La rédaction et la tenue de la copie sont prises en compte dans la notation. Vous pouvez vous contenter de reporter sur votre copie la référence [q_j] *de la question que vous traitez.*

Exercice 1

Soit $n > 0$ un entier naturel et

$$S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i-j}$$

[q_1] **1.** Calculer la somme double S.

[q_2] **2.** (*réponse sur la feuille annexe*) En partant de la définition de S, écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui affiche à la l'écran la valeur de S.

Exercice 2

On considère l'ensemble E des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0, u_1, u_2 & \text{trois réels donnés} \\ \forall n \in \mathbf{N}, & u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \quad (R). \end{cases}$$

1. Dans cette question, on considère la suite (u_n) de E vérifiant (R) et telle que :

$$u_0 = 4, u_1 = -5, u_2 = 13.$$

Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

[q_3] **a)** Calculer v_0.

[q_4] **b)** Utiliser (R) pour trouver une relation valable pour tout entier n liant v_{n+2}, v_{n+1} et v_n.

[q_5] **c)** Montrer par récurrence que la suite (v_n) est constante.

[q_6] **d)** En déduire que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.

[q_7] **e)** Exprimer u_n en fonction de n.

[q_8] **f)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) de E vérifiant (R) et telle que :

$$u_0 = 2, u_1 = -2, u_2 = 3.$$

Soit t un réel. On pose pour tout entier n : $w_n = u_n - t(-2)^n$.

[q_9] **a)** Trouver t tel que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$. Dans la suite, on conservera cette valeur pour t.

[q_{10}] **b)** Montrer alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.

[q_{11}] **c)** En déduire w_n en fonction de n pour tout entier naturel n, puis u_n en fonction de n.

[q_{12}] **d)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

[q13] **3.** (*réponse sur la feuille annexe*) Écrire une fonction `srl2(v,w,n)` qui prend en entrée deux réels `v`, `w`, un entier `n`, et retourne en sortie le terme w_n de la suite définie par $w_0 = $ `v`, $w_1 = $ `w`, et vérifiant la relation de récurrence de la question **2.b)** (on ne cherchera pas pour cela la forme explicite de w_n).

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les couples de fonctions (x, y) de la variable réelle t, définies et deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$, et vérifiant les équations différentielles suivantes :

$$(S) \quad \begin{cases} x'' + x' + 4y' - x + 3y = 0 & (1) \\ y'' - 3y' + x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$(C) \quad \begin{cases} x(0) = -1, & x'(0) = -3, \\ y(0) = 2, & y'(0) = -2. \end{cases}$$

[q14] **1.** Soit (x, y) un couple solution de (S). On pose $u = x' + y'$.
Montrer que u est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad u' + u = 0.$$

Préciser la valeur de $u(0)$.

[q15] **2. a)** Déterminer u.

[q16] **b)** En déduire des réels α et β tels que : $\forall\, t \in \mathbf{R},\ x(t) + y(t) = \alpha e^{-t} + \beta$.

[q17] **c)** Montrer alors que y vérifie :

$$(F) \quad y'' - 3y' - 4y = 4 - 5e^{-t}.$$

[q18] **3. a)** Déterminer l'ensemble des solutions de (F) (on cherchera à superposer des solutions particulières dont l'une est de la forme ate^{-t} où a est un réel à déterminer).

[q19] **b)** Déterminer la solution y vérifiant de plus les conditions initiales (C).

[q20] **c)** En déduire l'unique couple solution (x, y) possible.

[q21] **4.** Synthèse : Vérifier que le couple (x, y) obtenu est bien solution de (S).

Exercice 4

[q22] Résoudre en fonction du paramètre réel m le système suivant d'inconnues réelles x, y :

$$(S_m) \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases}$$

Feuille à joindre à votre copie. Précisez sur votre copie si vous ne la rendez pas

```
  NOM : ....................................

#==============================
# Question de l'exercice 1 [q2]
#==============================
# On suppose que la fonction binom(k,n) est déjà définie et calcule
# la valeur du coefficient binomial << k parmi n >>.
# Par exemple binom(2,3) retourne 3.














#================================
# Question de l'exercice 2. [q13]
#================================
def srl2(v,w,n):
    """ fonction qui prend deux réels v,w  et un entier n
    et calcule le terme w_n de la suite définie par :
    w_0 = v
    w_1 = w
    et w_{n+2} = 2w_{n+1} -w_{n}
    """

















# fin
```