Exercice 1

On considère le polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ suivant :

$$P = 2X^7 - 6X^6 + 10X^5 - 14X^4 + 14X^3 - 10X^2 + 6X - 2$$

1. Vérifier que 1 est racine et donner sa multiplicité.

2. Vérifier que i est racine.

3. Factoriser P.

Exercice 2

1. Donner les racines du polynôme $8X^2 - 8X + 1$.

2. Soit $P = 8X^4 - 8X^2 + 1$

a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ (on pourra poser $t = z^2$).

b) Factoriser P.

3. Soit $\theta \in [0, \pi]$.

a) Anti-linéariser $\cos(4\theta)$.

b) On pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{8}\right)$ pour $k \in \{0, \ldots, 3]$. Vérfier que les x_k sont racines de P.

c) En déduire une expression par radicaux de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3

On note pour tout entier $n \geq 0$ $\mathbf{R_n[X]}$ l'ensemble de polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbf{R}$.

On souhaite écrire une fonction en Python permettant de calculer le produit de deux polynômes.

Pour cela, on représente un élément de $\mathbf{R}_n[X]$ polynôme comme une liste de $n+1$ flottants. Précisément, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on représente P par la liste `L=[a0, ..., an]`. Attention, a_n n'est pas nécessairement le coefficient dominant de P.

1. De même que pour les chaînes de caractères, l'opérateur `*` permet de répliquer une liste. Tester par exemple :

```
console
>>> [1,2]*6
```

Écrire une fonction `def complete(L,n):` qui prend entrée une liste de flottants de longueur au plus n, un entier n et qui retourne en sortie la liste `L` obtenue en lui annexant des suffisamment de `0` pour obtenir une liste de longueur $n+1$. Cette fonction permet ainsi de voir la liste (représentant le polynôme) `L` comme un élément de $\mathbf{R}_n[X]$. Par exemple `complete([1,2], 3)` retourne la liste `[1,2,0,0]` (voir l'aide-mémoire pour savoir comment ajouter un élément à une liste).

2. **a)** Si P et Q sont deux polynômes non nuls de degrés respectifs m et n, quel est le degré de PQ ?

b) Écrire une fonction `fois(P,Q)` qui prend en entrée deux listes P, Q représentant des polynômes mettons p, q, et qui retourne en sortie la liste correspondant au polynôme pq.
On pensera à utiliser la fonction `complete`.