



---

# TER

## Paradoxe de Banach-Tarski

---

*Auteur :*  
AKDIM YASSER

*Encadrante :*  
MACLEAN CATRIONA

11 mai 2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du projet</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le paradoxe de la sphère de Hausdorff</b>	<b>2</b>
2.1	Introduction. . . . .	2
2.2	Notations. . . . .	2
2.3	Preliminaires. . . . .	2
2.4	Schéma de la démonstration du paradoxe de Hausdorff. . . . .	3
2.4.1	Première étape de la démonstration . . . . .	4
2.4.2	Deuxième étape de la démonstration . . . . .	5
2.4.3	Troisième étape de la démonstration . . . . .	6
2.5	Rotations d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 . . . . .	6
2.6	Construction d'un sous-groupe libre de rang 2 de $\mathcal{SO}(3)$ : . . . . .	8
2.7	Étude d'un sous ensemble X de $S^2$ sans points fixe de G. . . . .	13
2.8	Équidécomposabilité. . . . .	15
2.9	Ensembles Paradoxaux. . . . .	18
<b>3</b>	<b>Décomposition d'ensembles de points en parties respectivement congruentes.</b>	<b>20</b>
3.1	Propriétés générales de l'équivalence par décomposition finie. . . . .	20
3.2	Retour à l'espace euclidien à 3 dimensions. . . . .	24
3.3	L'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions . . . . .	24
	<b>Annexes</b>	<b>28</b>
	<b>Annexe 1</b>	<b>28</b>

# Chapitre 1

## Présentation du projet

En 1914 [4], le mathématicien Hausdorff, un des fondateurs de la topologie générale, avait posé le problème suivant : est-il possible d'associer à tout ensemble borné  $A \subset \mathbb{R}^n$  un nombre positif ou nul  $\mu(A)$  tel que :

- $\mu$  n'est pas pas identiquement nul.
- Si  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , alors  $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$
- $\mu(A) = \mu(B)$  si  $A$  et  $B$  sont égaux à une rotation ou translation près.

En d'autres termes, il voudrait savoir si une mesure universelle invariante par rotation et translation peut exister.

Banach a construit une telle application  $A \rightarrow \mu(A)$  pour  $n = 1, 2$ , et Hausdorff avait démontré par l'absurde l'impossibilité de ce problème pour  $n \geq 3$  en établissant le paradoxe de la sphère qui dit que la sphère est équidécomposable en deux copies d'elle-même. Ainsi apparaît, à propos de ce problème, une différence fondamentale et intuitivement inexplicable entre le plan ( $n = 2$ ) et l'espace usuel ( $n = 3$ ).

Analysant de plus près l'impossibilité du problème de la mesure universelle pour  $n \geq 3$ , Banach, dans un travail commun avec Tarski[3], démontre en 1923 l'étrange résultat connu sous le nom de « paradoxe » de Banach-Tarski et qui est célèbre sous la forme donnée par Hausdorff : une boule dans  $\mathbb{R}^3$  peut être divisée en un nombre fini de morceaux (non mesurables au sens de Lebesgue) avec lesquels on peut reconstruire deux boules de la même taille. L'énoncé initial de Banach-Tarski est bien plus fort : dans  $\mathbb{R}^n$ , ( $n \geq 3$ ) tous les ensembles  $A$  et  $B$  d'intérieurs bornés et non vides sont équi-décomposables : en d'autres termes, on peut décomposer  $A$  en un nombre fini de morceaux à partir desquels on peut reconstruire  $B$  par déplacements c'est à dire des rotations et des translations.

La différence fondamentale entre le plan et l'espace se traduit ainsi par des résultats du type suivant : deux polygones arbitraires dont l'un est contenu dans l'autre ne sont jamais équivalents par décomposition finie, alors que deux polyèdres arbitraires le sont toujours !

