Exercice 1

[Q1] Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2e^x)-x}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2

Soit θ un réel dans $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et Z le nombre complexe donné par :

$$Z = \cos^3(\theta) + i\sin^3(\theta) - \frac{1}{2}e^{i\theta}.$$

Le but de cet exercice est de calculer la forme exponentielle de Z.

[Q2] **1.** Linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.

[Q3] **2.** En déduire une expression de Z en termes de $\exp(i\theta)$ et $\exp(3i\theta)$.

[Q4] **3.** Factoriser Z par $\exp(-i\theta)$ et en déduire une expression de Z de la forme $Z = \lambda\exp(i\varphi)$ où λ et φ sont deux réels dépendant de θ à préciser.

[Q5] **4.** Donner l'ensemble des réels $\theta \in I$ pour lesquels Z est nul.

[Q6] **5.** Donner en fonction de $\theta \in I$ la forme exponentielle de Z.

Exercice 3

On note $\ell = \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)$ et on considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\begin{cases} & z_0 & = & 2 \\ & z_1 & = & 1+\ell^2 \\ \forall n \in \mathbf{N} & z_{n+2} & = & \ell\sqrt{2+\sqrt{2}} \times z_{n+1} - \ell^2 z_n \quad (R) \end{cases}$$

[Q7] **1. a)** Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $[0;\pi/2]$.
Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

[Q8] **b)** En déduire la valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à l'aide de radicaux (c'est-à-dire à l'aide de racines carrées).

[Q9] **2. a)** Factoriser z_1 par $e^{i\pi/8}$, et donner la forme exponentielle de z_1.

[Q10] **b)** Déduire de ce qui précède que $\ell\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1+\ell^2$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = z_{n+1} - \ell^2 z_n$.

[Q11] **3. a)** Montrer alors que la relation (R) se réécrit : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = u_n$.

[Q12] **b)** Que dire de la suite (u_n) ?

[Q13] **c)** En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad z_{n+1} = \ell^2 z_n + 1 - \ell^2 \quad (R').$$

[Q14] **d)** *Informatique*. Compléter le script `Python` sur la feuille réponse fournie et dont le but est de calculer et afficher pour un entier `N` entré par l'utilisateur les termes $z_0, z_1, \dots, z_{\mathtt{N}}$ de la suite (z_n).

[Q15] **4. a)** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad z_n = 1 + \ell^{2n}$.

[Q16] **b)** Montrer que la suite (z_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Exercice 4

Dans cet exercice, le nombre réel m est fixé et **non nul**. Pour tout entier naturel n, on notera f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n(t) = \frac{t^n}{n!}e^{mt}.$$

On rappelle que $0! = 1$ et que pour $n \geq 1, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Dans cet exercice, on souhaite calculer de manière explicite une primitive F_n de f_n sur $\mathbf{R}$ pour tout entier naturel n, c'est-à-dire calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int^x \frac{t^n}{n!}e^{mt}\,dt$.

[Q17] **1.** Donner une primitive F_0 de f_0 sur $\mathbf{R}$.

[Q18] **2.** Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. À l'aide d'une intégration par parties sur $\displaystyle\int^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{mt}\,dt$, montrer qu'on peut choisir F_{n+1} telle que :

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{m}f_{n+1}(x) - \frac{1}{m}F_n(x).$$

[Q19] **3.** Montrer alors par récurrence sur n que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad F_n(x) = \frac{1}{m}f_n(x) - \frac{1}{m^2}f_{n-1}(x) + \frac{1}{m^3}f_{n-2}(x) + \cdots + \frac{(-1)^n}{m^{n+1}}f_0(x),$$

ou, indifféremment en termes de sommes :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{m^{n+1-k}}f_k(x).$$

[Q20] **4.** *Application.* En déduire à l'aide de **3.** une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction :

$$f : t \mapsto \frac{t^2}{2}e^{-t}.$$

Feuille à joindre à votre copie. Préciser sur votre copie si vous ne la rendez pas

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@NOM : .........................

Script qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier N et qui
calcule et affiche les termes z0,...,zN
de la suite (zn) définie par :

    z0 donné (voir énoncé)
    z_{n+1} = l**2 zn + 1-l**2

"""
from cmath import exp,pi

l = exp(1j * pi/8)

# fin
```