

Variables Instrumentales, IV

Yasmani Vargas

yasmani.vargas@unap.edu.pe

Unidad de Posgrado
Facultad de Ingeniería Económica
Universidad Nacional del Altiplano - Puno

Sesión 7
Ciclo II - Diseño y Evaluación de Políticas Públicas
Noviembre, 2025

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

¿Por qué métodos de Variables Instrumentales (IV)?

- Métodos previos:
 - ▶ **OLS / PSM**: requieren exogeneidad condicional

$$\text{cov}(T, \varepsilon) = 0$$

- ▶ **DD / efectos fijos**: permiten heterogeneidad no observada *fija* en el tiempo.
- Limitaciones:
 - ▶ Sesgo de selección **variable en el tiempo** no es corregido por DD.
 - ▶ Auto-selección y focalización del programa pueden depender de factores no observados y cambiantes.
 - ▶ Errores de medición en la participación \Rightarrow sesgo de atenuación.
- **Variables Instrumentales (IV)**:
 - ▶ Permiten endogeneidad en la participación individual y/o ubicación del programa.
 - ▶ Pueden ser robustas a sesgo de selección **variable en el tiempo** (con panel).
 - ▶ Corrigen sesgos por error de medición mediante enfoques tipo *intención de tratar* (ITT).

Modelo base y problema de endogeneidad

- Ecuación de impacto del programa:

$$Y_i = \alpha X_i + \beta T_i + \varepsilon_i$$

donde:

- ▶ Y_i : resultado de interés.
- ▶ T_i : indicador o intensidad de tratamiento.
- ▶ X_i : covariables observadas.
- ▶ ε_i : factores no observados.
- Si la asignación a T_i es aleatoria:
$$\text{cov}(T_i, \varepsilon_i) = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_{OLS} \text{ insesgado.}$$
- En la práctica:
 - ▶ **Endogeneidad en la focalización**: el programa se ubica en áreas con características especiales (oportunidades, normas, redes).
 - ▶ **Auto-selección individual**: quienes esperan mayor beneficio tienden a participar.
- Resultado:

$$\text{cov}(T_i, \varepsilon_i) \neq 0 \Rightarrow \hat{\beta}_{OLS} \text{ sesgado.}$$

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV**
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

Intuición del enfoque IV

- Objetivo:
 - ▶ Aislar la parte de la variación en T_i que es **exógena**, es decir, no correlacionada con ε_i .
- Se introduce una **variable instrumental** Z que:

Condiciones clave del instrumento

- ▶ **Relevancia:** $\text{cov}(Z, T) \neq 0$
- ▶ **Exogeneidad:** $\text{cov}(Z, \varepsilon) = 0$

- Interpretación:
 - ▶ Z afecta la probabilidad/intensidad de participar en el programa.
 - ▶ Z no está correlacionado con factores no observados que afectan Y .
 - ▶ Esta última condición se conoce como **restricción de exclusión**.
- Ejemplos:
 - ▶ Reglas de elegibilidad exógenas (p.ej. umbrales de ingresos o tierra).
 - ▶ Asignación aleatoria previa (loterías, sorteos, proximidad geográfica).
 - ▶ Diseño institucional (por género, cohorte de edad, etc.).

Endogeneidad y panel de datos

- En panel:
 - ▶ Las características no observadas pueden variar en el tiempo y correlacionarse con T_{it} y X_{it} .
 - ▶ DD solo corrige la parte **fija** de esa heterogeneidad.
- Con IV + panel:
 - ▶ Puede permitirse que algunos componentes de la heterogeneidad no observada varíen en el tiempo.
 - ▶ IV se utiliza para corregir:
 - ★ Endogeneidad en la adopción del programa a lo largo del tiempo.
 - ★ Errores de medición en la participación (sesgo de atenuación).
- El reto:
 - ▶ Encontrar instrumentos plausibles, exógenos y suficientemente fuertes.

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas**
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

Primera etapa: regresión del tratamiento

- Primera etapa del método IV (2SLS):

$$T_i = \gamma Z_i + \delta X_i + u_i$$

donde:

- ▶ Z_i : instrumento(s).
 - ▶ X_i : covariables exógenas.
 - ▶ u_i : término de error de primera etapa.
- ▶ Resultado:
 - ▶ Se obtiene el tratamiento predicho:

$$\hat{T}_i = \hat{\gamma} Z_i + \hat{\delta} X_i.$$

- ▶ \hat{T}_i refleja la parte de T_i explicada solo por Z_i y X_i
 - ▶ Bajo $\text{cov}(Z, \varepsilon) = 0$, la variación en \hat{T}_i es exógena respecto de ε_i .

