

### Exercice 1

Pour tout entier naturel  $n$  on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

Le but de l'exercice est de trouver une expression explicite de  $I_n$  pour en déduire une relation sur les coefficients binomiaux.

1. Calculer  $I_0$ .
2. Calculer  $I_n$  pour tout entier  $n$  à l'aide de la formule du binôme (on laissera le résultat sous forme de somme).
3. **a)** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par une intégration par parties, montrer la relation :

$$(E_k) \quad (2k+1)I_k = 2kI_{k-1}.$$

- b)** Montrer que  $I_k > 0$  pour tout entier  $k$  par récurrence.
- c)** Montrer alors en faisant le produit des relations  $(E_k)$  de  $k = 1$  à  $n$  que :

$$\forall k \geq 1 \quad I_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}$$

4. **a)** Calculer  $I_1$ .
- b)** Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{4^n}{(2n+1) \times \binom{2n}{n}}$$

5. En déduire une expression de  $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$  sous forme de somme alternée.

### Exercice 2

Pour cet exercice, vous avez besoin de l'aide-mémoire et devez essayer de le résoudre *sans* la machine.

1. Dire ce qui se passe après chaque instruction après avoir qualifié le type d'action effectué.
2. En cas d'instruction erronée, expliquer la (les) cause(s) possible(s) d'erreur et proposer une solution pour corriger.

```

>>> bonjour = 2                                # instruction 1
>>> 'bonjour' + bonjour                         # instruction 2
>>> 'Voici ' + bonjour + ' ' + bonjour[:3]*2 + 's' # instruction 3

```

console

3. Que donnerait le résultat de l'instruction 3 suivant les corrections possibles à apporter à cette dernière ?

### Exercice 3

Écrire ci-dessus le script de la fonction maximum, qui prend en entrée deux flottants et retourne en sortie le plus grand de ces deux flottants. Par exemple : `maximum(1,3)`, tout comme `maximum(3,1)`, retourne 3, tandis que `maximum(1,1)` renvoie 1.

```
1  """
2  Exercice 2 du DM3. Construction d'une fonction maximum
3  qui prend deux flottants en entrée et renvoie en sortie le plus grand
4  de ces deux flottants
5  """
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15  # fin
```