

# Sammanfattning av SE1055 Hållfasthetslära

Yashar Honarmandi  
yasharh@kth.se

28 februari 2019

## **Sammanfattning**

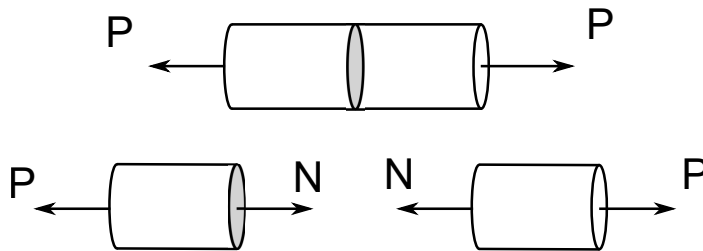
Detta är en sammanfattning av SE1055 Hållfasthetslära. Den innehåller essentiell teori.

# Innehåll

1	Enaxliga problem	1
2	Koncept i tre dimensioner	2
3	Balkar	4
4	Analys i tre dimensioner	8
5	Energi	14
6	Materialers beteende	16

# 1 Enaxliga problem

**Krafter på en stång** Betrakta en stång med tvärsnittsarea  $A$  som utsätts för en kraft  $P$  i varje ända, med motsatt riktning i varje ända, som visad i figur 1.



Figur 1: Illustration av en stång som utsätts för en dragkraft och de orsakade inre krafterna.

Kraften  $P$  i änderna propageras som inre krafter i stängen. Om vi betraktar det indikerade tvärsnittet, manifesteras den inre kraften som en normalkraft på varje halva. Om vi definierar positiv riktning för normalkraften och dragkraften som i figuren, ger kraftjämvikten att  $N = P$ . Om dragkraften blir en tryckkraft, ändrar givetvis normalkraften riktning.

**Spänning** I hållfasthetslära är vi intresserade av påkänningen på materialet. Den beror av beloppet av normalkraften, men kan även spridas ut över tvärsnittet. Därför definierar vi spänningen

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Jämvikten från innan ger

$$\sigma = \frac{P}{A}.$$

**Deformation** När en stång utsätts för spänning, kommer den att deformeras. Mer specifikt kommer den förlängas med en längd  $\delta$ . Eftersom förlängningen av varje del kommer från kraftjämvikten mellan normalkraften och dragkraften, kommer förlängningen för en given dragkraft bero av längden. Vi definierar därför töjningen

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

där  $L_0$  är stångens ursprungliga längd.

**Typer av samband i hållfasthetslära** I hållfasthetsläran har vi tre typer av samband:

- samband mellan krafter.
- samband mellan deformationer.
- konstitutiva samband (beskrivar materialbeteende).

**Hookes lag** Om man gör dragningsprov på olika material för små deformationer, blir plottet av  $\sigma$  mot  $\varepsilon$  approximativt linjär. Från detta får vi Hookes lag:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

$E$  är elasticitetsmodulen, och beskriver hur styvt materialet är.

Kombinationen av det vi har tills nu ger

$$P = \frac{EA}{L}\delta$$

för en homogen stång som utsätts för en dragkraft  $P$ .

Om ett material komprimeras, visar det sig att det elastiska beteendet ofta är likt, med samma elasticitetsmodul.

**Normalspänning** Vi utvidgar vår definition av spänning till spänningar som fördelas inhomogent över tvärsnittet vid att betrakta en inre kraft  $\Delta F$  som verkar på ett arealelement  $\Delta A$ , med riktningar som tidigare. Då definieras normalspänningen som

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

**Normaltöjning** Vi utvidgar även definitionen av töjning till töjningar som fördelas ojämnt över stavens längd. Om deformationen i en punkt är  $u(x)$ , ges töjningen av ett litet element med längd  $\Delta x$  av

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}.$$

Vi ser av detta att töjningen är linjär, så vi kan addera bidrag till den.

**Termoelasticitet** Låt  $T$  beteckna en stångs temperatur. En temperaturändring orsakar en termisk töjning

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T,$$

där  $\alpha$  är längdutvidgningskoefficienten. Man behöver givetvis utgå från en referenstemperatur.

**Allmänt enaxligt tillstånd** Från det vi har sett hittills, kan vi skriva upp en differentialekvation som beskriver det enaxliga tillståndet.

Betrakta en stång med variabel tvärsnittsytta där det överallt i kroppen verkar en volymskraft  $K(x)$  (kraft per volym), samt krafter  $P_V$  respektive  $P_H$  i varje ända. Vi betraktar ett litet element med tjocklek  $dx$ . I ena ändan verkar kraften  $K(x)A dx$  och en normalkraft  $N(x)$  på grund av krafterna på volymelementet till vänster, och i andra ändan verkar en normalkraft  $N(x + dx)$  på grund av krafterna på volymelementet till höger.

Kraftjämvikten ger

$$\begin{aligned} N(x + dx) - N(x) + K(x)A dx &= 0, \\ dN x + K(x) &= 0. \end{aligned}$$

Vi inför nu definitionen av töjning och skriver den som en linjärkombination av bidrag från spänning och termoelasticitet, vilket ger

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T, \\ \sigma &= E(\varepsilon - \alpha \Delta T). \end{aligned}$$

Kombinerad med definitionen av töjning ger det

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sigma A) + K(x)A &= 0, \\ \frac{d}{dx}(EA(\varepsilon - \alpha \Delta T)) + K(x)A &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + K(x)A &= \frac{d}{dx}(EA\alpha \Delta T). \end{aligned}$$

Detta kommer med randvillkor, och är typiskt randvillkor i deformationen eller i spänningen. Eftersom spänningen är proportionell mot derivatan av deformationen, motsvarar dessa Dirichlet- respektive Neumannvillkor.

