1. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $x \in \mathscr{D}_g \iff \frac{e^x}{x} - 1$ existe. Comme les fonctions exp et $x \mapsto x$ sont définies sur $\mathbf{R}$, cette dernière condition équivaut à $x \neq 0$ et donc $\mathscr{D}_g = \mathbf{R}^\star$.

   (b) On a à étudier les limites en 0 et en $+\infty$.
   - Si $x \to +\infty$: par croissances comparées et sommes de limites, $\lim_{+\infty} g$ existe et vaut $+\infty$.
   - Si $x \to 0^+$, on factorise par le terme principal :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}(e^x - x) \\ &= \frac{1}{x}(1 + o(1)) \quad x \to 0 \end{aligned}$$

   la dernière égalité étant vraie par continuité de l'exponentielle, et somme de limites
   Finalement par produit de limites : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ vaut $+\infty$.

   (c) Par opérations sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$ et par règles de calcul sur la dérivation :

$$\forall x \in \mathscr{D}_g \quad g'(x) = \frac{e^x \times 0 - e^x \times 1}{x^2} - 0 = \frac{e^x}{x^2} \times (x-1).$$

   (d) Comme il est clair que pour $x \in \mathscr{D}_g$, $\frac{e^x}{x^2} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-1)$. D'où le tableau ci-dessous, complété avec les limites calculées en **1.b)** :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$e-1$	↗	$+\infty$

2. (a) Comme $f = \ln \circ g$, le réel $f(x)$ existe si et seulement si $g(x)$ existe et $g(x) > 0$. En examinant le tableau de variations de g, et en notant que $e - 1 > 0$, on déduit que le réel $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}\pm^\star$.

   (b) Par compositions entre les limites de g et celles de la fonction logarithme,on déduit les limites de f.

   (c) Comme $f = \ln \circ g$, et que les fonctions ln et g sont dérivables sur leurs domaines, f est dérivable sur $\mathbf{R}\pm^\star$. Par règles de calculs sur la dérivée, et le résultat de **1c** :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{e^x}{x^2} \times (x-1)}{\frac{e^x}{x} - 1}.$$

   On obtient la formule annoncée en multipliant haut et bas par x^2.

   (d) Le signe de f' est celui de g'/g. Comme $g > 0$ sur $\mathscr{D}_f$, f et g ont les mêmes variations sur $\mathscr{D}_f$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln(e-1)$	↗	$+\infty$

3. Voici la courbe de f :