Sammanfattning av SF1674 Flervariabelanalys

Yashar Honarmandi

28 februari 2018

Sammanfattning

Denna sammanfattningen innehåller centrala definitioner och satser i SF1672 Flervariabelanalys.

Innehåll

1 Vektoralgebra

1.1 Satser

Cauchy-Schwarz' olikhet Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Bevis

Triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Bevis

Omvända triangelolikheten Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Bevis

Vektorer och förhållande mellan komponenter Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med komponenter $x_1, \ldots, x_n$. Då gäller att

$$|x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ i = 1, \ldots, n.$$

Bevis

2 Mängdlära

2.1 Definitioner

Öppna klot Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerad i $\mathbf{a}$ med radius r är

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Omgivningar till punkter $U \subset \mathbb{R}^n$ är en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum $\mathbf{a}$.

Inre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en inre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M.

Yttre punkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en yttre punkt till M om det finns ett öppet klot kring $\mathbf{a}$ i M:s komplement, definierad som $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Randpunkter Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}$ är en randpunkt till M om varje öppet klot kring $\mathbf{a}$ innehåller punkter i M och M:s komplement.

Rand Mängden av alla randpunkter till en mängd M är randen till M. Denna betecknas ∂M.

Öppna och slutna mängder En mängd är öppen om ∂M är i M:s komplement och sluten om ∂M är i M.

Begränsade mängder En mängd M är begränsad om $\exists c > 0$ så att $|\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} \in M$.

Kompakta mängder En mängd är kompakt om den är sluten och begränsad.

Bågvis sammanhängande mängder D är en bågvis sammanhängande mängd om varje par punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ finns en kurva $\mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$ så att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

Axelparallella rektangler En axelparallell rektangel i $\mathbb{R}^2$ är på formen

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Nollmängder En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ är en nollmängd om vi för alla $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar med area mindre än eller lika med ε.

Kvadrerbara mängder En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ är kvadrerbar om ∂D är en nollmängd.

2.2 Satser

Grafer som mängder Grafen av en kontinuerlig funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ är en nollmängd.

Bevis

3 Funktioner

3.1 Definitioner

Grafen av en funktion Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen av f är

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Lokala gränsvärden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Gränsvärden mot oändligheten Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$|\mathbf{x}| > \omega, \mathbf{x} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D$ om $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}$ existerar och $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})$.

Likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Lokala extrempunkter Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i $\mathbf{a}$ om $\exists\delta > 0$ så att $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ för alla $\mathbf{x} \in D$ så att $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Lokala minima definieras analogt. Om $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ har f ett strängt lokalt maximum i $\mathbf{a}$.

Kvadratiska former Låt A, B, C vara konstanter. En kvadratisk form från $\mathbb{R}^2$ är på formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

För en mer allmän definition, se definitionen från sammanfattningen av SF1672.

Positivt och negativt definita kvadratiska former En kvadratisk form är

- positivt definit om $Q(h, k) > 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- positivt semidefinit om $Q(h, k) \geq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt definit om $Q(h, k) < 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- negativt semidefinit om $Q(h, k) \leq 0$ för $(h, k) \neq (0, 0)$.
- indefinit om Q antar såväl positiva som negativa värden.

Trappfunktioner En funktion Φ definierat på en axelparallell rektangel Δ är en trappfunktion om det finns en indelning av Δ i mindre rektanglar

$$\Delta_{i,j} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

så att Φ är konstant på varje Δ_i.

Avskärningar Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En begränsdad kvadrerbar delmängd D av Ω är en avskärning om f är begränsad på D.

3.2 Satser

Gränsvärden av funktioner och deras komponenter Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ är ekvivalent med att $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$, där subskriptet i indikerar den i-te komponenten av varje vektor.

Bevis Detta följer direkt av att

$$|f_i(\mathbf{x}) - b_i| \leq |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{i=1}^{p} |f_i(\mathbf{x}) - b_i|.$$

Största och minsta värde för funktioner Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då antar f ett största och ett minsta värde på D.

Bevis

Definitionsmängd och likformig kontinuitet Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara kompakt. Då är f likformigt kontinuerlig på D.

Bevis

Satsen om mellanliggande värden Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt D vara bågvis sammanhängande. Om f antar värderna $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ i D, antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Bevis

Inversa funktionssatsen Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen, f vara C^1 och $|\mathrm{d}f\,(\mathbf{a})| \neq 0$. Då finns det öppna omgivningar U, V till $\mathbf{a}, f(\mathbf{a})$ så att $f : U \to V$ är bijektiv och $f^{-1} : V \to U$ är C^1.

Bevis

Implicita funktionssatsen Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1 och $\mathbf{a}$ vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$. Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en öppen omgivning U av $\mathbf{a}$ så att restriktion av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1-funktion.

