

Sammanfattning av

Yashar Honarmandi

20 april 2018

**Sammanfattning**

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Grunläggande koncept inom slump</b>	<b>1</b>
1.1	Definitioner . . . . .	1
1.2	Satser . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Stokastiska variabler</b>	<b>3</b>
2.1	Definitioner . . . . .	3
2.2	Satser . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>9</b>
3.1	Definitioner . . . . .	9
3.2	Satser . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diskreta sannolikhetsfunktioner</b>	<b>10</b>
4.1	Satser . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Kontinuerliga sannolikhetsfunktioner</b>	<b>12</b>
5.1	Satser . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Linjära kombinationer av stokastiska variabler</b>	<b>13</b>
6.1	Definitioner . . . . .	13
6.2	Satser . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Deskriptiv statistik</b>	<b>13</b>
7.1	Definitioner . . . . .	13
7.2	Satser . . . . .	14

# 1 Grunläggande koncept inom slump

## 1.1 Definitioner

**Slumpförsök** Ett slumpförsök är en experiment där resultatet ej kan avgöras på förhand.

**Utfall** Ett utfall är resultatet av ett slumpförsök.

**Utfallsrum** Ett utfallsrum, betecknad  $\Omega$ , är mängden av alla möjliga utfall för ett givet slumpförsök.

**Händelser** En händelse är en uppsättning intressanta utfall, alltså en delmängd av utfallsrummet, och betecknas  $A, B, C, \dots$ .

**Sannolikheter** Sannolikheten för en given händelse  $A$  uppfyller följande axiom:

- För varje  $A$  gäller det att  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- För hela  $\Omega$  gäller att  $P(\Omega) = 1$ .
- Om  $A_1, A_2, \dots$  är en följd av parvis disjunkta händelser så gäller att  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum P(A_i)$ .

**Disjunkta händelser** Två händelser  $A, B$  är disjunkta om  $A \cap B = \emptyset$ .

**Betingade sannolikheter** Sannolikheten  $P(B | A)$  är sannolikheten för att  $B$  händer givet att  $A$  har hänt, och definieras som

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

För tre händelser definieras det som

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | (A \cap B))$$

och motsvarande för flere händelser.

**Oberoende händelser** Två händelser är oberoende om  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Detta generaliseras till tre händelser om

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\P(A \cap C) &= P(A)P(C), \\P(B \cap C) &= P(B)P(C), \\P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

**Slumpmässiga fel** Ett slumpmässigt fel är en differans mellan ett enkelt mätvärde och ett väntevärde.

**Systematiska fel** Ett systematiskt fel är en differans mellan ett väntevärde och ett korrekt värde.

**Precision** Precision är när många mätningar motsvarar väntevärdet bra.

**Noggrannhet** Noggrannhet är när många mätningar motsvarar det korrekta värdet bra.

## 1.2 Satser

**de Morgans lagar** När man ska hitta komplement till komplicerade mängder, byta alla delmängder med deras komplement och alla unioner ( $\cup$ ) till snitt ( $\cap$ ), och motsatt.

**Regler för sannolikhetskalkyl**

$$\begin{aligned}P(A^*) &= 1 - P(A), \\P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^*), \\P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

**Bevis** Följer från mängdlära.

**Lagen om total sannolikhet** Låt  $H_1, \dots, H_n$  vara parvis oförenliga och låt  $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ . Då gäller att

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i).$$

**Bevis**

**Bayes' sats** Låt  $H_1, \dots, H_n$  vara parvis oförenliga och låt  $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ . Då gäller att

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum P(H_j)P(A | H_j)}.$$

**Bevis**

**Oberoende händelser där minst en inträffar** Låt  $A_1, \dots, A_n$  vara oberoende och  $P(A_i) = p_i$ . Då ges sannolikheten för att minst en av dessa händer av

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

**Bevis**

## 2 Stokastiska variabler

### 2.1 Definitioner

**Stokastiska variabler** En stokastisk variabel är en funktion definierad på ett utfallsrum.

**Diskreta stokastiska variabler** En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ett ändligt eller uppräknligt oändligt antal värden.

