Sammanfattning av SF1544 Numeriska metoder, grundkurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

21 november 2018

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SF1544 Numeriska metoder, grundkurs.

Innehåll

1 Användbar matte **1**

2 Grundläggande definitioner för numeriska metoder **1**

3 Lösning av ekvationer **2**

4 Lösning av ordinarie differentialekvationer **5**

1 Användbar matte

Allmän begränsning av globalt fel Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= f(t, y(t)),\\ y(a) &= b,\end{aligned}$$

löst på $[a, T]$, där f är Lipschitzkontinuerlig. Betrakta en numerisk lösning med lokalt fel begränsad av Mh^{p+1}. Då begränsas det globala felet av

$$|y(T) - y_N| \leq \frac{e^{L(T-a)}M}{L}h^p.$$

Bevis Vi inför $y(t; t_n)$ som den exakta lösningen som startar i (t_n, y_n). Det globala felet ges då av

$$\begin{aligned}|y(T) - y_N| &= |y(T) - y(T; t_{N-1}) + y(T; t_{N-1}) + \cdots - y(T; t_1) + y(T; t_1) - y_N|\\ &\leq |y(T) - y(T; t_{N-1})| + |y(T; t_{N-1}) - y(T; t_{N-2})| + \cdots + |y(T; t_1) - y_N|.\end{aligned}$$

Den första termen ges simpelthen av det lokala felet. Satsen om entydighet av lösning för en sådan differentialekvation ger vidare

$$|y(T; t_i) - y(T; t_{i-1})| \leq e^{L(T-t_i)}|y(t_i; t_i) - y(t_i; t_{i-1})|.$$

Det som står kvar i absolutbeloppstecknet är det lokala felet, eftersom den vänstra termen är exakt och den högra kommer från en iteration. Detta ger

$$|y(T; t_i) - y(T; t_{i-1})| \leq e^{L(T-t_i)}Mh^{p+1} = e^{L(N-i)h}Mh^{p+1}$$

och vidare

$$\begin{aligned}|y_N - y(T)| &\leq Mh^{p+1} + Mh^{p+1}e^{Lh} + \cdots + Mh^{p+1}e^{L(N-1)h}.\\ &= Mh^{p+1}\frac{1 - e^{LNh}}{1 - e^{Lh}}\\ &= Mh^{p+1}\frac{e^{LNh} - 1}{e^{Lh} - 1}\\ &\leq Mh^{p+1}\frac{e^{LNh}}{Lh},\end{aligned}$$

och beviset är klart.

2 Grundläggande definitioner för numeriska metoder

Reduktionsfaktor

Kvadratisk konvergens En numerisk metod vars feltermer uppfyller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = M$$

är kvadratiskt konvergent.

3 Lösning av ekvationer

Fixpunktsmetoden Betrakta ekvationen

$$x = g(x).$$

Fixpunktsmetoden är en enkel iterationsmetod för att lösa denna ekvationen, med den enkla iterationsformeln

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `x0` där det itereras tills lösningen stämmer med en tolerans `t` är:

```
define g(x)
input x0
input t
while abs(x - g(x)) > t
        x = g(x)
end
return x
```

Konvergens Om $g \in C^1$, $\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(\alpha)\right| < 1$ och α är en fixpunkt. finns det en omgivning till α så att om x_0 är i denna omgivningen, går $x_n \to \alpha$. Metoden konvergerar linjärt med reduktionsfaktor $S = \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(\alpha)\right|$.

För att visa detta, skriver vi

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c)(x_n - \alpha),$$

där vi har användt medelvärdesatsen och det faktum att α är en fixpunkt. Vidare, eftersom $g \in C^1$ finns det en omgivning till α så att $\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right| \leq \frac{S+1}{2}$. Om x_0 är i denna, är

$$e_{n+1} \leq \frac{S+1}{2} e_n.$$

Detta implicerar att $x_n \to \alpha$ och att

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \to S.$$

Fixpunktsmetoden för system Betrakta ekvationssystemet

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{x}).$$

Vi löser även detta med fixpunktsmetoden, och använder iterationsformeln

$$\mathbf{x}_{n+1} = g(\mathbf{x}_n).$$

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `x0` där det itereras tills lösningen stämmer med en tolerans `t` är:

```
define g(x)
input x0
input t
while abs(x - g(x)) > t
      x = g(x)
end
return x
```

där allt nu är listor. Toleransen ser kanske lite annorlunda ut, vafan vet jag.

Intervallhalveringsalgoritmen Betrakta ekvationen

$$f(x) = 0.$$

Intervallhalveringsalgoritmen utgår från två punkter a, b så att $f(a)f(b) < 0$, och gör följande:

1. Beräkna funktionsvärdet i punkten $m = \frac{b+a}{2}$.
2. Om $f(a)f(m) < 0$, sätt $a = m$. Annars, sätt $b = m$.
3. Sluta iterationen när intervallbredden $\frac{b-a}{2}$ är mindre än den givna toleransen.
4. Returnera $\frac{b+a}{2}$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `a` och `a` där det itereras tills lösningen stämmer med en tolerans `t` är:

```
define f(x)
input a, b
input t
while (b - a)/2 > t
      m = (a + b)/2
      if f(a)f(m) < 0
            a = m
      else
```

```
                b = m
        end
end
return (a + b)/2
```

