Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

25 januari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter $x_1, \ldots, x_n$. Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; i = 1, \ldots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerad i $\mathbf{a}$ med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum $\mathbf{a}$.

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M.

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M:s komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en randpunkt till M om varje öppet klot kring $\mathbf{a}$ innehåller punkter i M och M:s komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M. Denna betecknas ∂M.

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M:s komplement och sluten om ∂M är i M.

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

Bågvis sammanhängande mängder D är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ finns en kurva $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$ så att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

2.2 Satser

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Grafen av en funktion Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen av f är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Kurvor i $\mathbb{R}^p$ En kurva i $\mathbb{R}^p$ är en funktion $t \to \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

Lokala gränsvärden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Gränsvärden mot oändligheten Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D$ om $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}$ existerar och $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = f(\mathbf{a}$.

Likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

3.2 Satser

Gränsvärden av funktioner och deras komponenter Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ är ekvivalent med att $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_i$, där subskriptet i indikerar den i-te komponenten av varje vektor.

Bevis Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^{p} |f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i|.$$

Största och minsta värde för funktioner Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då antar f ett största och ett minsta värde på D.

Bevis

Definitionsmängd och likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då är f likformigt kontinuerlig på D.

Bevis

Satsen om mellanliggande värden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara bågvis sammanhängande. Om f antar värderna $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ i D, antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Bevis

4 Derivata

4.1 Definitioner

Partiella derivator Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är partiellt deriverbar med avseende på x_i i den inre punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av f med avseende på x_i i $\mathbf{a}$ och betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Differentierbarhet Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är differentierbar i $\mathbf{a}$ om $\exists A_1, \ldots, A_n$ och en $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

och $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. f är differentierbar om detta är uppfylld för alla $\mathbf{a} \in D$.

C^1 Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

C^k Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^k om f alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D.

C^1-kurvor En kurva är klass C^1 om alla dess komponenter är C^1.

Gradient Låt f vara reellvärd och differentierbar i $\mathbf{x}$. Gradienten definieras som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i.$$

Riktningsderivata Låt $|\mathbf{v}| = 1$. Derivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{v}$ är

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

4.2 Satser

Differentierbarhet och kontinuitet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Bevis Definitionen implicerar $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Differentierbarhet och partiell deriverbarhet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i $\mathbf{a}$ och $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$.

Bevis Med $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$ ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när t går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och A_i på andra sidan.

Differentierbarhet av funktioner i C^1 Varje $f \in C^1$ är differentierbar.

Bevis Låt $\mathbf{a} \in D$. Enligt envariabelsanalysens medelvärdesats har vi

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}+\theta_1 h_1\mathbf{e}_1)\\
&f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+h_2\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+\theta_2 h_2\mathbf{e}_2)\\
&\vdots\\
&f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i+\theta_n h_n\mathbf{e}_n),
\end{aligned}$$

där alla $\theta_i \in [0,1]$. Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{k-1} h_i\mathbf{e}_i+\theta_k h_k\mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),$$

där $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Då får man

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h})\right) h_i.$$

Den sista delen av beviset använder

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{h})h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

Allmänna kedjeregeln Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ och låt alla komponenter av f, g vara differentierbara. Då är alla komponenter av $f \circ g$ differentierbara. Med $u = f \circ g$ har vi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\mathbf{t}))\frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{t})$$

för varje komponent.

Specialfall: $p = 1$ Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, där alla g_i är partiellt deriverbara. Då är $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d} f \circ g}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \frac{\mathrm{d} g_i}{\mathrm{d}t}(t).$$

Bevis

Konstantfunktioner och gradient Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och bågvis sammanhängande och $f \in C^1(D, R^n)$. Om $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in D$, är f konstant i D.

Bevis Använd att

$$\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x}(t)) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = 0.$$

Gradient och riktningsderivata Gradienten i riktning $\mathbf{v}$ ges av

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Bevis Bilda $u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = u(\mathbf{g}(t))$, vilket ger $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)$. Enligt kedjeregeln blir detta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x_i}(0) \frac{\mathrm{d} g_i}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Maximal riktningsderivata $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken f växar snabbast i $\mathbf{a}$, och den maximala tillväxthastigheten är $\left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right|$.

Bevis Cauchy-Schwarz-olikheten ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right| |\mathbf{v}|,$$

med likhet om och endast om $\mathbf{v}$ är parallell med gradienten.

Gradient och nivåytor Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Då är gradienten normal på nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Bevis Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1-kurva i nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$. Detta ger

$$0 = \frac{\mathrm{d} f \circ \mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0).$$

Eftersom $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0)$ är parallell med nivåytan är beviset klart.

