Sammanfattning av

Yashar Honarmandi
yasharh@kth.se

23 januari 2019

Sammanfattning

Detta är en sammanfattning av SI1200 Fysikens matematiska metoder. Den innehåller essentiella resultat och metoder som dyker upp i kursen.

Innehåll

1 Ordinarie differentialekvationer

Sturm-Liouvilles sats Sturm-Liouvilles sats säjer att ett problem på formen

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + qf + \lambda wf = 0,\\
&Af(a) + B\,\mathrm{d}f\,x(a) = 0,\\
&Cf(b) + D\,\mathrm{d}f\,x(b) = 0,
\end{aligned}$$

där p, q och w är kontinuerliga reellvärda funktioner, har oändligt många lösningar f_n motsvarande distinkta egenvärden λ_n. Dessa lösningar utgör ett fullständigt ortogonalt system i ett Hilbertrum av funktioner med inreprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_a^2 \mathrm{d}x\,(f(x))^* g(x).$$

Detta rummet betecknas även $L^2([a,b])$. Vi vet även att om

$$f = c_i f_i,$$

där f_i är basfunktioner för Hilbertrummet, är

$$c_i = \frac{\langle f|f_i\rangle}{\langle f_i|f_i\rangle},\ \text{ingen summation.}$$

2 Partiella differentialekvationer

Dirichletvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Dirichletvillkor är på formen

$$u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Neumannvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Neumannvillkor är på formen

$$n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$.

Robinvillkor Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän Ω. Robinvillkor är på formen

$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$.

Homogena och inhomogena grejer En differentialekvation på formen

$$Lu = f$$

kallas för homogen om $f = 0$ och inhomogen annars. Vi definierar homogena och inhomogena randvillkor analogt.

Flerdimensionell variant av Sturm-Liouvilles sats Problemet

$$\Delta f = \lambda f,$$
$$f(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

har oändligt många lösningar f_n med distinkta egenvärden $\lambda_n > 0$ så att lösningarna bildar en fullständig mängd och är ortogonala med inreprodukten

$$\langle f|g\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^n x\, f^*(x)g(x).$$

För problemet

$$\Delta f = \lambda f,$$
$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)n_i\partial_i u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där n är normal på $\partial\Omega$, finns det oändligt många ortogonala lösningar med distinkta egenvärden, där dessa bildar en fullständig mängd.

Spektralsatsen Låt A vara en självadjungerad operator med diskret spektrum. Då har A oändligt många egenfunktioner. Dessa är ortogonala och bildar en fullständig mängd.

Figur 1: Peak fysiker.

Lösning av PDE:er for dummies Fysiker hatar honom. Här kan du läsa hans tre enkla steg för att göra teoretisk fysik komplett vid att lösa partiella differentialekvationer:

1. Bestäm lösningar till det homogena problemet.
2. Välj lösningar som passar till randvillkoren. Sturm-Liouvilles sats garanterar att det finns lösningar. Låt den allmänna lösningen vara en linjärkombination av dessa.
3. Hitta motsvarande lösningar till variabler som inte har randvillkor.
4. Skriv upp den allmänna lösningen som en linjärkombination av lösningarna du har fått innan.
5. Välj koefficienter som passar till initialvillkoren. Det finns även satser som hjälper med detta.

Separationsmetoden Separationsmetoden är ett sätt att lösa homogena partiella differentialekvationer på.

Låt $u(x_1, \ldots, x_n)$ vara en lösning till $Lu = 0$, där L är en linjär differentialoperator. Separationsmetoden går ut på att göra ansatsen

$$u = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i).$$

Denna ansatsen gör förhoppningsvis att differentialekvationen kan skrivas som

$$\frac{1}{X_1}L_1X_1 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} X_i}L'\prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Varje sida beror av olika variabler, varför de måste vara lika med en konstant. På detta sättet kan det ursprungliga problemet förhoppningsvis separeras i delproblem som är enkla att lösa.

Lösningsstrategi för inhomogena problem Om man har ett problem med inhomogeniteter i differentialekvationen och/eller villkoren, finns det olika strategier för att lösa detta problemet:

- dela upp lösningen i en homogen och partikulär lösning. Den partikulära lösningen fås då vid att gissa en lösning.
- flytta inhomogeniteten från villkoren till differentialekvationen, för sen att försöka lösa det.
- serieutveckla ekvationen och lösningen, vilket ger ett ODE-problem för basfunktionerna.

Här specifieras hur metod två fungerar.

För att utdypa kring andra metoden, betrakta ekvationen

$$Lu = 0,$$
$$Au(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), x \in \partial\Omega,$$

där både L och A är linjära operatorer. Antag att man hittar en funktion w som uppfyller $Aw = f$ på randen, och inför $v = u - w$, där u är en lösning. Denna uppfyller

$$\partial_t v + Lv = \partial_t u + Lu - \partial_t w - Lw = -\partial_t w - Lw, Av(\mathbf{x}, t) = 0, x \in \partial\Omega.$$