

# Sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

28 oktober 2019

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av EI1320 Teoretisk elektroteknik.

# Innehåll

1	Lite om notation	1
2	Lite vektoranalys och annan matte	1
3	Elektrostatik	2
4	Dipoler och dielektrika	10
5	Magnetostatik	17
6	Magnetiska dipoler och magneter	19
7	Lite om elektronik	25
8	Grunderna i elektrodynamik	27
9	Elektromagnetiska vågor	34

## 1 Lite om notation

I denna kursen kommer beteckningarna avvika något från de jag brukar använda. Differentialerna för längd, yta respektive volym kommer betecknas  $dl$ ,  $da$ ,  $d\tau$  för att inte skapa förvirring när man jämför med fysikaliska storheter som kommer dyka upp.

Vi kommer vara intresserade av interaktioner mellan kroppar ute i rymden och kroppar som ger upphov till elektromagnetiska fält. Vi inför därför källpunktsvektorn  $\mathbf{r}'$  till någon punkt på källan och fältpunktsvektorn  $\mathbf{r}$  till någon kropp som känner av det elektromagnetiska fältet. Vi inför även vektorn  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  från källpunkt till fältpunkt. Notera att ett  $'$  även komemr användas i integration för att skilja mellan integraler över fältpunkter och källpunkter. Icke-primade differentialer kan även betyda integrationer över områden med både källpunkter och fältpunkter (typisk innehåller integranden källan, så att rena fältpunkter ej bidrar).

Apropå, om jag någon gång inte specificerar integrationsområde, betyder det typiskt att man integrerar över hela rummet.

## 2 Lite vektoranalys och annan matte

**Diracs delta i högre dimensioner** Diracs deltafunktion generaliserar utan vidare till högre dimensioner. Med andra ord är  $\delta(\mathbf{r})$  en funktion som är noll överallt förutom origo och som uppfyller

$$\int_V dV \delta(\mathbf{r}) = 1$$

om  $V$  innesluter origo.

**Nablaoperatoren med avseende på fält- och källpunkt** Med hjälp av de kartesiska basvektorerna kan vi skriva källpunktsvektorn och fältpunktsvektorn som

$$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}' = r'_i \mathbf{e}_i.$$

Vidare kan vi skriva nablaoperatoren med avseende på de två vektorerna som

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}_i \partial_i, \quad \vec{\nabla}' = \mathbf{e}_i \partial'_i.$$

Betrakta nu en funktion av  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Då gäller det att

$$\partial_i f = \frac{df}{dR} \partial_i R = -\frac{df}{dR} \partial'_i R = -\partial'_i f.$$

Detta ger alltså att

$$\vec{\nabla} f = -\vec{\nabla}' f.$$

**Gradienten av  $R$**  Betrakta funktionen

$$f(\mathbf{R}) = \sqrt{R_j R_j} = R.$$

Vi har

$$\partial_i R = \frac{1}{2} (R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 R_j \partial_i R_j = (R_k R_k)^{-\frac{1}{2}} R_j \partial_i (r_j - r'_j) = \frac{R_j}{R} \delta_{ij} = \frac{R_i}{R} \delta_{ij}.$$

Detta ger

$$\vec{\nabla} R = -\vec{\nabla}' R = \mathbf{e}_R.$$

**Divergensen av  $\frac{1}{R^2}$ -fältet** Med resultatet ovan har vi

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R &= \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R^3} \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{R} \\ &= -\frac{3}{R^4} \mathbf{R} \cdot \vec{\nabla} R + \frac{1}{R^3} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{R} \\ &= -\frac{3}{R^4} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_R + \frac{3}{R^3} \\ &= -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

så länge  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ .

Mer allmänt kan man visa att

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R = 4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Jag kan inte bevisa det, men jag kan rationalisera det kort. Utanför origo är det klart att detta stämmer. För att förstå vad som händer i origo, kan vi tillämpa den koordinatoberoende definitionen av divergens. Med den definitionen är divergensen av ett vektorfält kvoten av fältets flöde genom en liten yta kring en punkt och volymen den lilla ytan inneslutar. Med flervariabelanalys kan man visa att för fältet vi betraktar är flödet exakt  $4\pi$ . Om vi jämför detta med Diracs delta, ser vi att det verkar stämma.

**$\frac{1}{R}$  och Greenfunktioner** Med resultaten vi har får vi även

$$\vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \vec{\nabla} R = -\frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Detta betyder att

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Detta betyder att  $\frac{1}{R}$  är en Greenfunktion till Laplaceoperatorn (i tre dimensioner).

### 3 Elektrostatik

**Coulombs lag** Elektrostatiken utgår från Coulombs lag, som är en experimentellt framtagen lag. Den säger att om två laddningar  $Q$  och  $q$  är separerade med en sträcka  $\mathbf{R}$ , är kraften mellan dem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} \mathbf{R}.$$

Alternativt, i termer av enhetsvektorer,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Båda laddningarna antas ha försumbar utsträckning, och betecknas punktladdningar.  $\epsilon_0$  kallas vakuumpermittiviteten, och har enhet  $\text{F m}^{-1}$ .

**Elektriskt fält** Det elektriska fältet som genereras av en laddning  $Q$  definieras som att en liten testladdning  $q$  upplever en kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

från  $Q$ . I vår definition skulle vi kunna lägga på ett  $\lim_{q \rightarrow 0}$ , för att vara tydliga.

Baserad på detta får vi att en punktladdning  $Q$  genererar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

**Linjäritet och allmänna uttryck för elektriska fältet** Eftersom krafter superponeras, gör även elektriska fält det. I diskreta fall motsvarar detta att summera över punktladdningar. I kontinuerliga fall integrerar vi i stället, där varje element i integrationen behandlas som en punktladdning, och vi får

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Laddningen kan vara spridd ut på en linje, en yta eller en volym, i vilka fall vi får  $dq = \rho dl$ ,  $dq = \sigma dS$  respektive  $dq = \lambda dV$ . Förutom de olika elementerna finns en linjeladdningstäthet, ytladdningstäthet eller volymladdningstäthet. Notera att med hjälp av Diracs delta kan alla dessa fallen skrivas som volymladdningstätheter.

**Gauss' lag** För att härleda Gauss' lag börjar vi med att titta på flödet av fältet  $\frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$  genom en godtycklig yta. Integrationselementet

$$d\Omega = \frac{\mathbf{e}_R \cdot d\mathbf{a}}{R^2}$$

är rymdvinkeln som areaelementet upptar när det ses från origo. Vi kan se på något sätt att detta motsvarar att projicera areaelementet ned på enhetssfären kring origo. Alternativt, om fältets källa är en linjeladdning, skulle man projicera ned på enhetscirkeln. Flödet vi betraktar ges då av fönsterfunktionen

$$f(\mathbf{r}') = \int_S dS \frac{\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_n}{R^2} = \int_\Omega d\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \mathbf{r}' \text{ innanför } S, \\ 0, & \mathbf{r}' \text{ utanför } S. \end{cases}$$

Vi kommer nu ihåg hur elektriska fältet ser ut på integralform, specifikt som en volymintegral, och får då för flödet genom en godtycklig yta

$$\begin{aligned} \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= \int_S d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho}{R^2} \mathbf{e}_R \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \int_S d\mathbf{S} \cdot \rho \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \rho f(\mathbf{r}') \\ &= \frac{Q_{\text{innesluten}}}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Den sista integralen är lika med laddningen som är innesluten i  $S$  eftersom fönsterfunktionen ger ett bidrag  $4\pi$  om och endast om det finns laddning i den aktuella punkten.

Gauss' lag är ett bra verktyg för att beräkna elektriska fält för geometrier med mycket symmetri.

**Gauss' lag på differentialform** Betrakta nu en godtycklig yta  $S$  som exakt inneslutar (den lite godtyckliga) volymen  $V$ . Gauss' lag ger då

$$\int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\tau \rho.$$

Vi kan använda divergenssatsen för att skriva om vänstersidan som en integral över  $V$ . Detta ger

$$\int_V d\tau \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\tau \rho.$$

Eftersom  $V$  är godtyckligt vald, måste det gälla att

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

**Randvillkor för elektriskt fält** Ytladdningar ger diskontinuiteter i elektriskt fält. För att studera det, betrakta en punkt på en yta. Gör en liten låda kring punkten så att fältet är ungefär konstant på sidorna som inte rör ytan, och döpa varje sida 1 och 2. Inför även (enhets)normalvektorn  $\mathbf{n}_{12}$ . Gauss' lag ger oss, om bara tar med de nämnda sidorna, att elektriska fältets normalkomponent relativt ytan uppfyller

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{12}A - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

där  $A$  är sidornas yta. Positiv riktning för fältets normalkomponent är ut från ytan. Vid att låta lådan bli oändligt tunn kommer även de andra sidorna inte att ge något bidrag, varför det här måste stämma. Vi får därmed att

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Vi kan även betrakta en liten fyrkantig slinga på samma sätt, med två sidor parallella med ytan och två normala på ytan. Eftersom integralen av elektriska fältet kring en sluten kurva alltid är 0, får vi

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0,$$

där fältets komponenter ges med avseende på någon riktning. Eftersom denna slingan kan ha vilken som helst orientering så länge man har två parallella och två normala sidor, måste det gälla för alla tangentiella riktningar, vilket ger

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}.$$

Dessa två resultat kan sammanfattas som

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}_{12}.$$

**Kraften på en ytladdning** Kring en ytladdning är elektriska fältet diskontinuerligt, så hur beräknar man kraften på en sådan? Med hjälp av superposition kan elektriska fältet skrivas som en summa av bidrag från själva laddningen och allt annat. Termen från andra saker, som är den som ger kraften, är kontinuerlig i ytan eftersom man skulle kunna ta bort ytladdningen utan att ändra den. Vidare är fältet tillräckligt nära ytladdningen  $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}_{12}$ , som försvinner om man tar medelvärde. Alltså ges kraften av laddningen gånger medelvärdet av fältet på varje sida.

