Définition 1. *Une fonction à valeurs complexes f est dite dérivable si les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, on a :*

$$f' = \big(\mathfrak{Re}(f)\big)' + i\big(\mathfrak{Im}(f)\big)'.$$

Sur l'exemple précédent : f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2e^{2x} + 2ix.$$

Rappel : Pour $z \in \mathbf{C}$, on a défini e^z par :

$$e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times e^{i\mathfrak{Im}(z)}.$$

Partie A

Questions préliminaires

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$.

1. Déterminer $\mathfrak{Re}(h)$ et $\mathfrak{Im}(h)$.
2. En déduire que h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbf{C}$, on a montré que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \big(e^{mx}\big)' = me^{mx}.$$

Partie B

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad az'' + bz' + cz = f(x)$$

où a, b, c sont des réels tels que $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = \mathfrak{Re}(f)(x) \quad \text{et} \quad (E_2) \quad ay'' + by' + cy = \mathfrak{Im}(f)(x)$$

On rappelle que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \mathfrak{Re}(f)(x) + i\mathfrak{Im}(f)(x)$$

1. Montrer que z est solution de (E) si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(z)$ est solution de (E_1) et $\mathfrak{Im}(z)$ est solution de (E_2).
2. Dans cette question, on pose $f(x) = e^{mx}$, où $m \in \mathbf{C}$. On suppose que m n'est pas solution de l'équation caractéristique.
Montrer que (E) admet une solution particulière z_p de la forme λe^{mx} avec $\lambda \in \mathbf{C}$ à déterminer.

Partie C
Une application

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$(F) \quad y'' + 2y' + 5y = \cos(2x)e^x$$

1. Déterminer $m \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \cos(2x)e^x = \mathfrak{Re}\big(e^{mx}\big).$$

2. Déterminer une solution particulière de

$$z'' + 2z' + 5z = e^{mx}.$$

3. En déduire les solutions de (F).

*   *   *