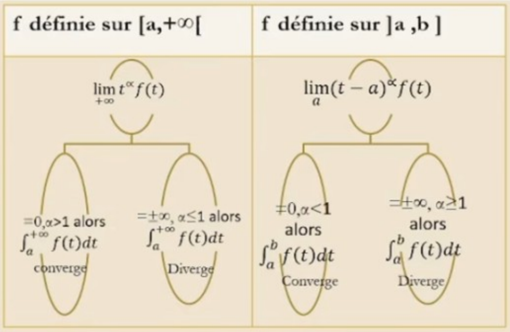

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est convergente car α=3>1
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est divergente car α=1/2≤1
- $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est convergente car α=1/2<1
- $\int_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$ est divergente car α=2≥ 1
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^4} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$
  - $\int_0^{1} \frac{1}{x^4} dx$ est divergente car α=4≥ 1
  - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ est convergente car α=4>1

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ est divergente

$\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente

Fonction f	Primitive F
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}*-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$u'(x)u^n(x),\ n \in \mathbb{N}*$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u^n(x)},\ n \in \mathbb{N}*-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\|u(x)\| + C$
e^x	$e^x + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + C$

Développement limités des fonctions usuelles:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times\cdots\times2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\times3\times\cdots(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{1\times3\times\cdots(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

La série géométrique	La série de Riemann
C'est toute série de terme générale Un=q^n, elle converge si et seulement si $\|q\|<1$	C'est toute série de terme générale Un=$\frac{1}{n^\alpha}$, elle converge si et seulement si $\alpha>1$

En $+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

En 0 $\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$

Enoncé

Soit $\sum_{n\geq0} U_n$ et $\sum_{n\geq0} V_n$ deux séries à termes positives tel que Un≤Vn
Si $\sum_{n\geq0} V_n$ converge alors $\sum_{n\geq0} U_n$ converge
✓ Si $\sum_{n\geq0} U_n$ Diverge alors $\sum_{n\geq0} V_n$ Diverge

Enoncé

Soit $\sum_{n\geq0} U_n$ une série à termes positives , supposons que $\lim_{+\infty} \sqrt[n]{Un}$=a

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq0} U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq0} U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

ction exponentielle

aison de la fonction exponentielle avec la fonctic en $-\infty$.

En $+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

En $-\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} x^n e^x = 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Enoncé

Soit f une fonction positive et décroissante sur [a,+∞[et Un=f(n) on a alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n\geq a} U_n$ sont de même nature .

Enoncé

Soit $\sum_{n\geq0} U_n$ une série à termes positives tel que $\lim_{+\infty} \frac{Un+1}{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq0} U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq0} U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

Etape 1: Calculer Sn= $\sum_{k=0}^{n} U_k$
Etape 2: $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} Sn$=S

Définition: On dit que $\sum_{n\geq0} U_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\geq0} |U_n|$ est convergente
Théorème: Toute série absolument convergente est convergente

Critère spécial des séries alternées: Soit Un=$(-1)^n Vn$ avec (Vn) une suite à termes positifs
Si:

- (Vn) est décroissante (Vn+1<Vn)
- $\lim_{+\infty} Vn$=0

Alors la série de terme générale Un est convergente

Critère de convergence absolue: Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b[, s'il existe une fonction g à valeurs positives et définie sur [a ,b[telle que :

- |f(t)|≤g(t)
- $\int_a^b g(t)dt$ converge

Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge