

# Sammanfattning av SI1200 Fysikens matematiska metoder

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

4 mars 2019

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av SI1200 Fysikens matematiska metoder. Den innehåller essentiella resultat och metoder som dyker upp i kursen, beskrivna högst abstrakt.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Ordinarie differentialekvationer</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Partiella differentialekvationer</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Speciella funktioner</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Variationsanalys</b>	<b>10</b>

# 1 Ordinarie differentialekvationer

**Sturm-Liouilles sats** Sturm-Liouilles sats säger att ett problem på formen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( p \frac{df}{dx} \right) + qf + \lambda wf &= 0, \\ Af(a) + B \frac{df}{dx}(a) &= 0, \\ Cf(b) + D \frac{df}{dx}(b) &= 0,\end{aligned}$$

där  $p$ ,  $q$  och  $w$  är kontinuerliga reellvärda funktioner, har oändligt många lösningar  $f_n$  motsvarande distinkta reella tal  $\lambda_n$ . Dessa lösningar utgör ett fullständigt ortogonalt system i ett Hilbertrum av funktioner med inreprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b dx f^*(x)g(x)w(x).$$

Detta rummet betecknas även  $L^2([a, b])$ . Notera att detta problemet kan omformuleras till ett egenvärdesproblem för operatoren

$$\frac{1}{w} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + \frac{q}{f},$$

som då enligt satsen är garanterad att ha oändligt många distinkta egenvärden.

Vi vet även att om

$$f = \sum c_i f_i,$$

där  $f_i$  är basfunktioner för Hilbertrummet, är

$$c_i = \frac{\langle f|f_i \rangle}{\langle f_i|f_i \rangle}.$$

# 2 Partiella differentialekvationer

**Dirichletvillkor** Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän  $\Omega$ . Dirichletvillkor är på formen

$$u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega.$$

**Neumannvillkor** Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän  $\Omega$ . Neumannvillkor är på formen

$$n_i \partial_i u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där  $n$  är normal på  $\partial\Omega$ .

**Robinvillkor** Betrakta en differentialekvation som skall lösas på ett domän  $\Omega$ . Robinvillkor är på formen

$$\alpha(x, t)u(x, t) + \beta(x, t)n_i \partial_i u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega,$$

där  $n$  är normal på  $\partial\Omega$ .

**Homogena och inhomogena grejer** En differentialekvation på formen

$$Lu = f$$

kallas för homogen om  $f = 0$  och inhomogen annars. Vi definierar homogena och inhomogena randvillkor analogt.

## Flerdimensionell variant av Sturm-Liouilles sats Problem

$$\begin{aligned}\Delta f &= \lambda f, \\ f(x) &= 0, x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

har oändligt många lösningar  $f_n$  med distinkta egenvärden  $\lambda_n > 0$  så att lösningarna bildar en fullständig mängd och är ortogonala med inreprodukten

$$\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} d^n x f^*(x)g(x).$$

För problemet

$$\begin{aligned}\Delta f &= \lambda f, \\ \alpha(x, t)u(x, t) + \beta(x, t)n_i \partial_i u(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

där  $n$  är normal på  $\partial\Omega$ , finns det oändligt många ortogonala lösningar med distinkta egenvärden, där dessa bildar en fullständig mängd.

**Spektralsatsen** Låt  $A$  vara en självadjungerad operator med diskret spektrum. Då har  $A$  oändligt många egenfunktioner. Dessa är ortogonala och bildar en fullständig mängd.



Figur 1: Peak fysiker.

