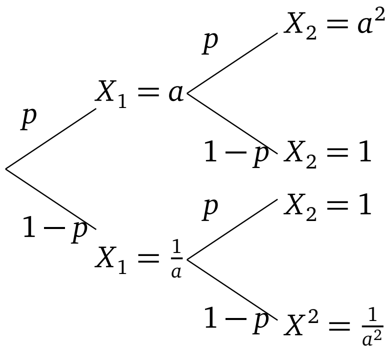
■ Exercice 1.

1. a)



On considère l'arbre ci-contre, dont les branches sont pondérées par les probabilités composées, si bien que la formule des probabilités composées consiste en la composition des poids le long d'un chemin. À chaque niveau d'arborescence, on a un système complet d'évènements, ce qui permet d'appliquer la formule des probabilités totales.

D'après les extrémités de l'arbre qui donnent les évènements élémentaires : $X_2(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{a^2}, 1, a^2\right\}$.
Par les règles de calcul sur les arbres énoncées précédemment, on a le tableau :

$k =$	$\dfrac{1}{a^2}$	1	a^2
$P(X_2 = k) =$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

Calculons $\mathbf{E}(X_2)$: par somme-produit $\mathbf{E}(X_2) = \left(\frac{(1-p)}{a}\right)^2 + 2p(1-p) + (ap)^2 = \left(\dfrac{1-p}{a} + ap\right)^2$ par identité remarquable. Calculons $\mathbf{V}(X_2)$. Par la formule de Koenig, $\mathbf{V}(X_2) = \mathbf{E}(X_2^2) - \mathbf{E}(X_2)^2$. On note $q = 1-p$ et on calcule :

$$\mathbf{V}(X_2) = \frac{q^2}{a^4} + 2pq + a^4p^2 - \left(\frac{q}{a} + ap\right)^2 = \left(\frac{q}{a^2} + a^2p\right)^2 - \left(\frac{q}{a} + ap\right)^4.$$

Encore par identités remarquables :

$$\mathbf{V}(X_2) = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 pq\left(\frac{q}{a^2}(1+q) + 2pq + a^2p(1+p)\right)$$

b) D'après la formule de Bayes : $P(X_1 = a | X_2 \geq 1) = \dfrac{P(X_2 \geq 1 | X\ 1 = a)}{P(X_2 = 1)} \times P(X_1 = a)$.

Or $P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = \dfrac{1}{a^2}) = 1 - q^2$ d'après la loi de X_2, et $P(X_1 = a) = p$. Enfin, il est clair que $P(X_2 \geq 1 | X_1 = a) = 1$, donc la probabilité cherchée est :

$$P(X_1 = a | X_2 \geq 1) = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2-p} \quad \text{car } p \neq 0$$

2. a) Si on interprète une hausse comme un succés, Z_n compte le nombre de succés lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p. Ainis Z_n suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$, et d'après le cours $\mathbf{E}(Z_n) = np$ et $\mathbf{V}(Z_n) = npq$.

b) Puisque qu'à chaque période on observe soit une hausse, soit une baisse, le nombre de baisses observées sur n périodes est $n - Z_n$.

c) Comme il est clair que $X_n = v_0 a^{Xn}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-Z_n}$, on en déduit que : $X_n = a^{2Z_n - n}$, d'où :

$$(2Z_n - n) \times \ln a = \ln X_n \quad \text{soit} \quad Z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln X_n}{\ln a} + n\right)$$

d) Soit $n \geq 1$ fixé. Comme $X_n \geq a \iff \frac{1}{2}\left(\frac{\ln X_n}{\ln a}+n\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\ln a}{\ln a}+n\right)$ par croissance de $t \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\ln a}+n\right)$, on déduit que $X_n \geq a \iff Z_n \geq \frac{1}{2}(n+1)$. Ainsi $P(X_n \geq a) = P(Z_n \geq (n+1)/2)$. Or pour n impair, mettons $n = 2m+1$, on a l'égalité d'évènements suivante : $[Z_n \geq (n+1)/2] = [Z_n \geq m+1]$. Examinons la loi de Z_n :

$k=$	0	1	2	...	m	$m+1$	...	$n-1$	n
$2^n P(Z_n = k) =$	1	n		...	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	...	n	1

De plus, l'évènement $Z_n \geq m+1$ est $[Z_n = m+1] \sqcup [Z_n = m+1] \sqcup \cdots \sqcup [Z_n = n]$ et par additivité finie :

$$P(Z_n \geq m+1) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n},$$

mais par symétrie des coefficients binomiaux, il est visible (puisque la somme des probabilités du tableau fait 1) que cette somme vaut $1/2$, d'où $P(x_n \geq a) = 1/2$.

■ Exercice 2.

1. L'expérience consiste en un tirage simultané de n objets pris dans une population de N individus parmi lesquels M d'entre eux possèdent le caractère étudié, donc d'après le cours, X_N suit une loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, M, n)$.