**Kontinuerliga stokastiska variabler** En stokastisk variabel är kontinuerlig om det finns en funktion  $f$  så att

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx \forall A,$$

eller motsvarande i flera variabler.

**Sannolikhetsfunktioner** Låt  $X$  vara en diskret stokastisk variabel. Då definieras sannolikhetsfunktionen som

$$p(k) = P(X = k).$$

**Täthetsfunktioner** Låt  $X$  vara en kontinuerlig stokastisk variabel. Då definieras täthetsfunktionen som en funktion  $f$  som uppfyller

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= \int_A f(x) dx \quad \forall A, \\ f(x) &\geq 0 \quad \forall x, \\ \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= 1. \end{aligned}$$

**Sannolikhetsfunktioner i flera variabler** Låt  $(X, Y)$  vara en diskret stokastisk variabel. Då definieras sannolikhetsfunktionen som

$$p(j, k) = P(X = j, Y = k).$$

För kontinuerliga stokastiska variabler definieras den enligt

$$P(X \in A) = \int_A f(x) \, dx$$

och uppfyller  $f(x) \geq 0 \, \forall \, x$  och

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 1.$$

**Täthetsfunktioner i flera variabler** Låt  $(X, Y)$  vara en kontinuerlig stokastisk variabel. Då definieras täthetsfunktionen som en funktion  $f$  som uppfyller

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= \int_A f(x, y) \, dx \, dy \, \forall \, A, \\ f(x, y) &\geq 0 \, \forall \, x, y, \\ \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy &= 1. \end{aligned}$$

**Fördelningsfunktioner** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel. Funktionen  $F : x \rightarrow P(X \leq x)$  är fördelningsfunktionen för  $X$ .

**Fördelningsfunktioner i flera variabler** Låt  $(X, Y)$  vara en tvådimensionell stokastisk variabel. Funktionen  $F_{X,Y} : (x, y) \rightarrow P(X \leq x, Y \leq y)$  är den simultana fördelningsfunktionen för  $(X, Y)$ .

**Marginalfördelningar** Låt  $p_{X,Y}$  vara sannolikhetsfunktionen till den stokastiska variabeln  $(X, Y)$ . Marginalfördelningen  $p_X$  till  $X$  definieras då som

$$p_X(j) = \sum_k p(j, k)$$

i det kontinuerliga fallet och

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dy.$$

En konsekvens av definitionen i det kontinuerliga fallet är

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y).$$

**Oberoende stokastiska variabler** Variablerna  $X, Y$  är oberoende om

$$P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D) \quad \forall C, D.$$

**Väntevärde** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion  $p$ . Då definieras variabelns väntevärde som

$$E(X) = \sum k p(k).$$

För en kontinuerlig stokastisk variabel definieras det som

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

**Varians** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med väntevärde  $\mu$ . Variansen till  $X$  definieras som

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2).$$

**Standardavvikelse** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med varians  $\sigma^2$ . Standardavvikelsen till  $X$  definieras som

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

**Variationskoefficient** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma$ . Variationskoefficienten till  $X$  definieras som

$$R = \frac{\sigma}{\mu}.$$

**Kovarians** Låt  $X, Y$  vara stokastiska variabler med väntevärden  $\mu_X, \mu_Y$ . Då definieras kovariansen mellan dessa som

$$C(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)).$$

**Okorrelerade variabler**  $X, Y$  är okorrelerade om  $C(X, Y) = 0$ .

**Korrelationskoefficient** Låt  $X, Y$  vara stokastiska variabler. Då definieras korrelationskoefficienten mellan dessa som

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}}.$$

**Kvantiler** Lösningen till

$$F(x) = 1 - \alpha$$

kallas  $\alpha$ -kvantilen till  $X$ .

**Standardiserade stokastiska variabler** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma$ . Då är  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$  en standardiserad variabel.

## 2.2 Satser

**Fördelningsfunktioners egenskaper** Låt  $F$  vara en fördelningsfunktion. Då gäller att

•

$$F(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow -\infty, \\ 1, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

- $F$  är växande (eller icke-avtagande för kontinuerliga stokastiska variabler).
- $F$  är kontinuerlig till höger för varje  $x$ .