## 2 Koncept i tre dimensioner

**Tvärkontraktion** När man gör ett dragningsprov på en stång, genomgår den deformation i längdriktning samtidigt som tjockleken minskar. Detta kallas tvärkontraktion. Töjningen  $\varepsilon_t$  av tjockleken är relaterad till töjningen i längdriktning genom

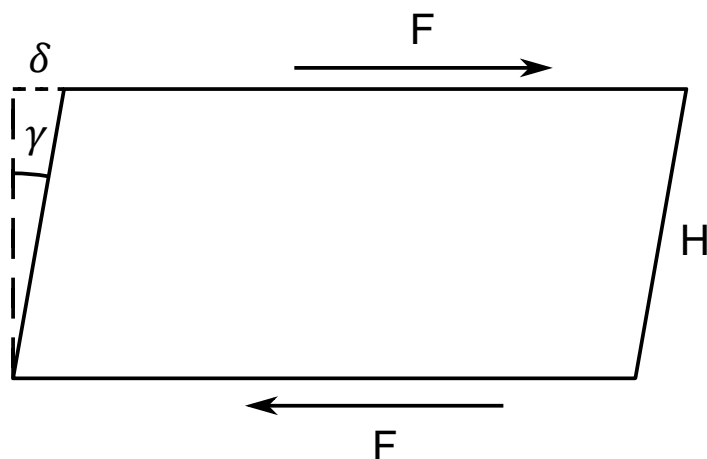
$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon,$$

där  $\nu$  är Poissons konstant. Termodynamiken ger att  $-1 \leq \nu \leq 0.5$ .

**Skjuvspänning** Betrakta två plattor som ligger på varandra och dras åt motsatta håll av en kraft  $F$  på varje. Om de inte dras isär, balanseras dragkrafterna av krafter i kontaktytan. Låt  $A$  vara kontaktytan mellan plattorna. Då definieras skjuvspänningen som

$$\tau = \frac{F}{A}.$$

**Deformation från skjuvkrafter** Betrakta ett rätblock med basarea  $A$  och höjd  $H$  som dras av motsatt riktade krafter med belopp  $F$  på varje sida, illustrerad i figur 2.



Vi kan här definiera skjuvspänningen som

$$\tau = \frac{F}{A},$$

då vi kan tänka oss att plattorna som dras isär är tunna skikt i materialet. Skjuvkrafterna kommer skapa en deformation  $\delta$  på en sida motsvarande vridning med en vinkel  $\gamma$ . Denna vinkeln uppfyller

$$\tan \gamma = \frac{\delta}{H}.$$

För små deformationer kan vi approximera

$$\gamma = \frac{\delta}{H}.$$

Experimentellt har man sett att

$$\tau = G\gamma,$$

där  $G$  är skjuvmodulen.

**Samband mellan materialstorheter** För ett isotropt material gäller att

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

**Statiskt bestämt och obestämt problem** Ett problem är statiskt bestämt om alla inre krafter och reaktionskrafter kan bestämmas enbart med jämvikt. Detta är möjligt om det verkar maximalt 3 krafter i planet eller 6 i rymden.

Om ett problem ej är statiskt bestämt, är det statiskt obestämt. Då räcker icke jämviktsekvationerna, och det motsvarar att man kan ta bort ett element och vara kvar i jämvikt.

**Elastisk vridning** Antag att man har en stång med cirkulärt tvärsnitt fäst i ena ändan som man vrider med ett moment  $M_v$  (i varje ända). Detta ger en vinkeldeformation  $\theta$  i det yttersta tvärsnittet och  $\gamma$  relativt linjen parallellt med stångens riktning. Om stången har en längd  $l$  och en radius  $a$ , ger detta

$$L\gamma = a\theta.$$

Kombinerad med resultatet från delen om skjuvspänning ger detta

$$\frac{\theta}{L} = \frac{\tau}{G}.$$

Antag nu att  $\tau = \frac{M_v}{K}$ . Detta ger

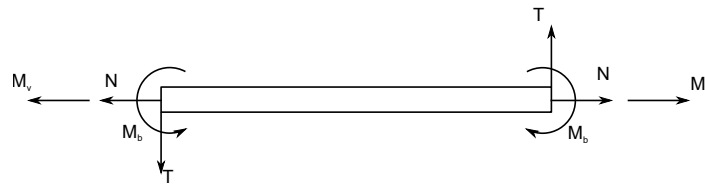
$$\frac{\theta}{L} = \frac{M_v}{GK}.$$

$K$  är en konstant som beror av stångens geometri.

Hur beräknar vi  $K$ ? Jo, man integrerar momentets differential över tvärsnittet. Vi vet att detta differentialet ges av kraft gånger arm, och det är så skjuvspänningen kommer in.

### 3 Balkar

**Balkböjning - fundamentala koncept** För att beskriva balkar behöver vi införa fler olika sorters inre krafter och moment. Dessa illustreras i figur 2. Vi har infört normalkraften  $N$ , tvärkraften  $T$ , det böjande



Figur 2: Illustration av inre krafter och moment i en balk.

momentet  $M_b$  och det vridande momentet  $M_v$ .

Låt  $u$  vara balkens deformation normalt på dens utsträckning. Vi har från enaxliga tillståndet att

$$\frac{\Delta u}{L} = \frac{N}{EA}.$$

Låt  $\theta$  och  $\phi$  vara vinklarna för böjning och vridning. Vi har från innan att

$$\frac{\Delta \theta}{L} = \frac{M_v}{GK}, \frac{\Delta \phi}{L} = \frac{M_b}{EI}.$$

**Allmänt tillstånd för en balk** Snitta nu ut ett element med längd  $dx$  från en balk. Om balken påverkas av en last  $q$  per längdenhet, ger kraftjämvikten

$$T(x+dx) - T(x) + q(x)dx = 0,$$

vilket ger

$$dT = -q.$$

Momentjämvikt kring centrum ger

$$M(x+dx) - M(x) - (T(x) + T(x+dx))dx = 0.$$

Bidraget från tvärkraften ges av

$$\begin{aligned} T(x) + T(x+dx) &= 2T(x) + \frac{dT}{dx}dx \\ &= 2T(x) - q(x)dx. \end{aligned}$$

Insatt i momentjämvikten fås

$$M(x + dx) - M(x) - \frac{1}{2} dx (T(x) + T(x + dx)) = M(x + dx) - M(x) - T(x) dx + \frac{1}{2} dx q(x) dx.$$

Vi försummar nu alla andra ordningens termer, vilket ger

$$\frac{dM}{dx} = T.$$

Kombinerat med det förra resultatet fås

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

**Randvillkor för balkar** En balk kan i en given ända vara

- fri, vilket ger  $T = 0$  och  $M = 0$ .
- fritt upplagd, vilket ger  $M = 0$ .
- glidinspänd, vilket ger  $T = 0$ .
- fast inspänd, vilket ej ger villkor för de inre krafterna och momenterna.