**Elektrostatisk potential** Med vår kunskap från vektoranalysen kan vi skriva

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\tau' \rho \vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\tau' \rho \frac{1}{R} \right).$$

Vi definierar därmed den elektrostatiska potentialen enligt

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} V.$$

Från vår definition ser vi att nollnivån för potentialen kan sättas arbiträrt, då det elektriska fältet (som är det som är fysikaliskt) inte ändras om potentialen ändras med en konstant. Vi brukar lägga nollnivån i oändligheten, vilket för ändliga laddningstätheter ger

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\tau' \rho \frac{1}{R}.$$

En konsekvens av detta är

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

**Potential och elektrisk spänning** Betrakta storheten  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ . Vi har

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_i dx_i = -\partial_i V dx_i = -dV.$$

Om vi nu jämför detta med den elektriska spänningen

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}$$

mellan två punkter (som är den välkända spänningen vi känner från kretsvärlden), kan vi se att detta blir

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dV = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2),$$

oberoende av vägen mellan punkterna. Om vi lägger potentialens referens i oändligheten, ser vi då att

$$V(\mathbf{r}_0) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_0} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E},$$

ett typ inverst påstående av  $\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V$ . Integrationsbanan parametriseras från  $\infty$  till  $\mathbf{r}_0$ , ett mistag jag gör lite för många gånger. Vi ser även från detta att

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}.$$

**Potential och arbete** Antag att du vill förflytta en laddning  $q$  i ett elektriskt fält. Den minsta kraften du måste verka med på laddningen för att göra detta är  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$ , eftersom du arbetar mot det elektriska fältet. Arbetet du gör då är

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = q(V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)).$$

Med andra ord är potentialskillnaden mellan två punkter lika med arbetet som måste göras för att förflytta en laddning från ena punkten till den andra per laddning.

**Entydighetssats för potentialen** Betrakta en region  $H$  med känd laddningstäthet. Inuti (men inte en del av)  $H$  finns tre regioner avgränsade av ytorna  $S_D$ ,  $S_N$  och  $S_Q$  (med normalvektorerna pekande in mot de avgränsade regionerna). På  $S_D$  är  $V = V_S$  känd. På  $S_N$  är  $\vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V = -\mathbf{E}_{\mathbf{n}}$  känd.  $S_Q$  är en perfekt ledare med känd total ytladdning  $Q$ . Vi vill försöka visa att elektriska fältet är entydigt i  $H$ .

För att visa detta, antag att vi har två lösningar  $V_1$  och  $V_2$  och bilda  $V_0 = V_1 - V_2$ . Då vet vi att  $\nabla^2 V_0 = 0$  i  $H$ ,  $V_0 = 0$  på  $S_D$  och  $S_Q$ ,  $\vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0 = 0$  på  $S_N$  och  $\int_{S_Q} dS \vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0 = \mathbf{0}$ . Detta stämmer eftersom

$$\int_{S_Q} da \vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0 = \int_{S_Q} da \sigma$$

enligt randvillkoret för elektriska fältet. Vi får därmed

$$\int_{S_D+S_Q+S_N} da V_0 \vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0 = \int_H d\tau V_0 \nabla^2 V_0 + \left| \vec{\nabla}V_0 \right|^2 = \int_H d\tau \left| \vec{\nabla}V_0 \right|^2.$$

På  $S_D$  och  $S_N$  är en av faktorerna i integranden på vänstersidan lika med 0, så vi behöver endast betrakta  $S_Q$ . Här har vi att  $V_0$  är konstant på ytan, vilket ger

$$\int_{S_Q} da V_0 \vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0 = V_0 \int_{S_Q} da \vec{\nabla}_{\mathbf{n}}V_0.$$

Gauss' lag ger att detta är 0 (även fast ytan har omvänd orientering, då Gauss' lag ändå bara innehåller laddningen i ytans inre), vilket implicerar

$$\vec{\nabla} V = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{0},$$

och beviset är klart.

**Randvillkor för potentialen** För att betrakta randvillkor för potentialen vid en ytladdning, kan man integrera elektriska fältet längs med en rak linje normalt på ytaddningen över ytan och låta linjen bli godtyckligt kort. Då fås randvillkoret för elektriska fältet i termer av potentialen som

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{n}_{12}} V_1 - \vec{\nabla}_{\mathbf{n}_{12}} V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

där  $\vec{\nabla}_{\mathbf{n}_{12}}$  är riktningsderivatan i normalriktningen från område 2 mot område 1.

**Poissons ekvation** Gauss' lag på differentialform kombinerad med definitionen av potentialen ger Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

**Laplace' ekvation i sfäriska koordinater** Genom att ställa upp Poissons ekvation i sfäriska koordinater på ett laddningsfritt domän som avgränsas av två sfäriska skal får man Laplace' ekvation. Den har allmän lösning på formen

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

där  $Y_{lm}$  är klotyttefunktionerna.  $A_{lm}$  bestäms av laddningarna utanför det yttre skalet och  $B_{lm}$  av laddningarna innanför det inre skalet.

Det gäller att

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi},$$

där  $P_l^m$  är Legendrepolytomen. I fall som är rotationssymmetriska med avseende på  $xy$ -planet kan lösningen därför förenklas till

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^0(\cos \theta).$$

**Anpassningsmetod** Betrakta ett fall likt fallet ovan, med rotationssymmetri kring  $z$ -axeln, där vi även känner  $V$  på  $z$ -axeln. Eftersom  $P_l(1) = 1$  och  $P_l(-1) = (-1)^l$  får vi längs  $z$ -axeln

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l |z|^l + \frac{B_l}{|z|^{l+1}} \right) \begin{cases} 1, & z > 0, \\ (-1)^l, & z < 0. \end{cases}$$

Detta kan jämföras med den kända lösningen för att identifiera koefficienterna i serien och utvidga lösningen.

**Elektrostatisk energi** Vi är nu intresserade av energin som krävs för att skapa en viss laddningsfördelning. Vi kommer därför beräkna energin som krävs för att transportera all laddningen från oändligheten och placera den på rätt sätt.

Vi börjar med att betrakta en samling laddningar som ska ligga på avstånd  $r_{ij}$  från varandra. Att placera första laddningen på rätt plats kräver inget arbete. Att sen placera ut andra laddningen kommer kräva att man arbetar mot elektriska fältet från första. Man måste alltså göra ett arbete

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$



På samma sätt måste laddning 3 motarbeta elektriska fältet från både 1 och 2. Det totala arbetet är därmed

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Eftersom  $r_{ij} = r_{ji}$  kan vi nu skriva om den inre summan genom att i stället summera över alla andra partiklar än  $i$ , och lägga till en faktor  $\frac{1}{2}$ . Vi får då

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Vid att ordna om faktorerna får vi

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i(\mathbf{r}_i),$$

där  $V_i$  är potentialen som laddning  $i$  känner av på grund av alla de andra laddningarna. Ett uttryck man hade kunnat gissa sig fram till från början.

Vi generaliserar vidare vår definition till kontinuerliga laddningsfördelningar som

$$W = \frac{1}{2} \int_V d\tau \rho V,$$

där  $V$  är en region som innehåller all laddning. Vi kan med hjälp av resultaten från tidigare skriva detta som

$$W = \frac{1}{2} \int_V d\tau V \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d\tau \vec{\nabla} \cdot (V \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \int_S d\mathbf{a} \cdot V \mathbf{E} + \int_V d\tau E^2 \right),$$

där  $S$  är ytan som omsluter  $V$ .

Om man tittar på den ursprungliga integralen, ger den inget bidrag där det inte finns laddning. Därför kan vi börja med att låta  $V$  vara exakt området där det finns laddning. Om vi gör  $V$  större, kommer den ursprungliga integralen att vara oändrad. Däremot kommer integralen av elektriska fältets belopp öka, så ytintegralen måste minska motsvarande. Att ytintegralen avtar kan man se eftersom ytan ökar som  $r^2$ , medan fältet avtar som  $\frac{1}{R^2}$  och potentialen som  $\frac{1}{R}$ . Vi kan nu repetera processen tills vi integrerar över hela rummet. Då försvinner ytintegralen, och kvar står

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d\tau E^2.$$

Det visar sig att om man använder resultatet för en laddningsfördelning på en diskret fördelning, får man inte samma svar. Detta är för att uttrycket för en diskret fördelning inte tar hänsyn till energin som krävs för att skapa punktladdningar till att börja med, vilket uttrycket för kontinuerliga fördelningar inkluderar. Denna finessen kom in i beräkningarna i övergången till kontinuerliga fördelningar, eftersom vi för diskreta fördelningar endast använde potentialen varje laddning känner på grund av alla andra. För kontinuerliga fördelningar är detta inte ett problem eftersom varje element har försvinnande liten laddning och därmed bidrar med försvinnande lite potential. För diskreta fördelningar gäller detta ej, dock.

**Perfekta ledare** En perfekt ledare har obegränsat med fria laddningar som kan röra sig i materialet. Från detta följer att

- $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  överallt inuti ledaren. Annars skulle någon av de fria laddningarna påverkas av fältet och röra sig sån att de kansellerade det.
- $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$  inuti ledaren. Därmed är alla fria laddningar på ytan.
- $V$  är konstant inuti ledaren.
- $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n$  precis utanför ledaren på grund av elektriska fältets randvillkor, alternativt eftersom tangentiella komponenter skulle transportera laddningar på ytan som skulle kansellera fältet.

