Sammanfattning av SG1121 Mekanik

Yashar Honarmandi

7 maj 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller essensiella ekvationer i kursen SG1121.

Innehåll

1 Fundamentala koncepter och begrepp

Krafter En kraft $\mathbf{F}$ beskrivs av en vektor med belopp och rikting, samt en angrepspunkt.

Kraftmoment En kraft kan ha en viss vridningsförmåga med avseende på en punkt. Detta är kraftens kraftmoment. Om en kraft vrider kring punkten O, ges kraftmomentet av

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

där $\mathbf{r}$ är vektorn från O till $\mathbf{F}$:s angrepspunkt och $\mathbf{F}$ är själva kraften.

Riktingen till kraftmomentet anger den positiva rotationsriktningen. Vad betyder detta? Jo, låt en linje gå genom O och parallellt med $\mathbf{M}$. Då skapar $\mathbf{M}$ en vridning mot klockan kring denna linjen.

Kraftmomentet ändras inte av att kraften förskjutas längs med dens verkningslinje. Detta ser man vid att låta den angripa i två punkter A, B på verkningslinjen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} \\
\mathbf{M}'_O &= \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} \\
&= (\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB}) \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{M},
\end{aligned}$$

då den andra vektoren är parallell med $\mathbf{F}$.

Från detta kan vi räkna ut ett kraftmoments komponent med avseende på en axel vid att välja en punkt P på axeln och beräkna kraftmomentet med avseende på denna punkten. Kraftmomentets komponent med avseende på axeln ges då av

$$M_\lambda = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{e}_\lambda$$

där $\mathbf{e}_\lambda$ är en enhetsvektor parallell med axeln.

Denna komponenten är oberoende av valet av P. Detta ser man vid att välja en ny punkt Q och beräkna

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_P &= \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F} \\
\mathbf{M}_Q &= \mathbf{r}_{QA} \times \mathbf{F} \\
&= (\mathbf{r}_{QP} + \mathbf{r}_{PA}) \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Komponenten med avseende på axeln ges då av

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_\lambda &= (\mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda + (\mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\
&= (\mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\
&= \mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_\lambda,
\end{aligned}$$

eftersom $\mathbf{r}_{QP}$ är parallell med $\mathbf{e}_\lambda$, och kryssprodukten vi beräknar då måste vara normal på båda dessa.

Stel kropp En stel kropp är en kropp som uppfyller att

$$\frac{\mathrm{d}|\mathbf{r}_{AB}|}{\mathrm{d}t} = 0 \ \forall \ A, B.$$

Friläggning Att frilägga en kropp består i att betrakta hela eller delar av system och alla krafter och moment som verkar på varje del. Här kan även inre krafter uppstå för delsystemerna som ignoreras för det totala systemet.

Friktionskraft Friktionskraften är en speciell kraft, och förtjäner en lite mer noggrann beskrivning.

Friktionskraften är en kontaktkraft som uppstår när två ytor är i kontakt. Kraften uppstår på grund av interaktioner mellan materian i de två ytorna. Friktion förekommer som statisk eller kinematisk friktion, beroende på om objektet som upplever friktion rör på sig eller inte. Friktionskraftens belopp beror av friktionskoefficienten μ. Denna beror igen på t.ex. om friktionen är statisk eller kinematisk och egenskaperna till ytorna som är i kontakt. Friktionskraften pekar alltid i motsatt riktning av ytornas relativa rörsle.

Vad är så beloppet av friktionskraften? I det statiska fallet är friktionskraften alltid så att kraftsumman på objektet är noll, och dens belopp är mindre än eller lika med μN, där N är normalkraften på den ena ytan från den andra. I det kinematiska fallet är friktionskraftens belopp lika med μN.

2 Kraftsystem

Ett kraftsystem är ett system av krafter som verkar på en kropp samt deras angrepspunkter.

Ekvimomenta kraftsystem Två kraftsystem är ekvimomenta om

- $\sum(\mathbf{F}_i)_1 = \sum(\mathbf{F}_i)_2$, där subskriptet utanför parentesen bestämmer vilket kraftsystem kraften är i.
- $(\mathbf{M}_A)_1 = (\mathbf{M}_A)_2$, där $\mathbf{M}_A$ anger summan av alla kraftmoment med avseende på A.

