NP - Vollständigkeit

3-SAT und 3-COLORABILITY.

3-SAT: Gegeben Formel F in CNF mit genau 3 Literalen pro Klausel.
Frage: Ist F erfüllbar?

Zunächst zeige: 3SAT $\in$ NP

"$\in$ NP" klar.

"NP-Schwer": SAT $\leq^{log}$ 3SAT.

SAT $\in$ NP und daher klar!

Was ist mit "NP-Schwer"

Wie funktioniert nun Reduktion?
$\Rightarrow$ Gucke SAT Instanz an.

Sei F eine CNF Formel mit

$F = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$

Betrachte eine Klausel

$C = (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$

Wir konstruieren eine Teilformel

$\overline{F_C}$ in 3-SAT wie folgt:

- Wir führen neue Literale $L^C_{i,k}$ ein, mit der Bedeutung „$L^C_{i,k}$ ist wahr gdw. $L_i \vee \dots \vee L_k$ wahr ist."

↳ $L^C_{i,k} \Leftrightarrow L_i \vee \dots \vee L_k$

$$L_i \vee \underbrace{L_{i+1} \vee \dots \vee L_k}_{L^C_{i+1,k}}$$

$$L^C_{i,k} \Leftrightarrow L_i \vee L^C_{i+1,k}$$

Führe für alle $i+1, \dots, k$ führe eine Klausel ein:

$C_{i,k} := L^C_{i,k} \Leftrightarrow L_i \vee L^C_{i+1,k}$

Was ist damit?

⇒ Konvertiere jetzt diese große Klausel in einer Klausel mit 3 Literalen.

$$\equiv (L^c_{i,k} \Rightarrow L_i \vee L^c_{i+1,k}) \wedge$$
$$(L_i \vee L^c_{i+1,k} \Rightarrow L^c_{i,k})$$

$$\equiv (\neg L^c_{i,k} \vee L_i \vee L^c_{i+1,k}) \wedge$$
$$(\neg L_i \vee L^c_{i,k}) \wedge (\neg L_{i+1,k} \vee L^c_{i,k})$$

die letzte zwei Sätze erfüllen nicht mal 3-SAT Formel?!

$$F_c := \bigwedge_{i=1}^{k} C_{i,k} \wedge L^c_{1,k} \wedge (\neg L^c_{k+1,k})$$

$$\overline{F} := \bigwedge_{i=1}^{m} F_{c_i}$$

Betrachte Größe von $\overline{F}$

$$|\overline{F}| = \sum_{i=1}^{m} |F_{c_i}| = \sum_{i=1}^{m} (|c_i| \cdot l + 2)$$

$$= l \cdot \sum_{i=1}^{m} |c_i| + 2m$$

$$= l \cdot O(n) + 2 \cdot O(n)$$
$$= O(n)$$

Für alle Klauseln < 3 Literalen, führe "Dummy" Literale ein:

$$C = (L_1 \vee L_2)$$
$$\Rightarrow (L_1 \vee L_2 \vee D) \wedge (L_1 \vee L_2 \vee \neg D)$$

$C = L_1 \Rightarrow (L_1 \vee C \vee D) \wedge$
$(L_1 \vee \neg C \vee D) \wedge$
$(L_1 \vee C \vee \neg D) \wedge$
$(L_1 \vee \neg C \vee \neg D)$

Sei die neue Formel $\hat{F}$, dann ist $\hat{F}$ in 3-SAT.

3-COLORABILITY

Geg: Graph $G=(V,E)$ ungerichtet.

Frage: Gibt es 3-Färbung der Knoten V?

Wir zeigen, dass dieses Problem NP-Vollständig "~~ENP~~" ist.

"$\in NP$" klar.

'NP-Schwer':

3-SAT $\leq$ 3-COLORABILITY.

Idee: Wir bauen einen graphischen / logischen Schaltkreis zu der 3-SAT Formel.

- Es Knoten für die Literale ("Input") gibt.
- UND Gatter ("Gadgets") für die Klauseln gibt.

Wie werden Literale gefärbt?

→ Literale können je nach Situation mal True / False gefärbt werden.

Es wird 3 Farben geben - True (T), False (F) und Base (B) geben.

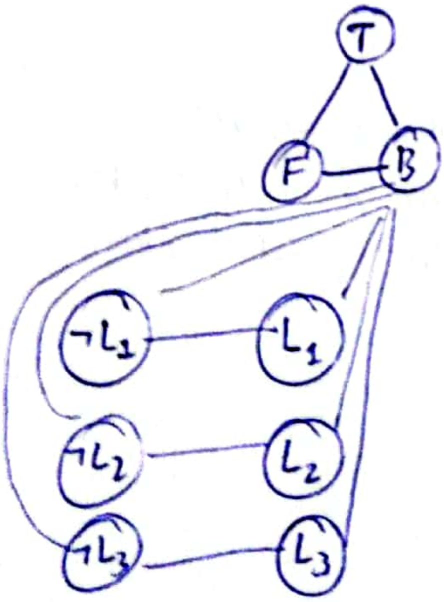
Die Eingabe (Input) und die Ausgabe der Gatter (Output) soll gefärbt werden.

<u>Konstruktion:</u>

"Palette": Diese Komponente ordnet den Farben ihre Bedeutung zu (true, false, base)

"Input": Knoten für Literale L und $\neg L$. Wir sorgen dafür, dass genau einer von L und $\neg L$ mit true, der andere mit false gefärbt wird.

"Gatter": Teilgraph für eine Klausel $C = (L_1 \vee L_2 \vee L_3)$ mit einem Output-Knoten der True gefärbt wird, wenn einer der Eingaben L_1, L_2, L_3 true gefärbt müsste.



Was ist hier los?

$C = (L_1 \vee L_2 \vee L_3)$

Wir expandieren Graphen.