Sammanfattning av SG1183 Differentialekvationer och transformmetoder

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

18 september 2018

Sammanfattning

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer (ODE)

1.1 Användbara defitioner och satser

Lipschitzkontinuitet En funktion f är Lipschitzkontinuerlig om det finns ett K så att det för varje x_1, x_2 gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Lipschitzkontinuitet och deriverbarhet Låt $f \in C^1$. Då är f Lipschitzkontinuerlig.

Grönwalls lemma Antag att det finns positiva A, K så att $h : [0, T \to \mathbf{R}]$ uppfyller

$$h(t) \leq K \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s + A.$$

Då gäller att

$$h(t) \leq Ae^{Kt}.$$

Bevis Definiera

$$I(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Då gäller att

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = h(t) \leq KI(t) + A.$$

Denna differentialolikheten kan vi lösa vid att tillämpa integrerande faktor. Detta kommer att ge

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-Kt}I(t)\right) \leq Ae^{-Kt}.$$

Vi integrerar från 0 till r och använder att $I(0) = 0$ för att få

$$I(r) \leq \frac{A}{K}(e^{Kr} - 1).$$

Derivation på båda sidor ger

$$h(r) \leq Ae^{Kr},$$

vilket skulle visas.

Potenser av matriser Vi definierar

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Eulers metod Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, y),\ 0 < t < T,$$
$$y(0) = y_0.$$

Vi gör indelningen $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N$ så att $\Delta t = \frac{T}{N}$ och inför $y_n = y(t_n)$. Vidare gör vi approximationen

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y).$$

Linjära differentialekvationer Om en differentialekvation kan skrivas på formen $F(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dots) = 0$, är den linjär om F är linjär i alla sina argument förutom t.

Wronskianen Wronskianen definieras som

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t) & \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t) \end{vmatrix}.$$

För vektorvärda funktioner definieras den som determinanten av matrisen vars kolumner är de olika funktionerna.

Linjärt beroende funktioner $f : I \to \mathbf{R}, g : I \to \mathbf{R}$ är linjärt beroende om det finns k_1, k_2 så att

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0\ \forall\ t \in I.$$

Fundamentalt sätt av lösningar Betrakta någon ODE och ett sätt lösningar. Detta sättet är ett fundamentalt sätt av lösningar om och endast om deras wronskian är nollskild överallt i lösningsintervallet.

1.2 Första ordningen

Entydighet av lösning Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = f(y),$$
$$y(0) = y_0.$$

Detta har en unik lösning om f är Lipschitzkontinuerlig.

Observera att beviset kan även göras för en funktion $f(t, y)$ vid att skriva differentialekvationen som ett system och komma med en motsvarande sats för system av differentialekvationer.

Bevis Betrakta två lösningar y, z av differentialekvationen. Vi får

$$y(\tau) - y_0 = \int_0^\tau f(y)\,\mathrm{d}t$$

och samma för z. Vi subtraherar dessa två resultat och får

$$y(\tau) - z(\tau) = y_0 - z_0 + \int_0^\tau f(y) - f(z)\,\mathrm{d}t\,.$$

Vid att beräkna absolutbeloppet av båda sidor och använda Cauchy-Schwarz' oliket får man vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau |f(y) - f(z)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Kravet om Lipschitzkontinuitet av f ger vidare

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^\tau K|y(t) - z(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Grönwalls lemma ger slutligen

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y_0 - z_0|e^{K\tau}.$$

Om $y_0 = z_0$ är $y = z$, och beviset är klart.

Lösning av linjära ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)y(t) = g(t).$$

Beräkna

$$P(t) = \int_a^t p\,\mathrm{d}x$$

och inför den integrerande faktorn $e^{P(t)}$. Multiplicera med den på båda sidor för att få

$$e^{P(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = e^{P(t)}g(t).$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ye^{P}\right)(t) = e^{P(t)}g(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t).$$

Analysens huvudsats ger då

$$y(t)e^{P(t)} = H(t) + c$$

och slutligen

$$y(t) = ce^{-P(t)} + e^{-P(t)}H(t).$$

Låt oss lägga till bivillkoret $y(a) = y_0$. Man kan då visa att lösningen kan skrivas som

$$y(t) = y_0 e^{-\int_a^t p\mathrm{d}x} + \int_a^t g(x)e^{-\int_x^t p\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x\,.$$

Separabla ODE av första ordning Antag att vi har en differentialekvation som kan skrivas på formen

$$m(x) + n(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Denna betecknas som en separabel ODE av första ordning.

