Blatt0 - Einführung in die Logik

Viradia, Yash - 5275038 - Gruppe 01
y.viradia@tu-braunschweig.de

17.04.2023

③ Bei der Erweiterung von der Signatur S mit Operator $/_{2}$, muss die Teilbarkeit mit 0 beachtet werden.

Das kann man folgendenweise umgehen:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\setminus\{0\} \xrightarrow{/} \mathbb{Q}$$ als die Funktion

Interpretation.

④ Sei Relation $R \subseteq M \times N$

Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in M$

Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRz \quad \forall x, y \in M.$

Z: $xRx \quad \forall x \in M.$

Bew: Es existiert ~~m~~ $n \in N$ für alle $\cancel{m \in M}$, $\cancel{m \in M}$ $x \in M$, sodass

$\cancel{ARm}$. nRx

Wegen der Symmetrie gilt auch $\cancel{mRA}$. xRn

Daraus folgt endlich $xRx \quad \forall x \in M \quad \blacksquare$.

5 a) reflexiv

Durchschnitt: xRx, xSx, xTx, ...

Z: $x(\bigcap R)x$

Bew: $xRx \wedge xSx \wedge xTx \wedge \ldots$

$x(R \cap S \cap T \cap \ldots)x$

$x(\bigcap R)x$ $\boxtimes$

Vereinigung: Z: $x(\bigcup R)x$

Bew: $xRx \vee xSx \vee xTx \vee \ldots$

$x(R \cup S \cup T \ldots)x$

$x(\bigcup R)x$ $\boxtimes$

b) transitiv

Durchschnitt:

Z: $x(\bigcap R)y \wedge y(\bigcap R)z \Rightarrow x(\bigcap R)z \quad \forall x,y,z \in B.$

Bew:

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$

$xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$

$\vdots$

$x(\bigcap R)z = xRz \wedge xSz \wedge xTz \ldots$ $\boxtimes$

Vereinigung

Z: $x(\bigcup R)y \wedge y(\bigcup R)z \Rightarrow x(\bigcup R)z \quad \forall x,y,z \in B.$

Bew:

$x(\bigcup R)z = xRz \vee xSz \vee xTz \vee \ldots$

$\boxtimes$

c) <u>Symmetrie</u>

<u>Vereinigung:</u> Sei $x (\bigcup R) y$ $\forall x, y \in B$

Z: $y (\bigcup R) x$.

<u>Bew:</u>

$xRy \vee xSy \vee xTy \vee \dots$

$\Rightarrow yRx \vee ySx \vee yTx \vee \dots$

$\Rightarrow y(R \cup S \cup T \dots) x$

$\Rightarrow y (\bigcup R) x$ $\boxtimes$.

<u>Durchschnitt:</u> Sei $x (\bigcap R) y$ $\forall x, y \in B$.

Z: $y (\bigcap R) x$

<u>Bew:</u> $xRy \wedge xSy \wedge xTy \wedge \dots$

$\Rightarrow yRx \wedge ySx \wedge yTx \wedge \dots$

$\Rightarrow y(R \cap S \cap T \dots) x$

$\Rightarrow y (\bigcap R) x$ $\boxtimes$

d) <u>Anti-Symmetrie:</u>

<u>Vereinigung</u> Gelte $xRy \wedge yRz \Rightarrow x = y$
$xSy \wedge ySz \Rightarrow x = y \dots$ $\forall x, y \in B$.

Z: $x (\bigcup R) y \wedge y (\bigcup R) x \Rightarrow x = y$.

<u>Bew:</u> $(xRy \vee xSy \vee xTy \dots) \wedge$
$(yRx \vee ySx \vee yTx \dots)$
~~$(x(R \cup S \cup T \dots)y) \wedge (y(R \cup S \cup T \dots)x)$~~
~~$x (\bigcup R) y \wedge y (\bigcup R) x$~~

$(xRy \wedge yRx) \vee (xSy \wedge ySx) \vee (xTy \wedge yTx) \vee \dots$

$(x=y) \vee (x=y) \vee (x=y) \vee \dots$

$(x=y)$ $\boxtimes$

Durchschnitt: Analog wie Vereinigung.

Z: $x(\cap R)y \wedge y(\cap R)x \Rightarrow x=y$.

Bew: $(xRy \wedge xSy \wedge xTy \wedge \dots) \wedge$

$(yRx \wedge ySx \wedge yTx \wedge \dots)$

$(xRy \wedge yRx) \wedge (xSy \wedge ySx) \wedge (xTy \wedge yTx) \wedge \dots$

$(x=y) \wedge (x=y) \wedge \dots$

$x=y$. $\boxtimes$.

e) ~~Linear~~

~~Vereinigung:~~

~~$xRy \wedge yRx \quad \forall x,y \in B$~~

~~$xSy \wedge ySx \quad \forall x,y \in B$.~~

~~$\vdots$~~

~~$(xRy \wedge yRx) \wedge (xSy \wedge ySx) \wedge \dots$~~

~~$(xRy \wedge xSy \dots) \wedge (yRx \wedge ySx \wedge \dots)$~~

e) Linear

Vereinigung:

$$xRy \lor yRx \qquad \forall x,y \in B$$
$$xSy \lor ySx \qquad \forall x,y \in B$$
$$\vdots$$
$$(xRy \lor yRx) \lor (xSy \lor ySx) \lor (\dots)$$
$$(xRy \lor xSy \dots) \lor (yRx \lor ySx \dots)$$
$$x(R \cup S \cup \dots)y \lor y(R \cup S \cup \dots)x$$
$$x \cup R y \quad \lor \quad y \cup R x. \qquad \blacksquare$$

Durchschnitt:

Das folgt auch Analog wie die Vereinigung.

$$xRy \lor yRx \qquad \forall x,y \in B$$
$$xSy \lor ySx \qquad \forall x,y \in B$$
$$\vdots$$
$$(xRy \lor yRx) \land (xSy \lor ySx) \land \dots$$
$$(xRy \land xSy \land xTy \dots) \lor (\cancel{xR} \cdot yRx \land ySx \land yTx \dots)$$
$$x(\cap R)y \quad \lor \quad y(\cap R)x \qquad \blacksquare$$

c) Relation $B \xrightarrow{R} B$ ist anti-symmetrisch genau dann wenn

$$R \cap R^{op} \subseteq Id_B .$$

b) Schon gegeben $R \subseteq E$

Daher E ist eine Äquivalenzrelation und R ist eine beliebige Relation.

Sei $\forall x, y, z \in B$ gilt

$$(x,y) \in R$$
$$(y,z) \in R$$

$$\{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (y,z), (x,z) \ldots\} \in R \circ R.$$

D.h. $R \circ R$ ist transitiv.

Damit ist auch Folgendes gültig:

$(R \cup R^{op}) \circ (R \cup R^{op})$ ist reflexiv und symmetrisch, daher auch transitiv.

$$R \subset (R \cup R^{op}) \circ (R \cup R^{op}) = E.$$

Daher existiert eine Äquivalenzrelation E bzgl. $\subseteq$, die eine beliebige Relation R enthält.