentialer för dynamiska fält Vi har för den rotationsfria terman att

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0,\ \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

och därmed måste

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}.$$

Med generaliseringen av $\mathbf{A}$ fås

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\tau' \, \frac{1}{R} \partial_t \mathbf{J}.$$

Vi ser då att i dynamiken ges sambandet mellan fält och potentialer av

$$\mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A},\ \mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V - \partial_t \mathbf{A}.$$

EMK från induktans Vi får i ett system med n statiska slingor

$$\mathcal{E}_i = -\sum_j M_{ij} \frac{\mathrm{d}I_j}{\mathrm{d}t} = -L_i \frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} + \mathcal{E}_{\text{övriga}}.$$

Vi kan ställa upp detta med hjälp av egeninduktansen som

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_i I_i}{L_i} = \frac{\mathcal{E}_{\text{övriga}}}{L_i}.$$

Magnetisk energi Den magnetiska energin W_m är arbetet som krävs för att starta en strömkälla $\mathbf{J}$. Magnetiska fältet gör inget arbete i statiska fall, och därmed kan vi endast betrakta magnetisk energi i dynamiken.

Under igångsättningen finns ett inducerat elektriskt fält $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$. För att upprätthålla $\mathbf{J}$ mot det elektriska fältet tillförs effekten

$$P = -\int \mathrm{d}\tau \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \int \mathrm{d}\tau \, \mathbf{J} \cdot \partial_t \mathbf{A}.$$

Med Ampères lag skriver vi detta som

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\tau \, (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_t \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\tau \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\partial_t \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}\tau \, \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned}$$

När vi utvidgar integrationsvolymen mot oändligheten försvinner ytintegralen, och kvar står

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}\tau \, B^2.$$

Därmed fås

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}\tau \, B^2,$$

som alternativt kan skrivas som

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \, \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}.$$

Magnetisk energi i material

Magnetisk energi för en slinga med tjocklek Vi delar strömslingan i små delar V_i med tvärsnitt S_i. Magnetiska energin ges av

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_i \int\limits_{V_i} \mathrm{d}\tau\, \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A}.$$

Varje element för en ström $\mathbf{J}_i$, och bidrar då med fält $\mathbf{A}_i$ respektiva $\mathbf{B}_i$. Detta ger

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \int\limits_{V_i} \mathrm{d}\tau\, \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A}_j = \sum_i\sum_j W_{\mathrm{m},ij}.$$

Egenenergierna $W_{\mathrm{m},ii}$ motsvarar uttrycken vi har härlett innan, alltså integralen av kvadratet av något bidrag till magnetiska fältet. Detta sättet är att föredra framför att räkna på flödet i slingor (vilket också skulle kunna funka om man delar upp strömtätheten i skivor).

Om vi vidare antar att $\mathbf{A}$ är ungefär konstant över varje tvärsnitt fås

$$\mathbf{J}_i\,\mathrm{d}\tau = \mathbf{J}_i S_i \cdot \mathrm{d}vbl = I_i\,\mathrm{d}\mathbf{l}\,.$$

Därmed kan vi skriva

$$W_{\mathrm{m},ij} = \frac{1}{2}I_i \int\limits_{C_i} \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}I_i\Phi_{ij} = \frac{1}{2}I_i M_{ij} I_j.$$

För systemet fås då

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j I_i M_{ij} I_j.$$

Vi vet att detta är strikt positivt, så induktansmatrisen måste vara positivt definit.

Induktanser från energitermer Med detta kan vi skriva

$$M_{ij} = \frac{2W_{\mathrm{m},ij}}{I_i I_j},\ L_i = \frac{2W_{\mathrm{m},ii}}{I_i^2}.$$

Krafter på magneter Betrakta en magnet någonstans i närheten av en strömtäthet $\mathbf{J}$. Magnetens position beskrivs av någon referensvektor $\mathbf{r}$.

Betrakta magneten först. Om det förflyttas en sträcka $\mathrm{d}\mathbf{r}$, görs ett arbete $\mathrm{d}W$ av kraften $\mathbf{F}$. Kraftjämvikten ger

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_\mathrm{m} = \mathbf{0},$$

och därmed

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathbf{F}_\mathrm{m}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,,\ \mathbf{F}_\mathrm{m} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}W.$$

Om systemet är isolerad får man att upplagrad magnetisk energi är enda energikällan som finns, vilket ger $\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\mathrm{m}$ och

$$\mathbf{F}_\mathrm{m} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}W_\mathrm{m}.$$

Jag tror att detta motsvarar att alla magnetiska flöden bevaras. Om detta är sant får man

$$\mathbf{F}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L^2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}L = \frac{1}{2}I^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}L.$$

Om systemet i stället är anslutet till strömkällor så att alla strömmar hålls konstanta fås

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}I^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}L.$$

Samtidigt gör källan ett arbete

$$\mathrm{d}W = -I\,\mathrm{d}\Phi + \mathrm{d}W_\mathrm{m}$$

för att upprätthålla konstanta strömmar. Eftersom $\Phi = IL$ drar vi slutsatsen att $W = -W_\mathrm{m}$, vilket ger

$$\mathbf{F}_\mathrm{m} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}I^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}L.$$

Generalisering av Ampères lag I statiska situationer har vi sett att Ampères lag är konsekvent med att strömmarna är divergensfria. I dynamiska situationer är inte strömmarna nödvändigtvis divergensfria, så vi kommer försöka göra en ny ad hoc dynamisk Ampères lag.

Genom att utgå från vår generalisering av Biot-Savarts lag fås

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\mathbf{J} \times \frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}\right)\mathbf{J} - (\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}})\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R} \\ &= \mu_0\mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,(\mathbf{J}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}')\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.\end{aligned}$$

Vi betecknar den andra termen som $\mathbf{I}$. Komponentvis har vi

$$\begin{aligned}I_i &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, J_j\partial_j\frac{1}{R^3}R_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \partial_j\left(\frac{1}{R^3}J_jR_i\right) - \frac{1}{R^3}R_i\partial_jJ_j \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}a_i'\left(\frac{1}{R^3}J_jR_i\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{R^3}R_i\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J}.\end{aligned}$$

Genom att utvidga integrationsområdet mot oändligheten försvinner första termen, vilket ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{J}\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Med kontinuitetsekvationen fås

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\,\partial_t\rho\frac{1}{R^2}\mathbf{e_R}.$$

Vi känner igen andra termen som proportionell mot en tidsderivata av elektriska fältet, och en möjlig kandidat till en ny Ampères lag är

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E} = \mu_0\mathbf{J}.$$

Observera att detta inte är en härledning, då vi har utgått från dessa generaliserade varianterna av Coulombs och Biot-Savarts lagar. Dessa uppfyller till exempel inte $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}$. För att uppfylla detta måste induktiva korrektionstermen läggas till, men då kommer inte den nya Ampères lag att gälla, så man får en jobbig iterativ process med korrektioner.