Bevis

Derivatan av en implicit funktion Låt $F(\mathbf{x})$ vara C^1, $\mathbf{a}$ vara på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$ och $F(\mathbf{x}) = C$ definiera en implicit funktion nära $\mathbf{a}$. Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ har man

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})}.$$

Bevis Eftersom F är konstant nära $\mathbf{a}$ använder vi kedjeregeln, vilket ger

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a})\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = 0.$$

Om $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ får man resultatet i satsen.

4 Derivata

4.1 Definitioner

Partiella derivator Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är partiellt deriverbar med avseende på x_i i den inre punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas partiella derivatan av f med avseende på x_i i $\mathbf{a}$ och betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Differentierbarhet Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är differentierbar i $\mathbf{a}$ om $\exists A_1, \ldots, A_n$ och en $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

och $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. f är differentierbar om detta är uppfylld för alla $\mathbf{a} \in D$.

C^1 Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

C^k Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f är klass C^k om f alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D.

Gradient Låt f vara reellvärd och differentierbar i $\mathbf{x}$. Gradienten definieras som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i.$$

Riktningsderivata Låt $|\mathbf{v}| = 1$. Derivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{v}$ är

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Stationära punkter $\mathbf{a}$ är en stationär punkt till f om $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Differentialer Låt $f : D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen och låt f vara differentierbar. Funktionen $\mathbf{h} \to \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i$ kallas differentialen av f i $\mathbf{x}$ och betecknas $\mathrm{d}f\,(\mathbf{x})$. Vid att skriva differentialen som en matris

$$\mathrm{d}f\,(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right]$$

kan differentialet skrivas som en matrismultiplikation enligt

$$\mathrm{d}f\,(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right]\mathbf{h}.$$

Funktionalmatriser Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$. f:s funktionalmatris definieras som

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

och betecknas $f'(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f\,(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}(f_1 \dots f_p)}{\mathrm{d}(x_1 \dots x_n)}(\mathbf{x})$.

Linjarisering Linjariseringen av en funktion f ges av

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f\,(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

Divergens Divergensen av ett vektorfält $\mathbf{u}$ definieras som

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(()\mathbf{x}).$$

4.2 Satser

Differentierbarhet och kontinuitet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Bevis Definitionen implicerar $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Differentierbarhet och partiell deriverbarhet Låt f vara differentierbar i $\mathbf{a}$. Då är f partiellt deriverbar med avseende på alla variabler i $\mathbf{a}$ och $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$.

Bevis Med $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_i$ ger definitionen av differentierbarhet

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_i).$$

Gränsvärdet när t går mot 0 ger på den ena sidan definitionen av den partiella derivatan och A_i på andra sidan.

Differentierbarhet av funktioner i C^1 Varje $f \in C^1$ är differentierbar.

Bevis Låt $\mathbf{a} \in D$. Enligt envariabelsanalysens medelvärdesats har vi

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}+\theta_1 h_1\mathbf{e}_1)\\
&f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+h_2\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}+h_1\mathbf{e}_1+\theta_2 h_2\mathbf{e}_2)\\
&\vdots\\
&f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\mathbf{e}_i+\theta_n h_n\mathbf{e}_n),
\end{aligned}
$$

där alla $\theta_i \in [0,1]$. Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga kan vi skriva

$$
\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}+\sum_{i=1}^{k-1} h_i\mathbf{e}_i+\theta_k h_k\mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\sum_{i=1}^{n} h_i\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \rho_k(\mathbf{h}),
$$

där $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Då får man

$$
f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \rho_i(\mathbf{h})\right) h_i.
$$

Den sista delen av beviset använder

$$
\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{h}) h_i}{|\mathbf{h}|}.
$$

Allmänna kedjeregeln Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ och låt alla komponenter av f, g vara differentierbara. Då är alla komponenter av $f \circ g$ differentierbara. Med $u = f \circ g$ har vi

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t_k}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\mathbf{t}))\frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{t})
$$

för varje komponent.

Specialfall: $p = 1$ Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, där alla g_i är partiellt deriverbara. Då är $f \circ g$ deriverbar och

$$
\frac{\mathrm{d} f \circ g}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(t).
$$

Bevis

Konstantfunktioner och gradient Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och bågvis sammanhängande och $f \in C^1(D, R^n)$. Om $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in D$, är f konstant i D.

Bevis Använd att

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x}(t)) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = 0.$$

Gradient och riktningsderivata Gradienten i riktning $\mathbf{v}$ ges av

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Bevis Bilda $u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = u(\mathbf{g}(t))$, vilket ger $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)$. Enligt kedjeregeln blir detta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}(0) \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Maximal riktningsderivata $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken f växar snabbast i $\mathbf{a}$, och den maximala tillväxthastigheten är $\left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right|$.

