Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

23 januari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1 Vektoralgebra **1**

1.1 Satser 1

2 Mängdlära **1**

2.1 Definitioner 1

2.2 Satser 2

3 Funktioner **2**

3.1 Definitioner 2

3.2 Satser 3

4 Derivata **3**

4.1 Definitioner 3

4.2 Satser 4

5 Kvadratiska ytor **5**

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter $x_1, \ldots, x_n$. Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; i = 1, \ldots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerad i $\mathbf{a}$ med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum $\mathbf{a}$.

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M.

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M:s komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en randpunkt till M om varje öppet klot kring $\mathbf{a}$ innehåller punkter i M och M:s komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M. Denna betecknas ∂M.

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M:s komplement och sluten om ∂M är i M.

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

Bågvis sammanhängande mängder D är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ finns en kurva $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$ så att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

2.2 Satser

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Grafen av en funktion Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen av f är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Kurvor i $\mathbb{R}^p$ En kurva i $\mathbb{R}^p$ är en funktion $t \to \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

Lokala gränsvärden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Gränsvärden mot oändligheten Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim\limits_{|\mathbf{x}| \to \infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D$ om $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}$ existerar och $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = f(\mathbf{a}$.

Likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

3.2 Satser

Gränsvärden av funktioner och deras komponenter Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ är ekvivalent med att $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_i$, där subskriptet i indikerar den i-te komponenten av varje vektor.

Bevis Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^{p} |f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_i|.$$

Största och minsta värde för funktioner Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då antar f ett största och ett minsta värde på D.

Bevis

Definitionsmängd och likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då är f likformigt kontinuerlig på D.

Bevis

Satsen om mellanliggande värden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara bågvis sammanhängande. Om f antar värderna $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ i D, antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Bevis

4 Derivata

4.1 Definitioner

Partiella derivator Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är partiellt deriverbar med avseende på x_i i den inre punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av f med avseende på x_i i $\mathbf{a}$ och betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Differentierbarhet Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är differentierbar i $\mathbf{a}$ om $\exists A_1, \dots, A_n$ och en $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

och $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. f är differentierbar om detta är uppfylld för alla $\mathbf{a} \in D$.

C^1 Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

4.2 Satser

Differentierbarhet och kontinuitet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Bevis Definitionen implicerar $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Differentierbarhet och partiell deriverbarhet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i $\mathbf{a}$ och $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$.

Bevis Med $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$ ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när t går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och A_i på andra sidan.

Differentierbarhet av funktioner i C^1 Varje $f \in C^1$ är differentierbar.

Bevis Låt $\mathbf{a} \in D$. Enligt envariabelsanalysens medelvärdesats har vi

$$f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}+\theta_1 h_1\mathbf{e}_1)$$

$$f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+h_2\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+\theta_2 h_2\mathbf{e}_2)$$

$$\vdots$$

$$f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i + \theta_n h_n\mathbf{e}_n),$$

där alla $\theta_i \in [0, 1]$. Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \mathbf{e}_i + \theta_k h_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),$$

där $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Då får man

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h}) \right) h_i.$$

Den sista delen av beviset använder

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{h}) h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

Kedjeregeln i flere variabler Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, där alla g_i är deriverbara på $\mathbf{a} \in D$. Då är $f \circ g$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}f \circ g}{\mathrm{d}t} t = \sum_{i=1} n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(t).$$

Bevis

5 Kvadratiska ytor

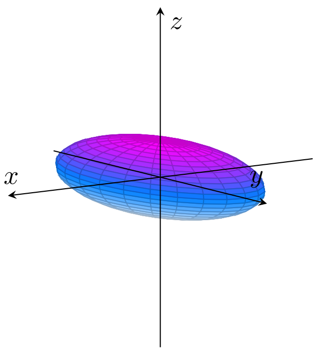
Detta är de flesta kvadratiska ytorna man kan träffa på i $\mathbb{R}^3$, komplett med snygga illustrationer.

Ellipsioider En ellipsioid beskrivs av en ekvation på formen

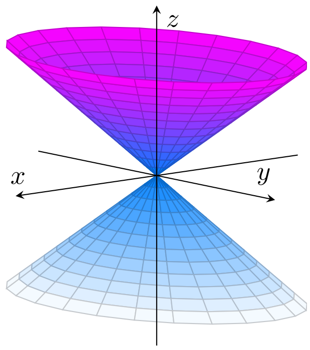
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Koner En kon beskrivs av en ekvation på formen

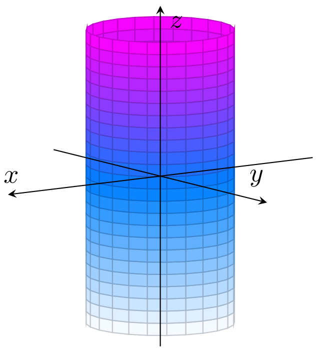
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$



Figur 1: Illustration av en ellipsioid.



Figur 2: Illustration av en kon.



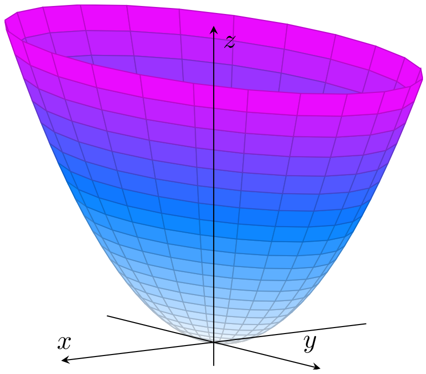
Figur 3: Illustration av en cylinder.

Cylindrar En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elliptiska paraboloider En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

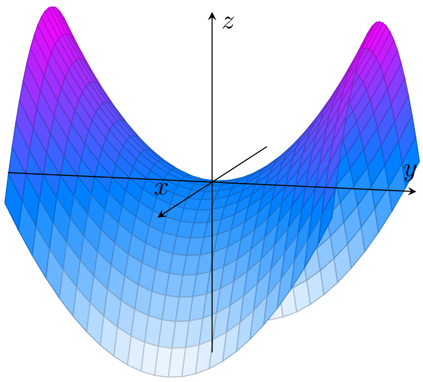
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.

Hyperbolska paraboloider En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

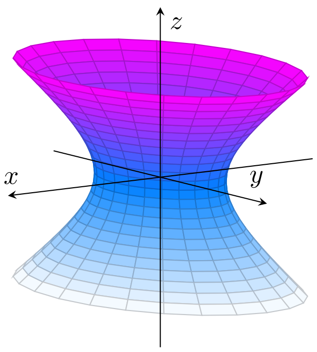
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.

Enmantlade hyperboloider En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvationpå formen

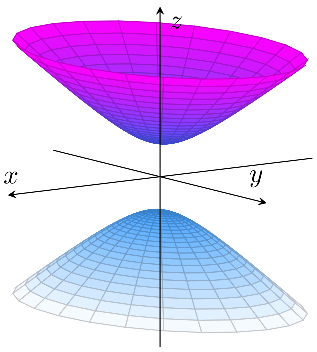
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.

Tvåmantlade hyperboloider En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.