Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 4, 2023-06-01

Achtung, wegen der Länge und damit nach der großen Übung Zeit zur Bearbeitung bleibt spätere Abgabe: bis Donnerstag, 15. Juni, 11:30 Uhr. Bitte Aufgabe 9 gleich bearbeiten!

Präsenzaufgabe 1

Verwenden Sie Tableaus zum Nachweis, dass

1. $(p \to q) \to \neg q \to \neg p$ eine Tautologie ist;
2. $\big(p \to (q \wedge r)\big) \wedge (r \to \neg q) \wedge p$ unerfüllbar ist;

Lösungsvorschlag:

1.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \star\ (p \to q) \to \neg q \to \neg p \quad 0 & \\
0a\ \ \neg(p \to q) \quad 1 & & 0b\ \ \neg q \to \neg p \quad 2 \\
| & & \begin{array}{cc} 2a\ \ q & 2b\ \ \neg p \end{array} \\
1a\ \ p & & \\
| & & \\
1b\ \ \neg q & &
\end{array}
$$

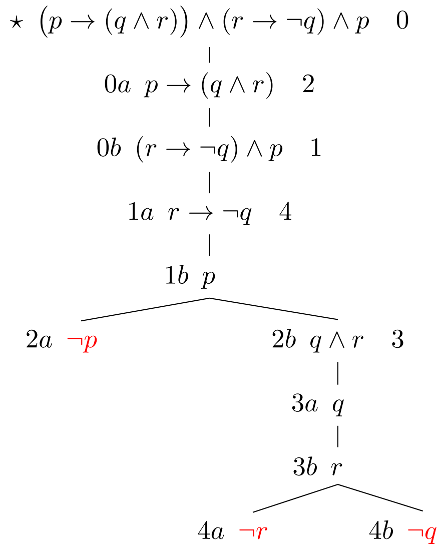
Man beachte, dass die Reihenfolge zwischen 1a und 1b willkürlich ist, und diese Formeln in derselben Knotenmenge liegen! Da keine Widersprüche auftreten, muß es sich bei der Ursprungsformel um eine Tautologie handeln.

Alternativ kann man auch die Unerfüllbarkeit von $\{p \to q, \neg(\neg q \to \neg p)\}$ zeigen (DT!):

$$
\begin{array}{ccc}
 & \star\ \ p \to q \quad 1 & \\
 & | & \\
 & \star\ \ \neg(\neg q \to \neg p) \quad 0 & \\
 & | & \\
 & 0a\ \ \neg q & \\
 & | & \\
 & 0b\ \ p & \\
1a\ \ \color{red}{\neg p} & & 1b\ \ \color{red}{q}
\end{array}
$$

In Schritt 2 wurde die Zeile $0a$ statt $1a$ gewählt, da dies sofort einen Widerspruch produziert.

2.



Präsenzaufgabe 2

Wandeln Sie die Formel $A = ((p \to q) \to r) \wedge (\neg r \to (r \to p))$ um in eine äquivalente

(a) NNF;

(b) KNF;

(c) *kanonische KNF* (kKNF), d.h., eine KNF ohne Wiederholung von Klauseln, in der jede Klausel zu jedem Atom aus $@(A)$ genau ein Literal enthält.

Lösungsvorschlag:

(a) Zur Konstruktion der NNF ist zunächst die Implikation $\to$ zu eliminieren, dann sind die De Morgen'schen Regeln anzuwenden, wobei ggf. auftretende doppelte Negationen gleich entfernt werden können.

$$\begin{aligned}
((p \to q) \to r) \wedge (\neg r \to (r \to p)) &\models\!\!\!\!\!\!\;\;\;\,\,\,\, (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (r \vee \neg r \vee p) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\;\;\;\,\,\,\, ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge \top \\
&\models\!\!\!\!\!\!\;\;\;\,\,\,\, (p \wedge \neg q) \vee r
\end{aligned}$$

(b) Anwendung des Distributivgesetzes liefert nun die KNF:

$$(p \wedge \neg q) \vee r \;\text{⫤⊨}\; (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

(c) Die bisher zu kurzen Klauseln sind bisher zu kurz mittels Konjunktion mit $q \vee \neg q \;\text{⫤⊨}\; \top$ bzw. $p \vee \neg p \;\text{⫤⊨}\; \top$ und Anwendung der Distributivgesetze auf die gewünschte Länge gebracht. Ggf. sind dann Wiederholungen von Klauseln zu entfernen. Um diese besser entdecken zu können, ordnen wir die Literale innerhalb der Klauseln alphabetisch:

$$\begin{aligned}
(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) &\;\text{⫤⊨}\; (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
&\;\text{⫤⊨}\; (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
&\;\text{⫤⊨}\; \big\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, r\}\big\} \quad \text{in Mengenschreibweise}
\end{aligned}$$

Für n Atome gibt es 2^{2^n} verschiedene Formeln in kKNF, was nocheinmal die funktionale Vollständigkeit der Junktormenge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ zeigt.

Präsenzaufgabe 3

Entscheiden Sie die Erfüllbarkeit von

$$A \equiv \neg p \wedge (p \vee q \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee q \vee s)$$

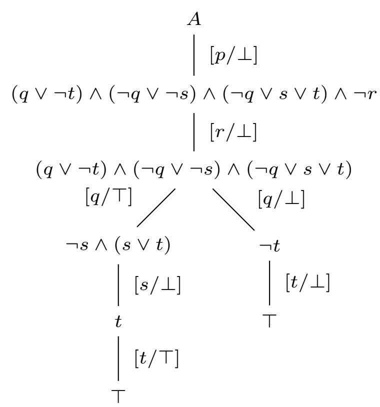
(a) mit dem Davis-Putnam-Verfahren,

(b) mit der Resolutionsmethode.