Maxwells ekvationer All vår kunnskap om elektrostatik- och dynamik slås nu ihop för att skriva ned de ekvationerna som beskriver det vi vet:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} &= \mathbf{0}, \\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{B} &= 0, \\ \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E} &= \mu_0\mathbf{J}, \\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Dessa kallas för Maxwells ekvationer.

Poyntings sats Betrakta en volym V som omkransas av en yta S. Joules lag ger att V tillförs effekten

$$P_{\text{mek}} = \int_V \mathrm{d}\,\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Vi kan tolka detta som

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \partial_t w_{\text{mek}},$$

där w_{mek} är den mekaniska energitätheten. Med hjälp av Maxwells ekvationer skriver vi

$$\begin{aligned}
\partial_t w_{\text{mek}} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\Big(\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} - \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\Big) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \partial_t E^2 \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \partial_t \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \partial_t E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right).
\end{aligned}$$

Vi har en fältenergitäthet från två av termerna, som vi förstår väl, men det finns även en extra term här. Den är en flödestäthet av energi. Vi kallar den Poyntings vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Den uppfyller konserveringslagen

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{S} + \partial_t (w_{\text{mek}} + w_{\text{em}}) = 0.$$

Rörelsemängd i elektromagnetism Betrakta ett föremål med laddningstäthet ρ och strömtäthet $\mathbf{J}$. Detta har rörelsemängd som kommer från laddningarnas rörelse. Om vi inför rörelsemängdstätheten $\mathbf{g}_{\text{mek}}$ ger Newtons andra lag

$$\partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

Maxwells ekvationer ger

$$\partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Vi skriver med hjälp av Maxwells ekvationer

$$\begin{aligned}
(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}} B^2 + (\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}, \\
\partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B} \\
&= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E}) \\
&= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}} E^2 - (\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E},
\end{aligned}$$

vilket, till sammans med Maxwells ekvationer, ger

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}} B^2 + (\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}\right) - \varepsilon_0 \left(\partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}} E^2 - (\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}\right) \\
&= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B} - \varepsilon_0 \Big(\partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}\Big) - \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \\
&= \varepsilon_0 (\mathbf{E}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) \\
&= \varepsilon_0 (\mathbf{E}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\mathbf{B}) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}(w_{\text{e}} + w_{\text{m}}) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{S}.
\end{aligned}$$

Notera att vi adderade en term som är $\mathbf{0}$.

Elektromagnetisk rörelsemängd och Maxwells spänningstensor Vi betraktar nu den mekaniska rörelsemängden komponentvis:

$$\begin{aligned}\partial_t g_{\text{mek},i} &= \varepsilon_0(E_i\partial_j E_j + E_j\partial_j E_i) + \frac{1}{\mu_0}(B_i\partial_j B_j + B_j\partial_j B_i) - \partial_i w_{\text{em}} - \varepsilon_0\mu_0\partial_t S_i \\ &= \partial_j\left(\varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0}B_i B_j - w_{\text{em}}\delta_{ij}\right) - \varepsilon_0\mu_0\partial_t S_i.\end{aligned}$$

Vi definierar då elektromagnetiska rörelsemängdstätheten

$$\mathbf{g}_{\text{em}} = \mu_0\varepsilon_0\mathbf{S}$$

och Maxwells spänningstensor

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0}B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right).$$

Då kan vi skriva

$$\partial_t(g_{\text{mek},i} + g_{\text{em},i}) + \partial_j(-T_{ij}) = 0,$$

alltså en kontinuitetsekvation.

Om man vill kan man skriva

$$\partial_j T_{ij} = \delta_{jk}\partial_k T_{ij} = \mathbf{e_j}\cdot\mathbf{e_k}\partial_k T_{ij} = (\mathbf{e_k}\partial_k)\cdot(T_{ij}\mathbf{e_j}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot T_{ij}\mathbf{e_j},$$

och vektorfältet som transporterar komponent i av rörelsemängden är $-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot T_{ij}\mathbf{e_j}$. Men att skriva så är lite fult, och ekvationen vi började med är en fullgod kontinuitetsekvation.

Flöde av rörelsemängd och ytspänningsvektorer I ett område har vi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_{\text{mek},i} + p_{\text{em},i}) &= \int \mathrm{d}\tau\, \partial_t g_{\text{mek},i} + g_{\text{em},i} \\ &= \int \mathrm{d}\tau\, \partial_j T_{ij} \\ &= \int \mathrm{d}a_j\, T_{ij}.\end{aligned}$$

Vi skriver integranden som

$$\begin{aligned}T_{ij}n_j &= \varepsilon_0 E_i E_j n_j + \frac{1}{\mu_0}B_i B_j n_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)n_j \\ &= \varepsilon_0\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}E_i + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}B_i - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)n_i.\end{aligned}$$

Vi definierar den elektriska och magnetiska ytspänningsvektorn som

$$\mathbf{T}_{\text{e}} = \varepsilon_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathbf{n},\ \mathbf{T}_{\text{m}} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0}B^2\mathbf{n}.$$

Vi ser då att flödet av dessa ut genom området ger ändringen av total rörelsemängd. I många praktiska fall är tidsderivatan av elektromagnetisk rörelsemängd försumbar, och kvar står en flödesintegral på ena sidan och summan av alla krafter på andra.

Geometrisk konstruktion av ytspänningsvektorerna Det gäller att

$$T_\mathrm{e} = w_\mathrm{e}$$

och att om vinkeln mellan $\mathbf{E}$ och $\mathbf{n}$ är α, bildar ytspänningsvektorn vinkeln α med $\mathbf{E}$ och 2α med $\mathbf{n}$. Den ligger även i samma plan som $\mathbf{E}$ och $\mathbf{n}$. Det samma gäller för den magnetiska ytspänningsvektorn.

Vi visar detta så rakt fram som vi kan för den elektriska ytspänningsvektorn. Det sista påståendets sannhet är uppenbar eftersom $\mathbf{T}_\mathrm{e}$ är en linjärkombination av $\mathbf{E}$ och $\mathbf{n}$. Vi har vidare

$$\begin{aligned}
T_\mathrm{e}^2 &= \varepsilon_0^2\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\mathbf{n}\right)^2 \\
&= \varepsilon_0^2\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2E^2 + \frac{1}{4}E^4\mathbf{n}^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\cdot E^2\mathbf{n}\right) \\
&= \varepsilon_0^2\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2E^2 + \frac{1}{4}E^4 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2E^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_0^2E^4 \\
&= w_\mathrm{e}^2,
\end{aligned}$$

vilket visar det första påståendet. Vi har vidare

$$\mathbf{T}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{E} = \varepsilon_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})w_\mathrm{e},$$

varför

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}}{E}.$$

Jämför detta med

$$\mathbf{T}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{n} = \varepsilon_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2n^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(2\cos^2(\alpha) - 1) = T_\mathrm{e}\cos 2\alpha.$$

Beviset är helt analogt för den magnetiska ytspänningsvektorn.

