Sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

6 september 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs.

Innehåll

1 Grundläggande koncept

Grundläggande begrepp och ideer Reglerteknik handlar om att kontrollera olika storheter, ofta betecknad y, mot något värde r. Dessa påverkas typiskt av en yttre störning v, och vi kan kontrollera dem vid att tillföra en påverkan u.

Strategi för att förstå För att förstå systemet, hittar vi först på en modell som beskriver det. Ur denna modellen fås typiskt en differentialekvation. Denna löser vi med Laplacetransform över tid.

Överförningsfungktionen Typiskt (isär om modellen ger en linjär differentialekvation) fås en lösning i Laplacerummet på formen $Y(s) = G(s)U(s)$, där U är Laplacetransformen av u. Funktionen G är överförningsfunktionen. Notera att denna lösningsformen beror på att alla initialvärden är 0!

Poler Ett systems poler är rötterna till nämnarpolynomet (som typiskt finns) i överförningsfunktionen.

Stabilitet Ett system är stabilt om det tenderar mot ett visst läge. Systemets stabilitet är typiskt kopplad med dets noder. Detta kan man se i enkla fall, till exempel vanliga linjära ordinära differentialekvationer, då systemets polar anger hur snabbt lösningen avtar.

Nollställen Ett systems nollställen är rötterna till täljarpolynomet (som typiskt finns) hos överföringsfunktioner. Eftersom vi är intresserade av att styra y, är det viktigt hur vi ska välja u för att få det. Därmed är $\frac{1}{G}$ en viktig storhet, och nollställen kan därmed orsaka reglerproblem som är svårlösta.

Impulssvar Om lösningen för Y är på formen $Y = GU$, är lösningen för y på formen

$$y(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, g(\tau)u(t-\tau).$$

g kallas för impulssvaret.

Rotort En rotort är en plott av ett systems poler som funktion av någon parameter. Den är typiskt uppdelad i grenar, som är kurvor i planet som är parametriserade av parametervärdet. Polerna som motsvarar parametervärdet 0 är rotortens startpunkter, och polarna motsvarande parametervärdet ∞ är rotortens ändpunkter. Om rotorten närmar sig kurvor, är dessa rotortens asymptoter.

2 Prestanda och prestandamått

Stigtid Stigtiden definieras som $T_\mathrm{r}, = t_2 - t_1$, där $y(t_2) = 0.9$ och $y(t_1) = 0.1$, med y mätt i relativa enheter.

Insvängningstid Insvängningstiden definieras som $|y(t) - 1| < p$ när $t > T_\mathrm{s}$, med y mätt i relativa enheter. p är typiskt lika med 0.05.

Översläng Överslänget definieras som $y_\mathrm{max} - 1$, med y mätt i relativa enheter.

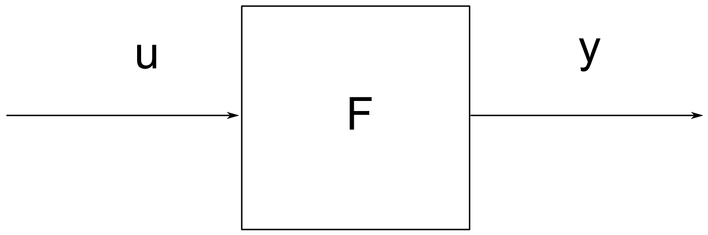
Parametrar i svängningslika system Om du har ett system med ett andra ordningens polynom i överföringsfunktionens nämnare, skriv polynomet som $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Då gäller det att

$$T_\mathrm{r} \propto \frac{1}{\omega_0},\ T_\mathrm{s} \approx \frac{3}{\zeta\omega_0},\ M = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

Stationärt fel Det stationära felet är felet som kvarstår efter lång tid.

3 Blockschema

Syftet med blockschema Blockschema är ett systematisk sätt att rita reglerade system på.