**Balkböjning vid normalspänning** Vid böjning inför vi en  $z$ -koordinat normal på medellinjen genom balken, och centrerar våra koordinater i tvärsnittets tyngdpunkt. Vi antar till att börja med att tvärsnittet är symmetriskt med avseende på  $z$ -axeln, samt att

- plana tvärsnitt förblir plana.
- tvärsnitt förblir vinkelräta mot medellinjen.
- det för varje  $z$  är ett enaxligt samband mellan  $\sigma$  och  $\varepsilon$ .
- alla deformationer är små och för balkar vars längd är mycket större än deras tjocklek.

De två första uppfylls om skjuvspänningen är försumbar jämförd med normalspänningen.

Betrakta nu ett litet element med ursprunglig längd  $L_0$  vars medellinje har böjts så den har krökningsradie  $R$ . Geometri ger oss

$$(R + z)\phi = L_0(1 + \varepsilon(z)).$$

I  $z = 0$  har vi

$$R\phi = L_0(1 + \varepsilon_0),$$

vilket ger

$$L_0(1 + \varepsilon_0) + z\phi = L_0(1 + \varepsilon(z)),$$
$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \frac{\phi}{L_0}z.$$

Vi kan även substituera för  $\phi$  för att få

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \frac{1 + \varepsilon_0}{R}z.$$

Om vi snittar och får någon given normalkraft  $N$  på ytan, gäller det att

$$N = \int_A dF$$
$$= \int_A dA \sigma.$$

Hookes lag ger

$$\begin{aligned} N &= \int_A dA E \left( \varepsilon_0 + \frac{z}{R} \right) \\ &= \int_A dA E \varepsilon_0 + E \frac{z}{R}. \end{aligned}$$

Om vi antar att elasticitetsmodulen är konstant över ytan, kan vi dra ut konstanter. Den andra integralen är då tyngdpunktens  $z$ -koordinat (om vi antar homogen massfördelning), som per definition var 0. Detta ger

$$N = E \varepsilon_0 A.$$

Vi beräknar vidare det böjande momentet  $M_y$ , som är normalt på både längdriktningen och  $z$ -koordinaten. Detta ges av

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A dA \sigma z \\ &= \int_A dA E z \left( \varepsilon_0 + \frac{z}{R} \right) \\ &= \int_A dA E z \varepsilon_0 + \frac{E}{R} z^2. \end{aligned}$$

Första integralen är igen lika med 0. Andra är relaterad till yttröghetsmomentet

$$I_y = \int_A dA z^2.$$

Vi får alltså

$$M_y = \frac{E I_y}{R}.$$

Vi kan nu sätta ihop dessa resultat och få

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z.$$

Vid ren böjning, dvs. ingen normalkraft, kan vi skriva

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_y| |z|_{\max}}{I_y}.$$

Vi kan införa böjmotståndet

$$W_b = \frac{I_y}{|z|_{\max}},$$

och får då

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_y|}{W_b}.$$

**Allmänt tillstånd för en balk** Vi försöker nu sammanställa dessa resultat till ett allmänt tillstånd för balken.

Geometri ger oss att

$$\frac{1}{|R|} = \frac{\frac{d^2 u}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



För små deformationen är derivatan mycket liten. Om vi definierar positiv krökning som att balken kröks nedåt, fås

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Materialsamband ger

$$M_b = -EI_y \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Vi har även

$$\frac{d^2M_b}{dx^2} = -q,$$

vilket slutligen ger

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2u}{dx^2} \right) = q.$$

Till detta tillståndet hör olika sorters randvillkor. Några enkla varianter av randvillkor är

- $u$  eller  $T$  givna i ändpunkterna.
- $\frac{du}{dx}$  eller  $M$  givna i ändpunkterna.

Vi kan även karakterisera ändpunkter som

- fria, dvs.  $T = 0$  och  $M = 0$ .
- fritt upplagga, dvs.  $u = 0$  och  $M = 0$ .
- fast inspända, dvs.  $u = 0$  och  $\frac{du}{dx} = 0$ .
- glidande inspända, dvs.  $\frac{du}{dx} = 0$  och  $T = 0$ .

**Superposition** Balkens allmänna tillstånd är linjärt, så om man har någon komplicerad sammansättning av yttre laster och krafter, kan man separera problemet i olika delproblem, lösa de separat och superponera lösningen.

