Vous pouvez vous contenter de reporter sur votre copie la référence [q_j] *de la question que vous traitez.*

Problème 1

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^n \ln x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

1. *Étude des fonctions f_n.*

[q_1] **a)** Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que f_n est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

[q_2] **b)** Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

[q_3] **c)** Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ (on distinguera les cas suivant les valeurs de n).

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que n $\geqslant$ 2.

2. *Variations de f_n sur $[1,+\infty[$.*

[q_4] **a)** Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in]1,+\infty[, \quad f_n'(x) = \frac{2x^{n-1}}{(x^2-1)^2}\Big[(n-2)(x^2-1)\ln x + (x^2-1-2\ln x)\Big].$$

[q_5] **b)** Montrer par une étude de fonction que :

$$\forall\, x \in]1,+\infty[\,, \quad x^2-1-2\ln x > 0.$$

[q_6] **c)** Établir le tableau de variations de f_n sur $[1,+\infty[$.

3. *Étude d'une suite définie implicitement.*

On considère l'équation suivante :

$$(E_n) \quad f_n(x) = 2.$$

[q_7] **a)** Montrer que l'équation (E_n) admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution notée u_n.

[q_8] **b)** Calculer $f_n(e)$. En déduire que $u_n \in [1,e]$.

4. *Comportement de la suite (u_n).*

[q_9] **a)** Montrer que : $\forall\, x \in [1,+\infty[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$.

[q_{10}] **b)** En déduire la monotonie de (u_n).

[q_{11}] **c)** Montrer que (u_n) est convergente et que sa limite ℓ est telle que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant u_n.$$

5. *Détermination de la limite ℓ.*

On suppose par l'absurde que $\ell > 1$.

[q12] **a)** En utilisant (E_n), montrer que (u_n^n) converge vers $\dfrac{\ell^2-1}{\ln \ell}$.

[q13] **b)** Justifier que : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n^n \geqslant \ell^n$. Conclure.

Problème 2

Dans tout le problème, on considère un jeton marqué sur une face de la lettre A et sur l'autre de la lettre B. Quand on lance le jeton, la probabilité d'observer A est notée $p \in]0;1[$, et celle d'observer B est $q = 1-p$. est Le but du problème est d'étudier des variables aléatoires associées à des séries de lancers de longueur donnée. Dans tout le problème, les lancers sont supposés mutuellement indépendants.

Dans toute la suite, on se donne un entier naturel non nul n fixé.

Partie 1. Nombre de A au bout de $2n$ lancers.

Dans cette partie on lance $2n$ fois le jeton et on note X la variable aléatoire égale au nombre de A observés.

[q14] **1.** Donner la loi de X ainsi que son espérance $\mathbf{E}(X)$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.

2. Dans cette question seulement, on suppose que $p = 1/2$.

[q15] **a)** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable X.

[q16] **b)** Quelle valeur de n suffit-il de prendre pour être certain à 99% que le nombre de A observés est dans l'intervalle $]n/2;3n/2[$?

Partie 2. Temps d'apparition du premier A en au plus $2n$ lancers.

On rappelle que l'entier naturel n non nul est fixé. Dans cette partie on se donne au plus $2n$ lancers, et on joue de la façon suivante : on lance le jeton jusqu'à ce que l'on observe un A. Si au bout de $2n$ lancers on n'a toujours pas observé de A, on s'arrête. On note Y la variable aléatoire égale à k si on a observé un A au k-ème lancer, et égale à $2n+1$ si les $2n$ lancers n'ont donné que des B.

[q17] **1.** Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

2. On souhaite calculer dans cette question l'espérance de Y, et on note pour tout réel $x \in]0,1[$ et tout entier naturel non nul N :

$$F_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k \quad \text{et} \quad f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} k x^{k-1}.$$

[q18] **a)** Simplifier l'expression de $F_N(x)$.

