Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2023-05-08

Achtung, ausnahmsweise frühere Abgabe: bis Donnerstag, 11. Mai, 11:30 Uhr

Präsenzaufgabe 1

(Vergl. Folie 72): eine Signatur $\mathcal{I} \xrightarrow{\overline{ar}} \mathbb{N}$ mit gegebener Semantik (d.h., vorgegebenen Wahrheitstabellen für jeden Junktor in $\mathcal{I}$) heißt *funktional vollständig*, wenn zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine äquivalente Formel $B \in \boldsymbol{Term}(\overline{\boldsymbol{ar}}, \mathcal{A})$ existiert, und umgekehrt.

Der 3-stellige Junktor $[\,]_{/3}$ möge die Semantik von *if-then-else* haben, als Wahrheitstabelle:

p	q	r	$[p,q,r]$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Zeigen Sie, dass die Signatur $\{[\,]_{/3}, \bot_{/0}, \top_{/0}\}$ funktional vollständig ist.

Präsenzaufgabe 2

Wir modifizieren $\mathcal{K}_0$, indem wir Schema Ax3 aus $\mathcal{R}_0$ entfernen, und stattdessen die Schemata

$$\frac{}{\neg\neg A \to A}\ (\text{Th2}) \quad \text{sowie} \quad \frac{}{(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A}\ (\text{Th7})$$

hinzufügen. Zeigen Sie, dass auch der resultierende Kalkül $\mathcal{K}_0'$ vollständig und korrekt ist.

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

Untersuchen Sie folgende Junktormengen $\mathcal{I}$ auf funktionale Vollständigkeit. Begründen Sie Ihre Antwort. [Alle Junktoren haben hier ihre übliche Stelligkeit und Semantik.]

1. [4 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\neg, \wedge\}$
2. [3 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\wedge, \vee\}$
3. [3 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\to, \bot\}$

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie mit allen Details den Satz auf Folie 81: Gegeben ist ein deduktives System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Eine Formel in $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Theorem (d.h., hat einen „langen Beweis“), wenn sie einen „kurzen Beweis“ (d.h., eine Ableitung ohne Prämissen) hat.

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie im Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$:

1. [4 PUNKTE] $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$
2. [6 PUNKTE] $\vdash \neg(A \to B) \to B \to A$

Abgabe bis Donnerstag, 2023-05-11, 11:30, online als PDF mit Email-Adresse