Två ekvimomenta kraftsystem har samma moment i alla punkter eftersom

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_B)_1 &= (\mathbf{M}_A)_1 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_1, \\
(\mathbf{M}_B)_2 &= (\mathbf{M}_A)_2 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_2 \\
&= (\mathbf{M}_A)_1 + \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{F})_1 \\
&= (\mathbf{M}_B)_1.
\end{aligned}$$

Kraftpar Ett kraftpar består av två lika stora och motsatt riktade krafter som ej ligger på samma linje. Kraftsumman är $\mathbf{0}$ och momentet till ett kraftpar med avseende på en godtycklig punkt O ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{OB} \times (-\mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OB}) \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F},\end{aligned}$$

och beror ej av O. Kraftmomentets belopp är $M = dF$, där d är avståndet mellan krafternas verkningslinjer.

Förflyttning av krafter För ett kraftsystem av n krafter kan man flytta alla dessa till punkten A vid att för varje kraft $\mathbf{F}_i$ lägga till $\mathbf{F}_i$, $-\mathbf{F}_i$ i punkten A. Kraften i P_i och en av krafterna i A bildar då ett kraftpar med moment $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i$ m.a.p. punkten A (eller någon annan punkt). Då finns även en $\mathbf{F}_i$ kvar i A. Efter att alla krafterna är flyttade blir resultatet en enkelt kraft och ett enkelt moment, båda i A, som ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{M} &= \sum \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i.\end{aligned}$$

Detta kallas kraftsystemets reduktionsresultat.

Förflyttning till ny punkt Låt oss jämföra reduktionsresultatet för två olika punkter. Det är klart att kraftsumman är den samma, och

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \sum \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BP_i}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_B\end{aligned}$$

Kraftskruven Om man vill förenkla ett system mest möjligt, dekomponera $\mathbf{M}$ i dens komponenter parallellt och vinkelrät på $\mathbf{F}$. Ersätt den vinkelräta komponenten med ett krafpar ett avstånd $d = \frac{M_\perp}{F}$ från den förra punkten. Då blir resultatet en kraft och ett kraftmoment på samma linje, och detta kallas en kraftskruv.

Enkraftsresultant Om systemet kan reduceras till en kraftskruv utan kraftmoment, är detta systemets enkraftsresultant.

Om systemet har en enkraftsresultant, är detta ekvivalent med att det ursprungliga totala kraftmomentet och kraftsumman är ortogonala. Tillräckligheten kommer direkt från härledningen. Nödvendigheten visas om vi antar att det finns en enkraftsresultant i B, men $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A \neq 0$ i något A. Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}) = 0. \end{aligned}$$

Detta ger en motsägelse, och ekvivalensen är bevisat.

3 Masscentrum

Masscentrum till ett system av partikler definieras av

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

För en kontinuerlik kropp går detta mot

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int \mathrm{d}m\, \mathbf{r}}{\int \mathrm{d}m}.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_G &= \frac{1}{M} \sum \int_{V_i} \mathrm{d}m\, \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{M} \sum \frac{M_i}{M_i} \int_{V_i} \mathrm{d}m\, \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{M} \sum M_i \mathbf{r}_{G,i}. \end{aligned}$$

Kroppen kan då partitioneras på lämpliga sätt, och man kan använda enkla resultat för att beräkna mer komplicerade masscentra.

Masscentrumets läge är så att om en kraft verkar i ett partikelsystems masscentrum, kommer dets verkan kunna reduceras till en enkraftsresultant.

Motivering: Tyngdkraft Betrakta ett system av partikler i ett homogent tyngdfält som verkar i $-z$-riktning. Kraftsumman ges av

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = -\sum m_i g \mathbf{e}_z = -mg\mathbf{e}_z$$

där m är den totala massan till partiklerna. Det totala kraftmomentet kring någon punkt O är

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = -\sum \mathbf{r}_i \times m_i g \mathbf{e}_z = -\sum m_i g \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_z.$$

Detta är ett system av parallella krafter, vilket alltid har ett enkraftsresulat. Låt enkraftsresulantens angrespunkt ges av ortsvektorn $\mathbf{r}$ relativt O. Eftersom enkraftsresultanten är ekvimoment med det ursprungliga kraftsystemet, får man

