

# Samanfatning av SF1673 Analys i en variabel

Yashar Honarmandi

17 oktober 2018

## **Sammanfattning**

Denna sammanfattning samlar centrala definitioner och satsar använt i KTH:s kurs SF1673 Analys i en variabel.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Mängder</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Talföljder</b>	<b>1</b>
2.1	Definitioner . . . . .	1
2.2	Satser . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Funktioner</b>	<b>3</b>
3.1	Definitioner . . . . .	3
3.2	Satser . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Gränsvärden</b>	<b>7</b>
4.1	Definitioner . . . . .	7
4.2	Satser . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Derivata</b>	<b>9</b>
5.1	Definitioner . . . . .	9
5.2	Satser . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Serier</b>	<b>13</b>
6.1	Definitioner . . . . .	13
6.2	Satser . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Integraler</b>	<b>15</b>
7.1	Definitioner . . . . .	15
7.2	Satser . . . . .	16
<b>8</b>	<b>Integralens tillämpningar</b>	<b>21</b>
8.1	Volymberäkning . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Differentialekvationer</b>	<b>21</b>
9.1	Definitioner . . . . .	21
9.2	Satser . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Liknande satser</b>	<b>22</b>
10.1	Funktioner och talföljder . . . . .	23
10.2	Integraler och summor . . . . .	23
10.3	Lokala integraler och integraler mot oändligheten . . . . .	23
10.4	Samband mellan summor och integraler . . . . .	24

# 1 Mängder

## 1.1 Definitioner

**Delmängder** Låt  $A, B$  vara mängder.  $A$  är en delmängd av  $B$  om det för varje  $x \in A$  gäller att  $x \in B$ .  
Notation:  $A \subset B$ .

**Union och snitt** Låt  $A, B$  vara mängder. Unionen  $A \cup B$  består av de element som ligger i någon av mängderna. Snittet  $A \cap B$  består av de element som är i båda.

**Övre och undra begränsningar** Ett tal  $m$  är en övre begränsning av en mängd  $A$  om  $x \leq m$  för varje  $x \in A$ , och en undra begränsning om  $x \geq m$  för varje  $x \in A$ .

**Supremum och infimum** Ett tal  $m$  är supremum till en mängd  $A$  om  $m$  är den minsta övre begränsningen till  $A$ .  $m$  är infimum till  $A$  om  $m$  är den största undra begränsningen till  $A$ . Notation:  $\sup A, \inf A$ .

## 1.2 Satser

**Supremumsegenskapen** Varje uppåt begränsade delmängd av  $\mathbb{R}$  har en minsta övre begränsning.

**Bevis** Överkurs.

# 2 Talföljder

## 2.1 Definitioner

**Definitionen av en talföljd** En talföljd är en följd av tal  $a_1, a_2, \dots$  och betecknas  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Delföljder** En delföljd av en talföljd är en selektion av tal i följderna som fortfarande är oändligt stor.

**Växande och avtagande talföljder** En talföljd är växande om  $a_{n+1} \geq a_n$  för varje  $n \geq 1$ . Avtagande talföljder definieras analogt.

**Uppåt och nedåt begränsade talföljder** En talföljd är uppåt begränsad om det finns ett  $M$  så att  $a_n \leq M$  för alla  $n \geq 1$ . Nedåt begränsade talföljder definieras analogt.

**Begränsade talföljder** En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

**Konvergens av talföljder** En talföljd konvergerar mot ett gränsvärde  $A$  om det för alla  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a_n - A| < \varepsilon$  för varje  $n > N$ . Detta betecknet betecknas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

**Divergenta talföljder** En divergent talföljd är inte konvergent.

**Binomialkoefficienter**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**$e$ , Eulers tal**

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 2.2 Satser

**Gränsvärden för kombinationer av talföljder** Låt  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$  vara talföljder med gränsvärden  $A$  och  $B$ . Då följer att

- a)  $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent med gränsvärdet  $A + B$ .
- b)  $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent med gränsvärdet  $AB$ .
- c) om  $B \neq 0$  är  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  konvergent med gränsvärdet  $\frac{A}{B}$ .
- d) om  $a_n \leq b_n$  för varje  $n$  så gäller att  $A \leq B$ .

### Bevis

**Växande och uppåt begränsade talföljder** Om  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

Det analoga gäller för avtagande och nedåt begränsade mängder.

**Bevis** Enligt supremumsegenskapen finns det ett  $K = \sup (a_n)_{n=1}^{\infty}$ . Då finns det även  $a_i$  godtyckligt nära  $K$  - med andra ord finns det ett  $N$  så att  $|a_N - K| < \varepsilon$  för något  $\varepsilon > 0$ . Eftersom talföljden är växande, är detta även sant när  $n > N$ , vilket fullbördar beviset.

**Binomialsatsen** För  $n \in \mathbb{Z}$  har man

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### Bevis

**Gränsvärde för potenser**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

### Bevis

**Standardgränsvärden** Låt  $a > 1$  och  $b > 0$ . Då gäller att

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^b} &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b^n} &= \infty \end{aligned}$$

### Bevis

**Ändligt värde av  $e$**  Talföljden  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

### Bevis

**Bolzano-Weierstrass' sats** Låt  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en begränsad talföljd. Då finns det konvergent delföljd.

## 3 Funktioner

### 3.1 Definitioner

**Definition av en funktion** Låt  $X, Y$  vara mängder. En funktion  $f : X \rightarrow Y$  är ett sätt att till varje element  $x \in X$  tilldela ett välbestämt element  $y \in Y$ . Vi säger att  $x$  avbildas på  $y$  och att  $y$  är bilden av  $x$ .  $x$  kallas argumentet till  $f$ .  $X$  kallas funktionens definitionsmängd, och betecknas även  $D_f$ .  $Y$  kallas funktionen målmängd.

**Värdeområde** Värdeområdet till  $f : X \rightarrow Y$  definieras som:

$$V_f = \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

alltså alla värden  $f$  antar.

**Injektivitet**  $f$  är injektiv om det för varje  $x_1, x_2 \in X$  gäller att om  $f(x_1) = f(x_2)$  så är  $x_1 = x_2$ .

**Surjektivitet**  $f$  är surjektiv om  $V_f = Y$ .

**Bijektivitet** Om  $f$  är injektiv och surjektiv, är  $f$  bijektiv.

**Inversa funktioner** Låt  $f : X \rightarrow Y$  vara en bijektiv funktion. Inversen till  $f$  är avbildningen  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  som ges av  $f^{-1}(y) = x$ , där  $y = f(x)$ . Funktioner som har en invers kallas inverterbara.

**Växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) \leq f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  växande. Avtagande funktioner definieras analogt.

**Strängt växande och avtagande funktioner** En funktion  $f$  är strängt växande på en mängd  $M \in D_f$  om det för varje  $x, y \in M : x < y$  gäller att  $f(x) < f(y)$ . Om  $M = D_f$  kallas  $f$  strängt växande. Strängt avtagande funktioner definieras analogt.