**Lösning av PDE:er for dummies** Fysiker hatar honom. Här kan du läsa hans enkla steg för att göra teoretisk fysik komplett vid att lösa partiella differentialekvationer:

1. Hantera inhomogeniteter, så du eventuellt sitter kvar med en homogen ekvation.
2. Bestäm lösningar till det homogena problemet som passar till randvillkoren. Sturm-Liouilles sats garanterar att det finns lösningar. Låt den allmänna lösningen vara en linjärkombination av dessa.
3. Hitta motsvarande lösningar till variabler som inte har randvillkor.
4. Skriv upp den allmänna lösningen som en linjärkombination av lösningarna du har fått innan.
5. Välj din linjärkombination så att den passar till initialvillkoren. Sturm-Liouville-teori hjälper även med detta.

Det som följer är sätt att göra dessa olika steg på.

**Separationsmetoden** Separationsmetoden är ett sätt att lösa homogena partiella differentialekvationer på. Det dåligt sätt, men ändå ett sätt.

Låt  $u(x_1, \dots, x_n)$  vara en lösning till  $Lu = 0$ , där  $L$  är en linjär differentialoperator. Separationsmetoden går ut på att göra ansatsen

$$u = \prod_{i=1}^n X_i(x_i).$$

Denna ansatsen gör förhoppningsvis att differentialekvationen kan skrivas som

$$\frac{1}{X_1} L_1 X_1 = \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i} L' \prod_{i=1}^n X_i.$$

Varje sida beror av olika variabler, varför de måste vara lika med en konstant. På detta sättet kan det ursprungliga problemet förhoppningsvis separeras i delproblem som är enkla att lösa.

Den här lösningsmetoden är ej att föredra. Använd heller Sturm-Liouville-teori om du kan.

**Exempel** Lös värmeledningsekvationen  $\partial_t u - \alpha \partial_x^2 u = 0$ ,  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

För att lösa denna, ansätt  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Insatt i differentialekvationen ger detta

$$X \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{d^2 X}{dx^2} T = 0,$$

som kan separeras till

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Båda sidor måste vara lika med en konstant  $k$ . Vi får då två ODE-problem som kan lösas. Lös först  $X$ -ekvationen, då randvillkoren kommer ge dig ett spektrum av möjliga värden på  $k$ . För varje sådant  $k$  kan du lösa  $T$ -ekvationen. Lösningen är då en linjärkombination av produkter  $XT$ , där varje sådant produkt är lösningar av ekvationerna ovan för samma  $k$ .

**Lösning med Sturm-Liouville-teori** Betrakta ett problem på formen  $Lu = 0$ , där  $L = L_1 + L_2$  och  $L_2$  är en operator på formen  $\frac{1}{w} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + \frac{q}{w}$ . Lösning med Sturm-Liouville-teori går ut på att serieutveckla lösningen i egenfunktioner till  $L_2$ , vilket ger ett enklare problem i de återstående variablerna.

Det som är smart med denna metoden är att Sturm-Liouville-teori garanterar att det finns oändligt många sådana egenfunktioner som bildar en fullständig mängd. Vi får även ett sätt att serieutveckla funktioner på genom inreprodukten som kommer från teorin.

Denna lösningsmetoden är helt klart att föredra framför variabelseparation.

**Exempel** Lös diffusionproblemetekvationen  $\partial_t u - D \partial_x^2 u = 0$ ,  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Vi noterar att  $-\partial_x^2$  är en operator på formen som beskrivs. Vi kan även hitta sådana egenfunktioner för denna operatoren. Dessa ges av  $f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$ , där randvillkoren implicerar  $A_n = 0$ ,  $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{L} n$ . Vi gör därmed ansatsen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin(\lambda_n x) - D \partial_x^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin(\lambda_n x) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n}{dt}(t) \sin(\lambda_n x) + D \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \lambda_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) &= 0. \end{aligned}$$

Man kan slå ihop serierna, och detta implicerar

$$\frac{dB_n}{dt} + D \lambda_n B_n = 0.$$

För att få ett initialvillkor för  $B_n$ , använd att

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Sturm-Liouville-teori ger att