Le but principal du TER est de comprendre la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski à partir des articles originaux de Stefan Banach et Alfred Tarski, on va donc démontrer dans le deuxième chapitre le paradoxe de la sphère de Hausdorff, puis dans le troisième chapitre on va étudier le paradoxe dans le cas général en s'appuyant sur les résultats du deuxième chapitre, et on va montrer que le paradoxe n'est pas vrai en dimension inférieure à 2.

## Chapitre 2

# Le paradoxe de la sphère de Hausdorff

### 2.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est de démontrer le paradoxe de Hausdorff, qui constitue un premier exemple du paradoxe de Banach-Tarski ; Le paradoxe lui même s'appuie sur cet exemple.

**Théorème 1.** (*Paradoxe de Hausdorff*)

*La sphère unité  $S^2$  peut être découpée en un nombre fini de parties disjointes,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , tels qu'il existe des isométries positives  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  telles que  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \varphi(A_i)$  est deux copies de  $S^2$ .*

On va se baser dans ce chapitre sur la référence [2].

### 2.2 Notations.

Dans tout ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base  $\mathcal{B}$  orthonormée directe. Le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$  est noté  $\langle u, v \rangle$ . Les déplacements de  $E$  sont les rotations et les translations. (c'est à dire des isométries positives)

Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque non vide.  $A$  et  $B$  étant deux sous-ensembles de  $\Omega$ , on note  $A \setminus B$  l'intersection de  $A$  et du complémentaire de  $B$  ; en d'autres termes :

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$\mathfrak{S}(\Omega)$  désigne le groupe des bijections de  $\Omega$  dans lui-même. Soit  $f \in \mathfrak{S}(\Omega)$ , si  $A$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ , on notera  $f(A)$  le sous-ensemble de  $\Omega$  dont les éléments sont dans les images des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{y \in \Omega \mid \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y\}$$

### 2.3 Préliminaires.

Avant de commencer on va rappeler quelques résultats sur les fonctions de  $\mathfrak{S}(\Omega)$  qui nous seront utiles par la suite.

**Lemme 1.** Soient  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\Omega$ , et  $f \in \mathfrak{S}(\Omega)$ , on a alors :

1.  $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$
2.  $A, B \subset \Omega \Rightarrow (A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B))$
3. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-ensembles de  $\Omega$  indexée par l'ensemble  $I$ , alors :

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

4. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-ensembles de  $\Omega$  indexée par l'ensemble  $I$ , alors :

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

5.  $f(A|B) = f(A) \setminus f(B)$

*Démonstration.*

Les trois premières affirmations sont vraies pour toutes les applications, et on les admet. Démontrons les deux dernières affirmations :

— Pour 4, l'implication directe est toujours vérifiée :

$$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{i \in I} A_i, y = f(x) \Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

Pour l'implication réciproque on a besoin de l'injectivité de  $f$  :

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i) &\Rightarrow \forall i \in I, \exists y' \in f(A_i), y = y' \Rightarrow \forall i \in I, \exists x_i \in A_i, y = f(x_i) \\ &\Rightarrow \forall i \in I, \exists x_i \in A_i, y = f(x_i) \text{ et } x_i = x_j \forall i, j \\ &\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{i \in I} A_i, y = f(x) \Rightarrow y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \end{aligned}$$

— Pour 5 l'inclusion réciproque est toujours vraie :

$$\begin{aligned} y \in f(A) \setminus f(B) &\Rightarrow \exists x \in A, y = f(x) \text{ et } \forall x' \in B, y \neq f(x') \\ &\Rightarrow \exists x \in A \setminus B, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \setminus B) \end{aligned}$$

Pour l'inclusion directe on a besoin de l'injectivité de  $f$  :

$$y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists x \in A \setminus B, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A) \text{ et } \forall x' \in B, y \neq f(x') \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$$

□

**Corollaire 1.** Sous les conditions du Lemme 1 :

$$(A_i)_{i \in I} \text{ est une partition de } \Omega \Leftrightarrow (f(A_i))_{i \in I} \text{ est une partition de } \Omega$$