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \mathbf{M}_O \\ \mathbf{r} \times (-mg\mathbf{e}_z) &= -\sum m_i g \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_z \\ \left(m\mathbf{r} - \sum m_i \mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{e}_z &= 0\end{aligned}$$

Detta innebär att uttrycket i parentesen är parallellt med $\mathbf{e}_z$, vilket ger

$$m\mathbf{r} - \sum m_i \mathbf{r}_i = \mu \mathbf{e}_z$$

och slutligen

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \frac{1}{m}\sum m_i \mathbf{r}_i + \frac{\mu}{m}\mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{r}_G + \frac{\mu}{m}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

där vi har introducerat masscentrum. Enkraftsresultanten verkar då i en linje som går genom masscentrum.

Tyngdpunkt Tyngdpunktet spelar samma roll som masscentrum, fast i det allmäna tyngdfältet.

4 Jämvikt

Jämviktsläget är ett läge som är konstant i tiden relativt någon referensram. Två nödvändiga jämviktsvillkor är att

$$\sum \mathbf{F} = 0, \sum \mathbf{M}_A = 0 \ \forall \ A.$$

Villkoret är även tillräckligt om det gäller för alla delsystem av det totala systemet.

Ekvivalenta jämviktsekvationer i 2D I 2D ger jämviktsekvationerna

$$F_x = 0, F_y = 0, M_A = 0.$$

Vid att translatera x-komponenten av $\mathbf{F}$ till punkten B får vi

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = 0,$$

så dessa jämviktsekvationerna implicerar det alternativa jämviktsvillkoret

$$F_x = 0, M_A = 0, M_B = 0$$

eller

$$M_A = 0, M_B = 0, M_C = 0.$$

Alternativt, givet

$$F_x = 0, M_A = 0, M_B = 0$$

har man

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}.$$

Om $\mathbf{r}_{AB}$ ej är parallell på y-axeln, ger detta $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Den sista implikationen visas på motsvarande sätt, och detta bevisar ekvivalensen.

Statisk obestämthet Jämviktsvillkoren ger ett visst antal oberoende ekvationer som är uppfyllda vid jämvikt. Om kraftsystemet involverar flera okända än antalet ekvationer, kan inte krafterna bestämmas med stelkroppsmekanik, och systemet är statiskt obestämt.

5 Kinematik

I kinematiken beskrivs rörelser utan att diskutera deras uppkomst. Här kommer vi diskutera kinematik för partiklar.

Essensiella storheter Ortsvektorn $\mathbf{r}$ beskriver positionen till partikeln. Dens derivata

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

kallas hastighet och dens andraderivata

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

kallas acceleration.

Naturliga komponenter En lämplig beskrivning av en partikels bana är att skriva den som beroende av sträckan s partikeln har förflyttat sig. Med $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ får vi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Enligt definitionen är $\mathbf{e}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$ en enhetsvektor parallell med partikelns bana. Vi får även

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Den nya vektorn $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s}$ är av intresse. Vi har att

$$\mathbf{e}_\mathrm{t} \cdot \mathbf{e}_\mathrm{t} = 0 \implies 2\mathbf{e}_\mathrm{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}s} = 0,$$

så denna vektorn är normal på banan. Dens belopp ges av $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\rho}$, där ρ är kurvans krökningsradie i någon given punkt. Vi använder definitionen av farten och skriver accelerationen som

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_\mathrm{n}.$$

Vid att betrakta $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ och använda kedjeregeln kan banans krökningsradie skrivas som

$$\rho = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right|^3}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}u^2}\right|}$$

där u är någon godtycklig parameter.

Cirkelrörelse För cirkelrörelse med konstant radius är hastigheten vinkelrät på ortsvektorn, och har storlek $v = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Den tangentiala accelerationen har storlek $a_\parallel = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ och den centripetala accelerationen, som är riktad in mot centrum av rörelsen, har storlek $a_\perp = \frac{v^2}{R}$.

