Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 5, 2023-06-19

Präsenzaufgabe 1

Beweisen Sie den Satz auf Folie 221.

Lösungsvorschlag:

In jedem der Fälle Modus Ponens, Modus tollens und Kontraposition wählen wir eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ der Variablen, so dass alle Formeln in Γ erfüllt werden.

- **Modus Ponens**: Wir gehen davon aus, dass das Paar $\langle \mathcal{M}, \sigma \rangle$ auch B sowie $B \to A$ erfüllt, d.h.,
$$\mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![B \to A]\!](\sigma) = 1$$
Aber letzteres ist gleichbedeutend mit
$$\mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) \leqslant \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) \tag{$*$}$$
und folglich muß auch gelten
$$\mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) = 1$$

- **Modus Tollens**: Wir gehen davon aus, dass das Paar $\langle \mathcal{M}, \sigma \rangle$ auch $B \to A$ sowie $\neg A$ erfüllt, d.h.,
$$\mathcal{M}[\![B \to A]\!](\sigma) = 1 - \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) = 1$$
Wegen $(*)$ gilt auch
$$\mathcal{M}[\![\neg A]\!](\sigma) = 1 - \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) \leqslant 1 - \mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![\neg B]\!](\sigma)$$
woraus schließlich folgt
$$\mathcal{M}[\![\neg B]\!](\sigma) = 1$$

- **Modus Bogus**: Hier genügt ein Gegenbeispiel. Betrachte die Signatur $\mathcal{S}_{\text{arith}}$ der Arithmetik sowie die Formeln A und B, die aussagen, dass x durch 2 bzw. durch 4 teilbar ist, also
$$A(x) = \exists y.\, x \doteq y + y \quad \text{und} \quad B(x) = \exists y.\, x \doteq y + y + y + y$$
Offenbar ist jede durch 4 teilbare Zahl auch durch 2 teilbar, also
$$\models B(x) \to A(x) \quad \text{und somit} \quad \Gamma \models B(x) \to A(x) \quad \text{für jede Prämissenmenge} \quad \Gamma$$
Nun bestehe Γ aus der einzigen Prämisse, dass x^2 gerade ist:
$$G(x) = \exists z.\, x * x \doteq z + z$$
Es gilt also
$$\{G(x)\} \models B(x) \to A(x) \quad \text{sowie} \quad \{G(x)\} \models A(x)$$
aber unter der Voraussetzung, dass x^2 gerade ist, können wir i.A. *nicht* folgern, dass x durch 4 teilbar ist, d.h.,
$$\{G(x)\} \not\models B(x)$$
Betrachte etwa eine Belegung σ mit $\sigma(x) = 2$.

- **Kontraposition**: Aufgrund des semantischen Deduktionstheorems der Prädikatenlogik (Folie 220) können wir die Aussage umformlieren zu

$$\Gamma \models B \to \neg A \quad \text{gdw.} \quad \Gamma \models A \to \neg B$$

Analog wie oben ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\![B \to \neg A]\!](\sigma) = 1 \quad &\text{gdw.} \quad \mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) \leqslant 1 - [\![A]\!](\sigma) \\ &\text{gdw.} \quad \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) \leqslant 1 - [\![B]\!](\sigma) \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}[\![A \to \neg B]\!](\sigma) = 1 \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 2

Begründen Sie ihre Antworten ausführlich:

(a) Die Signatur S möge mindestens ein einstelliges Prädikatensymbol P enthalten. Wir betrachten einen Term t, in dem die Variable x nicht vorkommt. Ist die Formel

$$P(t) \leftrightarrow \forall x : (x \doteq t \to P(x))$$

allgemeingültig?

(b) Bleibt die Antwort dieselbe, wenn x im Term t vorkommt?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Behauptung ist korrekt: Betrachte eine S-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$. Dann gilt

$$\mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) \in P^{\mathcal{M}} \subseteq D \quad \text{gdw.} \quad P^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)) = 1$$

insbesondere also $\mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma) = P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big)$, sowie

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}[\![\forall x\, (x \doteq t \to P(x))]\!](\sigma) && (1)\\
&= \inf\{\, \mathcal{M}[\![x \doteq t \to P(x)]\!](\sigma\{x/d\}) \;:\; d \in D \,\} && (2)\\
&= \inf\{\, \mathcal{M}[\![\neg(x \doteq t) \vee P(x)]\!](\sigma\{x/d\}) \;:\; d \in D \,\} && (3)\\
&= \inf\{\, \sup\{\mathcal{M}[\![\neg(x \doteq t)]\!](\sigma\{x/d\}), \mathcal{M}[\![P(x)]\!](\sigma\{x/d\})\} \;:\; d \in D \,\} && (4)\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - \mathcal{M}[\![x \doteq t]\!](\sigma\{x/d\}), \mathcal{M}[\![P(x)]\!](\sigma\{x/d\})\} \;:\; d \in D \,\} && (5)\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - (\mathcal{M}[\![x]\!](\sigma\{x/d\}) = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma\{x/d\})), P^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}[\![x]\!](\sigma\{x/d\}))\} \;:\; d \in D \,\} && (6)\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - (d = \mathcal{M}[\![t\{x/d\}]\!](\sigma)), P^{\mathcal{M}}(d)\} \;:\; d \in D \,\} && (7)\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - (d = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)), P^{\mathcal{M}}(d)\} \;:\; d \in D \,\} && (8)\\
&= \inf\{\, \sup\{d \neq \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma), P^{\mathcal{M}}(d)\} \;:\; d \in D \,\} && (9)\\
&= \inf\{\, \sup\{d \neq \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma), P^{\mathcal{M}}((\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma))\} \;:\; d \in D \,\} && (10)\\
&= \sup\{\, \inf\{\, d \neq \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) \;:\; d \in D \,\}, \inf\{\, P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) \;:\; d \in D \,\} \,\} && (11)\\
&= \sup\{\, 0, P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) \,\} && (12)\\
&= \mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma) && (13)
\end{aligned}$$

