

# Sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

13 september 2019

## **Sammanfattning**

Detta är en sammanfattning av EL1000 Reglerteknik, allmän kurs.

# Innehåll

1	Grundläggande koncept	1
2	Prestanda och prestandamått	1
3	Blockschema	1
4	Negativ återkoppling	2
5	Frekvensanalys	5
6	Kompensering	8
7	Tillståndsrepresentationer	9

# 1 Grundläggande koncept

**Grundläggande begrepp och ideer** Reglerteknik handlar om att kontrollera olika storheter, ofta betecknad  $y$ , mot något värde  $r$ . Dessa påverkas typiskt av en yttre störning  $v$ , och vi kan kontrollera dem vid att tillföra en påverkan  $u$ .

**Strategi för att förstå** För att förstå systemet, hittar vi först på en modell som beskriver det. Ur denna modellen fås typiskt en differentialekvation. Denna löser vi med Laplacetransform över tid.

**Överförningsfunktionen** Typiskt (isär om modellen ger en linjär differentialekvation) fås en lösning i Laplacerummet på formen  $Y(s) = G(s)U(s)$ , där  $U$  är Laplacetransformen av  $u$ . Funktionen  $G$  är överförningsfunktionen. Notera att denna Lösningsformen beror på att alla initialvärden är 0!

**Poler** Ett systems poler är rötterna till nämnarpolynomet (som typiskt finns) i överförningsfunktionen.

**Stabilitet** Ett system är stabilt om det tenderar mot ett visst läge. Systemets stabilitet är typiskt kopplad med dets noder. Detta kan man se i enkla fall, till exempel vanliga linjära ordinära differentialekvationer, då systemets polar anger hur snabbt lösningen avtar.

**Nollställen** Ett systems nollställen är rötterna till täljarpolynomet (som typiskt finns) hos överförningsfunktioner. Eftersom vi är intresserade av att styra  $y$ , är det viktigt hur vi ska välja  $u$  för att få det. Därmed är  $\frac{1}{G}$  en viktig storhet, och nollställen kan därmed orsaka reglerproblem som är svårlösta.

**Impulssvar** Om lösningen för  $Y$  är på formen  $Y = GU$ , är lösningen för  $y$  på formen

$$y(t) = \int_0^t d\tau g(\tau)u(t - \tau).$$

$g$  kallas för impulssvaret.

**Rotort** En rotort är en plott av ett systems poler som funktion av någon parameter. Den är typiskt uppdelad i grenar, som är kurvor i planet som är parametriserade av parametervärdet. Polerna som motsvarar parametervärdet 0 är rotortens startpunkter, och polarna motsvarande parametervärdet  $\infty$  är rotortens ändpunkter. Om rotorten närmar sig kurvor, är dessa rotortens asymptoter.

## 2 Prestanda och prestandamått

**Stigtid** Stigtiden definieras som  $T_r = t_2 - t_1$ , där  $y(t_2) = 0.9$  och  $y(t_1) = 0.1$ , med  $y$  mätt i relativa enheter.

**Insvängningstid** Insvängningstiden definieras som  $|y(t) - 1| < p$  när  $t > T_s$ , med  $y$  mätt i relativa enheter.  $p$  är typiskt lika med 0.05.

**Översläng** Överslänget definieras som  $y_{\max} - 1$ , med  $y$  mätt i relativa enheter.

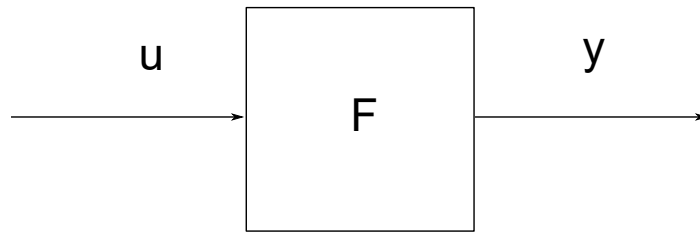
**Parametrar i svängningslika system** Om du har ett system med ett andra ordningens polynom i överförningsfunktionens nämnare, skriv polynomet som  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ . Då gäller det att

$$T_r \propto \frac{1}{\omega_0}, \quad T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}, \quad M = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

**Stationärt fel** Det stationära felet är felet som kvarstår efter lång tid.

## 3 Blockschema

**Syftet med blockschema** Blockschema är ett systematiskt sätt att rita reglerade system på.



Figur 1: Illustration av ett enkelt block i ett blockschema.

