On appelle *graphe* G la donnée :

— d'un entier $n \in \mathbf{N}^\star$, et de l'ensemble $\mathbf{E}_n = \{1, \ldots, n\}$. Les éléments de $\mathbf{E}_n$ s'appellent alors dans ce contexte les *sommets* du graphe G.

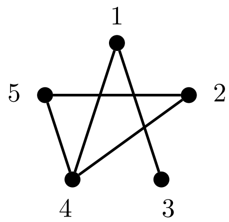
— d'un sous-ensemble V de l'ensemble des 2-combinaisons de $\mathbf{E}_n$. Les éléments de V sont appelés les *arêtes* du graphe. Toute arête $\{i, j\} \in V$ est alors notée $[i, j]$.

Soit $\ell \geq 1$ un entier et i et j deux sommets du graphe G. On appelle *chemin* de longueur ℓ allant de i à j dans G toute $\ell + 1$-liste de sommets $c = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell+1})$ telle que :

— $\alpha_1 = i$ et $\alpha_{\ell+1} = j$.

— Pour tout entier $k \in \{1 \ldots \ell\}$, la paire $\{\alpha_k, \alpha_{k+1}\}$ est une arête de G.

Si $\ell \geq 2$, un chemin allant de i à i de longueur ℓ dans G s'appelle un ℓ-cycle de G, et on peut remarquer qu'un chemin de longeur 1 n'est rien d'autre qu'une arête de G.



Sur cet exemple, le graphe G possède 5 sommets. L'ensemble de ses arêtes est $V = \{[1,4], [1,3], [2,5], [2,4], [4,5]\}$. Il y en a donc 5. La suite $(3, 1, 4, 5, 2)$ est un chemin dans G de longueur 4, et $(4, 5, 2, 4)$ est un 3-cycle de G.

Étant donné un graphe G à n sommets, d'ensemble des arêtes V, on appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice notée $A_G = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si et seulement si $[i, j]$ est une arête de G. Par exemple, la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est la matrice (symétrique) suivante :

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but du problème est d'établir de décompter les cycles de longueur donnée dans un graphe par deux approches différentes.

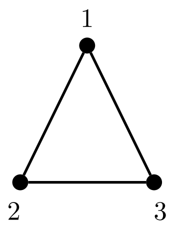
On pourra utiliser les propriétés suivantes (à démontrer dans **III**) :

[R1] **1.** (*Définition*) Pour toute matrice carrée M, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme de ses coefficients diagonaux (ce nombre s'appelle la *trace* de M).

2. (*Invariance de la trace*). Si $(A, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$ et P est inversible alors : $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.

[R2] Si A_G est la matrice d'adjacence d'un graphe G, et $k \geq 1$ un entier, $\mathrm{Tr}(A_G^k)$ vaut le nombre de k-cylces du graphe G.

Partie I : Un graphe très simple



Pour comprendre sur un exemple très simple, on se propose de compter les k-cycles du graphe élémentaire G à trois sommets représenté ci-contre en utilisant **R2**.

On notera I la matrice unité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice d'adjacence A_G de ce graphe.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

b) Vérifier que $P^{-1}A_G P = \Delta$, où Δ est une matrice diagonale qu'on précisera.

c) Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $\Delta^k = P^{-1}A_G^k P$.

d) Par ailleurs, donner l'expression de Δ^k pour tout entier k naturel non nul.

e) En déduire que : $\mathrm{Tr}(A_G^k) = \mathrm{Tr}\,(\Delta^k)$.

f) En déduire la valeur du nombre de k-cycles dans le graphe G.

Partie II : un calcul direct.

Dans cette partie on souhaite calculer directement le nombre de k-cycles dans le graphe G à trois sommets de la partie **II**. Pour cela on note pour tous sommets i, j du graphe G et pour tout entier $k > 0$, $\omega_k^{i,j}$ le nombre de chemins de longueur k dans le graphe G allant de i à j. On souhaite donc calculer la valeur de $\omega_k^{1,1} + \omega_k^{2,2} + \omega_k^{3,3}$.

1. a) Expliquer rapidement pourquoi $\omega_k^{1,1} = \omega_k^{2,2} = \omega_k^{3,3}$ et $\omega_k^{1,2} = \omega_k^{1,3} = \omega_k^{2,3} = \omega_k^{2,1} = \omega_k^{3,1} = \omega_k^{3,2}$

b) En déduire que le nombre total de cycles de longueur k dans G vaut $3\omega_k^{1,1}$.

c) Calculer $\omega_1^{1,2}$ et $\omega_2^{1,2}$.

2. a) Soit $k \geq 1$ un entier. Par un raisonnement combinatoire, en considérant les valeurs possibles de l'avant-dernier sommet d'un k-cycle de G allant de 1 à 1, trouver une relation entre $\omega_{k+1}^{1,1}, \omega_k^{1,2}, \omega_k^{1,3}$ et en déduire que $\omega_{k+1}^{1,1} = 2\omega_k^{1,2}$

b) De même, établir une relation entre $\omega_k^{1,2}, \omega_{k-1}^{1,3}, \omega_{k-1}^{1,1}$ valable pour $k \geq 2$.

c) En déduire que la suite de terme général $\omega_k^{1,2}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star \quad \omega_{k+2}^{1,2} - \omega_{k+1}^{1,2} - 2\omega_k^{1,2} = 0$$

3. Donner la forme explciite de $\omega_k^{1,2}$ et retrouver le résultat de **I.2.f)**

Partie III : preuve des résultats matriciels

1. Soit G un graphe à n sommets de matrice d'adjacence A_G. Soit $\ell \in \mathbf{N}^\star$ et notons $A_G^\ell = \left(a_{i,j}^{(\ell)}\right)$. On veut montrer par récurrence sur ℓ que :

$$\forall i, j \in {\mathbf{E}_n}^2 \quad a_{i,j}^{(\ell)} \text{ donne le nombre de chemins de longueur } \ell \text{ dans } G \text{ reliant } i \text{ à } j.$$

On fixe donc un entier ℓ et on suppose que $a_{i,j}^{(\ell)}$ compte le nombre de chemins de longueur ℓ allant de i à j, et ce, pour i, j quelconques dans $\mathbf{E}_n$.

a) Soit i, j deux sommets du graphe, et un chemin dans G de longueur $\ell + 1$ allant de i à j. Quelles valeurs peut prendre le sommet visité juste avant j sur ce chemin ?

b) On note ici $E^{(1)}[i, j]$ le nombre de chemins dans le graphe G de longueur $\ell + 1$ allant de i à j mais dont l'avant dernier sommet visité est 1. En distinguant deux cas, trouver une relation simple entre $\#E^{(1)}[i, j]$, $a_{i,1}^{(\ell)}$ et $a_{1,j}$.

c) En déduire la valeur de $\#E^{(k)}[i, j]$ pour $1 \leq k \leq n$.

d) Si on note $\mathscr{C}^{l+1}[i, j]$ l'ensemble des chemins de longueur $\ell + 1$ dans G allant de i à j, utiliser ce qui précède pour donner la valeur de $\#\mathscr{C}^{l+1}[i, j]$.

e) Conclure.

2. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et $N = (n_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$,

a) Calculer avec la formule du produit matriciel la valeur du coefficient diagonal général des matrices MN et NM.

b) En déduire que $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.

c) En déduire que si $(A, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$ et P est inversible alors : $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.

3. Interpréter en termes de chemins la valeur du nombre $\text{Tr}(A_G^k)$.