Vous pouvez vous contenter de reporter sur votre copie la référence [q$_j$] *de la question que vous traitez.*

Exercice 1

Soit P le polynôme défini par : $P = 2X^7 + 6X^6 + 8X^5 + 8X^4 + 6X^3 + 2X^2$.

[q$_1$] **1.** Trouver une racine évidente de P.

[q$_2$] **2.** Montrer que -1 est racine de P et déterminer sa multiplicité.

[q$_3$] **3.** Montrer que i est racine de P (on ne cherchera pas à déterminer sa multiplicité).

[q$_4$] **4.** En déduire la factorisation de P.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} & u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} = u_n + 1 + \dfrac{1}{(n+1)u_n} \end{cases}$$

[q$_5$] **1.** Montrer que pour tout entier naturel k : «Le réel u_k est bien défini et $u_k \geq k+1$».

[q$_6$] **2.** En déduire la nature de la suite (u_n) et donner sa limite le cas échéant.

[q$_7$] **3.** Étudier la monotonie de la suite (u_n). La suite (u_n) est-elle bornée ?

4. Dans cette question, on cherche un équivalent de u_n.

[q$_8$] **a)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = u_0 + n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}$$

[q$_9$] **b)** Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

[q$_{10}$] **c)** En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n \leq n + 3 - \frac{1}{n}$$

(*indication : utiliser aussi* **1.**)

[q11] **d)** Établir pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'encadrement :

$$n+1 \leq u_n \leq n+3.$$

[q12] **e)** En déduire que $u_n \underset{n\infty}{\sim} n$

5. Dans cette question on cherche un équivalent de l'erreur commise en remplaçant u_n par son équivalent. On considère la suite (ε_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \varepsilon_n = u_n - n$$

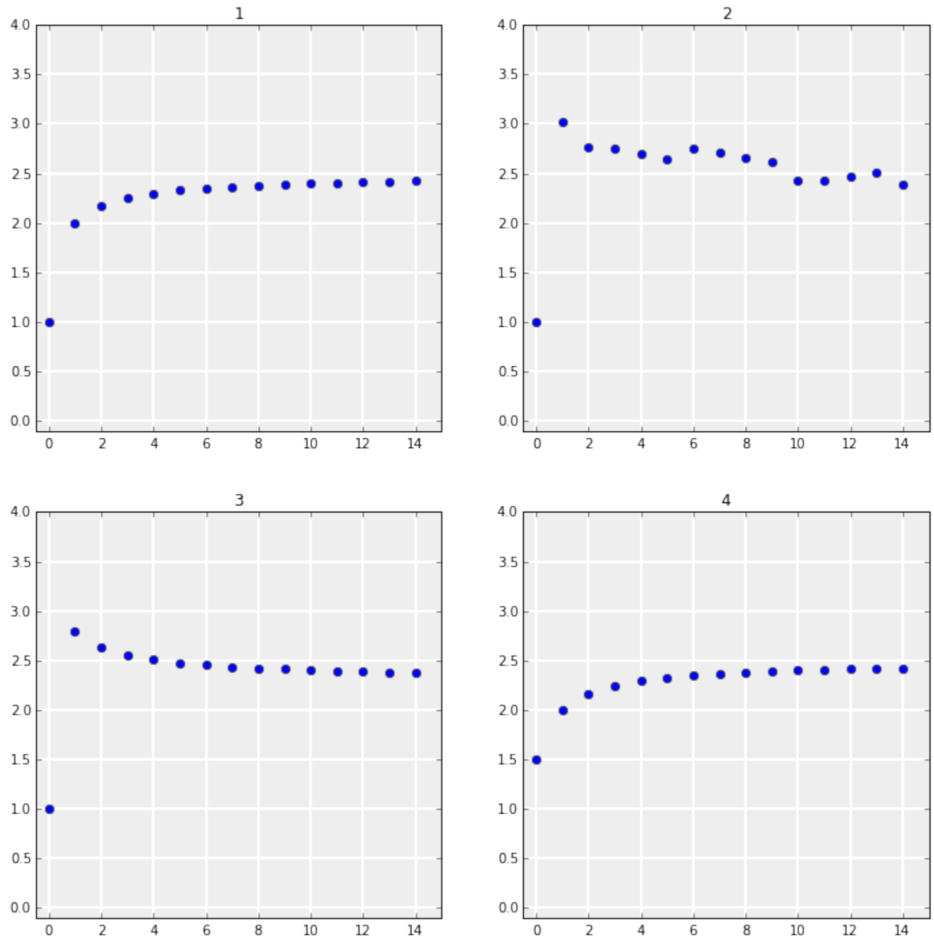
[q13] **a)** Étudier la monotonie de la suite (ε_n).

[q14] **b)** En déduire que (ε_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite M.

[q15] **6. a)** Écrire en Python le script d'une fonction `liste_suite(n)` qui prend en entrée un entier `n` et retourne en sortie la liste `[u0,u1,...,un]`

[q16] **b)** Écrire alors une fonction `erreur(n)` qui prend en entrée un entier `n` et retourne en sortie la liste $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{\mathtt{n}}]$

[q17] **c)** Parmi les quatre tracés suivants, lequel peut correspondre au tracé de ε_n en fonction de n ? Justifier.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 1 - x^2.$$

et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Partie 1

[q18] **1. a)** Déterminer le signe de $f(x) - x$. On vérifiera que l'équation $f(x) - x = 0$ admet deux solutions réelles distinctes que l'on calculera. Dans la suite on notera α et β ces deux solutions avec $\alpha < \beta$.

2. Dans cette question, on étudie le cas $u_0 = -2$.

[q19] **a)** Représenter sur la feuille annexe les premiers termes de la suite (u_n).

[q20] **b)** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant -2$.

[q21] **c)** Étudier la monotonie de la suite (u_n).

[q22] **d)** Conclure quant à la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie 2

Dans cette partie, on étudie le cas $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les suites (v_n) et (w_n) vérifient donc :

$$\begin{cases} v_0, w_0 \in \mathbf{R} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+1} = g(v_n) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = g(w_n) \end{cases}$$

où g est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g = f \circ f$.

[q23] **1.** Représenter sur la feuille annexe les premiers termes de la suite (u_n).
Formuler une conjecture quant à sa convergence.

[q24] **2. a)** Calculer la valeur de $g(x)$ pour tout réel x.

[q25] **b)** Montrer que : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ g(x) - x = -x(x-1)(f(x) - x)$.

[q26] **c)** En déduire le tableau de signe de $g(x) - x$.

[q27] **3. a)** On suppose que (v_n) converge vers un réel ℓ. Quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?

[q28] **b)** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ v_n \in [0, \beta]$.

[q29] **c)** Déterminer alors la monotonie de la suite (v_n).

[q30] **d)** En déduire la nature de la suite (v_n) et calculer sa limite éventuelle.

[q31] **4.** Formuler, sans démonstration, des résultats pour la suite (w_n) analogues à ceux de la question précédente.

[q32] **5.** Conclure quant à la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n).