Exercice 1

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On appelle nombre à n chiffres un nombre s'écrivant avec n chiffres, le premier n'étant bien entendu pas un 0. Par exemple, 234 est un nombre à 3 chiffres, mais 012 n'est pas un nombre à 3 chiffres.

1. Dénombrer le nombre de nombres à n chiffres ($n \geq 2$).

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On appelle *nombre malchanceux* à n chiffres tout nombre à n chiffres dont l'écriture contient au moins un 13. Sinon, on dit que le nombre est *chanceux*. Par exemple 8713926 est un nombre malchanceux, mais 2015 est un nombre chanceux, en revanche 131313131313 est vraiment poisseux.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note C_n l'ensemble des nombres chanceux à n chiffres, et $c_n = \#C_n$.

2. a) Calculer c_2.

b) De même cacluler c_3.

3. Dans cette question on souhaite établir une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n valable pour tout entier $n \geq 2$.

a) Soit $n \geq 3$. On note C'_n l'ensemble des nombres chanceux à n chiffres dont le dernier chiffre est un 1, et $c'_n = \#C'_n$. En remarquant que les nombres de C'_n s'écrivent :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n-1} 1$$

trouver une relation simple entre c'_n et c_{n-1}.

b) Soit $n \geq 2$. On note $C_n^{(3)}$ le nombre de nombres chanceux à n chiffres dont le dernier chiffre est un 3, et on pose $c_n^{(3)} = \#C_n^{(3)}$.

i) Quelles sont les valeurs que l'avant-dernier chiffre X d'un élément de $C_{n+2}^{(3)}$ ne peut pas prendre ?

ii) En remarquant alors que les nombres de $C_{n+2}^{(3)}$ s'écrivent :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n+1} \mathtt{X}\,3$$

déduire de **3a)** une expression de $c_{n+2}^{(3)}$ en fonction de c_{n+1} et c_n.

c) i) Quelles valeurs peut prendre le dernier chiffre X d'un nombre de $C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)}$?

ii) En remarquant alors que les nombres de $C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)}$ s'écrivent :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n+1} \mathtt{X}$$

exprimer $\#(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)})$ en fonction de c_{n+1}.

d) i) Conclure à l'aide de **3b)ii)** et **3c)ii)** que :

$$\forall n \geq 2 \qquad c_{n+2} = 10c_{n+1} - c_n \qquad (R)$$

ii) En déduire l'expression de c_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 2$, puis le nombre m_n de nombres malchanceux à n chiffres.

Exercice 2

On voudrait demander à `Python` de compter lui-même les nombres chanceux à n chiffres.

1. Programmer une fonction dont l'en-tête est `def c1(n):` qui prend en entrée un entier $n \geq 2$ et retourne en sortie le nombre c_n calculé en utilisant la relation de récurrence (R).
2. Que fait la fonction suivante ?

```python
def mystere(chaine):
    """ entrée : chaine de type str
        sortie  : rep entier qui vaut 0 ou 1 suivant que ...

    """

    rep = 1
    N = len(chaine)
    i = 0
    while  chaine[i:i+2] != '13' and i < N-1:
        i+=1
    if i == N-1:
         rep = 0
    return rep
```

3. Utiliser cette fonction pour construire une autre fonction `def c2(n):`, prenant en entrée un entier `n`, et retournant en sortie le nombre c_n obtenu cette fois en examinant un par un tous les nombres à n chiffres. On pourra utiliser la fonction `mystere` et le fait que la commande `str(k)` convertit l'entier `k` en la chaîne de caractères correspondante.
4. Combien y a-t-il de nombres malchanceux à 7 chiffres ?