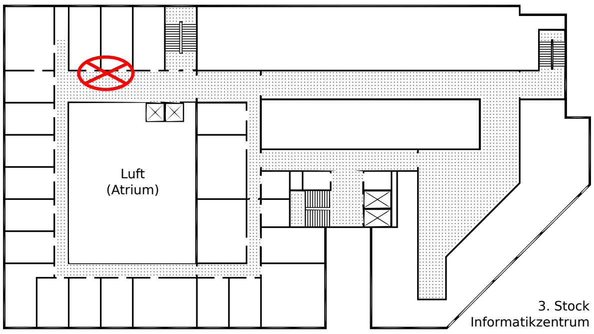
Hausaufgabenblatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 12.07.2023 um 13:30 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit Namen, Matrikel- Übungs- und Gruppennummer versehen!**



Hausaufgabe 1 (Greedy$_k$): **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus Greedy$_k$ aus der Vorlesung. Wende Greedy$_k$ auf die folgende Instanz an.

i	1	2	3	4
z_i	11	9	9	8
p_i	15	10	9	7

mit $Z = 26$ und $k = 2$

Gib dazu für jede betrachtete fixierte Teilmenge $\overline{S}$ der Objekte die folgenden Mengen bzw. Werte an.

- $\overline{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \overline{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.
- G_k: Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S: Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Betrachte (analog zum Beispiel aus der großen Übung) fixierte Mengen $\overline{S}$ mit weniger Elementen vor Mengen mit mehr Elementen. Für zwei fixierte Mengen der gleichen Größe M_1, M_2 betrachte M_1 vor M_2, falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$ (lexikografische Sortierung).

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X, die nicht in Y vorkommen. Wir betrachten also $M_1 = \{1, 2\}$ vor $M_2 = \{1, 3\}$, weil das kleinste Element von $M_1 \setminus M_2 = \{2\}$ kleiner ist als das kleinste Element von $M_2 \setminus M_1 = \{3\}$.)

Hausaufgabe 2 (3-Satisfiability): **(4+3+3 Punkte)**

Betrachte das Problem 3-SAT aus der Vorlesung und die folgende Instanz.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$
$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

a) Transformiere diese Formel in eine Instanz von 0-1-Knapsack, indem Du die Reduktion aus der Vorlesung nutzt.
(Hinweis: Einen Pseudocode für diese Reduktion gibt es im Skript unter Algorithmus 5.10: `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ss23/aud2/Skript.pdf`.)

b) Begründe, dass es keine Lösung gibt, die x_2 auf falsch setzt.
(Hinweis: Es gibt unter anderem einen einfachen, arbeitsintensiven Lösungsweg und einen eleganteren Weg, der Resolution benutzt.)

c) Wie viele verschiedene Lösungen gibt es für diese Instanz? Begründe Deine Antwort.
(Hinweis: Du kannst unter anderem b) benutzen, um Arbeit zu sparen.)

HA2

a)

x_1	$z_1 = P_1$	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
$\overline{x_1}$	$z_2 = P_2$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
x_2	$z_3 = P_3$		1	0	0	1	0	1	0	1	1
$\overline{x_2}$	$z_4 = P_4$		1	0	0	0	0	0	1	0	0
x_3	$z_5 = P_5$			1	0	1	1	0	0	0	0
$\overline{x_3}$	$z_6 = P_6$			1	0	0	0	1	0	0	0
x_4	$z_7 = P_7$				1	0	0	0	1	1	1
$\overline{x_4}$	$z_8 = P_8$				1	0	1	1	0	0	0
	$z_9 = P_9$					2	0	0	0	0	0
	$z_{10} = P_{10}$					1	0	0	0	0	0
	$z_{11} = P_{11}$						2	0	0	0	0
	$z_{12} = P_{12}$						1	0	0	0	0
	$z_{13} = P_{13}$							2	0	0	0
	$z_{14} = P_{14}$							1	0	0	0
	$z_{15} = P_{15}$								2	0	0
	$z_{16} = P_{16}$								1	0	0
	$z_{17} = P_{17}$									2	0
	$z_{18} = P_{18}$									1	0
	$z_{19} = P_{19}$										2
	$z_{20} = P_{20}$										1
		1	1	1	1	4	4	4	4	4	4

b)

Level	Literal	Grund
1	$\overline{x_2}$	Entscheidung
1	x_4	$x_2 \vee x_4$
1	$\overline{x_3}$	$x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$
1	x_1	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}$

Da steht ein Konflikt bei den letzten 2 Schritten, also ist diese Entscheidung $\overline{x_2}$ falsch.

c) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4) \vDash x_1 \vee x_3 \vee x_4$

$(x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \vDash x_3$

Wegen $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

3-SAT äquivalent mit: $x_1 \vee x_4$

x_1	1	0	1
x_2	1	1	1
x_3	1	1	1
x_4	0	1	1

HA1

$\overline{S}$	$\sum_{i \in \overline{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \overline{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \overline{S}} p_i$	G_x	S
ϕ	0	26	25	25	$\{1,2\}$
$\{1\}$	11	15	25	25	$\{1,2\}$
$\{2\}$	9	17	25	25	$\{1,2\}$
$\{3\}$	9	17	24	25	$\{1,2\}$
$\{4\}$	8	18	22	25	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	20	6	25	25	$\{1,2\}$
$\{1,3\}$	20	6	24	25	$\{1,2\}$
$\{1,4\}$	19	7	22	25	$\{1,2\}$
$\{2,3\}$	18	8	26	26	$\{2,3,4\}$
$\{2,4\}$	17	9	26	26	$\{2,3,4\}$
$\{3,4\}$	17	9	26	26	$\{2,3,4\}$