För att lösa den, beräkna primitiv funktion på båda sidor, vilket ger

$$M(x) + N(y(x)) = c,\ \ c \in \mathbf{R}.$$

Om N är inverterbar, får man då y enligt

$$y(x) = N^{-1}(c - M(x)).$$

1.3 Andra ordningen

Entydighet av lösning Betrakta den andra ordningens ODE

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) &= g(t),\ \ y > t_0,\\ y(t_0) &= y_0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) &= y_0'.\end{aligned}$$

Den har en entydig lösning om p, q är Lipschitzkontinuerliga.

Form på lösning av andra ordningens ODE Betrakta den andra ordningens ODE

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) = L(t,y) = g(t).$$

Låt y_{P} vara en partikulär lösning till denna. Då är y en lösning om och endast om

$$y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}},$$

där y_{H} löser den homogena ekvationen.

Bevis Vi har

$$L(t,y) = L(t, y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{H}}) = L(t, y_{\mathrm{P}}) + L(t, y_{\mathrm{H}}) = g(t) + 0 = g(t),$$

och därmed löser y differentialekvationen. Vi har även

$$L(t, y - y_{\mathrm{P}}) = g(t) - g(t) = 0,$$

och $y - y_{\mathrm{P}}$ löser den homogena ekvationen. Eftersom detta är sant, har vi visat ekvivalens.

Fundamentala lösningar Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) = g(t),\ t \in I,$$

där p, q, g är kontinuerliga på I. Låt y_1 uppfylla

$$y_1(t_0) = 1, \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t_0) = 0$$

och y_2 uppfylla

$$y_2(t_0) = 0, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t_0) = 1.$$

Då definieras y_1, y_2 som mängden av fundamentala lösningar av differentialekvationen.

Linjär kombination av lösningar Betrakta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) &= g(t),\ t > t_0,\\ y(t_0) &= y_0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) &= y_0'\end{aligned}$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då finns det c_1, c_2 så att $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ är en lösning om $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.

Abels sats Betrakta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)+q(t)y(t)&=g(t),\ t\in I,\\ y(t_0)&=y_0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)&=y_0'\end{aligned}$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då gäller att

$$W(y_1,y_2)(t)=W(y_1,y_2)(t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s}.$$

Bevis

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}(t)&=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t)-\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t)+y_1\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}t^2}(t)-y_2\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}(t)\\ &=y_1\left(-p(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t)+q(t)y_2(t)\right)-y_2\left(-p(t)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t)+q(t)y_1(t)\right)\\ &=-p(t)W(y_1,y_2)(t).\end{aligned}$$

Denna differentialekvationen har lösning

$$W(y_1,y_2)(t)=W(y_1,y_2)(t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s},$$

vilket skulle visas.

Linjärt beroende av lösningar Betrakta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)+q(t)y(t)&=g(t),\ t\in I,\\ y(t_0)&=y_0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)&=y_0'\end{aligned}$$

och anta att y_1, y_2 är lösningar. Då är dessa linjärt beroende på I om och endast om $W(y_1, y_2)(t) = 0$.

Bevis Om dessa är linjärt beroende, ser man att Wronskianen blir lika med 0, då kolumnerna i matrisen vars determinant ger Wronskianen kommer vara multipler av varandra.

Lösning av andra ordningens ODE med konstanta koefficienter Låt r_1, r_2 vara lösningar till

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Då ges lösningarna till

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + qy(t) = L(t, y) = 0$$

av

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2, \\ (c_1 t + c_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2. \end{cases}$$

Variation av parametrar Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + q(t)y(t) = g(t), \ t \in I$$

där p, q, g är kontinuerliga på I och y_1, y_2 är lösningar av den motsvarande homogena ekvationen, ges en partikulär lösning av ekvationen av

$$y_{\mathrm{p}} = -y_1 \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\,\mathrm{d}s + y_2 \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\,\mathrm{d}s$$

där $t_0 \in I$.

1.4 System av ODE

Formulering Betrakta ett system av funktioner $x_1, x_2, \dots$ som beskrivs av systemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) &= g_1(t) + \sum p_{1i} x_i, \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t) &= g_2(t) + \sum p_{2i} x_i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

av differentialekvationer. Definiera

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Då kan systemet skrivas som

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Form på lösning av system av ODE Låt $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}$ lösa

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Då är alla lösningar på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{p}} + \mathbf{x}_{\mathrm{h}}$$

där $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}$ löser det motsvarande homogena systemet.