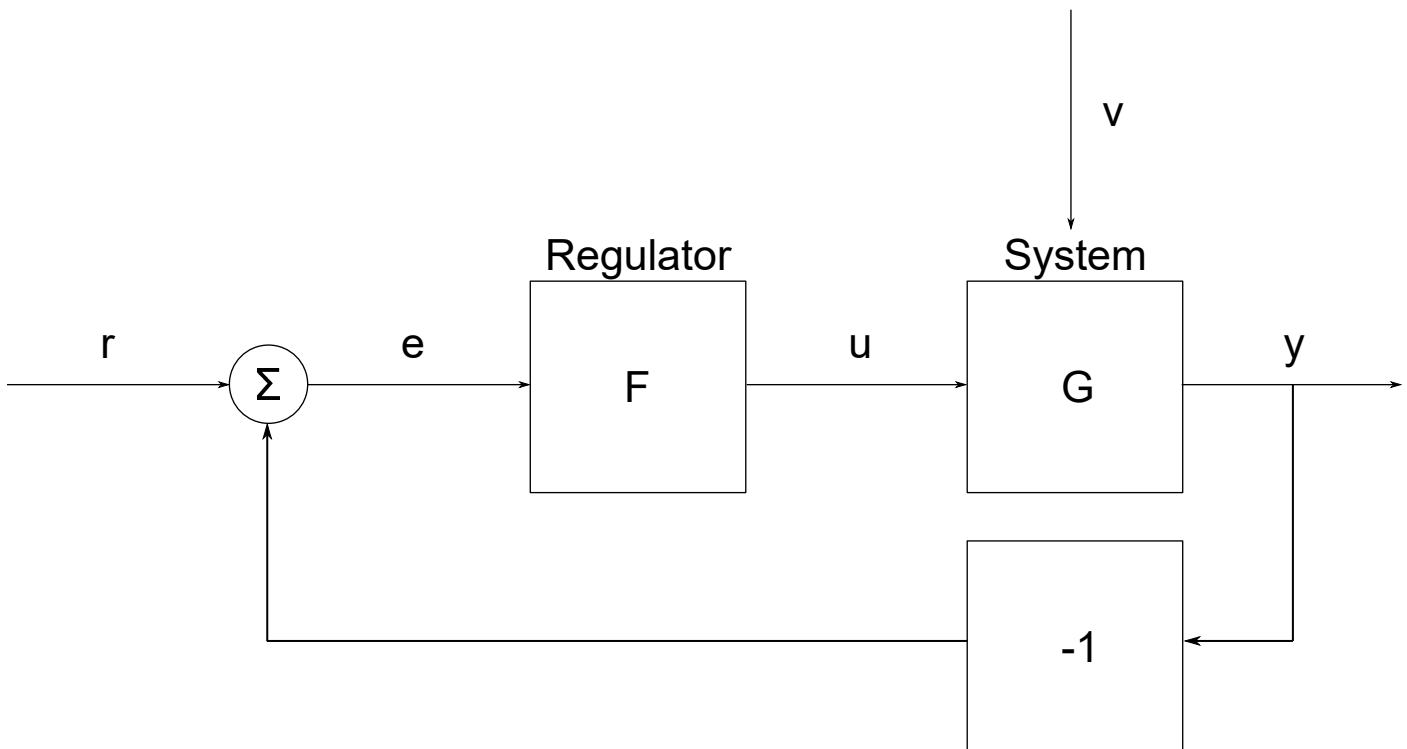
**Hur funkar det?** Betrakta blocket i figur 1.

Med denna figuren menar vi exakt att  $Y(s) = F(s)U(s)$ .

## 4 Negativ återkoppling

**Vad är negativ återkoppling?** I denna kursen kommer vi att studera hur man kontrollerar ett system vid att låta avvikelsen mot det önskade värdet kontrollera regleringen av storheten.

**Illustration i blockdiagram** Ett enkelt negativt kontrollsystem illustreras i figur 2.



Figur 2: Schematisk illustration av ett enkelt negativt återkopplad system.