Elektromagnetiskt rörelsemängdsmoment Vi har

$$\mathbf{N}_\mathrm{mek} = \int \mathrm{d}\tau\,\mathbf{r}\times\partial_t\mathbf{g}_\mathrm{mek} = \int\mathrm{d}\tau\,\partial_t\mathbf{l}_\mathrm{mek},$$

där vi har infört tätheten av rörelsemängdsmoment

$$\mathbf{l}_\mathrm{em} = \mathbf{r}\times\mathbf{g}_\mathrm{em}.$$

Vi vill gärna ha en konserveringslag för denna, och använder konserveringslagen för rörelsemängd för att skriva

$$\begin{aligned}
\partial_t(l_{\mathrm{mek},i} + l_{\mathrm{em},i}) &= \varepsilon_{ijk}r_j\partial_t(g_{\mathrm{mek},k} + g_{\mathrm{em},k}) \\
&= \varepsilon_{ijk}r_j\partial_pT_{kp} \\
&= \partial_p(\varepsilon_{ijk}r_jT_{kp}) - \varepsilon_{ijk}T_{kp}\partial_pr_j \\
&= \partial_p(\varepsilon_{ijk}r_jT_{kp}) - \varepsilon_{ijk}T_{kj}.
\end{aligned}$$

Eftersom Maxwells spänningstensor är symmetrisk, försvinner andra termen. Vi skriver först om

$$\partial_p(\varepsilon_{ijk}r_jT_{kp}) = \partial_j(\varepsilon_{ipk}r_pT_{kj}) = -\partial_j(\varepsilon_{ikp}r_pT_{kj})$$

och definierar

$$M_{ij} = \varepsilon_{ikp}r_pT_{kj}.$$

Detta ger

$$\partial_t(l_{\mathrm{mek},i} + l_{\mathrm{em},i}) + \partial_jM_{ij} = 0.$$

Flöde av elektromagnetiskt rörelsemängdsmoment Vi har

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_{\mathrm{mek},i} + L_{\mathrm{em},i}) &= \int \mathrm{d}\tau\, \partial_t(l_{\mathrm{mek},i} + l_{\mathrm{em},i}) \\
&= -\int \mathrm{d}\tau\, \partial_j M_{ij} \\
&= -\int \mathrm{d}a_j\, M_{ij} \\
&= -\int \mathrm{d}a_j\, \varepsilon_{ikp} r_p T_{kj},
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} = -\int \mathrm{d}a\, (\mathbf{T}_\mathrm{e} + \mathbf{T}_\mathrm{m}) \times \mathbf{r}.
$$

9 Elektromagnetiska vågor

Elektromagnetiska vågekvationer Det gäller allmänt att

$$
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mathbf{F})\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{F}\right) - \nabla^2 \mathbf{F}.
$$

Maxwells ekvationer ger

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{E}\right) &= -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\partial_t \mathbf{B}) = -\partial_t \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}, \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B}\right) &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \mu_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{B},
\end{aligned}
$$

vilket ger vågekvationerna

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2)\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \rho + \mu_0 \partial_t \mathbf{J}, \\
(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2)\mathbf{B} &= -\mu_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{J}.
\end{aligned}
$$

Plana vågors våghastighet Man kan visa att en plan våg i källfritt rum propagerar med farten

$$
c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.
$$

Vi inför d'Alembertoperatorn $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$ och skriver då vågekvationerna som

$$
\begin{aligned}
\Box^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \rho + \mu_0 \partial_t \mathbf{J}, \\
\Box^2 \mathbf{B} &= -\mu_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{J}.
\end{aligned}
$$

Fouriertransformering av fälten Fouriertransformering ger

$$
\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathbf{E} e^{i\omega t},
$$

med inverstransform

$$
\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}.
$$

Det motsvarande gäller även för magnetfältet. Vi använder beteckningen

$$\mathbf{E}_\omega = \mathcal{F}\left(\mathbf{E}\right), \ \mathbf{E} = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{E}_\omega\right).$$

Eftersom fälten är reella, måste det gälla att

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\right).$$

Vi kan visa följande egenskaper i källfria rum:

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{E}\right) = -i\omega\mathbf{E}_\omega, \ \vec{\nabla}\times\mathbf{E}_\omega = i\omega\mathbf{B}_\omega, \ \vec{\nabla}\times\mathbf{B}_\omega = -i\frac{\omega}{c^2}\mathbf{E}_\omega, \ \vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_\omega = \vec{\nabla}\cdot\mathbf{B}_\omega = 0.$$

Strikt tidsharmonisering En strikt tidsharmonisering är en idealisering av en given fältkomponent F på formen

$$F = F_0\cos(\omega_0 t + \alpha) = \mathrm{Re}\left\{F_0 e^{-\omega_0 t - i\alpha}\right\}.$$

Genom att baka ihop allt førutom det harmoniska tidsberoende får man en komplex amplitud för vågen. Denna har belop F_0 och argument $-\alpha$.

Plana vågor En plan våg ges av

$$\mathbf{E}_\omega = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\},$$

där amplituden är en konstant. För en sån ger Maxwells ekvationer

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_\omega = \omega\mathbf{B}, \ \mathbf{k}\times\mathbf{B} = -\omega c^2\mathbf{E}_\omega.$$

Tidsmedelvärde av harmoniska storheter Låt a och b vara harmoniska storheter med periodtid T. Då kan man visa att

$$\langle ab\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{A^\star B\}$$

där A och B är storheternas amplituder.

Maxwells ekvationer i linjära material I linjära materialer är Maxwells ekvationer

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \ \vec{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \ \vec{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \partial_t\mathbf{D}, \ \vec{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_\mathrm{f}.$$

Laddningstätheter i homogena ohmska material I ett homogent ohmsk material fås

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{H}\right) &= \vec{\nabla}\cdot\mathbf{J}_\mathrm{f} + \partial_t\vec{\nabla}\cdot\mathbf{D} \\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\mathbf{D} + \partial_t\rho_\mathrm{f} \\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_\mathrm{f} + \partial_t\rho_\mathrm{f}, \end{aligned}$$

och därmed avtar fria laddningstätheten exponentiellt mot 0. Därmed kommer vi bortse från denna.

Komplex permittivitet och permeabilitet Maxwells ekvationer för en monokromatisk plan våg i ett linjärt, ohmskt material ger

$$\mathbf{k}\times\mathbf{B} = -\omega\mu\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{\omega}i\right)\mathbf{E}.$$

Detta får oss att införa den komplexa permittiviteten $\varepsilon_\mathrm{c} = \varepsilon + \frac{\sigma}{\omega}i$. De två termerna kommer betecknas ε' och ε''. Den imaginära termen kommer från lednings- och polarisationsförluster i materialet. På liknande sätt kan vi införa en komplex permeabilitet μ_c, där den imaginära termen kommer från magnetiseringsförluster. I mer allmänna material kan både reella och imaginära termen i en införd komplex permittivitet eller permeabilitet bero av vågfrekvensen.

Dispersion i material och komplexa vågvektorn Vi har

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega^2 \mu \varepsilon_{\mathrm{c}} \mathbf{E},$$

vilket ger dispersionsrelationen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \mu \varepsilon_{\mathrm{c}}.$$

Vi ser då att vi även måste definiera en komplex vågvektor. Den imaginära och komplexa termen är parallella för en plan våg.

