Blatt0 - Einführung in die Logik

Viradia, Yash - 5275038 - Gruppe 01
y.viradia@tu-braunschweig.de

17.04.2023

(3) Bei der Erweiterung von der Signatur S mit Operator $/_{2}$, muss die Teilbarkeit mit 0 beachtet werden.

Das kann man folgendenweise umgehen:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{0\} \xrightarrow{\;/\;} \mathbb{Q}$$ als die Funktion Interpretation.

(4) Sei Relation $R \subseteq M \times N$

Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in M$

Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRz \quad \forall x, y \in M.$

Z: $xRx \quad \forall x \in M.$

Bew: Es existiert ~~m~~ $n \in N$ für alle ~~$m \in M$~~ ~~$m \in M$~~ $x \in M$, sodass

~~ARm~~. nRx

Wegen der Symmetrie gilt auch ~~mRA~~. xRn

Daraus folgt endlich $xRx \quad \forall x \in M$ ☒.

5) a) reflexiv

Durchschnitt: xRx, xSx, xTx, ...

Z: $x(\bigcap R)x$

Bew: $xRx \wedge xSx \wedge xTx \wedge \dots$

$x(R \cap S \cap T \cap \dots)x$

$x(\bigcap R)x$ ☒

Vereinigung: Z: $x(\bigcup R)x$

Bew: $xRx \vee xSx \vee xTx \vee \dots$

$x(R \cup S \cup T \dots)x$

$x(\bigcup R)x$ ☒

b) transitiv

Durchschnitt:

Z: $x(\bigcap R)y \wedge y(\bigcap R)z \Rightarrow x(\bigcap R)z \quad \forall x, y, z \in B.$

Bew:

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$

$xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$

$\vdots$

$x(\bigcap R)z = xRz \wedge xSz \wedge xTz \dots$ ☒

Vereinigung

Z: $x(\bigcup R)y \wedge y(\bigcup R)z \Rightarrow x(\bigcup R)z \quad \forall x, y, z \in B.$

Bew:

$x(\bigcup R)z = xRz \vee xSz \vee xTz \vee \dots$ ☒

c) <u>Symmetrie</u>

<u>Vereinigung:</u> Sei $x (\cup R) y$ $\forall x, y \in B$

Z: $y (\cup R) x$.

<u>Bew:</u>

$x R y \vee x S y \vee x T y \vee \dots$

$\Rightarrow y R x \vee y S x \vee y T x \vee \dots$

$\Rightarrow y (R \cup S \cup T \dots) x$

$\Rightarrow y (\cup R) x$ $\boxtimes$.

<u>Durchschnitt:</u> Sei $x (\cap R) y$ $\forall x, y \in B$.

Z: $y (\cap R) x$

<u>Bew:</u>

$x R y \wedge x S y \wedge x T y \wedge \dots$

$\Rightarrow y R x \wedge y S x \wedge y T x \wedge \dots$

$\Rightarrow y (R \cap S \cap T \dots) x$

$\Rightarrow y (\cap R) x$ $\boxtimes$

d) <u>Anti-Symmetrie:</u>

<u>Vereinigung</u> Gelte $x R y \wedge y R z \Rightarrow x = y$
$x S y \wedge y S z \Rightarrow x = y \dots$ $\forall x, y \in B$.

Z: $x (\cup R) y \wedge y (\cup R) x \Rightarrow x = y$.

<u>Bew:</u>

$(x R y \vee x S y \vee x T y \dots) \wedge$

$(y R x \vee y S x \vee y T x \dots)$

~~$(x (R \cup S \cup T \dots) y) \wedge (y (R \cup S \cup T \dots) x)$~~

~~$x (\cup R) y \wedge y (\cup R) x$~~

$(xRy \wedge yRx) \vee (xSy \wedge ySx) \vee (xTy \wedge yTx) \vee \dots$

$(x=y) \vee (x=y) \vee (x=y) \vee \dots$

$(x=y)$ $\boxtimes$

Durchschnitt: Analog wie Vereinigung.

Z: $x(\cap R)y \wedge y(\cap R)x \Rightarrow x=y$.

Bew: $(xRy \wedge xSy \wedge xTy \wedge \dots) \wedge$
$(yRx \wedge ySx \wedge yTx \wedge \dots)$

$(xRy \wedge yRx) \wedge (xSy \wedge ySx) \wedge (xTy \wedge yTx) \wedge \dots$

$(x=y) \wedge (x=y) \wedge \dots$

$x=y$. $\boxtimes$.

e) Linear

Vereinigung:

$xRy \wedge yRx \quad \forall x,y \in B$
$xSy \wedge ySx \quad \forall x,y \in B$.
$\vdots$

$(xRy \wedge yRx) \wedge (xSy \wedge ySx) \wedge \dots$
$(xRy \wedge xSy \dots) \wedge (yRx \wedge ySx \wedge \dots)$

e) <u>Linear</u>

Vereinigung:

$$xRy \lor yRx \qquad \forall x,y \in B$$
$$xSy \lor ySx \qquad \forall x,y \in B$$
$$\vdots$$
$$(xRy \lor yRx) \lor (xSy \lor ySx) \lor (\ldots)$$
$$(xRy \lor xSy \ldots) \lor (yRx \lor ySx \ldots)$$
$$x\,(R \cup S \cup \ldots)\,y \quad \lor \quad y\,(R \cup S \cup \ldots)\,x$$
$$x \bigcup R y \quad \lor \quad y \bigcup R x.$$

$\square$

Durchschnitt:

Das folgt auch Analog wie die Vereinigung.

$$xRy \lor yRx \qquad \forall x,y \in B$$
$$xSy \lor ySx \qquad \forall x,y \in B$$
$$\vdots$$
$$(xRy \lor yRx) \land (xSy \lor ySx) \land \ldots$$
$$(xRy \land xSy \land xTy \ldots) \lor (\cancel{xR}\cdot yRx \land ySx \land yTx \ldots)$$
$$x\,(\bigcap R)\,y \quad \lor \quad y\,(\bigcap R)\,x$$

$\square$

c) Relation $B \xrightarrow{R} B$ ist anti-symmetrisch genau dann wenn

$$R \cap R^{op} \subseteq Id_B .$$

b) Schon gegeben $R \subseteq E$

Daher E ist eine Äquivalenzrelation und R ist eine beliebige Relation.

Sei $\forall x, y, z \in B$ gilt

$(x,y) \in R$
$(y,z) \in R$

$$\{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (y,z), (x,z) \ldots\} \in R \circ R .$$

D.h. $R \circ R$ ist transitiv.

Damit ist auch Folgendes gültig.

$(R \cup R^{op}) \circ (R \cup R^{op})$ ist reflexiv und symmetrisch, daher auch transitiv.

$$R \subset (R \cup R^{op}) \circ (R \cup R^{op}) = E .$$

Daher existiert eine Äquivalenzrelation E bzgl. $\subseteq$, die eine beliebige Relation R enthält.