**Kraften på en ledare** Betrakta en perfekt ledare. Randvillkoret för elektriska fältet ger

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}$$

precis utanför ytan. Då verkar en krafttäthet

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_n$$

på ytan. Detta motsvarar ett tryck utåt på laddaren - oberoende av vilken sorts ytladdning man har! I termer av elektriska fältet kan trycket skrivas som

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

**Kapacitans** Betrakta först två ledare med olika laddningar  $\pm Q$ . Man kan se av integraluttrycket för elektriska fältet att det är proportionellt mot  $Q$ . Eftersom potentialskillnaden mellan ledarna är en integral av elektriska fältet, är även denna proportionell mot  $Q$ . Vi definierar därmed systemets kapacitans som proportionalitetskonstanten mellan de två, alltså

$$Q = CV.$$

Denna beror enbart av systemets geometri.

Betrakta nu ett system av olika ledare, med var sin potential och laddning. Vi har även någon potentialreferens. Vi kan börja med att sätta alla potentialer förutom en till 0, och räkna ut alla  $Q_i$ . Vid att superponera alla dina resultat får du en mängd slutgiltiga samband på formen  $Q_i = C_{ij}V_j$ . Detta definierar kapacitansmatrisen. Man kan visa/argumentera för att matrisen är symmetrisk och positivt definit. Om man vill visa det, kan man göra en energibetraktning av tillföringen av en extra laddning till systemet, och jämföra energin om man först tillför laddningen och sen tillför ytladdning till ledarna för att höja potentialerna, eller ändrar ordningen, och använder elektrostatiske kraftens konservativitet.

**Energien för ett system av ledare** För ett system av ledare  $D_i$  har vi

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d\tau \rho V \\ &= \frac{1}{2} \sum \int_{D_i} da \sigma_i V_i \\ &= \frac{1}{2} \sum V_i \int_{D_i} da \sigma_i \\ &= \frac{1}{2} \sum V_i Q_i. \end{aligned}$$

Om vi använder kapacitansmatrisen får vi

$$W = \frac{1}{2} V_i C_{ij} V_j.$$

För en enda kondensator blir detta

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2C} Q^2.$$

**Speglingsmetoder** Vissa problem kan lösas med speglingsmetoder. Då kan man ersätta vissa komponenter av ett problem med andra på ett sådant sätt att randvillkor som ges i problemet fortfarande är uppfylla.

**Spegling och potentialen från två linjeladdningar** Vi kommer behöva lite standardlösningar för att använda när vi speglar problem. Vi betraktar därför först två oändligt långa parallella linjeladdningar med laddning  $\pm\lambda$  per längd separerade med ett avstånd  $2h$ . Problemet är tvådimensionellt, och vi inför  $\mathbf{s}$  som vektorn från punkten mitt emellan laddningarna till en godtycklig punkt i planet. Elektriska fältet från laddningen till höger, som vi döper nummer 1, ges av  $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_{\mathbf{s}}$ , där  $\mathbf{s}_1 = h\mathbf{e}_x$  och  $\mathbf{e}'_{\mathbf{s}}$  pekar i samma riktning som  $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$ . Vi definierar  $V = 0$  där  $\mathbf{s} = 0$  och får

$$V(\mathbf{s}) = - \int_0^{\mathbf{s}} d\mathbf{s}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\mathbf{s}'-\mathbf{s}_1|}\mathbf{e}'_{\mathbf{s}} = - \int_{-\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}-\mathbf{s}_1} d\mathbf{u}' \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 u'}\mathbf{e}'_{\mathbf{u}}.$$

Vi har rotationssymmetri i planet, och kan därmed välja en radiell riktning för integrationen, vilket ger

$$V(\mathbf{s}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{|-\mathbf{s}_1|} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}{h}.$$

Den totala potentialen är därmed

$$V(\mathbf{s}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|}.$$

Ekvipotentialytorna uppfyller  $V = V_0$ , vilket ger

$$\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1|} = e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}}.$$

Vi definierar  $u = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}$  och skriver om avstånden på vänstersidan för att få

$$\frac{(x+h)^2 + y^2}{(x-h)^2 + y^2} = e^{2u}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} x^2 + 2xh + h^2 + y^2 &= e^{2u}(x^2 - 2xh + h^2 + y^2), \\ x^2(1 - e^{2u}) + 2xh(1 + e^{2u}) + y^2(1 - e^{2u}) &= h^2(e^{2u} - 1), \\ x^2(e^{-u} - e^u) + 2xh(e^{-u} + e^u) + y^2(e^{-u} - e^u) &= h^2(e^u - e^{-u}), \\ -x^2 \sinh u + 2xh \cosh u - y^2 \sinh u &= h^2 \sinh u, \\ x^2 - 2xh \coth u + h^2 + y^2 &= 0, \\ x^2 - 2xh \coth u + h^2 \left( \coth^2 u - \frac{1}{\sinh^2 u} \right) + y^2 &= 0, \\ (x - h \coth u)^2 + y^2 &= \frac{h^2}{\sinh^2 u} \end{aligned}$$

Det är alltså en cirkel med centrum i  $h \coth u \mathbf{e}_x$  och radie  $a = \frac{h}{|\sinh u|}$ . Avstånden från cirkelns centrum till de två laddningarna är

$$d_1 = h|\coth u - 1|, \quad d_2 = h|\coth u + 1|.$$

Eftersom  $|\coth u| > 1$ , får vi

$$d_1 d_2 = h^2(\coth^2 u - 1) = \frac{h^2}{\sinh^2 u} = a^2.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en linjeladdning  $\lambda$  parallell med en ledande cirkulär cylindrisk yta med radien  $a$  och laddning  $-\lambda$  per längd, och avståndet från cylinderaxeln till linjeladdningen är  $d$ , kan cylinderytan ersättas med en linjeladdning  $\lambda_s = -\lambda$  ett avstånd  $d_s = \frac{a^2}{d}$  från cylinderaxeln.

**Spegling och potentialen från två punktladdningar** Betrakta två punktladdningar liggande på  $z$ -axeln, där den översta, döpt nummer 1, ligger i punkten  $h\mathbf{e}_z$  och den andra i origo. Problemet är cylindersymmetriskt, så vi inför cylinderkoordinater. Potentialen är då

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right).$$

Ekvipotentialytorna för en nollskild potential är komplicerade, men ekvipotentialytan för  $V = 0$  ges av

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} &= 0, \\ k &= \frac{q_1}{q_2} = -\frac{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \\ \rho^2(k^2 - 1) + k^2 z^2 &= (z-h)^2, \\ z^2(1 - k^2) - 2zh + h^2 &= \rho^2(k^2 - 1), \\ \rho^2 + z^2 - \frac{2zh}{1 - k^2} + \frac{h^2}{1 - k^2} &= 0, \\ \rho^2 + \left( z - \frac{h}{1 - k^2} \right) - \frac{h^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{h^2}{1 - k^2} &= 0, \\ \rho^2 + \left( z - \frac{h}{1 - k^2} \right) &= \frac{h^2 k^2}{(1 - k^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta är en sfär med centrum i  $\frac{1}{1-k^2}h\mathbf{e}_z$  och radius  $a = h \left| \frac{k}{1-k^2} \right|$ . Notera att det är en förutsättning att  $k < 0$ , alltså att laddningarna har olika tecken.

Om vi nu antar  $k^2 > 1$  ligger sfärens centrum under laddning 2. Avstånden från sfärens centrum till de två punktladdningarna är då

$$d_2 = \frac{1}{k^2 - 1}h, \quad d_1 = h + d_2 = \frac{k^2}{k^2 - 1}h.$$

Detta ger

$$d_1 d_2 = a^2, \quad k = -\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = -\frac{d_1}{a} = -\frac{a}{d_2}.$$

Speglingsstrategin är nu att om du har en punktladdning  $q$  ett avstånd  $d$  från centrum av en jordad ledande sfärisk yta med radien  $a$ , kan ledaren ersättas med en punktladdning  $q_s = -q\frac{a}{d}$  ett avstånd  $d_s = \frac{a^2}{d}$  från sfärens centrum (bort från punktladdningen).

## 4 Dipoler och dielektrika

**Elektriska dipolen** Betrakta två punktladdningar på en linje. Linjen går genom origo, och laddningarna ligger lika långa avstånd  $\frac{1}{2}d$  från origo. Potentialen i punkten  $\mathbf{r}$ , som ligger ett avstånd  $R_+$  respektive  $R_-$  från de två laddningarna, ges av

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-}.$$

Om  $r \gg d$  fås

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\mathbf{r}$  och linjen. Vi kan då skriva detta som

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Vi definierar nu dipolmomentet  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ , och får då

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Notera att vi kan skriva dipolmomentet som  $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}'_i$ .

**Ideala dipoler** En ideal dipol fås i gränsen för en dipol när  $d$  blir oändligt liten på ett sådant sätt att  $\mathbf{p}$  hålls konstant.

**Fältet från en dipol** Fältet från en dipol ges av

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\vec{\nabla} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

I nämnaren har vi

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p_i r_i \implies \partial_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p_i \implies \vec{\nabla} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{p}.$$

Vi får då

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^4} \vec{\nabla} r \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}).$$

**Dipolmoment för en laddningsfördelning** För en laddningsfördelning ges dipolmomentet av

$$\mathbf{p} = \int d\tau' \mathbf{r}' \rho.$$

**Förflyttning av koordinatsystem och dipolmoment** Vid förflyttning av origo en sträcka  $\mathbf{a}$  fås

$$\mathbf{p} = \int d\tau' \mathbf{r}' \rho = \int d\tau' (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) \rho = \mathbf{p}_0 - q\mathbf{a},$$

där subskriptet 0 indikerar ursprungliga koordinater. Alltså beror dipolmomentet av origos position om det finns en netto mängd laddning i systemet.

