Corrigé Devoir Maison 1

Rendu mercredi 7 septembre 2016

* * *

Exercice 1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

1. *Ensemble de définition de f*

   (a) <u>Variations de u</u> :

   La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$u'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$
   <u>Limite en $-\infty$</u> : on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$.

   <u>Limite en $+\infty$</u> : on a
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \mathrm{e}^x - x = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right).$$
   Or
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{par croissances comparées,}$$
   donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

   D'où le tableau de variations de u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) <u>Ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f</u> :

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \neq 0.$$
   D'après le tableau de variations de u, on a :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) \geqslant 1 > 0.$$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{D} = \mathbb{R}.}$

2. *Courbe représentative de f*

(a) Variations de f :

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$, car c'est le quotient de fonctions dérivables (sur leurs ensembles de définition), et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - x - x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}.$$

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1-x$, c'est-à-dire positif si $x \leqslant 1$ et négatif si $x \geqslant 1$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty, 1] \text{ et décroissante sur } [1, +\infty[.}$

(b) Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$:

∗ En $-\infty$: on a

$$u(x) = \frac{x}{x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1}.$$

Or :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0 \quad \text{(attention, il ne s'agit pas de croissances comparées),}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.}$

∗ En $+\infty$: on a

$$u(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{1}{1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

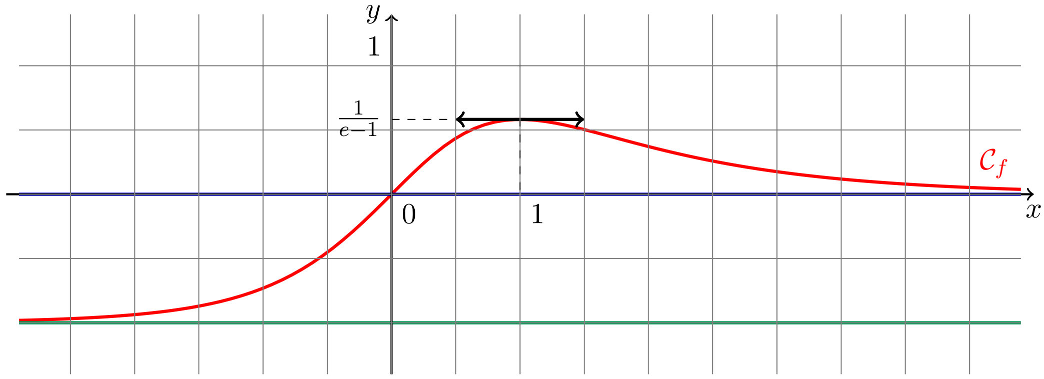
Remarque : La courbe de f présente une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

(c) Courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f :

En réunissant les réponses aux questions précédentes, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	0

D'où la courbe représentative de f :



3. <u>Ensemble de définition de la fonction $\ln(f)$</u> :

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(f(x)) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

   f étant définie sur $\mathbb{R}$, la condition $f(x)$ existe est vérifiée. De plus, l'étude précédente montre que :

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

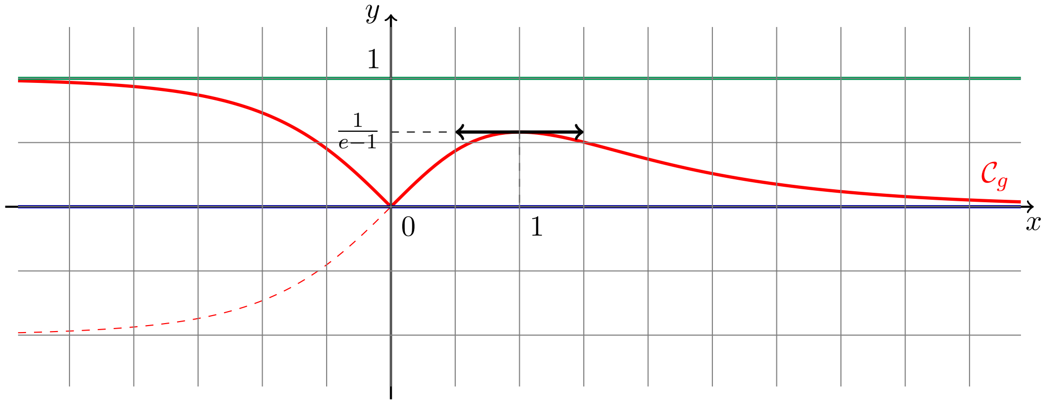
$$\text{Conclusion : } \boxed{\ln(f) \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

4. <u>Courbes représentatives de g</u> :

   Par définition, on a :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

   Graphiquement, on obtient la courbe représentative de g à partir de celle de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses des portions de $\mathcal{C}_f$ situées sous l'axe des abscisses.

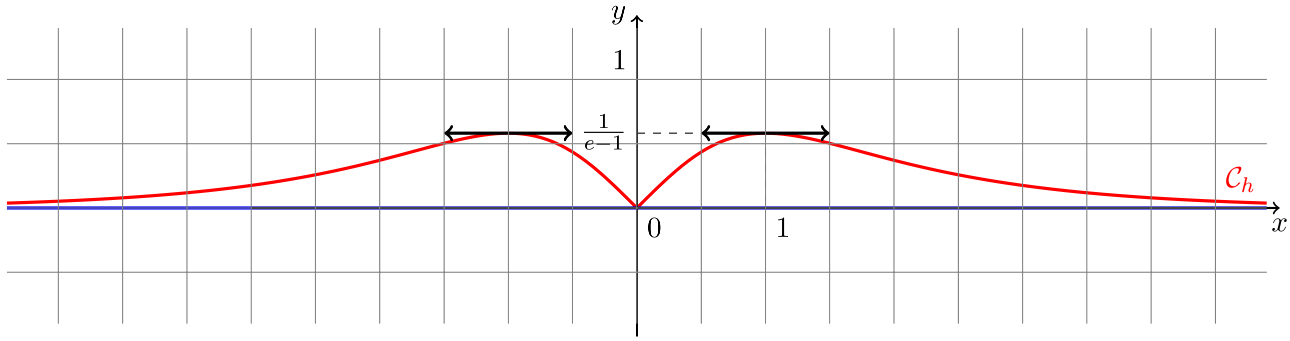


   <u>Courbe représentative de h</u> :

   Par définition, on a :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(-x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

   Graphiquement, cela signifie que les courbes de h et f sont confondues sur $\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}_-$, la courbe de h s'obtient en effectuant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la courbe de f.
   On peut aussi remarquer la fonction h ainsi définie est paire et donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.


y
1
$\frac{1}{e-1}$
0
1
x
$\mathcal{C}_h$

* * *