Soit $a \neq 0$ et b deux réels fixés. On considère l'équation différentielle suivante sur $I = \mathbf{R}$ avec conditions initiale suivante dans laquelle v_0 est un réel donné :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} v' + av & = & b & \text{sur} \quad I \quad (1) \\ v(0) & = & v_0 & \end{array} \right.$$

1. Donner la solution exacte v_* de (E)

2. **a)** Soit $f : t \mapsto f(t)$ une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et C_f sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. On suppose que f est dérivable en un point $t \in \mathbf{R}$. Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse t.

b) Soit v une solution de l'equation différentielle (1) sur $\mathbf{R}$, C_v sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, et t un réel. Donner l'équation de la tangente T_v à C_v au point d'abscisse t en fonction de a, b, et $v(t)$.

3. Soit $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$. On cherche à calculer une valeur approchée du reél $v_*(t)$, la solution exacte de (E). Pour cela, on procède de la manière suivante :

— On se place sur le segment $[0, t]$.

— On fixe un entier $n > 0$ et on pose : $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{t}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}t, \ldots$, $t_n = t$. On obtient donc pour tout entier k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, en posant $J_k = [t_k, t_{k+1}]$, n segments de longueur $\frac{t}{n}$.

— L'idée est de remplacer la courbe C_{v_*} sur $[0, t]$ par une ligne brisée joignant des points $A_0(t_0, u_0), A_1(t_1, u_1), \ldots A_n(t_n, u_n)$ obtenus en calculant judicieusement les nombres $u_0, \ldots, u_n$: on espère que u_n soit une bonne valeur approchée de $v_*(t)$. L'idée directrice est que si n est assez grand, les intervalles $J_0, \ldots, J_{n-1}$ sont suffisamment petits pour considérer que remplacer la courbe C_{v_*} par une de ses tangentes sur chacun des ces intervalles reste une bonne approximation.

Pour cela, on choisit de partir de $A_0(t_0, v_0)$ et on suit l'idée que si J_0 est suffisamment petit, C_{v_*} se confond avec sa tangente T_0 au point A_0.

a) Donner l'équation de T_0. Quelles sont les coordonnées du point de T_0 d'abscisse t_1 ? On choisit alors A_1 égal à ce point. En déduire u_1 en fonction de u_0, a, b, t, n.

b) Soit $k < n$ un entier naturel. Supposons que les réels $u_0, \ldots, u_k$ soient connus. Donner l'équation de la tangente T_k à C_v au point $A_k(t_k, u_k)$ (ainsi supposé connu). En choisissant A_{k+1} égal au point de T_k d'abscisse t_{k+1}, vérifier que l'on a la relation :

$$\forall k < n \quad u_{k+1} = \left(1 - \frac{at}{n}\right) u_k + \frac{b}{n} t$$

c) En déduire la valeur de u_n.

d) En admettant que si α est un réel quelconque, $\lim_{x \to \infty} (1 + \alpha/x)^x$ existe et vaut $\exp(x)$, étudier la limite de u_n quand $n \to \infty$.

4. Conclure