Cylinderkoordinater I cylinderkoordinater beskriver vi en partikels position med polära koordinater i xy-planet och en extra z-komponent. Vektorerna

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kommer användas för att beskriva partikelns rörelse. Deras derivator ges av

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\phi \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\theta, \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\phi \\ -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r, \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_z}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_r$ pekar från origo mot partikelns position, $\mathbf{e}_\theta$ pekar tangentiellt på den cirkeln i xy-planet partikeln ligger på, pekande moturs, och $\mathbf{e}_z$ pekar rakt uppåt. Med detta kan vi skriva partikelns position som

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

Då ges hastigheten av

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\phi + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_z$$

och accelerationen ges av

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_z.$$

Rörelsemängd Rörelsemängden för en partikel definieras som

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Rörelsemängdsmoment Rörelsesmängdmsmomentet för en partikel med avseende på punkten O definieras som

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_O \times \mathbf{p}.$$

6 Newtons lagar

Första lagen En partikel förblir i sitt tillstånd av vila eller rätlinjig likformig rörelse då och endast då summan av alla krafter som verkar på partikeln är noll.

Denna formuleras separat av två årsaker:

- Historiska årsaker, då det var denna lagen som först stod i strid med Aristoteles' värdsuppfattning.
- Teoretiska årsakar, då den ger ett enkelt sätt att definiera interialramer på.

Andra lagen

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

Tredje lagen Om en kropp utövar en kraft på en annan, kommer denna utöva en lika stor och motsatt riktad kraft på den första kroppen.

Inertialsystem Ett inertialsystem är ett koordinatsystem där Newtons andra lag gäller. Motsatsen är ett icke-inertialsystem.

Galileitransformationer Vi söker ett samband mellan två referensramer. Låt en ram S vara en intertialram och låt S' röra sig relativt S så att

- hastigheten till origo i S' relativt S, betecknad $\mathbf{v}_{O'}$, är konstant.
- S' ej roterar relativt S.

Enligt definitionen kan man skriva ortsvektorer i S som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

där $\mathbf{r}'$ är ortsvektorn i S'. Derivation med avseende på tid ger

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{O'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'} + z'\mathbf{e}_{z'}\right) \\ &= \mathbf{v}_{O'} + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_{x'} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_{y'} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_{z'} \\ &= \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Derivation en gång till ger

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'.$$

Konsekvensen är att Newtons andra lag ser exakt likadan ut i S' som i S.

Momentekvationen Tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet ges av

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_O \times m\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Den första termen ger inget bidrag då de två vektorerna är parallella. Newtons andra lag ger då

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O.$$

Detta är momentekvationen.

Impulslagarna Integration av Newtons andra lag och momentekvationen ger

$$\Delta\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\mathbf{F},\ \ \Delta\mathbf{H}_O = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\mathbf{M}_O.$$

$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\mathbf{F}$ kallas för impulsen och $\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\mathbf{M}_O$ kallas för momentimpuls.

7 Energi och arbete

Arbete och effekt Arbetet U definieras som

$$\mathrm{d}U = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Effekten P definieras som

$$\mathrm{d}P = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}\,.$$

Detta ger

$$\mathrm{d}U = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = P\,\mathrm{d}t$$

och därmed

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}.$$

Kinetisk energi Kinetisk energi definieras som

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Om vi jämför detta med definitionen av arbete får man

$$U = \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

Vi använder uttrycket för hastighet och acceleration i naturliga komponenter och får

$$\int m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \int mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int mv\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta T.$$

Konservativa krafter och potentiell energi En kraft $\mathbf{F}$ är konservativ om arbetsintegralen

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

ej beror av integrationsvägen. För konservativa krafter inför vi den potentiella energin

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

där $\mathbf{r}_0$ är ortsvektorn till en referenspunkt för potentialen. För en sådan är arbetet kraften gör längs med en sluten väg lika med 0.

Energilagen Betrakta arbetet

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Vi går via en referenspunkt och får

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2).$$

Vi jämför med det motsvarande resultatet för kinetisk energi och får

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \implies T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Vi inför den totala energin

$$E = T + V$$

och ser att den är konstant i ett konservativt kraftfält.

