

Exercice 1

(Intégrales de Wallis)

On pose $V_0 = 1$ et pour tout entier n naturel non nul, on définit :

$$V_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k}.$$

On pose aussi pour tout entier naturel n :

$$W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \, dt.$$

1. **a)** Vérifiez que pour tout entier $n \geq 1$: $(2n)V_{2n} = (2n-1)V_{2n-2}$.
- b)** Soit $n \geq 1$. On revient à la définition de V_{2n} . Exprimez le dénominateur de V_{2n} à l'aide $n!$ et de puissances de 2.
- c)** Par un habile coup de cuillère invisible sur le numérateur de V_{2n} , exprimez $\prod_{k=1}^n (2k-1)$ à l'aide de puissances de 2, de $n!$, et de $(2n)!$.
- d)** Vérifiez que $V_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.
2. Soit $n \geq 1$. En remarquant que $\sin^{2n} t = \sin^{2n-1} t \times \sin t$, montrez par une intégration par parties que :

$$2nW_{2n} = (2n-1)W_{2n-2}.$$
3. Calculer W_0 .
4. **a)** En déduire que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} V_{2n}$ pour tout entier n .
- b)** Donnez enfin une expression de W_{2n} utilisant 1.d) et 3).

Exercice 2

(Reprend ce que vous avez fait au dernier TP d'informatique).

On suppose que vous avez programmé une fonction `fact` telle que `fact(n)` calcule la valeur de $n!$.

Complétez les programmes suivants :

```

1  def pascal(N):
2      """fonction qui produit la chaîne de caractères égale à
3          la ligne N du triangle de Pascal.
4          Par exemple : pascal(3) renvoie la chaîne : '1 3 3 1'
5          """
6
7
8
9

```

```
10
11
12
13
14
15
16 # Fin

1 def triangle_pascal(N):
2     """fonction qui affiche les lignes du triangle de Pascal jusqu'à
3     la ligne N. par exemple, triangle_pascal(3) affiche 'a l'écran :
4     1
5     1 1
6     1 2 1
7     1 3 3 1 """
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17 #fin
```

En exécutant votre script indiquez ci-dessous ce que vaut le 8ème coefficient de la ligne 32 du triangle de Pascal :

```
In[1]: triangle_pascal(32)
Out[1]: ### affiche un gros truc
```

Indiquez ici la valeur du coefficient demandé :

```
>>>
```