Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme la fonction logarithme est définie sur $\mathbf{R}\ +^{\star}$, et la fonction racine sur $\mathbf{R}\ +$, l'existence du réel $f(x)$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} (1) & x^2 - 2x \geq 0 \\ (2) & x + \sqrt{x^2 - 2x} > 0 \end{cases}$$

Le trinôme $x^2 - 2x$ se factorise en $x(x-2)$, il est donc positif ou nul sur $\mathbf{R}_- \cup [2; +\infty[$. L'inéquation (2) est équivalente à $\sqrt{x^2 - 2x} > -x$. (2') On distingue alors 2 cas :

a) Si $x \leq 0$. Dans ce cas, les deux membres de (2') sont positifs, et comme la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, on peut passer aux carrés en préservant l'équivalence. D'où : $(2') \iff x^2 - 2x > x^2$, les solutions sont donc dans le cas **a)** : $x < 0$.

b) Si $x > 0$. Alors $-x < 0 \leq \sqrt{x^2 - 2x}$ donc (2) est vraie dans ce cas.

Finalement par intersection des solutions de (1) et (2), $D_f = \mathbf{R}_-^{\star} \cup [2; +\infty[$.

2. a) Si $x \to +\infty$, comme $x + \sqrt{x^2 - 2x} = x + |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \overset{x \geq 0}{=} x(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}) = x(1 + 1 + o(1))$, la dernière égalité étant vraie quand $x \to \infty$ par opérations sur les limites et continuité de la racine en 1. Puis par composition de limites, $\lim{+ +\infty} f$ existe et vaut $+\infty$.

b) Soit $x < 0$ un élément de D_f.

i) Soit $x < 0$. Par simple identité remarquable : $\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) = 2x$. Or $x < 0$, donc $x = -|x|$. Comme $x - \sqrt{x^2 - 2x} = -|x| - \sqrt{x^2 - 2x} < 0$, cette quantité est non nulle, donc en divisant par cette dernière :

$$\forall x < 0 \quad \left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right) = \frac{2x}{-|x| - \sqrt{x^2 - 2x}} \overset{x = -|x|}{=} \frac{-2|x|}{-|x| - \sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier par -1 pour obtenir la relation demandée.

ii) D'après la question précédente , si $x < 0$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}\right) \underset{x \to -\infty}{=} \ln\left(\frac{2}{2 + o(1)}\right) = \ln(1 + o(1)) \underset{\text{continuité du log}}{=} \ln 1 + o(1) \quad x \to -\infty.$$

Donc la limite existe en $-\infty$ et vaut 0. On conclut que C_f présente une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = 0$.

c) Il reste à étudier les limites en 0^- et 2^+. Au point 2 par continuité de f, la limite est $f(2) = \ln 2$. En 0^-, par composition de limites, $\lim_0 f$ vaut $-\infty$.

3. a) La fonction $u : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 2x}$ définie sur D_f est dérivable partout où la racine carrée ne s'annule pas, c'est-à-dire partout sur D_f sauf en $x = 0$ et $x = 2$. Comme la fonction logarithme est dérivable partout où elle est définie, f est dérivable sur $D' = D_f \setminus \{2\}$.

b) Par règles de calcul sur la dérivation :

$$\forall x \in D' \quad f'(x) = \frac{1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}}{(x + \sqrt{x^2 - 2x})} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}(x + \sqrt{x^2 - 2x})}$$

dernière relation obtenue en multipliant haut et bas par $\sqrt{x^2 - 2x}$.

c) Il est clair que le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur D' puisque $D' \subset D$. Il suffit d'étudier le signe du numérateur $g(x)$. Or $g(x) > 0 \iff \sqrt{x^2 - 2x} > 1 - x$. Là encore, il y a deux cas ($x \in D'$) :

- **i)** $x > 1 et x \in D'$, soit : $x > 2$. Dans ce cas $\sqrt{x^2 - 2x} > 0 > 1 - x$. Ainsi g est strictement positive sur $]2; +\infty$.
- **ii)** $x < 1$ et $x \in D'$, c'est-à-dire Dans ce cas, on peut passer aux carrés en préservant l'équivalence (comme expliqué en **1**) et $g(x) > 0 \iff 0 > 1$ en passant aux carrés. Cette inéquation n'a pas de solutions sur $D' \cap \{x < 1\}$ et g est négative sur $\mathbf{R}_-$.