2. a) Par définition de la loi hypergéométrique :

$$u_N = P(X_N = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Les termes u_ℓ sont strictement positifs donc on étudie le quotient :

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N+1}{n}} \frac{\binom{N+1-M}{k}}{\binom{N-M}{n-k}} \quad \text{après simplification par } \binom{M}{k}.$$

Or on peut remarquer que pour deux entiers $P \leq Q$: $\binom{Q+1}{P} = \frac{Q+1}{Q+1-P}\binom{Q}{P} = \frac{1}{1-\frac{P}{Q+1}}$, donc

après simplifications : $\dfrac{u_{N+1}}{u_N} = \dfrac{1-\frac{n}{N+1}}{1-\frac{n-k}{N+1-M}}$.

b) Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} u_{N+1}/u_N > 1 &\iff 1-\frac{n}{N+1} \geq 1-\frac{n-k}{N+1-M} \\ &\iff \frac{N+1}{n} > \frac{N+1-M}{n-k} \quad \text{par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbf{R}_+^\star \end{aligned}$$

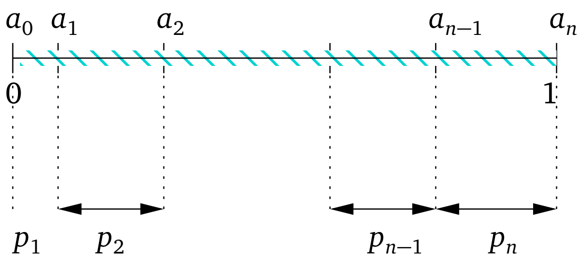
Ce qui équivaut à $N+1 < nM/k$ après simplifications.

3. D'après les équivalences précédentes, on conclut que la suite u_N est croissante jusqu'au plus grand entier N tel que $N < nM/k - 1$, puis décroissante dès que N dépasse le plus petit entier supérieur ou égal à $nM/k - 1$, c'est à dire $\left\lceil \frac{nM}{k} - 1 \right\rceil$.

4. Dans les lois des X_N, à k, n, M fixés, la valeur observée de probabilité la plus forte est donc celle pour laquelle u_N est maximal, c'est-à-dire (à l'unité près) : $N = \left\lceil \frac{nM}{k} - 1 \right\rceil$

■ **Exercice 3.**

1. Voici le dessin ainsi que des points tirés au hasard par `rand()` :



Comme les flottants sont tirés de façon équiprobable par `rand()`, le nuage de point est réparti de façon uniforme sur l'intervalle $[0;1[$. Ainsi, en notant $S_j = [a_{j-1}, a_j[$, en moyenne, une proportion p_i de ces flottants se trouve dans S_j pour tout j.

2. On décrète donc d'après le constat précédent que la fonction `simuvar` renvoie la valeur k_j si et seulement si le flottant tiré par `rand` se trouve dans S_j. Ce qui donne le programme suivant :

```python
def simuvar(K,P):
    """  K,P : deux listes de flottants de même longueur.
         Simule le comportement d'une VAR d'espace image K
         et de probas associées P. La fonction retourne en
         sortie le flottant K[j] avec proba P[j]
    """
    t = rand()
    a = 0
    for j in range(len(K)):
        a += P[j]
        if t < a:
            return K[j]
# -- fin
```

On peut vérifier que la fonction `simuvar` fait bien le travail. Pour cela, j'ai pris ensuite une variable aléatoire X bidon de loi suivante :

$k =$	1	2	3
$P(X_2 = k) =$	1 /2	1/6	1/3

J'ai ensuite appelé 1000 fois la fonction `simuvar` et dessiné l'histogramme des fréquences observées des valeurs $1, 2, 3$ sur ces 1000 appels. Si la fonction `simuvar` est correctement définie, l'histogramme devrait ressembler au peigne de X. Dans la console on obtient ceci pour les fréquences observées des valeurs 1,2,3 :

```
console
In[1]: frequences
Out[1]:  [0.503, 0.343, 0.172]
```

Voici le programme qui a donné ces valeurs, et l' histogramme plus bas :

```python
# construction d'une VAR X  bidon pour vérification
K = [1,2,3]
P = [1/2, 1/3,1/6]

N = 1000          # 1000 observations de X
```

```python
n1,n2,n3 = 0,0,0      # initialisation des compteurs
nb_obs=[n1,n2,n3]# liste du nombre d'observations
for j in range(N):
    n1+= simuvar(K,P)==1 # cet incrément vaut 1 ssi
                         # simuvar renvoie un 1
    n2+= simuvar(K,P)==2 # cet incrément vaut 1 ssi
                         # simuvar renvoie un 2
    n3+= simuvar(K,P)==3 # cet incrément vaut 1 ssi
                         # simuvar renvoie un 3
frequences = [ n1/N, n2/N, n3/N]

# tracé du diagramme des fréquences observées
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
import matplotlib.pyplot as plt

xmin = 0
xmin = 4.5
ymin = 0
ymax = 1

dents = 0.05 # largeur des dents du peigne
x = [x -dents for x in K]  # il faut recentrer les dents
plt.bar(K,P, width=dents,label=r'loi de $X$',color='red', ec='red',alpha=
plt.bar(x,frequences,width=dents,label=u'fréquences',color='blue',ec='blu
plt.legend(loc='best')
```