Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 6, 2023-07-10

Präsenzaufgabe 1

(a) Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform endlich?

(b) Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform isomorph zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$?

(c) Geben Sie für $\mathcal{S} = \{c_{/0}, f_{/1}, g_{/2}\} + \{P_{/1}, Q_{/2}\}$ die Elemente der Herbrand-Expansion für $A = \forall x.\big(P(x) \wedge \neg P(f(x))\big)$ an, die *ohne Klammern* höchstens 11 Symbole enthalten.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt zwei Möglichkeiten für $E(A)$, endlich zu sein: falls der quantorenfreie Teil B von A keine Variablen enthält, oder wenn $D_{\mathcal{H}}$ endlich ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{Fun}$ nur aus endlich vielen Konstanten besteht. Sobald neben $c_{/0} \in \boldsymbol{Fun}$ auch ein $f_{/n} \in \boldsymbol{Fun}$ mit $n > 0$ existiert, können wir z.B. den Term $f(x, c, \ldots, c)$ in beliebiger Tiefe in sich selbst substituieren und schließlich mit c für x terminieren und auf diese Weise unendlich viele verschiedene Elemente von $D_{\mathcal{H}}$ erzeugen.

(b) Da die Signatur $\mathcal{S}$ und die Variablenmenge $\mathcal{V}$ abzählbar sind, gilt dies auch für $\boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ und deren Teilmenge $E(A)$, vergl. Anhang B. Immer wenn $E(A)$ unendlich ist, ist diese Menge abzählbar unendlich, und damit isomorph zu $\mathbb{N}$! (trick question!)

(c) 7 Symbole: $P(c) \wedge \neg P(f(c))$
9 Symbole: $P(f(c)) \wedge \neg P(f(f(c)))$
11 Symbole: $P(f(f(c))) \wedge \neg P(f(f(f(c))))$, $P(g(c,c)) \wedge \neg P(f(g(c,c)))$

Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie unter Verwendung der prädikatenlogischen Tableau-Methode, dass folgende Formel nicht erfüllbar ist:

$$\neg\Bigg[\bigg(\forall x.\, \Big(P(x) \to \neg P\big(f(x)\big)\Big) \wedge \exists y.\, \Big(\neg P\big(f(y)\big) \to P(y)\Big)\bigg) \to \exists z.\, \Big(P(z) \wedge \neg P\big(f(z)\big)\Big)\Bigg]$$

Lösungsvorschlag:

Eliminierung der ersten Implikation und De Morgan liefert

$$\forall x.\, \Big(P(x) \to \neg P\big(f(x)\big)\Big) \wedge \exists y.\, \Big(\neg P\big(f(y)\big) \to P(y)\Big) \wedge \forall z.\, \Big(\neg P(z) \vee P\big(f(z)\big)\Big)$$

$$\star\ \forall x.\,\big(P(x)\to\neg P(f(x))\big)\wedge\exists y.\,\big(\neg P(f(y))\to P(y)\big)\wedge\forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P(f(z))\big)\quad 0$$

$$0a\ \forall x.\,\big(P(x)\to\neg P(f(x))\big)\quad 3$$

$$0b\ \exists y.\,\big(\neg P(f(y))\to P(y)\big)\quad 1$$

$$0c\ \forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P(f(z))\big)\quad 5$$

$$1\delta\ \neg P(f(a))\to P(a)\quad 2$$

$$3\gamma\ P(f(a))\to\neg P(f(f(a)))\quad 4$$

$$5\gamma\ \neg P(f(a))\vee P(f(f(a)))\quad 6$$

$$3\gamma\ P(a)\to\neg P(f(a))\quad 7$$

$$5\gamma\ \neg P(a)\vee P(f(a))\quad 8$$

$$2a\ P(f(a)) \qquad\qquad 2b\ P(a)$$

$$4a\ \neg P(f(a))\ \lightning 2a \qquad 4b\ \neg P(f(f(a))) \qquad 7a\ \neg P(a)\ \lightning 3b \qquad 7b\ \neg P(f(a))$$

$$6a\ \neg P(f(a))\ \lightning 2a \quad 6b\ P(f(f(a)))\ \lightning 4b \qquad 8a\ \neg P(a)\ \lightning 3b \quad 8b\ P(f(a))\ \lightning 7b$$