Symmetri av derivator i C^2 För varje $f \in C^2$ gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Bevis Vi beviser endast för en tvåvariabelfunktion, då det allmänna fallet följer direkt från detta. Låt $q(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y), \phi(t) = f(x+h,t) - f(x,t)$. Detta ger

$$\begin{aligned}
q(h,k) &= \phi(y+k) - \phi(y) \\
&= k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(y+\theta k) \\
&= k(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta k)) \\
&= kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\eta h, y+\theta k),
\end{aligned}$$

där vi har användt medelvärdesatsen två gånger. Då har vi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{q(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Beviset kan upprepas i motsatt ordning, och detta fullförar beviset.

5 Kvadratiska ytor

Detta är de flesta kvadratiska ytorna man kan träffa på i $\mathbb{R}^3$, komplett med snygga illustrationer.

Ellipsioider En ellipsioid beskrivs av en ekvation på formen

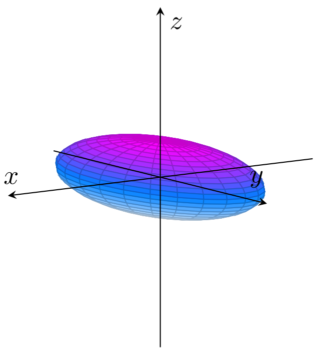
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Koner En kon beskrivs av en ekvation på formen

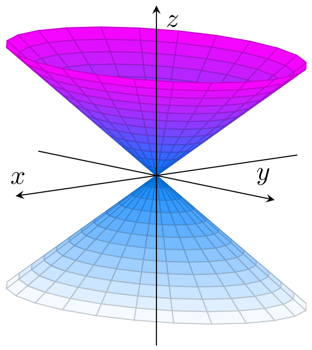
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Cylindrar En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

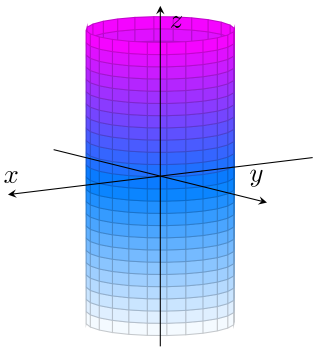
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Figur 1: Illustration av en ellipsioid.



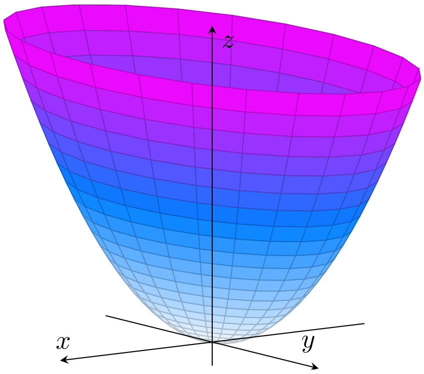
Figur 2: Illustration av en kon.



Figur 3: Illustration av en cylinder.

Elliptiska paraboloider En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

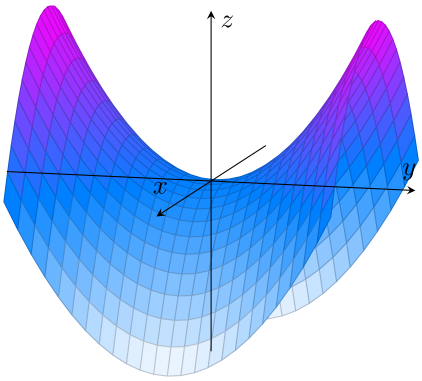
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.

Hyperbolska paraboloider En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



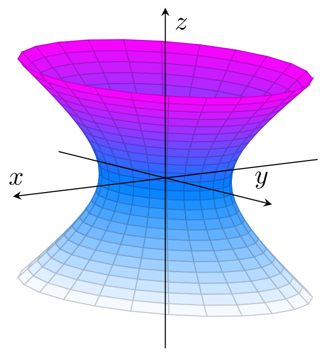
Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.

Enmantlade hyperboloider En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvationpå formen

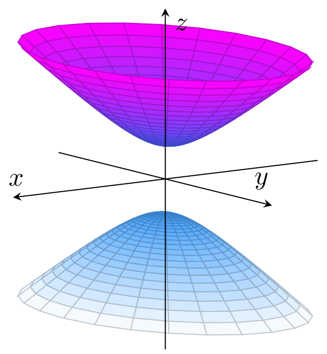
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Tvåmantlade hyperboloider En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.