**Multipolutveckling** Vi vet att  $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$  överallt förutom där  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ . Genom att lägga vårt koordinatsystem så att  $\mathbf{r}'$  är parallell med  $z$ -axeln och definiera vinkeln mellan  $\mathbf{r}$  och  $\mathbf{r}'$  som  $\gamma$  fås

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \gamma), & r < r', \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^l} P_l(\cos \gamma), & r > r'. \end{cases}$$

Speciellt, på den positiva  $z$ -axeln är  $\gamma = 0$  och

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_{>} - r_{<}} = \frac{1}{r_{>}} \left( 1 - \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{-1} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}},$$

där  $r_{<} = \min(r', r)$  och  $r_{>} = \max(r', r)$ . Vi utvidgar därmed lösningen till

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma).$$

Vi söker nu potentialen utanför en sfär som omsluter en rumladdning. Då fås  $r_{<} = r'$ ,  $r_{>} = r$  och

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d\tau' (r')^l \rho P_l(\cos \gamma') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l.$$

De olika  $V_l$  kommer ge oss termer som ser ut som olika multipoler, och vi vill nu studera dem. Vi noterar först att om  $e_i$  respektive  $e'_i$  är komponenterna av  $\mathbf{e}_r$  respektive  $\mathbf{e}_{r'}$ , kan vi skriva

$$\cos(\gamma) = e_i e'_i, \quad \cos^2(\gamma) = e_i e'_i e_j e'_j, \quad 1 = e_i e_i = e_i e_j \delta_{ij}.$$

För  $l = 0$  får vi

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d\tau' \rho,$$

alltså ett bidrag motsvarande en punktladdning med samma totala laddning i origo. För  $l = 1$  fås

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int d\tau' r' \rho P_1(\cos \gamma) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int d\tau' r' \cos \gamma \rho \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int d\tau' r' e_i e'_i \rho \\ &= \frac{e_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int d\tau' r'_i \rho \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot \int d\tau' \rho \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

alltså ett bidrag motsvarande en dipol med samma totala dipolmoment i origo. För  $l = 2$  fås

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int d\tau' r'^2 \rho P_2(\cos \gamma) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \int d\tau' r'_i r'_i \rho (3 \cos^2(\gamma) - 1) \\ V_2 &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \int d\tau' r'_k r'_k \rho (3 \cos^2(\gamma) - 1) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \int d\tau' r'_k r'_k \rho (3 e_i e'_i e_i e'_i - e_i e_j \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} e_i e_j \int d\tau' r'_k r'_k \rho (3 e'_i e'_j - \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} e_i e_j \int d\tau' \rho (3 r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}). \end{aligned}$$

Vi definierar nu kvadrupolmomentstensorerna

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d\tau' \rho (3 r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}),$$

vilket ger

$$V = \frac{e_i Q_{ij} e_j}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Detta är kvadrupolbidraget.

Allmänt blir det  $l$ :te bidraget på formen

$$V_l = \frac{Q_{i_1 \dots i_l} e_{i_1} \dots e_{i_l}}{4\pi\epsilon_0 r^{l+1}}.$$

**Additionssatsen** Hellre än att hantera komponenterna av kvadrupolmomentstensor, använder vi en sats som säger

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Då kan vi skriva

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} V_l, \quad V_l = \frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0 r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

där  $q_{lm}$  är det sfäriska multipolmomentet

$$q_{lm} = \int d\tau' \rho(r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Varje  $V_l$  har alltså  $2l+1$  oberoende komponenter, vilket på grund av multipolmomenttensorernas symmetri och spårlöshet är lika med antalet oberoende komponenter i multipolmomentstensor.

**Kraft på en laddningsfördelning** Betrakta en laddningsfördelning i ett yttre måttligt varierande elektriskt fält. Kraften på laddningsfördelningen ges då av

$$\mathbf{F} = \int d\tau' \rho \mathbf{E}.$$

Vi vill nu approximera elektriska fältet i laddningsfördelningen vid att utveckla den kring en referenspunkt  $\mathbf{r}_0$ . Komponentvis har vi

$$E_i \approx E_{i,0} + (r_j - r_{j,0}) \partial_j E_i,$$

varför

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}$$

och

$$\mathbf{F} \approx \int d\tau' \rho \left( \mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} \right).$$

Vidare, under antagandet att fältet varierar måttligt kan alla derivator antas vara konstanta, vilket ger

$$\mathbf{F} \approx \int d\tau' \rho \mathbf{E}_0 + \int d\tau' \rho ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} = Q \mathbf{E}_0 + (\mathbf{p} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E},$$

där dipolmomentet mäts relativ  $\mathbf{r}_0$ . Att dra ut elektriska fältet i andra termen från integralen är helt okej - eftersom derivatorna inte varierar i laddningsfördelningen, kan man tänka sig att integrationen skapar en operator som sedan får verka på fältet.

**Vridmoment på en laddningsfördelning** På en punktladdning har vi

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = q \mathbf{r} \times \mathbf{E}.$$

För en laddningsfördelning fås då, relativt en referenspunkt  $O$ , vridmomentet

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int d\tau' \rho \mathbf{r} \times \mathbf{E} \\ &\approx \int d\tau' \rho ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Vi försummar nu termer av andra ordningen i  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  och får

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int d\tau' \rho((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{E}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E})) \\ &= \left( \int d\tau' \rho((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \right) \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0 \times \int d\tau' \mathbf{E}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla} \mathbf{E} \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}.\end{aligned}$$

**Polarisation** Polarisationen  $\mathbf{P}$  uppfyller

$$\mathbf{p} = \int d\tau' \mathbf{P}.$$

Detta fältet uppfyller inga speciella randvillkor, och är allmänt ej rotationsfritt.

**Polariserbarhet** Polariserbarheten  $\alpha$  uppfyller

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}.$$

**Fält och potential från polarisation** Från ett litet rymdelement fås

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau', \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}.$$

Elektriska fältet kommer ha en singularitet som beter sig som  $\frac{1}{R^3}$ . Denna kommer inte upphävas av volymelementet, och kräver specialbehandling. Vi löser detta genom att använda att

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{R} = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R,$$

vilket ger

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R^2} - \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{a}' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P},\end{aligned}$$

vilket motsvara coulombpotentialen från två ekvivalenta laddningsfördelningar

$$\rho_b = -\vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P}, \quad \sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}.$$

Vi kunde ta bort primmet från divergensoperatoren därför att divergensen kommer vara 0 där  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ . Vi kalla dessa för bundna laddningsfördelningar. Nu kan vi beräkna elektriska fältet som

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{\sigma_b}{R^2} \mathbf{e}_R + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho_b \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

**Introduktion av D-fältet** Gauss' lag på integralform ger oss nu

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{-\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho_f}{\epsilon_0},$$

där  $\rho_f$  är den fria laddningstätheten. Detta implicerar

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f,$$

vilket uppmanar oss att definiera

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$



**Randvillkor för D-fältet** Vi kan visa att

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_f, (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \times \mathbf{n}_{12} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \times \mathbf{n}_{12}.$$

**Linjära dielektrika** Linjära dielektrika uppfyller

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

för måttliga fältstyrkor.  $\chi_e$  är dielektrikumets elektriska susceptibilitet.

**D-fält i linjära dielektrika** I ett linjärt dielektrikum fås

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

$\varepsilon_r$  är dielektrikumets relativa permittivitet, och  $\varepsilon$  är dets permittivitet.

**Elektrisk energi och linjära dielektrika** Vi är intresserade av att studera energin för att skapa ett system som innehåller linjära isotropa dielektrika. För att göra detta, placera först ut alla dielektrika, och ta sedan med in den fria laddningen en bit i taget. Om man tar med en bit laddning  $d\rho_f$ , kräver det energin

$$dW = \int d\tau V d\rho_f.$$

Superposition ger  $d\rho_f = \vec{\nabla} \cdot (d\mathbf{D})$ , där  $d\mathbf{D}$  är ändringen i D-fältet. Detta ger

$$\begin{aligned} dW &= \int d\tau V \vec{\nabla} \cdot (d\mathbf{D}) \\ &= \int d\tau \vec{\nabla} \cdot (V d\mathbf{D}) - d\mathbf{D} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= \int d\mathbf{a} \cdot V d\mathbf{D} + \int d\tau d\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

På samma sätt som tidigare skickar vi integrationsområdets rand till oändligheten, vilket ger att ytintegralen försvinner och

$$dW = \int d\tau d\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

För ett linjärt dielektrikum har vi

$$d\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = d(\varepsilon E^2) = 2\varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = 2 d\mathbf{D} \cdot \mathbf{E},$$

vilket ger

$$dW = d\left(\frac{1}{2} \int d\tau \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\right),$$

och integration över tillförd laddning ger

$$W = \frac{1}{2} \int d\tau \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

Hur skiljer detta sig från uttrycket vi fick utan att betrakta dielektrika? Jo, det förra uttrycket ger energin för att placera ut alla laddningar, både bundna och fria, i sin slutgiltiga position. Detta kommer inte inkludera energin för att ompolarisera dielektrikumet som är utplacerad. Det nya uttrycket inkluderar inte energin för att placera ut de bundna laddningarna, men denna kommer vara 0 eftersom dielektrikumet är opolariserad till att börja med och vi behandlar dielektrikumet som bestående av ideala dipoler. Därifrån kommer dielektrikumet att ge en respons när fri laddning tillförs, och att skapa denna responsen kräver en viss energi som bara inkluderas i det nya uttrycket. En illustration av detta ges i exemplet under.