Bevis Cauchy-Schwarz-olikheten ger

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{u}} f = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq \left|\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a})\right| |\mathbf{v}|,$$

med likhet om och endast om $\mathbf{v}$ är parallell med gradienten.

Gradient och nivåytor Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Då är gradienten normal på nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Bevis Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1-kurva i nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$. Detta ger

$$0 = \frac{\mathrm{d}f \circ \mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0).$$

Eftersom $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0)$ är parallell med nivåytan är beviset klart.

Symmetri av derivator i C^2 För varje $f \in C^2$ gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Bevis Vi beviser endast för en tvåvariabelfunktion, då det allmänna fallet följer direkt från detta. Låt $q(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y), \phi(t) = f(x+h, t) - f(x, t)$. Detta ger

$$\begin{aligned} q(h,k) &= \phi(y+k) - \phi(y) \\ &= k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(y+\theta k) \\ &= k(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta k)) \\ &= kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\eta h, y+\theta k), \end{aligned}$$

där vi har användt medelvärdesatsen två gånger. Då har vi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{q(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Beviset kan upprepas i motsatt ordning, och detta fullförar beviset.

Taylors formel Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, $(a,b) \in D$ och f vara C^3. Då gäller:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) =& f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) \\ &+ \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(h,k), \end{aligned}$$

där $B(h,k)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Bevis Låt $F(t) = f(a+th, b+tk)$. Detta ger

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk), \\ &\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t) = h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk) + h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right), \\ &\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}t^3}(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3. \end{aligned}$$

F:s Taylorpolynom kring 0 är

$$F(t) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0)t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta)t^3.$$

Vi evaluerar i 1:

$$
\begin{aligned}
F(1) =& F(0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(0) + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta) \\
f(a+h,b+k) =& f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(\theta).
\end{aligned}
$$

Vi analyserar sen den sista termen:

$$
\frac{\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}t^3}(t)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)h^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)k^3\right).
$$

Vi ser att detta är konvergent eftersom vi t.ex. kan betrakta

$$
\left|\frac{3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)h^2k}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}\right| \leq C\frac{|h|^2}{h^2+k^2}\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq C.
$$

Derivatan är kontinuerlig, vilket enligt sats garanterar att den är begränsad. Därmed är den sista termen på rätt form, och beviset är klart.

Lokala extrempunkter och partiella derivator Om f har ett lokalt extremvärde i $\mathbf{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i $\mathbf{a}$ är $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, i = 1, \ldots, n$.

Bevis Följer av motsvarande sats i en variabel applicerad på $x_i \to f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$.

Kvadratiska former och extrempunkt Låt (a,b) vara en inre punkt till D och en stationär punkt till f. Om f:s Taylorpolynom kring (a,b) ges av $f(a+h,b+k) = c + Q(h,k)$. Då gäller att:

- Om Q är positivt definit har f ett strängt lokalt minimum i (a,b).
- Om Q är negativt definit har f ett strängt lokalt maximum i (a,b).
- Om Q är indefinit har f en sadelpunkt (varken ett maximum eller ett minimum) i (a,b).

Små ändringar och funktionalmatriser Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ vara C^1. Då kan vi för små $|\mathbf{h}|$ skriva

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f\,(\mathbf{x})\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$$

där ρ tar värden i $\mathbb{R}^p$ och $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Bevis Betrakta varje komponent.

Kedjeregeln och funktionalmatriser

$$\mathrm{d}(f \circ g)\,(\mathbf{t}) = \mathrm{d}f\,(g(\mathbf{t}))\,\mathrm{d}g\,(\mathbf{t})$$

Bevis Inses lätt.

Derivation under integraltecken Antag att $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, a \leq x \leq b$. Då är funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \to \int\limits_a^b f(s,x)\,\mathrm{d}x$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$ och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis

Utvidgad derivation under integraltecken Antag att $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, A \leq x \leq B$. Låt b vara en C^1-funktion av $\alpha < s < \beta$ med $A < b(s) < B$. Då är $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \to \int\limits_a^{b(s)} f(s,x)\,\mathrm{d}x$ deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x + f(s,b(s))\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}(s).$$

Derivation under integraltecken för generaliserade integraler Antag att

- $f, \frac{\partial f}{\partial s}$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta, x \geq a$.
- $F(s) = \int\limits_a^\infty f(s,x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent för $\alpha < s < \beta$.
- Till varje kompakta delintervall $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ finns en majorerande funktion g så att

- $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right| < g(x)\ \forall\ s \in [\alpha_1, \beta_1], x \geq a$.
- $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Då är F deriverbar och

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \int\limits_a^\infty \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis

5 Kurvor

5.1 Definitioner

Kurvor i $\mathbb{R}^p$ En kurva i $\mathbb{R}^p$ är en funktion $t \to \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

C^1-kurvor En kurva är klass C^1 om alla dess komponenter är C^1.

