■ Exercice 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel quelconque. Le système linéaire (S_λ) a pour forme réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 3 & +3 & 0 \\ -4 & +6-\lambda & +4 & 0 \\ -2 & +3 & +5z & 0 \end{array}\right)$$

On échelonne ce système pour en déterminer le rang :

$$(S_\lambda) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 5-\lambda & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 4 & 0 \\ -\lambda & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \end{array} \quad (1)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 3 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 3\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) & 3-\dfrac{\lambda(5-\lambda)}{2}3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \dfrac{\lambda}{2}\ell_1 \end{array} \quad (2)$$

Le système étant carré, il est de Cramer si et seulement si son rang est égal à 3, c'est-à-dire, puisque sa première ligne est non nulle, si et seulement si le sous-système 2×2 encadré d'inconnues (y, z) est de rang 2. Comme ce dernier système est lui -même carré, il est de rang 2 si et seulement si il est de Cramer, c'est-à-dire si et seulement si son déterminant $\Delta(\lambda)$ est non nul. Ainsi par cas contraire :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma &\iff \Delta(\lambda) = 0 \\
&\iff 2\Delta(\lambda) = 0 \\
&\iff -\lambda(6-\lambda(5-\lambda)) + 3(6-2\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \text{en calculant le déterminant} \\
&\iff -\lambda(6-5\lambda+\lambda^2) + 3(6-2\lambda)(2-\lambda) = 0 \\
&\iff -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 3(6-2\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \text{en factorisant le premier trinôme} \\
&\iff -(\lambda-2)(\lambda-3) + 6(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \text{en factorisant le second terme par 2} \\
&\iff -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0 \quad \text{en factorisant par}(\lambda-2)(\lambda-3) \\
&\iff \lambda \in \{2, 3, 6\}
\end{aligned}$$

Finalement $\sigma = \{2, 3, 6\}$

2. On repart de la forme (2) et on traite les trois cas :

cas 1. $\lambda = 2$. Dans ce cas le système est échelonné compatible de rang 2 et a comme variable libre z. En remontant, on trouve que l'ensemble des solutions est :
$\Sigma_2 = \{z(0, -1, 1) \quad z \in \mathbf{R}\}$.

cas 2. $\lambda = 3$. En poursuivant la procédure, on constate en normalisant les 3 lignes puis en effectuant $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1$ et $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1$ que :

$$(S_3) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est quasi-échelonné de rang 2 et admet z comme variable libre. En remontant on voit que $y = 0$ et $x = y + z = z$ et l'ensemble des solutions est :
$\Sigma_3 = \{z(1, 0, 1) \quad z \in \mathbf{R}\}$.

cas 2. $\lambda = 6$. Faites le calcul, vous verrez que l'ensemble des solutions est :
$\Sigma_6 = \{z(1, 1, -1) \quad z \in \mathbf{R}\}$.

3. Puisque le système est de Cramer et homogène dans le cas $\lambda \notin \sigma$, on en déduit que la solution unique est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est $\Sigma = \{(0, 0, 0)\}$.

■ Exercice 2.

1. Ici $u_0 = 2^p$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, ceci tant que $u_n \neq 1$. Donc sur les premiers termes, la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme 2^p : $u_n = \frac{2^p}{2^n} = 2^{p-n}$. Le premier entier n pour lequel $u_n = 1$ est donc $n = p$. Autrement dit, la durée du vol 2^p est p.

2. Voici le script :

```python
def premier_vol(d):
"""
fonction qui calcule le premier vol dont la durée est d
"""
vol = 1
while duree_du_vol(vol) != d:
    vol += 1
return vol
```

3. En exécutant la fonction :

```
console
In[1]: premier_vol(132)
Out[1]:  1217
```

Le vol 1217 est donc le premier vol dont la durée est 132.