**Energi för linjära dielektrika** Betrakta en atom, approximerad som en punktladdning  $q$  och en laddning  $-q$  jämnt fördelad över ett klot med radie  $a$ . Det negativt laddade molnet skapar ett elektriskt fält

$$\mathbf{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r}, \quad r < a.$$

Kraften på laddningen i mitten blir då

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{\nabla} \frac{1}{2} r^2.$$

Arbetet som krävs för att förflytta laddningen i mitten från centrum blir då

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2 r^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{-q}.$$

Om nu atomen är i ett yttre elektriskt fält  $\mathbf{E}$ , kommer det elektriska fältet att förflytta laddningen i centrum. Jämvikt fås när  $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{-q}$ , och arbetet som görs för att förflytta laddningen i mitten är då

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Med detta argumentet i bakgrunden ställer vi upp energin i ett dielektrikum som

$$W = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

I tillägg har vi det övriga bidraget för att skapa det elektriska fältet, och totala energin ges av

$$W = \frac{1}{2} \int dV (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

**Krafter på ett dielektrikum** Betrakta ett dielektrikum någonstans i närheten av två perfekta ledare med laddning  $\pm Q$  på de respektiva och spänningsskillnad  $V$  mellan dem. Ledarna kan antingen vara isärkopplade eller kopplade ihop med ett batteri som upprätthåller en konstant spänningsskillnad. Systemet har en energi  $W_e$ . Dielektrikumets position beskrivs av dets geometri och en referensvektor  $\mathbf{r}$  (till exempel till dets geometriska centrum). Att beräkna elektriska fältet är allmänt svårt, men vi ska försöka undveka detta med ett trick.

Betrakta dielektrikumet först. Om det förflyttas en sträcka  $d\mathbf{r}$ , görs ett arbete  $dW$  av kraften  $\mathbf{F}$ . Kraftjämvikten ger

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0},$$

och därmed

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}.$$

och därmed

$$\mathbf{F}_e = -\vec{\nabla} W.$$

Betrakta första fallet först. Om dielektrikumet förflyttas en sträcka  $d\mathbf{r}$ , görs ett arbete  $dW$  av kraften  $\mathbf{F}$ , som måste vara lika med totala ändringen i elektrisk energi. Detta ger

$$dW = dW_e.$$

Därmed gäller att

$$\mathbf{F}_e = -\vec{\nabla} W_e = -\vec{\nabla} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \vec{\nabla} C = \frac{1}{2} V^2 \vec{\nabla} C.$$

Betrakta nu det andra fallet. Om spänningen mellan ledarna hålls konstant, kommer det totala arbetet på systemet komma både från dielektrikumets translation i elektriska fältet och arbetet som krävs för att

transportera laddning mellan ledarna för att hålla spänningsskillnaden mellan dem konstant, som båda är positiva bidrag. Vi får

$$dW = -V dQ + dW_e.$$

Samtidigt gäller det att  $dW_e = \frac{1}{2}V dQ$ , så

$$dW_e = -dW.$$

Om vi jämför detta med kraftjämvikten på dielektrikumet, ger detta

$$\mathbf{F}_e = \vec{\nabla} W_e = \frac{1}{2} V^2 \vec{\nabla} C.$$

**Moment på ett dielektrikum** Genom att göra en liknande analys som den ovan fås

$$\mathbf{N}_e = \pm \partial_\phi W_e \mathbf{e}_z,$$

där  $+$  och  $-$  är fallen där  $Q$  respektive  $V$  är konstant.

## 5 Magnetostatik

**Ström** Ström definieras som  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

**Strömtäthet** I fall där strömmen inte flödar längs med linjer utan längs ytor eller fritt i rummet definierar vi strömtätheten  $\mathbf{J}$  som vektorfältet som beskriver flödet av laddningar. Strömtäthetens belopp ges av  $J = \rho v$ , där  $\mathbf{v}$  är hastighetsfältet för laddningarna.

**Kontinuitetsekvation för strömtätheten** Strömtätheten uppfyller

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0.$$

**Kraft på strömslingor** Betrakta två slingor  $C$  och  $C'$ . Genom varje slinga går en ström  $I$  respektive  $I'$  i samma riktning som kurvans orientering. Experiment har visat att kraften på  $C$  från  $C'$  ges av

$$\mathbf{F} = \int_C d\mathbf{r} I \times \left( \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{C'} d\mathbf{r}' \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \right)$$

där  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

**Magnetiska fältet** Genom att definiera det magnetiska fältet från  $C'$  i punkten  $\mathbf{r}$  som

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{C'} d\mathbf{r}' \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$$

fås

$$\mathbf{F} = \int_C d\mathbf{r} I \times \mathbf{B}.$$

**Magnetfält från strömtätheter** För strömmar fördelade i rummet eller på en yta kan vi utvidga definitionen av magnetiska fältet till att bli

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int da' \mathbf{J} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \text{ eller } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{J} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Vi skriver gärna integrationselementen, som innehåller strömmen och differetialen, som  $d\mathbf{C}$ . Även ytströmmar och linjeströmmar kan skrivas som volymströmmar.

**Potential för magnetfältet** Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{J} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{J} \times \vec{\nabla} \frac{1}{R} \\ &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \mathbf{J} \right).\end{aligned}$$

Rotationsoperatoren kan tas utanför integrationen då den verkar på koordinater som det ej integreras över. Vi definierar då vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \mathbf{J},$$

och har då

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

**Entydighet för vektorpotentialen** Vektorpotentialen kan även definieras som

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \mathbf{J} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

där  $\Lambda$  är en godtycklig funktion. Eftersom gradienter ej har rotation, kommer denna vektorpotentialen att ge samma magnetfält. Vi kommer oftast sätta  $\Lambda = 0$ .

**Magnetfältets divergens** Eftersom  $\mathbf{B}$  är rotationen av en vektorpotential, gäller det att

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

**Vektorpotentialens divergens** Vi har

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} &= \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \mathbf{J} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{J} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{J} - \vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{R} \mathbf{J} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{a}' \cdot \frac{1}{R} \mathbf{J}.\end{aligned}$$

I elektrostatiska fall är alla laddningar statiska, varför den första termen ej ger något bidrag. Genom att utvidga integrationsområdet till hela rummet som tidigare fås

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0.$$

**Magnetiskt flöde** Det magnetiska flödet definieras som

$$\Phi = \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}.$$

Med hjälp av Stokes' sats fås

$$\Phi = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}.$$

Detta blir alltid 0 genom en sluten yta.

**Vektorpotentialens laplacian** På samma sätt som för elektriska potentialen fås

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

**Magnetfältets rotation** Vi har

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

**Ampères cirkulationslag** Strömmen genom en yta ges av

$$I = \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \int d\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}.$$

**Randvillkor för magnetfältet** Som med elektriska fältet betraktar vi magnetfältet nära en ytströmtäthet. Kring denna lägger vi en yta och beräknar flödet genom den när ytans tjocklek blir liten. Detta ger

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0.$$

Vidare kan vi skriva

$$\int d\tau \mu_0 \mathbf{J} = \int d\tau \vec{\nabla} \times \mathbf{B}.$$

Med indexräkning fås

$$\left[ \int d\tau \vec{\nabla} \times \mathbf{B} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \int d\tau \partial_j B_k = \varepsilon_{ijk} \int da_j B_k = \left[ \int d\mathbf{a} \times \mathbf{B} \right]_i.$$

Detta ger

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Ett motsvarande bevis kan även göras med Ampères lag för en liten strömslinga.

## 6 Magnetiska dipoler och magneter

**Magnetiskt dipolmoment för en slinga** Betrakta en strömslinga  $C$  som bär en ström  $I$ . Vi söker vektorpotentialen på stort avstånd från slingan. Det exakta uttrycket ges av

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C d\mathbf{l}' \frac{I}{R}.$$

Om  $C$  omkransar en yta  $S$ , fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{a} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{a} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Vid stora avstånd fås

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( I \int_S d\mathbf{a} \right) \times \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r,$$

där vi har definierat det magnetiska dipolmomentet

$$\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{a} = I\mathbf{S}.$$

Igen har vi definierat slingans vektorarea  $\mathbf{S}$ .

Hur ska man välja vektorarean? Tänk dig att  $C$  är randen till två olika ytor  $S_1$  och  $S_2$ , som tillsammans innesluter området  $V$ . Detta ger

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \int_{S_1} d\mathbf{a} - \int_{S_2} d\mathbf{a} = \int_{S_1+S_2} d\mathbf{a} = \int_V d\tau \vec{\nabla} 1 = \mathbf{0},$$

och därmed spelar inte valet roll.