Segunda etapa: ecuación de resultado

- Ecuación estructural original:

$$Y_i = \alpha X_i + \beta T_i + \varepsilon_i.$$

- En 2SLS, se reemplaza T_i por \hat{T}_i :

$$Y_i = \alpha X_i + \beta \hat{T}_i + \tilde{\varepsilon}_i.$$

- Intuición:

- ▶ \hat{T}_i está “limpiado” de la parte endógena correlacionada con ε_i .
- ▶ La regresión de segunda etapa sobre \hat{T}_i identifica el impacto causal asociado a la variación en T_i generada por Z_i .

- El estimador de interés:

$$\hat{\beta}_{IV} \equiv \hat{\beta}_{2SLS}.$$

Derivación simple del estimador IV

- Consideremos el modelo simplificado:

$$Y_i = \beta T_i + \varepsilon_i.$$

- Bajo $\text{cov}(Z, \varepsilon) = 0$, se tiene:

$$\text{cov}(Y, Z) = \text{cov}(\beta T + \varepsilon, Z) = \beta \text{cov}(T, Z) + \text{cov}(\varepsilon, Z) = \beta \text{cov}(T, Z).$$

- Entonces:

$$\beta = \frac{\text{cov}(Y, Z)}{\text{cov}(T, Z)}.$$

- Interpretación:

- ▶ El estimador IV compara cómo cambia Y con Z relativo a cómo cambia T con Z .
- ▶ Se usa Z como fuente exógena de variación en T .

Sesgo del estimador IV y calidad del instrumento

- En general, se puede mostrar que:

$$\hat{\beta}_{IV} = \beta + \frac{\text{cov}(Z, \varepsilon)}{\text{cov}(Z, T)}.$$

- Implicaciones:

- ▶ Si $\text{cov}(Z, \varepsilon) \neq 0$ (violación de la exclusión), IV estará sesgado.
- ▶ Si Z es débil ($\text{cov}(Z, T)$ pequeño), el sesgo asintótico puede ser grande:

$$\text{sesgo} \propto \frac{1}{\text{cov}(Z, T)}.$$

- Conclusión:

- ▶ **Instrumentos débiles** pueden ser peores que OLS.
- ▶ Se requiere:
 - ★ Alta correlación entre Z y T (relevancia).
 - ★ Argumento convincente de que Z no afecta Y salvo a través de T (exogeneidad).

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV**
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

IV, error de medición y estimaciones tipo ITT

- El error de medición en T (participación observada) genera:
 - ▶ **Sesgo de atenuación** en OLS: los coeficientes se sesgan hacia cero.
- Un IV puede corregir este problema:
 - ▶ Se utiliza una variable que capta la asignación o elegibilidad (por ejemplo, invitación, sorteo, regla de elegibilidad).
 - ▶ Se identifica el efecto de **intención de tratar** (ITT): el efecto de haber sido asignado al tratamiento, no necesariamente de participar efectivamente.
- Aplicación típica:
 - ▶ Asignación aleatoria del programa \Rightarrow instrumento.
 - ▶ Participación efectiva en el programa \Rightarrow variable de tratamiento potencialmente endógena.

IV con panel y efectos fijos

- Modelo de panel con efectos fijos e IV:

$$Y_{it} = \delta Q_i + \eta_i + v_{it}, \quad t = 1, \dots, T,$$

donde:

- ▶ Q_i : vector que incluye tratamiento T_i y covariables exógenas X_i .
 - ▶ η_i : efecto fijo individual no observado.
 - ▶ v_{it} : error idiosincrático.
- Estrategia:
 - ▶ La correlación entre η_i y Q_i se corrige con **efectos fijos** (o diferenciación).
 - ▶ La correlación entre algunos regresores de Q_i (ej. T_i) y v_{it} se corrige con **instrumentos** Z_i .
- Requisitos:
 - ▶ Encontrar instrumentos que varíen a lo largo del tiempo o interactuar características institucionales con el tiempo.
 - ▶ Mantener la restricción de exclusión: Z_i no debe afectar directamente los resultados.