**Monotona funktioner** Om en funktion är antingen strängt växande respektive strängt avtagande eller växande respektive avtagande i ett intervall, är den strängt monoton respektive monoton.

**Uppåt och nedåt begränsade funktioner** En funktion  $f$  är uppåt begränsad om  $V_f$  är uppåt begränsad. Nedåt begränsade funktioner definieras analogt. Om funktioner saknar övre eller nedre begränsning är den uppåt eller nedåt obegränsad.

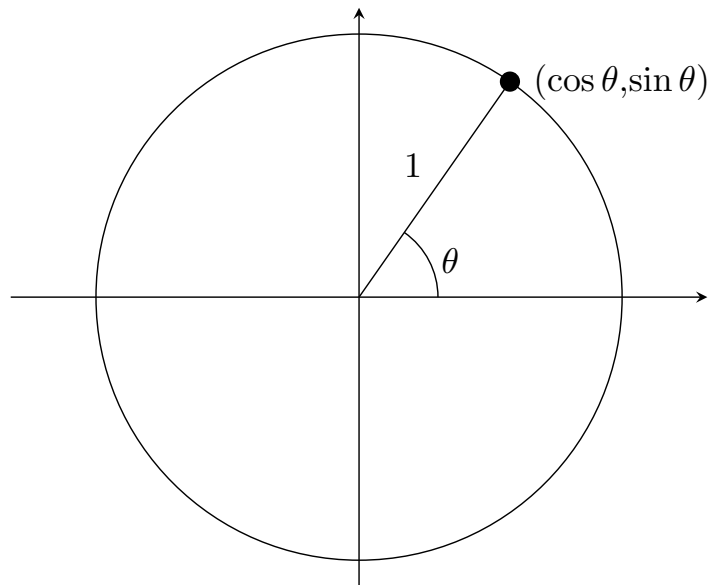
**Minima och maxima** En funktion  $f$  har ett lokalt maximum i  $x_0$  om det finns en omgivning  $I$  till  $x_0$  så att  $f(x) \leq f(x_0)$  för alla  $x \in I \cap D_f$ . Det analoga gäller för ett lokalt minimum. Om  $f$  har antingen ett lokalt maximum eller minimum i  $x_0$  har  $f$  ett lokalt extrempunkt i  $f$ .

**Globala maxima och minima** En funktion  $f$  har ett globalt maximum i  $x_0$  om  $f(x) \leq f(x_0)$  för varje  $x \in D_f$ .

**Trigonometriska funktioner** Betrakta enhetssirkeln i figur 1, med radie 1.

Man tenker sig en punkt på cirkeln enligt figuren, var linjen från cirkelns centrum till cirkeln bildar en vinkel  $\theta$  med  $x$ -axeln. Denna vinkeln startar när punkten på cirkeln ligger på den positiva sidan av  $x$ -axeln, och ökar moturs. Från denna konstruktionen definieras  $\sin$  och  $\cos$  utifrån  $x$ - och  $y$ -koordinaterna till punkten för en given  $\theta$ , var  $\theta$  mäts i radianer. Vi definierar även  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

Från definitionerna ser vi att  $\sin x$  och  $\cos x$  är definierade för alla  $x \in \mathbb{R}$ , medan  $\tan x$  är definierad för alla  $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ .



Figur 1: Enhetscirkeln.

**Radianer** Radianer är ett mått på vinklar som är baserad på enhetscirkeln. Om man tenker sig att punkten i figur 1 beväger sig från startpunktet och till nån

**Trigonometriska funktioners egenskaper** Från definitionen av dom trigonometriska funktionerna följer många egenskaper vid dessa. Några essentiella är listad under:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos \theta \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

**Inversa trigonometriska funktioner** Låt  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \sin x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .

Låt  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \cos x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arccos x$ .

Låt  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  sådan att  $f(x) = \tan x$ . Inversen till denna funktionen betecknas  $f^{-1}(x) = \arctan x$ .

**Exponentialfunktionen** I häftet definieras inte exponentialfunktionen  $a^x, a > 1$ , utan den antas vara en strängt växande funktion med värdemängd  $(0, \infty)$  som uppfyller

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$

**Logaritmfunktionen** Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  sådan att  $f(x) = a^x$  för något  $a > 1$ . Inversen till denna funktionen betecknas som  $f^{-1}(x) = \log_a x$ .

**Absolutbelopp** Absolutbeloppet definieras som  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Detta impliserar att

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Kontinuitet** Låt  $f$  vara en reellvärd funktion med  $D_f \subset \mathbb{R}$ , sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter från  $D_f$  och  $a \in D_f$ .  $f$  är kontinuerlig i  $a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Likformig kontinuitet**  $f$  är likformig kontinuerlig på intervallet  $I$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  existerar ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  för varje  $x, y \in I$  som uppfyller att  $|x - y| < \delta$ .

**Konvexitet** En funktion  $f$  är konvex i  $[a, b]$  om det för varje  $x_1, x_2 \in [a, b]$  gäller att

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), t \in [0, 1].$$

**Konkavitet** En funktion  $f$  är konkav i  $[a, b]$  om  $-f$  är konvex i  $[a, b]$ .

**Inflexionspunkt** Låt  $f$  vara en funktion definierad på ett intervall  $I$ . En punkt  $x_0 \in I$  sägs vara en inflexionspunkt till  $f$  om det finns ett  $\delta > 0$  sådan att  $f$  är konvex i  $[x_0 - \delta, x_0]$  eller  $[x_0, x_0 + \delta]$  och konkav i det andra.

**Lodräta asymptoter** Linjen  $x = a$  är en lodrät asymptot till  $f$  om  $f(x)$  går mot  $\infty$  eller  $-\infty$  när  $x \rightarrow a^-$  eller  $x \rightarrow a^+$ .

**Sneda asymptoter** Linjen  $y = kx + m$  är en sned asymptot till  $f$  om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0.$$

Givet att  $f$  har en sned asymptot, ger definitionen

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

eller analogt om asymptoten är vid  $-\infty$ .

**Stora ordo vid oändligheten** Låt  $f, g$  vara funktioner definierade i  $(a, \infty)$  för något  $a$ .  $f$  tillhör stora ordo av  $g$  då  $x \rightarrow \infty$ , med notation  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ , om det finns  $M$  och  $x_0$  så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje  $x > x_0$ .

**Stora ordo kring en punkt** Låt  $f, g$  vara funktioner definierade i en omgivning till  $a$ .  $f$  tillhör stora ordo av  $g$  kring  $a$ , med notation  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ , om det finns  $M$  och  $\delta > 0$  så att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för varje  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

## 3.2 Satser

### Trigonometriska funktioner med vinkelsummor

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

**Cosinussatsen** Låt  $a, b, c$  vara sidorna i en triangel och  $\theta$  vinkeln där sidlängderna  $a$  och  $b$  möts. Då gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

**Logaritmfunktionens egenskaper** Låt  $a > 1$ . Då gäller att

$$\log_a 1 = 0 \tag{1}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{2}$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \tag{3}$$

**Bevis** Alla identiteter är baserade på inverterbarheten till exponentialfunktionen -  $a^{\log_a x} = x$  - och injektiviteten till exponentialfunktionen, samt reglerna som exponentialfunktionen uppfyllar.

