## Exercice 1

On consdière la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + \frac{1}{2^n}}$$

**1. a)** Programmer une fonction en Python `def liste_suite(n):`, qui prend en entrée un entier `n` et retourne en sortie la liste $[u_0, \dots, u_n]$

```python
from __future__ import divison
from math import sqrt

def liste_suite(n):

u = 1








#----fin
```

**b)** Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$ à l'aide de votre programme, vous devriez reconnaître une constante assez connue.

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \geq 1$.

**3.** Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

**4.** (*classique*) Déduire que $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq u_0 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$.

**5.** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**6.** Soit $(v_n)$ la suite définie :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad v_n = {u_n}^2$$

**a)** Pour tout entier naturel $n$ exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**b)** En déduire la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.

**7.** Donner un équivalent simple de $\ell - u_n$

## Exercice 2

Soit $(x_n)$ la suite définie par :

$$x_0 \in ]0,1[ \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad x_{n+1} = x_n - {x_n}^2.$$

**1.** Détreminer le sens de variations de la suite $(x_n)$.

**2.** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \in ]0,1[$.

**3.** En déduire de la suite $(x_n)$ et sa limite éventuelle.