Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé. L'unité de mesure des longueurs choisie est le cm. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ainsi que la fonction F définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

1. a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_F$ de la fonction F

b) Étudier la parité de F. Expliquez comment déduire du tracé de sa courbe $\mathscr{C}_F$ sur $\mathscr{D}_F \cap \mathbf{R}_+$ déduire le tracé complet de $\mathscr{C}_F$.

2. a) Justifier que F est dérivable sur $\mathscr{D}_F$ et donner l'expression de $F'(x)$ pour tout réel x dans $\mathscr{D}_F$.

b) En déduire que F est l'unique primitive de f sur un intervalle à préciser vérifiant la condition $F(0) = 0$.

c) Étudier les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

3. Soit $\lambda > 1/2$ un réel. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan constitué des points $M(x; y)$ du plan tels que $1 \leq x \leq 2\lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

a) Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

b) Calculer $\mathscr{A}(1)$.

c) Étudier la limite quand $\lambda \to +\infty$ de $\mathscr{A}(\lambda)$.

4. On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

a) Donner la valeur de u_0.

b) Par une intégration par parties, calculer u_3.

(on pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

c) Établir que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall x \in [0;1] \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

d) En intégrant cet encadrement sur l'intervalle $[0,1]$, conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et, le cas échéant, calculer sa limite.