Ekvation 1 fås från att  $a^{\log_a 1} = 1$  och att  $a^0 = 1$ . Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är det bevisad.

Ekvation 2 fås från att  $a^{\log_a xy} = xy$  och att  $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$ .

Ekvation 3 fås från att  $a^{\log_a x^y} = x^y$  och att  $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ .

### Absolutbeloppens egenskaper

$$|xy| = |x||y| \tag{4}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{5}$$

**Bevis**

**Kontinuitet av sammansatta funktioner** Låt  $f$  vara kontinuerlig i  $b$  och låt  $g(x) \rightarrow b$  när  $x \rightarrow a$ . Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

givet att vänsterledet är definierat.

**Bevis**

**Kontinuitet och begränsning** Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då är  $f$  begränsad.

**Bevis**

**Inversfunktioners kontinuerlighet** Låt  $f : A \rightarrow B$  vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen  $f^{-1} : B \rightarrow A$  är kontinuerlig och strängt växande.

**Bevis**

**Elementära funktioners kontinuerlighet** Elementära funktioner är kontinuerliga.

**Bevis**

**Kontinuerlighet av summa och produkt** Summan och produktet av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.



## Bevis

**Intervallhalvering** låt  $[a_i, b_i]$  vara intervall så att  $[a_{i+1}, b_{i+1}]$  vid att låta en vara mittpunktet på  $[a_i, b_i]$  och den andra vara oändrat. Då finns det ett unikt  $x$  så att  $x \in [a_i, b_i]$  för alla  $i \in \mathbb{N}$ .

## Bevis

**Satsen om mellanliggande värde** Låt  $f$  vara kontinuerlig i  $[a, b]$ . Då antar  $f$  alla värden mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ .

**Bevis** I fallet  $f(a) = f(b)$  är beviset trivialt.

Anta att  $f(a) < m < f(b)$  för något  $m$  (ett analogt bevis gäller i motsatta fallet). Definiera  $a_0 = a$  och  $b_0 = b$ , bilda intervallet  $[a_0, b_0]$  och beräkna funktionsvärdet i mittpunktet. Om detta är större än  $m$ , välj  $b_1$  till att vara mittpunktet och  $a_1 = a_0$ , eller motsatt i motsatt fall. Fortsätta så med intervallhalvering. Då har vi  $f(a_i) \leq m \leq f(b_i)$  för varje  $i \in \mathbb{N}$ .

Mängden av alla  $a_i$  är växande och uppåt begränsad av  $b_i$ , och mängden av alla  $b_i$  är avtagande och nedåt begränsad av  $a_i$ . Vi kan då låta  $j \rightarrow \infty$ , och får  $f(x) \leq m \leq f(x) \implies f(x) = m$  för något  $x \in [a, b]$ . Detta gäller för alla  $m$  som uppfyllar kravet, och beviset är klart.

**Största och minsta värden** Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då finns  $x_1, x_2 \in [a, b]$  så att  $\sup V_f = f(x_1)$  och  $\inf V_f = f(x_2)$ .

**Bevis** Vi vet enligt 3.2 att funktionens värdemängd är begränsad. Definiera  $M = \sup V_f$ , som då existerar, och anta att  $M \neq f(x)$  på  $[a, b]$ . Då är funktionen  $g$  så att

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

definierad på  $[a, b]$ , kontinuerlig och därmed begränsad. Då finns  $C = \sup V_g$ , och

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C \implies f(x) \leq M - \frac{1}{C}.$$

Enligt antagandet är  $M > f(x)$ , och då är  $C$  positiv. Då är  $M - \frac{1}{C} < M$ , och vi har hittat en mindre övre begränsning för  $f$ . Detta motsäger antagandet, och då måste det finns ett  $x \in [a, b]$  så att  $f(x) = M$ .

Ett analogt bevis gäller för att visa att  $f$  antar ett minsta värde.

**Likformig kontinuitet och kontinuitet** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då är  $f$  likformigt kontinuerlig på  $[a, b]$ .

## Bevis

**Stora ordos egenskaper** Låt  $f, g$  vara funktioner sådana att  $\mathcal{O}(f(x)), \mathcal{O}(g(x))$  är definierade kring en punkt eller vid  $\infty$ . Då gäller:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(f(x)) \mathcal{O}(g(x)) &= \mathcal{O}(f(x)g(x)), \\ \mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) &= \mathcal{O}(|f(x)| + |g(x)|).\end{aligned}$$

## Bevis

## 4 Gränsvärden

### 4.1 Definitioner

**Gränsvärde vid oändligheten** Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$ .  $f$  konvergerar mot gränsvärdet  $A$  när  $x \rightarrow \infty$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

eller  $f(x) \rightarrow A$  när  $x \rightarrow \infty$ .

**Divergens** Om det för en funktion  $f$  inte finns ett sådant  $A$ , sägs  $f$  vara divergent då  $x \rightarrow \infty$ .

**Det oegentliga gränsvärdet** Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$ .  $f$  har det oegentliga gränsvärdet  $\infty$  då  $x \rightarrow \infty$  om det för varje  $M$  finns ett  $N$  sådant att  $f(x) > M$  för varje  $x > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

**Lokalt gränsvärde** Låt  $f$  vara en reellvärd funktion med  $D_f \subset \mathbb{R}$  sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ .  $f$  konvergerar mot  $A$  när  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyllar  $0 < |x - a| < \delta$ . Detta skrivs  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Vänster- och högergränsvärden** Vid att endast studera  $x > a$  eller  $x < a$  kan man definiera ett vänster- och högergränsvärde för en funktion  $f$ . Dessa skrivs  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  eller  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ . För en funktion  $f$  definierad i en punkterad omgivning till  $a$  existerar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  om och endast om vänster- och högergränsvärden existerar och är lika.

**Det oegentliga lokala gränsvärdet** Låt  $f$  vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ .  $f$  har det oegentliga gränsvärdet  $\infty$  då  $x \rightarrow a$  om det för varje  $K$  finns ett  $\delta$  sådant att  $f(x) > K$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyller  $0 < |x - a| < \delta$ .

## 4.2 Satser

**Gränsvärden för kombinationer av funktioner** Låt  $f, g$  vara kontinuerliga funktioner sådana att  $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$  när  $x \rightarrow \infty$ . Då gäller att

- a)  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$  när  $x \rightarrow \infty$ .
- b)  $f(x)g(x) \rightarrow AB$  när  $x \rightarrow \infty$ .
- c) om  $B \neq 0$  så följer att  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$  när  $x \rightarrow \infty$ .
- d) om  $f(x) \leq g(x)$  för alla  $x \in (a, \infty)$  så gäller att  $A \leq B$ .