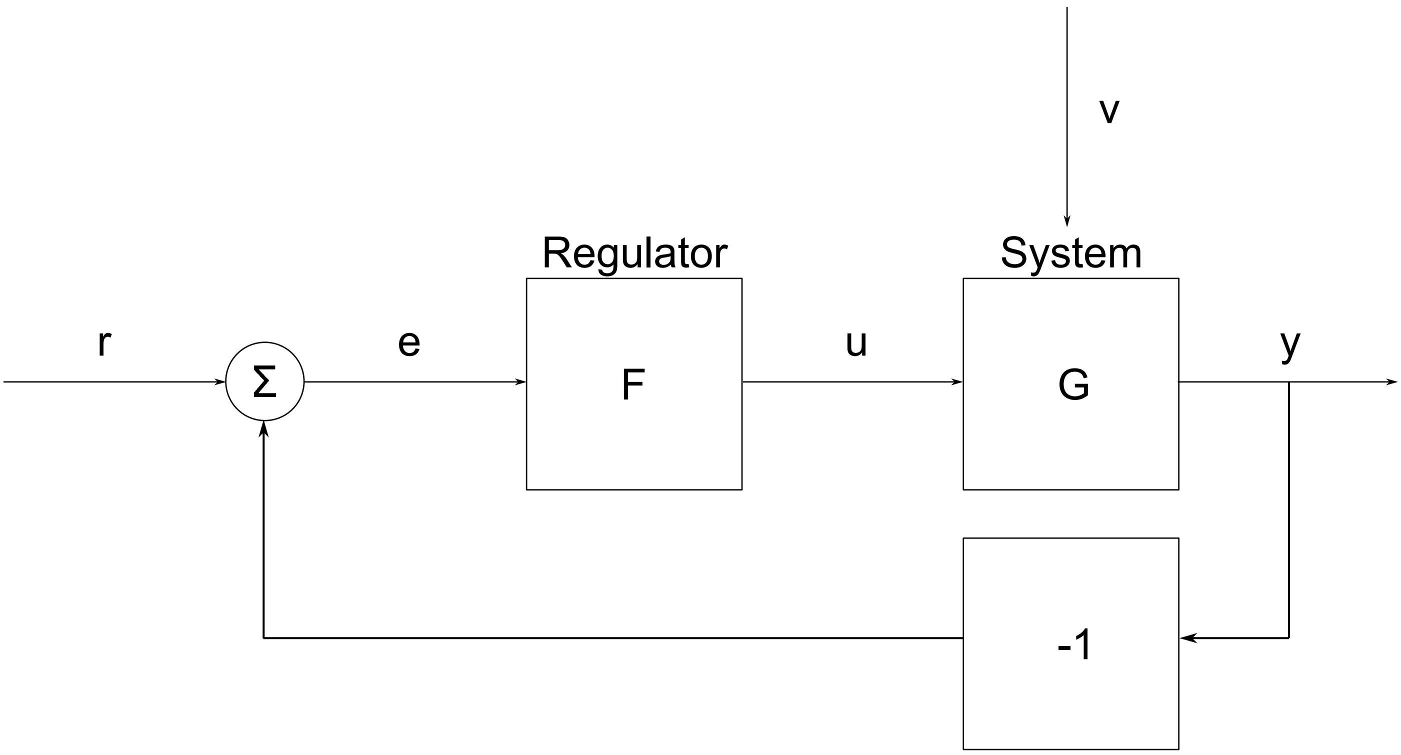
Figur 1: Illustration av ett enkelt block i ett blockschema.

Hur funkar det? Betrakta blocket i figur 1.
Med denna figuren menar vi exakt att $Y(s) = F(s)U(s)$.

4 Negativ återkoppling

Vad är negativ återkoppling? I denna kursen kommer vi att studera hur man kontrollerar ett system vid att låta avvikelsen mot det önskade värdet kontrollera regleringen av storheten.

Illustration i blockdiagram Ett enkelt negativt kontrollsystem illustrearas i figur 2.



Figur 2: Schematisk illustration av ett enkelt negativt återkopplad system.

