# Blatt5 - Einführung in die Logik

Viradia, Yash - Informatik - 5275038 - Gruppe 01
y.viradia@tu-braunschweig.de

25.06.2023

## HA6

$$(\forall x \exists y.\ P(x, f(y))) \wedge (\neg \exists y \forall x \exists z. (Q(g(z), f(x)) \vee P(y,z)))$$

Bereinige die Formel: Bennene die Variablen x und y im a und b um, also im ersten Teil,

$$(\forall a \exists b.\ P(a, f(b))) \wedge (\neg \exists y \forall x \exists z. (Q(g(z), f(x)) \vee P(y,z)))$$

Durch die Anwendung von De Morgan'sche Regel

$$(\forall a \exists b.\ P(a, f(b)) \wedge (\forall y \exists x \forall z. (\neg Q(g(z), f(x)) \wedge \neg P(y,z)))$$

Mit der Rechenregel (2) eine PNF gewinnen:

$$\forall a \exists b \forall y \exists x \forall z. (P(a, f(b)) \wedge \neg Q(g(z), f(x)) \wedge \neg P(y,z))$$

Fahre die Funktion $g/_1$ für b und $h/_2$ für x

$\cancel{\forall a \exists}$.

$$\forall a \forall y \forall z. (P(a, f(a))) \wedge \neg Q(g(z), f(h(a,y))) \wedge \neg P(y,z))$$

HA5

a) x und Y sind Primzahlzwillinge.

$T(x,Y) := \exists z : z = x \cdot Y$

c) Jede gerade Zahl $\geq 4$ lässt sich als Summe zweier Primzahl darstellen.

Zuerst bestimme ob die Zahl eine Primzahl ist.

$P(x) := \neg(x = 1) \wedge \forall y : (\exists z : y \cdot z = x \rightarrow (y=1) \vee (y=x))$

$\forall x : (1+1+1 < x \wedge \exists y : x = y+y \rightarrow$

$\exists a : \exists b : P(a) \wedge P(b) \quad x = a+b)$

d) Alle Zahlen mit geradem Quadrat sind gerade.

$\forall x : (\forall y : x \cdot x = y \cdot y) \longrightarrow \forall z : x = z+z$

## HA3

1) $\hat{\sigma}(\neg \forall x A) = 1 - \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\}$

De Morgan'sche Regel

$= \sup\{1 - \widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\}$

$= \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\neg A) : d \in D\}$

$= \hat{\sigma}(\exists x. \neg A)$

$\hat{\sigma}(\neg \exists x A) = 1 - \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\}$

De Morgan'sche Regel

$= \inf\{1 - \widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\}$

$= \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\neg A) : d \in D\}$

$\cancel{= \hat{\sigma}(\forall x (A \wedge B))}$

$= \hat{\sigma}(\forall x \neg A)$

2) $\hat{\sigma}(\forall x A \wedge \forall x B) = \inf\{\inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\}, \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D\}\}$

Assoziativgesetz

$= \inf\{\inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} : d \in D\}$

$= \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A \wedge B) : d \in D\}$

$= \hat{\sigma}(\forall x. (A \wedge B))$

$$\hat{\sigma}(\exists x A \vee \exists x B) = \sup\{\sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D\},$$
$$\sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D\}\}$$

Assoziativgesetz

$$= \sup\{\sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} : d \in D\}$$
$$= \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A \vee B) : d \in D\}$$
$$= \hat{\sigma}(\exists x \cdot (A \vee B))$$

3) $$\hat{\sigma}(\forall x \forall y A) = \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\forall y A) : d \in D\}$$
$$= \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\inf\{\widehat{\sigma\{y/z\}}(A) : z \in D\}) : d \in D\}$$
$$= \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}\{y/z\}}(A) : z \in D, d \in D\}$$
$$= \inf\{\widehat{\sigma\{y/z\}\{x/d\}}(A) : z \in D, d \in D\}$$
$$= \inf\{\widehat{\sigma\{y/z\}}(\inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D) : z \in D\}$$
$$= \inf\{\sigma\{y/z\}(\forall x A) . z \in D\}$$
$$= \forall y \forall x A.$$

$$\hat{\sigma}(\exists x \exists y A) = \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\exists y A) : d \in D\}$$
$$= \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(\sup\{\widehat{\sigma\{y/z\}}(A) : z \in D\}) ; d \in D\}$$
$$= \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}\{y/z\}}(A) : z \in D, d \in D\}$$
$$= \sup\{\widehat{\sigma\{y/z\}\{x/d\}}(A) : z \in D, d \in D\}$$

