

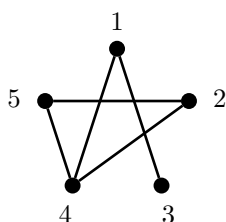
On appelle *graphe* G la donnée :

- d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$. Les éléments de E_n s'appellent alors dans ce contexte les *sommets* du graphe G .
- d'un sous-ensemble V de l'ensemble des 2-combinaisons de E_n . Les éléments de V sont appelés les *arêtes* du graphe. Toute arête $\{i, j\} \in V$ est alors notée $[i, j]$.

Soit $\ell \geq 1$ un entier et i et j deux sommets du graphe G . On appelle *chemin* de longueur ℓ allant de i à j dans G toute $\ell + 1$ -liste de sommets $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell+1})$ telle que :

- $\alpha_1 = i$ et $\alpha_{\ell+1} = j$.
- Pour tout entier $k \in \{1 \dots \ell\}$, la paire $\{\alpha_k, \alpha_{k+1}\}$ est une arête de G .

Si $\ell \geq 2$, un chemin allant de i à i de longueur ℓ dans G s'appelle un ℓ -cycle de G , et on peut remarquer qu'un chemin de longueur 1 n'est rien d'autre qu'une arête de G .



Sur cet exemple, le graphe G possède 5 sommets. L'ensemble de ses arêtes est

$V = \{[1, 4], [1, 3], [2, 5], [2, 4], [4, 5]\}$. Il y en a donc 5. La suite $(3, 1, 4, 5, 2)$ est un chemin dans G de longueur 4, et $(4, 5, 2, 4)$ est un 3-cycle de G .

Étant donné un graphe G à n sommets, d'ensemble des arêtes V , on appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice notée $A_G = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si et seulement si $[i, j]$ est une arête de G . Par exemple, la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est la matrice (symétrique)

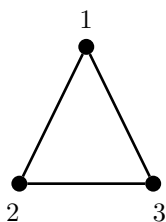
suivante : $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le but du problème est d'établir de décompter les cycles de longueur donnée dans un graphe par deux approches différentes.

On pourra utiliser les propriétés suivantes (à démontrer dans **III**) :

- [R1] 1. (Définition)** Pour toute matrice carrée M , on note $\text{Tr}(M)$ la somme de ses coefficients diagonaux (ce nombre s'appelle la *trace* de M).
- 2. (Invariance de la trace).** Si $(A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et P est inversible alors : $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.
- [R2]** Si A_G est la matrice d'adjacence d'un graphe G , et $k \geq 1$ un entier, $\text{Tr}(A_G^k)$ vaut le nombre de k -cycles du graphe G .

Partie I : Un graphe très simple



Pour comprendre sur un exemple très simple, on se propose de compter les k -cycles du graphe élémentaire G à trois sommets représenté ci-contre en utilisant **R2**.

On notera I la matrice unité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice d'adjacence A_G de ce graphe.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a)** Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1} .
- b)** Vérifier que $P^{-1}A_GP = \Delta$, où Δ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines du polynôme Q défini en **II 1.a)** répétées avec leur multiplicité.
- c)** Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $\Delta^k = P^{-1}A_G^kP$.
- d)** Par ailleurs, donner l'expression de Δ^k pour tout entier k naturel non nul.
- e)** En déduire que : $\text{Tr}(A_G^k) = \text{Tr}(\Delta^k)$.
- f)** En déduire la valeur du nombre de k -cycles dans le graphe G .

Partie II : un calcul direct.

Dans cette partie on souhaite calculer directement le nombre de k -cycles dans le graphe G à trois sommets de la partie **II**. Pour cela on note pour tous sommets i, j du graphe G et pour tout entier $k > 0$, $\omega_k^{i,j}$ le nombre de chemins de longueur k dans le graphe G allant de i à j . On souhaite donc calculer la valeur de $\omega_k^{1,1} + \omega_k^{2,2} + \omega_k^{3,3}$.

- 1. a)** Expliquer rapidement pourquoi $\omega_k^{1,1} = \omega_k^{2,2} = \omega_k^{3,3}$ et $\omega_k^{1,2} = \omega_k^{1,3} = \omega_k^{2,3} = \omega_k^{2,1} = \omega_k^{3,1} = \omega_k^{3,2}$.
- b)** En déduire que le nombre total de cycles de longueur k dans G vaut $3\omega_k^{1,1}$.
- c)** Calculer $\omega_1^{1,2}$ et $\omega_2^{1,2}$.
- 2. a)** Soit $k \geq 1$ un entier. Par un raisonnement combinatoire, en considérant les valeurs possibles de l'avant-dernier sommet d'un k -cycle de G allant de 1 à 1, trouver une relation entre $\omega_{k+1}^{1,1}, \omega_k^{1,2}, \omega_k^{1,3}$ et en déduire que $\omega_{k+1}^{1,1} = 2\omega_k^{1,2}$.
- b)** De même, établir une relation entre $\omega_k^{1,2}, \omega_{k-1}^{1,3}, \omega_{k-1}^{1,1}$ valable pour $k \geq 2$.
- c)** En déduire que la suite de terme général $\omega_k^{1,2}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \omega_{k+2}^{1,2} - \omega_{k+1}^{1,2} - 2\omega_k^{1,2} = 0$$

3. Donner la forme explicite de $\omega_k^{1,2}$ et retrouver le résultat de **I.2.f)**

Partie III : preuve des résultats matriciels

1. Soit G un graphe à n sommets de matrice d'adjacence A_G . Soit $\ell \in \mathbf{N}^*$ et notons $A_G^\ell = (a_{i,j}^{(\ell)})$. On veut montrer par récurrence sur ℓ que :

$\forall i, j \in \mathbf{E}_n^2 \quad a_{i,j}^{(\ell)}$ donne le nombre de chemins de longueur ℓ dans G reliant i à j .

 - a) Soit i, j deux sommets du graphe, et un chemin dans G de longueur $\ell + 1$ allant de i à j . Quelles valeurs peut prendre le sommet visité juste avant j sur ce chemin ?
 - b) On note ici $E^{(1)}[i, j]$ le nombre de chemins dans le graphe G de longueur $\ell + 1$ allant de i à j mais dont l'avant dernier sommet visité est 1. En distinguant deux cas, trouver une relation simple entre $\#E^{(1)}[i, j]$, $a_{i,1}^{(\ell)}$ et $a_{i,j}$.
 - c) En déduire la valeur de $\#E^{(k)}[i, j]$ pour $1 \leq k \leq n$.
 - d) Si on note $\mathcal{C}^{\ell+1}[i, j]$ l'ensemble des chemins de longueur $\ell + 1$ dans G allant de i à j , utiliser ce qui précède pour donner la valeur de $\#\mathcal{C}^{\ell+1}[i, j]$.
 - e) Conclure.
2. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
 - a) Calculer avec la formule du produit matriciel la valeur du coefficient diagonal général des matrices MN et NM .
 - b) En déduire que $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.
 - c) En déduire que si $(A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ et P est inversible alors : $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.
3. Interpréter en termes de chemins la valeur du nombre $\text{Tr}(A_G^k)$.