■ Exercice 1.

1. Il est clair que $I_0 = 1$.

2. D'après la formule du binôme, pour tout entier n et tout réel t dans $[0,1]$:

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k}.$$

La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = (1-t^2)^n$ est polynomiale, donc continue. On peut donc calculer l'intégrale I_n et par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 \quad \text{car } 2k \neq -1 \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

3. a) Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Considérons les fonction u et v définies sur $[0,1]$ par $u(t) = t$ et $v(t) = (1-t^2)^k$. Ces fonctions sont visiblement de classe C^1 sur $[0,1]$. Par une intégration par parties, on obtient, puisque $v = u'v$:

$$I_k = \left[t(1-t^2)^k\right]_0^1 - 2k\int_0^1 (1-t^2)^{k-1}t^2\mathrm{d}t.$$

Le terme tout intégré est nul puisque la fonction $t \mapsto t(1-t^2)$ s'annule en 0, et 1. Un petit coup de cuillère invisible sur la seconde intégrale donne, en partant de $t^2 = (t^2-1)+1$:

$$I_k = 2k\left(\int_0^1 -(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t + I_k\right),$$

soit en développant :

$$I_k = 2kI_{k-1} - 2kI_k,$$

ce qui donne bien après cosmétique la relation (E_k).

b) Si on note pour tout entier naturel P_n la propriété $I_n > 0$, on a vu que $I_0 = 1 > 0$ donc P_0 est vraie. Pour l'hérédité, soit $k \in \mathbf{N}^\star$ et supposons que P_k est vraie, montrons que P_{k+1} est vraie. D'après (E_{k+1}), $(2k+3)I_{k+1} = (2k+2)I_k$. Comme $k > 0$, le produit de membre de droite de la dernière égalité est strictement positif par hypothèse de récurrence. Il en est par conséquent de même pour le membre de gauche. Comme $2k+1 > 0$, $I_{k+1} > 0$. Ainsi, P_{k+1} est vraie. Par récurrence, $I_k > 0$ pour tout entier k.

c) Soit $n \geq 1$. Faisons le produit des relations membre à membre des relations (E_k) de $k = 1$ a n :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(2k+1)I_k &= \prod_{k=1}^{n}(2k)I_{k-1} \\
\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}I_k &= \prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}I_{k-1} \text{ par règles de calcul sur les produits}
\end{aligned}$$

Comme tous les facteurs sont non nuls dans cette égalité par la question précédente notamment, on peut écrire :

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} I_k}{\prod_{k=1}^{n} I_{k-1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$

Le produit de gauche est telescopique, il vaut $I_n/I_0 = I_n$ puisque $I_0 = 1$. D'où le résultat.

4. a) Calculons $I_1 = \int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t = 2/3$ par simple intégration à vue.

b) Notons pour tout entier strictement positif Q_n la propriété

$$(Q_n): \quad I_n = \frac{4^n}{(2n+1)\times\binom{2n}{n}}.$$

Comme $\binom{2}{1} = 2$, le membre de droite de (Q_1) vaut $2/3{=}I_1$ d'après la question précédente, donc (Q_1) est vraie. Montrons ensuite que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1})$.
D'après la relation (E_k) qu'on peut appliquer pour $k = n+1$:

$$\begin{aligned}
(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n &\overset{(Q_n)}{=} (2n+2)\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \\
&= (2n+2)(2n+2)\frac{4^n}{(2n+2)(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ par un coup de cuillère invisible} \\
&= 4(n+1)^2\frac{4^n}{(2n+2)(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ un peu de factorisation} \\
&= \frac{4^{n+1}(n+1)(n+1)n!n!}{(2n+2)(2n+1)2n!} \text{ par définition du coefficient binomial} \\
&= \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} \text{ par définition du coefficient binomial} \\
&= \frac{4^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi $(Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1})$, et la récurrence est achevée.

5. On déduit de tout cela que

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{2n+1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

■ Exercice 2.

Instruction 1. C'est une initialisation de variable : `bonjour`, de type entier.

Instruction 2. concaténation de deux chaînes, puisque `'bonjour'` en est une, et l'opération qui suit l'objet est +. Or le second argument est de type entier, il y donc une erreur. Solutions possibles :

1. L'utilisateur voulait bien concaténer deux chaines, il faut alors corriger l'instruction en `'bonjour'+ str(bonjour).`
2. L'utilisateur voulait additionner deux entiers (ou flottants), dans ce cas, il fallait utiliser un objet de type entier, et donc remplacer la chaîne `'bonjour'` par autre chose de type flottant.

Instruction 3. Comme `[:3]` est une opération d'extraction sur une chaîne, on est en train de concaténer des chaines. Or `bonjour` n'en est pas une, donc il faut remplacer `bonjour[:3]` par `'bonjour'[:3]` et `'Voici '+bonjour` par `'Voici '+str(bonjour)` (ou `'Voici '+'bonjour'`, mais cela ne donne pas le même résultat).

La première solution donne comme résultat la chaîne : `'Voici 2 bonbons'` tandis que la deuxieme donnerait la chaîne : `'Voici bonjour bonbons'`.

■ **Exercice 3.** Voici la solution

```python
"""
Exercice 2 du DM3. Construction d'une fonction maximum
qui prend deux flottants en entrée et renvoie en sortie le plus grand
de ces deux flottants
"""
def maximum(x,y):
    if x>y:
        z=x
    else:
        z=y
    return z
# fin
```