Enkla kurvor En kurva är enkel om den inte skär sig själv.

Slutna kurvor En kurva är sluten om dens start- och slutpunkter sammanfaller.

Tangentvektor Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en C^1-kurva definierad på $[\alpha,\beta]$, $\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ vara strängt växande och ϕ, ϕ^{-1} vara C^1. Då definieras tangentvektorn till kurvan av

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

Bågelement Låt γ vara en C^1-kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$. Bågelementet definieras som

$$\mathrm{d}s = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

Enhetstangent Låt γ vara en C^1-kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$. Enhetstangenten definieras som

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|}.$$

Högernormal Låt γ vara en C^1-kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Högernormalen definieras som

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right|}.$$

Längd Långden av en kurva ges av

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

Integral av skalärfunktioner längs med kurvor Integralen av en funktion f längs med kurvan med parametrisering $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

Kurvintegraler Låt $F : D \to \mathbb{R}^2, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}))$ vara kontinuerlig på en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ och låt γ vara en C^1-kurva med parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ för $\alpha \leq t \leq \beta$. Kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs γ ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} P(\mathbf{r}(t))\frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t}(t) + Q(\mathbf{r}(t))\,\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t}(t)$$

och betecknas

$$\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

eller, om du är en omoralsk människa,

$$\int\limits_{\gamma} P(\mathbf{r})\,\mathrm{d}x + Q(\mathbf{r})\,\mathrm{d}y\,.$$

Cirkulation Låt γ vara enkel och sluten. Då definieras $\oint\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ som cirkulationen av $\mathbf{F}$ längs γ.

Flöde Låt γ vara en C^1-kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$. Flödet av vektorfältet $\mathbf{u}$ genom γ från vänster till höger definieras som

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}(t)\,\mathrm{d}s\,.$$

Integraler och väg Låt Ω vara en öppen mängd. $\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i Ω om $\oint\limits_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Ω.

Konservativa fält Låt Ω vara en öppen mängd. $\mathbf{F}$ kallas ett konservatit fält, eller ett potentialfält, om det finns en C^1-funktion U i Ω så att $\mathbf{F} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} U$. U kallas då potentialet till $\mathbf{F}$.

Exakta differentialformer Låt Ω vara en öppen mängd. $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ är exakt i Ω om det finns en C^1-funktion U så att $\mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.

5.2 Satser

Greens formel och flöde

$$\int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}(t)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{D} \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right)(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Bevis

Konservativa fält och exakta differentialformer Att fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt är ekvivalent med att dfferentialformen $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ är exakt.

Bevis

Kurvintegraler av konservativa fält Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt fält med potential U. Då gäller att

$$\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$$

för alla kurvor γ som går från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$. Speciellt gäller det att integraler är oberoende av vägen.

Bevis

Integralers oberoende och potentialer Låt $\mathbf{F}$ vara kontinuerlig i en bågvis sammanhängande mängd Ω. Om $\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ är oberoende av vägen har $\mathbf{F}$ en potential i Ω.

Bevis

Komponenters derivata och potential Om $\omega \subset \mathbb{R}^2$ är en enkelt sammanhängande mängd och

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

i Ω, har $\mathbf{F} = (P, Q)$ ett potential i Ω.

Bevis Om $\gamma \subset \Omega$ är en sluten kurva finns $D \subset \Omega$ så att $\gamma = \partial D$. Alltså gäller

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \pm \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

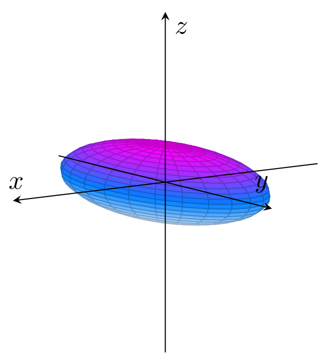
Alltså beror integralen ej på valet av γ.

6 Kvadratiska ytor

Detta är de flesta kvadratiska ytorna man kan träffa på i $\mathbb{R}^3$, komplett med snygga illustrationer.

Ellipsioider En ellipsioid beskrivs av en ekvation på formen

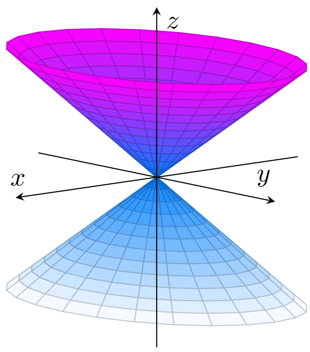
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Figur 1: Illustration av en ellipsioid.

