Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2023-04-24

Präsenzaufgabe 1

Die Formelmenge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist die kleinste Lösung einer Fixpunkt-Gleichung (vergl. Folie 38):

Die BNF für Formeln

$$\boldsymbol{F} ::= \mathcal{A} \mid \bot \mid \top \mid \neg\boldsymbol{F} \mid (\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{F}) \quad \text{für } \star \text{ binär} \tag{$*$}$$

nimmt in konventioneller Mengenschreibweise folgende Form an:

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{A} + \{\bot, \top\} + \neg\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{F}) \tag{$**$}$$

Dabei ist $\boldsymbol{F}$ eine Variable, die Werte in der Potenzmenge von $\big(\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}\big)^*$ annehmen kann, d.h., $\boldsymbol{F}$ ist eine unbestimmte Menge von (endlichen!) Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}$.

Die rechte Seite von $(*)$ bzw. $(**)$ beschreibt eine Funktion

$$\boldsymbol{P}\Big(\big(\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}\big)^*\Big) \xrightarrow{\Phi} \boldsymbol{P}\Big(\big(\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}\big)^*\Big)$$

für die gemäß $(*)$ bzw. $(**)$ Fixpunkte $\boldsymbol{F}$ gesucht werden. Zeigen Sie

1. Φ erhält die Ordnung $\subseteq$ auf der Potenzmenge, d.h., aus $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}$ folgt $\Phi(\boldsymbol{X}) \subseteq \Phi(\boldsymbol{Y})$.
2. Ist die Menge $\big(\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}\big)^*$ aller Wörter ein Fixpunkt für Φ?
3. Die Iteration $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset$, $\boldsymbol{F}_{n+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_n)$ liefert eine monoton wachsende Folge von Teilmengen von $\big(\mathcal{J} + \mathcal{A} + \{(,)\}\big)^*$, d.h.,
$$\boldsymbol{F}_n \subseteq \boldsymbol{F}_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$
4. Charakterisieren Sie die Elemente von $\boldsymbol{F}_n$, $n > 0$, möglichst einfach und prägnant und schließen Sie daraus $\boldsymbol{F}_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{F}_n = \mathcal{F}_{()}[\mathcal{A}]$. [**Hinweis**: Wenn Sie möchten, dürfen Sie hier mit Syntaxbäumen argumentieren.]
5. $\boldsymbol{F}_\infty$ ist der kleinste Fixpunkt von Φ.

Lösungsvorschlag:

1. Falls $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}$ gilt
$$\neg\boldsymbol{X} = \{\, \neg W : W \in \boldsymbol{X} \,\} \subseteq \{\, \neg Z : Z \in \boldsymbol{Y} \,\} = \neg\boldsymbol{Y}$$
und für $\star$ binär
$$\boldsymbol{X} \star \boldsymbol{X} = \{\, W \star W' : W, W' \in \boldsymbol{X} \,\} \subseteq \{\, Z \star Z' : Z, Z' \in \boldsymbol{Y} \,\} = \boldsymbol{Y} \star \boldsymbol{Y}$$
2. Nein, denn die rechte Seite produziert z.B. keine Wörter,

- die mit einem binären Junktor oder einer schließenden Klammer beginnen;
- mit einem binären Junktor oder einer öffnenden Klammer enden;
- mit einer öffenenden Klammer beginnen, aber nicht mit einer schließenden Klammer enden;
- mit einer schließenden Klammer enden, aber nicht mit einer öffnenden Klammer beginnen.

Es genügt, ein einziges Wort außerhalb von $\Phi\left(\left(\mathcal{J}+\mathcal{A}+\{(,)\}\right)^*\right)$ anzugeben, z.B. $)p\neg(\wedge($.

3. Dies folgt wegen $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset \subseteq \boldsymbol{F}_1 = \mathcal{A} \cup \{\bot, \top\}$ per Induktion sofort aus Teil 1.

4. Die Elemente aus $\boldsymbol{F}_n$ sind genau die aussagenlogischen Formeln, deren Syntaxbaum eine Tiefe $< n$ hat. Beweis durch vollständige Induktion:

   Anfang: Klar für $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset$. Wir bemerken, dass die Syntaxbäume der Formeln in $\mathcal{A} \cup \{\bot, \top\}$ die Tiefe 0 haben und es keine weiteren solchen Formeln gibt.

   Annahme: Die Behauptung stimmt für $\boldsymbol{F}_k$.

   Schluss: Betrachte die Syntaxbäume der Elemente in $\boldsymbol{F}_{k+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_k)$. Deren echte nichtleere Unterbäume haben eine Tiefe $< k$. Damit haben die Syntaxbäume der Elemente in $\boldsymbol{F}_{k+1}$ maximal die Tiefe k .

