Einführung in die Logik, Übungsklausur

2016/07/11

Diese Aufgaben werden in der Extra-Übung am Freitag, 2016-07-15, 13:15, im SN 19.4 besprochen, und die Lösungen werden auch veröffentlicht. Die Klausuraufgaben müssen sich *nicht* an diesen Aufgaben orientieren!

Aufgabe 1 [18 PUNKTE]

Wir betrachten die aussagenlogische Formel $K = ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (F \Rightarrow H)$.

(a) [8 PUNKTE] Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

(b) [4 PUNKTE] Handelt es sich um eine Tautologie, ist die Formel erfüllbar? Geben Sie eine kurze Begründung.

(c) [6 PUNKTE] Finden Sie eine möglichst kurze äquivalente Formel für K.

Lösungsvorschlag:

(a)

F	G	H	$F \Rightarrow G$	$G \Rightarrow H$	$(F \Rightarrow G) \Rightarrow (G \Rightarrow H)$	$F \Rightarrow H$	K
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) Da die letzte Spalte eine Null enthält, handelt es sich bei F nicht um eine Tautologie.

(c) Die Spalten der Warheitstabelle für $G \Rightarrow H$ und $(F \Rightarrow G) \Rightarrow (G \Rightarrow H)$ stimmen überein. Anschließend wenden wir die Definition von $\Rightarrow$ an:

$$\begin{aligned}
((F \Rightarrow G) \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (F \Rightarrow H) &\equiv (G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow H) \\
&\equiv \neg(\neg G \vee H) \vee \neg F \vee H \\
&\equiv (G \wedge \neg H) \vee \neg F \vee H \\
&\equiv (\neg F \vee G \vee H) \wedge (\neg F \vee \neg H \vee H) \\
&\equiv (\neg F \vee G \vee H) \wedge (\neg F \vee \top) \\
&\equiv (\neg F \vee G \vee H) \wedge \top \\
&\equiv \neg F \vee G \vee H \qquad \text{Länge 6} \\
&\equiv F \Rightarrow (G \vee H) \qquad \text{Länge 5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 [15 PUNKTE]

Beweisen Sie mit Hilfe natürlicher Deduktion folgende Formel: $\neg(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((G \Rightarrow F) \Rightarrow F)$

Anmerkung: Der Beweis soll vollständig sein und ausschließlich die Regeln der Vorlesung verwenden. Eine korrekte Herleitung mit $n < 13$ Zeilen bringt $13 - n$ Sonderpunkte.

Lösungsvorschlag:

1	$\neg(F \Rightarrow G)$	Praemisse
2	$G \Rightarrow F$	Kastenpraemisse
3	$\neg F$	Kastenpraemisse
4	F	Kastenpraemisse
5	$\bot$	$(\bot i), 3, 4$
6	G	$(\bot e), 5$
7	$F \Rightarrow G$	$(\Rightarrow i), 4-6$
8	$\bot$	$(\bot i), 1, 7$
9	$\neg\neg F$	$(\neg i), 3-8$
10	F	$(\neg\neg e), 9$
11	$(G \Rightarrow F) \Rightarrow F$	$(\Rightarrow i), 2-10$

Aufgabe 3 [13 PUNKTE]

Das Forschungsteam XFD will im kommenden Jahr drei Projekte starten, A, B und C. Aber falls der Antrag für zusätzliche Forschungsmittel nicht genehmigt wird, können nicht alle Projekte finanziert werden. Projekt A ist als Grundlage für künftige Forschung unbedingt erforderlich. Zudem braucht das Team mindestens ein zweites Projekt, sonst wird es abgewickelt. Wenn außerdem die Zarastro-Spumatik generalüberholt werden soll, muß Projekt B entfallen. Flickt man dagegen die Zarastro-Spumatik nur notdürftig, muß das Projekt C durchgezogen werden.

Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Forscherteam XFD unter der Voraussetzung, dass keine zusätzlichen Forschungsmittel bewilligt werden, neben Projekt A nur noch Projekt C durchführen kann.