Komplexa vågvektorn för en plan våg För en plan våg ger dispersionsrelationen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k' + ik'')^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\mathrm{c}} = \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} i\right) = \omega^2 \mu \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} e^{i \arctan \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}},$$

och därmed

$$k' + ik'' = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} e^{i \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}}.$$

Man kan säkert visa att

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1}, \ k'' = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1}.$$

Inträngningsdjup Vågvektorns imaginära term kommer ge att fälten avtar exponentiellt med en hastighet proportionell mot komplexa termens belopp. Vi definierar då inträngningsdjupet

$$\delta = \frac{1}{k''}.$$

Vågimpedans För en monokromatisk plan våg fås

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu \varepsilon_{\mathrm{c}}} \mathbf{e_k} \times \mathbf{E},$$

och därmed

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{c}}}{\mu}} \mathbf{e_k} \times \mathbf{E}.$$

Vi definierar då vågimpedansen

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{\mathrm{c}}}}.$$

Normalt infall på en gränsyta Betrakta en gränsyta i $z = 0$ mellan två linjära material där det inte finns fria laddningar eller strömtätheter på gränsytan. Låt det infallande elektriska och magnetiska fältet vara

$$\mathbf{E}_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{I}} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e_x}.$$

Detta ger upphov till reflekterade och transmitterade fält

$$\mathbf{E}_{\mathrm{R}} = E_{\mathrm{R}} e^{i(-kz - \omega t)} \mathbf{e_x}, \ \mathbf{E}_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{T}} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e_x}.$$

I tangentiell riktning är **E** och **H** kontinuerliga. Detta ger

$$E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{R}} = E_{\mathrm{T}}, \ \frac{1}{\eta_1}(E_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{R}}) = \frac{1}{\eta_2} E_{\mathrm{T}}.$$

Minustecknet på det reflekterade magnetfältet följer av att vågvektorn byter tecken. Genom att definiera

$$\beta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

fås

$$E_{\mathrm{R}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_{\mathrm{I}}, \ E_{\mathrm{T}} = \frac{2}{1 + \beta} E_{\mathrm{I}}.$$

Brytningsindex Brytningsindexen för ett linjärt medium definieras som

$$n = \frac{c}{v},$$

där v ges av

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Intensitet Intensitet för en elektromagnetisk våg ges av infallande effekt per area, med andra ord flödet av Poyntingvektorn per area. För en harmonisk våg i ett linjärt medium ges (tidsmedelvärdet av) intensiteten av

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E^2.$$

Reflektions- och transmissionskoefficienter Reflektionskoefficienten definieras av

$$R = \frac{I_\mathrm{R}}{I_\mathrm{I}}.$$

För normalt infall på gränsytan mellan linjära medier ges den av

$$R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2.$$

På samma sätt definieras transmissionskoefficienten av

$$T = \frac{I_\mathrm{T}}{I_\mathrm{I}},$$

och ges i fallet som beskrivs ovan av

$$T = \frac{4\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1 (1+\beta)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\frac{4}{(1+\beta)^2}.$$

Om de relativa permeabiliteterna är nära 1 kan vi skriva

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2,\ T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}.$$

Snett infall Betrakta en liknande gränsyta som för normalt infall, men nu med snett infallande elektriska och magnetiska fält

$$\mathbf{E}_\mathrm{I} = \mathbf{E}_{0\mathrm{I}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},\ \mathbf{B}_\mathrm{I} = (\mathbf{k}_\mathrm{I} \times \mathbf{E}_{0\mathrm{I}}) e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Dessa ger upphov till reflekterade fält

$$\mathbf{E}_\mathrm{R} = \mathbf{E}_{0\mathrm{R}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},\ \mathbf{B}_\mathrm{R} = (\mathbf{k}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_{0\mathrm{R}}) e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},\ \mathbf{E}_\mathrm{T} = \mathbf{E}_{0\mathrm{T}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},\ \mathbf{B}_\mathrm{T} = (\mathbf{k}_\mathrm{T} \times \mathbf{E}_{0\mathrm{T}}) e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Frekvensen anges av källan, ooch då uppfyller vågvektorerna

$$k_\mathrm{I} v_1 = k_\mathrm{R} v_1 = k_\mathrm{T} v_2.$$

Randvillkoren för fälten gäller fortfarande, och kommer vara på formen

$$F_\mathrm{I} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + F_\mathrm{R} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = F_\mathrm{T} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Exponenterna innehåller all information om rum och tid. Om dessa vore olika, skulle en liten ändring i position eller tid bryta likheten. Detta bekreftar att frekvensen ej ändras. Vi får vidare att

$$\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r}$$

på gränsytan, vilket implicerar att endast z-komponenten av vågvektorn kan ändras under reflektion och transmission. Vi tar det därmed som en lag att vågvektorerna bildar infallsplanet, och vi kan inskränka oss till fallet där vågvektorerna ligger i xz-planet.

Låt vågvektorerna peka i vinklar $\theta_\mathrm{I}, \theta_\mathrm{R}$ och θ_T från normalriktningen pekande in i medierna. Om tangentialkomponenterna av vågvektorn ej ändras, ger detta reflektionslagen

$$\sin\theta_\mathrm{I} = \sin\theta_\mathrm{R},\ \theta_\mathrm{I} = \theta_\mathrm{R}$$

och

$$k_\mathrm{I}\sin\theta_\mathrm{I} = k_\mathrm{T}\sin\theta_\mathrm{T}.$$

Detta ger Snells lag

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_\mathrm{I} = \frac{1}{v_2}\sin\theta_\mathrm{T}$$

alternativt

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{T}}{\sin\theta_\mathrm{I}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Randvillkoren ger vidare

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathbf{E}_{0\mathrm{I}}^\perp + \mathbf{E}_{0\mathrm{R}}^\perp) &= \varepsilon_2\mathbf{E}_{0\mathrm{T}}^\perp,\\
\mathbf{B}_{0\mathrm{I}}^\perp + \mathbf{B}_{0\mathrm{R}}^\perp &= \mathbf{B}_{0\mathrm{T}}^\perp,\\
\mathbf{E}_{0\mathrm{I}}^\parallel + \mathbf{E}_{0\mathrm{R}}^\parallel &= \mathbf{E}_{0\mathrm{T}}^\parallel,\\
\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{B}_{0\mathrm{I}}^\parallel + \mathbf{B}_{0\mathrm{R}}^\parallel) &= \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{0\mathrm{T}}^\perp,
\end{aligned}$$

där $\mathbf{B} = \frac{1}{v}\mathbf{k}\times\mathbf{E}$ i alla ekvationer.

