Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 0, 2023-04-10

Bitte geben Sie die Aufgaben online im PDF-Format ab, versehen mit mindestens einer Email-Adresse, damit die kommentierten PDFs zurückgeschickt werden können.

In der ersten großen Übung am kommenden Montag werden einige allgemeine Beweisverfahren vorgestellt.

Präsenzaufgabe 1

Auseinandersetzung mit Anhang B, Abzählbarkeit.

Präsenzaufgabe 2

Vorbemerkung: Sofern Sie in Niedersachsen das Gymnasium besucht haben, dürfte Ihnen etwa in der 7. Klasse der Begriff „Zuordnung“ begegnet sein. Da man zu der Zeit ohnehin nur mit Zahlen arbeitete, wurden für eine Zuordnung z die beiden Mengen

- A , derjenigen Elemente, *denen etwas zugeordnet wird*; und
- B , derjenigen Elemente, *die potentiell zugeordnet werden*

vermutlich nicht explizit erwähnt. Weiter wurde evtl. unterschlagen, *wieviele* Elemente aus B einem einzelnen Element $a \in A$ zugeordnet werden dürfen. Sofern das in späteren Klassen nicht präzisiert wurde, stellen wir sicherheitshalber fest:

Wird jedem $a \in A$ durch z

- eine *beliebige Menge von Elementen* aus B zugeordnet (die auch leer sein darf), so handelt es sich bei z um eine *Relation* $A \xrightarrow{z} B$;
- *genau ein Element* aus B zugeordnet, das häufig mit $z(a)$ bezeichnet wird, so handelt es sich bei z um eine *Funktion* $A \xrightarrow{z} B$;
- *höchstens ein Element* aus B zugeordnet, so handelt es sich bei z um eine *partielle Funktion* $A \xrightharpoondown{z} B$.

Elementfreie Charakterisierung von Funktionen: Zeigen Sie, dass eine Relation $A \xrightarrow{R} B$ genau dann eine Funktion ist, wenn eine Relation $B \xrightarrow{S} A$ existiert mit $\boldsymbol{id}_A \subseteq R;S$ und $S;R \subseteq \boldsymbol{id}_B$. (Kann man genaueres über S sagen?)

Hausaufgabe 3 [5 PUNKTE]

Terme: Etwa in Klasse 8 dürften in niedersächsischen Gymnasien *Terme* der Arithmetik (vermutlich über der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen) aufgetreten sein, z.B. $(2 \cdot x + 5)$ oder $(3 + -x)(x + 2)$. Verglichen mit den Termen der universellen Algebra aus Anhang A sind folgende Punkte zu beachten:

- Neben den *formalen Funktionssymbolen* oder *Operatoren* $+$, $\cdot$, $-$ treten unendlich viele Konstanten $q \in \mathbb{Q}$ auf; die zugrundeliegende Signatur $\mathcal{S}$ ist also gegeben durch

$$+_{/2}\ ,\ \cdot_{/2}\ ,\ -_{/1} \text{ und } q_{/0} \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Q}$$

- Für eine Menge von Variablen $\mathcal{V}$ ensteht die Menge $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ induktiv wie folgt:

  * jede Variable $x \in \mathcal{V}$ ist ein Term;
  * jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ ist ein Term;
  * für jeden Term t ist auch $-t$ ein Term;
  * für je zwei Terme t und u ist auch $(t + u)$ ein Term;
  * für je zwei Terme t und u ist auch $(t \cdot u)$ ein Term.

- Man ist hauptsächlich an der kanonischen Interpretation dieser Signatur in der Menge $\mathbb{Q}$ selbst interessiert:

  * jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ interpretiert sich selbst, also als $q \in \mathbb{Q}$;
  * die übrigen Operatoren werden als die üblichen Funktionen interpretiert:
    - $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{+} \mathbb{Q}$ (Addition),
    - $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}$ (Multiplikation), sowie
    - $\mathbb{Q} \xrightarrow{-} \mathbb{Q}$ (Multiplikation mit -1)

- Um einen Term wie z.B. $(x + 3) \cdot y$ *auswerten* zu können, benötigt man eine Belegung aller (im Term auftretenden) Variablen mit rationalen Zahlen.

- Die Signatur erlaubt auch eine kanonische Interpretation in der Menge $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ aller Terme:

  * jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ interpretiert sich selbst, also als $q \in \mathbb{Q}$;
  * die übrigen Operatoren werden als als Funktionen
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \times \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{+} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $t_0 + t_1 := (t_o + t_1)$;
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \times \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\cdot} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $t_0 \cdot t_1 := (t_o \cdot t_1)$; sowie
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{-} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $-t := -t$

    interpretiert.

  [5 PUNKTE] Welches Problem bzgl. der Interpretation in $\mathbb{Q}$ tritt auf, wenn man die Signatur $\mathcal{S}$ um einen 2-stelligen Operator $/_{/2}$ erweitert, der die Division formalisieren soll? Wie kann man das umgehen?

Hausaufgabe 4 [6 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie: Jede transitive symmetrische totale (vergl. Folie 23) Relation ist reflexiv.

Hausaufgabe 5 [20 PUNKTE]

Stabilität der Eigenschaften von Relationen:

(a) [10 PUNKTE] (Vergl. Folie 22) Gegeben sind eine Menge $\mathcal{R}$ von Relationen $B \xrightarrow{R} B$, $B \xrightarrow{S} B$, $B \xrightarrow{T} B$...Sind alle diese Relationen

  – reflexiv, bzw.

- transitiv, bzw.
- symmetrisch, bzw.
- anti-symmetrisch, bzw.
- linear,

gilt dies ebenfalls für ihren Durchschnitt $B \xrightarrow{\bigcap \mathcal{R}} B$ bzw. für ihre Vereinigung $B \xrightarrow{\bigcup \mathcal{R}} B$? Begründen Sie Ihre Antwort; im negativen Fall genügt ein Gegenbeispiel mit zwei Relationen.

(b) [5 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) und ohne den Satz auf Folie 24 zu verwenden: zu jeder Relation $B \xrightarrow{R} B$ existiert eine bzgl. Mengeninklusion $\subseteq$ kleinste Äquivalenzrelation $B \xrightarrow{E} B$, die R enthält.

(c) [5 PUNKTE] Finden Sie analog zum Lemma auf Folie 24 eine elementfreie Charakterisierung anti-symmetrischer Relationen.

And now for something completely different:

Hausaufgabe 6 [0 PUNKTE]

Überzeugen Sie sich selbst vom beklagenswerten Zustand der Logik im Mittelalter, speziell hinsichtlich der Identifizierung von Hexen, in folgendem halbdokumentarischen Film:

`https://www.youtube.com/watch?v=yp_l5ntikaU`

Versuchen Sie, das Argument von Bedevere zu formalisieren. Im Laufe der Vorlesung sollten einige Fehler deutlich werden (kein Problem, wenn Sie die jetzt noch nicht finden).

Abgabe ausnahmsweise bis Mittwoch, 2023-04-19, 09:45, online als PDF mit Email-Adresse