Koner En kon beskrivs av en ekvation på formen

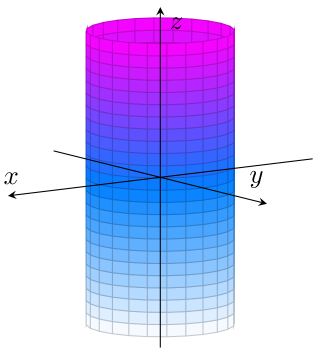
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$



Figur 2: Illustration av en kon.

Cylindrar En cylinder beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



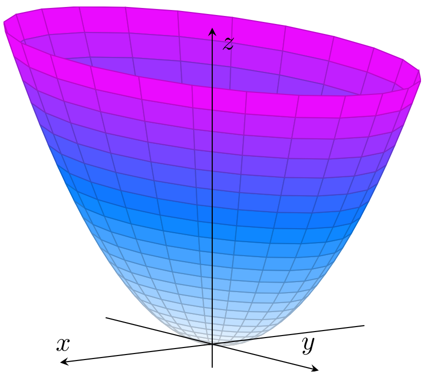
Figur 3: Illustration av en cylinder.

Elliptiska paraboloider En elliptisk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

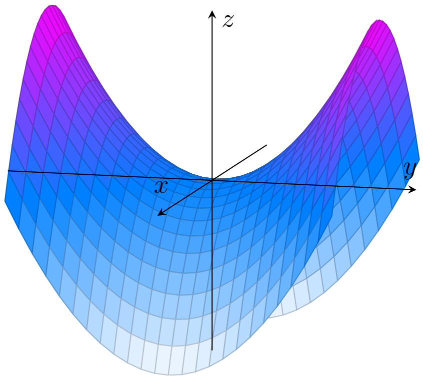
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

Hyperbolska paraboloider En hyperbolsk paraboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



Figur 4: Illustration av en elliptisk paraboloid.



Figur 5: Illustration av en hyperbolsk paraboloid.

Enmantlade hyperboloider En enmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvationpå formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

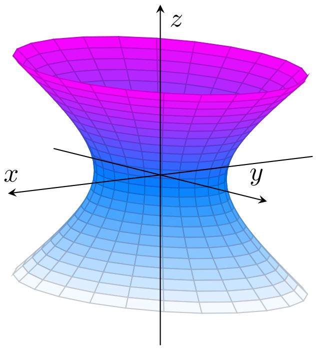
Tvåmantlade hyperboloider En tvåmantlad hyperboloid beskrivs av en ekvation på formen

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

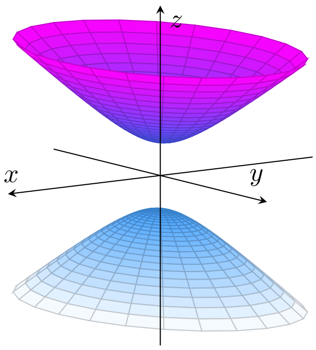
7 Optimering

7.1 Optimering på mängder

Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och $f : K \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f ett största värde M på K, förmodligen enligt sats. Om vi även



Figur 6: Illustration av en enmantlad hyperboloid.



Figur 7: Illustration av en tvåmantlad hyperboloid.

antar att f är C^1 på K och att $f(\mathbf{a}) = M$, är $\mathbf{a}$ antingen

- en inre punkt av K så att $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = 0$, enligt sats.
- en punkt på ∂K.

För att optimera på icke-kompakta mängder, kan man hitta en punkt $\mathbf{a}$ i dne icke-kompakta mängden U så att $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}) = 0$. Därefter väljer man en smart kompakt delmängd K till U kring denna punkten så att man kan visa att f antar ett extremvärde på K i $\mathbf{a}$. Om man har valt K smart, kan man då även använda detta för att visa att f antar ett globalt extremvärde för U i $\mathbf{a}$.

7.2 Optimering med bivillkor

Låt $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ med $D_f, D_g \subset \mathbb{R}^2$, och anta att f optimeras under bivillkoret $g(x, y) = 0$ i någon inre punkt $(a, b) \in D_f \cap D_g$. Då är $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a, b), \vec{\boldsymbol{\nabla}} g(a, b)$ parallella.

För att bevisa detta antar vi $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Implicita funktionssatsen säjer då att det finns en parametrisering $(x(t), y(t))$ av nivåkurvan $g(x, y) =$

0 nära (a,b), som vi väljer så att den startar i (a,b). Funktionen $\phi(t) = f(x(t),y(t))$ har ett lokalt extremvärde i $t=0$, och vi har

$$0 = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(a,b) \cdot (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)).$$

Eftersom gradienten är vinkelrät på nivåytan, är den parallell med $\vec{\boldsymbol{\nabla}} g(a,b)$ enligt sats.