Fundamentalmatris Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$$

med fundamentalt sätt av lösningar $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$. Då definieras systemets fundamentalmatris som

$$\Psi = \left[\mathbf{x}^{(1)}(t) \ldots \mathbf{x}^{(n)}(t)\right].$$

Vi definierar även den speciella fundamentalmatrisen Φ, vars kolumner satisfierar begynnelsesvillkoret

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det kan visas att denna ges av

$$\Phi(t) = e^{A(t)t}.$$

Linjär kombination av lösningar Låt $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)} \in \mathbf{R},\ 0 < t < T$ vara ett fundamentalt sätt av lösningar till

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P(t)\mathbf{x}(t),\ t > 0,$$

där P är kontinuerlig. Då kan varje lösning till ekvationen skrivas som

$$\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{x}^{(i)}$$

på precis ett sätt. Med fundamentalmatrisen kan detta uttryckas som

$$\mathbf{x} = \Psi\mathbf{c},$$

där $\mathbf{c}$ är en vektor med koefficienter.

Bevis Begynnelsesvärdeproblemet implicerar att vår lösning måste uppfylla

$$\left[\mathbf{x}^{(1)}(0)\ldots\mathbf{x}^{(n)}(0)\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0).$$

Detta har bara en lösning om $\left|\mathbf{x}^{(1)}(0)\ldots\mathbf{x}^{(n)}(0)\right| \neq 0$. Eftersom alla lösningarna är linjärt oberoende, är detta uppfylld. Konstanterna c_i ges då unikt, och beviset är klart.

System av ODE med konstant matris Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där P är en konstant matris. Vi gör ansatsen $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\boldsymbol{\xi}$ och får

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) - P\mathbf{x}(t) = e^{rt}(rI - A)\boldsymbol{\xi}.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är nollskild, kan detta bara bli noll om

$$P\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}.$$

Alltså är $\mathbf{x}$ bara en lösning om $\boldsymbol{\xi}$ är en egenvektor till P och r är det motsvarande egenvärdet.

Upprepande egenvärden Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där P är en konstant matris, låt r vara ett egenvärde till P med algebraisk multiplicitet 2 och geometrisk multiplicitet 1 och $\boldsymbol{\xi}$ en motsvarande egenvektor. Då är en lösning

$$\mathbf{x}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$$

och en ny lösning kan skrivas som

$$\mathbf{x}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt},$$

där $\boldsymbol{\eta}$ uppfyller

$$(A - rI)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

Wronskianen för ett system med konstant matris Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

där P är en konstant matris. Låt $\boldsymbol{\xi}_i$ vara de olika egenvektorerna till P motsvarande egenvärden r_i. Wronskianen till dessa ges av

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t}\boldsymbol{\xi}_1 & \ldots & e^{r_n t}\boldsymbol{\xi}_n \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1+\cdots+r_n)} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \ldots & \boldsymbol{\xi}_n \end{vmatrix} \\ &= W(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n)(0)e^{\mathrm{Tr}\{P\}t}, \end{aligned}$$

där vi har använt en sats för att få fram spåret. Det följer blant annat att Wronskianen är antingen 0 eller nollskild överallt.

Diagonalisering Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = A\mathbf{x}(t),$$

där A är en konstant matris som kan skrivas som $A = PDP^{-1}$. Då kan vi införa $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, vilket ger

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = P\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}(t) = PDP^{-1}\mathbf{y} = PD\mathbf{y}, \\ &\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}(t) = D\mathbf{y}, \end{aligned}$$

vilket är en simplare variant av det ursprungliga problemet.

Partikulärlösningar Betrakta

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathbf{g}(t) + P\mathbf{x}(t).$$

Det finns olika metoder att ta fram en partikulärlösning av detta.

Diagonalisering Låt P vara diagonaliserbar och konstant. Då får man vid diagonalisering att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathbf{h}(t) + D\mathbf{y}(t)$$

med $\mathbf{h} = T^{-1}\mathbf{g}$. Varje komponent kan då lösas som

$$y_j(t) = c_j e^{r_j t} + e^{r_j t}\int\limits_{t_0}^{t} h_j(s)e^{-r_j s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Obestämda koefficienter Om $\mathbf{g}$ har en enkel form, kan man gissa på en lösning och bestämma koefficienterna baserad på ens gissning.

Variation av parametrar Ansätt

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t).$$

Då ger differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t) = P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t).$$

Eftersom Ψ är en fundamentalmatris för ekvationen, gäller att

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}(t)P(t)\Psi(t),$$

och vi får

$$\Psi(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathbf{g}(t).$$

Vi löser för $\mathbf{u}$ och integrerar, vilket slutligen ger

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

1.5 Exakta differentialekvationer

Formulering Betrakta ekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Denna är exakt om den kan skrivas på formen

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x, y(x)) = 0.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y(x)) = M(x, y(x)),\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y(x)) = N(x, y(x)),$$

och lösningarna ges implicit av

$$\psi(x, y(x)) = c.$$

Exakthet av differentialekvationer Differentialekvationen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

är exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y(x)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y(x)).$$