**Plasticering av balk** Betrakta en balk som endast utsätts för ett böjmoment  $M$ . Vid inledande plasticering är

$$\sigma_{\max} = \sigma_s.$$

Vi vet i detta fallet att

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{W_b},$$

vilket ger

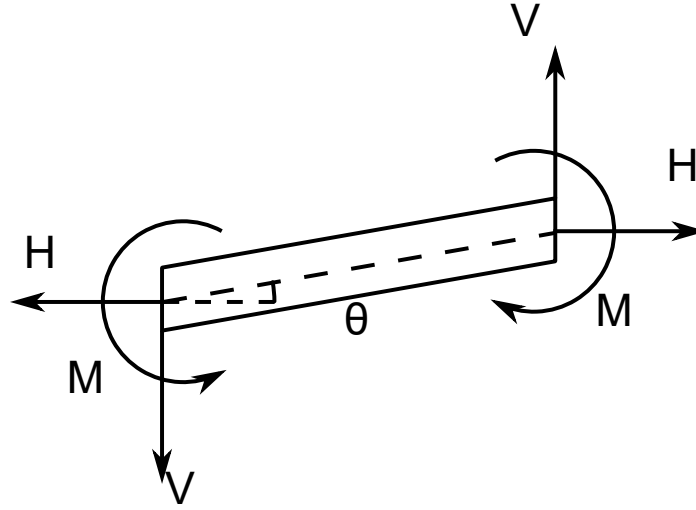
$$M_s = W_b \sigma_s.$$

Vid full plasticering är spänningen lika med  $\sigma_s$  i hela balken. Från detta kan man beräkna böjmomentet. Som ett exempel fås för ett rektangulärt tvärsnitt som böjs i höjdriktning:

$$M_f = 2 \cdot \sigma_s b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Man kan även visa att detta är lika med  $\frac{3}{2}M_s$ .

Vid avlastning kan man använda superposition för att få spänningstillståndet. Det kommer visa sig att restspänningen är diskontinuerlig i mitten.



Figur 3: Snitt i en axialbelastad balk, där snittet görs vertikalt relativt det odeformerade läget.

**Tillstånd för axialbelastad balk** Betrakta en balk som utsätts för en axial belastning, och snitta ut ett element i den enligt figur 3. Kraft- och momentjämvikter ger

$$\begin{aligned} V(x+dx) - V(x) + q dx &= 0, \\ H(x+dx) - H(x) &= 0, \\ M(x+dx) - M(x) - V(x) dx + H \frac{dw}{dx} dx &= 0, \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att vinkeln  $\theta$  ges av derivatan av utböjningen och försummat det andra ordningens bidraget till momentet från den utbrädda lasten. Detta ger

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dH}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = V - H \frac{dw}{dx}.$$

Man kan visa att till första ordningen är  $H = N$ , och  $N$  ges av den yttre axiella lasten (och eventuella volymkrafter). Kombinationen av dessa ekvationer ger då

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

## 4 Analys i tre dimensioner

**Spänning** Vi definierar spänningsvektorn

$$\mathbf{s} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{A}$$

där  $\mathbf{F}$  är kraften på det lilla arealelementet. Den har en komponent normalt på ytan, som är normalspänningen, och en komponent som är parallel med ytan, som är skjuvspänningen. Vi får

$$\sigma = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau^2 = |\mathbf{s}|^2 - \sigma^2.$$

**Skjuvspänningar i tre dimensioner** Snitta nu ut en infinitesimal kub. På ytorna, till exempel ytan som är normal på  $x$ -axeln, kan man dekomponera spänningsvektorn i en normalspänning  $\sigma_x$  och två skjuvspänningar  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$ , och motsvarande i andra riktningar. Om vi tittar på momentjämvikt kring kubens centrum i  $x$ -riktning fås

$$\begin{aligned} 2\tau_{yz} dx dz \cdot \frac{1}{2} dy - 2\tau_{zy} dx dy \cdot \frac{1}{2} dz &= 0, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned}$$

En motsvarande härledning kan göras för de andra sidorna. Tillkommer det andra termer om skjuvspänningen varierar? Ja, men dessa kommer vara av högre ordning, och kan försummas.

**Spänningsmatris** Vi kan nu definiera en spänningsmatris

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Enligt argumentet ovan är denna symmetrisk.

**Spänningar på godtycklig yta** Om man har en godtycklig yta med normalvektor  $\mathbf{n}$ , kan det visas att spänningarna på ytan ges av

$$\mathbf{s} = S\mathbf{n}.$$

Vi kan då skriva

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{n}^T S \mathbf{n}, \\ \tau &= |S\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n}^T S \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

**Huvudspänningar** Finns det orienteringar sådana att  $\mathbf{s} = \sigma\mathbf{n}$ ? Att hitta sådana är ett egenvärdesproblem. Matematiken ger att det finns sådana orienteringar, och att de är ortogonala mot varandra.

Beteckna även den största respektive minsta huvudspänningen som  $\sigma_1$  respektive  $\sigma_3$ . Då ges den maximala skjuvspänningen i materialet av

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

**Plana tillstånd** Ett specialfall är när  $z$ -riktningen är en huvudriktning för spänningen. Då är skjuvspänningarna i  $xy$ -planet, dvs.  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . Om  $\sigma_z = 0$ , har man plan spänning.

Betrakta plan spänning på ett plan som bildar en vinkel  $\phi$  med  $y$ -axeln. Normalvektorn ges av

$$\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y.$$

Vi får då

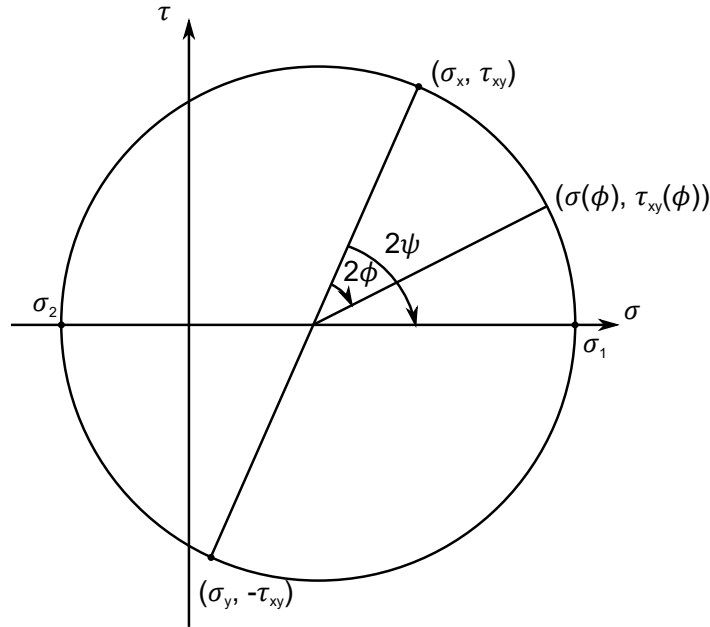
$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos[2]\phi + \sigma_y \sin[2]\phi + 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi, \\ \tau &= \tau_{xy} \cos 2\phi + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\phi. \end{aligned}$$

**Mohrs spänningscirkel** Mohrs spänningscirkel är ett sätt att grafiskt ta fram plana spänningar vid rotation av ett plan. För att konstruera cirkeln, rita upp ett  $\sigma, \tau$ -koordinatsystem och två punkter  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  och  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ , där dessa tas från något givet tillstånd. Dessa punkter skall vara i motstående ändar av cirkeln, och från detta kan cirkeln ritas, som i figur 4.