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos**
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

Prueba de endogeneidad tipo Wu–Hausman

- Idea: contrastar OLS (tratamiento exógeno) vs. IV (tratamiento endógeno).
- Procedimiento regresivo:
 - 1 Primera etapa: regrese T sobre Z y X :

$$T_i = \gamma Z_i + \delta X_i + u_i.$$

Obtenga los residuos \hat{u}_i .

- 2 Segunda etapa: regrese

Y_i sobre X_i , T_i y \hat{u}_i .

- 3 Si el coeficiente de \hat{u}_i es significativo:
 - ★ Existe correlación entre el tratamiento T_i y el término de error original.
 - ★ $\Rightarrow T_i$ es endógeno, OLS es inconsistente, IV es preferible.

Pruebas de validez y fortaleza de instrumentos

- **No se puede probar directamente** la restricción de exclusión ($\text{cov}(Z, \varepsilon) = 0$).
 - ▶ La justificación es fundamentalmente **de diseño y teoría** del programa.
- Cuando hay múltiples instrumentos:
 - ▶ Se pueden usar pruebas de **sobreidentificación**:
 - 1 Estimar la ecuación estructural por 2SLS y obtener residuos $\hat{\varepsilon}_i$.
 - 2 Regresar $\hat{\varepsilon}_i$ sobre X y Z y obtener el R^2 .
 - 3 Bajo la hipótesis nula de que los instrumentos son exógenos:

$$nR^2 \sim \chi_q^2,$$

donde q es el número de instrumentos adicionales.

- ▶ Si nR^2 es demasiado grande:
 - ★ Se rechaza la exogeneidad de al menos un instrumento.
- Para **fortaleza** del instrumento:
 - ▶ Revisar el poder explicativo de la primera etapa (estadísticos F , coeficientes de Z).
 - ▶ Instrumentos débiles \Rightarrow grandes errores estándar y potencial gran sesgo.

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento**
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento

De IV global a efectos locales: LATE

- La estimación IV no siempre identifica un efecto promedio global (ATE).
- En general:
 - ▶ IV identifica un efecto para el subconjunto de individuos cuya participación cambia con el instrumento.
 - ▶ Este efecto se denomina **efecto promedio local del tratamiento (LATE)**.
- Contextos típicos:
 - ▶ Focalización imperfecta.
 - ▶ Errores de medición en participación.
 - ▶ Individuos con distinta información sobre sus ganancias esperadas.
- Interpretación:
 - ▶ El efecto IV aplica a **compliers**: aquellos cuya decisión de participar cambia cuando cambia el instrumento Z .

Selección en ganancias anticipadas y sesgo IV

- Problema:
 - ▶ Los individuos pueden conocer mejor que el evaluador sus beneficios esperados Y .
 - ▶ Quienes esperan mayores ganancias pueden auto-seleccionarse en el programa.
- Si el instrumento Z afecta la participación:
 - ▶ Las ganancias no observadas también se correlacionan con Z .
 - ▶ Lo que viola $\text{cov}(Z, \varepsilon) = 0$ y sesga IV.
- LATE (Imbens y Angrist, 1994):
 - ▶ En presencia de heterogeneidad en respuestas individuales:
 - ▶ IV estima el efecto promedio del tratamiento solo para quienes cambian su participación debido a variaciones en Z .

Formalización del LATE

- Suponga que el instrumento Z toma dos valores: z y z' .
- Definimos:

$$P(z) = P(T = 1|Z = z), \quad P(z') = P(T = 1|Z = z').$$

donde $P(\cdot)$ es el puntaje de propensión inducido por Z .

- LATE:

$$\beta_{IV,LATE} = \frac{E[Y|P(Z) = P(z)] - E[Y|P(Z) = P(z')]}{P(z) - P(z')}. \quad (1)$$

- Interpretación:

- ▶ El numerador: cambio promedio en resultados al pasar de $Z = z'$ a $Z = z$.
- ▶ El denominador: cambio en la probabilidad de participar inducido por el cambio en Z .
- ▶ Cociente: efecto promedio del tratamiento entre quienes cambian su estado de participación por el cambio en el instrumento.

Supuesto de monotonía en LATE

- Supuesto clave:

Monotonía

Un aumento en Z de z' a z hace que algunos individuos entren al programa, pero ninguno salga de él.

