Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h_n(x) = x^n \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$

1. Étudier les variations de h_n.

2. Établir que h_n réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera et donner les propriétés de sa bijection réciproque h_n^{-1}.

3. En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$, l'équation $h_n(x) = 1$ admet une unique solution positive ou nulle notée x_n dans la suite.

4. Calculer $h_n(1)$. En déduire que pour tout entier $n > 0$: $x_n > 1$.

5. Montrer que $h_n(x_{n+1}) < 1$ et en déduire la monotonie de la suite (x_n).

6. Montrer que la suite (x_n) converge. Soit ℓ la limite. Prouver que $\ell \geq 1$.

7. Montrer que $x_n = \exp\left(\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{1+x_n}{x_n^3}\right)\right)$. En déduire la valeur de ℓ.

8. Soit $\varepsilon_n = x_n - \ell$. Trouver un équivalent de ε_n.