Omvänt gäller även att alla funktioner som uppfyller dessa egenskaper är fördelningsfunktioner.

### Bevis

**Fördelningsfunktioner och sannolikheter** Låt  $F$  vara en fördelningsfunktion för variabeln  $X$ . Då gäller att

$$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b).$$

### Bevis

**Fördelningsfunktioner och sannolikhetsfunktioner** Låt  $F$  och  $p$  vara fördelnings- respektive sannolikhetsfunktionen till en diskret stokastisk variabel  $X$ . Då gäller att

$$F(x) = \sum_{j \leq x} p(j),$$

$$p(x) = \begin{cases} F(x), & x = 0, \\ F(x) - F(x-1), & \text{annars.} \end{cases}$$

En motsvarande relation till första ekvationen gäller även för sannolikhets- och fördelningsfunktioner i flera variabler.

### Bevis



**Fördelningsfunktioner och täthetsfunktioner** Låt  $F$  och  $f$  vara fördelnings- respektive täthetsfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel  $X$  och låt  $f$  vara kontinuerlig i  $x$ . Då gäller att

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) \, du,$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

**Fördelningsfunktioner och täthetsfunktioner i flera variabler** Låt  $F$  och  $f$  vara fördelnings- respektive täthetsfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel  $(X, Y)$  och låt  $f$  vara kontinuerlig i  $(x, y)$ . Då gäller att

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, du \, dv,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y).$$

**Normalisering av sannolikhetsfunktioner** Låt  $p$  vara en sannolikhetsfunktion. Då gäller att

$$\sum p(j) = 1.$$

**Bevis**

**Sannolikhetsfunktioner och sannolikheter** Låt  $p$  vara en sannolikhetsfunktion för den stokastiska variabeln  $X$ . Då gäller att

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i=a}^b p(i).$$

**Bevis**

**Funktioner av stokastiska variabler** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel. Då har den stokastiska variabeln  $Y = g(X)$  sannolikhetsfunktionen  $p_Y(k) = \sum_{g(i)=k} p_X(i)$ .

**Bevis**

**Väntevärde för funktioner av stokastiska variabler** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion  $p_X$ . Då ges väntevärdet till  $g(X)$  av

$$E(g(X)) = \sum g(k)p_X(k),$$

med en motsvarande relation i det kontinuerliga fallet och i det flerdimensionella fallet.

**Bevis**

**Förenklad formel för varians** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med väntevärde  $\mu$ . Då ges variansen till  $X$  av

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

**Bevis**

**Förenklad formel för kovarians** Låt  $X, Y$  vara stokastiska variabler. Då ges kovariansen till dessa av

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

**Bevis**

**Väntevärde för linjärkombination av variabler**

$$E\left(b + \sum a_i X_i\right) = b + \sum a_i E(X_i).$$

**Bevis**

**Varians för linjärkombination av variabler**

$$V\left(b + \sum a_i X_i\right) = \sum a_i^2 V(X_i) + \sum_{1 \leq j < k} a_j a_k C(X_j, X_k).$$

**Oberoende variabler och funktioner**  $X, Y$  är oberoende om

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

eller

$$p_{X,Y}(j, k) = p_X(j)p_Y(k)$$

i det diskreta fallet och

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

### Bevis

**Oberoende variabler och väntevärde av produktet** Låt  $X, Y$  vara oberoende. Då gäller att

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

### Bevis

**Oberoende variabler och kovarians** Oberoende variabler är okorrelerade.

### Bevis

**Stora talens lag** Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara likfördelade stokastiska variabler med samma väntevärde  $\mu$  och inför variabeln  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ . Då gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu - \varepsilon < \bar{X} < \mu + \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon.$$

### Bevis

**Markovs olikhet** Låt  $Y$  vara en stokastisk variabel och  $a \geq 0, Y \geq 0$ . Då gäller att

$$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

### Bevis

**Tjebysjovs olikhet** Låt  $X$  vara en stokastisk variabel med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma$ . Då gäller att

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0.$$

## 3 Kombinatorik

### 3.1 Definitioner

**Permutationer** Permutationerna av  $k$  element bland  $n$  är antalet sätt du kan dra  $k$  element från  $n$  utan återläggning.