*Démonstration.* Ceci découle de 1, 3 et 4 :

$$(A_i)_{i \in I} \text{ est une partition de } \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \\ \forall (i, j), i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases} \begin{matrix} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \xrightarrow{f} \end{matrix} \begin{cases} \forall i \in I, f(A_i) \neq f(\emptyset) = \emptyset \\ \bigcup_{i \in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = f(\Omega) = \Omega \\ \forall (i, j), i \neq j \Rightarrow f(A_i \cap A_j) = f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset \end{cases}$$

L'implication réciproque se démontre en composant avec  $f^{-1}$  qui a les mêmes propriétés que  $f$ .

□

## 2.4 Schéma de la démonstration du paradoxe de Hausdorff.

Dans cette section on présente une vue d'ensemble de la démonstration du paradoxe de Hausdorff, avant de s'atteler aux détails de la démonstration. Les raisonnements de cette section sont inspirés de la référence [6]. Avant de lister les étapes qu'on va suivre, on a tout d'abord besoin de quelques définitions

**Définition 1.** Un alphabet dans un ensemble  $G$  est un ensemble fini et non vide d'éléments distincts de  $G$ .

**Définition 2.** Un mot défini dans un alphabet  $\mathcal{A}$  est une suite finie d'éléments de  $\mathcal{A}$ . La longueur d'un tel mot est le nombre d'éléments dans la suite.

**Définition 3.** Un mot est dit réduit s'il ne contient pas deux éléments consécutifs qui soient inverses l'un de l'autre.

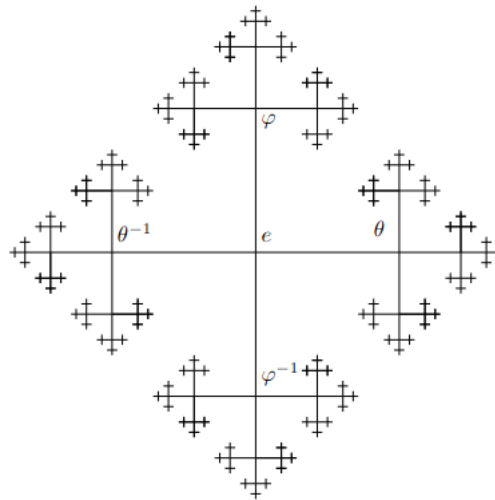
**Définition 4.** On dit que deux éléments  $\theta$  et  $\varphi$  d'un groupe  $G$  sont indépendants si pour tout mot réduit de longueur  $n \geq 2$ ,  $(g_1, \dots, g_n)$  dans l'alphabet  $\mathcal{A} = \{\theta, \varphi, \theta^{-1}, \varphi^{-1}\}$  on a que  $g_1 \dots g_n \neq 1_G$ .

**Définition 5.** Si un groupe  $G$  est engendré par deux éléments  $\theta$  et  $\varphi$  indépendants, on dit que  $G$  est librement engendré par  $\theta$  et  $\varphi$ .  $G$  est alors appelé un groupe libre de rang 2.

Pour démontrer notre théorème on va procéder comme suit

### 2.4.1 Première étape de la démonstration .

On va construire un groupe libre de rang 2 contenu dans  $\mathcal{SO}(3)$  et engendré par deux éléments  $\theta$  et  $\varphi$ . L'intérêt de cette construction est que ce groupe peut être représenté par la fractale suivante qu'on appelle le graphe de Cayley :



Dans cette représentation, les éléments de  $G$  sont les intersections des différents segments, et sont répartis de la manière suivante :

- L'élément neutre est le centre de la fractale.
- Pour multiplier un élément par  $\theta$  à gauche on se déplace (dans la fractale) à partir de cet élément vers la gauche.
- Pour multiplier un élément par  $\theta^{-1}$  à gauche on se déplace (dans la fractale) à partir de cet élément vers la droite.
- Pour multiplier un élément par  $\varphi$  à gauche on se déplace (dans la fractale) à partir de cet élément vers le haut.
- Pour multiplier un élément par  $\varphi^{-1}$  à gauche on se déplace (dans la fractale) à partir de cet élément vers le bas.