Beskrivning av systemet Vi börjar beskrivningen av systemet med att inte betrakta störningar. I ena ändpunkten har vi

$$Y = GU = GFE.$$

Summationskomponenten till vänster ger oss

$$E = R - Y,$$

och därmed

$$Y = GFR - GFY.$$

Därmed kan vi skriva

$$Y = \frac{GF}{1 + GF} R.$$

Återkopplad överföringsfunktion För ett återkopplad system som kan skrivas som $Y = G_\mathrm{C} R$ definieras G_C som den återkopplade överföringsfunktionen. För systemet ovan har vi alltså

$$G_\mathrm{C} = \frac{GF}{1+GF}R.$$

Samband mellan reglerfel och referens Alternativt kan vi lösa systemet ovan för att få

$$R - E = GFE,\ E = \frac{1}{1+GF}R.$$

Samband mellan referens och insignal Systemet ovan kan även lösas för att ge

$$U = FR - FY = FR - GFU,\ U = \frac{F}{1+GF}R.$$

Slutna systems poler Vi ser att slutna system har poler där $1 + GF = 0$. Därmed bestäms systemets stabilitet av systemet och regulatorn.

P-reglering Principet i P-reglering är att välja en styrsignal som är proportionell mot storleken av felet, alltså

$$u = K(r - y) = Ke.$$

Det är här klart att för att få negativ återkoppling väljer vi $K > 0$.

Denna regleringsmetoden

- minskar inverkan av störning och modellfel för ett bra val av K.
- ökar snabbheten vid insvängning.
- stabiliserar instabila system.

Däremot kan regleringen gå fel om t.ex.

- systemet inte uppför sig som man tror.
- man har begränsningar i styrförmåga.
- man får instabilitet på grund av återkopplingen.

Det är även ett problem att om felet är stationärt, är även styrsignalen det, så även om du har ett nollskild fel klarar inte systemet nödvändigtvis anpassa sig.

PID-reglering PID står för proportionell integrerande deriverande. Denna sortens reglering löser många reglerproblem. Med PID-reglering väljer vi styrsignlaen

$$u = K_\mathrm{P} e + K_\mathrm{I} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, e + K_\mathrm{D} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

Alternativt kan vi skriva det som

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_\mathrm{I}} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, e + T_\mathrm{D} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right).$$

De tre ingående termerna i styrsignalen är

- proportionell återkoppling, som betraktar det nuvarande felet.
- integrerande återkoppling, som betraktar hur felet har uppfört sig.
- deriverande återkoppling, som betraktar hur felet kommer att uppföra sig.

PI-reglering PI-reglering använder ej den deriverande återkopplingstermen. Vi ser härifrån att vid ett stationärt tillstånd är antingen $e = 0$, annars ökar eller minskar u på grund av integraltermen.

Vi vill nu betrakta systemets insvängning. Om det stationära $\bar{u}$ krävs för att $e = 0$, har vi

$$\bar{u} = K\left(e + \frac{1}{T_\mathrm{I}}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, e\right).$$

Vid att derivera detta fås

$$K\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T_\mathrm{I}}e\right) = 0,$$

med lösning proportionell mot $e^{-\frac{t}{T_\mathrm{I}}}$.

Notera att om man har stort fel kan PI-reglering ge problem. Därför använder man det typiskt när felen är små.

PI-reglering i Laplacevärlden Vid att Laplacetransformera uttrycket för styrsignalen i en PI-regulator, nämligen

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_\mathrm{I}}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, e\right),$$

fås

$$U = K\left(E + \frac{1}{T_\mathrm{I}s}E\right),$$

och enligt figur 2 ser vi att

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_\mathrm{I}s}\right).$$

Rotort Betrakta ett system med överföringsfunktion G_O för det öppna systemet. Det slutna systemet kommer ha överföringsfunktion

$$G_\mathrm{C} = \frac{G_\mathrm{O}}{1 + G_\mathrm{O}}.$$

G_O är (tydligen) ofta på formen

$$G_\mathrm{O} = K\frac{Q}{P},$$

där K är en parameter. Då får vi

$$G_\mathrm{C} = \frac{KQ}{P + KQ}.$$

Systemet har alltså poler som ges av

$$P + KQ = 0,\ \frac{P}{Q} = -K.$$

Detta kriteriet anger systemets rotort.

Vi antar nu att P och Q är polynom av grad n respektiva m, där $n \geq m$. Då vet vi att kriteriet har n rötter, och rotorten har därför n grenar. Rötterna dyker antingen upp som reellvärda eller i par av komplexkonjugerade rötter, och därmed är rotorten symmetrisk med avseende på reella axeln. Vi vet även att rotorten har $n - m$ asymptoter. Det gäller även att alla delar av reella axeln som har ett udda antal reella start- och ändpunkter till höger om sig tillhör rotorten.