**Beskrivning av systemet** Vi börjar beskrivningen av systemet med att inte betrakta störningar. I ena ändpunkten har vi

$$Y = GU = GFE.$$

Summationskomponenten till vänster ger oss

$$E = R - Y,$$

och därmed

$$Y = GFR - GFY.$$

Därmed kan vi skriva

$$Y = \frac{GF}{1 + GF}R.$$

**Återkopplad överföringsfunktion** För ett återkopplad system som kan skrivas som  $Y = G_C R$  definieras  $G_C$  som den återkopplade överföringsfunktionen. För systemet ovan har vi alltså

$$G_C = \frac{GF}{1 + GF} R.$$

**Samband mellan reglerfel och referens** Alternativt kan vi lösa systemet ovan för att få

$$R - E = GFE, \quad E = \frac{1}{1 + GF} R.$$

**Samband mellan referens och insignal** Systemet ovan kan även lösas för att ge

$$U = FR - FY = FR - GFU, \quad U = \frac{F}{1 + GF} R.$$

**Slutna systems poler** Vi ser att slutna system har poler där  $1 + GF = 0$ . Därmed bestäms systemets stabilitet av systemet och regulatorn.

**P-reglering** Principet i P-reglering är att välja en styrsignal som är proportionell mot storleken av felet, alltså

$$u = K(r - y) = Ke.$$

Det är här klart att för att få negativ återkoppling väljer vi  $K > 0$ .

Denna regleringsmetoden

- minskar inverkan av störning och modellfel för ett bra val av  $K$ .
- ökar snabbheten vid insvängning.
- stabiliserar instabila system.

Däremot kan regleringen gå fel om t.ex.

- systemet inte uppför sig som man tror.
- man har begränsningar i styrförmåga.
- man får instabilitet på grund av återkopplingen.

Det är även ett problem att om felet är stationärt, är även styrsignalen det, så även om du har ett nollskild fel klarar inte systemet nödvändigtvis anpassa sig.

**PID-reglering** PID står för proportionell integrerande deriverande. Denna sortens reglering löser många reglerproblem. Med PID-reglering väljer vi styrsignalen

$$u = K_P e + K_I \int_{t_0}^t d\tau e + K_D \frac{de}{dt}.$$

Alternativt kan vi skriva det som

$$u = K \left( e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e + T_D \frac{de}{dt} \right).$$

De tre ingående termerna i styrsignalen är

- proportionell återkoppling, som betraktar det nuvarande felet.
- integrerande återkoppling, som betraktar hur felet har uppfört sig.
- deriverande återkoppling, som betraktar hur felet kommer att uppföra sig.

**PI-reglering** PI-reglering använder ej den deriverande återkopplingstermen. Vi ser härifrån att vid ett stationärt tillstånd är antingen  $e = 0$ , annars ökar eller minskar  $u$  på grund av integraltermen.

Vi vill nu betrakta systemets insvängning. Om det stationära  $\bar{u}$  krävs för att  $e = 0$ , har vi

$$\bar{u} = K \left( e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e \right).$$

Vid att derivera detta fås

$$K \left( \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_I} e \right) = 0,$$

med lösning proportionell mot  $e^{-\frac{t}{T_I}}$ .

Notera att om man har stort fel kan PI-reglering ge problem. Därför använder man det typiskt när felen är små.

**PI-reglering i Laplacevärlden** Vid att Laplacetransformera uttrycket för styrsignalen i en PI-regulator, nämligen

$$u = K \left( e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t d\tau e \right),$$

fås

$$U = K \left( E + \frac{1}{T_I s} E \right),$$

och enligt figur 2 ser vi att

$$F(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right).$$

**Rotort** Betrakta ett system med överförningsfunktion  $G_O$  för det öppna systemet. Det slutna systemet kommer ha överförningsfunktion

$$G_C = \frac{G_O}{1 + G_O}.$$

$G_O$  är (tydligen) ofta på formen

$$G_O = K \frac{Q}{P},$$

där  $K$  är en parameter. Då får vi

$$G_C = \frac{KQ}{P + KQ}.$$

Systemet har alltså poler som ges av

$$P + KQ = 0, \quad \frac{P}{Q} = -K.$$

Detta kriteriet anger systemets rotort.