**Magnetiskt dipolmoment för en allmän strömtäthet** För att studera en allmän strömtäthet, vill vi dela den upp i slingor. Betrakta då konen med spets i origo, rand  $C$  och  $\mathbf{r}$ , som ligger på  $C$ , som generatris. För denna är ytelementet  $d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ , vilket ger

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I \int_S d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \int_C \mathbf{r}' \times I d\mathbf{l}'.$$

Vi generaliserar detta genom att ersätta  $I d\mathbf{l}'$  med  $\mathbf{J} d\tau'$  och integrera över resultatet för varje lilla slinga för att få

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d\tau' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}.$$

**Dipolmomentets beroende av origo** Om vi förflyttar vårt koordinatsystem fås

$$\mathbf{m}_O = \frac{1}{2} \int d\tau' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{J} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_O \times \int d\tau' \mathbf{J}.$$

Vi har

$$\int d\tau' J_i = \int d\tau' \mathbf{J} \cdot \vec{\nabla}' r'_i = \int d\tau' \vec{\nabla}' \cdot (r'_i \mathbf{J}) - r'_i \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{J}.$$

Vi använder nu att vi arbetar med magnetostatik för att ta bort sista termen, vilket ger

$$\int d\tau' J_i = \int d\tau' \vec{\nabla}' \cdot (r'_i \mathbf{J}) = \int d\mathbf{a} \cdot r'_i \mathbf{J}.$$

Slingan förutsätts vara ändlig, och då behöver vi bara integrera över en yta som inneslutar den. På den ytan är  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , vilket ger att integralen av komponenten blir 0, och slutligen

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{m}.$$

**Magnetiska fältet från en dipol** Vi får

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{3}{r^4} \vec{\nabla} r \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{3}{r^4} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{r}) \right) \\
 &= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -3\mathbf{e}_r \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r) + \frac{1}{r^3} (3\mathbf{m} - \mathbf{m}) \right) \\
 &= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} (-3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{m} + 3 \times (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + 2\mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} (3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{m}).
 \end{aligned}$$

**Kraft på en magnetisk dipol** Kraften på en strömslinga  $C$  ges av

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\
 &= I \int_S (d\mathbf{a} \times \vec{\nabla}') \times \mathbf{B} \\
 &= I \int_S d\mathbf{a} \vec{\nabla}' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_n) - \mathbf{e}_n \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{B}.
 \end{aligned}$$

Andra termen är 0. Första termen ger komponentvis

$$F_i = I \int_S d\mathbf{a} \partial'_i (B_j n_j).$$

Vi antar att magnetfältet varierar måttligt över slingan, och approximerar derivatornas värde i mittpunkten, varför den faktorn kan tas utanför integralen. Detta ger

$$F_i = I \partial_i B_j \int_S d\mathbf{a}_j = \partial_i (B_j I a_j),$$

och slutligen

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

Det här var oklart, så vi testar ett annat sätt: Skriv

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B},$$

där derivatan av  $\mathbf{B}$  antas vara konstant. Detta ger

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_0 + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \\
 &= I \left( \int_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}_0 + I \left( \int_C d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \right) - I \left( \int_C d\mathbf{l} \right) \times (\mathbf{r}_0 \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \\
 &= I \left( \int_C d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \right).
 \end{aligned}$$

På indexform fås

$$\begin{aligned}
F_i &= I \int_C dl_j \varepsilon_{ijk} [(\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}]_k \\
&= I \int_C dl_j \varepsilon_{ijk} r_m \partial_m B_k \\
&= \varepsilon_{ijk} I \partial_m B_k \int_V dl_j r_m \\
&= \varepsilon_{ijk} I \partial_m B_k \int_S da_b \varepsilon_{jbc} \partial_c r_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jbc} \delta_{cm} I \partial_m B_k \int_S da_b \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{cjb} m_b \partial_c B_k \\
&= (\delta_{ic} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{kc}) m_b \partial_c B_k \\
&= m_k \partial_i B_k - m_i \partial_k B_k \\
&= \partial_i m_k B_k - m_i \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B},
\end{aligned}$$

vilket slutligen ger

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

**Vridmoment på en slinga** Vridmomentet ges av

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{F} \\
&= I \int_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\
&= I \int_C (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}) \mathbf{B}.
\end{aligned}$$

Vi approximerar fältet till att vara konstant och lika med fältet i mitten, vilket ger

$$\mathbf{B} \int_C (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}) = \mathbf{B} \int_S d\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= I \int_C d\mathbf{l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \\
&= I \int_S d\mathbf{a} \times \vec{\nabla} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \\
&= I \int_S d\mathbf{a} \times \mathbf{B} \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{B}.
\end{aligned}$$

**Magnetisering** Magnetiseringen  $\mathbf{M}$  uppfyller

$$\mathbf{m} = \int d\tau' \mathbf{M}.$$



I en atom har elektronerna omloppstid

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

vilket ger strömmen

$$\mathbf{I} = -\frac{e}{T}\mathbf{e}_\phi = -\frac{ev}{2\pi r}\mathbf{e}_\phi.$$

Dessa ger då magnetiska momentet

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times I \, d\mathbf{r} = -\frac{1}{2}erve\mathbf{e}_z.$$

**Vektorpotential från magnetisering** Vi har

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R^2} \mathbf{M} \times \mathbf{e}_R.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \mathbf{M} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \times \mathbf{M} - \vec{\nabla}' \times \left( \frac{1}{R} \mathbf{M} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \times \mathbf{M} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{a}' \times \frac{1}{R} \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Detta motsvarar magnetiska fältet från en volymström

$$\mathbf{J}_{bv} = \vec{\nabla}' \times \mathbf{M}$$

och en ytström

$$\mathbf{J}_{bs} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n.$$

**Multipolutveckling av vektorpotentialen** Vi har

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta'),$$

vilket för en strömslinga ger

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{l} \frac{I}{R} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int d\mathbf{l}' \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta') \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d\mathbf{l}' r'^l P_l(\cos \theta'). \end{aligned}$$

Den första termen ges av

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^1} \int d\mathbf{l}' P_0(\cos \theta') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^1} \int d\mathbf{l}' = \mathbf{0}$$

för en sluten strömslinga. Inte oförväntad, då vi inte känner till magnetiska monopoler. Den andra termen ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int d\mathbf{l}' r'^1 P_1(\cos \theta') \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int d\mathbf{l}' r' \cos \theta' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int d\mathbf{l}' \mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \times I \int d\mathbf{a}',\end{aligned}$$

vilket motsvarar en dipolterm. Vidare skulle man kunna skriva upp kvadrupoltermen också.

**$H$ -fältet** Ampères lag ger

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Med resultatet ovan fås

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{\text{fri}} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{M}, \\ \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{J}_{\text{fri}}.\end{aligned}$$

Vi definierar då

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M},$$

vilket ger

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{fri}}.$$

**Ampères lag för  $H$ -fältet** Vi får

$$I_{\text{fri}} = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}.$$

**Linjära magnetiserbara material** Betrakta ett material som uppfyller

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mathbf{B}.$$

Dessa uppfyller

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\ \mathbf{M} &= \chi_m (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\ \mathbf{M} &= \frac{\chi_m}{1 - \chi_m} \mathbf{H} = \chi_m^H \mathbf{H}.\end{aligned}$$

Detta ger slutligen

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m^H) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H},$$

där  $\mu_r = 1 + \chi_m^H$  kallas den relativa permeabiliteten och  $\mu$  kallas permeabiliteten.

**Klassificering av magnetiska material** Det finns olika sorters magnetism i material. Bland dessa är:

- diamagnetiska material, med  $\chi_m < 0$ , typiskt kring  $-1 \cdot 10^{-5}$ .
- paramagnetiska material, med  $\chi_m > 0$ , typiskt kring  $1 \cdot 10^{-4}$ .
- ferromagnetiska material, med  $\chi_m \gg 1$ . Dessa är dock ofta icke-linjära.

**Randvillkor för  $H$ -fältet** I en gränssyta fås

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \cdot \mathbf{n}_{12}, \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mu_0 \mathbf{J}_f.$$

**Ömsesidig induktans** Betrakta två strömslingor  $C_1$  och  $C_2$ . En ström  $I_1$  ger ett magnetiskt flöde  $\Phi_{21}$  genom  $C_2$ . Vi har att

$$\Phi_{12} = \int_{C_2} d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{A} = \int_{C_2} d\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} d\mathbf{l}_1 \frac{1}{R} = M_{21} I_1,$$

där  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  och  $M_{21}$  är  $C_2$ :s ömsesidiga induktans från  $C_1$ . Med andra ord:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} d\mathbf{l}_2 \cdot \int_{C_1} d\mathbf{l}_1 \frac{1}{R}.$$

Det gäller att  $M_{12} = M_{21}$ .

**Egeninduktans** Om det går en ström i en slinga induceras även ett magnetiskt flöde från slingas egna fält. Vi döper denna  $M_{11} = L_1$ , och har  $\Phi_{11} = L_1 I_1$ .

**Induktansmatris** Om man har ett problem med  $n$  strömslingor, får man

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j,$$

som kan skrivas som ett matrisproblem som involverar induktansmatrisen  $M$ .

**Krafter på magneter**

## 7 Lite om elektronik

**Ledningsförmåga** Fria laddningar kan transporteras av krafter per laddning. Om det i ett ämne finns en krafttäthet  $\mathbf{f}$  ger denna alltså upphov till en inducerad strömtäthet. Vi antar att denna är linjär och skriver

$$\mathbf{J}_i = \sigma_{ij} \mathbf{f}_j,$$

där  $\sigma$  är ledningsförmågan. Den har enhet  $\text{S m}^{-1}$  eller  $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . En perfekt ledare har oändlig (och diagonal) sådan.

