■ Exercice 1.

On considère le polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ suivant :

$$P = 2X^7 - 6X^6 + 10X^5 - 14X^4 + 14X^3 - 10X^2 + 6X - 2$$

1. Un calcul élémentaire donne $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Et $P^{(3)}(1) \neq 0$ donc 1 est racine triple de P.

2. Un calcul tout aussi élémentaire donne $P(i) = 0$ donc i est racine de P.

3. Comme P est à coefficients réels, $-i = \bar{i}$ est aussi racine de P

Méthode 1. Par identification paresseuse : pour trois réels a, b, c convenables :

$$P = 2(X-1)^3(X-i)(X+i)(aX^2 + bX + c)$$

il est visible que $a = c = 1$. En calculant $P(-1)$ dans cette relation, on trouve :

$$-16|1+i|^2(2-b) = -64$$

soit $b = 0$. Finalement $P = 2(X-1)^3(X-i)(X+i)(X^2+1)$ et comme X^2+1 se factorise en $(X+i)(X-i)$ la factorisation de P est : $P = 2(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$

Méthode 2. On calcule la multiplicité de la racine i dans P. On voit qu'elle est double. Donc $-i$ est racine double aussi puisque P est à coefficients réels. On a trouvé 7 racines à P en les répétant avec leur multiplicité donc on a toutes les racines puisque P est de degré 7. Comme son coefficient dominant vaut 2 : la factorisation de P est : $P = 2(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$

■ Exercice 2.

1. Le polynôme $8X^2 - 8X + 1$ est un trinôme, en appliquant les formules du discriminant, on lui trouve deux racines qui sont $\xi_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\xi_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

2. Soit $P = 8X^4 - 8X^2 + 1$

a) Soit z dans $\mathbf{C}$. Alors $P(z) = 0 \iff \begin{cases} 8t^2 - 8t + 1 & = & 0 \\ t & = & z^2 \end{cases}$ D'après la question précédente, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} z^2 & = & t \\ t = \xi_1 & \text{ou} & t = \xi_2 \end{cases}$$

Comme ξ_1 et ξ_2 sont des réels positifs, le système équivaut à :

$$z = \pm\sqrt{\xi_1}, \quad \text{ou} \quad = \pm\sqrt{\xi_2}$$

b) Puisque P est de degré 4 et qu'on lui a trouvé 4 racines distinctes, on a toutes ses racines (et elles sont simples). Comme le coefficient dominant de P est 8 la factorisation de P est :

$$P = 8(X - \sqrt{\xi_1})(X + \sqrt{\xi_1})(X - \sqrt{\xi_2})(X + \sqrt{\xi_2})$$

3. a) Soit $\theta \in [0, \pi]$. D'après la formule de Moivre : $\cos(4\theta) = \mathfrak{Re}(u^4)$ où $u = \cos\theta + i\sin\theta$. On développe alors u^4 par la formule du binôme et on ne s'intéresse qu'aux termes réels :

$$\begin{aligned} u^4 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + i\,(\mathtt{un-reel-que-je-calcule-pas}) \end{aligned}$$

Comme $\cos(4\theta) = \mathfrak{Re}(u^4)$, puis en utilisant le fait que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on trouve :

$$\begin{aligned} \cos(4\theta) &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \end{aligned}$$

b) On a $x_0, \cos(\frac{\pi}{8}), x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$, $x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$. Ce sont des nombres dans $[0,\pi]$. Or la relation de la question précédnete dit :

$$P(\cos\theta) = \cos(4\theta) \quad \forall\theta \in [0,\pi].$$

En y faisant $\theta = \pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8$ on obtient : $P(x_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$, donc les x_k sont racines de P.

c) Les x_k sont quatre réels distincts et sont racines de P. Ils sont donc les mêmes nombres que les $\pm\sqrt{\xi_i}$ calculés en question **1**.
Par stricte décroissance de la fonction cos sur $[0,\pi]$, on a :

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4.$$

Ainsi x_1 est le plus grand des nombres $\pm\sqrt{\xi_i}$ d'où : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = +\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

■ Exercice 3.

1. Très simple avec la syntaxe Python :

```python
def complete(L,n):
  """ n : entier
      L : liste de flottants longueur au plus n
      ajoute des 0 à liste L jusqu'à obtenir une liste
      de longueur n+1
      P.ex complete([1,1],3) renvoie [1,1,0,0]
  """
   r =len(L)
   return L +[0]*(n+1-r)
```

2. a) Le degré est $m+n$ dans ce cas d'après le cours.

b)

```python
def fois(P,Q):

    n = len(P)
    m =len(Q)
    r=m+n-2

    PP =complete(P,r) # je veux voir mes deux polynomes
    QQ= complete(Q,r) # commme des élements de IR_{m+n}[X]

    sortie = complete([0],r) # j'initialise le résultat
                             # au polynôme nul.

    for i in range(r+1):     # je calcule les coeffs un par un

        for k in range(i+1):          # formule du coeff
            sortie[i]+=PP[k]*QQ[i-k]  # général de PQ

    return sortie
```