Vous pouvez vous contenter de reporter sur votre copie la référence [q$_j$] *de la question que vous traitez.*

Les raisonnements combinatoires vagues ou approximatifs ne seront pas pris en compte.

Problème

Dans tout le problème, les matrices introduites sont considérées à coefficients dans **R**.

Partie 1

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I$.

On pourra utiliser le résultat général suivant sans preuve : pour tout entier naturel n et toute famille de scalaires ou de matrices $(u_k)_{0\le k\le n}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0\leqslant 2j\leqslant n} u_{2j} + \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant n} u_{2j+1}.$$

La première somme contient les termes de la famille d'indice pair et la seconde ceux d'indice impair. Ce résultat dit simplement si n est par exemple impair :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \left[u_0 + u_2 + \cdots + \ldots + u_{n-1}\right] + \left[u_1 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_n\right]$$

[q$_1$] **1. a)** Calculer $A^3 - 3A^2 + A$.

[q$_2$] **b)** En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de I, A, et A^2.

2. Soit α un réel non nul et pour tout entier naturel n :

$$X_n(\alpha) = (1+\alpha)^n, \quad Y_n(\alpha) = (1-\alpha)^n \quad P_n(\alpha) = \sum_{0\leqslant 2j\leqslant n} \binom{n}{2j}\alpha^{2j} \quad \text{et} \quad I_n(\alpha) = \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant n} \binom{n}{2j+1}\alpha^{2j+1}.$$

[q$_3$] **a)** Trouver une relation simple entre $X_n(\alpha), P_n(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$.

[q$_4$] **b)** De même trouver une relation simple entre $Y_n(\alpha), P_n(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$.

[q$_5$] **c)** En déduire les valeurs de $P_n(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$ en fonction de $X_n(\alpha), Y_n(\alpha)$.

[q$_6$] **3. a)** Calculer N^2, N^3, puis donner une relation simple entre N et N^3.

[q$_7$] **b)** En déduire une relation toute aussi simple entre N^2 et N^4.

[q$_8$] **c)** Exprimer alors :

- $*$ la matrice N^{2j+1} en fonction de j et de N pour tout entier non nul j.
- $*$ la matrice N^{2j} en fonction N^2 et de j pour tout entier $j > 1$.

(on ne demande pas de preuve, mais il est fortement conseillé de contrôler la validité de ses formules sur des petites valeurs de j !)

[q9] **d)** Les relations obtenues sont-elles valables pour $j=0$? $j=1$?

[q10] **4.** Montrer à l'aide de la formule du binôme, que pour tout entier naturel n :

$$A^n = I + \frac{I_n(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}N + \left[P_n(\sqrt{2})-1\right]N^2.$$

Partie 2

On rappelle que la notation $p \in [[1,p]]$ désigne pour tout entier naturel p l'ensemble $\{1,2,\ldots,p\}$. On considère un alphabet de trois lettres $\mathscr{A} = \{A,B,C\}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note Ω_n l'ensemble des mots de n lettres écrits dans l'alphabet $\mathscr{A}$.

Les résultats de cette partie sont indépendants du reste du problème

1. Soit n un entier naturel non nul.

[q11] **a)** Déterminer le cardinal de Ω_n.

[q12] **b)** Déterminer le nombre de mots de Ω_n écrits avec au moins un A.

[q13] **c)** Déterminer le nombre de mots de Ω_n écrits avec au plus deux lettres.

2. Soit $p \in [[1,n]]$.

* On note E l'ensemble des mots de Ω_n comportant exactement p fois la lettre C.
* Pour $k \in [[1,n]]$, on note E_k l'ensemble des mots de E dont le premier C arrive en position k.

[q14] **a)** Calculer $\#E$.

[q15] **b)** Déterminer l'ensemble K des valeurs de k pour lesquelles $E_k \neq \varnothing$.

[q16] **c)** Soit $k \in K$. Montrer que $\#E_k = \binom{n-k}{p-1}2^{n-p}$.

[q17] **d)** Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n-k}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

Partie 3

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

* Δ_n l'ensemble des mots de Ω_n tels que les chaînes de caractères BC et CB ne figurent pas dans leur écriture. On pose $\delta_n = \#\Delta_n$.
* A_n (resp. B_n, C_n) l'ensemble des mots de Δ_n se finissant par la lettre A (resp. B, C).
* $a_n = \#A_n$ le cardinal de l'ensemble A_n (resp. $b_n = \#B_n$ le cardinal de l'ensemble B_n , $c_n = \#C_n$ le cardinal de l'ensemble C_n).
* U_n la matrice unicolonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

[q18] **1. a)** Justifier que pour tout entier naturel non nul n : $\delta_n = a_n + b_n + c_n$.

[q19] **b)** Donner en extension les ensembles A_1, B_1, C_1, et calculer U_1.

2. Soit $n \geq 2$ un entier.

[q20] **a)** En éliminant la dernière lettre d'un mot de A_n, montrer que : $a_n = \delta_{n-1}$.

[q21] **b)** Quelle est l'avant-dernière lettre d'un mot de B_n ? Donner alors une relation entre b_n, b_{n-1}, a_{n-1}.

[q22] **c)** De même, donner une relation entre c_n, c_{n-1}, et a_{n-1}.

[q23] **3. a)** En déduire une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ indépendante de n telle que :

$$\forall n \geq 2 \quad U_n = AU_{n-1}.$$

[q24] **b)** Exprimer pour tout entier naturel n non nul U_n en fonction de A, n et U_1.

[q25] **c)** Montrer que δ_n vaut la somme de tous les coefficients de A^{n-1}.