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_0 | \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle}{\langle \sin(\sqrt{\lambda_n}x) | \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle} \sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

vilket ger initialvillkoret

$$B_n(0) = \frac{\langle u_0 | \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle}{\langle \sin(\sqrt{\lambda_n}x) | \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle}$$

med inreprodukten

$$\langle f | g \rangle = \int_0^L dx f^*(x)g(x).$$

**Mer avancerad exempel** Tillkommer.

**Superposition** Betrakta ett problem på formen  $Lu = f$  med olika randvillkor på formen  $A_i u = g_i$ . Om problemet är linjärt, kan man skriva lösningen som en summa av olika funktioner, där varje term i summan löser samma problem för fallet alla funktioner  $f, g_i$  förutom en är lika med 0.

**Konkretisering** Lös Poissons ekvation  $\Delta u = f$  för  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  med randvillkoren  $u(0, y) = g_1(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = g_2(y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g_3(x), u(x, b) = g_4(x)$ . Lösningen ges av  $u = \sum_{i=1}^5 u_i$ , där de olika  $u_i$  löser

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= f, & \Delta u_2 &= 0, & \Delta u_3 &= 0, & \Delta u_4 &= 0, & \Delta u_5 &= 0, \\ u_1(0, y) &= 0, & u_2(0, y) &= g_1(y), & u_3(0, y) &= 0, & u_4(0, y) &= 0, & u_5(0, y) &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, y) &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial x}(a, y) &= 0, & \frac{\partial u_3}{\partial x}(a, y) &= g_2(y), & \frac{\partial u_4}{\partial x}(a, y) &= 0, & \frac{\partial u_5}{\partial x}(a, y) &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_3}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_4}{\partial y}(x, 0) &= g_3(x), & \frac{\partial u_5}{\partial y}(x, 0) &= 0, \\ u_1(x, b) &= 0, & u_2(x, b) &= 0, & u_3(x, b) &= 0, & u_4(x, b) &= 0, & u_5(x, b) &= g_4(x). \end{aligned}$$

Nu har vi fått fem enklare problem att lösa, och det kanske går.

**Lösningsstrategi för inhomogena problem** Om man har ett problem med inhomogeniteter i differentialekvationen och/eller villkoren, finns det olika strategier för att lösa detta problemet:

- dela upp lösningen i en homogen och partikulär lösning. Den partikulära lösningen fås då vid att gissa en lösning.
- flytta inhomogeniteten från villkoren till differentialekvationen, för sen att försöka lösa det.
- serieutveckla ekvationen och lösningen, vilket ger ett ODE-problem för basfunktionerna.

För att utdypa kring andra metoden, betrakta ekvationen

$$\begin{aligned} Lu &= 0, \\ Au(\mathbf{x}, t) &= f(x, t), x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

där både  $L$  och  $A$  är linjära operatorer. Antag att man hittar en funktion  $w$  som uppfyller  $Aw = f$  på randen, och inför  $v = u - w$ , där  $u$  är en lösning. Denna uppfyller

$$\begin{aligned} Lv &= Lu - Lw = -Lw, \\ Av(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Exempel** Tillkommer.

**Lösning på oändliga områden** Betrakta problemet  $Lu = f$  på hela  $\mathbb{R}^n$ . För att lösa detta, är det smart att transformera problemet och försöka bryta det ned i mindre bitar.

**Exempel** Tillkommer

**Poissonkärnor** Betrakta en homogen differentialekvation på ett helt reelt rum. Vi vet mha. Fouriertransform att lösningen för ett givet begynnelsevillkor innebär en faltning av villkoret med någon funktion. Denna funktionen kallas ekvationens Poissonkärna. Den definieras i alla fall för Laplace' ekvation i två dimensioner, så jag väljer denna definitionen. Big whoop, wanna fight about it?

**Speglingsmetoder** Betrakta problemet  $Lu = f$  på ett område som ej är oändligt i alla riktningar. Vid att spegla problemet på ett smart sätt kan man utvidga problemet på ett oändligt område, lösa det på det oändliga område och begränsa lösningen till det ursprungliga lösningsdomänet.

