Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik, Übungsklausur

2023-07-17

Aufgabe 1 [12 PUNKTE]

(a) [6 PUNKTE] Geben Sie eine induktive Definition für die Menge $@(A)$ der Atome, die in einer aussagenlogischen Formel A auftreten.

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass gebundene Umbenennung Äquivalenz erhält, d.h.,

$$\mathcal{Q}x\, A \mathrel{|\!\!\models\!\!|} \mathcal{Q}y\, A\{x/y\} \quad \text{sofern} \quad y \notin \boldsymbol{FV}(A)$$

Aufgabe 2 [12 PUNKTE]

1. [6 PUNKTE] Wandeln Sie die Formel

$$A = \neg\Big(\neg s \to \big((p \vee q) \wedge r\big)\Big)$$

in eine möglichst kleine erfüllungsäquivalente KNF in Mengenschreibweise um, indem Sie geschickt(!) eine Tseitin-Transformation einsetzen.

2. [6 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe der graphischen Resolutionsmethode (mit Streichung von Klauseln), bei der pro Schritt alle Resolventen mit einer bestimmten Variablen gebildet werden, die Unerfüllbarkeit von

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r, \neg q, \neg p \vee q \vee r \vee s, q \vee r \vee \neg s, q \vee \neg r\}$$

Verwenden Sie zwecks leichterer Korrektur die Reihenfolge q, r, p, s.

Aufgabe 3 [12 PUNKTE]

Anwendung des Davis-Putnam-Verfahrens: Wenden Sie nach Möglichkeit die Unit- oder die Pure-Literal-Regel an, bevor sie zur Splitting-Regel greifen:

(a) [6 PUNKTE] $\{p \wedge q, q \to r\} \models r$

(b) [6 PUNKTE] Die Klauselmenge $\{\{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}\}$ ist erfüllbar; wieviele Möglichkeiten gibt es, mit Davis-Putnam zum Ziel zu kommen?

Aufgabe 4 [12 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur $\mathcal{S}_{\text{arith}} = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}; <_{/2}\}$ der Arithmetik und die Struktur $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, I \rangle$ mit den rationalen Zahlen als Wertebereich und der üblichen Interpretation der Operatoren und Prädikate.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := 0 < x \wedge (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}) * x < 1$ mit freiem x und definiere

$$\Gamma := \{\, A \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S}) \;:\; A \text{ geschlossen, und } \models_{\mathcal{Q}} A \,\} \cup \{\, B_n \;:\; n\mathbb{N} \,\}$$

(a) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass Γ erfüllbar ist.

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\sigma \in \mathbb{Q}^{\mathcal{V}}$ gibt mit $\hat{\sigma}(G) = \mathcal{M}[\![G]\!](\sigma) = 1$ für alle $G \in \Gamma$, d.h., jedes Modell für Γ ist ein Nichtstandardmodell für die abgeschlossenen Formeln in Γ.

Aufgabe 5 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe eines Tableaus die Unerfüllbarkeit von

$$\neg\Big(\forall x\left[P(x) \to P(f(x))\right] \to \forall x\left[P(x) \to P(f(f(x)))\right]\Big)$$

Aufgabe 6 [12 PUNKTE]

(a) [6 PUNKTE] Berechnen Sie einen allgemeinsten Unifikator für folgende Menge an Literalen:

$$\{Q(x,z), Q(h(y,z), f(a)), Q(h(f(b),z),z)\}$$

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie $\big\{\forall x\,\exists y.\, L(x,y), \forall x \forall y\,\big(L(x,y) \to H(x)\big)\big\} \models \forall x.\, H(x)$

Aufgabe 7 [12 PUNKTE]

Bestimmen sie explizite hybride Ableitungen im Kalkül $\mathcal{K}_0$ von

1. [4 PUNKTE] $(A \to B) \to C \vdash B \to C$
2. [8 PUNKTE] $A \to (B \to C) \vdash \neg C \to (B \to \neg A)$

Aufgabe 8 [12 PUNKTE]

Wir betrachten nur endlich viele Variablen $V = \{p_0, , p_{n-1}\}$. Eine Menge Σ aussagenlogischer Formen über V (alle Variablen stammen aus V) nennen wir *folgerungsmaximal*, wenn sie erfüllbar ist und für alle Formeln A über V gilt: Falls $A \notin \Sigma$, dann ist $\Sigma \cup \{A\}$ unerfüllbar.

1. Zeigen Sie: Für $n = 2$ Variablen ist die Formelmenge

   $$\{p_0 \vee p_1, p_0 \vee \neg p_1, \neg p_0 \vee p_1, p_0, p_1\}$$

   nicht folgerungsmaximal.
2. Konstruieren Sie für eine Formelmenge Γ über V eine folgerungsmaximale Formelmenge Σ mit $\Gamma \subseteq \Sigma$.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: Jede folgerungsmaximale Formelmenge ist unendlich.

Aufgabe 9 [12 PUNKTE]

Wir betrachten Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, \mathcal{I}\rangle$ für die Signatur $\mathcal{S}$ mit dem binären Prädikat $\leqslant$ und dem unären Funktionssymbol f.

1. Konstruieren Sie eine Formel $F_\leqslant$, sodass $\mathcal{M}$ genau dann ein Modell ist, wenn $\leqslant^\mathcal{M}$ eine partielle Ordnung auf D ist.

2. Geben Sie eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ an, die Modell ist für

$$F = F_\leqslant \wedge \exists x\, \forall y \forall z. \big((y \leqslant z) \to (y = x \vee y = z)\big)$$

3. Geben Sie eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ an, die Modell ist von $F_\leqslant$ sowie

$$\begin{aligned}
F_0 &= \forall x \forall y. \big(x \leqslant y \to f(x) \leqslant f(y)\big) \\
F_1 &= \exists x \forall y. \Big(f(x) \leqslant x \wedge \big(f(y) \leqslant y \to x \leqslant y\big)\Big) \\
F_2 &= \exists z. \neg\big(f(z) \leqslant z\big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 [12 PUNKTE]

Quiz:

Beantworten/Bewerten Sie die folgenden Fragen/Aussagen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

1. Eine aussagenlogische Formelmenge Σ heißt *doppelt erfüllbar*, falls es mindestens zwei unterschiedliche Belegungen gibt, die Σ erfüllen. Wenn sowohl Γ als auch Δ jeweils doppelt erfüllbar sind, ist $\Gamma \cup \Delta$ dann erfüllbar?

2. Gegeben sei eine prädikatenlogische Formel F mit freien Variablen x und y, ein Term t und eine Konstante c. Stimmen die Formeln

$$F[x/t][y/c] \quad \text{und} \quad F[y/c][x/t]$$

syntaktisch überein?

3. Gegeben seien zwei aussagenlogische Formelmengen Σ und Γ, sodass $\Sigma \cup \Gamma$ nicht erfüllbar ist. Gibt es eine Formel F, sodass $\Sigma \models F$ und $\Gamma \models \neg F$?

4. Zwei binäre Junktoren $\sqcap$ und $\sqcup$ mögen für alle aussagenlogischen Formen A und B die Bedingung

$$\neg A \sqcap \neg B \models\!\!\!\!\!= \neg(A \sqcup B)$$

erfüllen. Behauptung: $\{\sqcap, \neg\}$ ist genau dann eine vollständige Junktorenmenge, wenn dies für $\{\sqcup, \neg\}$ gilt.