**Bevis** Mjö.

**Gränsvärden och supremum** Låt  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  för något  $a \in \mathbb{R}$  vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup f(x) : x \geq a.$$

**Bevis** Nä.

**Standardgränsvärden mot oändligheten** Låt  $a > 1, b > 0$ . Då gäller att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} &= \infty \end{aligned}$$

**Bevis**

**Standardgränsvärden mot 0**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

**Bevis** Too much.

**Bevis** Orkar inte.

## 5 Derivata

### 5.1 Definitioner

**Derivatans definition** Låt  $f$  vara en funktion definierad i en omgivning kring  $x_0$ .  $f$  är deriverbar i  $x_0$  om

$$\begin{aligned}\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} &= \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

existerar. Värdet kallas derivatan i  $x_0$ .

**Deriverbara funktioner** Om en funktion  $f$  är deriverbar i alla punkter i definitionsmängden, är funktionen deriverbar. Funktionen  $f' = \frac{df}{dx}$  med  $D_{f'} = D_f$  kallas derivatan.

**Stationära punkt** En funktion  $f$  har ett stationärt punkt  $x_0$  om  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = 0$ .

**Taylorpolynomet** Låt  $f$  vara  $n$  gånger deriverbar. Polynomet

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\frac{d^i f}{dx^i}(0)}{i!} (x - a)^i$$

kallas Taylorpolynomet av grad  $n$  till  $f$  kring  $a$ . Specialfallet där  $a = 0$  kallas Maclaurinpolynomet till  $f$  av grad  $n$ .

**Primitiva funktioner** Låt  $f$  vara definierad på  $[a, b]$  och  $F$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ .  $F$  är en primitiv funktion till  $f$  om  $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$  för varje  $x \in (a, b)$ .

### 5.2 Sätser

**Derivata och kontinuitet** Låt  $f$  vara deriverbar i  $(a, b)$ . Då är  $f$  kontinuerlig i  $(a, b)$ .

**Bevis** Kan man tänka.

**Derivationsregler** Låt  $f, g$  vara deriverbara i punkten  $x$ . Då följer att  $f+g, fg$  är deriverbara i  $x$ . Derivatorna har sambandet

$$\begin{aligned}\frac{d(f+g)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \\ \frac{d(af)}{dx}(x) &= a \frac{df}{dx}(x), a \in \mathbb{R}, \\ \frac{d(fg)}{dx}(x) &= f(x) \frac{dg}{dx}(x) + g(x) \frac{df}{dx}(x).\end{aligned}$$

Om  $g(x) \neq 0$  är även  $\frac{f}{g}$  deriverbar i  $x$  och

$$\left. \frac{d}{dx} \frac{f}{g} \right|_x = \frac{\left( g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx} \right) \Big|_x}{g^2(x)}.$$

**Bevis** De två första följer nästan direkt från definitionen.

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \left( \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \right) \\
\frac{dfg}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \right) \\
&= f(x) \frac{dg}{dx}(x) + g(x) \frac{df}{dx}(x).
\end{aligned}$$

**Kedjeregeln** Låt  $f$  vara deriverbar i  $y$ ,  $g$  deriverbar i  $x$  och  $y = g(x)$ . Då är den sammansatta funktionen  $f \circ g$  deriverbar och

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) \Big|_x = \frac{d}{dx}f \Big|_{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}g \Big|_x.$$

**Bevis**

**Derivatan av inversfunktioner** Låt  $f$  vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då är inversen  $f^{-1}$  deriverbar i alla punkter  $y = \frac{d}{dx}f \Big|_x$  där  $\frac{d}{dx}f \Big|_x \neq 0$  med derivatan

$$\frac{d}{dy}f^{-1} \Big|_y = \frac{1}{\frac{d}{dx}f \Big|_x}.$$

**Bevis**

**Extrempunkt och derivata** Låt  $f$  vara deriverbar i  $x_0$  och ha en lokal extrempunkt i  $x_0$ . Då är  $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ .

**Bevis** Låt  $f$  ha ett maximum i  $x_0$ . Detta ger  $f(x_0) \geq f(x)$  i en omgivning till  $x_0$ . Betrakta

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

När  $h \rightarrow 0$  från det positival hållet har man

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

eftersom nämnaren är negativ enligt antagandet. När  $h \rightarrow 0$  från det negativa hållet har man

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Vi räknar ut gränsvärdet när  $h$  går mot 0. Eftersom det existerar, måste vi ha att  $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ .

**Rolles sats** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ , deriverbar på  $(a, b)$  så att  $f(a) = f(b)$ . Då existerar  $p \in (a, b)$  så att  $\frac{df}{dx} \Big|_p = 0$ .

**Bevis** Om  $f$  är konstant på  $[a, b]$  är beviset trivialt.

Annars, låt  $f(x) > f(a)$  för något  $x \in (a, b)$ . Eftersom  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ , antar den enligt sats ett största värde. Eftersom  $f(a) = f(b)$  måste detta största värdet antas i något  $q \in (a, b)$ . Då  $f$  är deriverbar i  $q$ , gäller det enligt sats att  $\frac{df}{dx}(q) = 0$ . Detta är punkten vi söker.

Ett analogt bevis gäller om  $f(x) < f(a)$  för något  $x \in (a, b)$ .

**Generaliserade medelvärdesatsen** Låt  $f$  och  $g$  vara reellvärda, kontinuerliga på  $[a, b]$  och deriverbara på  $(a, b)$ . Då existerar  $p \in (a, b)$  så att

$$\frac{df}{dx}(p)(g(b) - g(a)) = \frac{dg}{dx}(p)(f(b) - f(a)).$$

Om  $g(a) \neq g(b)$  och  $\frac{dg}{dx}\big|_p \neq 0$ , gäller

$$\frac{\frac{dg}{dx}(p)}{\frac{dg}{dx}(p)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Medelvärdesatsen** Välj  $g(x) = x$ . Detta ger

$$\frac{df}{dx}\bigg|_p (b - a) = f(b) - f(a).$$

**Bevis** Bilda

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)),$$

som är kontinuerlig och deriverbar på intervallet enligt annan sats. Denna uppfyller  $h(a) = h(b)$ , och då existerar enligt Rolles sats ett  $p \in (a, b)$  så att  $\frac{dh}{dx}(p) = 0$ . Vi har

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)(g(b) - g(a)) - \frac{dg}{dx}(x)(f(b) - f(a)),$$

vilket ger

$$\frac{df}{dx}(p)(g(b) - g(a)) = \frac{dg}{dx}(p)(f(b) - f(a)).$$

**Följder av dessa satser** Låt  $f$  vara deriverbar på  $(a, b)$ . Då gäller:

- $\frac{df}{dx}(x) = 0$  för varje  $x \in (a, b)$  om och endast om  $f$  är konstant på  $(a, b)$ .
- $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$  för varje  $x \in (a, b)$  om och endast om  $f$  är växande på  $(a, b)$ .
- $\frac{df}{dx}(x) > 0$  implicerar att  $f$  är strängt växande på  $(a, b)$ .
- $\frac{df}{dx}(x) \leq 0$  för varje  $x \in (a, b)$  om och endast om  $f$  är avtagande på  $(a, b)$ .
- $\frac{df}{dx}(x) < 0$  implicerar att  $f$  är strängt avtagande på  $(a, b)$ .

