Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Phillip Keldenich

Präsenzblatt 3

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen vom 06.06.–09.06.2023.

Präsenzaufgabe 1:
In dieser Aufgabe betrachten wir den Branch-and-Bound-Algorithmus für Maximum Knapsack aus der Vorlesung. Wir benutzen dabei Greedy_0 (siehe Blatt 1) als untere Schranke und den Greedy-Algorithmus für Fractional Knapsack als obere Schranke.

Sei $I := (z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$ ein Instanz von Maximum Knapsack.

a) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Nimm weiterhin an, dass diese Teilbelegung zulässig ist. Sei $U := UB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **obere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt U **immer** als obere Schranke?

b) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Sei $P := LB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **untere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt P **immer** als untere Schranke?

c) Der Entscheidungsbaum, den der Branch-and-Bound-Algorithmus ablaufen kann, besitzt $2^{n+1} - 1$ viele Knoten. Da der Algorithmus Teilbäume abschneidet, besteht die Hoffnung, dass deutlich weniger Knoten besucht werden müssen.

   Zeige: Für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Instanz mit n Objekten, bei der der Branch-and-Bound-Algorithmus mindestens $2^{\frac{n}{2}} - 1$ Knoten des gesamten Entscheidungsbaumes besucht.
   (Hinweis: Ein Entscheidungsbaum der Höhe h besitzt $2^h - 1$ Knoten. Finde also eine Instanz für jedes n, sodass alle Knoten auf den ersten $\frac{n}{2}$ Ebenen besucht werden müssen.)

Pr Blatt 3

a) Bei der Wahl von Teilbelegung b_i

b) Für alle Teilbäume mit Wurzel w auf dem Pfad von v zur Wurzel.

Durch Weglassen von Beschränkungen (Aufhebung der Fixierung von Variablen) können wir höchstens eine bessere Lösung erreichen.

c) Betrachte alle geraden n:

Sei $Z = n+1$ und n Objekte mit $z_i = p_i = 2$.

$\Rightarrow$ Solange mindestens $\frac{n}{2}+1$ viele Variablen nicht fixiert sind, gilt:

untere Schranke (Greedy$_0$) erreicht maximal den Wert n.

obere Schranke (fractional Greedy) erreicht immer den Wert $n+1$.

$\Rightarrow$ Wir können nicht vorzeitig abschneiden.

$\Rightarrow$ Wir besuchen alle Knoten der ersten $\frac{n}{2}$ Ebenen und besuchen damit $2^{\frac{n}{2}}-1$ viele Knoten.

Mit CamScanner gescannt