■ **Exercice 1.** (*Intégrales de Wallis*)

1. **a)** Soit $n \geq 1$: Comme $V_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} V_{2n-2}$, on a la relation demandée.

   b) On voit que le dénominateur de V_{2n} est $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$. D'après les règles de calcul sur le symbole $\prod$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k$. Le dernier produit n'est autre que $n!$ par définition.

   c) On introduit les entiers pairs dans $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ par un coup de cuillère invisible :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \times \prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k}.$$

   Dans la dernière expression, le numérateur vaut $(2n)!$ et le dénominateur est encore, comme vu en **1.b)**, égal à $2^n n!$. Finalement :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

   d) Soit $n \geq 1$. En mettant bout à bout les résultats de **1.b)** et **1.c)**

$$V_{2n} = \frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

   Or par définition des coefficients binomiaux :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n!)}{n!n!} = \frac{(2n!)}{(n!)^2}.$$

   D'où le résultat.

2. Soit $n \geq 1$. On pose $u(t) = \sin^{2n-1} t$ et $v(t) = -\cos t$ pour tout réel t dans $[0; \pi/2]$. Ces fonctions sont de classe C^1 et puisque $W_{2n} = \int_0^{\pi/2} uv'(t)\mathrm{d}t$, une intégration par parties donne :

$$W_{2n} = [-\cos t \sin^{2n-1} t]_0^{\pi/2} + (2n-1)\int_0^{\pi 2} \sin^{2n-2} t \cos^2 t \mathrm{d}t.$$

   Le terme entre crohets est nul car $n > 0$. En utilisant ensuite le fait que $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ et encore par linéarité de l'intégrale :

$$W_{2n} = (2n-1)[W_{2n-2} - W_{2n}].$$

   C'est bien la relation demandée.

3. Par définition $W_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$

4. **a)** Les suites (W_{2n}) et (V_{2n}) vérifient la même relation de récurrence, mais diffèrent simplement sur leur terme initial. Précisément : $W_0 = \dfrac{\pi}{2} V_0$. Si ensuite on suppose que pour un entier n fixé : $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} V_{2n}$, alors, en multipliant cette relation par $(2n+1)$ membre à membre, on obtient :

$$(2n+1)W_{2n} = \frac{\pi}{2}(2n+1)V_{2n}$$

c'est-à-dire d'après les questions **1.a)** et **2)** :

$$W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} V_{2n+2} : \quad \text{la relation est alors vraie au rang suivant.}$$

On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier n : $W_{2n} = \frac{\pi}{2} V_{2n}$.

b) En utlisant **1.d)** et **3)**, on arrive au fait que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{\pi}{2}$$

■ Exercice 2.

```python
    # -*- coding: utf-8 -*-
"""
Correction exercice 2 DM6
"""
def fact(n): # non demandé mais utilisé dans la suite
    """
    fonction qui calcule la factorielle de n
    """
    f = 1
    for j in range(1,n+1):
        f = f * j
    return f
def pascal(N):
    """fonction qui produit  la chaîne de caractères égale à
    la ligne N du triangle de Pascal.
    Par exemple : pascal(3) renvoie la chaîne : '1 3 3 1'
    """
    ligne=''
    for k in range(0,N+1):
        k_parmi_n = fact(N)/(fact(k)*fact(N-k))
        ligne = ligne +' '+str(k_parmi_n)
    return ligne
def triangle_pascal(N):
   """
   fonction qui affiche les  lignes du  triangle de Pascal jusqu'à  la ligne N
   par exemple, triangle_pascal(3) affiche `a l'écran :
    1
    1 1
    1 2 1
    1 3 3 1
    """

    for j in range(0,N+1):
        print pascal(j)
```

La valeur attendue est : 3365856