Abzahlbarkeit - injektiv, surjektiv.

21.04.23 Kl. Übung 1 Logik

1) Unendliche Potenzmenge:

Annahme zwecks Widerspruch: $P(\mathbb{N})$ ist abzählbar

$\Rightarrow$ Es existiert $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$, g ist injektiv

$$K := \{ g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B \} \subseteq \mathbb{N}$$

Es muss gelten: entweder $g(K) \in K$ oder $g(K) \notin K$

Es gilt: K ist das einzige Urbild von $g(K)$ aufgrund der Injektivität.

Wenn gilt $g(K) \in K$, dann aufgrund von $g(K) \notin K$ $\lightning$

Wenn gilt $g(K) \notin K$ $\Rightarrow$ $g(K) \in K$ $\lightning$

$\Rightarrow$ g existiert nicht. $\lightning$ $\blacksquare$

2) Abzahlbarkeit dependent on Injektivität und Surjektivität.

3) Problem: Interpretation des Signaturkomponenten müssen Funktionen sein, aber Division ist nur partielle Funktion, da Division durch 0 nicht definiert.

Lösung: betrachtete erweiterte Signatur ~~in $\mathbb{Q}$~~ $\overbrace{\mathbb{Q} + \{\perp\}}^{:= \mathbb{Q}_\perp}$, welche um ein Symbol "undefiniert" erweitert wurde.

Definiere $Q_\perp \times Q_\perp \xrightarrow{/} Q_\perp$ als $p/q := \perp$, wenn $\{p,q\} \ni \perp$ oder $q = 0$, sonst "normale" Division.

④ Sei $A \xrightarrow{R} A$ transitiv, symmetrisch und total.

Sei weiter $a \in A$ beliebig.

Z: aRa

Bew: Wegen der Totalität existiert $b \in A$, sodass aRb.

Wegen der Symmetrie ist dann auch bRa.

Daraus folgt aufgrund der Transitivität aRa.

⑤ a) Menge $\mathcal{R}$ von Relationen $B \xrightarrow{R} B$, $B \xrightarrow{S} B$, $B \xrightarrow{T} B$, ...

Reflexivität: Gilt $\langle x, x\rangle \in R$ für alle $x \in B$, für alle $R \in \mathcal{R}$, dann gilt auch $\langle x, x\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$ und $\langle x, x \rangle \in \bigcup \mathcal{R}$

Transitivität: Folgt aus $\langle x, y\rangle \in R$, $\langle y, z\rangle \in R$ $\forall x, y, z \in B$, für alle $R \in \mathcal{R}$, auch $\langle x, z\rangle \in R$ für alle $R \in \mathcal{R}$.

Dann folgt aus $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$ auch $\langle x, z\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$.

$\Rightarrow$ Transitivität ist stabil unter Durchschnitt.

Symmetrie: Folgt aus $\langle x, y\rangle \in R$, $\langle y, x\rangle \in R$ $\forall x, y \in B$, für alle $R \in \mathcal{R}$.

Dann folgt aus $\langle x, y\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$, dass $\langle y, x\rangle \in \bigcup \mathcal{R}$.

Symmetrie ist stabil unter $\bigcup \mathcal{R}$ und $\bigcap \mathcal{R}$.

Transitivität Vereinigung:

Definiere $R := \{\langle 0,1\rangle\}$, $S := \{\langle 1,0\rangle\}$ über B

$R \cup S = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ ist nicht transitiv,

z.B. $\langle 0,0\rangle \notin R \cup S$.

	Vereinigung	Durchschnitt
Anti-symmetrie:	✗	✓
Linearität:	✓	✗

b) ~~Sei $B \xrightarrow{E} B$ die Menge~~

Sei E die Menge aller ÄR, die R enthalten. Nun bilde $\bigcap E$ und erhalte die kleinste ÄR, die R enthält, bezgl. $\subseteq$.

Nach Teil (a) ist $\bigcap E$ tatsächlich eine ÄR.

c) $R \cap R^{op} \subseteq id_B$