On note  $L(\sigma)$  la composante connexe de la fractale privé de l'élément neutre, qui contient  $\sigma$ , pour  $\sigma \in \{\theta, \theta^{-1}, \varphi, \varphi^{-1}\}$ . Si on multiplie à gauche par  $\theta$  la composante  $L(\theta^{-1})$ , on obtient la réunion des points des trois composantes  $L(\varphi^{-1})$ ,  $L(\theta^{-1})$  et  $L(\varphi)$ , plus l'élément neutre.

$$L(\theta^{-1}) = \text{fractal} \xrightarrow{\theta} \{e\} \cup L(\theta^{-1}) \cup L(\varphi^{-1}) \cup L(\varphi)$$

De même si on multiplie à gauche par  $\varphi$  la composante  $L(\varphi^{-1})$ , on obtient les trois composantes  $L(\varphi^{-1})$ ,  $L(\theta^{-1})$  et  $L(\theta)$ , plus l'élément neutre. En d'autres termes :

$$G = L(\theta) \cup \theta L(\theta^{-1}) = L(\varphi) \cup \varphi L(\varphi^{-1})$$

**Remarque 1.** *Le fait que le groupe  $G$  est libre implique que ses éléments s'écrivent de manière unique comme mot de l'alphabet  $\{\theta, \varphi, \theta^{-1}, \varphi^{-1}\}$  ; en d'autres mots, on ne peut jamais tomber sur un même élément en partant dans deux chemins différents dans la fractale, et en particulier les réunions ci-dessus sont disjointes.*

Le groupe  $G$  a donc la propriété d'être décomposable en parties disjointes,  $L(\varphi^{-1})$ ,  $L(\varphi)$ ,  $L(\theta^{-1})$  et  $L(\theta)$  telles qu'on peut reconstruire  $G$  soit à partir des deux premières, ou à partir des deux dernières parties.

## 2.4.2 Deuxième étape de la démonstration .

Après, on va essayer d'importer cette propriété de  $G$  à  $S^2$  en écrivant  $S^2$  comme réunion d'orbites de  $G$ . Ce programme sera mis en difficulté par le fait que la sphère  $S^2$  contient des éléments qui peuvent être fixés par des éléments de  $G$ , c.à.d que pour certains  $x$  l'application  $G \rightarrow S^2$  donnée par  $g \rightarrow g(x)$  ne sera pas injective. On va donc dans un premier temps travailler avec l'ensemble

$$X = S^2 - \{s \in S^2 \mid \exists g \in G, g(x) = x\}$$

de sorte que l'action de  $G$  sur  $X$  soit libre, i.e :

$$\begin{aligned} g_X: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g(x). \end{aligned}$$

est bijective puisque  $g$  est inversible et que :

$$\begin{aligned} \phi: G &\rightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g &\mapsto g_X. \end{aligned}$$

est un homomorphisme qui vérifie que pour tout  $x \in X$ ,  $g(x) = x \Rightarrow g = \text{Id}_G$ .

$G$  a la propriété d'être dans un certain sens algébriquement équidécomposable à deux copies de lui même, on va montrer donc qu'on peut importer cette propriété de  $G$  à  $X$ . Pour cela on va procéder comme suit

- Dans chaque  $G$ -orbite de  $X$  on va sélectionner un seul élément, pour garantir une unicité des éléments de  $X$  après l'action de  $G$ . Cette selection sera faite en utilisant l'axiome du choix,  $M$  sera l'union de ces choix.
- On représente donc  $X$  par la même fractale qu'avant, en remplaçant chaque élément  $g \in G$  par l'ensemble  $g(M) \subset X$ . On peut alors répéter le même raisonnement que pour  $G$  ; en divisant chaque  $G$ -orbite de la même façon que pour  $G$ , pour construire  $X$  à partir de parties disjointes dont la réunion est strictement incluse dans  $X$ . On dit que  $X$  est équidécomposable à deux copies de  $X$ .