Plan polarisering Betrakta snett infall där elektriska fältet oscillerar i infallsplanet, även kallad TM-fallet. Då ger randvillkoren

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(-E_{0\mathrm{I}}\sin\theta_\mathrm{I} + E_{0\mathrm{R}}\sin\theta_\mathrm{R}) &= -\varepsilon_2 E_{0\mathrm{T}}\sin\theta_\mathrm{T},\\
E_{0\mathrm{I}}\cos\theta_\mathrm{I} + E_{0\mathrm{R}}\cos\theta_\mathrm{R} &= E_{0\mathrm{T}}\cos\theta_\mathrm{T},\\
\frac{1}{\eta_1}(E_{0\mathrm{I}} - E_{0\mathrm{R}}) &= \frac{1}{\eta_2}E_{0\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Första och sista randvillkoret är linjärt beroende på grund av reflektionslagen och Snells lag, och reducerar båda till

$$E_{0\mathrm{I}} - E_{0\mathrm{R}} = \beta E_{0\mathrm{T}}.$$

Om vi definierar

$$\alpha = \frac{\cos\theta_\mathrm{T}}{\cos\theta_\mathrm{I}}$$

blir lösningen

$$E_{0\mathrm{R}} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}E_{0\mathrm{I}},\ E_{0\mathrm{T}} = \frac{2}{\alpha+\beta}E_{0\mathrm{I}}.$$

Detta är Fresnels ekvationer för plan polarisering. Det finns motsvarande ekvationer för polarisering normalt på infalls planet.

Brewstervinkeln För $\alpha = \beta$ försvinner den reflekterade vågen. Vi skriver först

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2(\theta_\mathrm{I})}}{\cos\theta_\mathrm{I}}.$$

Låt Brewstervinkeln θ_B vara infallsvinkeln så att den reflekterade vågen försvinner. Denna uppfyller

$$\sin^2(\theta_\mathrm{B}) = \frac{1-\beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2}.$$

Om permeabiliteterna är lika blir detta

$$\tan\theta_\mathrm{B} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Normalt infall på ledande yta Vid normalt infall av en elektromagnetisk våg på en ledande yta fås en reflekterad våg, helt analogt med vad vi har sett tidigare. Det transmitterade fältet blir dock

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = E_\mathrm{T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \mathbf{e_x},\ \mathbf{B}_\mathrm{T} = \frac{k_2}{\omega} E_\mathrm{T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \mathbf{e_y}$$

där $k_2 = k' + i\kappa$ är den nya vågvektorn. Notera att detta implicerar att fälten avtar exponentiellt. Randvillkoren blir även något annorlunda, eftersom det kan finnas källor på gränsytan. Det finns däremot ingen laddningstäthet vid normalt infall eftersom det inte finns någon normalkomponent av elektriska fältet. För en ohmsk ledare kan det heller inte finnas någon strömtäthet på gränsytan eftersom det skulle kräva ett oändligt elektriskt fält.

Randvillkoret för elektriska fältet ger

$$E_\mathrm{I} + E_\mathrm{R} = E_\mathrm{T},$$

och randvillkoret för H-fältet ger

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(E_\mathrm{I} - E_\mathrm{R}) = \frac{k_2}{\mu_2 \omega} E_\mathrm{T}.$$

Genom att definiera

$$\beta' = \frac{k_2 \mu_1 v_1}{\mu_2 \omega}$$

fås

$$E_\mathrm{R} = \frac{1 - \beta'}{1 + \beta'} E_\mathrm{I},\ E_\mathrm{T} = \frac{2}{1 + \beta'} E_\mathrm{I}.$$

För en perfekt ledare har k_2 stort belopp, vilket ger att vågen reflekteras fullständigt med fasvridning π.

Metalliska vågledare Betrakta en källfri rymd som omges av en metallisk cylinder. Cylinderns symmetriaxel är z-axeln. Vi löser detta med separationsansatsen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{s}) e^{i(k_z z - \omega t)},\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{s}) e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

I rymden blir vågekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \Box^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Med den givna ansatsen fås

$$\Box^2 = \nabla_\perp^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$$

där $\nabla_\perp^2$ gör derivationer i planet normalt på z-axeln. Genom att definiera det normala vågtalet $k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$ fås att fältamplituderna är egenfunktioner till $\nabla_\perp^2$ med egenvärden $k_\perp^2$.

Vi delar nu upp fälten i komponenter tangentiellt och normalt på z-axeln. Maxwells ekvationer i tangentialplanet och z-riktning ger då

$$\begin{aligned}
(\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp E_z - i k_z \mathbf{E}_\perp) \times \mathbf{e_z} &= i\omega \mathbf{B}_\perp, \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp \times \mathbf{E}_\perp = i\omega B_z \mathbf{e_z},\\
(\vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp B_z - i k_z \mathbf{B}_\perp) \times \mathbf{e_z} &= -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_\perp,\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp \times \mathbf{B}_\perp = -i\frac{\omega}{c^2} E_z \mathbf{e_z}.
\end{aligned}$$

Om man kryssar ekvationerna till vänster med $\mathbf{e_z}$ från vänster får man på något sätt

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i}{k_\perp^2}(k_z \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp E_z - \omega \mathbf{e_z} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp B_z),\ \mathbf{B}_\perp = \frac{i}{k_\perp^2}(k_z \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp B_z + \frac{\omega}{c^2} \mathbf{e_z} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp E_z).$$

Ekvationen behöver även randvillkor. Vi har antagit att det är metall på randen. Randvillkoret för elektriska fältet ger

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{n} \times \mathbf{e_z}.$$

Detta implicerar direkt att $E_z = 0$ och $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\perp = \mathbf{0}$. Detta gäller över hela randen, så $\mathbf{n} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp E_z = \mathbf{0}$. Detta implicerar på något sätt $\mathbf{n} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}_\perp B_z = 0$.

Gränsfrekvens för vågledare Fälten i en vågledare ges av ett Sturm-Liouville-problem, så spektrumet av $k_\perp$ är oändligt (detaljerna bestäms av randens geometri). Det finns då för varje vågtal $k_\perp$ i spektrumet ett $|\mathbf{k}| = k$ så att $k < k_\perp$. För detta $|\mathbf{k}|$ fås $k_z = i\sqrt{k_\perp^2 - k^2}$, och fältet avtar exponentiellt i ledaren. Gränsfrekvensen för ett givet vågtal definieras som $\omega_\mathrm{g} = ck_\perp$, och är frekvensen som ligger på gränsen mellan propagerande och evanescenta moder. Vågtalet med lägst gränsfrekvens kallas för grundmoden.

Lägre frekvenser än ω_g kommer alltså ge evanescenta moder och högre frekvenser ger propagerande moder. Detta visas tydligast i omskrivningen $k_z = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_\mathrm{g}^2}$.