Vi antar nu att  $P$  och  $Q$  är polynom av grad  $n$  respektive  $m$ , där  $n \geq m$ . Då vet vi att kriteriet har  $n$  rötter, och rotorten har därför  $n$  grenar. Rötterna dyker antingen upp som reellvärda eller i par av komplexkonjugerade rötter, och därmed är rotorten symmetrisk med avseende på reella axeln. Vi vet även att rotorten har  $n - m$  asymptoter. Det gäller även att alla delar av reella axeln som har ett udda antal reella start- och ändpunkter till höger om sig tillhör rotorten.

För att rita rotorten kan du följa dessa steg:

- Beräkna överförningsfunktionen för det slutna systemet. Skriv nämnaren som  $P + KQ = 0$ .
- Hitta startpunkterna, alltså rötterna till  $P$ .
- Hitta ändpunkterna, alltså rötterna till  $Q$ .
- Bestäm antal asymptoter, alltså gradtalet till  $P$  minus gradtalet till  $Q$ .
- Beräkna punkterna där rotorten korsar reella axeln, alltså en dubbelrot till karakteristiska ekvationen.
- Bestäm deras riktningar genom att betrakta argumentet till  $\frac{P}{Q} = -K$  för stora  $s$ .
- Bestäm korsningar med imaginära axeln genom att sätta  $s = i\omega$ . Kom ihåg att  $K \geq 0$ .
- Bestäm vilka delar av reella axeln som tillhör rotorten. Det är de delar som har ett udda antal start- och slutpunkter till höger om sig.
- Rita.

**Nyquistkriteriet** Givet överförningsfunktionen

$$G_C = \frac{G_O}{1 + G_O}.$$

för ett slutet system, finns det några poler så att systemet är instabilt? En ide för att undersöka detta är att undersöka alla  $s$  i högre halvplan och se vilka värden på  $G_O$  man får. Detta gör vi genom att rita två halvcirklar med radier  $r$  respektive  $R$  i högre halvplan, förbinda dem med raka linjer i änderna och låta  $r$  gå mot 0 och  $R$  mot  $\infty$ .  $G_O$  kommer då anta värden på en kurva som kallas för Nyquistkurvan. Argumentvariationsprincipen från komplex analys ger oss då att antalet poler i höger halvplan till ett återkopplat system är lika med antalet poler i höger halvplan hos  $G_O$  plus antalet varv som Nyquistkurvan omsluter punkten  $-1$ . Speciellt, om  $G_O$  inte har poler i höger halvplan, är systemet stabilt om Nyquistkurvan inte omsluter  $-1$ .

Av någon anledning är den viktigaste delen där  $\gamma'$  skär imaginära axeln. Man ska även kunna observera att  $G_O(\infty) = 0$  och  $G_O(0) \approx \frac{K}{s^p}$ , där  $p$  är antal poler i origo.

**Skärfrekvens** Skärfrekvens  $\omega_c$  är frekvensen för vilken Nyquistkurvan skär enhetscirkeln. Det är en tumregel att denna är ungefär lik bandbredden.

**Fasmarginal** Fasmarginalen  $\phi_m$  är vinkeln mellan negativa  $x$ -axeln och punkten där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln.

**Phase-crossover-frekvens**  $\omega_p$  är frekvensen så att  $\arg G_O(i\omega_p) = -\pi$ .

**Amplitudmarginal** Amplitudmarginalen ges av  $A_m = \frac{1}{|G_O(i\omega_p)|}$ .

**Alternativt Nyquist-kriterium** Nyquistkriteriet kan nu formuleras som  $\phi_m > 0$ ,  $A_m > 1$ .

## 5 Frekvensanalys

**Fundamental ide** Eftersom periodiska funktioner kan skrivas som en summa av trigonometriska funktioner och funktioner som avtar tillräcklig snabbt kan skrivas som en integral över trigonometriska funktioner, vet vi att när vi studerar linjära system räcker det att studera systemets respons på en enda term, alltså en enda trigonometrisk funktion, och se hur den beror av frekvensen. Om vi tillför en signal  $u = \sin \omega t$  till ett system

med överföringsfunktion  $G$  får vi

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\infty d\tau g(\tau)u(t-\tau) \\ &= \operatorname{Im} \left( \int_0^\infty d\tau g(\tau)e^{i\omega(t-\tau)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( e^{i\omega t} \int_0^\infty d\tau g(\tau)e^{-i\omega\tau} \right) \\ &= \operatorname{Im}(e^{i\omega t}G(i\omega)) \\ &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)). \end{aligned}$$

Det kan även finnas transienta termer här, men om systemet är stabilt kommer dessa försvinna över tid. Vi ser alltså att systemets svar beror av  $G(i\omega)$ .

