Date: ۹۷۵۳۲۲۴۵ یاسمین مدنی Subject: تمرین سری دوم ، سیگنال ها و سیستم ها

۱) انرژی کل و توان متوسط کل را برای سیگنال های زیر محاسبه کنید. (۱۰)

a) $x[n] = e^{-2n} u[n]$

b) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4} n)$

(a) انرژی $E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-2n} u[n])^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4n} \cdot u^2[n] = \sum_{0}^{\infty} e^{-4n} \cdot u[n]$$

$$u^2[n] = u[n] \qquad u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$E = \sum_{0}^{\infty} (e^{-4})^n = \frac{(e^{-4})^0 - (e^{-4})^{\infty}}{1 - e^{-4}} = \frac{1 - 0}{1 - e^{-4}} = \frac{1}{1 - e^{-4}}$$

$P = 0$ سیگنال انرژی محدود ← توان ۰

(b) $E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ دوره تناوب $\frac{2k\pi}{\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{k=1} 8$

$E = \sum_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\frac{\pi}{4} n) = \infty$ توان محدود ← انرژی نامحدود

$x[n] = \cos(\frac{n\pi}{2})$ $N_0 = 4$

$\frac{2k\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} P[n] = \lim_{N \to \frac{N_0}{2}} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N-1} P(n)$$

$$= \lim_{N \to \frac{8}{2}} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N-1} \cos^2(n\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4 \times 2} \sum_{-4}^{3} \cos^2(\frac{\pi}{4} n)$$

$$\sum_{-4}^{3} \cos^2(n\frac{\pi}{4}) = \sum_{-4}^{3} \frac{1 + \cos(n\frac{\pi}{2})}{2} = 4$$

Date: Subject:

متناوب بودن سیگنال های زیر را بررسی کنید و در صورت متناوب بودن کوچکترین دوره تناوب آن ها را بدست آورید.

a) $x[n]=e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{j\frac{4\pi}{3}n}$

b) $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(\delta[n-k]-\delta[n+2k]\right)$

c) $x[n]=e^{(1+4j)n\pi}$

d) $x[n]=\cos(\frac{\pi}{3}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)+3\left|\sin(\frac{\pi}{8}n)\right|$

a) با توجه به اینکه هر تابع نمایی $e^{j\frac{\pi}{k}n}$ متناوب است و در اینجا $x[n]$ جمعی از توابع متناوب است آنگاه خواهیم داشت که تابع کلی متناوب بود دوره تناوب کل از ک.م.م تناوب ها بدست می آید

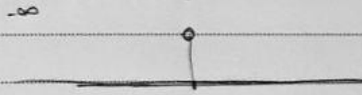
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \rightarrow \frac{2\pi}{\theta}=$ دوره تناوب

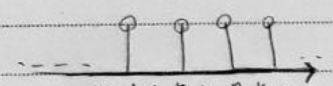
$e^{j\frac{\pi}{3}n} \rightarrow \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}}=\frac{6}{5} \rightarrow (6)$ دوره تناوب می $6 \sqcup 3 = 6$

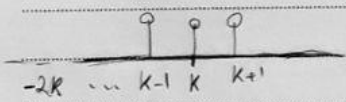
$e^{j\frac{4\pi}{3}n} \rightarrow \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \rightarrow (3)$

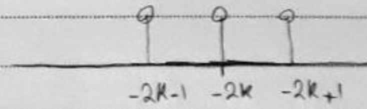
b) $x[n]=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n-k]-\sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n+2k]$

$\delta[n-k]\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$





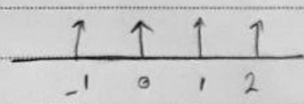




چون :

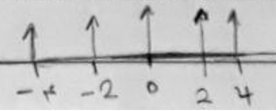
$\sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n-mN]=\delta_N[n]$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] \rightarrow N=1$