10 Gaugetransformationer

Vi kommer här att delvis starta om dynamiken genom att studera potentialerna i stället för fälten. Vi kommer ihåg att

$$\mathbf{E} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V - \partial_t \mathbf{A},\ \mathbf{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A}.$$

Modifierade vågekvationer för potentialerna Vi har

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} &= -\nabla^2 V - \partial_t \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} \\
&= -\Box^2 V - \partial_t \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t V \right) \\
&= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\partial_t V + \partial_t^2 \mathbf{A}) \\
&= -\Box^2 \mathbf{A} + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t V \right) \\
&= \mu_0 \mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Vi inför den så kallade “gauge”-termen

$$g = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t V,$$

och får då

$$\Box^2 V + \partial_t g = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \Box^2 \mathbf{A} - \vec{\boldsymbol{\nabla}} g = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Lorenz' gaugevillkor Lorenz' gaugevillkor är

$$g = 0.$$

Gaugetransformationer Här kommer vi till en del av fysiken där man inte har bra ord på svenska. Därför kommer vi använda det engelska ordet gauge om den sortens transformationer som kommer diskuteras. Ordet är besläktad med mått och mätning, och uttalas geɪdʒ.

Låt λ vara ett godtycklig skalärfält, och transformera potentialerna enligt

$$V' = V - \partial_t \lambda,\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \lambda.$$

Det är fortfarande fälten som har en direkt fysikalisk tolkning, och dessa ges av

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}' = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A}' = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}} \lambda = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \\
&\mathbf{E}' = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V' - \partial_t \mathbf{A}' = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \partial_t \lambda - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \vec{\boldsymbol{\nabla}} \lambda = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V - \partial_t \mathbf{A} = \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Kausala Greenfunktioner till d'Alembertoperatorn Vi söker en lösning till

$$\Box^2 G = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

med randvillkor $G = 0$ i oändligheten och initialvillkor $G = 0$. Denna (eller i alla fall en kausal sådan) ges av

$$G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi R}\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right),\ R = \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,$$

motsvarande en sfärisk våg. I fall där man inte har några randbidrag och homogena begynnelsevillkor fås potentialerna genom att falta med Greenfunktionen. Detta ger i Lorenzgaugen

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau' \int \mathrm{d}t'\, G\rho(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right),\end{aligned}$$

och $\mathbf{A}$ beräknas på samma sätt.

Retarderad tid Vi definierar den retarderade tiden som

$$t_\mathrm{r} = t - \frac{R}{c}.$$

Denna dyker upp i båda potentialerna, och motsvarar att informationen om källornas ändringar propagerar med hastighet c.

Vågekvationer för fälten Vi vill nu ta fram vågekvationer för fälten, och kommer använda att gradientoperatorn och tidsderivationsoperatorn kommuterar både med varandra och med d'Alembertoperatorn. Vi får

$$\begin{aligned}\Box^2\mathbf{E} &= -\Box^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}V - \Box^2\partial_t\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\rho + \partial_t\vec{\boldsymbol{\nabla}}g + \mu_0\partial_t\mathbf{J} - \partial_t\vec{\boldsymbol{\nabla}}g = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\rho + \mu_0\partial_t\mathbf{J}, \\ \Box^2\mathbf{B} &= \Box^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{A} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{J} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}g = -\mu_0\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\mathbf{J}.\end{aligned}$$

Lösningar av vågekvationen Lösningar av vågekvationerna ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R^2}\rho(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\mathbf{e_R} + \frac{1}{cR}\partial_{t_\mathrm{r}}\rho(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\mathbf{e_R} - \frac{1}{c^2R}\partial_{t_\mathrm{r}}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}), \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\times\mathbf{e_R} + \frac{1}{cR}\partial_{t_\mathrm{r}}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\times\mathbf{e_R}.\end{aligned}$$

Kvasistatiska fält Betrakta långsamma förlopp där vi kan approximera

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) &\approx \rho(\mathbf{r}', t) + (t_\mathrm{r} - t)\partial_t\rho(\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}', t) - \frac{R}{c}\partial_t\rho(\mathbf{r}', t), \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + (t_\mathrm{r} - t)\partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) - \frac{R}{c}\partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t).\end{aligned}$$

De motsvarande tidsderivatorna är

$$\begin{aligned}\partial_{t_\mathrm{r}}\rho(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) &= \partial_t\rho(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) \approx \partial_t\rho(\mathbf{r}', t), \\ \partial_{t_\mathrm{r}}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) &= \partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) \approx \partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t),\end{aligned}$$

där vi kan evaluera derivatorna i t eftersom förloppet är tillräckligt långsamt för att derivatan är ungefär konstant under tiden det tar för fälten att propagera. Insatt i uttryckten för fälten fås

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R^2}\mathbf{e_R} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R}\partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t), \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\times\mathbf{e_R},\end{aligned}$$

som vi känner igen som de kvasistatiska fälten.

Punktladdningar i rörelse Betrakta en punktladdning q i en föreskriven rörelse som beskrivs av ortsvektorn $\mathbf{w}(t)$. Laddningen har hastighet $\mathbf{v}$ och acceleration $\mathbf{a}$. Vi vill nu ta fram potentialerna och fälten från denna. Då återvänder vi till Greenfunktionslösningen

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau' \int \mathrm{d}t'\, G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')\rho(\mathbf{r}', t').$$

För en punktladdning är laddningstätheten $\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t'))$, vilket ger

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\tau' \int \mathrm{d}t'\, q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t'))\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}t'\, q\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}{c}\right). \end{aligned}$$

Att integrera detta över tid är inte så icke-trivialt som det kanske ser ut, eftersom tidsberoendet dyker upp på två ställen i Diracdeltat. Vi kan däremot införa $f(t') = -t + t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{w}(t')|}{c}$. Om f har enkla nollställen, dvs. nollställen där derivatan är nollskild, kan vi använda en identitet för Diracdeltat för att beräkna integralen. Det visar sig att för $v < c$ har f ett enda nollställe, vilket enligt definitionen måste vara t_r. Att hitta retarderade tiden innebär därmed att lösa den implicita ekvationen $c(t - t_\mathrm{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})|$.

Låt oss nu anta att vi har hittat retarderade tiden. För att beräkna potentialen behövs derivatan av f, som ges av

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t'}(t_\mathrm{r}) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t_\mathrm{r}}(t_\mathrm{r}) \\ &= 1 + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_\mathrm{r}}\sqrt{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}} \\ &= 1 + \frac{1}{cR}\mathbf{R}\cdot\partial_{t_\mathrm{r}}\mathbf{R} \\ &= 1 - \frac{1}{c}\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Nu fås potentialen enligt

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}t'\, q\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}{c}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})|}\frac{1}{\left|1 - \frac{1}{c}\mathbf{e_R}\cdot\mathbf{v}\right|}. \end{aligned}$$

Vi kan även införa den normerade hastigheten $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c}\mathbf{v}$ för att få

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})|}\frac{1}{|1 - \mathbf{e_R}\cdot\boldsymbol{\beta}|}.$$

På samma sätt fås vektorpotentialen genom att skriva strömtätheten som $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ att bli

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})|}\frac{1}{|1 - \mathbf{e_R}\cdot\boldsymbol{\beta}|}\mathbf{v}.$$

Komplext fjärrfält från utbredd strömtäthet Betrakta en strömtäthet som ligger fullständigt innanför ett område med maximal dimension d_max. Magnetfältet från denna ges av

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau' \left(\frac{1}{R^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r}) + \frac{1}{cR}\partial_t\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_\mathrm{r})\right)\times\mathbf{e_R}.$$

Om strömtätheten har ett harmoniskt tidsberoende $e^{j\omega t}$, där $j = i$ (konventionen används pga det positiva tecknet i exponenten) fås i integranden

$$\mathbf{J} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t_\mathrm{r}}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}e^{-j\frac{\omega R}{c}}\right),\ \partial_t\mathbf{J} = \mathrm{Re}\left(j\omega\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}e^{-j\frac{\omega R}{c}}\right).$$

Vi kommer bortse från det harmoniska tidsberoende då det inte ändras, och inför $k = \frac{\omega}{c}$.