**Kombinationer** Kombinationerna av  $k$  element bland  $n$  är antalet sätt du kan dra  $k$  element från  $n$  utan återläggning där ordningen ej spelar någon roll.

### 3.2 Satser

**Multiplikationsprincipet** Låt åtgärd 1 kunna utföras på  $a_1$  sätt och åtgärd 2 kunna utföras på  $a_2$  sätt. Då kan båda utföras på  $a_1 a_2$  sätt.

**Bevis**

**Dragning med återläggning** Dragning av  $k$  element ur  $n$  med återläggning kan utföras på  $n^k$  sätt.

**Bevis**

**Dragning utan återläggning** Dragning av  $k$  element ur  $n$  utan återläggning kan utföras på  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  sätt.

**Bevis**

**Dragning utan återläggning eller ordning** Dragning av  $k$  element ur  $n$  utan återläggning och där ordning ej spelar någon roll kan utföras på  $\binom{n}{k}$  sätt.

**Bevis**

## 4 Diskreta sannolikhetsfunktioner

**Enpunktsfördelningen** Enpunktsfördelningen ges av  $p(a) = 1$  och  $p(x) = 0, x \neq a$ .

**Tvåpunktsfördelningen** Tvåpunktsfördelningen ges av  $p(a) = p, p(b) = 1 - p$  och  $p(x) = 0, x \neq a, b$ .

**Likformiga fördelningen** Om  $X$  antar  $m$  olika värden, är  $p(x) = \frac{1}{m}$  för dessa värden och 0 annars.

**För-första-gången-fördelningen** Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Om en stokastisk variabel är fördelat så, skrivs det som  $X \in \text{ffg}(p)$ .

**Geometrisk fördelning** Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = (1 - p)^k p.$$

Om en stokastisk variabel är fördelat så, skrivs det som  $X \in \text{Ge}(p)$ .

**Binomisk fördelning** Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Om en stokastisk variabel är fördelat så, skrivs det som  $X \in \text{Bin}(n, p)$ .

- Väntevärde:  $np$ .
- Varians:  $np(1 - p)$ .

**Hypergeometrisk fördelning** Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Om en stokastisk variabel är fördelat så, skrivs det som  $X \in \text{Hyp}(N, n, K)$ , där det kanske är andra variabler som är specificerat i notationen.

**Poissonfördelning** Denna sannolikhetsfördelningen ges av

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

Om en stokastisk variabel är fördelat så, skrivs det som  $X \in \text{Po}(\mu)$ . Fun fact: Poisson betyder fisk på franska.

- Väntevärde:  $\mu$ .
- Varians:  $\mu$ .

#### 4.1 Satser

**Två binomiskt fördelade variabler** Låt  $X \in \text{Bin}(n_1, p)$ ,  $Y \in \text{Bin}(n_2, p)$ . Då gäller att  $X + Y \in \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$ .

##### Bevis

**Två Poissonfördelade variabler** Låt  $X \in \text{Po}(\mu_1)$ ,  $Y \in \text{Po}(\mu_2)$ . Då gäller att  $X + Y \in \text{Po}(\mu_1 + \mu_2)$ .

## Bevis

## 5 Kontinuerliga sannolikhetsfunktioner

**Standardnormalfördelningen** En standardiserad normalfördelning har täthetsfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

och motsvarande fördelningsfunktion  $\Phi$ . Om en stokastisk variabel är fördelad så, skriver vi  $X \in N(0, 1)$ .

Vi definierar  $\alpha$ -kvantiler för en standardiserad normalfördelat variabel som  $\lambda_\alpha$  så att

$$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha.$$

- Väntevärde: 0.
- Varians: 1.

**Allmän normalfördelning**  $X \in N(\mu, \sigma)$  om och endast om  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0, 1)$ . Då gäller:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

- Väntevärde:  $\mu$ .
- Varians:  $\sigma^2$ .