**Nyquistdiagram** Ett Nyquistdiagram är en uppritning av  $G(i\omega)$  för  $0 < \omega < \infty$ .

**Bodediagram** Ett Bodediagram är en uppritning av  $|G(i\omega)|$  och  $\arg G(i\omega)$  som funktioner av  $\omega$ .

**Bandbredd** Bandbredden är bredden på det frekvensintervallet där  $|G(i\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , och benämns  $\omega_B$ . Bandbredden kan ge information om systemets tillväxt, då hög bandbredd typiskt betyder snabb tillväxt. Man önskar typiskt att denna skall vara stor.

**Resonansfrekvens** Resonansfrekvensen  $\omega_r$  är den frekvens som ger starkast respons i systemet.

**Resonanstopp** Resonanstoppen är  $M_p = |G(i\omega_r)|$ , och ger typiskt en indikation på hur mycket översläng man får. Man önskar typiskt att denna ska vara liten.

**Stationärt fel** Det stationära felet ges av  $e_0 = 1 - G_C(0)$ .

**Brytningspunkter** Om överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(i\omega) = \frac{\prod(i\omega - z_i)}{\prod(i\omega - p_i)},$$

är alla  $z_i$  och  $p_i$  brytningspunkter för systemet. Här kommer de största lutningsändringarna i Bodediagrammet.

**Bodes relation** Låt  $G$  vara minimumsfas, dvs. ha alla sina nollställen och poler i vänstre halvplan, och  $G(0) > 0$ . Då gäller att om  $|G(i\omega)|$  i ett visst frekvensområde avtar med 20 dB per dekad (en dekad är en ökning i frekvens med en faktor 10), är  $\arg G(i\omega) \approx -90^\circ$ , och om  $|G(i\omega)|$  avtar med 40 dB per dekad, är  $\arg G(i\omega) \approx -180^\circ$ .

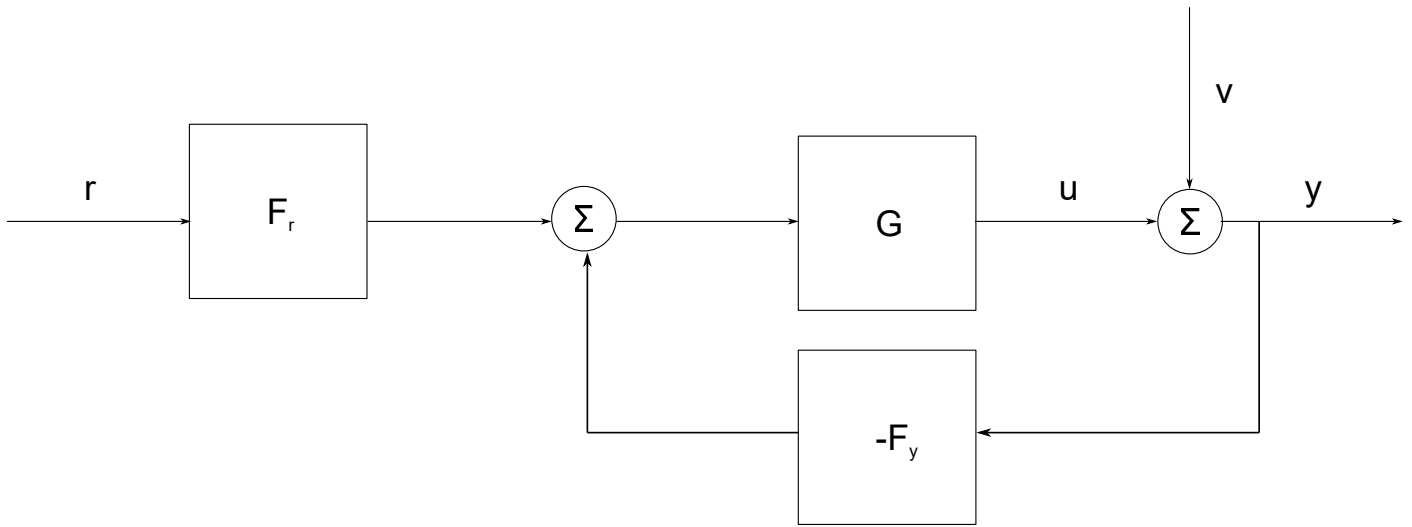
**Snabbhet och svängighet** Vi kan med tidigare resultat se att om  $G_O(i\omega)$  är nära 1 blir  $G_C(i\omega)$  stor, och om  $G_O(i\omega)$  är liten blir även  $G_C(i\omega)$  liten. Vi kan också se att ett ekvivalent kriterium för bandbredden är  $|G_O(i\omega) - 1| \leq \sqrt{2}$  för  $\omega \geq \omega_B$ .

