Задания к работе №7 по математическому практикуму.

Все задания выполняются на листах формата А4. Выполнение заданий подразумевает описание хода решения и ответ. Выполнение заданий возможно либо от руки, либо в виде электронного документа в формате .doc/.docx/.tex, из которого возможно построение файла в формате .pdf. Для защиты работы, выполненной в виде электронного документа, необходимо распечатать электронный документ на физическом носителе (бумага формата А4).

1. Обобщим метод умножения Карацубы следующим образом. Пусть F −поле, $m, n \in N$ и

   $$f = \sum_{0 \le i < n} f_i x^i, \ g = \sum_{0 \le i < n} g_i x^i \in F[x]$$

   Для умножения f и g разделим их на $m \ge 2$ частей размером $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$:

   $$f = \sum_{0 \le i < m} F_i x^{ki}, \ g = \sum_{0 \le i < m} G_i x^{ki},$$

   где $F_i, \ G_i \in F[x]$ и deg $deg\ F_i$, deg $deg\ G_i \ < \ k$. Тогда

   $$fg = \sum_{0 \le i < 2m-1} H_i x^{ki}, \text{где } H_i = \sum_{0 \le j \le i} F_j G_{i-j}$$

   Определите метод умножения многочленов, когда $m = 3$. С использованием этого метода постройте вариацию алгоритма Карацубы: рекурсивный алгоритм умножения многочленов степени не больше 3^l. Определите сложность вашего алгоритма.

2. Рассмотрим модификацию метода обращения Ньютона. Вместо вычислений $f^{-1}\, mod\, x^{2^i}$, вычислим $f^{-1}\, mod\, x^{\lceil \frac{l}{2^r} \rceil}$, $f^{-1}\, mod\, x^{\lceil \frac{l}{2^{r-1}} \rceil}$, $f^{-1}\, mod\, x^{\lceil \frac{l}{2^{r-2}} \rceil}$, ..., $f^{-1}\, mod\, x^l$. Докажите, что стоимость этого алгоритма не превосходит

   $$l + \sum_{1 \le j \le r} \left(M\left(\lceil l 2^{-j} \rceil\right) + M\left(\lceil l 2^{-j-1} \rceil\right)\right).$$

   Затем докажите, что сложность модификации обращения Ньютона не более $3M(l) + O(l)$.

3. Пусть R − кольцо, $k \in N$; $f, \ g \in R[x], \ f(0) = 1; \ fg = 1\, mod\, x^k$.
   i) Пусть $d \in N, \ e = 1 - fg, \ h = g\left(e^{d-1} + e^{d-2} + ... + e + 1\right)$. Докажите, что $fh = 1\, mod\, x^{dk}$.
   ii) Положив $d = 2$, получим в точности алгоритм инверсии Ньютона. Предложите свою модификацию этого алгоритма, когда $d = 3$. Найдите стоимость этого алгоритма для случая $l = 3^t$.

4. Пусть R - кольцо и $R[[x]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i | a_i \in R \right\}$ - кольцо формальных степенных рядов.
   i) Докажите, что $f \in R[[x]]$ обратим тогда и только тогда, когда a_0 обратим.
   ii) Пусть a_0 обратим. Вычислите первые три коэффициента f^{-1}.

5. Найдите решение рекуррентного соотношения
$$T_n = 3T_{n-1} - 15, \ T_1 = 15$$

6. Найдите решение рекуррентного соотношения
$$T_n = T_{n-1} + n - 1, \ T_1 = 3$$

7. Вычислите сумму
$$A(k) = \frac{1}{2^k - 1} \sum_{j=1}^{k} j 2^{j-1}$$

8. Найдите решение рекуррентного соотношения
$$J_n = 6J_{n-1} + 16J_{n-2}, \ J_0 = 1, \ J_1 = 7$$

9. Найдите решение рекуррентного соотношения
$$J_n = 3J_{n-1} + 4J_{n-2}, \ J_0 = 1, \ J_1 = 3$$

10. Решите рекуррентное соотношение
$$A_N = A_{N-1} - \frac{2A_{N-1}}{N} + 2\left(1 - \frac{2A_{N-1}}{N}\right), \ N > 0, \ A_0 = 0$$

11. Решите рекуррентное соотношение
$$na_n = (n - 4)a_{n-1} + 12nH_n, \ n > 4, \ a_{n=1,2,3,4} = 0$$

12. Найдите асимптотическое решение рекуррентного соотношения
$$a_n = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{4}} + n, \ n > 2, \ a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

13. Найдите асимптотическое решение рекуррентного соотношения
$$a_n = a_{\frac{3n}{4}} + a_{\frac{n}{4}} + n, \ n > 2, \ a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

14. Найдите асимптотическое решение рекуррентного соотношения

$$a(x) = \alpha a\left(\frac{x}{\beta}\right) + 2^x,\ a(x) = 0,\ x \le 1$$

15. Найдите производящую функцию для последовательности a_n и решение рекуррентного соотношения

$$na_n = (n - 2)a_{n-1} + 2,\ n > 1,\ a_1 = 1$$

16. Решите рекуррентное соотношение

$$a_n = -\sum_{k=1}^{t} C_t^k (-1)^k a_{n-k},\ n \ge t,\ a_0 = \ldots = a_{t-2} = 0,\ a_{t-1} = 1$$

17. Найдите производящую функцию для последовательности a_n и решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4},\ n > 4,\ a_0 = 0,\ a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

18. С использованием формулы суммирования Эйлера вычислите асимптотическое значение произведения

$$\prod_{k=1}^{n} k^k$$

19. С использованием формулы суммирования Эйлера выведите асимптотическое значение произведения:

$$\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$$

20. Решите рекуррентное соотношение

$$a_n = n + 1 + \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k-1},\ n \ge 1,\ a_0 = 0,\ t = 2 \pm \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$