Exercice 1

1.

> ■ **Définition 1.** *Si z est un nombre complexe de forme algébrique $z = r + i\omega$ (où r, ω sont des réels), on note :*
>
> $$e^z = e^r \times e^{i\omega}$$

a) Rappeler la définition de $e^{i\omega}$ pour ω réel.

b) **Montrer** que si z et z' sont deux nombres complexes quelconques :

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

(je rappelle que d'après le cours de Terminale, vous ne savez calculer e^x que si x est réel, ou imaginaire pur).

c) Soit r, ω deux réels et $z = r + i\omega$. Donner la forme algébrique de e^z.

d) Si $u = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe u (a et b sont donc réels), donner la forme algébrique du nombre :

$$Q = u \times e^{r+i\omega}$$

2.

> ■ **Définition 2.** *On appelle fonction à valeurs complexes toute fonction f définie sur un sous-ensemble I de $\mathbf{R}$ et telle que :*
>
> $$\forall x \in I \quad f(x) \in \mathbf{C}.$$

Dans ce cas, la fonction notée $\mathfrak{Re}(f)$ (resp. $\mathfrak{Im}(f)$) est la fonction définie sur I par (observez bien le jeu de parenthèses) :

$$\forall x \in I \quad \mathfrak{Re}(f)(x) = \mathfrak{Re}(f(x)) \quad (\text{resp.} \quad \mathfrak{Im}(f)(x) = \mathfrak{Im}(f(x)) \quad).$$

Remarquez que ce sont des fonctions à valeurs réelles et qu'en termes de fonctions on a donc :

$$f = \mathfrak{Re}(f) + i\mathfrak{Im}(f).$$

> ■ **Définition 3.** *On dira qu'une fonction f à valeurs dans $\mathbf{C}$ est continue (resp. dérivable) sur I si et seulement si les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont, et dans ce dernier cas, on pose :*
>
> $$f' = (\mathfrak{Re}(f))' + (\mathfrak{Im}(f))'.$$

> ■ **Définition 4.** *Si une fonction f est à valeurs dans $\mathbf{C}$, on appelle primitive de f sur I toute fonction F à valeurs complexes sur I dérivable sur I et telle que $F' = f$.*

a) (exemple) Justifier que la fonction $f : x \mapsto x \ln x + e^{3ix}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$.

b) En appliquant les définitions précédentes, déterminer la fonction f'.

3. Le but de cette question est de déterminer une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$q(x) = e^{-x}\cos(2x).$$

a) Justifier qu'il existe de telles primitives.

b) En utilisant la question **1.**, trouver une fonction $q_{\mathbf{C}}$ à valeurs complexes telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad q_{\mathbf{C}}(x) = \mathfrak{Re}(q(x))$$

c) Calculer une primitive de $q_{\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{R}$.

d) En utilisant **1**, donner alors une primitive Q de q sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2

Écrire un script `Python` que vous sauvegarderez dans un fichier appelé `DM02.py` dans lequel vous programmerez la fonction q de l'exercice précédent. Reproduisez votre script ci-dessous :

```python
"""Script du DM2.
On y construit la fonction
q : x |-> exp(-x)cos(2x)

"""
from math import cos, exp
# fin du script
```

Indiquer ici ce que vous donne votre console :

```
console
In[1]: q(2)

Out[1]:
```