7.3 Optimering med flera bivillkor

Låt $f : D_f \to \mathbb{R}, g_i : D_{g_i} \to \mathbb{R}, i = 1,\ldots,p$ med $D_f, D_{g_1},\ldots,D_{g_p} \subset \mathbb{R}^n$, och anta att f optimeras under bivillkoret $g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_n(\mathbf{x}) = 0$ i någon inre punkt $\mathbf{a} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \cdots \cap D_{g_p}$. Då är $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathbf{a}), \vec{\boldsymbol{\nabla}} g_1(\mathbf{a}),\ldots,\vec{\boldsymbol{\nabla}} g_p(\mathbf{a})$ linjärt beroende.

7.4 Minsta kvadratmetoden

Låt $\{(a_i,b_i\}_{i=1}^n$ vara en mängd punkter där minst två a_i är olika. Vi vill välja en linje $y = kx + l$ så att

$$Q(k,l) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - (ka_i + l))^2$$

minimeras.

Vi vill visa att Q har ett entydigt minimum och att detta minimum löser normalekvationerna

$$k\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + l\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$
$$k\sum_{i=1}^{n} a_i + nl = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Vi beviser detta vid att definiera $M = Q(K_0, l_0)$ och bilda strimlan S_1 som begränsas av linjerna

$$ka_1 + l = b_1 \pm \sqrt{M}$$

och strimlan S_2 som begränsas av linjerna

$$ka_2 + l = b_2 \pm \sqrt{M}.$$

Vi har då att $(ka_1 + l - b_1)^2 \geq M$ för $(k,l) \notin S_1$ och $(ka_2 + l - b_2)^2 \geq M$ för $(k,l) \notin S_2$. Då minst två a_i är olika kan vi anta att S_1, S_2 inte är parallella. Då är $K = S_1 \cap S_2$ kompakt och $Q(k,l) > M, (k,l) \notin K$. Det minsta värdet av Q på K är även det minsta värdet på $\mathbb{R}^2$.

För ett minimum på K har vi

$$\frac{\partial Q}{\partial k}(k,l) = \sum_{i=1}^{n} 2(b_i - ka_i - l)(-a_i) = 2l\sum_{i=1}^{n} a_i + 2k\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l}(k,l) = 2k\sum_{i=1}^{n} a_i + 2nl - 2\sum_{i=1}^{n} b_i = 0,$$

vilket ger normalekvationerna. Dessa har en lösning ty om man skriver systemet på matrisform, ges determinanten av vänsterledets matris av

$$\begin{aligned}
&n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \\
=&\sum_{i=1}^{n} 1^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \\
=&|(a_1,\ldots,a_n)|^2|(1,\ldots,1)|^2 - |(a_1,\ldots,a_n)\cdot(1,\ldots,1)|^2.
\end{aligned}$$

Enligt Cauchy-Schwarz' olikhet är detta alltid nollskild ty minst två a_i är olika, och de involverade vektorerna aldrig är parallella.

8 Integraler

8.1 Definitioner

Dubbelintegraler av trappfunktioner Dubbelintegralen av en trappfunktion Φ över Δ definieras som

$$\iint\limits_{\Delta} \Phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum c_{i,j} A_{i,j},$$

där $c_{i,j}$ är värdet Φ antar på $\Delta_{i,j}$ och $A_{i,j}$ är arean av $\Delta_{i,j}$.

Riemann-integrerbarhet En begränsad funktion f är integrerbar över en rektangulär region Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ så att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $\iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \varepsilon$.

Dubbelintegraler Låt f vara integrerbar över rektanglet Δ. Då finns det ett λ så att $\iint\limits_{\Delta} \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \lambda \leq \iint\limits_{\Delta} \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ för alla trappfunktioner Φ, Ψ så att $\Phi \leq f \leq \Psi$. Detta λ definieras som dubbelintegralen av f över Δ och betecknas $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Integration över godtyckliga områden Låt $D \in \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd, $f : D \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion och

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ som innehåller D. Givet detta sätter vi

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Riemannsummor En Riemannsumma är på formen

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) A_{i,j}$$

där $A_{i,j}$ betecknar arean till den lilla fyrkanten som (ξ_i, η_j) ligger i. Summan är ment att approximera

$$\iint\limits_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Generaliserade integraler Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ med $f(x,y) \geq 0$ på Ω. $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är konvergent om mängden

$$M = \left\{ \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \mid D \text{ är en avskärning av } \Omega \right\}$$

är uppåt begränsad och divergent annars. Om integralen är konvergent definierar vi

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup M.$$

Dubbelintegraler av funktioner med varierande tecken Givet funktionen f, bilda

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & f(x,y) \geq 0, \\ 0, & f(x,y) < 0 \end{cases}, f^-(x,y) = \begin{cases} 0, & f(x,y) \geq 0, \\ f(x,y), & f(x,y) < 0 \end{cases}.$$

Detta ger egenskaperna $|f(x,y)| = f^+(x,y) + f^-(x,y), f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$.