Lösungsvorschlag:

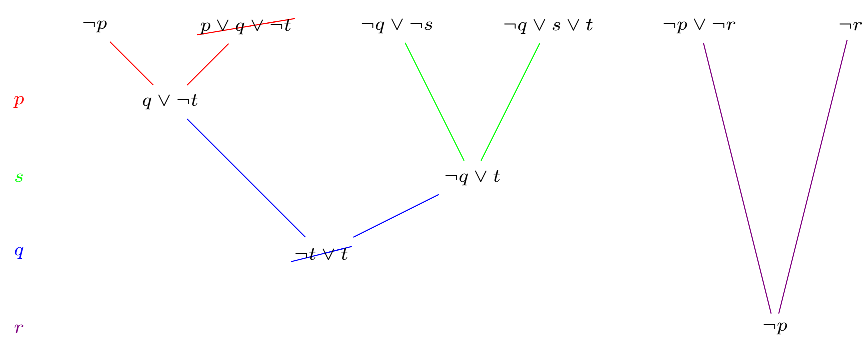
Da die Formel in KNF vorliegt, und die letzte Klausel zu $\top$ äquivalent ist, können wir diese entfernen. Weiterhin wird die Klausel $\neg p \vee r$ von $\neg p$ subsummiert, darf also auch entfernt werden.

(a) Die Pure Literal Regel greift nicht. Bis auf eine Anwendung der Splitting-Regel wird mehrfach die Unit-Regel angewendet:



A ist erfüllbar.

(b) Wir betrachten die Variablen in der Reihenfolge p, s, q, r:



A ist erfüllbar.

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Bilden Sie ein vollständiges Tableaux zu der Formel A.

$$A = \big[(p \lor \neg q) \to \neg(\neg r \to [\neg p \lor \neg q])\big] \lor \big[(p \to r) \to (\neg p \land q)\big]$$

Hierbei sind die eckigen Klammern gleichbedeutend mit runden Klammern; sie wurden lediglich zur besseren Lesbarkeit verwendet.

Überlegen Sie sich, wie sich die Literale entlang von Ästen nutzen lassen, um eine geeignete zu A äquivalente Normalform zu finden und geben sie diese an.

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Weisen Sie nach, dass die Erfüllbarkeitsäquivalenz $\models\!\mid_e = (\sqsubseteq_e \cup \sqsupseteq_s)^+$ (vergl. Folie 164) eine echte Obermenge der Äquivalenz $\models\!\mid$ (siehe Folie 69) ist. [Hinweis: Der Trick aus Präsenzaufgabe 2(c) erweist sich als nützlich.]

Hausaufgabe 6 [12 PUNKTE]

Konstruieren Sie mittels struktureller Rekursion einen Algorithmus, der Formeln in Negationsnormalform in äquivalente Formeln in konjunktiver Normalform überführt:

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel A in NNF
Ausgabe: Eine zu A äquivalente Formel in KNF, bezeichnet als $\mathsf{KNF}(A)$

Hausaufgabe 7 [16 PUNKTE]

1. [8 PUNKTE] Verwenden Sie das Davis-Putnam-Verfahren aus der Vorlesung um zu bestimmen, ob folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist. Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer, wenn dies möglich ist. Die übrigen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel Sie angewendet haben.

$$\begin{aligned}(p \lor q \lor r) \land s \land (s \lor \neg q \lor \neg t) \land (t \lor \neg s \lor \neg q) \land (q \lor p) \land (\neg q \lor \neg p \lor \neg s)\\ \land (s \lor \neg t \lor p) \land (t \lor \neg p) \land (\neg r \lor q \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg r \lor p)\end{aligned}$$

2. [8 PUNKTE] Zeigen Sie mithilfe der graphischen Resolutionsmethode, dass

$$\big\{(\neg r \lor s \lor \neg p), (\neg q \lor \neg t \lor \neg p), (q \lor \neg r), (r \lor t), (r \lor q \lor \neg p), (\neg q \lor \neg s \lor \neg p)\big\} \models \neg p$$

gilt. Denken Sie daran, dass die einzige Beweisregel im Resolutionskalkül die Resolvente ist.

Hausaufgabe 8 [13 PUNKTE]

Im Folgenden fassen wir Klauseln als Mengen von Literalen auf. Wenn n Atome zur Verfügung stehen, wieviele verschiedene Klauseln kann man formen,

(a) [3 PUNKTE] in denen jedes Atom höchstens einmal auftritt?

(b) [3 PUNKTE] in denen maximal zwei Literale auftreten und deren Atome verschieden sind?

(c) [3 PUNKTE] in denen maximal drei Literale auftreten und deren Atome verschieden sind?

[4 PUNKTE] Was schließen Sie daraus für die Anzahl der Schritte bei der Resolutionsmethode, wenn die Ausgangsformel in KNF nur Klauseln enthält, die den Bedingungen (b) bzw. (c) genügen?

Hausaufgabe 9 [0 PUNKTE]

Lesen Sie bis zum 7. Juni selbständig die Folien 193–198 zur Einstimmung auf die Prädikatenlogik.

Abgabe bis Donnerstag, 2023-06-15, 11:30, online als PDF mit Email-Adresse