   Umgekehrt hat jede Formel A mit Syntaxbaum der Tiefe k mindestens einen echten Unterbaum der Tiefe $k-1$, daher gehören die Formeln aller echten Unterbäume zu $\boldsymbol{F}_k$, und folglich A zu $\boldsymbol{F}_{k+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_k)$.

   Die Vereinigung enthält nun alle Formeln mit Syntaxbäumen endlicher Tiefe, also alle Formeln.

5. Offenbar gilt

$$\neg\boldsymbol{F}_\infty = \{\neg A \,:\, A \in \boldsymbol{F}_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\neg A \,:\, A \in \boldsymbol{F}_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\boldsymbol{F}_n$$

   Weiter behaupten wir

$$(\boldsymbol{F}_\infty \star \boldsymbol{F}_\infty) = \{A \star B \,:\, A, B \in \boldsymbol{F}_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A \star B \,:\, A, B \in \boldsymbol{F}_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\boldsymbol{F}_n \star \boldsymbol{F}_n)$$

   $(\subseteq)$ Für $A \star B \in (\boldsymbol{F}_\infty \star \boldsymbol{F}_\infty)$ existieren Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ mit $A \in \boldsymbol{F}_i$ und $B \in \boldsymbol{F}_j$. Setze $m := \max\{i, j\}$. Wegen Teil 3 gilt dann auch $A, B \in \boldsymbol{F}_m$, und folglich $(A \star B) \in (\boldsymbol{F}_m \star \boldsymbol{F}_m)$.

   $(\supseteq)$ Trivial.

   Zusammen folgt $\boldsymbol{F}_\infty = \Phi(\boldsymbol{F}_\infty)$, also ist $\boldsymbol{F}_\infty$ ein Fixpunkt.

   Ist $\boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{F}_\infty$ ein echt kleinerer Fixpunkt, betrachte eine Formel A in der Differenz $\boldsymbol{F}_\infty - \boldsymbol{G}$, deren Syntaxbaum minimale Tiefe hat. Alle echten Unterbäume von A sind aber in $\boldsymbol{G}$ enthalten, wegen $\boldsymbol{G} = \Phi(\boldsymbol{G})$ also auch A , Widerspruch. Damit ist $\boldsymbol{F}_\infty$ der kleinste Fixpunkt.

Präsenzaufgabe 2

Eine wichtige Anwendung des Kompaktheitssatzes

Ein (potentiell unendlicher) *Baum* besteht aus

- einer *Knotenmenge* $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n$, mit $T_0 = \{r\}$; der spezielle Knoten r heist *Wurzel*;
- einer *Vorgängerfunktion* $\boldsymbol{pre} : T - T_0 \longrightarrow T$, die jedem Knoten $t \in T_{n+1}$ seinen Vorgänger $\boldsymbol{pre}(t) \in T_N$ zuordnet.

Ein *unendlicher Pfad* in T ist eine Teilmenge $P \subseteq T$, die jedes Level T_n in genau einem Knoten p_n schneidet, wobei gilt $\boldsymbol{pre}(p_{n+1}) = p_n$.

Zeigen Sie **Königs Lemma**: Jeder Baum T mit endlichen nichtleeren Leveln T_n, $n \in \mathbb{N}$, hat mindestens einen unendlichen Pfad.

Verfahren Sie dabei gemäß der folgenden Schritte:

1. Verwenden Sie T als Atommenge; dabei soll $\varphi(t) = 1$ bedeuten, dass $t \in P$ gilt.
2. Konstruieren Sie Formeln A_n, $n \in \mathbb{N}$, so dass A_n unter φ genau dann wahr wird, wenn φ genau ein $t \in T_n$ für P auswählt.
3. Konstruieren Sie Formeln B_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$, sodass B_{n+1} unter φ genau dann wahr wird, wenn die eindeutigen gewählten Knoten aus T_n bzw. T_{n+1} in der Vorgängerrelation stehen. Weiter sei $B_0 = \top$.
4. Zeigen Sie, dass $\Gamma = \{\, A_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, B_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ erfüllbar ist.

Lösungsvorschlag:

Da die Mengen T_n, $n \in \mathbb{N}$ endlich sind, gilt dies auch für die folgenden großen Konjunktionen bzw. Disjunktionen (Vorgriff auf die Notation von Folie 71).

- A_n soll ausdrücken, dass genau ein Element von T_n wahr ist, d.h., mindestens ein Element und höchstens ein Element:

  $$A_n := \left(\bigvee_{t \in T_n} t \right) \wedge \bigwedge_{u,v \in T_n,\, u \neq v} (u \to \neg v)$$

  Wegen $T_0 = \{r\}$ ist im Fall $n = 0$ die hintere Konjunktion leer und somit $\top$.