Lösungsvorschlag:

Der Start des Projekts A/B/C wird mit A, B, bzw. C abgekürzt. Weiterhin stehen F für die Genehmigung zusätzlicher Forschungsmittesl und Z für die Überholung der Zarastro-Spumatik.

Damit ergeben sich aus dem Text folgende Aussagen:

- $\neg F \Rightarrow \neg(A \wedge B \wedge C) \equiv \neg F \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B \vee \neg C) \equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee F$
- A
- $B \vee C$
- $Z \Rightarrow \neg B \equiv \neg B \vee \neg Z$
- $\neg Z \Rightarrow C \equiv C \vee Z$

Die ersten beiden liefern die Resolvente $\neg B \vee \neg C \vee F$

Unter der Voraussetzung $\neg F$ erhält man die Resolventen $\neg B \vee \neg C$, $\neg B \vee Z$ und somit $\neg B$. Bei Durchführung des Projekts B erhalten wir schlieslich die Resolvente $\emptyset$, also eine unerfüllbare Formel. Andererseits liefert die Durchführung des Projekts C die Resolvente $\neg B$, aber darüberhinaus nicht $\emptyset$.

Aufgabe 4 [13 PUNKTE]

Wandeln Sie die Formel $((F \Rightarrow G) \Rightarrow H) \wedge (\neg H \Rightarrow (H \Rightarrow F))$ in *kanonische* KNF um. Erläutern Sie Ihre Schritte!

Lösungsvorschlag:

Wir fassen F, G und H als atomar auf. Zur Konstruktion der NNF ist zunächst die Implikation zu eliminieren, dann sind die De Morganschen Regeln anzuwenden, wobei ggf. gleich doppelte Negationen entfernt werden können:

$$\begin{aligned}((F \Rightarrow G) \Rightarrow H) \wedge (H \vee (H \Rightarrow F)) &\equiv (\neg(\neg F \vee G) \vee H) \wedge (H \vee \neg H \vee F) \\ &\equiv ((F \wedge \neg G) \vee H) \wedge \top \\ &\equiv (F \wedge \neg G) \vee H\end{aligned}$$

Anwendung des Distributivitätsgesetzes liefert nun die KNF:

$$(F \wedge \neg G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (\neg G \vee H)$$

In der kanonischen KNF muß jede Variable in jeder Klausel genau einmal und keine Klausel darf doppelt auftreten. Bisher sind beide Klauseln zu kurz und müssen mit Hilfe der Distributivgesetze und $F \vee \neg F \equiv \top$ bzw. $G \vee \neg G \equiv \top$ auf die gewünschte Länge gebracht werden. Ggf. sind dann Wiederholungen von Klauseln zu entfernen. Um diese besser sehen zu können, ordnen wir die Literale innerhalb der Klauseln alphabetisch:

$$\begin{aligned}&(F \vee H) \wedge (\neg G \vee H) \\ \equiv\ &(F \vee G \vee H) \wedge (F \vee \neg G \vee H) \wedge (F \vee \neg G \vee H) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee H) \\ \equiv\ &(F \vee G \vee H) \wedge (F \vee \neg G \vee H) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee H)\end{aligned}$$

Aufgabe 5 [29 PUNKTE]

Beantworten Sie folgende Wissens- und Verständnisfragen; knappe Antworten genügen:

(a) [6 PUNKTE] Wann nennt man eine Menge J von Symbolen in der Prädikatenlogik *adäquat*? Geben Sie (ohne Beweis) alle adäquaten Teilmengen von $\{\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$ an.

(b) [4 PUNKTE] Wie kann man mit der Resolutionsmethode testen, ob eine aussagenlogische Formel eine Tautologie ist?

(c) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie: für jede prädikatenlogische Formel kann man eine äquivalente Formel finden, die mit dem Symbol $\forall$ beginnt.