تفاضل

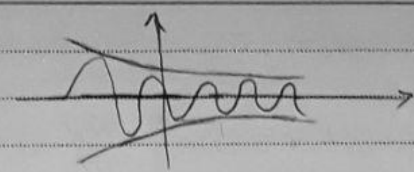
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n+2k] \quad -(-2K) \quad N=-2$



۲ متناوب با دوره ۲

Date: .... Subject: ....

c) $e^{(1+4j)n\pi} = e^{n\pi} \cdot e^{4n\pi j}$

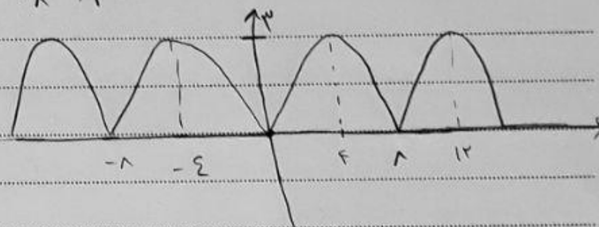


اما از آنجا که تابع به فرم $Ce^{\alpha t}e^{j\omega t}$ بین دو تابع نمایی
قرار گرفته و به صورت متناوب میرا باشد
نیست و نه Im و نه Real تابع به صورت متناوب
نخواهند بود

d) $\cos(\frac{\pi}{3}n)\cos(\frac{\pi}{4}n) + 3|\sin(\frac{\pi}{8}n)|$

$3|\sin(\frac{\pi}{8}n)| \longrightarrow \frac{\pi}{\frac{\pi}{8}} = 8$

۸ ۴ ۲ ۱



$\cos(\frac{\pi}{3}n)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}n) = \frac{1}{2}\left(\cos((\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})n) + \cos((\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})n)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12}n) + \cos(\frac{\pi}{12}n)\right)$

$\frac{2\pi}{\frac{7\pi}{12}} = \frac{24}{7} = 24$ تابع جمع چند تابع متناوب → تناوب کلی = ک.م.م تناوب‌ها

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ ۲۴ ک.م.م ۸ = ۲۴

۱۳) برای هر کدام از سیستم‌های زیر مشخص کنید که کدام یک از خواص علیت و پایداری و خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان را دارند
(n_0 یک عدد ثابت)

a) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k-2]u[n-3]$ $u[n-3] \begin{cases} 1 & n \geq 3 \\ 0 & n < 3 \end{cases}$

علیت: چون وابستگی زمانی به آینده ندارد علی است

پایداری: if $x[n] < M_x \rightarrow y[n] < M_y$ از آنجا که برای $n<3$ مقدار $y[n]$ صفر می‌باشد
و همچنین $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k-2]$ $n \geq 3$ و $x[k-2]$ بازه‌ای محدود دارد پس مجموع تعداد محدود از $x[i]$ها نیز
محدود خواهد بود و پایدار است.

Date: ______ Subject: ______

خطی بودن : $H\{ax_1(n)+bx_2(n)\} = aH\{x_1(n)\} + bH\{x_2(n)\}$

$$a y_1[n] + b y_2[n] = a\sum_{0}^{n} x_1[k-2]u[n-3] + b\sum_{0}^{n} x_2[k-2]u[n-3]$$

$$= \sum_{0}^{n} a x_1[k-2]u[n-3] + b x_2[k-2]u[n-3] =$$ خطی ☑

$$\sum_{0}^{n}\left(a x_1[k-2] + b x_2[k-2]\right)u[n-3] = H\{ax_1(n)+bx_2(n)\}$$

تغییرناپذیری با زمان؟ : از آنجا که تابعی مانند sin یا cos در تابع ضرب نشده که وابسته به زمان باشد به صورت
shift زمانی ورودی، خروجی هم shift می‌یابد

b) $y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

علیت : از آنجا که به جمله‌ی $n+n_0$ نیاز داریم پس وابسته
به آینده و غیرعلی است

پایداری : if $x[k] < M_x \rightarrow y[n] < M_y$ ☑

$$x[k] < M_x \rightarrow \sum_{n-n_0}^{n+n_0} x[k] < \sum_{n-n_0}^{n+n_0} M_x = \sum_{n-n_0}^{n+n_0} x[k] = 2n_0 \, x[k] \leqslant M_y$$

خطی بودن : $a\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = \sum_{n-n_0}^{n+n_0} a x_1(k) + b x_2(k) = H\{ax_1+bx_2\}$ ☑

TI : ① $\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x[k-t] = y_1$ $\qquad y_1 = y_2$

② $\sum x[k-t] = y_2$ چون تابع در نظر گرفته شده در برابر shift تغییری ایجاد نمی‌کند TI است.