### 2.4.3 Troisième étape de la démonstration .

En fin, on va montrer que  $S^2$  est équidécomposable à  $X$ , et donc équidécomposable à la réunion de deux copies de  $X$ , et que chaque copie de  $X$  est équidécomposable à  $S^2$ , pour conclure que  $S^2$  est équidécomposable à deux copies de  $S^2$ .

**Remarque 2.** *Un groupe libre de rang 2 ne peut pas être abélien. ( $g_1 g_2 = g_2 g_1 \Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = 1_G$ , ce qui contredit la définition d'un groupe libre).*

On va chercher donc à construire un sous-groupe libre de rang 2,  $G = \langle \rho, \tau \rangle$ , dans  $\mathcal{SO}(3)$ . D'après la Remarque 2, il faut que  $G$  soit non abélien, ceci nous conduit à étudier la commutativité de deux rotation de  $E$ .

## 2.5 Rotations d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 .

**Proposition 1.** *Soit  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux rotations vectorielles  $\neq \text{Id}_E$  de  $E$ , alors :*

$$\rho_1, \rho_2 \text{ commutent} \Leftrightarrow (\rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ ont même axe ou sont des demi-tour d'axes orthogonaux})$$

*Démonstration.*

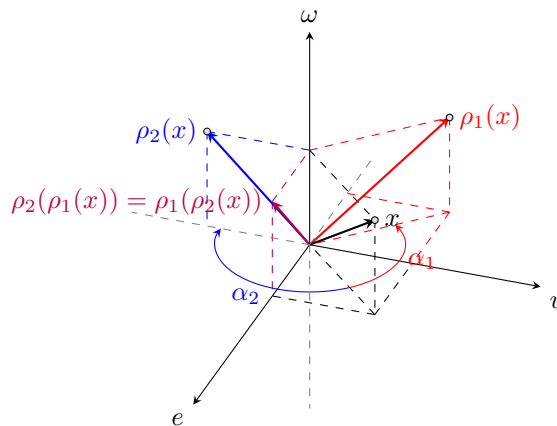
- On commence par l'implication réciproque, et on suppose dans un premier temps que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des rotations d'angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  respectivement autour de la droite  $D$  dirigée et orientée par un vecteur unitaire  $\omega$ , qu'on peut le compléter en une base orthonormée  $B = (\omega, e, u)$ . Les matrices de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans cette base sont :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

Alors il est clair que :

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

qui est la rotation d'axe  $D$  qui est dirigée et orientée par  $\omega$ , d'angle  $\alpha_1 + \alpha_2$ .



- Si maintenant  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux demi-tour d'axes respectifs  $D_1$  et  $D_2$  orthogonaux, alors si on prend  $e_1$  et  $e_2$  deux vecteurs unitaires directeurs de  $D_1$  et  $D_2$  respectivement et on les



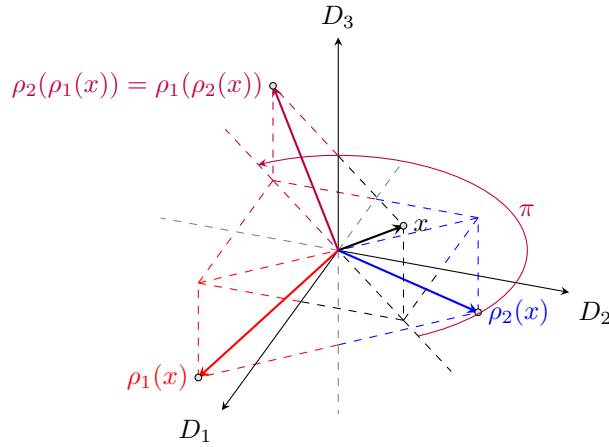
complète en une base orthonormée  $B = (e_1, e_2, e_3)$  on trouve que les matrices de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans  $B$  sont :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors il est clair que :

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est la rotation d'axe  $D_3$  qui est dirigée et orientée par  $e_3$ , d'angle  $\pi$ .