**Exempel** Tillkommer

**Greenfunktioner** För att prata om Greenfunktioner, behöver vi först introducera integralkärnor. Om en linjär operator  $L$  på ett intervall  $I$  uppfyller

$$Lf(x) = \int_I dy K(x, y)f(y),$$

såjs  $K$  vara integralkärnan till  $L$ . Detta kan definieras analogt i flera dimensioner.

Betrakta nu differentialekvationen

$$Lf = g$$

i  $d$  dimensioner på området  $\Omega$  med homogena randvillkor och begynnelsevillkor. Nu har  $L$  givetvis ingen integralkärna, då det är en derivationsoperator. Däremot kan  $L^{-1}$  tänkas ha det. Antag vidare att  $L^{-1}$  har integralkärnan  $G$ . Då skulle en partikulärlösning till problemet ovan vara

$$f = \int_{\Omega} d^d y G(x, y)g(y).$$

Vi definierar då  $G$  att vara Greenfunktionen till  $L$ .

Hur kan vi hitta Greenfunktioner till en given operator? Vi använder superpositionsprincipen

$$Lf_1 = g_1, Lf_2 = g_2 \implies L(f_1 + f_2) = g_1 + g_2.$$

Detta implicerar att om vi kan dela upp  $g$  i hanterbara delar och lösa

$$Lf_i = g_i,$$

kan vi hitta Greenfunktionen. Av anledningar som kommer visar sig, väljer vi uppdelningen

$$Lf_y(x) = \delta(x - y), y \in \Omega.$$

Låt nu  $f_y(x) = G(x, y)$ . Multiplicera med  $g$  på båda sidor och integrera över  $y$ . Högersidan blir då

$$\int_{\Omega} d^d y \delta(x - y)g(y) = g(x).$$

Vänstersidan blir

$$\int_{\Omega} d^d y g(y)LG(x, y).$$

Eftersom  $L$  bara verkar på  $x$ , kan operatoren  $L$  tas ut från integraltecknet, vilket gör vänstersidan till

$$L \int_{\Omega} d^d y g(y) G(x, y).$$

Därmed ser vi att

$$f(x) = \int_{\Omega} d^d y g(y) G(x, y)$$

löser problemet, och det enda som återstår är att lösa differentialekvationen

$$LG(x, y) = \delta(x - y).$$

Denna ekvationen är alltså ett sätt att beräkna Greenfunktioner på.

Den skarpa läsaren märker kanske att inget har specificerats kring randvillkoren. I denna diskussionen förutsätter vi att vi inte behöver bry oss om vad som händer på randen, vilket typiskt är fallet om man betraktar oändliga områden.

Notera att även randvillkor och initialvillkor kommer dyka upp i mer avancerade problem. Att beskriva detta i allmänna fall är svårt, och ser typiskt olik ut från problem till problem. Se till konkreta exempel.

**Fundamentallösningar** En fundamentallösning är en Greenfunktion som används för lösningar av ekvationer i hela rummet.

**Speglingsmetoder för Greenfunktioner** Om man vill hitta Greenfunktioner för problem där man behöver betrakta vad som händer på randen, är ett alternativ att använda speglingsmetoder för att utvida problemet till ett oändligt område, där du förhoppningsvis kan hitta en Greenfunktion.

