Pour les Biwanes : Vous pouvez vous contenter de reporter sur votre copie la référence [q_j] de la question que vous traitez.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs : $u = (1, 0, 1, 0)$ et $v = (2, 0, 1, 1)$.

1. On pose $E = \text{Vect}(u, v)$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \quad x + y - z - t = 0\}$.

[q_1] **a)** Déterminer une base ainsi que la dimension de E.

[q_2] **b)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En déterminer une base ainsi que la dimension.

2. On pose $G = \left\{(a - b, 2a + 2b + 2c, -2b - c, a + b + c) \quad (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\right\}$

[q_3] **a)** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En déterminer une base ainsi que la dimension.

[q_4] **b)** Donner un système d'équations de G.

[q_5] **c)** Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ dont on calculera la dimension.

[q_6] **d)** Montrer que $F \cap G \subset E \subset F$.

[q_7] **e)** Certaines de ces inclusions sont elles des égalités ? Justifier

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et p, q deux réels dans l'intervalle $]0; 1[$. Lors d'un examen, Alice et Bob répondent à un Q.C.M. de n questions pour lequel à chaque question il n'y a que deux choix possibles : `vrai` ou `faux`. On ne peut laisser une question sans réponse. Alice et Bob adoptent deux stratégies de réponse que l'on étudie.

Partie I : étude de la stratégie d'Alice.

Alice coche une case au hasard à chaque question, et les réponses données sont supposées mutuellement indépendantes.

[q_8] **1.** Calculer la probabilité de l'événement V : « Alice a coché la case `vrai` à toutes les questions ».

[q_9] **2.** Calculer la probabilité de l'événement V_+ : « Alice a coché la case `vrai` au moins à une question ».

[q_{10}] **3. a)** Calculer la probabilité de l'événement E :« Alice coche la case `vrai` à la question 1, coche la case `vrai` à la question 2, et coche la case `faux` à la question 3 ».

[q_{11}] **b)** Calculer la probabilité de l'évènement A : « à l'issue des trois premières questions, Alice coche la case `vrai` exactement 2 fois ».

[q_{12}] **4.** Calculer la probabilité de l'événement T : « Alice a coché la case `vrai` à exactement trois questions ». (*on pourra au choix, préciser l'univers associé à l'expérience et calculer le cardinal de T, ou utiliser un résultat du cours*).

Partie II : étude de la stratégie de Bob.

— *Bob coche une case choisie au hasard à la première question, et pour chaque question :*
— *si Bob coche la case* `vrai` *à une question, il coche encore* `vrai` *à la question suivante avec probabilité p. Sinon il coche la case* `faux`.
— *si Bob coche la case* `faux` *à une question, il coche encore la case* `faux` *à la question suivante avec probabilité $1-q$. Sinon il coche la case* `vrai`.

Pour tout entier naturel non nul k on notera V_k l'événement « Bob coche la case `vrai` à la question numéro k », et on note v_k la probabilité de l'événement V_k

[q13] **1. a)** Calculer v_1, v_2, v_3.
[q14] **b)** Montrer que les événements V_2 et V_3 sont indépendants si et seulement si $p=q$.
[q15] **2. a)** Calculer la probabilité de l'événement F : « Bob coche la case `vrai` à la question 1, coche la case `vrai` à la question 2, et coche la case `faux` à la question 3 ».
[q16] **b)** Calculer la probabilité de l'événement B : « à l'issue des trois premières questions, Bob coche la case `vrai` exactement deux fois ».
[q17] **c)** Dans cette question seulement on suppose que $p=q$. À quelle condition sur p a-t-on $P(B)\geq P(A)$, l'événement A étant défini en **I 3.b)** ? Ce résultat était-il prévisible ?
[q18] **3.** On sait que Bob a coché `vrai` à la question numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait coché `vrai` à la question numéro 1 ?
[q19] **4. a)** Trouver une relation de récurrence entre v_{k+1} et v_k valable pour tout entier k dans $\{1\dots n-1\}$.
[q20] **b)** En déduire v_n en fonction de n.
[q21] **c)** Étudier la nature de la suite (v_n) et préciser sa limite le cas échéant.

Exercice 3

Soit $p\in]0;1[$. Un joueur joue à un jeu dont les règles sont les suivantes :
— Le joueur effectue des lancers successifs d'une pièce dont la probabilité de faire `pile` est p et celle de faire face est $q=1-p$. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants.
— Il lance la pièce jusqu'à ce qu'il gagne ou qu'il perde.
— Le joueur gagne si à un moment donné il a deux `pile` de plus que de `face`.
— Le joueur perd si à un moment donné il a deux `face` de plus que de `pile`.

Pour tout entier naturel n non nul on note G_n l'événement : «le joueur gagne au n-ème lancer.», et E_n «au n-ème lancer, la partie n'est pas terminée.». On note pour tout entier naturel $n\geq 1$, $g_n=P(G_n)$ et $e_n=P(E_n)$.

[q22] **1.** Justifier *par un calcul* que $g_{2n+1}=0$ pour tout entier naturel n.
[q23] **2.** Calculer g_2, g_4 (on introduira les évènements F_k : «au k-ème lancer, le joueur obtient face.» et exprimer les évènements G_2 et G_4 en termes de F_k).
[q24] **3.** Calculer e_{2n} pour tout entier naturel $n\geq 1$.
[q25] **4.** En déduire la valeur de g_{2n} en fonction de n.
[q26] **5.** On suppose que l'on dispose en Python de la fonction `lancer(r)` qui prend en entrée un flottant `r` et retourne en sortie un entier aléatoire valant `1` avec probabilité `r` et `0` sinon. Écrire une fonction `tiebreak(p)` qui prend en entrée un flottant `p` et retourne en sortie la liste `[n,x]` dans laquelle `n` est le rang au bout duquel la partie s'arrête, et `x` vaut `1` si le joueur gagne et `0` sinon.