- Entonces:
 - ▶ Los individuos se clasifican en:
 - ★ *Compliers*: participan solo cuando $Z = z$.
 - ★ *Always-takers*: participan independientemente de Z .
 - ★ *Never-takers*: nunca participan.
 - ▶ LATE se identifica sobre el subconjunto de **compliers**.
- Importante:
 - ▶ LATE no es necesariamente el ATE ni el TOT.
 - ▶ Es local a las variaciones inducidas por el instrumento.

Contenido

- 1 Motivación y comparación con otros métodos
- 2 Idea central del método IV
- 3 2SLS: Mínimos Cuadrados en Dos Etapas
- 4 Endogeneidad, ITT y panel con IV
- 5 Pruebas de endogeneidad y validez de instrumentos
- 6 LATE: Efectos Promedio Locales del Tratamiento
- 7 MTE: Efecto Marginal del Tratamiento**

De LATE a MTE

- El **efecto marginal del tratamiento** (MTE) profundiza la lógica de LATE:
 - ▶ Considera el efecto del tratamiento para individuos en el *margen* de participar.
- Definición:

$$MTE = E[Y(1) - Y(0) \mid X_i = x, U_i = u], \quad (2)$$

donde:

- ▶ $Y(1)$, $Y(0)$: resultados potenciales bajo tratamiento y control.
 - ▶ X_i : covariables observadas.
 - ▶ U_i : componente no observado que afecta la decisión de participar.
- Intuición:
 - ▶ MTE mide el efecto del tratamiento para individuos con un nivel específico de propensión no observada a participar ($U_i = u$).

Modelo de participación latente

- Participación determinada por:

$$T_i^* = \mu_T(Z_i) - U_i,$$

$$T_i = 1 \text{ si } T_i^* > 0, \quad T_i = 0 \text{ si } T_i^* \leq 0.$$

- Interpretación:

- ▶ $\mu_T(Z_i)$: componente observado (función de instrumentos Z_i).
- ▶ U_i : componente no observado, distrib. en $[0, 1]$ (por ejemplo).

- Individuos:

- ▶ U_i cercano a 0: más propensos a participar (alto “gusto” no observado por el programa).
- ▶ U_i cercano a 1: menos propensos a participar.

- El MTE en diferentes valores de u describe cómo varía el efecto del tratamiento a lo largo de esta distribución no observada.

Relación entre MTE, ATE, TOT y LATE

- Propiedad clave:
 - ▶ El MTE es una “función base” a partir de la cual pueden obtenerse ATE, TOT y LATE por integración en distintos rangos de u .
- Ejemplos:
 - ▶ **ATE**: efecto promedio en la población:

$$ATE = \int_0^1 MTE(u) du.$$

- ▶ **TOT**: efecto promedio para quienes participan:

$$TOT = \int_0^{P(z)} MTE(u) du,$$

donde $P(z)$ es el puntaje de propensión de participar dado el instrumento.

- ▶ **LATE** entre z' y z :

$$LATE_{z',z} = \frac{1}{P(z) - P(z')} \int_{P(z')}^{P(z)} MTE(u) du.$$

Estimación del MTE: IV local

- Heckman y Vytlacil proponen un estimador local de IV:

$$\beta_{IV,MTE} = \lim_{P(z') \rightarrow P(z)} \frac{E[Y|P(Z) = P(z)] - E[Y|P(Z) = P(z')]}{P(z) - P(z')}. \quad (3)$$

- Estimación en dos etapas:
 - 1 Estimar $P(Z)$ (puntaje de propensión) como función de instrumentos Z .
 - 2 Estimar una regresión lineal local no paramétrica de Y sobre $P(Z)$.
- Evaluando la derivada de esta función en distintos valores de $P(Z)$ se obtiene el MTE.
- Diferencia con LATE:
 - ▶ LATE: cambio promedio *global* entre niveles de Z .
 - ▶ MTE: derivada *local* alrededor de un valor específico de $P(Z)$.

Desarrollos recientes en MTE

- Los métodos para estimar MTE siguen evolucionando:
 - ▶ Estimadores no paramétricos.
 - ▶ Modelos de mínimos cuadrados no lineales que estiman simultáneamente ecuaciones de participación y resultados.
- Ventajas:
 - ▶ Relajan algunos supuestos de linealidad implícitos en IV clásico.
 - ▶ Permiten una caracterización más rica de la heterogeneidad en ganancias del programa.
- Desafíos:
 - ▶ Mayor complejidad computacional.
 - ▶ Requerimientos altos de datos (tamaño muestral, calidad de instrumentos).