Dans tout l'exercice, on fixe un entier $n > 0$ et on se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice unité est notée I.

Préambule

1. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *nilpotente* si et seulement si il existe un entier naturel *non nul* r tel que $M^r = 0$.
2. On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants mais en signalant leur utilisation :

   (R1) Si deux matrices U et V commutent alors :

   a) U^k et V^ℓ commutent pour tous entiers naturels ℓ et k.

   b) U commute avec $\alpha I + \beta V$ pour tous réels α, β.

   c) U commute avec $\alpha I + \beta U$.

   (R2) Si U et V commmutent et V est inversible, alors U et V^{-1} commutent.

Dans le vif du sujet

1. *Les résultats de cette question pourront servir par la suite*

a) Soit U et V deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent. Prouver que :

$$(U+V)(U-V) = U^2 - V^2.$$

b) Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et r un entier tels que $M^r = 0$.

i) Développer $(I-M) \times \sum_{k=0}^{r-1} M^k$.

ii) En déduire que $I - M$ est inversible et donner son inverse.

iii) Soit N une matrice telle que N^2 est inversible. Montrer que N est inversible.

2. On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et un entier r non nul tels que

$$[A(A-I)]^r = 0.$$

On définit une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par :

$$\begin{cases} & A_0 = A \\ \forall k \in \mathbf{N} & A_{k+1} = (A_k)^2 \times (2A_k - I)^{-1}. \end{cases}$$

a) Il n'est pas clair que cette suite de matrices soit bien définie. Pourquoi ?

b) Afin de justifier que cette suite est bien définie, on considère la propriété (P_k) suivante pour tout entier naturel k et qu'on veut prouver par récurrence :

(P_k) :

i) La matrice $2A_k - I$ est inversible.

ii) Il existe deux matrices C_k et D_k dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que :

A. $A_k - A = [A(A-I)]C_k$

B. $A_k(A_k - I) = [A(A-I)]^{2^k} \times D_k$ (attention c'est

C. $A_k A = A A_k, A C_k = C_k A, A D_k = D_k A$.

i) Factoriser $M = I-(2A-I)^2$.

ii) Déduire que M est nilpotente, puis que $I-M$ est inversible.

iii) Déduire que $SA-I$ est vraie et initialiser la récurrence.

c) Soit $k \geq 0$ un entier tel que (P_k) est vraie. Montrer que

i) $2A_{k+1}-I = [I+2A_k(A_k-I)]\times[2A_k-I]^{-1}$.

ii) $A_{k+1}-A = [(A_k-A)^2-(A^2-A)]\times[2A_k-I]^{-1}$.

iii) $A_{k+1}(A_{k+1}-I) = [A_k(A_k-I)(2A_k-I)^{-1}]^2$.

d) Déduire que (P_k) est vraie pour tout entier k.