**Resonanstopp och fasmarginal** Vi har

$$M_p \geq |G(i\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}\phi_m)}.$$

Speciellt ger liten fasmarginal stort översläng.





Figur 3: Illustration av tänkt reglersystem.

**Känslighet** Betrakta ett system som i figur 3. Om  $F_r = F_y = F$ , skulle systemet vara ekvivalent med välkända negativt återkopplade system. Vi är nu intresserade av att studera systemets känslighet för störningen.

Vi har allmänt

$$Y = V + U = V + G(RF_r - YF_y), \quad Y = \frac{GF_r}{1 + GF_y}R + \frac{1}{1 + GF_y}V.$$

Vi definierar då känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1 + GF_y}.$$

**Frekvensanalys av känslighetsfunktionen** Vi har

$$|S(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 + G(i\omega)F_y(i\omega)} \right| \leq M_s,$$

vilket kan skrivas som

$$|G(i\omega)F_y(i\omega) - (-1)| \leq \frac{1}{M_s}.$$

Alltså måste Nyquistkurvan för  $G(F_y$  vara utanför en cirkel med mittpunkt i  $-1$  och radie  $\frac{1}{M_s}$ .

**Robusthet** Medan en modell kan ha en överförningsfunktion  $G$ , kan ett reellt system ha en överförningsfunktion  $G' = G(1 + \Delta G)$ , där  $\Delta G$  är det relativa felet i överförningsfunktionen. Om man återkopplar systemet får man då

$$Y' = \frac{G'F}{1 + G'F}R = \dots = (1 + S'\Delta G)Y, \quad S' = \frac{1}{1 + G'F},$$

och  $S*\Delta G$  blir det relativa felet i  $Y$ . Detta betyder att om systemets känslighetsfunktion är liten, får modellfel liten inverkan.

**Robusthetskriteriet** Antag att  $G$  ger ett system som är stabilt. Är då ett motsvarande verkligt system stabilt? För att svara på det, kan vi använda Nyquistkriteriet. Kravet är att  $F_yG'$  ej får omsluta  $-1$ , vilket vi anser som uppfyllt om avståndet mellan  $F_yG'$  och  $F_yG$  är mindre än avståndet mellan  $F_yG$  och  $-1$ . Detta kan formuleras som

$$|F_y(i\omega)G'(i\omega) - F_y(i\omega)G(i\omega)| < |F_y(i\omega)G(i\omega) + 1|$$

och slutligen robusthetskriteriet

$$\left| \frac{F_y(i\omega)G'(i\omega)}{1 + F_y(i\omega)G(i\omega)} \right| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}.$$

Vi definierar nu den komplementära känslighetsfunktionen

$$T = \frac{GF_y}{1 + GF_y} = 1 - S.$$

Normalt är  $\Delta G$  ej känd, men vi har en övre skattning  $g$  av denna. Det verkliga systemet är då stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{g(\omega)},$$

vilket är ett tillräckligt, men ofta inte nödvändigt, villkor.

**Nackdelar med återkoppling** Återkoppling kan ge följande problem:

- Hög krets förstärkning ökar risken för instabilitet, speciellt vid modellfel.
- Om  $GF_y$  är stor, krävs stora styrsignaler. Det samma gäller i frekvensband där  $|G|$  är liten.
- Mätbrus suger, typ.