Effekt Effekten P definieras som

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}.$$

Under påverkan av en konstant kraft kan man visa att

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Märk att denna sista ekvation är kursens definition av effekt, och beviset åt andra hållet fås vid att definiera denna ekvationen med $\mathrm{d}t$. Integration över tid ger

$$U_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, P.$$

8 Kollisioner

Stötimpuls och fundamentala betraktningar Om två partiklar krockar, genomgår de ett stöt. Då verkar det en kraft $\mathbf{S}_{12}$ på partikel 1 från 2, och vice versa, under den korta stöttiden τ. Om varje partikel även känner den yttre kraftsumman $\mathbf{F}_i$, ger impulslagen

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_0^\tau \mathrm{d}t\, \mathbf{S}_{12} + \mathbf{F}_1,$$

och motsvarande för partikel 2. Vi inför stötimpulsen

$$\mathbf{I}_{12} = \lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \mathrm{d}t \, \mathbf{S}_{12},$$

som är konvergent. Vi uppskattar den andra integralen som

$$\left| \int_0^\tau \mathrm{d}t \, \mathbf{F}_1 \right| \leq |\mathbf{F}_1|_{\max} \tau,$$

och denna kommer då försvinna när vi betraktar systemet precis innan och efter stötet. Vi får då

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{I}_{12},$$

och motsvarande för andra partikeln. För hela systemet får man

$$\Delta \mathbf{p} = \int_0^\tau \mathrm{d}t \, \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{21},$$

vilket blir **0** med Newtons tredje lag, och rörelsesmängden bevaras i stötet. Denna sista punkten är även en konsekvens av att stötkrafterna är inre krafter.

Studstalet Låt en kollision hända i två faser: en kompressionsfas och en expansionsfas, och projicera ned på en axel. Kompressionen händer mellan tiderna 0 och t_0, och expansionen händer mellan t_0 och t_1. När kompressionsfasen är över, kommer de två involverade kropparna hänga i hop och röra sig med samma hastighet v_0. Om det under kompressionen verkar en kraft F_k mellan kropparna under kompressionen och en kraftF_e under expansionen, får man ekvationerna

$$mv_0 - mv_1 = -\int_0^{t_0} \mathrm{d}t \, F_k,$$

$$mv_0 - mv_2 = \int_0^{t_0} \mathrm{d}t \, F_k,$$

$$mv_1' - mv_0 = -\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, F_e,$$

$$mv_2' - mv_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, F_e.$$

Vi inför studstalet

$$e = \frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, F_e}{\int\limits_{0}^{t_0} \mathrm{d}t\, F_k}$$

och får då

$$e = \frac{v_1' - v_0}{v_0 - v_1} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}.$$

Detta kan lösas för att ge

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}.$$

9 Allmäna gravitationslagen och dens konsekvenser

Vi vill i denna del försöka visa Keplers lagar, tagna från Tycho Brahes observationer, från Newtons allmäna gravitationslag $\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r$. För att göra detta betraktar vi en planet i bana kring någon annan planet, negligerar den sista planetens rörelse och ignorerar andra krafter. Detta är ett exempel på rörelse under en centralkraft, som är en kraft vars verkningslinje alltid går igenom någon punkt O.

Definiera ett koordinatsystem med origo i den ena planeten, och låt den andra gå i bana kring denna. Från definitionen av kraftmoment ser vi att tyngdkraften ej har ett kraftmoment, och därmed ändras $\mathbf{H}_O$ ej under rörelsen. Vidare vet vi att $\mathbf{H}_O$ är normal på ortsvektorn, vilket ger $\mathbf{r} \times \mathbf{H}_O = 0$. Med konstant rörelsemängdsmoment är då rörelsen i ett fixt plan.

Den infinitesimala arean $\mathrm{d}A$ som sveps ut av partikelns bana under den infinitesimala tiden $\mathrm{d}t$ ges av

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}|.$$

Rörelsemängdsmomentet ges av $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, och vi skriver då

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}\mathbf{H}_O\,\mathrm{d}t\right|.$$

Eftersom $\mathbf{H}_O$ är konstant, är även den utsvepta arean konstant under samma tidsintervall $\mathrm{d}t$. Detta är Keplers andra lag.