**Bevis** Om  $f$  är konstantfunktionen, är första påståendet triviellt. Om  $\frac{df}{dx} = 0$  på  $(a, b)$ , välj  $x_0, x_1$  i intervallet så att  $x_0 < x_1$ . Då ger medelvärdesatsen att  $f(x_1) - f(x_0) = \frac{df}{dx}(x)(x_1 - x_0) = 0$ , med  $p \in (x_0, x_1)$ , vilket bevisar omvändningen.

Om nu  $\frac{df}{dx}(x) > 0$  på intervallet, ger medelvärdesatsen på samma sätt  $f(x_1) - f(x_0) > 0$ , med ett analogt argument om nollan inkluderas. Anta nu att  $f$  är växande. Detta ger

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Anledningen till att det inte är en ekvivalens när derivatan är strikt positiv är att detta gränsvärdet kan bli 0 även om  $f$  är växande. Med ett analogt bevis för de två sista påståenden är beviset klart.

**L'Hôpitals regel** Låt  $f, g$  vara reellvärda, deriverbara funktioner i en omgivning  $I$  av  $a$  sådana att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{df}{dx}(x)}{\frac{dg}{dx}(x)}.$$

## Bevis

### Oändliga kvoter Låt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{df}{dx}(x)}{\frac{dg}{dx}(x)} &= L, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \pm\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \pm\infty.\end{aligned}$$

Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

## Bevis

**Konvexitet och derivata** Låt  $f$  vara deriverbar i  $(a, b)$ . Då är  $f$  konvex i  $(a, b)$  omm  $\frac{df}{dx}$  är växande i  $(a, b)$ .

## Bevis

**Andrederivata och konvexitet** Låt  $f$  vara två gånger deriverbar i  $(a, b)$ . Då är  $\frac{d^2f}{dx^2}(x) \geq 0$  för varje  $x \in (a, b)$  omm  $f$  är konvex.

## Bevis

**Andrederivata och inflexionspunkt** Låt  $f$  vara två gånger deriverbar och låt  $\frac{d^2f}{dx^2}$  vara kontinuerlig. Om  $f$  har en inflexionspunkt i  $x_0$  så är  $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) = 0$ .

## Bevis

**Taylors formel** Låt  $f$  vara  $n$  gånger deriverbar och definierad i en omgivning av 0, sådan att  $\frac{d^nf}{dx^n}$  är kontinuerlig. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^if}{dx^i}(0)}{i!} x^i + \frac{\frac{d^if}{dx^i}(\alpha)}{n!} x^n$$

för något  $\alpha \in [0, x]$ . Kring en godtycklig punkt  $a$  blir formeln

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^if}{dx^i}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{\frac{d^nf}{dx^n}(\alpha)}{n!} (x-a)^n \quad (6)$$

för något  $\alpha \in [a, x]$ .

**Bevis** Vi beviser satsen först för  $a = 0$ . Det är klart att formeln stämmer för  $x = 0$ , så bilda

$$C = \frac{f(x) - p(x)}{x^n}, x \neq 0.$$

Då är beviset ekvivalent med att visa att  $Cn! = \frac{d^nf}{dx^n}(\alpha)$  för et lämpligt  $\alpha$ .

Notera att  $\frac{d^if}{dx^i}(0) = \frac{d^ip}{dx^i}(0), i = 0, \dots, n-1$ , och bilda

$$g(t) = f(t) - p(t) - Ct^n \implies \frac{d^ig}{dx^i}(0) = 0, i = 0, \dots, n-1.$$

Från definitionen är även  $g(x) = 0$ , och eftersom  $g$  är kontinuerlig finns det enligt Rolles sats  $x_1 \in (0, x)$  så att  $\frac{dg}{dx}(x_1) = 0$ . Et motsvarande argument använt flera gånger ger att det finns  $x_n \in (0, x_{n-1}) \subseteq [0, x]$  så att  $\frac{d^n g}{dx^n}(x_n) = 0$ .

$$\frac{d^n g}{dx^n}(x_n) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_n) - Cn!,$$

och nollstället ger önskad likhet.

För att visa satsen kring något  $a \neq 0$ , bilda  $g(t) = f(t + a)$ . Denna uppfyller förutsättningarna för formeln vi har bevist, vilket ger

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^i g}{dx^i}(0)}{i!} t^i + \frac{\frac{d^i g}{dx^i}(\alpha_0)}{n!} t^n = f(t + a), \alpha_0 \in [0, t].$$

Vi använder att  $\frac{d^i g}{dt^i}(t) = \frac{d^i f}{dt^i}(t + a)$ ,  $i = 0, \dots, n$  för att få

$$f(t + a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^i f}{dt^i}(a)}{i!} t^i + \frac{\frac{d^i f}{dt^i}(\alpha_0 + a)}{n!} t^n, \alpha \in [0, t].$$

Definiera  $x = t + a$  och  $\alpha = \alpha_0 + a \in [a, x]$  för att få

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^i f}{dt^i}(a)}{i!} t^i + \frac{\frac{d^i f}{dt^i}(\alpha)}{n!} t^n, \alpha \in [a, x].$$

**Taylor's formel och stora ordo** Låt  $f$  vara  $n$  gånger deriverbar och  $\frac{d^n f}{dx^n}$  vara kontinuerlig i en omgivning av 0. Då är

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{d^i f}{dx^i}(0)}{i!} x^i + \mathcal{O}(x^n).$$

## Bevis

## 6 Serier

### 6.1 Definitioner

**Delsummor** Låt  $(a_i)_{i=1}^\infty$  vara en talföljd. Den motsvarande delsumman är

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

**Serier** En serie definieras som

$$\sum_{i=1}^\infty a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

**Konvergens** Om  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existerar, är serien konvergent mot dens summa. Annars är den divergent.

**Geometrisk serie** En geometrisk serie är på formen  $a_i = x^i$ .

**Absolut konvergens** Serien  $\sum_{i=1}^\infty a_i$  är absolutt konvergent om  $\sum_{i=1}^\infty |a_i|$  är konvergent.

**Taylorserier** Låt  $f$  vara oändligt deriverbar. Funktionens Taylorserie kring  $a$  är

$$s = \sum_{i=1}^\infty \frac{\frac{d^i f}{dx^i}}{i!} (x - a)^i.$$

**Konvergensradie** Enligt ekvation 6 är

$$f(x) - p_{n-1}(x) = R_n(x) = \frac{\frac{d^n f}{dx^n}(\alpha)}{n!}(x-a)^n.$$

$f$  konvergerar mot sin Taylorserie om denna resttermen går mot 0 när  $n \rightarrow \infty$  för ett givet  $x$ . Detta händer för  $x$  så att  $|x-a| < r$ , där  $r$  är Taylorseriens konvergensradie.