**Asymptotiskt normalfördelade variabler** Om  $Z_n$  vara en oändlig följd av stokastiska variabler och det finns  $A_n, B_n$  så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{Z_n - A_n}{B_n}\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

såjs  $Z_n$  vara asymptotiskt normalfördelat. Beteckningen är  $Z \in \text{AsN}(A_n, B_n)$ .

### 5.1 Satser

**Standardnormalfördelningens fördelningsfunktion och symmetri**  
Standardnormalfördelningens fördelningsfunktion uppfyller

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

**Linjärkombinationer av normalfördelade variabler** Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara normalfördelade med väntevärde  $\mu_i$  och varians  $\sigma_i^2$ . Då gäller att:

$$\sum a_i X_i + b \in N \left( \sum a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^2} \right).$$

**Fördelning av medelvärde** Låt  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$  för oberoende och likafördelade  $X_i$  med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma$ . Då gäller att  $\bar{X} \in \text{AsN} \left( \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ .

## 6 Linjära kombinationer av stokastiska variabler

### 6.1 Definitioner

### 6.2 Satser

**Centrala gränsvärdesatsen** Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende, likafördelade stokastiska variabler med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma$ . Då uppfyller  $Y_n = \sum X_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( a < \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

## 7 Deskriptiv statistik

Definitionerna som dyker upp i denna del kan virka redundanta, men det är underförstått att detta är punktskattningar av parametrar och inte själva parametrarna som definieras här.

### 7.1 Definitioner

**Punktskattningar** En punktskattning av en parameter  $\theta$  är en funktion av utfallen  $x_1, \dots, x_n$  av dom stokastiska variablerna  $X_1, \dots, X_n$  vars fördelning beror av  $\theta$ . Därmed är punktskattningen ett utfall av stickprovsvariabeln  $\theta^*$ .

**Väntevärdesriktighet** En punktskattning är väntevärdesriktig om  $E(\theta^*) = \theta$ .

**Konsistens** Punktskattningen  $\theta^*$  är konsistent om det för varje  $\theta$  och  $\varepsilon > 0$  gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

**Medelkvadratfel** Medelkvadratfelet definieras som  $E((\theta^* - \theta)^2)$ .

**Medelfel** Medelfelet definieras som en skattning av  $D(\theta^*)$ , och betecknas  $d(\theta^*)$ .

**Effektivitet** Om två skattningar  $\theta^*, \hat{\theta}$  uppfyller  $V(\theta^*) \leq V(\hat{\theta})$  är  $\theta^*$  effektivare än  $\hat{\theta}$ .

**Medelvärde** Medelvärdet definieras som

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i.$$

**Varians** Variansen definieras som

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2,$$

med en analog definition av standardavvikelsen  $s$ .

**Kovarians** Kovariansen definieras som

$$c_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

**Korrelationskoefficient** Korrelationskoefficienten definieras som

$$r = \frac{c_{xy}}{s_x s_y}.$$

**Konfidensintervall** Intervallet  $I_\theta$  som med sannolikhet  $1 - \alpha$  täcker över den okända parametern  $\theta$  kallas konfidensintervallet för  $\theta$  med konfidensgrad  $1 - \alpha$ .

## 7.2 Satser

**Medelvärdets egenskaper** Medelvärdet är en konsistent och väntevärdesriktig skattning av en stokastisk variabels väntevärde.

### Bevis

**Variansens egenskaper** Variansen är en konsistent och väntevärdesriktig skattning av en stokastisk variabels varians.

### Bevis



**Konfidensintervall för väntevärde, känd varians** Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara normalfördelade med väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma$ . Då är

$$I_\mu = \left[ \bar{x} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

ett konfidensintervall för väntevärdet med konfidensgrad  $1 - \alpha$ , där  $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$  är  $\frac{\alpha}{2}$ -kvantilen i normalfördelningen.

### Bevis

**Konfidensintervall för väntevärde, okänd varians** Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara normalfördelade med väntevärde  $\mu$ . Då är

$$I_\mu = \left[ \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

ett konfidensintervall för väntevärdet, där  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$  är  $\frac{\alpha}{2}$ -kvantilen i  $t$ -fördelningen med  $n - 1$  frihetsgrader.

### Bevis