Mit CamScanner gescannt

$$= \sup \{ \widehat{\sigma\{y/z\}} (\exists x A) : z \in D \}$$

$$= \exists y \exists x A.$$

② Beweise jetzt (4)

$$\hat{\sigma}(A \wedge \forall x . B) = \inf \{ \hat{\sigma}(A), \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

Distributivgesetz

$$= \inf \{ \inf \{ \hat{\sigma}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

$$= \inf \{ \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

$$= \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \wedge B), d \in D \}$$

$$= \hat{\sigma}(\forall x . (A \wedge B))$$

$$\hat{\sigma}(A \vee \exists x . B) = \sup \{ \hat{\sigma}(A), \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

$$= \sup \{ \sup \{ \hat{\sigma}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \} : d \in D \} \}$$

$$= \sup \{ \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \} : d \in D \}$$

$$= \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \vee B) : d \in D \}$$

$$= \hat{\sigma}(\exists x (A \vee B))$$

$$\hat{\sigma}(A \wedge \exists x . B) = \inf \{ \hat{\sigma}(A), \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

$$= \sup \{ \inf \{ \hat{\sigma}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \} : d \in D \}$$

$$= \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \wedge B) : d \in D \}$$

$$= \hat{\sigma}(\exists x . A \wedge B)$$

$$\hat{\sigma}(A \vee \forall x . B) = \sup \{ \hat{\sigma}(A), \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) : d \in D \} \}$$

$$= \inf \{ \sup \{ \hat{\sigma}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \} : d \in D \}$$

$$= \inf \{ \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \} : d \in D \}$$

$$= \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \vee B) : d \in D \}$$

$$= \hat{\sigma}(\forall x . (A \vee B))$$

# HA4

Z: $\check{\sigma}(u\{x/t\}) = \check{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(u)$

Bew:

Sei $u$ eine von $x$ unterschiedlichen Variablen.

$$\check{\sigma}(u\{x/t\}) = \check{\sigma}(u)$$
$$= \check{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(u)$$

Sei $u = x$:

$$\check{\sigma}(x\{x/t\}) = \check{\sigma}(t)$$
$$= \check{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(x)$$

Aber wenn $u = f(u)$

$$\check{\sigma}(f(u)\{x/t\}) = f(\check{\sigma}(u)\{x/t\})$$
$$= f(\check{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(u))$$
$$= \check{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}f(u).$$

$Z$: $\hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \hat{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(A)$

Sei $A \equiv u_0 \doteq u_1$

$\bar{\sigma}((u_0 \doteq u_1)\{x/t\}) = 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(u_0\{x/t\}) = \bar{\sigma}(u_1\{x/t\})$

$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(\{x/\bar{\sigma}(t)\}(u_0)) = \bar{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(u_1))$

$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(u_0 \doteq u_1)) = 1.$

Sei A eine Prädikatsauswertung $P(u)$

Dann.

$\bar{\sigma}(P(u)\{x/t\}) = 1 \Leftrightarrow \langle \check{\sigma}(u\{x/t\}) \rangle \in P^{\hat{\sigma}}$

$\Leftrightarrow \langle \check{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(u)) \rangle \in P^{\hat{\sigma}}$

$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(P(u))) = 1.$

Sei A eine Konjunktion also $B \wedge C$

$\hat{\phi}((B \wedge C)\{x/t\}) = \inf(\hat{\sigma}(B\{x/t\}), \hat{\sigma}(C\{x/t\}))$

$= \inf(\hat{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(B)), \hat{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(C)))$

$= \hat{\phi}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(B \wedge C)\}$

Sei A eine Disjunktion also $B \vee C$

$\hat{\phi}((B \vee C)\{x/t\}) = \sup(\hat{\sigma}(B\{x/t\}), \hat{\sigma}(C\{x/t\}))$

$= \sup(\hat{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(B)), \hat{\sigma}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(C)))$

$= \hat{\phi}(\{x/\check{\sigma}(t)\}(B \vee C)\}.$

Sei $A$ eine $\forall$-Quantor Formel also $\forall y B$.

$$\hat{\sigma}(\forall y . B\{x/t\}) = \hat{\sigma}(\forall z\, B\{y/z\}\{x/t\})$$

$$= \inf\{\widehat{\sigma\{z/d\}}(B\{y/z\}\{x/t\}) : d \in D\}$$

$$= \inf\{\widehat{\sigma\{z/d\}}\{x/\widecheck{\sigma\{z/d\}}(t)\}\, B\{y/z\} : d \in D\}$$

$$= \hat{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)\}(\forall z\, B\{y/z\})$$

$$= \hat{\sigma}\{x/\check{\sigma}(t)(\forall y . B)$$

Wenn $A$ eine $\exists$-quantifizierte Formel ist, dann lässt sie sich analog wie oben beweisen. Nehme sup anstatt inf.