■ Exercice 1.

1. a) Par définitiion (reportez-vous à votre cours de TS), si ω et un nombre réel, le nombre complexe noté $e^{i\omega}$ est défini par :

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega.$$

b) Soit z et z' deux nombres complexes et mettons-les sous forme algébrique :

$$z = r + i\omega \quad \text{et} \quad z = r' + i\omega'$$

où les nombres r, r', ω, ω sont **réels**.
On a alors la chaîne d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
e^z \times e^{z'} &\overset{\text{def.1}}{=} e^r \times e^{i\omega} \times e^{r'} e^{i\omega'} \\
&= e^r e^{r'} \times e^{i\omega} e^{i\omega'} \text{ car le produit dans } \mathbf{C} \text{ est commutatif} \\
&= e^{r+r'} e^{i\omega} e^{i\omega'} \text{ propriété de } e^x \text{ pour } x \text{ réel} \\
&= e^{r+r'} \times e^{i(\omega+\omega')} \text{ propriété de } e^{i\theta} \text{ pour } \theta \text{réel} \\
&= e^Z \text{ avec la définition 1 utilisée en sens inverse où } Z = (r + r') + i(\omega + \omega').
\end{aligned}$$

En effet, puisque les nombres r, r', ω, ω sont **réels**, $(r + r') + i(\omega + \omega')$ est bien la forme algébrique de Z. Comme $Z = z + z'$, on a bien la formule demandée.

c) Partant encore de la définition 1 :

$$e^z = e^r e^{i\omega} = e^r(\cos\omega + i\sin\omega) = e^r\cos\omega + ie^r\sin\omega.$$

Comme r et ω sont réels, les nombres$X = e^r\cos\omega$ et $Y = e^r\sin\omega$ le sont aussi, et on a bien la forme algébrique de e^z.

d) En mettant u et $e^{r+i\omega}$ sous forme algébrique (utiliser 1.c)) et en développant bêtement le produit, il vient :

$$Q = \underbrace{e^r(a\cos\omega - b\sin\omega)}_{X} + i \times \underbrace{e^r(a\sin\omega) + b\cos\omega)}_{Y}.$$

Comme X et Y sont des sommes de produits de nombres réels, ce sont des réels, et on a bien la forme algébrique de Q.

2. La fonction $a = \mathfrak{Re}(f)$ est définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $a(x) = x\ln x + \cos 3x$ et la fonction $b = \mathfrak{Im}(f)$ est définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $b(x) = \sin 3x$. Clairement, les fonction a et b sont des sommes de produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^\star$, donc par définition 3, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et encore par définition 3 :

$$f' = a' + ib'.$$

En appliquant les règles de calcul sur la dérivation :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star \quad f'(x) = 1 + \ln x - 3\sin x + i \times 3\cos 3x.$$

En arrangeant les termes :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star \quad f'(x) = \ln x + 3ie^{3ix}$$

3. a) La fonction q est continue sur $\mathbf{R}$, donc il existe au moins une primitive de q sur cet ensemble (c'est le cours, et au passage, je rappelle que pour l'existence, la condition «être sur un intervalle» n'intervient pas).

b) On constate que si on pose $q_{\mathrm{C}}(x) = e^{-x}e^{2ix}$, alors $q_{\mathrm{C}}(x) = e^{-x}\cos 2x + ie^{-x}\sin 2x$. Commme les termes de part et d'autre du nombre i sont des réels, la fonction q_{C} définie sur $\mathbf{R}$ par la relation ci-dessus convient.

c) On remarque que $q_{\mathrm{C}}(x) = e^{-x}e^{2ix} = e^{mx}$ si on pose $m = -1+2i \in \mathbf{C}^{\star}$. Par primitivation à vue :

$$\mathbf{Q}(x) = \int^{x} q_{\mathrm{C}}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{m}e^{mx}.$$

d) Il suffit maintenant de calculer la partie réelle de q_{C}. Pour cela, on remarque que

$$\mathbf{Q}(x) = u \times e^{z}$$

où $u = 1/m = -\dfrac{1+2i}{5}$ et $z = (-1+2i)x$. On applique alors le résultat de 1.d) avec les réels suivants :

$$a = -1/5, b = -2/5, r = -x, \omega = 2x$$

et qui nous donne :

$$Q(x) = \mathfrak{Re}(\mathbf{Q}(x)) = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x) - \cos(2x)\right).$$

La fonction Q définie sur $\mathbf{R}$ par la relation ci-dessus est une primitive sur cet intervalle de la fonction q.

■ **Exercice 2.**

Voici le script et le résultat obtenu dans la console :

```python
"""Script du DM2.
On y construit la fonction
q : x |-> exp(-x)cos(2x)

"""
from math import cos, exp
def q(x):
    return exp(-x)*cos(2*x)
# fin du script
```

console

```
In[1]: q(2)

Out[1]:  -0.0884610445654
```