## 6.2 Satser

**Seriens egenskaper** Låt  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i$  vara två konvergenta serier. Då gäller

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i, \\ \sum_{i=1}^{\infty} ca_i &= c \sum_{i=1}^{\infty} a_i, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**Bevis**

**Konvergens och termernas beteende** Om  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  är konvergent är  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ .

**Bevis** Låt  $s_n$  beteckna seriens delsumma och  $S$  dens summa. Vi har

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Om serien är konvergent, kan vi räkna ut gränsvärdet enligt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

**Summan av en geometrisk serie** Om  $|x| < 1$  är

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

**Bevis** Betrakta  $s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}$ . Detta ger

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Om  $|x| < 1$  har man

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

**Jämförelse av termer och konvergens** Låt  $0 \leq a_i \leq b_i$  för alla  $i$ . Då gäller att

- om  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  är konvergent är  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent.
- om  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  är divergent är  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  divergent.

**Bevis**



**Kvoten av termer och konvergens** Låt  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i$  vara två positiva serier vars termer uppfyller

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = K \neq 0.$$

Då konvergerar  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  om och endast om  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  konvergerar.

**Bevis**

**Absolut konvergens och konvergens** En absolut konvergent serie är konvergent.

**Bevis**

**Summan av potenser** Serien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

är konvergent om och endast om  $p > 1$ .

**Bevis**

## 7 Integraler

### 7.1 Definitioner

**Trappfunktioner** En trappfunktion på intervallet  $[a, b]$  är på formen

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1, a \leq x \leq x_1 \\ c_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots \\ c_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Mängden av alla  $x_i$  kallas en uppdelning av intervallet och intervallerna  $[x_{i-1}, x_i]$  kallas delintervall av uppdelningen.

**Integralen av en trappfunktion** Låt  $\Psi$  vara en trappfunktion. Då definieras integralen av denna som

$$\int_a^b \Psi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

**Övertrappor och undertrappor** En övertrappa  $\Psi$  för en funktion  $f$  är en funktion så att

$$f(x) \leq \Psi(x).$$

Undertrappor definieras analogt. Integralerna av dessa kallas översummor och undersummor.

**Integrerbarhet** Låt  $f$ , definierad på  $[a, b]$ , vara en begränsad funktion,  $L(f)$  vara mängden av alla undersummor till  $f$  och  $U(f)$  mängden av alla översummor till  $f$ .  $L(f)$  är uppåt begränsad av talen i  $U(f)$  och vice versa, så  $\sup L(f), \inf U(f)$  existerar. Om

$$\sup L(f) = \inf U(f)$$

är  $f$  integrerbar.

**Integralen** Låt  $f$  vara integrerbar på  $[a, b]$ . Då definieras integralen av  $f$  på intervallet som

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup L(f).$$

**Byte av ordning av integrationsgränser**

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

**Integration med oändliga gränser** Låt  $f$  vara integrerbar på  $[a, R]$  för varje  $R > a$ . Då definieras

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) \, dx,$$

och integration från  $-\infty$  analogt. Om gränsvärdet existerar, är integralet konvergent. Annars är det divergent.

**Lokala integraler** Låt  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara integrerbar i  $[a + \varepsilon, b]$ , för varje litet  $\varepsilon$ . Då är

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx,$$

och analogt om  $f$  ej är definierad i  $b$  eller i någon inre punkt av  $[a, b]$ . Om sådana gränsvärden existerar är integralen konvergent. Annars är den divergent.

**Riemannsummor** Låt  $P_n = \{x_{n,i}\}_{i=0}^{N(n)}$  vara en uppdelning av  $[a, b]$  för ett givet  $n$  med  $N(n)$  delintervall. Låt  $\alpha_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ ,  $\Delta_{n,i} = x_{n,i} - x_{n,i-1}$ . Summan

$$\sum_{i=1}^{N(n)} f(\alpha_{n,i}) \Delta_{n,i}$$

är en Riemannsumma för  $f$  i  $[a, b]$ .

## 7.2 Satser

**Integralen och  $\varepsilon$**  Låt  $f$  vara begränsad på  $[a, b]$ . Då är  $f$  integrerbar om och endast om det för varje  $\varepsilon$  finns en övertrappa  $\Psi$  och en undertrappa  $\Phi$  till  $f$  sådana att

$$\int_a^b \Psi(x) \, dx - \int_a^b \Phi(x) \, dx < \varepsilon.$$

### Bevis

**Summor mot integraler** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ ,  $\{x_i\}_{i=0}^n$  vara en uppdelning,  $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$  och  $M_i = \max f(x)$ ,  $m_i = \min f(x)$  på  $[x_{i-1}, x_i]$ . Då gäller att

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n M_i \Delta_i &\rightarrow \int_a^b f(x) \, dx, \\ \sum_{i=0}^n m_i \Delta_i &\rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

då  $\max \Delta_i \rightarrow 0$ .

## Bevis

**Integralens egenskaper** Låt  $f$  vara integrerbar på  $[a, b]$ . Då gäller

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b c f(x) \, dx &= c \int_a^b f(x) \, dx, \\ \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \\ \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| \, dx.\end{aligned}$$

Om  $f(x) \leq g(x)$  på  $[a, b]$  gäller

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

## Bevis

**Medelvärdesatsen för integraler** Låt  $f, g$  vara kontinuerliga på  $[a, b]$  och  $g \geq 0$ . Då finns det ett  $\alpha \in (a, b)$  sådant att

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\alpha) \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Specialfall** Välj  $g(x) = 1$ . Då blir satsen

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\alpha)(b - a).$$

## Bevis

**Analysens huvudsats** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då är

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

en primitiv funktion till  $f$  på  $[a, b]$ .

## Bevis

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Enligt specialfallet av medelvärdesatsen finns ett  $\alpha \in (x, x+h)$  sådant att

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt = \frac{x+h-x}{h} f(\alpha) = f(\alpha).$$

När  $h$  går mot 0 går vänstersidan mot  $\frac{dF}{dx}(x)$  och högersidan mot  $f(x)$ , och beviset är klart.

**Primitiva funktioner och integralers värde** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$  och låt  $F$  vara en primitiv funktion till  $f$  på  $[a, b]$ . Då är

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Bevis** Låt  $G(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$ , där  $F$  är någon primitiv funktion till  $f$ . Enligt analysens huvudsats är  $\frac{dG}{dx} = f$ . Vi ser även att  $G(x) = F(x) + C$ . Vi jämförar de två uttryckerna vi har för  $G$  i  $a$  och ser att  $C = 0$ . Då är  $F(b) = \int_a^b f(t) dt + F(a)$ , och beviset är klart.

