Corrigé du Devoir Maison 2

Rendu mardi 27 septembre 2016

* * *

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1. (a) *Domaine de définition de F*

   F est définie en x tel que : $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   Pour tout réel x, on a : $1 + x^2 > x^2$, donc $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$ (par stricte croissance de la racine carrée, et par propriété de la valeur absolue), soit $\sqrt{1+x^2} + x > 0$.
   Ainsi, $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

   (b) *Parité de F et symétries de $\mathcal{C}_F$*

   L'ensemble de définition de F est symétrique par rapport à 0 (il est centré en 0).
   Pour tout x réel, on a :
   $F(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$;
   en utilisant l'expression conjuguée. Il vient donc :
   $F(-x) = \ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -F(x)$.
   Ainsi, $\boxed{F \text{ est impaire.}}$

   De la donnée de $\mathcal{C}_F$ sur $\mathbb{R}_+$, par symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{\jmath})$, on obtient l'intégralité de la courbe $\mathcal{C}_F$.

2. (a) *Dérivabilité et dérivée de F*

   $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable en x tel que $1 + x^2 > 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.
   Par opérations sur les fonctions dérivables, on en déduit que $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$
   Pour tout réel x, on a : $F'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   On obtient donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x).}$

   (b) *Lien entre f et F*

   D'après ce qui précède, F est *une* primitive de f sur $\mathbb{R}$. De plus, $F(0) = \ln(0 + \sqrt{1}) = 0$.
   D'après le cours, $\boxed{\text{sur l'}\underline{\text{intervalle}}\ \mathbb{R},\ F \text{ est l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } 0.}$

   (c) *Limites de F*

   Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$
   Puisque F est impaire, on peut affirmer que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.}$

3. (a) *Expression de $\mathcal{A}(\lambda)$*

   f est positive sur $\mathbb{R}$, donc l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ correspond à l'intégrale : $\boxed{\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^{2\lambda} f(x)\mathrm{d}x}$.
   Exprimons cette intégrale à l'aide de la primitive F de f :
   $\int_1^{2\lambda} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{2\lambda} = F(2\lambda) - F(1) = \ln\left(\frac{2\lambda+\sqrt{1+4\lambda^2}}{1+\sqrt{2}}\right)$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}(\lambda) = \ln\left(\frac{2\lambda+\sqrt{1+4\lambda^2}}{1+\sqrt{2}}\right)}$.

   (b) *Calcul de $\mathcal{A}(1)$*

   D'après ce qui précède, $\mathcal{A}(1) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{1+4}}{1+\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right) \approx 0.562$.

(c) <u>*Limite en* $+\infty$ *de* $\mathcal{A}(\lambda)$</u>

On sait que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et que $\mathcal{A}(\lambda) = F(2\lambda) - F(1)$.

Par composition des limites, on peut affirmer que : $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty.}$

4. (a) <u>*Valeur de* u_0</u>

$u_0 = F(1) - F(0) = F(1) = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.881$.

(b) <u>*Calcul de* u_3</u>

$u_3 = \int_0^1 x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$. Posons les fonctions $v : x \mapsto x^2$ et $w : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

v et w sont de classe C^1 sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$ on a : $v'(x) = 2x$ et $w'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

D'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^1 vw' = [vw]_0^1 - \int_0^1 v'w$.

Ainsi, $u_3 = \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

On reconnaît, à une constante multiplicative près, la dérivée de $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

On a donc : $u_3 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3} = u_3 \approx 0.195}$.

(c) <u>*Un encadrement utile*</u>

Pour tout entier positif n, pour tout $x \in [0;1]$, on a : $0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$.

Par ailleurs, $\sqrt{1+x^2} \geqslant 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$ (par décroissance de la fonction inverse sur $[1;+\infty[$).

En multipliant cette inégalité par la quantité positive x^n, on obtient : $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

En résumé : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n.}$

(d) <u>*Limite de la suite* (u_n)</u>

Par positivité de l'intégrale, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$.