Newton-Rhapsonsmetoden Betrakta ekvationen

$$f(x) = 0.$$

Newton-Rhapsons metod utgår från tangenten till f. Om man startar i x_0, har tangenten ekvation $t(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Dens nollställe ges av

$$x = x_0 - \frac{f(x_0}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}.$$

Från detta gör vi iterationen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)}$$

som avslutas när $|x_{n+1} - x_n|$ är mindre än någon tolerans. Vi ser att detta är en variant av fixpunktsmetoden med $g(x) = x - \frac{f(x}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `x_0` där det itereras tills lösningen stämmer med en tolerans `t` är:

```
define f(x)
define fderiv(x)
input x_0
input t
while f(x_0) > t
        x = x - f(x)/fderiv(x)
end
return x
```

Konvergens Om α är ett nollställe till f, är det även ett nollställe till g. Vi har för $f \in C^2$ och $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\alpha) \neq 0$ att

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(\alpha) = 1 - \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\alpha)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\alpha)} + \frac{f(\alpha)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(\alpha)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\alpha)^2} = 0.$$

Därmed, om dessa villkor uppfylls, är Netwon-Rhapsons metod kvadratiskt konvergent med konstant $M = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(\alpha)}{2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\alpha)}$.

För att visa detta, konstaterar vi att lokal konvergens följer av beviset som gjordes för fixpunktsmetoden. Vi Taylorutvecklar vidare nära x_n och får

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(x_n) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c_n)(\alpha - x_n)^2, \\ \frac{f(\alpha)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)} &= \frac{f(x_n)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c_n)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)}(\alpha - x_n)^2 = 0. \end{aligned}$$

Detta skriver vi om till

$$x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)} - \alpha = \frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c_n)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

Detta implicerar

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \left|\frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c_n)}{2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n)}\right| \to M,$$

och beviset är klart.

Newton-Rhapsons metod för system Betrakta ekvationen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Metoden är den samma för ett enda system, fast med iterationen

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathrm{d}\mathbf{f}\,(x_n)^{-1}(x_n.$$

Notera att beräkningsmässigt är det svårt att hitta en inversmatris, så det är smartare att hitta en vektor $\mathbf{h}$ så att $\mathrm{d}\mathbf{f}\,(x_n)\mathbf{h} = \mathbf{f}(x_n)$ och anv

4 Lösning av ordinarie differentialekvationer

Eulers metod (framåt) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= f(t, y(t)), \\ y(a) &= b. \end{aligned}$$

Eulers metod går ut på att

1. Dela upp intervallet vi vill lösa problemet på i diskreta steg, där steg n finns i punkten $t_n = a + nh$, där h är steglängden.

2. Linjarisera problemet till

$$y_{n+1} - y_n = f(t_n, y_n)h,$$

där $y_n = y(t_n)$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `t0` och `y0`, steglängd `h` och `N` steg är:

```
define f(t, y)
input t0 and y0
input h and N
t = t0
y = y0
for 1 < i < N
        y = y + f(t, y)*h
        t = t + h
end
```

Felanalys Om vi betraktar det första steget i iterationen, har man lokalt

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(t_0) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(\alpha)(t_1 - t_0)^2 \\ &= y(t_0) + hf(t_0, y_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(\alpha)h^2. \end{aligned}$$

Om andraderivatan av y är begränsad, ger detta

$$|y_1 - y(t_1)| \leq Mh^2,$$

och det lokala felet är $O\left(h^2\right)$.

Det globala felet kan nu uppskattas som det lokala felet multiplicetar med antal steg. Om vi försöker lösa ekvationen på intervallet $[a, T]$ med N steg, har man

$$Nh = T - a,$$

och det globala felet kan uppskattas som

$$|y_N - y(t_N)| \approx h^2 \frac{T - a}{h} = Ch.$$

Eulers metod för system av differentialekvationer Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Eulers metod går ut på att

1. Dela upp intervallet vi vill lösa problemet på i diskreta steg, där steg n finns i punkten $t^n = a + nh$, där h är steglängden.

2. Linjarisera problemet till

$$y^{n+1} - y_n = \mathbf{f}(t^n, y^n)h,$$

där $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}(t^n)$.

En pseudokod-beskrivning av en lösning med startvillkor `t0` och `y0`, där denna är en lista med `M` element, steglängd `h` och `N` steg är:

```
define f(t, y)
input t0 and y0
input h and N
t = t0
y = y0
for 1 < i < N
        for 1 < j < M
                y[j] = y[j] + f[j](t, y)*h
        end
        t = t + h
end
```

Observera att `f` nu är en lista av `M` funktioner, och kom ihåg att högre ordningens ekvationer med en funktion kan skrivas som ett system av differentialekvationer.

Eulers metod bakåt Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= f(t, y(t)),\\ y(a) &= b.\end{aligned}$$

Eulers metod bakåt går ut på att

1. Dela upp intervallet vi vill lösa problemet på i diskreta steg, där steg n finns i punkten $t_n = a + nh$, där h är steglängden.

2. Linjarisera problemet till

$$y_{n+1} - y_n = f(t_{n+1}, y_{n+1})h,$$

där $y_n = y(t_n)$. Detta ger en ekvation i y_{n+1} som måste lösas numeriskt.