Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Phillip Keldenich

Präsenzblatt 1

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen zwischen dem 02.05. und 05.05.2023.

Präsenzaufgabe 1 (Klausursituation):
Gegeben sei die folgende Klausursituation: Es verbleiben 96 Minuten und es werden noch 57 Punkte benötigt. Erreichbare Punkte pro Aufgabe können der folgenden Tabelle entnommen werden. Teilpunkte werden nicht vergeben.

	1				2			3					4			5	
Aufgabe	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b
Zeit	9	15	16	10	12	10	30	13	17	20	10	16	15	9	6	11	1
Punkte	10	9	6	4	4	4	10	6	8	7	8	5	6	3	2	4	4

a) Betrachte diese Instanz als 0-1-KNAPSACK-Instanz: Was entspricht der Kapazität, was dem Mindestwert? Was entspricht dem Gewicht und dem Wert der Objekte?

b) Entscheide, ob die Klausur noch bestanden werden kann!

c) Kann die Klausur immer noch bestanden werden, wenn 58 Punkte benötigt werden?

d) Angenommen, Aufgabe 2b wird modifiziert und benötigt 11 Minuten für 5 Punkte. Wie kann man zeigen, dass dann die Klausur nicht mehr bestanden werden kann, wenn innerhalb von 96 Minuten 58 Punkte erreicht werden müssen?
(Hinweis: Der abgerundete Wert der fraktionalen Lösung ist 58.)

Präsenzaufgabe 2 (Greedy):
Der Greedy-Algorithmus liefert nicht immer eine optimale Lösung, wenn Objekte nur ganz oder gar nicht in den Rucksack aufgenommen werden können (siehe Algorithmus 1 für einen ganzzahligen Greedy-Algorithmus).

function $\textsc{Greedy}_0(z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$
  Sortiere Objekte nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend; dies ergibt Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
  for j **from** 1 **to** n **do**
    if $\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} + z_{\pi(j)} \leq Z\right)$ **then**
      $x_{\pi(j)} := 1$
    else
      $x_{\pi(j)} := 0$

Algorithmus 1: $\textsc{Greedy}_0$ betrachtet jedes Element in der sortierten Reihenfolge π und packt dieses ein, sofern es passt.

Wir nehmen nun an, dass z_i und p_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ganzzahlig sind. Gib Instanzen I_1 und I_2 (mit mindestens 3 Objekten) an, sodass:

a) für I_1 die Greedy-Lösung **nicht** optimal ist.

b) für I_2 die Greedy-Lösung optimal ist.

Betrachte zusätzlich die fraktionale Variante. Sei P_F der größtmöglichste Wert einer fraktionalen Lösung, P_{OPT} der größtmöglichste Wert einer ganzzahligen Lösung, und P_G der Wert aus dem Greedy Algorithmus. Gib jeweils eine Instanz I_3 und I_4 an, sodass:

c) für I_3 die Ungleichung $P_G < P_{\text{OPT}} < \lfloor P_F \rfloor$ gilt.

d) für I_4 die Ungleichung $P_G < P_{\text{OPT}} = \lfloor P_F \rfloor$ gilt.

t. hoitz@tu-bs.de (*)
hoitz@ibr.cs.tu-bs.de

Aufgabe 1:

a) Kapazität := 96 min.
Mind. Wert := 57 Punkte.
Gewicht := punkte * zeit
Wert der Objekte := Punkte pro Aufgabe

b) $Z = 96$, $P = 57$

	9	15	16	10	12	10	30	13	17	20	10	16	15	9	6	11	1
	10	9	6	4	4	4	10	6	8	7	8	5	6	3	2	4	4
RF			7	5	4	3		9				6	8			2	1

Objekte nach der Effektivität zu sortieren.

$O_{\pi(j)}$	$z_{\pi(j)}$	$x_{\pi(j)}$	$\sum_{j \in S} z_j$	S	$\sum_{j \in S} p_j$
17	1	1	1	{17}	4
1	9	1	10	{17, 1}	14
11	10	1	20	{17, 1, 11}	22
2	15	1	35	{17, 1, 11, 2}	31
9	17	1	52	{17, 1, 11, 2, 9}	39
8	13	1	65	{17, 1, 11, 2, 9, 8}	45
4	10	1	75	{17, 1, 11, 2, 9, 8, 4}	49
6	10	1	85	{17, 1, 11, 2, 9, 8, 4, 6}	53
13	15	0	85	"	53
3	16	0	85	"	53
16	11	1	96	{17, 1, 11, 2, 9, 8, 4, 6, 16}	57

(*) Greedy$_e$ – MAX Knapsack · läuft für alle x.

Fractional Greedy – bricht nach dem Erreichen der Resultat ab.

c) · Z: $\underbrace{P_{G_0} \leq P_{OPT} \leq P_F = P_{OPT_F}}_{\text{Als Argument zu nutzen.}} < 58$

d)

$O_{\pi(j)}$					
⋮		1		⋮	⋮
		⋮			45
6	11	1	76		50
4	10	1	86		54
13	15	0	86		
3	16				

ab hier nutze Fractional Greedy.

$Z_6 = 11 \quad P_6 = 5$ statt $10, 4$

Aufsteigende Sortierung: $(17, 1, 11, 2, 9, 8, 6, 4, 13, 3, 16, \ldots)$

Betrachte: zwei Fälle:

1) $6 \in S$: Da Objekt 13 beim ansonsten von G_0 nicht mehr ganz in Z passt, ignoriere das Element und berechne die obere Schranke P_F erneut.

$\Rightarrow P_F < P$, d.h. damit $P_{OPT} < P$.

2) $6 \notin S$: Entspricht unsere ursprüngliche Instanz, nur ohne Element 6. Hier ist bereits gezeigt, dass P nicht mehr erreicht werden kann.

$\Rightarrow$ P kann nicht mehr erreicht werden.

Aufgabe 2

a) $z_i, p_i \quad \forall i \in \{1,...,n\}$ ganzzahlig.

- $P_G \neq P_{OPT}$

i	1	2	3
z_i	4	3	3
p_i	5	3	3

$Z = 6$

Greedy: $S = \{1\}$, $P_G = 5$

Optimal: $S = \{2,3\}$, $P_{OPT} = 6$

b) $P_G = P_{OPT}$

wenn, $Z = 7$

Greedy und optimal $P_G = P_{OPT} = 8$.

c) $P_G < P_{OPT} < \lfloor P_F \rfloor$

i	1	2	3
z_i	6	4	4
p_i	7	4	4
RF	1	2	3
Taken	1	$\frac{3}{4}$	

$Z = 9$

Greedy: $S = \{1\}$, $P_G = 7$

Optimal $S = \{2,3\}$, ~~$P_{OPT} = 8$~~ $P_{OPT} = 8$

Fractional = $\cancel{8 = \frac{8}{4}}$

$\lfloor P_F \rfloor = 10$

d)

i	1	2	3
z_i	1	3	2
p_i	2	5	2
Taken	1	$\frac{2}{3}$	

$Z = 3$

Greedy: $S = \{1,3\}$ $P_G = 4$

$S = \{2\}$ $P_{OPT} = 5$

$\lfloor P_F \rfloor = 5$