- B_{n+1} soll ausdrücken, dass für das gemäß A_{n+1} und A_n eindeutig bestimmte Paar $\langle t, u \rangle \in T_{n+1} \times T_n$ gilt $\boldsymbol{pre}(t) = u$:

  $$B_{n+1} = \bigwedge_{t \in T_{n+1}} t \to \boldsymbol{pre}(t)$$

  Die Implikation $t \to \boldsymbol{pre}(t)$ ist immer wahr, sofern t falsch ist. Damit sie auch für wahres t wahr wird, muß $\boldsymbol{pre}(t)$ das ausgewählte Element von T_n sein.

- Behauptung: Γ ist endlich erfüllbar.

  Ist $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich, bestimme den maximalen Index m, der in den Formeln in Δ auftritt und setze

  $$\Delta' := \{\, A_n \,:\, n \leq m \,\} \cup \{\, B_n \,:\, n \leq m \,\}$$

  Diese Obermenge von Δ ist genau dann erfüllbar, wenn es einen Pfad der Länge m von der Wurzel gibt. Aber letzteres ist der Fall, da wir von jedem Element $t \in T_m$ nach m-facher Anwendung von $\boldsymbol{pre}$ bei der Wurzel r landen. Damit ist auch Δ erfüllbar.

- Nach dem Kompaktheitssatz ist Γ damit erfüllbar.

Hausaufgabe 3 [10+10 PUNKTE]

(a) [10 PUNKTE] Bestimmen Sie, ausgehend von der Definition auf Folie 47 und 48, alle Teilformeln von $A = \neg((\neg r \vee p) \wedge q)$ und färben Sie jeweils das ensprechende Teilwort und den entsprechenden Teil des Syntaxbaums von A ein.

(b) [10 SONDERPUNKTE] (Sonderpunkte fließen *nicht* in die 50% ein.) Zeigen Sie: Die Teilformeln von A, also die Elemente von $T(A)$, sind genau die *zusammenhängenden* Teilwörter von A, die selber Formeln sind. [Ein Teilwort D von A ist zusammenhängend, sofern für je zwei verschiedene Buchstaben x und y des Worts D alle Buchstaben dazwischen auch zu D gehören.]

Hausaufgabe 4 [16 PUNKTE]

(a) [3 PUNKTE] Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie den Wert

$$\hat{\varphi}(\neg(p \to q) \vee r)$$

schrittweise gemäß der Definition.

(b) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \to (r \to (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

(c) [3 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{q \to p\} \models p \to q$ gilt.

(d) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \mathrel{\models\!\!\!|} \neg(p \wedge q)$, wobei $A \mathrel{\models\!\!\!|} B$ abkürzend für $\{A\} \models B$ und $\{B\} \models A$ steht.

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie das 2. Korollar zum Kompaktheitssatz auf Folie 53: Für eine Formelmenge Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $B \in \Gamma$.

(b) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{B} \in \Gamma^n$ mit $B_0 \vee \cdots \vee B_{n-1}$ allgemeingültig.

Hausaufgabe 6 [13 PUNKTE]

Fakt: Auf einem Globus mit zusammenhängenden Ländern können diese aufgrund des berühmten *Vierfarbensatz* so gefärbt werden, dass benachbarte Länder verschiedene Farben tragen.

Zur Terminologie: Ein Land heißt *zusammenhängend*, wenn man je zwei seiner Punkte durch einen Weg (auf der Erd-Oberfläche) verbinden kann, der innderhalb des Landes verläuft. Inseln (Sylt) oder Exklaven (Kaliningrad) sind verboten[1] Zwei Länder heißen *benachbart*, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenze haben, das keine *Ecke* ist, d.h., nicht zu drei oder mehr Ländern gehört (etwa Four Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Alternativ kann man den *ungerichteten planaren Graphen* betrachten, dessen Knoten die Hauptstädte, und dessen Kanten Autobahen zwischen denselben sind, die die Grenze genau einmal überqueren und sich höchstens in den Hauptstädten schneiden (*das garantiert die Planarität*).

(a) [1 PUNKT] Was bedeutet die 4-Färbbarkeit einer Landkarte für den zugehörigen planaren Graphen?

(b) [2 PUNKTE] Genügen vier Farben auch, wenn man in der graphentheoretischen Version auf die Forderung nach Planarität verzichtet, d.h., wenn sich die Kanten bei der Einbettung in die Kugeloberfläche auch schneiden dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

[1] Ein Land mit m Zusammenhangskomponenten heißt auch m-*Pire*; hier interessieren uns nur 1-Pires.

(c) [6 PUNKTE] Konstruieren Sie für einen gegebenen Graphen $G = \langle V, E \rangle$ mit Hilfe atomarer Formeln der Form $C_{u,j}$, die die möglichen Färbungen $j < 4$ eines jeden Knoten $u \in V$ ausdrücken, eine Formelmenge Γ, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

(d) [4 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe des Kompakteitssatzes, dass auch jeder unendliche planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann.

Abgabe bis Montag, 2023-05-02, 11:30, online als PDF mit Email-Adresse