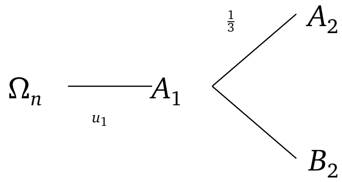
1. Un résultat de l'expérience est codé par une n-liste $(v_1, \dots v_n)$ où v_k désigne le vote du k-ème bulletin reçu. Si on applle par exemple X, Y, Z les trois candidats, $\Omega_n = \{X, Y, Z\}^3$, en particulier $\#\Omega_n = 3^n$.

2. *Dans toute la suite on notera A_k (resp. B_k, C_k) l'évènement : « à l'issue du dépouillement du k-ème bulletin, exactement un candidat (resp. deux candidats, trois candidats) est (resp. sont) élu(s) ».* On peut remarquer pour pour tout entier $k \geq 1$, ces évènements forment un système complet d'évènements de Ω_n, et que u_k, v_k, w_k sont les probabilités respectives de ces évènements.

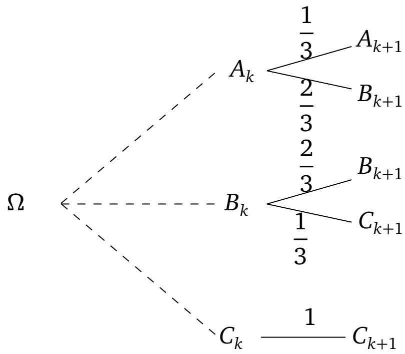
a) On reçoit un seul bulletin. Il est clair que les évènements B_1 et C_1 sont impossibles, donc $v_1 = w_1 = 0$. Comme on a un système complet d'évènements, $u_1 = 1$.

b) On peut construire l'arbre suivant :



La probabilité conditionnelle $P(A_2|A_1)$ vaut $1/3$ car les votes sont équiprobables et il y a trois candidats. Comme C_2 est impossible, on déduit finalement $u_2 = 1/3$, $v_2 = 2/3$, $w_2 = 0$.

c) La probabilité de A_{k+1} sachant B_k (ou C_k) est nulle car le nombre d'élus ne peut diminuer à la réception d'un bulletin. Sachant A_k, on est dans la même situation que sachant A_1. En outre, si C_k est réalisé, il est certain que C_{k+1} l'est aussi. Enfin, si B_k est réalisé, ou bien le $k+1$-ème bulletin reçu porte le nom de l'élu unique (ceci avec probabilité $1/3$) sinon, l'évènement C_{k+1} est réalisé. Le schéma est donc le suivant :



D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements A_k, B_k, C_k (on peut supposer $k \geq 3$ si on ne veut pas d'évènement de probabilité nulle) on a pour tout évènement E :

$$P(E) = P(A_k)P(E|A_k) + P(B_k)P(E|B_k) + P(C_k)P(E|C_k)$$

(rem : la relation $P(E \cap H) = P(H)P(E|H)$ reste vraie si H est un évènement de probabilité nulle en convenant d'une valeur quelconque pour la probabilité conditionnelle). En appliquant successivement cette formule pour $E = A_{k+1}$, puis B_{k+1}, et enfin C_{k+1}, il vient par lecture de l'arbre :

$$u_{k+1} = \frac{1}{3} u_k, \quad v_{k+1} = \frac{2}{3} u_k + \frac{2}{3} v_k, \quad w_{k+1} = \frac{1}{3} v_k + w_k. \tag{1}$$

d) Ces trois dernières relations se résument sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}, \quad \text{soit } U_{k+1} = MU_k, \quad \text{avec } M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La relation $U_k = M^{k-1} U_1$ découle d'une récurrence du type de celles vues en TD ou DM.

3. a) Récurrence du même type que celle vue en TD.

b) Comme $a_{k+1}-a_k = 2^{k+1}$ pour tout entier $k \geq 0$, en sommant ces relations de 0 à un entier k quelconque, on obtient par télescopage :

$$a_{k+1}-a_0 = 2+\cdots+2^{k+1},$$

comme $a_0=0$, et que $2+\cdots+2^{k+1} = 2(1+\cdots+2^k) = 2(2^{k+1}-1)/(2-1)$ par somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on trouve $a_k = 2^{k+1}-2$.

c) La relation définissant la suite c_k se réécrit en divisant membre à membre par 2^{k+1} :

$$\frac{c_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{c_k}{2^k} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

La suite (q_k) est donc une suite géométrique de raison $3/2$ et de premier terme $1/2$. Par sommation et télescopage analogue à 3b), on trouve :

$$\frac{c_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{c_0}{2^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{3}{2}-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1.$$

Comme $c_0=0$, on trouve $c_{k+1} = 3^{k+1}-2^{k+1}$ pour tout entier $k \geq 0$.

d) Comme $b_{k+1}-b_k = 2c_k$, par sommation et télescopage, on trouve, puisque $b_0=0$, que

$$b_{k+1}-b_0 = b_{k+1} = 2\sum_{j=0}^{k} c_j = 2\sum_{j=0}^{k} 3^j - 2\sum_{j=0}^{k} 2^j = 2\frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 2(2^{k+1}-1) = 3^{k+1}-2^{k+2}+1.$$

4. a) Comme $M = \frac{1}{3}A$, on déduit que pour tout entier k, $M^k = \frac{1}{3^k}A^k$. En particulier, pour $k=n-1$, on obtient

$$U_n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot A^{n-1}U_1.$$

Par 2a), on déduit que $U_n = 3^{1-n}K_1$ où K_1 est la première colonne de A^{n-1}. On a donc :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}}\begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^{n-1}} \\ \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ \frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^{n-1}} \\ \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{2^n-1}{3^{n-1}}. \end{pmatrix}$$

b) La suite (u_n) est géométrique. Comme sa raison $r=1/3$ vérifie $|r|<1$, la suite converge, sa limite est nulle. L'interprétation est que la probabilité qu'un seul candidat soit élu lorsque le nombre de bulletins augmente tend vers celle de l'évènement impossible, ce qui est intuitivement cohérent. En outre $w_n \sim_\infty 1$, donc la probabilité que les trois candidats soient élus lorsque le nombre de bulletins augmente tend vers celle de l'évènement certain. On déduit que probabilité qu'exactement deux candidats soient élus tend vers 0 avec le nombre de votes. Ces résultats sont en accord avec l'intuition.

c) L'évènement en question est l'évènement $\bar{A}_n$. Sa probabilité est supérieure à 99 % si et seulement si $1-u_n \geq 99/100$, soit $3^{n-1} \geq 100$. Comme $3^4 = 81 < 100$ et $3^5 > 100$ on voit que la relation $n-1=5$ donne le plus petit entier n convenable.