För att rita rotorten kan du följa dessa steg:

- Beräkna överföringsfunktionen för det slutna systemet. Skriv nämnaren som $P + KQ = 0$.
- Hitta startpunkterna, alltså rötterna till P.
- Hitta ändpunkterna, alltså rötterna till Q.
- Bestäm antal asymptoter, alltså gradtalet till P minus gradtalet till Q.
- Beräkna punkterna där rotorten korsar reella axeln, altså en dubbelrot till karakteristiska ekvationen.
- Bestäm deras riktningar genom att betrakta argumentet till $\frac{P}{Q} = -K$ för stora s.
- Bestäm korsningar med imaginära axeln genom att sätta $s = i\omega$. Kom ihåg att $K \geq 0$.
- Bestäm vilka delar av reella axeln som tillhör rotorten. Det är de delar som har ett udda antar start- och slutpunkter till höger om sig.
- Rita.

Nyquistkriteriet Givet överföringsfunktionen

$$G_{\mathrm{C}} = \frac{G_{\mathrm{O}}}{1 + G_{\mathrm{O}}}.$$

för ett slutet system, finns det några poler så att systemet är instabilt? En ide för att undersöka detta är att undersöka alla s i högre halvplan och se vilka värden på G_{O} man får. Detta gör vi genom att rita två halvcirklar med radier r respektivar R i högre halvplan, förbinda dem med raka linjer i änderna och låta r gå mot 0 och R mot ∞. G_{O} kommer då anta värden på en kurva γ'. Argumentvariationsprincipen från komplex analys ger oss då att antalet poler i höger halvplan till ett återkopplad system är lika med antalet poler i höger halvplan hos G_{O} plus antalet varv som γ' omsluter punkten -1. Speciellt, om G_{O} inte har poler i höger halvplan, är systemet stabilt om γ' inte omsluter -1.

Av någon anledning är den viktigaste delen där γ' skär imaginära axeln. Man ska även kunna observera att $G_{\mathrm{O}}(\infty) = 0$ och $G_{\mathrm{O}}(0) \approx \frac{K}{s^p}$, där p är antal poler i origo.

5 Frekvensanalys

Fundamental ide Eftersom periodiska funktioner kan skrivas som en summa av trigonometriska funktioner och funktioner som avtar tillräcklig snabbt kan skrivas som en integral över trigonometriska funktioner, vet vi att när vi studerar linjära system räcker det att studera systemets respons på en enda term, alltså en enda trigonometrisk funktion, och se hur den beror av frekvensen. Om vi tillför en signal $u = \sin \omega t$ till ett system med överföringsfunktion G får vi

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, g(\tau) u(t-\tau) \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i\omega t} \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, g(\tau) e^{-i\omega\tau} \right) \\
&= \mathrm{Im}(e^{i\omega t} G(i\omega)) \\
&= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)).
\end{aligned}$$

Det kan även finnas transienta termer här, men om systemet är stabilt kommer dessa försvinna över tid. Vi ser alltså att systemets svar beror av $G(i\omega)$.

Nyquistdiagram Ett Nyquistdiagram är en uppritning av $G(i\omega)$ för $0 < \omega < \infty$.

Bodediagram Ett Bodediagram är en uppritning av $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω.

Brytningspunkter Om överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(i\omega) = \frac{\prod(i\omega - z_i)}{\prod(i\omega - p_i)},$$

är alla z_i och p_i brytningspunkter för systemet. Här kommer de största lutningsändringarna i Bodediagrammet.

Bodes relation Låt G vara minimumsfas, dvs. ha alla sina nollställen och poler i vänstre halvplan, och $G(0) > 0$. Då gäller att om $|G(i\omega)|$ i ett visst frekvensområde avtar med 20 dB per dekad (en dekad är en ökning i frekvens med en faktor 10), är $\arg G(i\omega) \approx -90°$, och om $|G(i\omega)|$ avtar med 40 dB per dekad, är $\arg G(i\omega) \approx -180°$.