Blatt1 - Einführung in die Logik

Viradia, Yash - Informatik - 5275038 - Gruppe 01
y.viradia@tu-braunschweig.de

30.04.2023

HA3

a) Laut Definition bei Folien 36, 37

$$
\begin{aligned}
T(A) &= \{A\} \cup T(((\neg r \vee p) \wedge q)) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q)\} \cup T((\neg r \vee p)) \cup T(q) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q\} \cup T(\neg r) \cup T(p) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p\} \cup T(r) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p, r\}.
\end{aligned}
$$

Teilwörter mit Farben: (~~Grüne~~ Orange Farbe)

$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

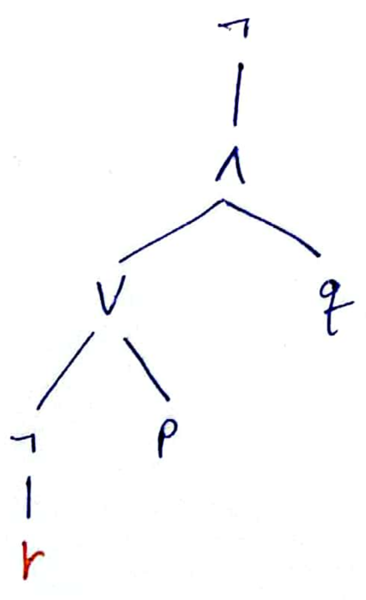
$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

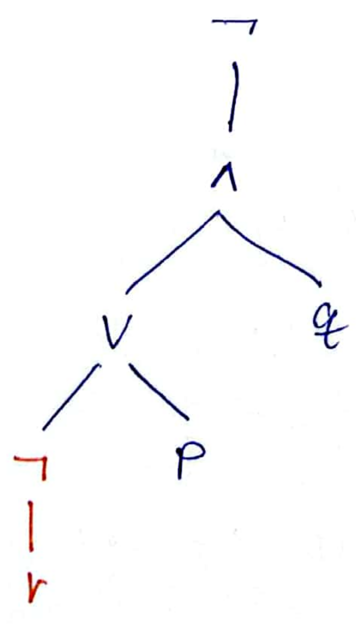
$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

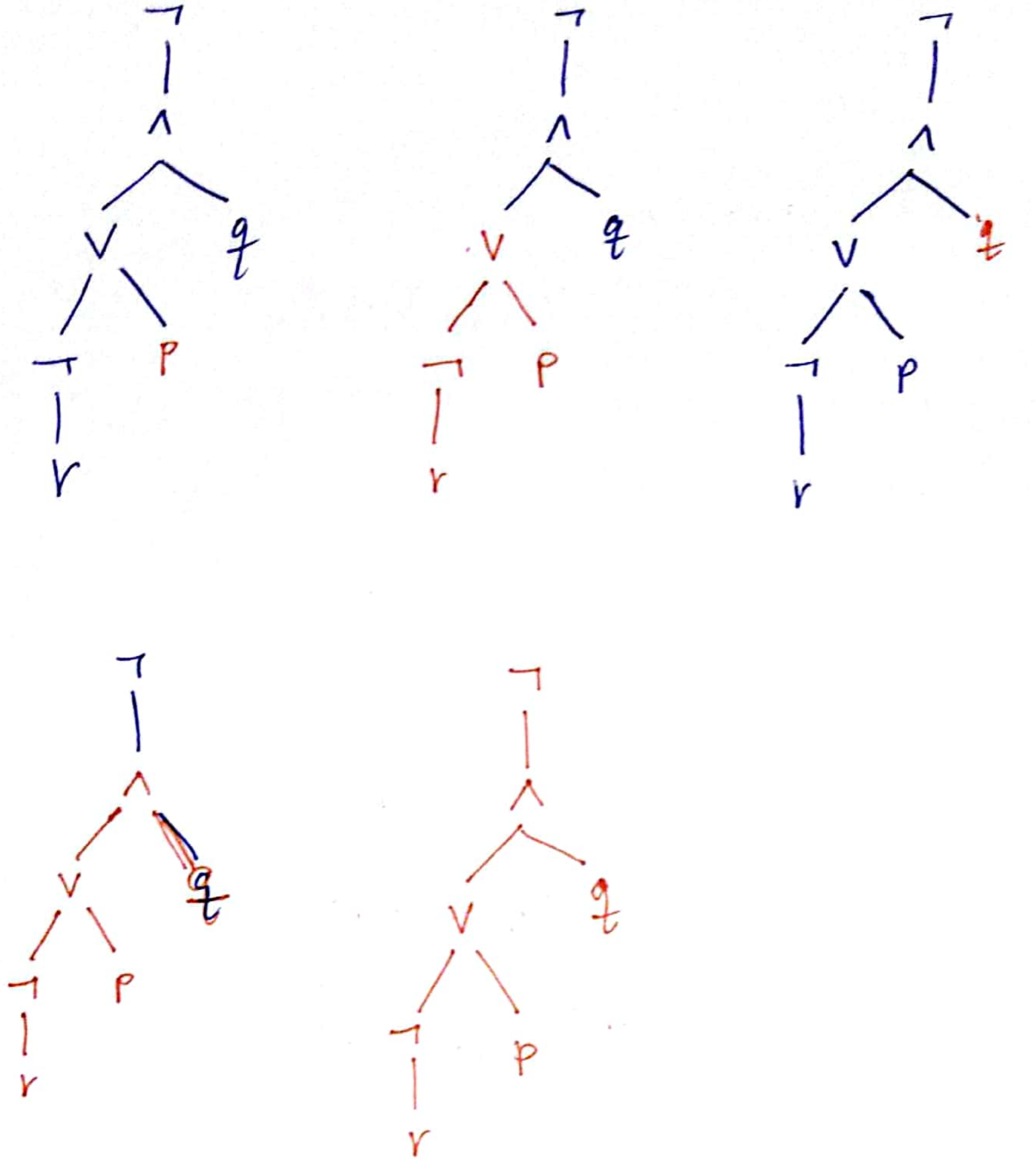
$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