Ainsi : $0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, soit $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

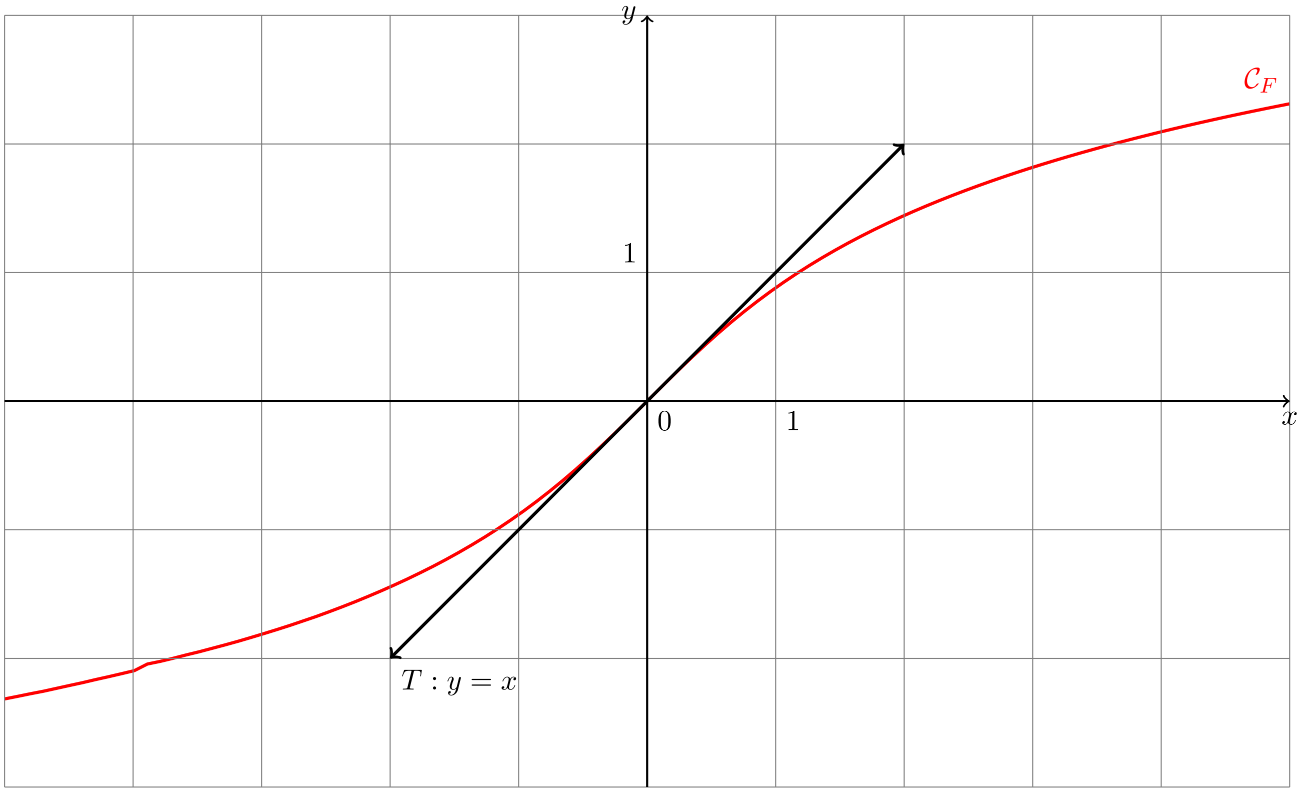
D'après le théorème d'encadrement (dit *des gendarmes*), $\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

La fonction F de ce problème est aussi appelée fonction *Argsh*. Elle peut être définie comme la bijection réciproque sur $\mathbb{R}$ de la fonction *sinus hyperbolique* (sh), elle-même étant la partie impaire de la fonction *exponentielle* :

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$ et $\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh} x) = x$.

En tant que primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, il peut être utile de s'en souvenir...

Représentation graphique de la fonction F sur $[-5;5]$:



$* \quad * \quad *$