

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

- 1. a)** Programmer une fonction en Python `def liste_suite(n):`, qui prend en entrée un entier n et retourne en sortie la liste $[u_0, \dots, u_n]$

```

1  from __future__ import division
2  from math import sqrt
3
4  def liste_suite(n):
5
6      u = 1
7
8
9
10
11
12
13
14  #----fin

```

- b)** Conjecturer la limite de la suite (u_n) à l'aide de votre programme, vous devriez reconnaître une constante assez connue.
- 2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$.
- 3.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
- 4.** (classique) Dédurre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
- 5.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 6.** Soit (v_n) la suite définie :
- $$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n^2$$
- a)** Pour tout entier naturel n exprimer v_n en fonction de n .
- b)** En déduire la limite ℓ de la suite (u_n) .
- 7.** Donner un équivalent simple de $\ell - u_n$

Exercice 2

Soit (x_n) la suite définie par :

$$x_0 \in]0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2.$$

- 1.** Déterminer le sens de variations de la suite (x_n) .
- 2.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in]0, 1[$.
- 3.** En déduire la nature de la suite (x_n) et sa limite éventuelle.