(d) [4 PUNKTE] Ihr Chef berichtet Ihnen nach der CBIT von einer neuen App, die ihm im Hinterzimmer eines Standes gezeigt worden sei: man scannt mit der Kamera eine beliebige aussagenlogische Formel (beispielsweise von einem Übungsblatt oder von einer Klausur), und nach wenigen Sekunden wandelt die App sie in eine Horn-Formel um, deren Erfüllbarkeit sie anschliesend in Sekundenbruchteilen untersucht. Was erwidern Sie angesichts der Aufgabe, auch solch eine App zu programmieren?

(e) [5 PUNKTE] Begründen Sie *ohne Aufstellen einer Wahrheitstafel*, warum die folgende Formel nicht erfüllbar ist:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D \vee A) \wedge \neg B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D \Rightarrow B)$$

(f) [5 PUNKTE] Ist folgende Formel allgemeingültig? $\forall x : \exists x : \exists y : \forall y : x = y$

Lösungsvorschlag:

(a) Wenn jede $\{\neg, \vee, \wedge, \forall\}$-Formel zu einer J-Formel äquivalent ist.

Im Fall $J = \{\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$ ist keine Singleton-Teilmenge adäquat, und auch keine 2-elementige Teilmenge. Da $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$ für die Aussagenlogik adäquat sind, können wir aufgrund der verallgemeinerten de Morganschen Regeln diese Mengen um jeweils einen Quantor vergrößern und erhalten damit vier adäquate Mengen für die Prädikatenlogik:

$$\{\neg, \wedge, \forall\} \quad , \quad \{\neg, \wedge, \exists\} \quad , \quad \{\neg, \vee\forall\} \quad , \quad \{\neg, \vee, \exists\}$$

Obermengen adäquater Mengen sind natürlich wieder adäquat.

(b) F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ nicht erfüllbar ist, und dies kann mit der Resolutionsmethode festgestellt werden.

(c) Korrekt: wähle eine neue Variable z, die nicht in F vorkommt, und betrachte $G := \forall z : F$. Dann gilt für jede Σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Träger A und jede für F passende Belegung α

$$\widehat{\alpha}(G) = \inf\{ \widehat{\alpha[^a/_z]}(F) \ : \ a \in A \} = \widehat{\alpha}(F)$$

(d) Das funktioniert nicht, da nicht jede aussagenlogische Formel eine äquivalente Hornformel besitzt; deren KNF ist hinsichtlich der positiven Literale pro Klausel eingeschränkt. Man könnte höchstens die KNF-Umformung programmieren, dann feststellen, ob eine Horn-Formel vorliegt, und diese ggf. schnell auf Erfüllbarkeit prüfen.

(e) Korrekt: Die Formel liegt fast in KNF vor, nur die letzten beiden Klauseln sind umzuformen in $B \vee \neg A$ bzw. $B \vee (\neg C \wedge \neg D) \equiv (B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg D)$. Nun können wir die Resolventen $A \vee C$ $\neg A$ und folglich C sowie $\neg C$ bilden, und damit auch $\emptyset$.

(f) In bereinigter Form erhalten wir $\forall u : \exists x : \exists z : \forall y : x = y$, was äquivalent ist zu $\forall u : \exists zx : \exists x : \forall y : x = y$ und in Strukturen mit mindestes zwei Elementen in der Trägermenge nicht gelten kann. Also ist die Formel nicht allgemeingültig.

Aufgabe 6 [16 PUNKTE]

Die Signatur Σ enthalte eine Konstante c, zwei zweistellige Funktionssymbole f und g und ein zweistelliges Prädikatensymbol P.

(a) [4 PUNKTE] Welcher der folgenden Ausdrücke

(0) $\forall x : \neg(g(c, x) = z) \Rightarrow P(f, c) = f(y, c) \vee \exists w : (x \wedge f(w, x)))$

(1) $\exists x : (\forall y : (P(c, c) \wedge x = g(c, y)) \vee \neg P(f(x, z), c) \Rightarrow g(z, c)$

ist eine korrekte prädikatenlogische Formel für die gegebene Signatur? Begründen Sie ggf. eine negative Entscheidung vollständig.