**Bodes sats** Om  $G'$  har relativt gradtal större än 2, gäller att

$$\int_0^\infty d\omega \log |S(i\omega)| = \pi \sum_{k=1}^m p_k,$$

där  $p_k$  är polerna till  $G'$  i högre halvplan.

## 6 Kompensering

**Ideen** Vi ser att det enklaste sättet att konstruera en bra regulator på är att ändra konstruktionen av det öppna systemet. Vi bestämmer alltså regulatorn  $F$  utifrån krav på

- snabbhet, alltså skärfrekvens.
- dämpning, alltså fasmarginal.
- stationärt fel, alltså krav på  $|G_O(0)|$ .

**Kompensation för snabbhet** För snabbhet räcker det med en P-regulator. Denna flyttar amplitudkurvan, men ändrar ej faskurvan. Alltså hjälper den oss att bestämma skärfrekvensen.

**Fasavancering** För att höja fasen kan man använda en deriverande länk, alltså en regulator med överföringsfunktion

$$F = K(\tau_D s + 1).$$

Typiskt kan man inte låta deriveringen verka fullt ut, så överföringsfunktionen blir i stället på formen

$$F_{\text{lead}} = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}.$$

Vi har

$$\arg F_{\text{lead}} = \dots = \arctan \frac{(1 - \beta)\tau_D \omega}{1 + \beta \tau_D^2 \omega^2},$$

och får därmed att den maximala fasförskjutningen är

$$\phi_{\text{max}} = \arctan \frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}}$$

för frekvensen

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\beta}\tau_D}.$$

**Lågfrekvensförstärkning** Lågfrekvensförstärkning kan ta bort stationärt fel. För att lågfrekvensförstärka kan man använda en integrerande länk, alltså en regulator med överförningsfunktion

$$F = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_D s}.$$

Denna har dock oändligt hög förstärkning för låga frekvenser, kan man i stället använda en fasretarderande länk, alltså en regulator med överförningsfunktion

$$F_{\text{lag}} = \frac{\tau_1 s + 1}{\beta \tau_1 s + \gamma}.$$

Vi har

$$\arg F_{\text{lag}} = \dots = -\arctan \frac{(1 - \gamma)\tau_1 \omega_c}{\gamma + \tau_1^2 \omega_c^2}.$$

Det kan däremot vara svårt att göra rätt val av parametrar.

**Arbetsgång** Arbetsgången i kompensering är att

- bestämma önskad bandbredd.
- bestämma önskad fasmarginal för att ge nödvändig fasökning vid skärfrekvensen.
- Gör lead- och laggrejer. Jag kanske borde fatta det.

## 7 Tillståndsrepresentationer

**Ideen** Den fundamentala ideen vi vill åt nu är att representera ett systems tillstånd på ett annat sätt än just dets tidsutveckling, till exempel som en vektor.

**Representation av linjära system** Tidsutvecklingen av ett system tillstånd kan i många linjära fall skrivas som

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

där  $\mathbf{u}$  beskriver en styrsignal. Utsignalen är typiskt på formen

$$y = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + du.$$

**Linjära system i Laplacedomänet** Genom att laplacetransformera ekvationen som beskriver ett systems tillstånd fås

$$s\mathbf{X} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}U,$$

givet att systemets starttillstånd är  $\mathbf{0}$ . Detta kan skrivas som

$$\mathbf{X} = (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}.$$

Insatt i uttrycket för  $Y$  fås

$$Y = \mathbf{c} \cdot \mathbf{X} + dU = (\mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} B + d)U,$$

och vi identifierar överförningsfunktionen som

$$G = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Av någon anledning är detta lika med

$$G = \frac{1}{sI - A} \mathbf{c}^T (sI - A)^{\dagger} \mathbf{b} + d$$

**Poler i tillståndsrepresentation** Det visar sig att systemets poler ges av

$$\det(sI - A) = s^2.$$

Detta ska tydligen motsvara  $A$ 's egenvärden.