Eftersom arean som sveps ut per tid är konstant, tillämpar vi cylindriska koordinater för att skriva

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}h\,\mathrm{d}t\,.$$

Vi skriver nu Newtons andra lag i cylindriska koordinater. Den radiella komponenten ges av

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}.$$

Vi byter variabel från t till ϕ och får

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.$$

Med uttrycket för arean skriver vi detta som

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}.$$

Vidare substituerar vi $u = \frac{1}{r}$ och får

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = hu^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{1}{u}\right) = hu^2 \cdot -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}.$$

En andra derivation med avseende på t ger

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right) = -h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right) = -h\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

Nu kan man skriva Newtons andra lag som

$$-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right).$$

Detta är Binets formel. Vi skriver nu Newtons andra lag som

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}.$$

Vi löser denna med vilkoret att $\theta = 0$ när r är minimal och får lösningar på formen

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{h^2 C}{GM}\cos\theta}.$$

Detta är ekvationen för en konisk sektion, där den stabila lösningen är en ellips med den ena planeten i brännpunkten, vilket är Keplers första lag.

Vi använder nu att rörelsemängden är bevarat och att kvoten $e = \frac{h^2}{GM}$ mäter avståndet från origo till den elliptiska banans centrum och får

$$v_{\min} = \frac{1-e}{1+e}v_{\max}$$

där den maximala hastigheten nås längst bort från origo och den minimala uppnås närmast origo. Vid att jämföra energin mellan dessa två punkterna får man

$$v_{\text{max}}^2 - v_{\text{min}}^2 = \frac{2GM}{a}\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}\right),$$

där a är längden på ellipsen längsta halvaxel. Dessa två kan nu kombineras för att få

$$\frac{(1+e)^2-(1-e)^2}{(1-e)^2}v_{\text{max}}^2 = \frac{2GM}{a}\frac{2e}{(1-e)(1+e)},$$

vilket ger

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}},\ v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}}.$$

Eftersom arean som sveps ut över tid är konstant, kan vi beräkna omloppstiden som

$$\tau = \frac{A}{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{(1-e)av_{\text{max}}} = \frac{2\pi a\sqrt{1-e^2}}{(1-e)a\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}}} = 2\pi\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}},$$

där vi har användt att $b = a\sqrt{1-e^2}$. Denna proportionaliteten mellan τ och a är Keplers tredje lag.

Slutligen tillämpar vi energilagen för att hitta hastigheten i en godtycklig punkt. Vi har att

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 - \frac{GmM}{(1-e)a}$$

är konstant. Vi använder resultatet från innan och får

$$E = -\frac{GmM}{2a}.$$

Vi har nu

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r},$$

vilket ger

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}.$$

10 Svängningar

Fri, odämpad svängning Även betecknad som den harmoniska oskillatorn är detta det enklaste systemet som beskriver svängningsfenomen.

Grundideen är att en partikel utsätts för en kraft proportionell till dens förskjutning från någon punkt och motsatt riktad förskjutningen. Projicerat ned på en axel ger Newtons andra lag

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx.$$

Vi definierar den naturliga frekvensen ω_n enligt $\omega_n^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ och får

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2 x = 0.$$

Denna ekvationen har allmän lösning

$$x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t.$$

Vi skriver den alternativt som

$$x = C\sin(\omega_n t + \alpha),$$

där det gäller att

$$A = C\cos\alpha,\ B = C\sin\alpha.$$

Fri, dämpad svängning Vi vill nu addera en dämpande kraft $F = -c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ till vår modell. Newtons andra lag blir

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Vi definierar dämpningskoefficienten ζ genom $2\omega_n\zeta = \frac{c}{m}$ och får

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_n\zeta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2 x = 0.$$

Formen på lösningarna beror på hur stor ζ är.

Stark dämpning Man har stark dämpning när $\zeta > 1$, och den allmänna lösningen är då

$$x = Ae^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + Be^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}.$$

Kritisk dämpning Man har kritisk dämpning när $\zeta = 1$, och den allmänna lösningen är då

$$x = (At + B)e^{-\omega_n t}.$$

Svag dämpning Man har svag dämpning när $\zeta < 1$, och den allmänna lösningen är då

$$x = \left(Ae^{i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + Be^{-i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}\right)e^{-\omega_n\zeta t}.$$

Vi definierar $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ och får

$$x = \left(Ae^{i\omega_d t} + Be^{-i\omega_d t}\right)e^{-\omega_n\zeta t}.$$

Vi hoppas verkligen att detta kan skrivas som $x = Ce^{-\omega_n\zeta t}\sin(\omega_d t + \alpha)$. För att visa detta, skriv först om x till

$$x = ((A + B)\cos\omega_d t + (A - B)i\sin i\omega_d t)\, e^{-\omega_n\zeta t}.$$