$\neg((\neg r \vee p) \wedge q)$

Syntaxbaum:







HA4

a) Mithilfe einem Beispiel in flacher Notation bei Folie 53 lässt sich diese Aussage berechnen.

$$\begin{array}{cccccc} \neg & (p & \rightarrow & q) & \vee & r \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Daher $\hat{\phi}(\neg(p \rightarrow q) \vee r) = 1$.

b), c), d) lässt sich einfach mit der Wahrheitstabelle bestimmen.

b)

p	q	r	$q \rightarrow$	$(r \rightarrow$	$(p \vee q))$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$ ist Tautologie 4

c) $\{q \rightarrow p\} \models p \rightarrow q \quad = \quad (q \rightarrow p) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$(q \rightarrow p)$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Die Aussage gilt nicht.

Betrachte $\phi(p) = 1 \quad \phi(q) = 0$ z.B.

dann $\hat{\phi}(p \rightarrow q) = 0$ aber $\hat{\phi}(q \rightarrow p) = 1$ ↯.

d) $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q) \quad = \quad \neg p \vee \neg q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p \wedge q)$
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1

Diese Aussage ist gültig.

4

HA5

Die Aussagen a) und b) können als das Folgende umformuliert werden.

1) Γ' ist erfüllbar

2) Γ' ist endlich erfüllbar, d.h. Γ' hat eine endliche erfüllbare Teilmenge.

Wegen Kompaktheitssatz sind 1) und 2) äquivalent.

Schließlich sind a) und b) auch äquivalent.

4

HA6

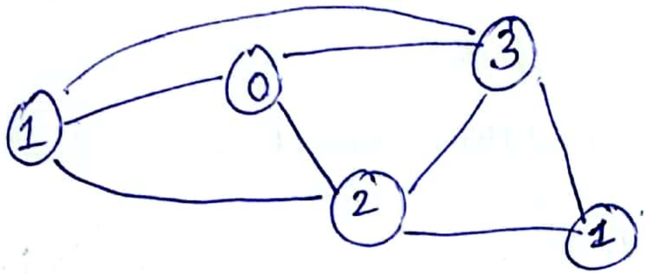
a) Das besagt, dass vier Farben immer ausreichen, eine beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene so einzufärben, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe bekommen.

Technisch betrachtet:

4-Farbkeit ist ein zusammenhängender Graph $G = \langle V, E \rangle$.

Hier sind alle Knoten $v \in V$ ~~ua~~ mit den Kanten $e \in E$ so verbunden, dass an jeder Seite der Kanten die Knoten unterschiedlich sind sozusagen keine gleiche Farbe besitzen.

z.B.



$V = \{0, 1, 2, 3\}$ die Nummer sind Farben.

b) Unter gewissen Bedingungen gilt ~~4-Färbkeit~~ 4-Färbung nur in der euklidischen Ebene.

Sei $G_5 = \langle V_5, E \rangle$ und $G_4 = \langle V_4, E' \rangle$

Der Graph G_5 lässt auf die Kugeloberfläche zeichnen, sodass je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Dann ist G_5 nicht mehr planar. Dementsprechend ist die Einbettung von G_4 auf Kugeloberfläche nicht möglich.

c) $C_{u,j} := \langle u,j \rangle \in V \times J$

$J := \{0,1,2,3\}$

Dann gibt es Möglichkeit für verschiedene Formeln:

1) Jeder Knoten hat mindestens eine Farbe

$\mathrm{Min}_u := C_{u,0} \vee C_{u,1} \vee C_{u,2} \vee C_{u,3}$

2). Jeder Knoten hat sonst höchstens eine Farbe.

$\mathrm{Hoc}_u := \cancel{C_{u,0} \wedge C_{u,1} \wedge C_{u,2} \wedge C_{u,3}} \ \bigwedge_{j<k<4} (C_{u,j} \rightarrow \neg C_{u,k})$

Am Ende besitzt T' Formelmenge eine erfüllende Belegung.

D.h. ein gegebener planarer Graph ist genau dann mit einer 4-Färbung, wenn T' erfüllbar ist.

d) Für die Erfüllbarkeit von $g \in T'$ nehmen wir eine endliche Menge $U \subseteq V$.

Durch die Knoten von U entsteht eine aufgespannte Teilgraph $W \subset G$.

Jetzt können wir die Formeln von b) also Min_u und Hoc_u zu g ergänzen. Damit ist die resultierende Menge $g \in T'_G$ immer noch endlich, d.h. nach dem 4-Färbensatz erfüllbar.

Das gilt auch für die Teilmengen von g.

Durch Kompaktheitssatz ist dann T' auch erfüllbar.