En rotation moturs av koordinatsystemet med en vinkel  $\phi$  motsvarar en rotation medurs av tillståndet på cirkeln med en vinkel  $2\phi$ .

Det visar sig att cirkeln skär  $\sigma$ -axeln i största och minsta huvudspänningen. Det finns även en vinkel  $\psi$  som koordinatsystemet måste roteras med så att det blir parallellt med huvudriktningarna. Ur denna geometrin kan vi få följande samband, som är helt konsekventa med tensorbetraktningen gjort ovan:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \tan(2\psi) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \\ \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned}$$



Figur 4: Mohrs spänningscirkel.

**Jämvikt i tre dimensioner** Snitta ut en liten kub. Jämvikt i  $x$ -riktning ger

$$\sigma(\mathbf{x} + dx \mathbf{e}_x) dy dz - \sigma(\mathbf{x}) dy dz + \tau_{zx}(\mathbf{x} + dz \mathbf{e}_z) dx dy - \tau_{zx}(\mathbf{x}) dx dy + \tau_{yx}(\mathbf{x} + dy \mathbf{e}_y) dx dz - \tau_{yx}(\mathbf{x}) dx dz = 0,$$

vilket implicerar

$$\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{zx} = 0.$$

På motsvarande sätt fås

$$\begin{aligned} \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y + \partial_z \tau_{yz} &= 0, \\ \partial_y \tau_{xz} + \partial_z \tau_{yz} + \partial_z \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

Om det finns volymkrafter i kroppen, dyker den även upp som en term här.

**Töjning i tre dimensioner** I tre dimensioner definieras töjningen i termer av båglängden som

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0},$$

där  $ds_0$  är den odeformerade båglängden och  $ds$  är den deformerade båglängden.

**Tredimensionellt samband mellan töjning och deformation** Betrakta en kropp som deformeras med en deformationsvektor  $\mathbf{u}$ . Snitta ut en kub och titta på två hörn i positioner  $x$  och  $x + \frac{d}{dx}$ , med övriga koordinater lika. I det odeformerade läget är avståndet mellan dessa  $ds_0 = dx$ . I det deformerade läget är avståndet

$$\begin{aligned} ds &= (x + dx + u_x(x + dx, y, z)) - (x + u_x(x, y, z)) \\ &= dx + u_x(x + dx, y, z) - u_x(x, y, z) \\ &= dx + \frac{du_x}{dx} dx, \end{aligned}$$

och töjningen i  $x$ -riktning ges av

$$\varepsilon_x = \partial_x u_x.$$

På samma sätt fås

$$\varepsilon_y = \partial_y u_y, \varepsilon_z = \partial_z u_z.$$

**Skjuvdeformation i tre dimensioner** Betrakta en kub som deformeras i  $xy$ -planet. Sidan närmast  $x$ -axeln bildar vinkeln  $\beta$  med  $x$ -axeln och sidan närmast  $y$ -axeln bildar vinkeln  $\alpha$  med  $y$ -axeln. Den totala skjuvvinkeln ges av  $\gamma_{yx} = \alpha + \beta$ . Geometrin ger

$$\gamma_{xy} = \frac{u_x(x, y + dy, z) - u_x(x, y, z)}{dy} + \frac{u_y(x + dx, y, z) - u_x(x, y, z)}{dx} = \partial_y u_x + \partial_x u_y.$$

på motsvarande sätt fås

$$\gamma_{yz} = \partial_z u_y + \partial_y u_z, \gamma_{xz} = \partial_z u_x + \partial_x u_z.$$

**Töjningsmatrisen** Vi definierar töjningsmatrisen

$$T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

där vi inför  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ . Detta medför att  $T$  är symmetrisk. Det gäller att töjningen i riktningen  $\mathbf{n}$  ges av

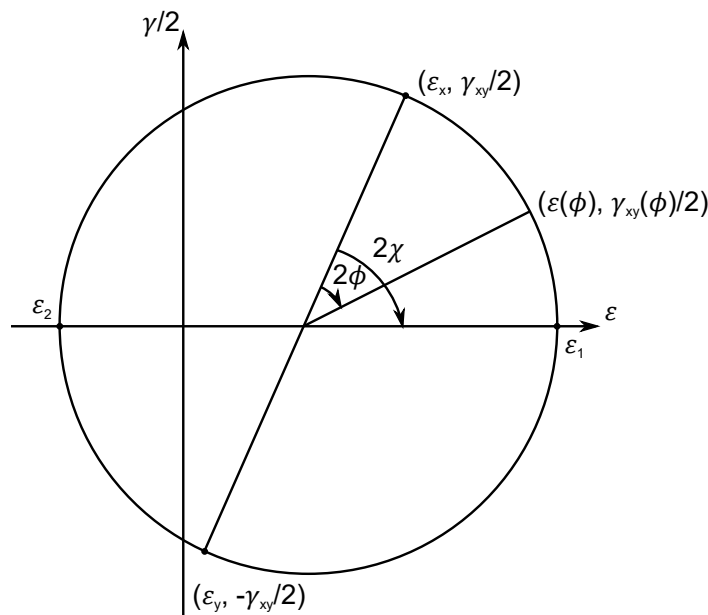
$$\varepsilon_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^T T \mathbf{n}.$$

**Huvudtöjningar** Finns det orienteringar sådana att  $T\mathbf{n} = \varepsilon\mathbf{n}$ ? Att hitta sådana är ett egenvärdesproblem. Matematiken ger att det finns sådana orienteringar, och att de är ortogonala mot varandra.