**Resistans och Ohms lag** Betrakta ett batteri (en ideal spänningskälla) som är kopplad till två ideala ledare. De ideala ledarna har potential  $V_+$  respektive  $V_-$ , och är förbundna av ett material med ledningsförmåga  $\sigma$ . I det ledande området är  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Om kontaktytan mellan det ledande området och ledarna är  $S_+$  respektive  $S_-$  fås

$$U = V_+ - V_- = - \int_{S_-}^{S_+} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad I = \int_{S_-} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = - \int_{S_+} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}.$$

Vägintegralen för spänningen kan tas för att vara mellan två godtyckliga punkter på ytorna. Vi definierar (av någon anledning) nu det ledande områdets resistans som

$$R = \frac{U}{I}.$$

**Randvillkor mellan ledare** För att bevara  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$  fås kravet

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0.$$

Randvillkoret för elektriska fältet ger även

$$\mathbf{n}_{12} \times (\sigma_1^{-1} \mathbf{J}_1 - \sigma_2^{-1} \mathbf{J}_2) = \mathbf{0}.$$

**Effektutveckling och Joules lag** Betrakta en punktladdning  $q$ . På denna utråder det elektriska och magnetiska fältet arbetet

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Då tillförs  $q$  effekten

$$P = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}.$$

Betrakta nu en volymström  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ . Ett litet element i detta tillförs effekten

$$dP = \rho d\tau \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = d\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Vi kan nu införa effekttätheten

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Denna integreras över ledarens volym för att ge

$$\begin{aligned} P &= \int d\tau p \\ &= \int d\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \\ &= - \int d\tau \mathbf{J} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= - \int d\tau \vec{\nabla} \cdot (V\mathbf{J}) - V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} \\ &= - \int d\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J}. \end{aligned}$$

Om det ledande området är omringad av en isolator har  $\mathbf{J}$  ingen normalkomponent där, och

$$\begin{aligned} P &= - \int_{S_+} d\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J} - \int_{S_-} d\mathbf{a} \cdot V\mathbf{J} \\ &= (V_+ - V_-)I, \end{aligned}$$

alltså

$$P = UI.$$

**Elektromotorisk kraft** Betrakta en smal resistiv slinga med tvärsnitt  $A$  som beskrivs av en naturlig rymdkoordinat  $l$ . Om slingan för strömmen  $I$  fås

$$\mathbf{J} = \frac{I}{A} \mathbf{e}_l = \sigma \mathbf{f}.$$

Detta ger

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{A} \sigma^{-1} dl.$$

Om vi jämför detta med resultatet för ett cylindriskt motstånd fås

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = I dR.$$

Resistansen hos ett kort segment i slingan är alltså

$$dR \frac{dl}{A\sigma}.$$

Vi får nu

$$\int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{f} = I \int dR = IR.$$

För att få en ström krävs det alltså att

$$\mathcal{E} = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{f}$$

är nollskild. Vi definierar  $\mathcal{E}$  som den elektromotoriska kraften.

## 8 Grunderna i elektrodynamik

**Lite om kvasistatiska fält** Vi kommer här betrakta kvasistatiska fall, alltså fall där  $\rho$  och  $\mathbf{J}$  ändras långsamt. I såna fall kommer vi försöka bilda en dynamisk teori genom att extrapolera Biot-Savarts och Coulombs lagar trivialt, fast nu med integration av tidsberoende källor. Notera att det totala elektriska fältet även får en extra term från ändringen av magnetiska fältet, som vi kommer se.

**Elektromagnetisk induktion** Betrakta en strömslinga  $C$  som rör sig godtyckligt och ändrar form under en liten tid  $dt$ . Vi är nu intresserade av ändringen i magnetiska flödet

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t+dt) - \int_{S(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) \right).$$

Vi serieutvecklar magnetfältet med avseende på tid (den följande variationen av koordinater tas med i det faktum att vi integrerar över olika ytor) för att få

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int_{S(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) + dt \int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B}(t) \right).$$

Låt nu kurvan vid  $t$  och  $t + dt$  förbindas av ytan  $S_0$ . Då fås

$$\int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int_{S(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) + \int_{S_0} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) = \int_V d\tau \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

där vi har lagt på ett minustecken för att ändra orienteringen på ena ytan. Om varje punkt på  $C$  rör sig med en hastighet  $\mathbf{v}$  fås

$$\int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) - \int_{S(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(t) = - \int_{C(t)} d\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt).$$

Vi har

$$\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = B_i \varepsilon_{ijk} dl_j v_k = dl_j \varepsilon_{jki} v_k B_i = d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Detta ger slutligen

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t+dt)} d\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B}(t) - \int_{C(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

**Rörlig slinga i statiskt fält** Betrakta fallet då en slinga rör sig i ett statiskt fält. Vi får då

$$\int_{C(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Vi känner igen vänstra termen som elektromotoriska kraften, alltså linjeintegralen av kraft per laddning över slingan, och får

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

**Varierande magnetiskt fält och fältlagar** Betrakta en statisk strömslinga i ett varierande magnetiskt fält. Michael Faraday upptäckte att även en sån upplever en kraft. Hans hypotes var att detta berodde på att det inducerades en elektromotorisk spänning på grund av ett elektriskt fält. Mer specifikt,

$$\int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\int_S d\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B}(t).$$

Maxwell generaliserade detta genom att ta bort den fysikaliska slingan och i stället betrakta en integrationsbana i rummet. Om Faradays hypotes stämde, skulle Stokes' sats ge

$$\int_S d\mathbf{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t)) = 0.$$

Om integrationsbanan är godtycklig, ger det

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t) = \mathbf{0}.$$

Detta är en dynamisk fältlag för det elektriska och magnetiska fältet.

**Elektriska fältets nya term** Vi ser att elektriska fältet har nollskild rotation i dynamiken, så vi delar upp det i en rotationsfri del och en divergensfri del. Om vi nu tittar på den divergensfria delen, fås

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \int dV \partial_t \mathbf{B} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$$

i analogi med Biot-Savarts lag. Den rotationsfria har redan beskrivits.

**Potentialer för dynamiska fält** Vi har att

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}(t) = \vec{\nabla} \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

och därmed måste

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}.$$

Med generaliseringen av  $\mathbf{A}$  fås

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R} \partial_t \mathbf{J}.$$

Vi ser då att i dynamiken ges sambandet mellan fält och potentialer av

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \mathbf{A}.$$

**EMK från induktans** Vi får i ett system med  $n$  slingor

$$\mathcal{E}_i = - \sum_j M_{ij} \frac{dI_j}{dt} = -L_i \frac{dI_i}{dt} + \mathcal{E}_{\text{övriga}}.$$

Vi kan ställa upp detta med hjälp av egeninduktansen som

$$\frac{dI_i}{dt} + \frac{I_i}{R_i L_i} = \frac{\mathcal{E}_{\text{övriga}}}{L_i}.$$

**Magnetisk energi** Den magnetiska energin  $W_m$  är arbetet som krävs för att starta en strömkälla  $\mathbf{J}$ . Magnetiska fältet gör inget arbete i statiska fall, och därmed kan vi endast betrakta magnetisk energi i dynamiken.

Under igångsättningen finns ett inducerat elektriskt fält  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$ . För att upprätthålla  $\mathbf{J}$  mot det elektriska fältet tillförs effekten

$$P = - \int d\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \int d\tau \mathbf{J} \cdot \partial_t \mathbf{A}.$$

Med Ampères lag skriver vi detta som

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\mu_0} \int d\tau (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_t \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int d\tau \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times (\partial_t \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} \int d\tau \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned}$$

När vi utvidgar integrationsvolymen mot oändligheten försvinner ytintegralen, och kvar står

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \int d\tau B^2.$$

Därmed fås

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int d\tau B^2,$$

som alternativt kan skrivas som

$$W_m = \frac{1}{2} \int d\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}.$$

## Magnetisk energi i material

### Krafter på magneter

**Magnetisk energi för en slinga med tjocklek** Vi delar strömslingan i små delar  $V_i$  med tvärsnitt  $S_i$ . Magnetiska energin ges av

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} d\tau \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A}.$$

Varje element för en ström  $\mathbf{J}_i$ , och bidrar då med fält  $\mathbf{A}_i$  respektiva  $\mathbf{B}_i$ . Detta ger

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_{V_i} d\tau \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A}_j = \sum_i \sum_j W_{m,ij}.$$

Egenenergierna  $W_{m,ii}$  motsvarar uttrycken vi har härlett innan, alltså integralen av kvadratet av något bidrag till magnetiska fältet. Detta sättet är att föredra framför att räkna på flödet i slingor (vilket också skulle kunna funka om man delar upp strömtätheten i skivor).

Om vi vidare antar att  $\mathbf{A}$  är ungefär konstant över varje tvärsnitt fås

$$\mathbf{J}_i d\tau = \mathbf{J}_i S_i \cdot d\mathbf{v} = I_i d\mathbf{l}.$$

Därmed kan vi skriva

$$W_{m,ij} = \frac{1}{2} I_i \int_{C_i} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}_j = \frac{1}{2} I_i \Phi_{ij} = \frac{1}{2} I_i M_{ij} I_j.$$

För systemet fås då

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_i M_{ij} I_j.$$

Vi vet att detta är strikt positivt, så induktansmatrisen måste vara positivt definit.

**Induktanser från energitermer** Med detta kan vi definiera

$$M_{ij} = \frac{2W_{m,ij}}{I_i I_j}.$$

Det låter oss även definiera egeninduktanserna enligt

$$L_i = \frac{2W_{m,ii}}{I_i^2}.$$

**Generalisering av Ampères lag** I statiska situationer har vi sett att Ampères lag är konsekvent med att strömmarna är divergensfria. I dynamiska situationer är inte strömmarna nödvändigtvis divergensfria, så vi kommer försöka göra en ny ad hoc dynamisk Ampères lag.

