Chapitre 2
Les bases du langage mathématique

I - Règles de typographie

Règle de base. Lorsqu'on écrit des mathématiques, chaque mot et chaque symbole compte. On sera attentif à distinguer :

– les lettres minuscules a, b, c, d, ... ou majuscules A, B, C, D, ...
– les lettres majuscules «rondes» $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, ...
– les lettres de l'alphabet grec : elles seront utilisées couramment ; il est donc indispensable de les connaître par leur nom, et si possible dans l'ordre alphabétique.

Alphabet grec

alpha	beta	gamma	delta	epsilon
zeta	eta	theta	iota	kappa
lambda	mu	nu	xi	omicron
pi	rho	sigma	tau	upsilon
phi	chi	psi	omega	

– les lettres à la typographie particulière utilisées pour désigner les principaux ensembles de nombres.

Ensembles de nombres

entiers naturels	entiers relatifs	rationnels	réels	complexes

II - Les types d'objets mathématiques

On ne peut pas écrire correctement des mathématiques si on ne connaît pas précisément la nature des objets dont il est question. On devra être capable de donner le «type» d'un objet mathématique, en s'inspirant de la liste (non exhaustive) qui suit :

Nombre entier Vecteur du plan Suite de nombres réels Variable aléatoire

Nombre complexe Point de l'espace Ensemble de nombres réels

Évènement Nombre réel Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ Proposition logique

Triplet de nombres complexes Système linéaire Équation différentielle

III - Écriture des propositions logiques

Définition. Une proposition logique est un énoncé suffisamment clair pour posséder une valeur de vérité (vraie ou fausse). Cette valeur de vérité peut être absolue (la proposition « $2+2=5$ » est fausse), ou dépendre d'une ou plusieurs variables (la proposition « $x+3 \leqslant 4$ » est vraie ou fausse, selon la valeur du nombre x).

Connecteurs logiques. Les connecteurs logiques permettent de combiner des propositions logiques (ci-dessous notées P et Q) pour en construire de nouvelles.

Proposition	**Valeurs de vérité**			
P	vraie	vraie	fausse	fausse
non P				
Q	vraie	fausse	vraie	fausse
P et Q				
P ou Q				
(non P) et (non Q)				
(non P) ou (non Q)				
P $\Rightarrow$ Q				
(non P) ou Q				
(non Q) $\Rightarrow$ (non P)				
P $\Leftrightarrow$ Q				

Distributivité.

La proposition «P et (Q ou R)» est équivalente à

La proposition «P ou (Q et R)» est équivalente à

Négation. La négation de la proposition «P» est la proposition «non P» qui est vraie lorsque «P» est fausse, et fausse lorsque «P» est vraie.

La proposition «non(non P)» est équivalente à

La proposition «non(P et Q)» est équivalente à

La proposition «non(P ou Q)» est équivalente à

La proposition «non(P $\Rightarrow$ Q)» est équivalente à

Contraposée. La contraposée de l'implication «P $\Rightarrow$ Q» est l'implication «(non Q) $\Rightarrow$ (non P)». Ces deux propositions sont équivalentes : elles ont la même valeur de vérité, dans tous les cas.

IV - Vocabulaire des ensembles

Définition. En mathématiques, un ensemble E est une collection d'objets, qui peuvent être des nombres, des points, des vecteurs, *etc.* Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble E.

Symboles d'appartenance et d'inclusion

L'élément x appartient à l'ensemble E.

L'ensemble E est contenu dans l'ensemble F.

Les ensembles E et F possèdent exactement les mêmes éléments.

L'ensemble E est strictement contenu dans l'ensemble F.

L'ensemble E ne possède aucun élément

À retenir. Si on veut prouver que deux ensembles E et F sont égaux, il y a deux méthodes possibles :

– la méthode en deux temps (par double inclusion, ou « analyse - synthèse ») : on démontre que $E \subset F$, puis que $F \subset E$, et on conclut que $E = F$.
– la méthode par équivalence : on démontre directement, par équivalences successives, que la proposition « $x \in E$ » équivaut à la proposition « $x \in F$».

Noter que ces deux méthodes sont fondamentales, et se retrouvent dans bien d'autres contextes, tels que la résolution des équations et inéquations.

Opérations sur les ensembles. Ces opérations seront très utilisées pour le dénombrement et les probabilités.

Notation des opérateurs ensemblistes

L'intersection des ensembles A et B.

La réunion des ensembles A et B.

La réunion disjointe des ensembles A et B (si $A \cap B = \varnothing$).