Date: .... Subject: ....

c) $y[n] = \sum_{n_0}^{n+n_0} x[k]$

علیت : از آنجایی که به $n+n_0$ نیاز داریم و البته به آینده است و غیرعلی است

پایداری : $x[k] < M_x \rightarrow y[n] < M_y$ مشابه مورد قبل از آنجا که جمع تعدادی داده‌ی محدود در بازه‌ی محدود است پایدار است.

خطی بودن ☑ $a \sum_{n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b \sum_{n_0}^{n+n_0} x_2(k) = \sum_{n_0}^{n+n_0} a x_1(k) + b x_2(k) = H\{a x_1 + b x_2\}$

TI: $y_1 = \sum_{n_0}^{n+n_0} x[k-t]$

$y_2 = \sum_{n_0}^{n+n_0} x[k-t]$

$\Big\} \; y_1 = y_2$

$\times$ d) $y[n] = x[n]\, x[n+1]$

علیت : به آینده وابسته (n+1) پس غیرعلی است

پایداری : $x[i] < M_x \rightarrow y[n] < M_y$

$x[n] \leq M_x$

$x[n+1] \leq M_x$

if $x[n] < 0$ و $M_x > 0$

$x[n+1] < 0$ و $M_x > 0$

ممکن است رابطه‌ی روبرو برقرار باشد

پس نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت $\rightarrow x[n] \cdot x[n+1] \leq M_x^2 \leq M_y$ (اما می‌دانیم ضرب دو عدد محدود، نامحدود نخواهد بود)

خطی بودن : $a x_1[n]\, x_1[n+1] + b x_2[n]\, x_2[n+1] \neq H(a x_1 + b x_2)$

خطی نیست

TI $\quad y_1(n) = x[n-t]\, x[n-t+1]$

$y_2(n) = x[n-t]\, x[n-t+1]$

$\Big\} \rightarrow y_1 = y_2$

Date: .... Subject: ....

e) $y[n] = \log(|x[n]|)$

علی ← ☑ عدم وابستگی به آینده

خطی → $a\log(|x_1[n]|) + b\log(|x_2[n]|) = \log(|x_1^a|) + \log(|x_2^b|)$

$= \log(|x_1^a[n]||x_2^b[n]|) \neq H\{ax_1 + bx_2\}$

پایداری ☑ $x[n] \leq M_x \rightarrow |x[n]| \leq |M_x| \rightarrow \log|x[n]|) \leq \log|M_x| \leq M_y$

از آنجا که لگاریتم تابعی پیوسته است می‌توان نوشت

TI: $y_1 = \log(|x[n-t]|)$ shift ورودی $y_1 = y_2$

$y_2 = \log(|x[n-t]|)$ shift خروجی

f) $y[n] = 2x[n] + 1$

علی: ☑ عدم وابستگی به آینده علی است

پایداری: ☑ $x[n] \leq M_x \rightarrow 2x[n] \leq 2M_x \rightarrow 2x[n] + 1 \leq 2M_x + 1 \leq M_y$

خطی: ☒ $a(2x_1[n]+1) + b(2x_2[n]+1) = 2ax_1 + a + 2bx_2 + b$

$2(ax_1 + bx_2) + a + b \neq 2(ax_1 + bx_2) + 1$

TI: $y_1 = 2x[n-t] + 1$ $y_1 = y_2$ TI

$y_2 = 2x[n-t] + 1$