Exercice 1

1. Un nombre à n chiffres est un mot de n lettres écrit dans l'alphabet $\{0, \ldots 9\}$, mais dont le premier chiffre ne peut valoir 0. Il y a donc $9 \times 10 \times \cdots \times 10 = 9 \times 10^{n-1}$ nombres à n chiffres.

2. **a)** Il n'y a qu'un seul nombre malchanceux à deux chiffres qui est 13, donc avec la question précédente, $c_2 = 90 - 1 = 89$.

   b) Il y a deux types disjoints de nombres malchanceux à 3 chiffres :

   i) Type 1 : ceux qui sont de la forme 13X.

   ii) Type 2 : ceux qui sont de la forme X13.

   Dit en termes d'ensembles : $\overline{C_3}$ se partitionne en

$$\overline{C_3} = M_1 \sqcup M_2$$

   où M_k est l'ensemble des nombres malchanceux à 3 chiffres de type k. Calculons $\#M_k$:

   i) Si $k = 1$: il est clair que pour les nombres de M_1, X peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9 donc : $\#M_1 = 10$.

   ii) Si $k = 2$: il est clair que pour les nombres de M_2, X peut prendre cette fois toutes les valeurs de 0 à 9 sauf 1, donc : $\#M_1 = 9$..

   Par réunion disjointe : $\#\overline{C_3} = 19$. Avec la question **1** et un passage au complémentaire on en déduit que $c_3 = 900 - 19 = 881$.

3. Soit $n \geq 2$.

   a) Sur le schema ci-dessous :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n-1} 1$$

   il est clair que C'_n est en bijection avec l'ensemble des nombres à $n-1$ chiffres ne contenant aucun 13 dans leur écriture, c'est-à-dire avec l'ensemble C_{n-1}. Ainsi $c'_n = c_{n-1}$.

   b) Soit $n \geq 2$.

   i) Comme les éléments de $C^{(3)}_{n+2}$ sont des nombres chanceux et qu'ils finissent par un 3, l'avant dernier chiffre X de ces nombres ne peut valoir 1.

   ii) D'après ce schema :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n+1} \mathtt{X}\,3$$

   les nombres de $C^{(3)}_{n+2}$ sont en bijection avec l'ensemble des nombres à $n+1$ chiffres sans 13 dans leur écriture, et ne finissant pas par un 1. Par la question précédente et passage au complémentaire : $\#C^{(3)}_{n+2} = c_{n+1} - c'_{n+1}$:

$$\#C^{(3)}_{n+2} = c_{n+1} - c_n \tag{1}$$

   c) i) Les nombres de $C_{n+2} \setminus C^{(3)}_{n+2}$ sont les nombres chanceux à $n+2$ chiffres dont le dernier chiffre ne peut pas être un 3. Donc leur dernier chiffre X peut valoir n'importe quel chiffre entre 0 et 9 sauf 3.

ii) Encore en s'appuyant sur le schema suivant :

$$\underbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \cdots \sqcup}_{n+1}\ \mathtt{X}$$

les nombres de $\#(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)})$ sont en bijection avec les couples $(t, \mathtt{X})$ où $\mathtt{X}$ vaut n'importe quoi sauf 3 comme on l' a dit en **3c)i)** et t est n'importe quel nombre à $n+1$ chiffres sans 13. Ainsi $(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)})$ est en bijection avec $C_{n+1} \times \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. D'où, en passant aux cardinaux :

$$\#(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)}) = 9c_{n+1} \tag{2}$$

d) i) Soit $n \geq 2$. On a la partition suivante, puisqu'un nombre chanceux à trois chiffres finit soit par un 3, soit par autre chose :

$$C_{n+2} = C_{n+2}^{(3)} \sqcup \left(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)}\right).$$

En passant aux cardinaux :

$$c_{n+2} = \#(C_{n+2}^{(3)}) + \#\left(C_{n+2} \setminus C_{n+2}^{(3)}\right).$$

En utilisant les relations (1) et (2) : on en déduit

$$\forall n \geq 2 \qquad c_{n+2} = (c_{n+1} - c_n) + 9c_{n+1}$$

c'est bien la relation (R).

ii) La suite (c_n) est récurrente linéaire à deux pas. Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = 96 = 6 \times 4^2$. D'après le cours, pour deux constantes A et B bien ajustées par c_2 et c_3 :

$$\forall n \geq 2 \quad c_n = A(5 - 2\sqrt{6})^{n-2} + B(5 + 2\sqrt{6})^{n-2}$$

Calculons A et B avec les formules de Cramer en posant $r_1 = 5-2\sqrt{6}$ et $r_2 = 5+2\sqrt{6}$, puisque A et B sont solutions du système linéaire de forme réduite :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 89 \\ r_1 & r_2 & 881 \end{array}\right).$$

Cela donne $A = \dfrac{89r_2 - 881}{4\sqrt{6}} = \dfrac{89}{2} - \dfrac{109}{\sqrt{6}}$, et $B = \dfrac{89}{2} + \dfrac{109}{\sqrt{6}}$.
Comme $m_n + c_n = 9 \times 10^{n-1}$ vaut le nombre de nombres à n chiffres, on arrive à la formule

$$\forall n \geq 2 \quad m_n = 9 \times 10^n - \left(\frac{89}{2} - \frac{109}{\sqrt{6}}\right)(5 - 2\sqrt{6})^{n-2} - \left(\frac{89}{2} + \frac{109}{\sqrt{6}}\right)(5 + 2\sqrt{6})^{n-2}$$

Exercice 2

On voudrait demander à Python de compter lui-même les nombres chanceux à n chiffres.

1. Voici la solution :

```python
def c1(n):
    """ Fonction qui calcule h_n = nombre de nombres à n chiffres
        s'écrivant sans 13.
        La suite (h_n) vérifie la relation :
        c2 = 89
        c3 = 881
        et : c_{n+2} = 10c_{n+1} -c_n
    """
    u = 89
    v = 881
    if n == 2:
        return u
    elif n ==3:
        return v
    else:
        for j in range(4,n+1):
            w = 10*v -u
            v,u = w,v
        return w
```

2. La fonction mystere répond 1 si la chaine de caractères chaine contient '13' et elle retourne 0 sinon.

3.

```python
def c2(n):
    c = 0                                # c'est compteur
    for j in range(10**(n-1),10**n):     # plage des nombres à  n chiffres
        c +=   + mystere(str(j))         # mystere vaut 0 ou 1 ...
                                         # ... donc sert d'incrément
    return  c
```

4. Combien y a-t-il de nombres malchanceux à 7 chiffres ?

```python
def m(n):
    """ calcule le nombre de nombres à n chiffres contenant un 13"""
    return 9*10**(n-1) -c2(n)
```

Le plus rapide est d'utiliser la relation (R) (donc la fonction c1 au lieu de c2)

```
console
In[1]: m(7)
Out[1]:  8459361
```

Il y a donc 8 459 361 nombres malchanceux à 7 chiffres.