**Linjärisering** Verkliga system är ofta olinjära, men vi ska försöka behandla dem som linjära ändå.

Betrakta ett system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \dot{y} = g(\mathbf{x}, u).$$

Anta konstant styrsignal  $u_0$ , och antag att systemet då tenderar mot ett stationärt tillstånd  $\mathbf{x}_0$ . Denna punkten uppfyller då

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) = \mathbf{0}, \quad h(\mathbf{x}_0, u_0) = y_0.$$

När vi linjäriserar, betraktar vi små variationer  $\Delta\mathbf{x}, \Delta u, \Delta y$  kring denna punkten. Vi får

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, u_0 + \Delta u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + \partial_u \mathbf{f} \Delta u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + \partial_u \mathbf{f} \Delta u.$$

På samma sätt fås

$$\frac{d\Delta y}{dt} = h(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, u_0 + \Delta u) - y_0 = h(\mathbf{x}_0, u_0) - y_0 + \vec{\nabla}_x h \cdot \Delta\mathbf{x} + \partial_u h \Delta u = \vec{\nabla}_x h \cdot \Delta\mathbf{x} + \partial_u h \Delta u.$$

Det totala systemet

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + \partial_u \mathbf{f} \Delta u, \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= \vec{\nabla}_x h \cdot \Delta\mathbf{x} + \partial_u h \Delta u \end{aligned}$$

är alltså linjärt för små ändringar.

**Lösning av system i representation** Betrakta ett system på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad y = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}.$$

Vi använder att

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At},$$

varför

$$\begin{aligned} e^{-At} \dot{\mathbf{x}} &= e^{-At} A\mathbf{x} + e^{-At} \mathbf{b}u, \\ \frac{d}{dt} (e^{-At} \mathbf{x}) &= e^{-At} \mathbf{b}u, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 e^{At} + \int_0^t d\tau e^{-A(t-\tau)} \mathbf{b}u. \end{aligned}$$

**Styrbarhet** Ett tillstånd  $\mathbf{x}$  är styrbart om man kan styra det motsvarande systemet från  $\mathbf{0}$  till  $\mathbf{x}$  med hjälp av en styrsignal  $u$  på ändlig tid.

**Test av styrbarhet** Vi noterar först att Cayley-Hamiltons sats ger

$$A^n + \sum_{i=1}^n a_i A^{n-i} = 0,$$

där  $a_i$  är koefficienterna i  $A$ 's karakteristiska polynom. Därmed kan alla potenser av  $A$  av högre ordning skrivas som en linjärkombination av potenser av  $A$  upp till och med  $n - 1$ . Därmed gäller det att

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) A^i$$

för några funktioner  $f_i$ .

Betrakta nu ett system och dets representation. Om systemets starttillstånd är  $\mathbf{0}$ , medför detta

$$\mathbf{x} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i \right) \mathbf{b}$$

där

$$\gamma_i = \int_0^t d\tau f_i(\tau) u(\tau).$$

Med andra ord är de styrbara  $\mathbf{x}$  linjärkombinationer av de olika  $A^i \mathbf{b}$ , alltså att det ligger i bildrummet till styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}].$$

Systemet är styrbart om  $\det(\mathcal{S}) \neq 0$ .

**Observerbarhet** Ett tillstånd  $\mathbf{x}$  är icke observerbart om utsignalen  $y$  är identiskt noll då initialvärdet är  $\mathbf{x}$  och insignalen identisk noll.

**Test av observerbarhet** Vi vill nu testa om ett tillstånd  $\mathbf{x}_0$  är observerbart. Om vi har styrsignal  $u = 0$ , gäller det att

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_0, y = \mathbf{c} \cdot e^{At} \mathbf{x}_0, \frac{d^n y}{dt^n} = \mathbf{c} \cdot A^n e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Speciellt är  $y = 0$  för alla  $t$  om

$$y(0) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0 = 0, \frac{dy}{dt} = \mathbf{c} \cdot A \mathbf{x}_0 = 0, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = \mathbf{c} \cdot A^{n-1} \mathbf{x}_0 = 0.$$

Givet att detta stämmer, ger Cayley-Hamiltons sats att även högre ordningens derivator av  $y$  kommer vara 0. Därmed ligger de icke-observerbara tillstånden i nollrummet till observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Systemet är observerbart  $\det(\mathcal{O}) \neq 0$ .

**Minimalhet** Ett system är minimalt om insignal-utsignalsambandet ej kan beskrivas som att tidigare tillstånd ges av en kombination av styrbara och observerbara bidrag.