Beteckna även den största respektive näst största huvudtöjningen som  $\varepsilon_1$  respektive  $\varepsilon_2$ . Då ges den maximala skjuvvinkeln i materialet av

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

**Mohrs töjningscirkel** Mohrs töjningscirkel är ett sätt att grafiskt ta fram plana töjningar vid rotation av ett plan. För att konstruera cirkeln, rita upp ett  $\varepsilon, \frac{\gamma}{2}$ -koordinatsystem och två punkter  $(\varepsilon_x, \frac{\gamma_{xy}}{2})$  och  $(\varepsilon_y, -\frac{\gamma_{xy}}{2})$ , där dessa tas från något givet tillstånd. Dessa punkter skall vara i motstående ändar av cirkeln, och från detta kan cirkeln ritas, som i figur 5.



Figur 5: Mohrs töjningscirkel.

En rotation moturs av planet med en vinkel  $\phi$  motsvarar en rotation medurs av tillståndet på cirkeln med en vinkel  $2\phi$ .

Det visar sig att cirkeln skär  $\varepsilon$ -axeln i största och näst största huvudtöjningen. Det finns även en vinkel  $\chi$  som koordinatsystemet måste roteras med så att det blir parallellt med huvudriktningarna. Ur denna geometrin

kan vi få följande samband, som är helt konsekventa med tensorbetraktningen gjort ovan:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \\ \tan(2\psi) &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \\ \gamma_{\max} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2.\end{aligned}$$

**Kompatibilitet i tre dimensioner** Från definitionerna av elementerna i töjningsmatrisen kan man se att det gäller att

$$\begin{aligned}2\partial_x\partial_y\varepsilon_{xy} &= \partial_y^2\varepsilon_x + \partial_x^2\varepsilon_y, \\ 2\partial_y\partial_z\varepsilon_{yz} &= \partial_z^2\varepsilon_y + \partial_y^2\varepsilon_z, \\ 2\partial_z\partial_x\varepsilon_{zx} &= \partial_x^2\varepsilon_z + \partial_z^2\varepsilon_x.\end{aligned}$$

Alltså är inte de olika töjningarna oberoende.

**Linjärelastiska material** I linjärelastiska material gäller sambandet  $S = CT$ , där  $C$  är en fjärde ordningens tensor. Detta kan alternativt skrivas som  $T = C^{-1}S$ .

**Hookes lag för isotropa material** I isotropa material är alla riktningar lika. I dessa materialer gäller Hookes lag

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha\Delta T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha\Delta T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha\Delta T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz},\end{aligned}$$

där  $E$  är elasticitetsmodulen,  $G$  är skjuvmodulen och  $\nu$  är Poissons tal.

**Samband mellan elasticitetsmodul och skjuvmodul** Betrakta ett plant skjuvtillstånd med skjuvspänning  $\tau_{xy}$  för ett isotropt material. Med Moores spänningscirkel fås huvudspänningarna  $\sigma_1 = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ . Hookes lag ger

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E}\tau_{xy}, \varepsilon_2 = -\frac{1 + \nu}{E}\tau_{xy}.$$

Mohrs töjningscirkel ger vidare

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E}\tau_{xy}.$$

Jämförelse med Hookes lag ger

$$G = \frac{1}{2(1 + \nu)}E.$$

**Tunnväggiga tryckkärl** Betrakta ett cylindriskt tryckkärl med innerradie  $a$  och vägg tjocklek  $h$  med ett inre tryck  $p$ . Vi kommer studera detta i cylindriska koordinater.

Det finns spänningar  $\sigma_z$  och  $\sigma_\phi$  i tryckkärlet. Cylindersymmetrin ger att båda dessa är oberoende av  $\phi$ . Det återstår bara att använda jämvikter för att beräkna dem.

Snitta nu ut en halvcylindrisk del med längd  $\Delta z$ , detta för att ej behöva betrakta radiella spänningar. Kraftjämvikt på ytan vi snittar genom ger

$$2a\Delta z p - 2h\Delta z \sigma_\phi = 0,$$

$$\sigma_\phi = \frac{pa}{h}.$$

Snitta nu normalt på  $z$ -axeln. Om vi försummar kraftbidrag från annat än trycket i kärlet, ger kraftjämvikten

$$2\pi a h \sigma_z - \pi a^2 p = 0,$$

$$\sigma_z = \frac{pa}{2h}.$$

Om man tittar i radiell riktning, har vi randvillkoret  $\sigma_r = -p$  på inre delen av mantelytan. Detta värdet är mycket mindre än de två andra spänningarna, så för tunnväggiga kärl approximerar vi  $\sigma_r = 0$ .

Vi får även töjningar av detta trycket. Om vi får en radiell töjning  $u_r$ , får vi en töjning  $2\pi u_r$  i  $\phi$ -riktning.

Man kan göra samma beräkningar för ett sfäriskt kärl, och får

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{pa}{2h}, \sigma_r = 0.$$

Töjningarna ges av

$$u_\theta = u_\phi = 2\pi u_r.$$

**Tjockväggiga tryckkärl** Betrakta återigen ett cylindriskt tryckkärl, denna gången med innerradie  $a$  och ytterradie  $b$ .