Integralen $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är konvergent om $\iint_\Omega f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ och $\iint_\Omega f^-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är konvergenta. Vi sätter då

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_\Omega f^-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Multipelintegraler För $D \subset \mathbb{R}^n$ definierar vi

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

som ett gränsvärde av Riemannsummor.

Volym i $\mathbb{R}^n$ Funktionen

$$\mu(D) = \int\limits_D \mathrm{d}\mathbf{x}$$

är volymen av mängden $D \subset \mathbb{R}^n$.

8.2 Satser

Egenskaper för dubbelintegraler av trappfunktioner För integralet av två trappfunktioner Φ, Ψ gäller att

- $\iint\limits_\Delta \alpha\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\iint\limits_\Delta (\Phi + \Psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_\Delta \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Om $\Phi \leq \Psi$ på Δ är $\iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_\Delta \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- $\left|\iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leq \iint\limits_\Delta |\Phi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Om Δ har gränserna a, b i x-led och c, d i y-led är $\iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \Phi\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Bevis

Ordning av dubbelintegraler Låt f vara integrerbar över rektanglet Δ. Då gäller att

$$\iint\limits_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

Bevis

Integration över områden begränsade av kurvor Låt f vara kontinuerlig på $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ och låt α, β vara kontinuerliga på $[a, b]$. Då är f integrerbar över D och

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Bevis

Integration över nollmängder Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint\limits_N f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Bevis Låt Δ vara en rektangel så att $N \subset \Delta$, låt $\varepsilon > 0$ och låt R vara unionen av ändligt många axelparallella rektanglar så att

- $N \subset R$.
- R har area mindre än ε.
- $R \subset \Delta$.

Definiera den utvidgade funktionen

$$f_N(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in N, \\ 0, & (x, y) \notin N. \end{cases}$$

Låt $m = \min\limits_{\Delta} f_N, M = \max\limits_{\Delta} f_N$ och välj trappfunktioner Φ, Ψ så att

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} m, & (x, y) \in R, \\ 0, & (x, y) \in \Delta \setminus R, \end{cases} \quad \Psi(x, y) = \begin{cases} M, & (x, y) \in R, \\ 0, & (x, y) \in \Delta \setminus R. \end{cases}$$

Då är $\Phi \leq f \leq \Psi$. Vi har att

$$\iint\limits_\Delta (\Psi - \Phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\Psi - \Phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq (M - m)\varepsilon,$$

och därmed är f integrerbar över N. Dessutom gäller att

$$\iint\limits_\Delta \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_\Delta f_N\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_\Delta \Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

vilket implicerar att

$$m\varepsilon \leq \iint\limits_N f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \leq M\varepsilon.$$

Detta implicerar att

$$\iint\limits_N f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0,$$

och beviset är klart.

Medelvärdesatsen för integraler Antag att f är kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar och bågvis sammanhängande mängd $D \subset \mathbb{R}^2$. Låt $m = \min\limits_D f, M = \max\limits_D f$. Integration ger

$$mA_D \leq \iint\limits_D f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \leq MA_D.$$

Alltså finns ett $C \in [m, M]$ så att

$$\frac{1}{A_D} \iint\limits_D f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = C.$$

Bevis Satsen om mellanliggande värden ger att $\exists(\xi, \eta) \in D$ så att $f(\xi, \eta) = C$. Alltså

$$\frac{1}{A_D} \iint\limits_D f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = f(\xi, \eta).$$

Variabelbyte i dubbelintegraler Låt $(u, v) \to (g(u, v), h(u, v))$ vara en bijektiv C^1-avbildning $E \to D$, där E och D är öppna och kvadrerbara delmängder av $\mathbb{R}^2$, och antag $J(u, v) = \left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right| \neq 0$. Då är

$$\iint\limits_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint\limits_E f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v\,.$$

Bevis

Integration med nivåkurvor Antag att

- $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett kvadrerbart område.
- $g : D \to \mathbb{R}$ är C^1.
- $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ är C^1, där $a = \min_D g(x, y), b = \max_D g(x, y)$.
- Areafunktionen $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ given av

  $$A(u) = A_{G_u}, G_u = \{(x, y) \in D \mid g(x, y) \leq u\}$$

  är C^1. Då gäller att

  $$\iint\limits_D h(g(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b h(u)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

  $$\iint\limits_D g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b u\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}(u)\,\mathrm{d}u$$

Konvergens av generaliserade integraler För generaliserade integraler med positiv integrand gäller att om den inre enkelintegralen är konvergent, är dubbelintegralen konvergent om och endast om den yttre enkelintegralen är konvergent.

Bevis

Ordningsbyte i generaliserade integraler Låt dubbelintegralen av f över D vara så att både den yttre och inre integralen är konvergent. Då kan man byta ordning på integralen.