**Partiell integration** Låt  $u, v, \frac{dv}{dx}$  vara kontinuerliga på  $[a, b]$  och  $v$  vara en primitiv funktion till  $\frac{dv}{dx}$ . Då gäller:

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx}(x) dx = uv(b) - uv(a) - \int_a^b v \frac{du}{dx}(x) dx.$$

**Bevis** Där  $u, v$  är deriverbara har vi

$$\begin{aligned} \frac{d(uv)}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, \\ u \frac{dv}{dx} &= \frac{d(uv)}{dx} - v \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Båda sider är integrerbara enligt sats som inte finns i boken, så vi integrerar och använder analysens huvudsats:

$$\begin{aligned} \int_a^b u \frac{dv}{dx}(x) dx &= \int_a^b \frac{d(uv)}{dx}(x) dx - \int_a^b v \frac{du}{dx}(x) dx \\ &= uv(b) - uv(a) - \int_a^b v \frac{du}{dx}(x) dx. \end{aligned}$$

**Variabelbyte** Låt  $g, \frac{dg}{dx}$  vara kontinuerliga i  $[a, b]$  och låt  $f$  vara kontinuerlig i  $(g(a), g(b))$ . Då gäller:

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dg}{dx}(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

**Bevis** Enligt kedjeregeln har vi

$$\frac{d(F \circ g)}{dx}(x) = f(g(x)) \frac{dg}{dx}(x),$$

där  $F$  är en primitiv funktion till  $f$ . Vänstersidan är integrerbar eftersom  $f$  är kontinuerlig, och högersidan är integrerbar eftersom  $\frac{dg}{dx}$  även är kontinuerlig, så vi integrerar på båda sidor.

$$\int_a^b \frac{d(F \circ g)}{dx}(x) dx = \int_a^b f(g(x)) \frac{dg}{dx}(x) dx.$$

Vänstersidan är

$$\int_a^b \frac{d(F \circ g)}{dx}(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx,$$

och beviset är klart.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

är konvergent om och endast om  $p > 1$ .

### Bevis

**Jämförelsessats för två integraler** Låt  $f, g$  vara integrerbara i  $[a, R]$  för alla  $R > a$ , sådana  $0 \neq f(x) \neq g(x)$  för varje  $x > a$ . Då gäller att om  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  är konvergent är även  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konvergent, och om  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  är divergent är även  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergent.

**Bevis** Övning till läsaren.

**Gräns av kvot och integral** Låt  $f, g$  vara positiva och integrerbara i  $[a, R]$  för alla  $R > a$  sådana att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0.$$

Då är  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  konvergent om och endast om  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  är konvergent.

**Bevis** Övning till läsaren.

**Samband mellan summor och integraler** Låt  $f$  vara en avtagande funktion i  $[m, n]$ , där  $m, n$  är heltal sådana att  $m < n$ . Då gäller:

$$\sum_{i=m+1}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^{n-1} f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x) dx + f(n) \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx + f(m).$$

Låt  $f$  vara en växande funktion i  $[m, n]$ , där  $m, n$  är heltal sådana att  $m < n$ . Då gäller:

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{i=m+1}^n f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x) dx + f(m) \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx + f(n).$$

**Bevis** De två summorna i det första sättet av olikheter representerar areaor av  $n - m - 1$  rektangler med brädd 1 jämnt fördelade under grafen till  $f$  på intervallet. I det avtagande fallet bestäms höjden till rektanglerna i den första summan av funktionsvärdet vid rektanglets högra kant, medan höjden till rektanglerna i den andra summan bestäms av funktionsvärdet vid rektanglets vänstra kant. Eftersom  $f$  är avtagande är den andra summan större. Eftersom  $f$  är avtagande, har integralet av  $f$  på intervallet ett värde mellan dessa två summorna. Den andra olikheten fås vid att betrakta de två första och två sista delarna av den första olikheten och addera en lämplig term för att få samma summa. Beviset är analogt i det växande fallet.

**Cauchys integralkriterium** Låt  $f$  vara positiv och avtagande i  $(m, \infty)$ . Då är  $\sum_{i=m}^{\infty} f(i)$  konvergent om och endast om  $\int_m^{\infty} f(x) dx$  är konvergent.

**Bevis**

**Integral av potenser över 0** Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$$

är konvergent om och endast om  $q < 1$ .

**Bevis**

**Jämförelsessatser för lokala integraler** Låt  $f, g$  vara integrerbara i  $[a + \varepsilon, b]$  för alla  $\varepsilon > 0$ , sådana att  $0 \neq f(x) \neq g(x)$  för varje  $x \in (a, b]$ . Då gäller att om  $\int_a^b g(x) dx$  är konvergent är även  $\int_a^b f(x) dx$  konvergent, och om  $\int_a^b f(x) dx$  är divergent är även  $\int_a^b g(x) dx$  divergent.

**Bevis** Övning till läsaren.

**Gräns av kvot och lokalt integral** Låt  $f, g$  vara positiva och integrerbara i  $[a + \varepsilon, b]$  för alla  $\varepsilon > 0$  sådana att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0.$$

Då är  $\int_a^b g(x) dx$  konvergent om och endast om  $\int_a^b f(x) dx$  är konvergent.

**Bevis** Övning till läsaren.

**Riemannsummor och integraler** Låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$  och låt  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en följd av uppdelningar av intervallet sådana att

$$\max \{\Delta_{n,i} : 1 \leq i \leq N(n)\} \rightarrow 0$$

då  $n \rightarrow \infty$ . Då gäller att

$$\sum_{i=1}^{N(n)} f(\alpha_{n,i}) \Delta_{n,i} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

då  $n \rightarrow \infty$ .

**Bevis**

## 8 Integralens tillämpningar

### 8.1 Volymberäkning

**Rotation kring  $x$ -axeln** Antag att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Om vi roterar regionen begränsad av linjerna  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x$ -axeln och grafen till  $f$  kring  $x$ -axeln bildas en kropp vars volym vi ska beräkna. Vi approximerar volymet med  $n$  cylindrar. Dessa ligger under grafen, är centrerade i  $x$ -axeln, har lik höjd och är jämnt fördelade på  $[a, b]$ . Varje cylinder har då radius  $f(x_i)$  och höjd  $\frac{b-a}{n} = \Delta$ . Det approximerade volymet är då

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta.$$

Denna summan har formen till en Riemannsumma, och går då för stora  $n$  mot kroppens volym

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**Rotation kring  $y$ -axeln** Antag att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Om vi roterar regionen begränsad av linjerna  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x$ -axeln och grafen till  $f$  kring  $y$ -axeln bildas en kropp vars volym vi ska beräkna. Vi approximerar volymet med  $n$  cylinderskal. Dessa är centrerade i  $y$ -axeln, har lik tjocklek och ligger lag för lag på  $[a, b]$  under grafen. Vart skal har då tjocklek  $\frac{b-a}{n} = \Delta$  och höjd  $f(x_i)$ . Det approximerade volymet är då

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi (x_{i+1}^2 - x_i^2) f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i) (x_{i+1} + x_i) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i) (2x_i + \Delta) \Delta \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i) x_i \Delta + \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i) \Delta. \end{aligned}$$

Den första summan har formen till en Riemannsumma, och går då för stora  $n$  mot

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Den andra summan går för stora  $n$  mot 0 eftersom summan går mot ett ändligt integral medan faktoren framför går mot 0. Då ges kroppens volym av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

## 9 Differentialekvationer

### 9.1 Definitioner

**Ordinära differentialekvationer** En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation som innehåller en eller flere envariabelfunktioner och deras derivator.