**Exempel** Tillkommer.

### 3 Speciella funktioner

**Trigonometriska och hyperbolska funktioner** Trigonometriska funktioner kan utvidgas via deras Taylorpolynom till att även ta komplexa argument. Det samma kan hyperbolska funktioner, vilket ger relationen

$$\begin{aligned}\cos(ix) &= \cosh x, \\ \sin(ix) &= i \sinh x.\end{aligned}$$

**$\Gamma$ -funktionen**  $\Gamma$ -funktionen definieras som

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \operatorname{Re}\{z\} > \frac{1}{2}.$$

$\Gamma$ -funktionen uppfyller

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

För att visa detta, använd partiell integration för att få

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} dt t^z e^{-t} \\ &= [-e^z t^z]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dt z t^{z-1} e^{-t}.\end{aligned}$$



Evaluering i gränserna för den första termen ger 0 under våra antaganden, och

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} dt z t^{z-1} e^{-t} \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

Vi har även

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} dt e^{-t} \\ &= 1.\end{aligned}$$

En konsekvens av det vi har visat är att för heltaliga  $z$  är  $\Gamma(z+1) = z!$ .

Vi har vidare

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots z\Gamma(z).$$

Detta implicerar att  $\Gamma$  har en pol för  $z = 0, -1, -2, \dots$ .

För stora  $z$  har vi även approximativt

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi} z^z e^{-z},$$

vilket även kallas Stirlings formel. För att visa detta, skriv

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} dt t^z e^{-t} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-t+z\ln t}.\end{aligned}$$

Vi kan Taylorutveckla exponenten för att få

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} dt e^{-t+z\left(\ln z + \frac{1}{z}(x-z) - \frac{1}{2z^2}(x-z)^2\right)} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-z+z\ln z - \frac{1}{2z}(t-z)^2}.\end{aligned}$$

Drar man ut faktorerna som ej beror av  $t$  fås

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z^z e^{-z} \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{1}{2z}(t-z)^2} \\ &= z^z e^{-z} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} du \sqrt{2z} e^{-u^2} \\ &= \sqrt{2} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} du e^{-u^2}.\end{aligned}$$

Vi approximerar Gaussintegralen ovan med en integral över hela tallinjen, vilket ger

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \sqrt{2} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} \\ &= \sqrt{2\pi} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}.\end{aligned}$$

Alternativt kan detta skrivas som

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

**Besselfunktioner** I lösning av Laplaces ekvation på enhetsskivan dyker det upp två funktioner  $J_n$  och  $Y_n$ . Dessa har följande egenskaper:

- $J_n$  är begränsad när  $r \rightarrow \infty$ .
- $J_n \propto r^{|n|}$  då  $r \rightarrow 0$ .
- $J_n \propto r^{-|n|}$  då  $r \rightarrow 0$ .

Dessa definieras, för heltaliga  $n$  och positiva argument, av

$$J_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dr r e^{-in\theta + ir \sin \theta},$$

$$Y_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\pi dr \sin(\theta \sin r - nr) - \int_0^\infty dr (e^{nr} + (-1)^n e^{-nr}) e^{-\theta \sinh r} \right).$$

$J$  uppfyller i sådana fall  $J_n = (-1)^n J_{-n}$ .

Var kommer dessa ifrån? Utgå från egenvärdesekvationen för Laplaceoperatorn i två dimensioner:

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

I polära koordinater blir detta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0.$$

$u$  är  $2\pi$ -periodisk, så vi skriver

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in\theta}.$$

Insatt i differentialekvationen ger detta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^2 J_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} J_n + \lambda J_n \right) e^{in\theta} = 0,$$

vilket uppfylls om och endast om

$$\frac{d^2 J_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} + \left( \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n = 0.$$

Alla  $J_n$  uppfyller denna ekvationen.

Gör nu substitutionen  $v = \sqrt{\lambda}r$ . Detta ger

$$\frac{d^2 J_n}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dJ_n}{dv} + \left( \lambda - \frac{n^2}{v^2} \right) J_n = \lambda \frac{d^2 J_n}{dv^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{v} \sqrt{\lambda} \frac{dJ_n}{dv} \left( \lambda - \frac{n^2 \lambda}{v^2} \right) J_n.$$

Eftersom detta är lika med 0 kan vi dela på  $\lambda$  och få

$$\frac{d^2 J_n}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dJ_n}{dv} + \left( 1 - \frac{n^2}{v^2} \right) J_n = 0.$$

Vi har alltså lyckats med att lösa ekvationen om vi kan hitta en egenfunktion motsvarande  $\lambda = 1$ .