För att studera fältet långt borta från strömfördelningen antar vi att $kR >> 1$, vilket ger det komplexa fältet

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau' \left(\frac{1}{R^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}e^{-j\frac{\omega R}{c}} + \frac{1}{cR}j\omega\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}e^{-j\frac{\omega R}{c}}\right) \times \mathbf{e_R} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R^2}e^{-jkR}\left(1 + jkR\right)\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e_R} \\
&\approx j\frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau'\, \frac{1}{R}e^{-jkR}\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e_R}.
\end{aligned}$$

Om $r >> d_{\mathrm{max}}$ kan vi göra en parallelliseringsansats $kR \approx k(r - \mathbf{e_r}\cdot\mathbf{r}') = kr - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'$, där $\mathbf{k} = k\mathbf{e_r}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= j\frac{\mu_0 k}{4\pi r}e^{-jkr}\int \mathrm{d}\tau'\, e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e_r} \\
&= j\frac{\mu_0}{4\pi r}e^{-jkr}\left(\int \mathrm{d}\tau'\, e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right) \times \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Vi känner igen uttrycket i parentesen som Fouriertransformen av strömtätheten med avseende på rum. Vi får vidare

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{\mu_0 c}{32\pi^2 r^2}F\mathbf{e_r},$$

där

$$F = \left|\mathcal{F}\left(\mathbf{J}\right) \times \mathbf{k}\right|^2 = \left(\mathcal{F}\left(\mathbf{J}\right) \times \mathbf{k}\right) \cdot \left(\mathcal{F}\left(\mathbf{J}\right) \times \mathbf{k}\right)^*.$$

Vektorn $\mathcal{F}\left(\mathbf{J}\right) \times \mathbf{k}$ kommer i vissa fall betecknas $\mathbf{f}$.

Riktverkan för en trådantenn För en trådantenn definieras riktverkan som

$$D = \frac{\max F}{\langle F\rangle}.$$

11 Antenner

Elektriska dipolantenner En enkel form för antenn konstrueras genom att placera två motsatta variabla punktladdningar på ett avstånd d från varandra och förbinda dessa med en ström I. Genom att orientera z-axeln parallell med vektorn som förbinder punktladdningarna fås ett dipolmoment och en ström

$$\mathbf{p} = q(t)d\mathbf{e_z},\ I = \partial_t q.$$

Från detta kan man i gränsen $d \to 0,\ qd \to p$ visa att

$$\rho = -\mathbf{p}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\delta(\mathbf{r}),\ \mathbf{J} = \mathbf{p}\delta(\mathbf{r}).$$

Genom att studera fältet från en dipol i Lorenzgaugen fås

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e_r}\cdot(\mathbf{p} + \frac{r}{c}\dot{\mathbf{p}})\mathbf{e_r} - (\mathbf{p} + \frac{r}{v}\dot{\mathbf{p}})}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\dot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} - \ddot{\mathbf{p}}}{r}, \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c}\ddot{p}\right) \times \mathbf{e_r},
\end{aligned}$$

där alla $\mathbf{p}$ och derivator av denna evalueras vid $t_{\mathrm{r}} = t - \frac{r}{c}$.

Fälten uppfyller

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{e_r} \times \mathbf{E},\ \mathbf{E} = -c\mathbf{e_r} \times \mathbf{B}.$$

Effekttransport från en elektrisk dipolantenn Man kan visa att genom en sfär med radien R som är koncentrisk med dipolen fås

$$P = \frac{\mathrm{d}W_{\text{när}}}{\mathrm{d}t} + P_{\text{strål}},$$

där

$$W_{\text{när}} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left(\frac{c^3p^2}{2R^3} + \frac{c^2}{R^2}(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{p}}) + \frac{c}{R}\dot{p}^2\right),\ P_{\text{strål}} = \frac{\mu_0}{6\pi\varepsilon_0 c}\ddot{p}^2.$$

Det är bara den sista termen, strålningstermen, som når ut till oändligheten.

Magnetiska dipolantenner En annan enkel form för antenn konstrueras genom att lägga en sladd i en cirkulär slinga. Om cirkeln har radie a och för strömmen I fås dipolmomentet

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I\mathbf{e_z}.$$

I gränsen $a \to 0, \pi a^2 I \to m$ fås magnetiseringen

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\delta(\mathbf{r}).$$

Den motsvarande strömtätheten är

$$\mathbf{J} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{M} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\delta \times \mathbf{m}.$$

Från detta kan man visa att

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial_t\mathbf{m} + \frac{r}{c}\partial_t^2\mathbf{m}}{r^2} \times \mathbf{e_r},\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\frac{3\left(\mathbf{e_r}\cdot\left(\mathbf{m} + \frac{r}{c}\partial_t\mathbf{m}\right)\right)\mathbf{e_r}}{r^2} + \frac{(\mathbf{e_r}\cdot\partial_t^2\mathbf{m}))\mathbf{e_r} - \partial_t^2\mathbf{m}}{c^2}\right).$$

Raka trådantenner En annan enkel antenn kan konstrueras genom att föra en varierande ström genom en rak tråd med längd h (orienterad längs med z-axeln).

Raka trådantenner med tidsharmonisk ström Vi antar att strömmen i tråden är tidsharmonisk, och söker elektriska och magnetiska fältet för $r \gg h, \lambda$. Vi kan då använda resultaten från analyser av tidsharmoniska strömfördelningar för att få

$$\mathbf{B} = j\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\mathcal{F}(\mathbf{J}) \times \mathbf{k},$$

där strömtätheten ges av

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I(z')\delta(\mathbf{s}')(H(z' + \frac{1}{2}h) - H(z' - \frac{1}{2}h))\mathbf{e_z}.$$

Genom att Fouriertransformera strömtätheten fås

$$\mathbf{B} = j\frac{\mu_0\omega}{4\pi c}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\phi\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h}\mathrm{d}z'\, I(z')e^{j\frac{z'}{\lambda}2\pi\cos\theta}\mathbf{e}_\phi.$$

Mittpunktsmatade trådantenner För en mittpunktsmatad trådantenn antar vi att strömmen tar slut i änderna av tråden. Den approximativa strömtätheten ges av

$$I(z') = I_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}h - |z'|\right)\right).$$

Det motsvarande magnetfältet blir då

$$\mathbf{B} = j\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\cos\left(\pi\cos\theta\frac{h}{\lambda}\right) - \cos\left(\pi\frac{h}{\lambda}\right)}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi.$$

Gruppantenner En gruppantenn är en mängd av N strömfördelningar som alla befinner sig inom ett avstånd $w_{\max}$ från varandra.