**Ordning** En differentialekvations ordning är ordningen av den högsta derivatan som är i ekvationen.

**Linjära ODE** En linjär differentialekvation är på formen

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x) \frac{d^i y}{dx^i} = h. \quad (7)$$

**Homogena och inhomogena ODE** Betrakta ekvation 7. Om  $h = 0$  är ekvationen homogen. Annars är den inhomogen.

**Karakteristisk polynom för ODE av andra ordning** Låt  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$  vara en differentialekvation. Dens karakteristiska polynom är

$$r^2 + ar + b.$$

**Karakteristisk ekvation för ODE av andra ordning** Låt  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$  vara en differentialekvation. Dens karakteristiska ekvation är

$$r^2 + ar + b = 0.$$

**Separabla differentialekvationer** En separabel differentialekvation är på formen

$$g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x).$$

## 9.2 Satser

**Lösning av homogena ODE av första ordning** En funktion  $y$  löser

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0, a \in \mathbb{R}$$

om och endast om

$$y = Ce^{-ax}, C \in \mathbb{R}.$$

### Bevis

**Lösning av homogena ODE av andra ordning** Låt  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$  vara en differentialekvation och  $r_1, r_2$  rötterna till den karakteristiska ekvationen. En funktion  $y$  löser ekvationen om och endast om:

- I fallet  $r_1 \neq r_2$  och båda är reella är

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

- I fallet  $r_1 = r_2$  är

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x},$$

- I fallet  $r_1 = c + di, r_2 = r_1^*$ , med  $d \neq 0$ , är

$$y(x) = e^{cx}(C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx)),$$

med  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

### Bevis

**Lösning av separabla differentialekvationer** Låt  $g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$  vara en separabel differentialekvation sådan att  $g$  har en inverterbar primitiv funktion  $G$  och  $f$  har en primitiv funktion  $F$ . Då är lösningen till differentialekvationen

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), C \in \mathbb{R}.$$

## 10 Liknande satser

Denna delen av sammanfattningen kombinerar analoga satser från diskreta och kontinuerliga fall, mer specifikt funktioner och talföljder respektive integraler och summor.



## 10.1 Funktioner och talföljder

Här kommer funktionen eller talföljden omtalas som grejen, med symbolet  $a$ , och indexet  $n$  eller variabeln  $x$  omtalas som variabeln med symbol  $v$ .

**Uppåt och nedåt begränsadhet** En grej  $a$  är uppåt begränsad om det finns ett  $M$  så att  $a \leq M$  för alla  $v \geq 1$ . Nedåt begränsade grejer definieras analogt.

**Begränsade grejer** En talföljd är begränsad om den är både uppåt och nedåt begränsad.

**Gränsvärde vid oändligheten**  $a$  konvergerar mot  $A$  när  $v \rightarrow \infty$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a - A| < \varepsilon$  för varje  $v > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a = A$$

eller  $a \rightarrow A$  när  $v \rightarrow \infty$ . Om det för en grej  $a$  inte finns ett sådant  $A$ , sägs  $a$  vara divergent då  $v \rightarrow \infty$ .

**Det oegentliga gränsvärdet**  $a$  har det oegentliga gränsvärdet  $\infty$  då  $x \rightarrow \infty$  om det för varje  $M$  finns ett  $N$  sådant att  $a > M$  för varje  $v > N$ . Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a = \infty.$$

**Standardgränsvärden** Låt  $a > 1, b > 0$ . Då gäller att

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a^v}{v^b} = \infty.$$

## 10.2 Integraler och summor

Här kommer funktionen eller talföljden som integreras eller summeras omtalas som funktionen, med symbol  $a$ , integralet eller summan från  $a$  till  $b$  omtalas som grejen, med symbolet  $S_a^b v$ , och indexet eller variabeln omtalas variabeln, med symbolet  $v$ .

**Integration med oändliga gränser** Grejen definieras som

$$S_a^\infty v = \lim_{R \rightarrow \infty} S_a^R.$$

och integration från  $-\infty$  analogt. Om gränsvärdet existerar, är grejen konvergent. Annars är den divergent.

**Jämförelsessats för två integraler** Låt  $a, b$  vara funktioner sådana att  $0 \leq a \leq b$  för varje  $v > x$ . Då gäller att om  $S_x^\infty v$  är konvergent är även  $S_x^\infty u$  konvergent, och om  $S_x^\infty u$  är divergent är även  $S_x^\infty v$  divergent.

**Kvoten av termer och konvergens** Låt  $a, b$  uppfylla

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a}{b} = K \neq 0.$$

för  $v > a$ . Då konvergerar  $S_x^\infty a$  om och endast om  $S_x^\infty b$  konvergerar.

**Summan av potenser** Serien

$$S_1^\infty a \frac{1}{v^p}$$

är konvergent om och endast om  $p > 1$ .

## 10.3 Lokala integraler och integraler mot oändligheten

Här kommer integralet över något domän  $D$ , av ändlig eller oändlig storlek att skrivas som  $\int_D$ . Att en funktion är integrerbar i detta domänet kommer här bety att den är integrerbar godtyckligt nära gränserna, och  $x \in D$  kommer bety att  $x$  kan vara godtyckligt nära gränserna.

**Jämförelsessats för två integraler** Låt  $f, g$  vara integrerbara i  $D$  för alla , sådana  $0 \neq f(x) \neq g(x)$  för varje  $x \in D$ . Då gäller att om  $\int_D g(x) dx$  är konvergent är även  $\int_D f(x) dx$  konvergent, och om  $\int_D f(x) dx$  är divergent är även  $\int_D g(x) dx$  divergent.

**Gräns av kvot och integral** Låt  $f, g$  vara positiva och integrerbara i  $D$  för alla  $x \in D$  sådana att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0.$$

där  $a$  är någon problematisk gräns. Då är  $\int_D g(x) dx$  konvergent om och endast om  $\int_D f(x) dx$  är konvergent.

## 10.4 Samband mellan summor och integraler

Dessa satsar upprepas eftersom jag tyckte de var relevanta.

**Samband mellan summor och integraler** Låt  $f$  vara en avtagande funktion i  $[m, n]$ , där  $m, n$  är heltal sådana att  $m < n$ . Då gäller:

$$\sum_{i=m+1}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^{n-1} f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x) dx + f(n) \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx + f(m).$$

Låt  $f$  vara en växande funktion i  $[m, n]$ , där  $m, n$  är heltal sådana att  $m < n$ . Då gäller:

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{i=m+1}^n f(i).$$

Detta kan omformuleras till

$$\int_m^n f(x) dx + f(m) \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^n f(x) dx + f(n).$$

**Cauchys integralkriterium** Låt  $f$  vara positiv och avtagande i  $(m, \infty)$ . Då är  $\sum_{i=m}^{\infty} f(i)$  konvergent om och endast om  $\int_m^{\infty} f(x) dx$  är konvergent.