

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $n > 0$ et on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice unité est notée I .

Préambule

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *nilpotente* si et seulement si il existe un entier naturel *non nul* r tel que $M^r = 0$.
2. On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants mais en signalant leur utilisation :
 - (R1) Si deux matrices U et V commutent alors :
 - a) U^k et V^ℓ commutent pour tous entiers naturels ℓ et k .
 - b) U commute avec $\alpha I + \beta V$ pour tous réels α, β .
 - c) U commute avec $\alpha I + \beta U$.
 - (R2) Si U et V commutent et V est inversible, alors U et V^{-1} commutent.

Dans le vif du sujet

1. Les résultats de cette question pourront servir par la suite
 - a) Soit U et V deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent. Prouver que :

$$(U + V)(U - V) = U^2 - V^2.$$
 - b) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et r un entier tels que $M^r = 0$.
 - i) Développer $(I - M) \times \sum_{k=0}^{r-1} M^k$.
 - ii) En déduire que $I - M$ est inversible et donner son inverse.
 - iii) Soit N une matrice telle que N^2 est inversible. Montrer que N est inversible.
2. On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et un entier r non nul tels que

$$[A(A - I)]^r = 0.$$

On définit une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par :

$$\begin{cases} A_0 &= A \\ \forall k \in \mathbf{N} & A_{k+1} = (A_k)^2 \times (2A_k - I)^{-1}. \end{cases}$$

- a) Il n'est pas clair que cette suite de matrices soit bien définie. Pourquoi ?
- b) Afin de justifier que cette suite est bien définie, on considère la propriété (P_k) suivante pour tout entier naturel k et qu'on veut prouver par récurrence :

{

- i) La matrice $2A_k - I$ est inversible.
 - ii) Il existe deux matrices C_k et D_k dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que :
 - A. $A_k - A = [A(A - I)]C_k$
 - B. $A_k(A_k - I) = [A(A - I)]^{2^k} \times D_k$ (attention c'est
 - C. $A_k A = A A_k, A C_k = C_k A, A D_k = D_k A$.

- i) Factoriser $M = I - (2A - I)^2$.
- ii) Dédire que M est nilpotente, puis que $I - M$ est inversible.
- iii) Dédire que $SA - I$ est vraie et initialiser la récurrence.
- c)** Soit $k \geq 0$ un entier tel que (P_k) est vraie. Montrer que
 - i) $2A_{k+1} - I = [I + 2A_k(A_k - I)] \times [2A_k - I]^{-1}$.
 - ii) $A_{k+1} - A = [(A_k - A)^2 - (A^2 - A)] \times [2A_k - I]^{-1}$.
 - iii) $A_{k+1}(A_{k+1} - I) = [A_k(A_k - I)(2A_k - I)^{-1}]^2$.
- d)** Dédire que (P_k) est vraie pour tout entier k .