In der Praxis erscheint es sinnvoll, die Bedingung abzuschwächen, dass γ-Teilchen in derselben Knotenmenge verbleiben sollen. Man weiß á priori nicht, wie oft einzelne γ-Formeln zu verwenden sind, also wieviel Platz man für die einzelnen Knotemengen lassen muß. Außerdem kann man die resultierenden γ-Teilchen näher zu der Position bringen, in der ein Widerspruch angestrebt wird:

$$\star\ \forall x.\,\big(P(x)\to\neg P(f(x))\big)\wedge\exists y.\,\big(\neg P(f(y))\to P(y)\big)\wedge\forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P(f(z))\big)\quad 0$$

$$0a\ \forall x.\,\big(P(x)\to\neg P(f(x))\big)\quad 3$$

$$0b\ \exists y.\,\big(\neg P(f(y))\to P(y)\big)\quad 1$$

$$0c\ \forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P(f(z))\big)\quad 5$$

$$1\delta\ \neg P(f(a))\to P(a)\quad 2$$

$$2a\ P(f(a)) \qquad\qquad 2b\ P(a)$$

$$3\gamma\ P(f(a))\to\neg P(f(f(a)))\quad 4 \qquad\qquad 3\gamma\ P(a)\to\neg P(f(a))\quad 7$$

$$4a\ \neg P(f(a))\ \lightning 2a \qquad 4b\ \neg P(f(f(a))) \qquad 7a\ \neg P(a)\ \lightning 3b \qquad 7b\ \neg P(f(a))$$

$$5\gamma\ \neg P(f(a))\vee P(f(f(a)))\quad 6 \qquad\qquad 5\gamma\ \neg P(a)\vee P(f(a))\quad 8$$

$$6a\ \neg P(f(a))\ \lightning 2a \quad 6b\ P(f(f(a)))\ \lightning 4b \qquad 8a\ \neg P(a)\ \lightning 3b \quad 8b\ P(f(a))\ \lightning 7b$$

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

Herbrand Theorie:

1. [4 PUNKTE] Die Signatur für

$$F = \forall y\, \exists x.\, P(g(y,z),x) \vee \exists x.\, Q(f(x), g(y,z), y)$$

   enthalte die Funktionssymbole $f_{/1}$ und $g_{/2}$. Berechnen Sie eine Skolemnormalform für F.

2. [4 PUNKTE] Bestimmen Sie die Herbrand-Expansion für

$$G = \exists y\, \forall x\, \forall z.\, \Big(P(x,i) \wedge Q(y,z,h)\Big)$$

   sofern ***Fun*** nur die Konstanten $h_{/0}$ und $i_{/0}$ enthält.

3. [2 PUNKTE] Hat

$$H = \exists x \forall y.\, \neg\exists z.\, \big(\forall y.\, P(y,z) \rightarrow Q(v,y,z)\big)$$

   über derselben Signatur eine endliche Herbrand-Expansion? Begründen Sie Ihre Antwort. [Anmerkung: bei H liegt kein Tippfehler vor!]

Hinweis: Bedenken Sie, dass die Herbrand-Expansion erfordert, dass die Formel zunächst in Skolemnormalform gebracht wird.

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe eines Tableaus die Allgemeingültigkeit von

$$\Big(\forall x\, \forall y.\, \big(\neg\neg P(x,y) \rightarrow P(y,x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x,y)\Big) \rightarrow \forall x\, \exists y.\, P(y,x)$$

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie unter Verwendung der (prädikatenlogischen) Resolventenmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist. Bringen Sie die Formel dafür zunächst in eine geeignete Form.

$$\exists z\, \forall x\, \forall y.\, \Big(\big(P(y) \rightarrow Q(x,x)\big) \wedge \big(Q(x,y) \rightarrow R(y)\big) \wedge P(z) \wedge \big(\neg R(z) \vee \neg P(z)\big)\Big)$$

Abgabe bis Donnerstag, 2023-07-13, 11:30, online als PDF mit Email-Adresse