Genom att utgå från vår generalisering av Biot-Savarts lag fås

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \vec{\nabla} \times \left( \mathbf{J} \times \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \right) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R \\ &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' (\mathbf{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R. \end{aligned}$$

Vi betecknar den andra termen som  $\mathbf{I}$ . Komponentvis har vi

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' J_j \partial_j \frac{1}{R^3} R_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \partial_j \left( \frac{1}{R^3} J_j R_i \right) - \frac{1}{R^3} R_i \partial_j J_j \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int da'_i \left( \frac{1}{R^3} J_j R_i \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{1}{R^3} R_i \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Genom att skicka integrationsområdet mot oändligheten försvinner första termen, vilket ger

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$



Med kontinuitetsekvationen fås

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \partial_t \rho \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Vi känner igen andra termen som proportionell mot en tidsderivata av elektriska fältet, och en möjlig kandidat till en ny Ampères lag är

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Observera att detta inte är en härledning, då vi har utgått från dessa generaliserade varianterna av Coulombs och Biot-Savarts lagar. Dessa uppfyller till exempel inte  $\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ . För att uppfylla detta måste induktiva korrektionstermen läggas till, men då kommer inte den nya Ampères lag att gälla, så man får en jobbig iterativ process med korrektioner.

**Maxwells ekvationer** All vår kunskap om elektrostatik- och dynamik slås nu ihop för att skriva ned de ekvationerna som beskriver det vi vet:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= \mathbf{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Dessa kallas för Maxwells ekvationer.

**Poyntings sats** Betrakta en volym  $V$  som omkransas av en yta  $S$ . Joules lag ger att  $V$  tillförs effekten

$$P_{\text{mek}} = \int_V d\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Vi kan tolka detta som

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \partial_t w_{\text{mek}},$$

där  $w_{\text{mek}}$  är energitätheten. Med hjälp av Maxwells ekvationer skriver vi

$$\begin{aligned}\partial_t w_{\text{mek}} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left( \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot \partial_t E^2 \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \partial_t \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot \partial_t E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right).\end{aligned}$$

Vi har en fältenergitäthet från de första två termerna, som vi förstår väl, men det finns även en extra term här. Den är en flödestäthet av energi. Vi kallar den då Poyntings vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Den uppfyller konserveringslagen

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \partial_t (w_{\text{mek}} + w_{\text{em}}) = 0.$$

**Rörelsemängd i elektromagnetism** Betrakta ett föremål med laddningstäthet  $\rho$  och strömtäthet  $\mathbf{J}$ . Detta har rörelsemängd som kommer från laddningarnas rörelse. Om vi inför rörelsemängdstätheten  $\mathbf{g}_{\text{mek}}$  fås

$$\partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

Maxwells ekvationer ger

$$\partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Vi skriver med hjälp av Maxwells lagar

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 + (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}, \\ \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B} \\ &= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) \\ &= \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 + (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \right) - \varepsilon_0 \left( \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} \right) \\ &= \varepsilon_0 (\mathbf{E}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E})) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} - \varepsilon_0 \left( \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} \right) + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ &= \dots \\ &= \varepsilon_0 (\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}) - \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \varepsilon_0 (\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}) - \vec{\nabla} (w_e + w_m) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{S}. \end{aligned}$$

**Elektromagnetisk rörelsemängd och Maxwells spänningstensor** Vi betraktar nu den mekaniska rörelsemängden komponentvis:

$$\begin{aligned} \partial_t g_{\text{mek},i} &= \varepsilon_0 (E_i \partial_j E_j + E_j \partial_j E_i) + \frac{1}{\mu_0} (B_i \partial_j B_j + B_j \partial_j B_i) - \partial_i w_{\text{em}} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t S_i \\ &= \partial_j \left( \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - w_{\text{em}} \delta_{ij} \right) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t S_i. \end{aligned}$$

Vi definierar då elektromagnetiska rörelsemängdstätheten

$$\mathbf{g}_m = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{S}$$

och Maxwells spänningstensor

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right).$$

Då kan vi skriva

$$\partial_t (g_{\text{mek},i} + g_{\text{em},i}) + \partial_j (-T_{ij}) = 0,$$

alltså en kontinuitetsekvation.

**Flöde av rörelsemängd och ytspänningsvektorer** I ett område har vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p_{\text{mek},i} + p_{\text{em},i}) &= \int d\tau g_{\text{mek},i} + g_{\text{em},i} \\ &= \int d\tau \partial_j T_{ij} \\ &= \int da_j T_{ij}. \end{aligned}$$

Vi skriver integranden som

$$\begin{aligned} T_{ij}n_j &= \varepsilon_0 E_i E_j n_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j n_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) n_j \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} E_i + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} B_i - \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) n_i. \end{aligned}$$

Vi definierar den elektriska och magnetiska ytspänningsvektorn som

$$\mathbf{T}_e = \varepsilon_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{T}_m = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \mathbf{n}.$$

Vi ser då att flödet av dessa ut genom området ger ändringen av total rörelsemängd. I många praktiska fall är tidsderivatan av elektromagnetisk rörelsemängd försumbar, och kvar står en flödesintegral på ena sidan och summan av alla krafter på andra.

**Alternativ konstruktion av ytspänningsvektorerna** Man kan (och jag borde kanske) visa att

$$T_e = w_e$$

och att den bildar vinkeln  $\alpha$  med  $\mathbf{E}$  och  $2\alpha$  med  $\mathbf{n}$ . Den ligger även i samma plan som  $\mathbf{E}$  och  $\mathbf{n}$ . Det samma gäller för den magnetiska ytspänningsvektorn.

**Elektromagnetiskt rörelsemängdsmoment** Vi har

$$\mathbf{N}_{\text{mek}} = \int d\tau \mathbf{r} \times \partial_t \mathbf{g}_{\text{mek}} = \int d\tau \partial_t \mathbf{l}_{\text{mek}}.$$

Vi har en konserveringslag för tätheten av rörelsemängd, och skulle även vilja ha det för den nu införda tätheten av rörelsemängdsmoment. Vi inför då tätheten av elektromagnetisk rörelsemängdsmoment som

$$\mathbf{l}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}_{\text{em}}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned} \partial_t (l_{\text{mek},i} + l_{\text{em},i}) &= \varepsilon_{ijk} r_j \partial_t (g_{\text{mek},k} + g_{\text{em},k}) \\ &= \varepsilon_{ijk} r_j \partial_p T_{kp} \\ &= \partial_p (\varepsilon_{ijk} r_j T_{kp}) - \varepsilon_{ijk} T_{kp} \partial_p r_j \\ &= \partial_p (\varepsilon_{ijk} r_j T_{kp}) - \varepsilon_{ijk} T_{kj}. \end{aligned}$$

Eftersom Maxwells spänningstensor är symmetrisk, försvinner andra termen. Vi skriver först om

$$\partial_p (\varepsilon_{ijk} r_j T_{kp}) = \partial_j (\varepsilon_{ipk} r_p T_{kj}) = -\partial_j (\varepsilon_{ikp} r_p T_{kj})$$

och definierar

$$M_{ij} = \varepsilon_{ikp} r_p T_{kj}.$$

Detta ger

$$\partial_t (l_{\text{mek},i} + l_{\text{em},i}) + \partial_j M_{ij} = 0.$$

**Flöde av elektromagnetiskt rörelsemängdsmoment** Vi har

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L_{\text{mek},i} + L_{\text{em},i}) &= \int d\tau \partial_t (l_{\text{mek},i} + l_{\text{em},i}) \\ &= - \int d\tau \partial_j M_{ij} \\ &= - \int dS_j M_{ij} \\ &= - \int dS_j \varepsilon_{ikp} r_p T_{kj}, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = - \int dS (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_m) \times \mathbf{r}.$$

## 9 Elektromagnetiska vågor

**Elektromagnetiska vågekvationer** Det gäller allmänt att

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\mathbf{F})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Maxwells ekvationer ger

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\vec{\nabla} \times (\partial_t \mathbf{B}) = -\partial_t \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) = \vec{\nabla} \times (\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{B},$$

vilket ger vågekvationerna

$$(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \mu_0 \partial_t \mathbf{J},$$

$$(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2) \mathbf{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}.$$

**Plana vågors våghastighet** Man kan visa att en plan våg i köllfritt rum propagerar med farten

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

**Fouriertransformering av fälten** Fouriertransformering ger

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E} e^{i\omega t},$$

med inverstransform

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}.$$

Det motsvarande gäller även för magnetfältet. Vi använder beteckningen

$$\mathbf{E}_\omega = \mathcal{F}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{E} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{E}_\omega).$$

Eftersom fälten är reella, måste det gälla att

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} dt \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} \right).$$

Vi kan visa följande egenskaper i köllfria rum:

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}) = -i\omega \mathbf{E}_\omega, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E}_\omega = i\omega \mathbf{B}_\omega, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B}_\omega = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_\omega, \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

**Strikt tidsharmonisering** En strikt tidsharmonisering är en idealisering av en given fältkomponent  $F$  på formen

$$F = F_0 \cos \omega_0 t + \alpha = \operatorname{Re} \{ F_0 e^{-\omega_0 t - i\alpha} \}.$$

Genom att baka ihop allt förutom det harmoniska tidsberoende får man en komplex amplitud för vågen. Denna har belop  $F_0$  och argument  $-\alpha$ .

**Plana vågor** En plan våg ges av

$$\mathbf{E}_\omega = \text{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\},$$

där amplituden är en konstant. För en sån ger Maxwells ekvationer

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\omega = \omega \mathbf{B}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega c^2 \mathbf{E}_\omega.$$

**Tidsmedelvärde av harmoniska storheter** Låt  $a$  och  $b$  vara harmoniska storheter med periodtid  $T$ . Då kan man visa att

$$\langle ab \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{A^* B\}$$

där  $A$  och  $B$  är storheternas amplituder.