d) Cela donne le tableau :

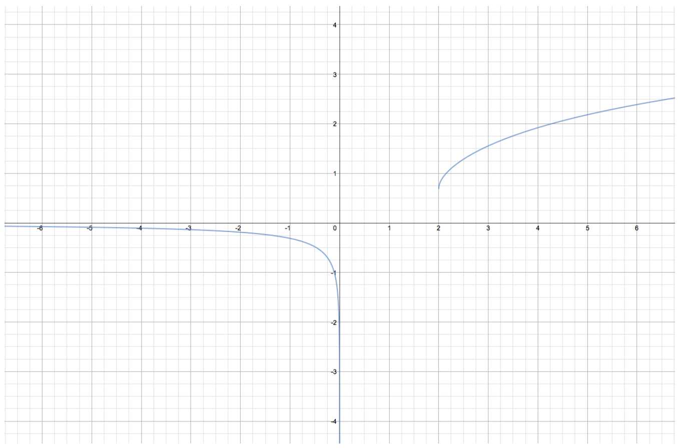
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$		↘	$-\infty$ ‖		‖ $\ln 2$	↗	$+\infty$

4. On calcule $f(-1) = \ln(\sqrt{3} - 1)$ $\quad f'(-1) = \dfrac{(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{3 - \sqrt{3}}$ et T a pour équation :

$$y = \frac{\sqrt{3} - 2}{3 - \sqrt{3}}(x + 1) + \ln(\sqrt{3} - 1)$$

5. Si $x \to +\infty$, en reprenant le début du calcul de **2.a)** : $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \ln(x(2 + o(1))) = \ln x + \ln(2 + o(1))$. En divisant par $x > 0$, puis par croissances comparées et somme de limites, $f(x)/x$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

6. Voici la courbe de f :



■ Exercice 2.

1. Dans les trois cas, on a des fonctions continues sur I donc en ajoutant une constante arbitraire à une primitive particulière de f sur I (il en existe d'après le cours), on a toutes les primitives sur I. Par intégration à vue, les primitives de f sur I sont les fonctions (C étant un réel quelconque)

a) $x \mapsto \dfrac{-1}{3(e^{3x} + 2)} + C$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$

c) $x \mapsto -\ln|\cos x - 2| + C = -\ln(2-\cos x - 2) + C$ **attention aux valeurs absolues qui étaient indispensables**

2. La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbf{R}_+^\star$. Donc, d'après le cours : elle a une infinité de primitives sur IDonner l'ensemble des primitives sur $\mathbf{R}_+^\star$ qui s'obtiennent par ajout d'une constante arbitraire à une primitive particulière de f. Pour calculer cette dernière, on remarque que $f = u'v$ où pour $x \in I$, $u(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ et $v = ln$. Comme u et v sont $C^1(I)$, on obtient par intégration par parties :

$$\int_*^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{(t+1)^2\ln t}{2}\right]_*^x - \frac{1}{2}\int_*^x \frac{(t+1)^2}{t}\mathrm{d}t$$

La seconde intégrale s'intègre terme à terme puisqu'en développant : $\frac{(t+1)^2}{t} = t+2+\dfrac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_*^x f(t)\mathrm{d}t &= \frac{(x+1)^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|\right) \underset{|x|=x}{=} \frac{(x+1)^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln x\right)\\ &= \frac{1}{2}x(x+2)\ln x - \frac{x}{2}(\frac{x}{2}+2) = \frac{x}{2}\left((x+2)\ln x - (\frac{x}{2}+2)\right)\end{aligned}$$

Finalement, les primitives de f sur $\mathbf{R}_+$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x}{2}\left((x+2)\ln x - \left(\dfrac{x}{2}+2\right)\right)+C \quad C \in \mathbf{R}$

■ **Exercice 3.** Voici le script :

```python
# -*- coding: utf-8 -*-


#----------------------
# 1. la fonction erreur
#----------------------


def erreur():
    """ Affiche le message ci-dessous"""
    print("Erreur. Recommencez")
#----------------------


#-------------------------
# 2. Le script du dialogue
#-------------------------
print("Bonjour Biwane")
reponse = raw_input("Es-tu une fille (O/N) ? ")
if reponse =='o' or reponse =='O':
    print("Bonjour Mademoiselle !")
elif reponse =='n' or reponse == 'N':
    print("Bonjour jeune homme !")
else:
    erreur()
```