Bevis

Konvergens av dubbelintegraler av funktioner med varierande tecken $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är konvergent om och endast om $\iint_\Omega |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är konvergent.

Bevis

Volym av n-dimensionella enhetsklotet Låt B_n vara enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$. Detta uppfyller

$$\mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}).$$

Bevis

$$
\begin{aligned}
\mu(B_n) &= \int_{B_n} \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{x_1^2+\dots+x_{n-2}^2\le 1}\cdots\int \left(\iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2\le 1-(x_1^2+\dots+x_{n-2}^2)} \mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{n-2} \\
&= \int\limits_{B_{n-2}} \pi(1-(x_1^2+\dots+x_{n-2}^2))\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{n-2} \\
&= \int\limits_0^1 \pi(1-r^2)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

där $V(r) = r^{n-2}\mu(B_{n-2})$. Detta ger

$$
\begin{aligned}
\mu(B_n) &= \pi(n-2)\mu(B_{n-2}) \int\limits_0^1 (1-r^2)e^{n-3}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi(n-2)\mu(B_{n-2}) \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}).
\end{aligned}
$$

$$
\int\limits_D f(x,\dots,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z
$$

9 Ytor

9.1 Definitioner

Ytor En yta är en funktion $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$.

Tangentplan Tangentplanet till en kurva spänns upp av vektorerna

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_s(s,t) &= \left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}s}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}s}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}s}(s,t) \right), \\
\mathbf{r}_t(s,t) &= \left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}(s,t), \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}(s,t) \right),
\end{aligned}
$$

.

Positiv sida av yta Den positiva sidan av en yta är den sidan nromalvektorn $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ pekar mot.

Enhetsnormal

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|}$$

är en ytas enhetsnormal.

Areaelement

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

ör en ytas arealement.

Vektoriellt arealement

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{N}\,\mathrm{d}S = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

är ytans vektoriella areaelement.

Area av yta Låt $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vara en parametrisering av en yta Y. Då ges arean av

$$A_Y = \int_D \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,.$$

Detta skrivs även

$$A_Y = \iint_Y \mathrm{d}S\,.$$

Integration av skalärfunktioner över ytor Låt $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vara en parametrisering av en yta Y. Då ges integralet av funktionen f över Y av

$$\int_D f(\mathbf{r}(s,t))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

och betecknas

$$\iint_Y f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S\,.$$

Flöde genom yta

$$\iint_Y \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

ör flödet av $\mathbf{u}$ genom Y.

9.2 Satser

10 Samband mellan integraler

Greens sats Låt

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen.
- $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ är C^1.
- $D \subset \Omega$ är kompakt.
- ∂D vara styckvis C^1.

Då gäller att

$$\oint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Märk att det första integralet kan skrivas som ett kurvintegral av ett vektorfält.

Bevis Beviset ges enbart för en rektangel. Det allmäna beviset involverar att betrakta flera små rektanglar.

$$\begin{aligned}\int\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{c}^{d} Q(b,y) - Q(a,y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{a}^{b} P(x,d) - P(x,c)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Dela randen till rektangeln upp i $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, där dessa beskrivas av $x = b, y = d, x = a, y = c$ respektiva. Då kan det sista integralet skrivas som

$$\int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_3} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_4} P(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Varje integral över randen involverar enbart en variabel och en funktion. Därmed kan vi lägga till integralet över den andra variabeln av den andra funktionen och få

$$\left(\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}\right) P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,,$$

och beviset är klart.

Divergenssatsen Låt $\mathbf{u}$ vara ett C^1-vektorfält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $K \subset \Omega$ vara kompakt och ∂K bestå av en eller flera C^1-ytor med utadriktad normal. Då gäller att

$$\iint\limits_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_K \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{u}(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Bevis Beviset ges enbart för ett rätblock. Det allmäna beviset involverar att betrakta flera rätblock, tror jag.

Vi delar integralerna upp som

$$\iint\limits_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_i \iint\limits_{\partial K} u_i \mathbf{e}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \, ,$$
$$\int\limits_K \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{u}(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \sum_i \int\limits_K \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\cdot} u_i \mathbf{e}_i(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

och ser att det räcker att visa att

$$\iint\limits_{\partial K} u_i \mathbf{e}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_K \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\cdot} u_i \mathbf{e}_i(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, , i = 1, 2, 3.$$

I fallet $i = 1$ får man

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial K} u_i \mathbf{e}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int\limits_e^f \int\limits_c^d u_1(b, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int\limits_e^f \int\limits_c^d u_1(a, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int\limits_e^f \int\limits_c^d \int\limits_a^b \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int\limits_e^f \int\limits_c^d \int\limits_a^b \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\cdot} u_i \mathbf{e}_i \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .
\end{aligned}$$

Med ett motsvarande bevis för $i = 2, 3$ är beviset klart.