Om vi tittar på Laplaces ekvation i kartesiska koordinater, ser vi att  $e^{iy}$  är en sådan funktion. I polära koordinater kan denna skrivas som  $e^{ir \sin \theta}$ . Denna funktionens Fourierkoefficienter enligt serieutvecklingen ovan löser ekvationen. Vi har

$$J_n(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{iv \sin \theta} e^{-in\theta},$$

och egenfunktionen motsvarande ett godtyckligt  $\lambda > 0$  är därmed

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i\sqrt{\lambda}r \sin \theta} e^{-in\theta}.$$

Detta kan även utvidgas till godtyckliga  $\nu$  som ej är negativa heltal enligt

$$J_\nu(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(-\frac{r^2}{4}\right)^k.$$

Detta kan visas vid att ansätta en serielösning till Bessels differentialekvation. Vi testar mer specifikt en potensserielösning

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s}$$

till Bessels ekvation

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0.$$

Vi får

$$\sum_{i=0}^{\infty} (s+i)(s+i-1) a_i x^{i+s-2} + \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} (s+i) a_i x^{i+s-1} + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s} = 0.$$

Detta kan skrivas som

$$(s(s-1) + s - \nu^2) a_0 x^{s-2} + ((s+1)s + s + 1 - \nu^2) a_1 x^{s-1} + \sum_{i=2}^{\infty} (s+i)(s+i-1) a_i x^{i+s-2} + \sum_{i=2}^{\infty} (s+i) a_i x^{i+s-2} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s} - \nu^2 \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i+s-2} = 0.$$

Detta skriver vi som

$$(s^2 - \nu^2) a_0 x^{s-2} + ((s+1)^2 - \nu^2) a_1 x^{s-1} + \sum_{i=2}^{\infty} ((s+i)(s+i-1) + s+i - \nu^2) a_i x^{i+s-2} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s} = 0,$$

$$(s^2 - \nu^2) a_0 x^{s-2} + ((s+1)^2 - \nu^2) a_1 x^{s-1} + \sum_{i=2}^{\infty} (((s+i+2)^2 - \nu^2) a_{i+2} + \lambda a_i) x^{i+s} = 0$$

Vi vet att om  $\nu$  ej är ett heltal, är  $J_\nu$  och  $J_{-\nu}$  linjärt oberoende.

För att få den andra sortens funktion, använd reduktion av ordning? Vi får då

$$Y_\nu(r) = \frac{J_\nu(r) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(r)}{\sin \nu\pi}$$

om  $\nu$  ej är ett heltal. Detta har ett icke-trivialt gränsvärde när  $n$  går mot ett heltal, och det är denna lösningen som används som andra term för heltaliga  $\nu$ .

**Sfäriska Besselfunktioner** Sfäriska Besselfunktioner definieras som

$$j_l(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{l+\frac{1}{2}}(r),$$

$$y_l(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} Y_{l+\frac{1}{2}}(r)$$

för heltaliga  $l$ . Dessa dyker upp som egenfunktioner till radiella delen av Laplaceoperatorn i tre dimensioner.

**Legendrepolynom**

**Klotytefunktioner** Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater innehåller en del som endast beror på  $r$  och en del som beror av vinklarna. Dens egenfunktioner är klotytefunktionerna

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = N e^{im\phi} P_m^l(\cos \theta).$$

För ett fixt  $l$  finns det  $2l + 1$  möjliga värden av  $m$ . Dessa är alla heltal som uppfyller  $|m| \leq l$ .