Snitta återigen normalt på  $z$ -axeln. Detta ger

$$\sigma_z = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}.$$

Snitta nu ut en bit av kärlet med vinkelbrädd  $\Delta\phi$ , höjd  $\Delta z$  och tjocklek  $\Delta r$ . Vi har spänningar på alla sidor. Geometrin ger att spänningarna i  $\phi$ -riktning bildar vinkeln  $\frac{\Delta\phi}{2}$  med den radiella normalen. Jämvikt i radiell riktning ger då

$$(r + \Delta r)\Delta\phi\Delta z\sigma_r(r + \Delta r) - r\Delta\phi\Delta z\sigma_r(r) - 2\frac{\Delta\phi}{2}\Delta z\Delta r\sigma_\phi = 0.$$

Detta kan lösas för att ge

$$\frac{(r + \Delta r)\sigma_r(r + \Delta r) - r\sigma_r(r)}{\Delta r} - \sigma_\phi = 0,$$

vilket i gränsen ger

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\phi = 0.$$

Notera att det ligger bakom att vissa skjuvspänningar blir 0 för den sortens symmetri.

Betrakta vidare deformationen och töjningarna. Vi får i radiell riktning

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r + u_r(r + \Delta r) - u_r(r) - \Delta r}{\Delta r} \rightarrow \frac{du_r}{dr}$$

och i vinkelriktning

$$\varepsilon_\phi = \frac{(r + u_r)\Delta\phi - r\Delta\phi}{r\Delta\phi} = \frac{u_r}{r}.$$

Vi kan kombinera dessa ekvationerna med Hookes lag för att få

$$\frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = 0.$$

På inre randen har vi

$$\sigma_r(a) = -p.$$

Om vi har en yttre last  $q$ , har vi även randvillkoret

$$\sigma_r(a) = -q.$$

Detta kan kombineras till att ge

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p - \left(\frac{b}{a}\right)^2 q}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} - \frac{p - q}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \frac{b^2}{r^2}, \\ \sigma_\phi &= \frac{p - \left(\frac{b}{a}\right)^2 q}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} - \frac{p - q}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \frac{b^2}{r^2}. \end{aligned}$$

## 5 Energi

**Töjningsenergi för en stång** Vid axial belastning av en stång med längd  $l$  och tvärsnittsarea  $A$  med en kraft  $F$  görs ett arbete

$$W = \int_0^u dx F.$$

Vi kan introducera definitionen av spänning och göra en substitution där vi inför töjningen som ny integrationsvariabel för att få

$$W = AL \int_0^\varepsilon d\varepsilon \sigma.$$

Vi definierar då töjningsenergin per volym

$$w_V = \int_0^\varepsilon d\varepsilon \sigma.$$

Eftersom stången har volym  $Al$ , ger detta

$$W = V w_V.$$

Vi kan nu introducera Hookes lag, vilket ger

$$w_W = \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

**Skjuvenergi** Betrakta ett rätblock med höjd  $h$ , brädd  $b$  och längd  $L$  som skjuts så att höjdriktningen bildar vinkeln  $\gamma$  med vertikalen. Det infinitesimala arbetet vid en liten skjuvning ges av

$$dW = \tau b t \cdot h d\gamma,$$

och det totala arbetet ges av

$$W = \int_0^\gamma d\gamma \tau b t h,$$

vilket implicerar

$$w_V = \int_0^\gamma d\gamma \tau.$$

Vid att införa Hookes lag kan man visa att

$$W = \frac{1}{2} V G \gamma^2.$$



**Energi för böjning av en balk** Om balken har utböjning  $w$ , kommer man få

$$W = \int_0^L dx \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2.$$

**Energi för vridning av en balk** Om balken vris i axelriktning en vinkel  $\phi$ , får man

$$W = \int_0^L dx \frac{1}{2} GK \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2.$$

**Allmän töjningsenergi** Helt allmänt har man

$$W = \int_V d^3 r \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

**Axialbelastad stång och virtuellt arbete** Betrakta en axialbelastad stång som belastas med en kraft  $F$  som producerar volymkraften  $K_x$  i axelriktningen. Kraftjämvikt, till sammans med definitionen av töjning, ger

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + K_x = 0.$$

Om balken är inspänd i ena ändan, fås

$$u(0) = 0, \quad EA \frac{du}{dx}(L) = F.$$

Enligt argumentet ovan har balken energi

$$W = \int_0^L dx \frac{1}{2} EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2,$$

som är en funktional av deformationen  $u$ . Allmänt är jämviktsläget för balken ett extremum till denna funktionalen.

Vi betraktar elastiska fall nu, och antar att  $u$  uppfyller differentialekvationen som beskriver balken och alla randvillkor. Vi introducerar variationen  $\delta(u)$  av  $u$ . Ändring av  $u$  med denna variation ger en variation av energin

$$\begin{aligned} \delta(W) &= \int_0^L dx \frac{1}{2} EA \delta \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) \\ &= \int_0^L dx \frac{1}{2} EA 2 \frac{du}{dx} \delta \left( \frac{du}{dx} \right). \end{aligned}$$

Vi antar nu att variationen uppfyller de kinematiska randvillkoren, vilket ger  $\delta(u)(0) = 0$ . Partiell integration ger

$$\begin{aligned} \delta(W) &= EA \frac{du}{dx}(L) \delta(u)(L) - \int_0^L dx \delta \left( \frac{du}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) \\ &= F \delta(u)(L) - \int_0^L dx \delta \left( \frac{du}{dx} \right) \frac{d}{dx} K_x. \end{aligned}$$

**Potentiell energi för en axialbelastad balk** I vissa fall, typiskt elastiska fall, kan vi nu införa potentiella energin

$$U = W - Fu(L) - \int_0^l dx K_x.$$

En funktion som är ett extremum till  $U$  ger  $\delta(U) = 0$ . Det kan visas att  $U$  är positivt definit, så extremumet måste vara ett minimum, och ämviktsläget är ett minimum för potentiella energin, som väntat. Vi ser att detta kriteriet är ekvivalent med att  $\delta(W)$  ges av uttrycket ovan. Alltså är variationsprincipen ett specialfall av variationsprincipen för  $W$ .

**Potentiell energi för en böjd balk** Vi kan även definiera en potential

$$U = \int_0^L dx \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + M(L) \frac{dw}{dx}(L) - M(0) \frac{dw}{dx}(0) - T(L)w(L) + T(0)w(0) \\ - \sum F_i w(x_i) + \sum M_i \frac{dw}{dx}(x_i) - \int_0^L dx q w,$$

där summorna görs över alla yttre krafter och moment.

