■ Exercice 1.

1. a) Voici le programme :

```python
from __future__ import division
def liste_suite(n):
    u = 1
    L = [u]
    for k in range(n):
      u = sqrt( u**2 + 2**(-k)) # attention à coordonner la
                                # valeur de l'exposant avec
                                # les plages de votre range
      L.append(u)
    return L
```

b) La console me donne :

```
console
>>> liste_suite(20)
[1, 1.4142135623730951, 1.5811388300841898, 1.6583123951777001,
1.6955824957813173, 1.7139136501002612, 1.723006094011278,
1.7275343701356567, 1.729794062887256, 1.7309228030157786,
1.7314868971493835, 1.7317688753121763, 1.731909847177387,
1.731980328807172, 1.7320155685465126, 1.732033188147314,
1.7320419978805, 1.7320464027302895, 1.7320486051509834,
1.7320497063602802, 1.732050256964666]
>>> sqrt(3) 1.7320508075688772
```

On peut conjecturer que la suite est convergente vers $\sqrt{3}$

2. Par récurrence montrons la propriété (P_n) : $u_n \geq 1$. Il est clair que (P_0) est vraie. Si pour un entier n quelconque donné (P_n) est vraie. Puisque $1/2^n \geq 0$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbf{R}_+$ on obtient :

$$u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + \frac{1}{2^n}} \geq \sqrt{{u_n}^2} = |u_n|.$$

Comme $u_n \geq 1$, $u_n \geq 0$, donc $|u_n| = u_n \geq 1$. Finalement on bien $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$ et (P_{n+1}) est vraie ce qui achève la récurrence.

3. On peut remarquer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad {u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = \frac{1}{2^n}$. Or par identité remarquable :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = \frac{1}{2^n},$$

et puisque $u_{n+1} + u_n \geq 1 + 1$ par **2.**, cela permet d'une part de diviser membre à membre par $u_{n+1} + u_n \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1}{2^n}}{u_{n+1} + u_n},$$

et d'autre part, comme tout est positif, on peut minorer le dénominateur par 2 et donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

4. Soit $n \geq 1$ un entier. On somme les relations obtenues précédemment de $k = 0$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Par telescopage sur le premier membre et translation d'indices sur le second :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n - u_0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

5. La relation ci-dessus donne : $\forall n \geq 1 \quad u_n \geq u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ Or puisque $u_0 = 1$, en calculant la valeur du membre de droite :$\forall n \geq 1 \quad u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$. La suite est majorée par 2 qui est bien un majorant indépendant de n. Enfin la suite est aussi croissante d'après la minoration de **3.** Par le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

6. **a)** On a vu que au début de **3** que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^n}$. Encore en sommant toutes ces relations de $k = 0$ à $k = n-1$, où $n \geq 1$ est un entier quelconque, un telescopage donne :

$$\forall n \geq 1 \quad v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

et donc : $\forall n \geq 1 \quad v_n = 3 - 2^{1-n}$.

b) Comme $u_n \geq 0$ pour tout entier : $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{3 - 2^{1-n}}$
Il est facile de voir par opérations sur les limites que $v_n = 3 + o(1)$ et donc par opérations sur les limites et continuité de la racine :$u_n = \sqrt{3} + o(1)$. Cela confirme bien le résultat deviné numériquement en **1**.

7. On doit calculer $\sqrt{3} - u_n =$. Or encore par identité remarquables en partant de $v_n = 3 - 2^{1-n}$:

$$(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n) = 2^{1-n}$$

en divisant par $(\sqrt{3} + u_n) \neq 0$ (somme de deux termes ≥ 1) :

$$\sqrt{3} - u_n = \frac{= 2^{1-n}}{\sqrt{3} + u_n}$$

Par opérations sur les limites : $\sqrt{3} + u_n = 2\sqrt{3} + o(1)$. Comme la limite $2\sqrt{3}$ est non nulle, on peut écrire par quotient d'équivalents :

$$\sqrt{3} - u_n \sim_\infty \frac{2^{1-n}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2^n\sqrt{3}}$$

■ Exercice 2.

1. Il est facile de voir que : $\forall n \geq 0 \quad x_{n+1} - x_n = -{x_n}^2 \leq 0$ donc la suite est décroissante.

2. Par décroissance de la suite, il est clair que :

$$x_n \geq x_0 \geq 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Il reste à prouver que $x_n \geq 0$ pour tout entier n. On le fait par récurrence. C'est vrai pour x_0. si on suppose que $x_n \geq 0$ pour un rang n donné :

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, le premier facteur du membre de droite est positif. Le second aussi puisqu'on a prouvé que $(1 - x_n) \geq$ pour tout entier n. La récurrence est vérifiée.

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Notons ℓ la limite de la suite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, ce qui est possible car elle est valable asymptotiquement :

$$\ell = \ell - \ell^2.$$

D'où $\ell = 0$.