Dabei wurde in Zeile (7) das Substitutionslemma angewendet. Zeile (8) folgt, weil x nicht in t vorkommt, die Substitution $\{x/d\}$ also wirkungslos bleibt. In Zeile (10) kommt zum Tragen, dass das binäre Supremum den Wert 0 höchstens für $d = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)$ annehmen kann, während Zeile (11) das Distributivgesetz für Suprema und Infima in $\mathbb{B}$ verwendet, vergl. Hinweis zu Aufgabe 5, Blatt 4.

(b) Wenn x in t vorkommt, enthält $P(t)$ die freie Variable x, die rechte Seite der Äquivalenz aber nicht. Wir wollen versuchen, in einer Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ die Voraussetzung der Implikation $x \doteq t \rightarrow P(x)$ immer falsch und somit die rechte Seite der Äquivalenz immer wahr zu machen, während der Wert von $\mathcal{M}[\![P(t)]\!]$ von σ abhängen kann, also nicht immer wahr zu sein braucht. Insbesondere ist $P^{\mathcal{M}}$ dann eine echte Teilmenge von D.

Beispiel: für den Datenbereich $D = \mathbb{N}$, das Prädikat $P(x)$ " x ist gerade" und den Term $t := x + 1$ passiert genau das: $P(t)$ ist nur für ungerade Zahlen $\sigma(x)$ erfüllt, aber die Implikation auf der rechten Seite ist aufgrund der immer falschen Voraussetzung für jedes $a \in \mathbb{N}$ erfüllt, also ist die rechte Seite immer wahr.

Die linke Seite wird aber für solche Belegungen σ falsch, die x eine gerade Zahl zuordnen.

Hausaufgabe 3 [16 PUNKTE]

Rechenregeln für Quantoren (Folie 224):

1. [10 PUNKTE] Beweisen Sie jeweils die rechte Aussage von (1), (2) und (3).
2. [6 PUNKTE] Beweisen Sie (4) und geben Sie im Fall $x \in \boldsymbol{FV}(A)$ ein Gegenbeispiel an. **Hinweis**: Sie dürfen verwenden, dass die Supremum- und Infimum-Operationen in $\mathbb{B}$ für beliebig indexierte Familen $\langle b_i : i \in I \rangle \in \mathbb{B}^I$ ein Distributiv-Gesetz analog zu dem auf Folie 71 erfüllen: d.h.,

$$a \wedge \sup_{i \in I} b_i = \sup_{i \in I} (a \wedge b_i) \qquad \text{sowie} \qquad a \vee \inf_{i \in I} b_i = \inf_{i \in I} (a \vee b_i)$$

Hausaufgabe 4 [21 PUNKTE]

[21 PUNKTE] Beweisen Sie das Substitutionslemma ohne Verwendung von Semantik-Klammern $[\![\cdot]\!]$, aber stattdessen mit $\breve{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ und $\hat{\sigma}$. Genauer: für eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ gilt

$$\breve{\sigma}(u\{x/t\}) = \breve{\sigma}\{x/\breve{\sigma}(t)\}(u) \quad \text{sowie} \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \hat{\sigma}\{x/\breve{\sigma}(t)\}(A)$$

wobei u ein Term und A eine Formel ist.

Hausaufgabe 5 [16 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur Σ der Arithmetik mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionensymbolen $+$ und $\cdot$ einem zweistelligen Prädikatensymbol $<$. Viele Aussagen über natürliche Zahlen (also die Σ- Struktur mit Trägermenge $\mathbb{N}$ und der üblichen Interpretation der Symbole in Σ) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über Σ ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „ x ist eine gerade Zahl“ entspricht die Formel $\exists y : (x = y + y)$ mit einer freien Variable x.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über Σ:

(a) [5 PUNKTE] „ x und Y sind Primzahlzwillinge.“

(b) [5 PUNKTE] „Es gibt unendlich viele pythagoräische Tripel“

(c) [3 PUNKTE] „Jede gerade Zahl $\geqslant 4$ läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“

(d) [3 PUNKTE] „Alle Zahlen mit geradem Quadrat sind gerade.“

Hausaufgabe 6 [12 PUNKTE]

Berechnen Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform zu

$$\big(\forall x\, \exists y.\, P(x, f(y))\big) \wedge \Big(\neg \exists y\, \forall x\, \exists z.\, \big(Q(g(z), f(x)) \vee P(y, z)\big)\Big)$$

Abgabe bis Donnerstag, 2023-06-29, 11:30, online als PDF mit Email-Adresse