L'ensemble A privé des éléments de l'ensemble B.

Le complémentaire du sous-ensemble A dans « l'univers » Ω.

Commutativité, associativité.

$B \cap A =$ $\qquad$ $B \cup A =$

$A \cap (B \cap C) =$ $\qquad$ $A \cup (B \cup C) =$

Distributivité.

$A \cap (B \cup C) =$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) =$

Complémentaire. Ici les ensembles A et B sont contenus dans un ensemble Ω (l'univers de référence). Les complémentaires sont calculés dans Ω.

$\overline{A \cap B} =$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} =$

V - Écriture des ensembles et autres listes

Extension, compréhension. On distingue trois manières d'écrire un ensemble en mathématiques :

– Écriture en extension pure : on énumère, les uns après les autres, tous les éléments de l'ensemble.

$A =$

– Écriture en extension avec paramètre : on énumère les éléments de l'ensemble en utilisant un paramètre qui parcourt un autre ensemble, préalablement défini.

$B =$

– Écriture en compréhension : on sélectionne, à l'intérieur d'un ensemble prédéfini, les éléments qui vérifient une propriété donnée.

$C =$

À noter que, pour les deux dernières écritures, le séparateur peut être un point-virgule ou une barre verticale. En BCPST 1C, pour lever toute ambiguïté, nous utiliserons le point-virgule pour l'écriture en extension, et la barre verticle pour l'écriture en compréhension.

Ensemble périodique. Lorsqu'on étudie des fonctions trigonométrique ou faisant intervenir la partie entière, on a souvent besoin d'écrire des ensembles qui se répètent périodiquement. Si X est une partie de $\mathbb{R}$, on notera $X + 2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi k \ ; \ x \in X, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Par exemple, $[0, \pi[\, + 2\pi\mathbb{Z} =$

Intervalle en nombres entiers. On notera $[\![n, p]\!] = \mathbb{Z} \cap [n, p] =$

Listes ordonnées. Une liste ordonnée de k éléments est appelée un k-uplet (couple si $k = 2$, triplet si $k = 3, \ldots$) On la note entre parenthèses. Si on impose de plus que les éléments ne se répètent pas, on parle de k-arrangement.

– L'ensemble des couples constitués d'un élément de l'ensemble E puis d'un élément de l'ensemble F est appelé le produit cartésien de E et F.

$E \times F =$

– L'ensemble des k-uplets d'éléments de l'ensemble E est appelé la k-ième puissance de E.

$E^k =$

Listes non ordonnées. Une liste non ordonnée et sans répétition de k éléments est appelée une k-combinaison (une paire si $k = 2$). Si les éléments sont tous dans le même ensemble E, une telle liste est simplement une partie de E.

– L'ensemble de toutes les parties de E est noté

– L'ensemble des parties de E contenant exactement k éléments est noté

V - Quantificateurs

Définition. Les quantificateurs permettent de préciser la portée d'une proposition logique dépendant d'une certaine variable. Il y en a deux :

– Le quantificateur universel $\forall$, qui se prononce « pour tout ».

« $\forall x \in \mathbb{R}, \ 3x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$ » se lit :

– Le quantificateur existentiel $\exists$, qui se prononce « il existe … tel que ».

« $\exists x \in \mathbb{R}, \ 3x^2 - 4x + 5 = 0$ » se lit :

À retenir. Une proposition logique commençant par $\exists$ est vrai si on peut trouver un exemple (ou en prouver l'existence). Une proposition logique commençant par $\forall$ est vraie si on peut prouver qu'il n'y a aucun contre-exemple.

Importance de l'ordre des quantificateurs. On ne peut pas déplacer les quantificateurs sans changer le sens d'une proposition logique. On peut par exemple comparer les valeurs de vérité des propositions :

$$\text{« } \forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ a \leqslant b \text{ »}$$

En termes moins mathématiques, on pourra méditer sur le sens des deux phrases suivantes :
- « Pour toute espèce de poissons, il existe un modèle d'hameçon qui permet de la pêcher. »
- « Il existe un modèle d'hameçon qui permet de pêcher toutes les espèces de poissons. »

Négation d'une proposition quantifiée.

La proposition «non $[\,\forall x \in E,\ P(x)\,]$» est équivalente à

La proposition «non $[\,\exists x \in E,\ P(x)\,]$» est équivalente à

VI - Notation des suites et fonctions

VII - Méthodes de démonstration

VIII - Règles de présentation

IX - Quelques erreurs à ne pas commettre en DS

Méthodes de démonstration (absurde)