[q19] **b)** Déduire par un calcul de fonction dérivée que :

$$\forall x \in]0,1[\quad f_N(x) = \frac{1 + N x^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2}$$

[q20] **c)** En déduire que $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{1 - q^{2n+1}}{1 - q}$.

Partie 3. Nombre d'apparitions de la lettre minoritaire après n apparitions de l'autre.

Dans cette partie on suppose que $p = q = 1/2$. On joue de la façon suivante : on lance le jeton jusqu'à ce que l'on observe n fois A ou n fois B. La première lettre apparue ainsi n fois est dite gagnante, et l'autre perdante. On note Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la lettre perdante. Par exemple, si $n = 5$ et qu'on a observé la série suivante : $BAABBABB$, on s'arrête car on a observé 5 B, qui est alors la lettre gagnante. Dans ce cas $Z_5 = 3$ puisque la série contient 3 A.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note A_k (*resp.* B_k) l'évènement : *la lettre A (resp. B) est obtenue au k-ième lancer*.

1. *Informatique. Répondre sur la feuille annexe.*

[q21] **a)** Écrire une fonction `lancer()` ne prend aucun argument d'entrée et retourne en sortie le caractère `A` avec probabilité $1/2$ et le caractère `B` avec probabilité $1/2$ aussi (on pourra utiliser au choix les fonctions `rand()` ou `random()` ou encore `randrange(a,b)` sans se préoccuper du chargement des modules nécessaires).

[q22] **b)** La fonction `jeu(n)`, dont le script est sur l'annexe prend en entrée un entier `n`, et retourne le nombre d'apparitions de la lettre perdante à l'issue d'une simulation du jeu (c'est-à-dire la valeur observée de Z_n). Compléter le script de cette fonction.

[q23] **2. a)** Donner la loi de Z_1.

[q24] **b)** Donner la loi de Z_2 (on peut s'aider d'un arbre).

[q25] **3.** Donner l'espace image $Z_n(\Omega)$ de la variable aléatoire Z_n pour tout entier $n \geq 1$.

4. Pour deux entiers positifs i et j, on note $E_{i,j}$ l'évènement : *à l'issue des $i + j$ premiers tirages tirages, on a observé i fois la lettre A et j fois la lettre B.*

[q26] **a)** Calculer la probabilité $P(E_{i,j})$. En déduire sans calculs la valeur de $P(E_{j,i})$.

[q27] **b)** Soit $k \in \{0, n-1\}$ un entier. Exprimer l'évènement $(Z_n = k)$ à l'aide des évènements $E_{n-1,k}$, $E_{k,n-1}$, A_{n+k} et B_{n+k}. En déduire :

$$P(Z_n = k) = \frac{\binom{n-1+k}{k}}{2^{n-1+k}}.$$

5. On souhaite obtenir un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ quand $n \to \infty$.

[q28] **a)** Vérifier que :

$$\forall k \in \{0 \dots n-2\} \quad 2(k+1)P(Z_n = k+1) = (n+k)P(Z_n = k).$$

[q29] **b)** En déduire en sommant les relations de la question précédente que :

$$2\mathbf{E}(Z_n) = n(1 - P(Z_n = n-1)) + \mathbf{E}(Z_n) - (n-1)P(Z_n = n-1),$$

puis que

$$\mathbf{E}(Z_n) = n - (2n-1)P(Z_n = n-1).$$

[q30] **c)** En admettant que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}P(Z_n = n-1)$ est bornée, donner un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$.

Feuille à joindre à votre copie. Précisez sur votre copie si vous ne la rendez pas

```python
def lancer():
    """
    fonction qui retourne le caractère A ou B
    avec probabilité 1/2
    """









#--- fin
```

```python
def  jeu(n):
    """
    fonction qui prend en entrée un entier n et qui retourne
    en sortie le nombre d'occurrences de la lettre perdante
    à l'issue d'une simulation du jeu
    """
    nA = 0     # Initialisation des compteurs
    nB = 0

    while















#--- fin
```