## 4 Variationsanalys

**Funktionaler** Variationsanalys handlar om funktionaler. Detta är avbildningar från funktioner till skalärer.

**Extrempunkter och variationer** Att analytiskt hitta en funktion som är en extrempunkt för en given funktional är allmänt inte enkelt. Den typiska strategin är att i stället anta att man har hittat en funktion som minimerar funktionalen, och introducera en variationsfunktion och en parameter  $\varepsilon$  multiplicerad med den. Då vet man enligt antagandet att  $\varepsilon = 0$  motsvarar en extrempunkt.

**Tillväxt av funktionalen** För att få en ide om hur en funktional beter sig beroende på  $\varepsilon$ , antag att  $y$  minimerar funktionalen  $J$ , diskretisera  $y$  i  $N$  punkter och introducera variationen  $\eta$ . Detta ger

$$J(y + \varepsilon\eta) - J(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial J}{\partial y_i} + O(\varepsilon^2).$$

De partiella derivatorna

**Variationsproblem typ 1** Vi har en funktional  $J$  som är extremal och funktionen  $y$  är fixerad i randpunkterna.

**Variationsproblem typ 2** Vi har en funktional som är extremal och funktionen  $y$  är fix i en punkt. Andra villkoret kommer från funktionalen.

**Variationsproblem på integralform** För att illustrera hur man gör i variationsanalys, försöker vi hitta en funktion som är en extrempunkt till funktionalen

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} dx F(u, u', x).$$

För att göra detta, antag att det finns ett minimum  $y$ , och introducera dens variation. Låt nu  $f(\varepsilon) = J(y + \varepsilon\eta)$ . Då gäller det att  $\frac{df}{d\varepsilon}(0) = 0$ . Denna derivatan ges av

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} dx F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \eta \partial_u F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) + \eta' \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \eta \partial_u F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) + \eta(x_1) \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x_1) \\ &\quad - \eta(x_0) \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x_0) - \int_{x_0}^{x_1} dx \eta \frac{d}{dx} \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \eta \left( \partial_u F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) - \frac{d}{dx} \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \right) \\ &\quad + \partial_{u'} \eta(x_1) F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x_1) - \eta(x_0) \partial_{u'} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x_0). \end{aligned}$$

Om detta skall vara lika med 0, oberoende av  $\eta$ , kräver vi

$$\partial_u F - \frac{d}{dx} \partial_{u'} F = 0.$$

Om vi har bra randvillkor, kan de två återstående termerna försvinna. Annars måste dessa också vara lika med 0.

Beräkningen är analog om man har en vektorvärd funktion man minimerar funktionalen med avseende på - det kommer bara dyka upp flera termer. Den är även analog om man minimerar med avseende på en funktion av flera variabler. Då dyker det upp bidrag från de olika partialderivatorna. Om det finns beroende av högre ordningens derivator, får man göra flera partiella integrationer.

**Beltramis identitet** Betrakta ett variationsproblem där funktionalen

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} dx F(u, u', x)$$

skall extremeras. Euler-Lagrange-ekvationen som beskriver extrempunkten är

$$\partial_u F - \frac{d}{dx} \partial_{u'} F = 0.$$

Om  $F$  ej beror av  $x$ , gäller det att

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= u' \partial_u F + u'' \partial_{u'} F, \\ &= u' \frac{d}{dx} \partial_{u'} F + u'' \partial_{u'} F \\ &= \frac{d}{dx} (u' \partial_{u'} F), \end{aligned}$$

vilket ger

$$\frac{d}{dx} (F - u' \partial_{u'} F) = 0$$

och slutligen Beltramis identitet

$$F - u' \partial_{u'} F = C.$$

**Variationsproblem med funktionaler som bivillkor** Betrakta problemet att hitta en funktion som är en extrempunkt till funktionalen

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} dx F(u, u', x)$$

med bivillkoret

$$K(u) = \int_{x_0}^{x_1} dx G(u, u', x) = K_0.$$

Man kan visa att detta är ekvivalent med att hitta en extremalpunkt till  $J - \lambda K$  som uppfyller bivillkoret.