**Energimetoder i hållfasthetslära** Man vill inte alltid lösa variationsproblemen som dyker upp i hållfasthetslära, utan man gör ansatsen

$$u = \sum a_i u_i,$$

där alla  $u_i$  är kända, och ser vilka koefficienter  $a_i$  som minimerar de olika funktionalerna. Om man väljer de olika  $u_i$  smart, blir lösningen bättre desto fler termer man har.

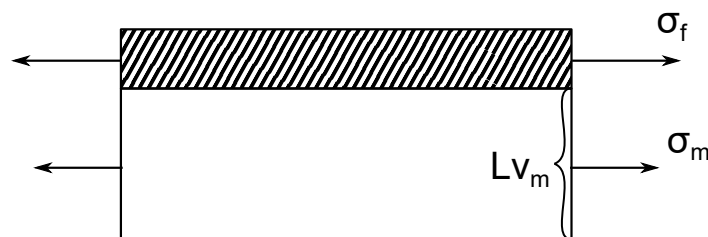
## 6 Materialers beteende

**Idealplastisk deformation** De flesta material beter sig så att när de deformeras förbi en viss punkt, deformeras de plastiskt i stället för elastiskt. En approximation för att beskriva detta beteendet är att låta deformationen vara elastisk upp till en töjningsgräns  $\varepsilon_s$ , och låta  $\sigma$  vara konstant lika med en sträckgräns  $\sigma_s$  för större töjningar.

När lasten sedan tas bort, kommer stängen förkortas igen tills lasten blir lika med noll. Denna kontraktionen är parallell med det elastiska regimet, och konsekvensen är att man får en permanent deformation.

**Enkelriktad fiberkomposit** En enkelriktad fiberkomposit är ett material som består av fibrar som alla är parallella och ett omkransande material som kallas en matris. Matrisen och fibern finns i volymfraktioner  $v_m$  respektive  $v_f$ , och de har elasticitetsmoduler  $E_m$  respektive  $E_f$ .

Som en modell för belastning längsmed fibrernas riktning betraktar vi uppställningen som ges i figur 6.



Figur 6: Illustration av en del av en enkelriktad fiberkomposit som belastas längsmed fibrernas riktning.

Kraftjämvikten ger  $F = \sigma A$ . Vi antar att den utskurna biten är ett rätblock, så de två delarna har tvärsnittsareor som ges av totala tvärsnittsarean och volymfraktionerna. Detta ger

$$F = \sigma A = (\sigma_f v_f + \sigma_m v_m) A.$$

Därmed ges spänningen av

$$\sigma = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m.$$

Vi antar att fibern och matrisen inte glider relativt varandra, och därmed har de samma deformation och töjning. Hookes lag ger

$$\sigma_f = E_f \varepsilon, \sigma_m = E_m \varepsilon,$$

vilket insatt i uttrycket ovan ger

$$\begin{aligned} \sigma &= v_f E_f \varepsilon + v_m E_m \varepsilon \\ &= (v_f E_f + v_m E_m) \varepsilon. \end{aligned}$$

För hela biten med fiberkomposit ger Hookes lag då

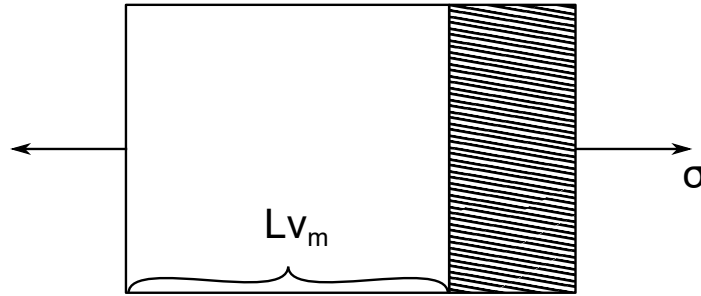
$$E_L = v_f E_f + v_m E_m$$

som elasticitetsmodulen vid längsgående spänning. Vi får även

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon \\ &= \frac{E_f}{E_L} \sigma \end{aligned}$$

som spänning i fibrerna, och motsvarande för matrisen.

På samma sättet beskriver vi även fallet när spänningen går på tvärs av fibrernas riktning, som illustrerad i figur 7.



Figur 7: Illustration av en del av en enkelriktad fiberkomposit som belastas normalt på fibrernas riktning.

Här kan vi snitta och se att  $\sigma_f = \sigma_m$ . Den totala förlängningen i denna biten ges av

$$\delta = \delta_f + \delta_m = L_f \varepsilon_f + L_m \varepsilon_m.$$

Töjningen ges då av

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\delta}{L_f + L_m} \\ &= \varepsilon_f \frac{L_f}{L_f + L_m} + \varepsilon_m \frac{L_m}{L_f + L_m} \\ &= v_f \varepsilon_f + v_m \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Hookes lag ger

$$\varepsilon = v_f \frac{\sigma}{E_f} + v_m \frac{\sigma}{E_m},$$

och vi ser att

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}.$$

**Ideallastisk vridning** Vi inför idealplastiska material även i vridningssammanhang. Dessa beter sig analogt till idealplastiska material under dragning, där vi ersätter töjningen med skjuvvinkeln  $\gamma$ , spänningen med skjuvspänningen  $\tau$ , töjningsgränsen med en vinkelgräns  $\gamma_s$  och sträckgränsen med en skjuvgräns  $\tau_s$ .

**Knäckning** Om man t.ex. belastar en balk i dens längdriktning med en last som är större än en viss kritisk last, kommer balken snabbt böjas och nå ett nytt jämviktsläge. Detta kommer av att ursprungsläget är en instabil jämviktpunkt, så den minsta störning kommer att få den att anta ett stabilt jämviktsstillstånd. Detta är ett exempel på ett instabilitetsfenomen.