Partie I

1. Comme tout sommet est connecté aux deux autres, on a

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a) Comme on nous demande de calculer P^{-1}, on commence par faire un pivot partiel sur :

$$(P|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Par pivot partiel, vous vérifiez que le bloc de gauche est de rang 3, donc P est inversible. En finissant par pivot total, vous trouvez que $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Surtout, n'oubliez pas que pour calculer P^{-1} par pivot total, vous *devez* partir de $(P|I)$ depuis le début pour les calculs (et non pas introduire le bloc I après le pivot partiel !).

b) En posant le produit matriciel $\Delta = P^{-1}A_G P = \text{diag}(2, -1, -1)$.

c) Par récurrence sur k. C est vrai au rang $k = 1$ par la question précédente. Ensuite, si $\Delta^k = P^{-1}A_G^k P$, alors $\Delta^k \times \Delta = \Delta^{k+1} = (P^{-1}A_G^k P)(P^{-1}A_G P)$. Mais par associativité $(P^{-1}A_G^k \underbrace{P)(P^{-1}}A_G P) = P^{-1}A_G^k I A_G P = P^{-1}A_G^{k+1}P$. Cela montre que la propriété est héréditaire.

d) D'après le cours : $\Delta^k = \text{diag}\ (2^k, (-1)^k, (-1)^k)$.

e) Par**2.c)** on a donc $\text{Tr}(\Delta^k) = \text{Tr}(P^{-1}A_G^k P) = \text{Tr}\ (A_G^k)$ par **I.2.b)**

f) Par **I.3.**, **II. 2.e)** et **II.2.d)** on déduit que le nombre de k-cycles de G vaut la somme des coefficients diagonaux de Δ^k : $2^k + 2 \times (-1)^k$.

Partie II

1. a) Dans le triangle, les trois sommets jouent le même rôle (ou dit autrement : le graphe est invariant par permutation des sommets).

b) Clair : ce nombre de cycles vaut $\omega_k^{1,1} + \omega_k^{2,2} + \omega_k^{3,3} = 3\omega_k^{1,1}$ par ce qui précède.

c) Il y a une seule arête allant de 1 vers 2, donc $\omega_1^{1,2} = 1$. Ensuite, en lisant la définition de chemin, on voit que le seul chemin de longueur 2 allant de 1 à 2 possible seraitt par définition $(1, 3, 2)$. Comme c'en est bien un, $\omega_2^{1,2} = 1$.

2. a) En examinant le dernier sommet visité avant 1 dans un $k+1$-cycle bouclant sur 1, on obtient un chemin de longueur k allant soit de 1 à 2 , soit de 1 à 3 et rien d'autre. Réciproquement, en partant de tels chemins et en se déplaçant ensuite vers 1,, ce qui est possible dans G car tous ses sommets sont connectés, on obtient un $k+1$-cycle bouclant sur 1. Ainsi $\omega_{k+1}^{1,1} = \omega_k^{1,2} + \omega_k^{1,3}$. Avec les relations de symétrie de **III.1.a)** : $\omega_{k+1}^{1,1} = 2\omega_k^{1,2}$

b) Même raisonnement par double inclusion : pour tout chemin allant de 1 à 2, le dernier sommet visité avant 2 est soit 1, soit 3. Ainsi : $\omega_k^{1,2} = \omega_{k-1}^{1,3} + \omega_{k-1}^{1,1}$. Ainsi $\omega_k^{1,2} = \omega_{k-1}^{1,2} + \omega_{k-1}^{1,1}$.

c) En réinjectant la relation de **2.a)** dans la dernière égalité on obtient pour $k \geq 3$: $\omega_k^{1,2} = \omega_{k-1}^{1,2} + 2\omega_{k-2}^{1,2}$. D'où en incrémentant la relation :

$$\forall k \geq 1 \quad \omega_{k+2}^{1,2} - \omega_{k+1}^{1,2} - 2\omega_k^{1,2} = 0$$

3. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à cette relation est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont 2 et -1 comme par hasard. D'après le cours, pour deux constantes bien ajustées α et β :

$$\forall k \geq 1 \quad \omega_k^{1,2} = \alpha 2^{k-1} + \beta(-1)^{k-1}.$$

On a calculé les deux permiers termes en **1.c)**, ce qui donne : $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases}$. Par somme $\alpha = 2/3$, puis : $\beta = 1/3$. Enfin, d'après **III. 1.b)** et **III2.a)**, le nombre de k cycles est : $3 \times \omega_k^{1,1} = 3 \times 2 \times \omega_{k-1}^{1,2}$ pour tout entier $k \geq 2$ (il est nul si $k = 1$). Donc le nombre total de $k-$cycles est, notamment en utilisant que $(-1)^{k-2} = (-1)^k$:

$$\forall k \geq 2 \quad 3 \times \omega_k^{1,1} = 6 \times \left(\frac{2}{3}2^{k-2} + \frac{1}{3}(-1)^{k-2}\right) = 2^k + 2(-1)^k.$$

On retrouve bien le résultat de **II.2f)**, et on peut observer que la relation reste vraie si on y fait $k = 1$ puisqu'il n'existe pas de k-cycles de longueur 1.

Partie III

1. a) *A priori*, sans indication supplémentaire, l'avant-dernier sommet visité vaut n'importe quel entier entre 1 et n.

b) Un chemin de $E^{(1)}[i,j]$ est la concaténation d'un chemin de longueur ℓ allant de i à 1 (et il y en a $a^{(\ell)_{i,1}}$) puis d'une arête allant de 1 à j. Il suit que l'on a de deux choses l'une :

i) Ou bien 1 et j sont connectés par une arrête (c-à-d $a_{1,j} = 1$) et donc le nombre de chemins de $E^{(1)}[i,j]$ est $a^{(\ell)_{i,1}}$ en supposant que $a^{(\ell)_{i,1}}$ donne le nombre de chemins de longuer ℓ dans le graphe liant i à j.

ii) Ou bien 1 et i ne sont connectés par une arrête (c-à-d $a_{1,j} = 0$), et donc le nombre de chemins de $E^{(1)}[i,j]$ est 0.

Dans les deux cas, il est vrai que $\#E^{(1)}[i,j] = a_{i,1}^{(\ell)} \times a_{1,j}$

c) Le même raisonnement précédent s'applique avec le sommet 1 remplacé par le sommet k donc : $\#E^{(k)}[i,j] = a_{i,k}^{(\ell)} \times a_{k,j}$

d) Il est clair que

$$\mathscr{C}^{\ell+1}[i,j] = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_{i,j}^{(k)}$$

puisque pour les chemins de longueur $\ell + 1$ allant de i à j, l'avant dernier sommet visité est 1, ou 2, ..., ou n et rien d'autre. Donc en passant aux cardinaux :

$$a_{i,j}^{(\ell+1)} = \sum_{k=1}^{n} \#E^{(k)}[i,j] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\ell)} \times a_{k,j}$$

e) Le dernier point prouve l'hérédité. Pour $\ell = 1$ il est clair que A_G donne le nombre d'arêtes allant de i vers j. On a donc complété la récurrence.

2. a) D'après le cours, le coefficient général de MN est $x_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}$ et le coefficient général de NM est $y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,j}$. Donc les coefficients diagonaux respectifs de ces matrices valent : $x_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i}$ et $y_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,i}$

b) On doit comparer $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} =$ et $\mathrm{Tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n} y_{i,i}$. Or en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(MN) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i} && \text{en permutant les sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i}m_{i,k} && \text{les scalaires commutent !} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{i,k}m_{k,i} && \text{les indices sont muets !} \\
&= \mathrm{Tr}(NM)
\end{aligned}$$