Då har man som innan

$$A = C\cos\alpha,\ B = C\sin\alpha.$$

Om man betraktar maxima nummer n och $n-1$ får man

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t + \alpha}{Ce^{-\zeta\omega_n(t+\tau_d}\sin\omega_d(t+\tau_d) + \alpha}.$$

Vi använder rörelsens periodicitet och får

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d}.$$

Vidare får man

$$\delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Vi kan lösa detta och få

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}.$$

Påtvungnen odämpat svänging Vi vill nu undersöka odämpat svängning under påverkan av en harmonisk kraft $F = F_0 \sin \omega t$. Newtons andra lag ger

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F_0 \sin \omega t. \tag{1}$$

Vi förenklar och får

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t,$$

med samma definition av ω_n. Denna har lösning $x = x_h + x_p$, alltså en kombination av en homogen och en partikulär lösning. Den homogena lösningen är redan känd. Vi gör ansatsen $x_p = X \sin \omega t$. Insatt i differentialekvationen får man att ansatsen är en lösning om

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Vi definierar förstorningsfaktorn M som $M = \frac{X}{X_0}$, där X_0 är amplituden motsvarande ingen påtvingningskraft, alltså $\omega = 0$. I detta enkla fallet får man

$$M = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Påtvungen dämpat svängning Vi vill nu undersöka dämpat svängning under påverkan av en dämpningskraft $F = -cdvxt$ och en harmonisk kraft $F = F_0 \sin \omega t$. Newtons andra lag ger

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \sin \omega t. \tag{2}$$

Vi förenklar och får

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_n \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t,$$

med samma definition av ω_n och ζ. Denna har lösning $x = x_h + x_p$, alltså en kombination av en homogen och en partikulär lösning.

Den homogena lösningen är redan känd, och har den trevliga egenskapen att den försvinner över tid. Vi refererar till denna som den transienta lösningen.

Vi gör ansatsen $x_p = X \sin(\omega t - \alpha) = X(\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha)$. Insatt i differentialekvationen får man att ansatsen är en lösning om

$$X\left((\omega_n^2 - \omega^2)\cos\alpha + 2\zeta\omega_n\omega \sin\alpha\right) = \frac{F_0}{m},$$
$$X\left(-(\omega_n^2 - \omega^2)\sin\alpha + 2\zeta\omega_n\omega \cos\alpha\right) = 0.$$

Detta ger

$$\tan\alpha = \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2},$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

Förstorningsfaktorn blir

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

11 Nyttig matematik

Pappus 1:a sats Låt C vara en plan kurva som ej skär x-axeln, och rotera denna kring x-axeln. Arean som då alstras ges av produktet av kurvans längd och sträckan som kurvans centroid har förflyttat sig under rotationen.

Bevis Om kurvan roteras en vinkel $\theta \in [0, 2\pi]$ ges arean av

$$A = \int_C \theta y \,\mathrm{d}s\,.$$

y-koordinaten till kurvans centroid ges av

$$y_G = \frac{1}{L}\int_C y \,\mathrm{d}s$$

där L är kurvans längd. Centroiden kommer förflytta sig en sträcka θy_G under rotationen, och vi ser då att

$$\theta y_G L = \theta \int_C y \,\mathrm{d}s\,,$$

vilket skulle visas.

Pappus 1:a sats Låt S vara en yta i planet som ej skär x-axeln, och rotera denna kring x-axeln. Volymen som då alstras ges av produktet av ytans area och sträckan som ytans centroid har förflyttat sig under rotationen.

Bevis Om ytan roteras en vinkel $\theta \in [0, 2\pi]$ ges arean av

$$V = \int\limits_S \theta y \, \mathrm{d}A \, .$$

y-koordinaten till kurvans centroid ges av

$$y_G = \frac{1}{A} \int\limits_S y \, \mathrm{d}A$$

där A är ytans area. Centroiden kommer förflytta sig en sträcka θy_G under rotationen, och vi ser då att

$$\theta y_G A = \theta \int\limits_S y \, \mathrm{d}A \, ,$$

vilket skulle visas.