Exercice 1

Soit x un réel. On appelle *partie entirère* du réel x l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$ vérifiant l'encadrement suivant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

1. En utilisant la définition, donner les valeurs de $\lfloor x \rfloor$ pour $x = \sqrt{2}$, $x = -3,1$ et $x = 0$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$. Prouver que : $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$

3. On veut prouver la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

a) Faire une preuve directe de ceci.

b) Refaire la preuve par récurrence.

Exercice 2

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère la suite à terme complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} & z_0 = 0 \\ & z_1 = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}} \\ \forall n \geq 0 & z_{n+2} - jz_{n+1} - j^2 z_n = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{(R)} \end{cases}$$

1. Vérfier que $1 + j + j^2 = 0$.

2. On pose alors pour tout entier naturel n : $u_n = z_{n+1} - z_n$

a) À l'aide de la relation (R) et de **1.**, montrer que :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = j^2 u_n + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) Trouver un complexe C tel que $C = j^2 C + e^{i\pi/3}$.

c) Montrer que la suite (w_n) de terme général $u_n - C$ est géométrique.

d) En déduire une expression de u_n ne dépendant que de n et de C.

3. a) Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

b) En factorisant $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ par $e^{i\frac{\pi}{6}}$, puis en utilisant les formules d'Euler, simplifier le quotient $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + j^2}$.

4. a) En déduire une expression plus simple de u_n valable pour tout entier naturel n.

b) Montrer que deux termes consécutifs de la suite (z_n) ne sont jamais égaux.