Fjärrfält från en gruppantenn av dipoler Betrakta en uppställning av dipoler med dipolmoment $\mathbf{p}_n$ centrerade i punkterna $\mathbf{w}_n$. I fjärrzonen till samtliga dipoler ger superposition

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\sum_n \frac{1}{R_n}\partial_t^2 \mathbf{p}_n(t_n) \times \mathbf{e}_{\mathbf{R_n}},\ t_n = t - \frac{R_n}{c}.$$

I fjärrzonen kan vi använda parallellapproximationen $R_n \approx r - \mathbf{e_r}\cdot\mathbf{w}_n,\ \mathbf{e}_{\mathbf{R_n}} \approx \mathbf{e_r}$ för att få

$$\mathbf{B} \approx -\frac{\mu_0}{4\pi c}\mathbf{e_r} \times \left(\sum_n \frac{1}{R_n}\partial_t^2 \mathbf{p}_n\left(t_\mathrm{r} + \frac{\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{w}_n}{c}\right)\right) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\mathbf{e_r} \times \left(\sum_n \partial_t^2 \mathbf{p}_n\left(t_\mathrm{r} + \frac{\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{w}_n}{c}\right)\right),$$

där vi har infört retarderade tiden för origo $t_\mathrm{r} = t - \frac{r}{c}$.

Om dipolen har harmoniskt tidsberoende $\mathbf{p}_n = p_n \mathbf{e}_{\mathbf{p_n}} e^{j(\omega t + \alpha_n)}$ kan vi skriva

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\mathbf{e_r} \times \left(\sum_n -\omega^2 p_n \mathbf{e}_{\mathbf{p_n}} e^{j\alpha_n + j\omega\left(t_\mathrm{r} + \frac{\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{w}_n}{c}\right)}\right)\\ &= \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c r}e^{j\omega t_\mathrm{r}}\mathbf{e_r} \times \left(\sum_n p_n \mathbf{e}_{\mathbf{p_n}} e^{j\alpha_n + j\omega\frac{\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{w}_n}{c}}\right).\end{aligned}$$

Om man inför vågvektorn $k = \frac{\omega}{c}\mathbf{e_r}$ och bortser från harmoniska tidsberoendet kan detta skrivas som

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c r}e^{-jkr}\sum_n e^{j\alpha_n + j\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}_n}\mathbf{f}_n(\theta,\phi).$$

Om alla delarna är lika och likadant orienterade fås $\mathbf{f}_n = a_n \mathbf{e_f}$, vilket ger

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c r}e^{-jkr}\mathbf{e_f}\sum_n a_n e^{j\alpha_n + j\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}_n}.$$

Här dyker det upp en elementfaktor $\mathbf{e_f}$ som beskriver antennens orientering och en gruppfaktor $G = \sum_n a_n e^{j\alpha_n + j\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}_n}$ som beskriver hur de samverkar.

12 Relativitet och elektromagnetism

Lorentztransformen Betrakta två inertialsystem S och S' med sammanfallande koordinataxlar, där S' rör sig med hastigheten $v\mathbf{e_x}$ relativt S. Lorentztransformen mellan koordinaterna i de två systemen är

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right),\ x' = \gamma(x - vt),$$

med

$$\beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Övriga koordinater påverkas inte. Inversion av transformen fås genom att byta tecken på β och byta plats på primmade och oprimmade koordinater. På matrisform skriver vi

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

där ν och μ löper från 0 till 3 och $x^0 = ct$. Konventionen i speciell relativitet är att grekiska index löper över alla dimensioner medan latinska index bara löper över rumsindex.

Mer allmänt kan vi skriva transformationsmatrisen som

$$\lambda^\mu_\nu = \partial_\nu (x')^\mu,$$

med invers vars komponenter ges av $\partial'_\nu x^\mu$. Kontravarianta vektorer transformeras med vanliga transformationsmatrisen och kovarianta vektorer med den inversa transformationsmatrisen. Alla vektorer kan uttryckas i kontravarianta och kovarianta komponenter, och dessa uppfyller

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu,\ A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$$

där g är den metriska tensorn. Metriken vi använder ges av $g_{ij} = \delta_{ij},\ g_{0\mu} = -\delta_{0\mu}$.

Derivator Kedjeregeln ger att derivationsoperatorn $\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t,\ \partial_i = \partial_i$ transformeras kovariant. Dens kontravarianta motsvarighet tas enkelt fram med metriken.

Källtensorn Betrakta en laddningsfördelning som rör sig med konstant hastighet relativt ett inertialsystem S. I dens vilosystem S' är $\mathbf{J}' = \mathbf{0}$. I S fås

$$\rho = \gamma\rho',\ \mathbf{J} = \rho v \mathbf{e_x} = \gamma\rho' v \mathbf{e_x}.$$

Mer allmänt kan man bilda 4-vektorn

$$J^0 = c\rho, J^i = J_i$$

och visa att denna transformeras enligt Lorentztransformationen.

Potentialtensorn Vi har visat att potentialen från en punktladdning i icke-accelererad rörelse ges av

$$V(x^\mu) = \gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma(x^1 - \beta x^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}},\ \mathbf{A}(x^\mu) = \frac{V}{c}\boldsymbol{\beta}.$$

I laddningens inertialsystem fås

$$V((x')^\mu) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x')^i(x')^i}},\ \mathbf{A}'((x')^\mu) = \mathbf{0}.$$

Då definierar vi 4-vektorn

$$(A')^0 = \frac{V}{c},\ (A')^i = A_i.$$

Denna transformeras enligt Lorentztransformationen.

Lorentzskalärer En Lorentsskalär är en skalär som är invariant under Lorentztransformationen. Den mest allmänna Lorentzskalären är skalärprodukten mellan 4-vektorer

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_\mu B^\mu.$$

Detta ger direkt att $\partial_\mu J^\mu$ är en Lorentzskalar, vilket motsvarar kontinuitetsekvationen. I Lorenzgaugen är $\partial_\mu A^\mu$ en Lorentzskalär. d'Alembertoperatorn $\partial_\mu\partial^\mu$ är även invariant under Lorentztransformen.

Faradaytensorn Elektriska och magnetiska fältet kan användas för att konstruera den antisymmetriska tensorn

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Genom att Lorentztransformera denna fås

$$E'_x = E_x,\ E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z),\ E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y),$$
$$B'_x = B_x,\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}B_z\right),\ B'_z = \left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right).$$

Duala Faradaytensorn Duala Faradaytensorn fås genom att göra bytet $E_i \leftrightarrow -cB_i$ i Faradaytensorn. På matrisform blir den

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix}.$$

Maxwells ekvationer Två av Maxwells ekvationer kan nu skrivas

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu.$$

Om man gör det samma med duala fälttensorn fås

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0,$$

vilket ger de två andra.