(b) [6 PUNKTE] Wir betrachten die Σ-Struktur mit Trägermenge $\mathbb{R}$, der Konstanten 0, Addition und Multiplikation für f bzw. g und $<$ für P. Interpretieren Sie die Aussage der Formel

$$\forall a : \forall b : \exists x : (\neg(P(a, c) \wedge P(c, a)) \wedge (P(b, c) \vee (b = c)) \Rightarrow f(g(a, g(x, x)), b) = c)$$

und überprüfen Sie mit kurzer Begründung, unter welchen Bedingungen sie gültig ist.

(c) [6 PUNKTE] Wir betrachten die Σ-Struktur mit Trägermenge $\mathbb{N}$, der Konstanten 0, Addition und Multiplikation für f bzw. g und $<$ für P. Formalisieren Sie die Tatsachen,

– dass eine beliebige Zahl x durch jede Zahl y mit geeignetem Rest geteilt werden kann;

– dass zwei Zahlen x und y modulo n äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

(a) (0) ist nicht korrekt, da

– $P(f, c)$ undefiniert ist (f ist kein Term);

– eine atomare Formel ($P(x, y)$) nicht in einem Prädikat ($=$) auftreten darf;

– der Term x keine atomare Formel ist, also nicht als Argument einer Konjunktion auftreten darf;

– am Schluß eine überzählige Klammer steht.

(1) ist nicht korrekt, da

– die Klammer vor $\forall$ keinen Partner hat;

– der Term $g(z, c)$ keine atomare Formel ist und somit nicht auf der rechten Seite einer Implikation stehen darf.

(b) Interpretation: für je zwei Zahlen a und b mit a beliebig und $b \leq 0$ hat die Gleichung $ax^2 + b = 0$ eine Lösung. Dies ist in der gegebenen Struktur nur dann gültig, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben, also nicht immer.

(c) – $\forall x : \forall y : \exists q : \exists r : x = f(g(q, x), r) \wedge P(r, y)$

– $\exists p : \exists q : \exists r : x = f(g(p, n), r) \wedge y = f(g(q, n), r)$

Aufgabe 7 [16 PUNKTE]

Wir betrachten eine Signatur Σ mit mit einem zweistelligen Prädikatssymbol P. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Für die allgemeingültigen Formeln genügt eine kurze Begründung, für die anderen ist eine Σ-Struktur anzugeben, in der die Formel falsch ist.

(a) [4 PUNKTE] $\forall y : \exists x : P(x, y) \Rightarrow \exists x : \forall y : P(x, y)$

(b) [4 PUNKTE] $\exists x : \forall y : P(x, y) \Rightarrow \forall y : \exists x : P(x, y)$

(c) [4 PUNKTE] $\forall y : \forall x : P(x, y) \vee P(y, x)$

(d) [4 PUNKTE] $\forall x : \exists y : P(x, y) \vee \forall y : \exists x : \neg P(x, y)$

Lösungsvorschlag:

(a) Nein. $\mathbb{N}$ mit $>$: zu jeder natürlichen Zahl y existiert eine echt größere, aber es gibt keine größte natürliche Zahl.

(b) Ja. Ist die linke Formel korrekt, so kann dasselbe Element x auch rechts verwendet werden.

(c) Nein. $\mathbb{N}$ mit strikter Ordnung $<$: $2 < 6$ aber nicht umgekehrt. Oder diskrete Graphen (ohne Kanten, d.h. leerer Relation P).

(d) Dies läßt sich umschreiben zu $\exists x : \forall y : \neg P(x, y) \Rightarrow \forall y : \exists x : \neg P(x, y)$, was dieselbe Form hat wie (b) wobei P durch die Negation (also das Komplement) ersetzt wurde. Da aber (b) allgemeingültig ist, muß das auch für (d) zutreffen.