- Pour l'implication directe on va montrer dans un premier temps que pour une rotation vectorielle  $\rho$  distincte de  $\text{Id}_{\mathbb{E}}$ , d'axe  $D = \mathbb{R}\omega$  où  $\omega$  est un vecteur unitaire, si  $\Delta$  une droite vectorielle distincte de  $D$  et telle que  $\rho(\Delta) = \Delta$ , alors  $D$  et  $\Delta$  sont orthogonales et  $\rho$  est une demi-tour d'axe  $D$ . Et on conclut en utilisant le fait que les droites de rotation de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont soit égales soit orthogonales et invariantes par ces rotations.

Soient donc  $\rho$ ,  $D$  et  $\Delta$  comme ci-dessus, et soient  $e_D$  et  $e_\Delta$  des vecteurs unitaires directeurs de  $D$  et  $\Delta$ . On sait que  $\rho(e_D) = e_D$  car  $e_D$  est un vecteur directeur de  $D$  l'axe de rotation de  $\rho$ , de plus  $\rho(\Delta) = \Delta$  implique que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \rho(e_\Delta) = \alpha e_\Delta$$

Et par orthogonalité de  $\rho$ ,  $\alpha = \pm 1$  car  $e_\Delta$  est unitaire de plus, si  $\alpha = 1$  alors  $D = \Delta$  ou  $\rho = \text{Id}_{\mathbb{E}}$ , donc  $\alpha = -1$ , alors par orthogonalité de  $\rho$  :

$$\langle e_D, e_\Delta \rangle = \langle \rho(e_D), \rho(e_\Delta) \rangle = -\langle e_D, e_\Delta \rangle = 0$$

Et en complétant en une base orthonormée  $B = (e_D, e_\Delta, e_3)$ , la matrice de  $\rho$  dans cette base est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & *_1 \\ 0 & -1 & *_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (car } \text{Det}(\rho) = 1 \text{)}$$

Et puisque  ${}^t P P = P {}^t P = I$  alors  $*_1 = *_2 = 0$  et donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On conclut donc que  $D$  et  $\Delta$  sont orthogonales et que  $\rho$  est une demi-tour d'axe  $D$ .  
Si on prend maintenant  $D = D_1$  et  $\Delta = \rho_2(D_1)$ , alors :

$$\begin{aligned} \Delta \neq D &\Rightarrow D \text{ et } \Delta \text{ sont orthogonales et } \forall x \in \Delta, \rho_1(x) = -x \\ &\Rightarrow \rho_1(\rho_2(x)) = -\rho_2(x), \forall x \in D \\ &\Rightarrow \rho_1(\rho_2(x)) = -\rho_2(\rho_1(x)) \neq \rho_2(\rho_1(x)) \end{aligned}$$

On conclut que  $\rho_2(D_1) = D_1$ , de même  $\rho_1(D_2) = D_2$ , et donc on en déduit que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux rotations d'axes orthogonaux. □

**Corollaire 2.** Une condition nécessaire que doivent satisfaire  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour que  $G = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle$  soit libre, c'est qu'ils doivent ne pas avoir le même axe de rotation et ne pas être des demi-tour d'axes orthogonaux.

Étudiant maintenant les groupes de la forme  $G = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle$  où  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{SO}(3)$  qui ne commutent pas.

**Proposition 2.** Soit  $g \in G - \{\text{Id}_E\}$  alors :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, (s_1, \dots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n, s_i \neq s_{i+1}, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{*n}, g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$$

*Démonstration.*

On a  $G = \{s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}, n \in \mathbb{N}^*, (s_1, \dots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ , alors si  $g \in G - \{\text{Id}_E\}$  :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, (s_1, \dots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{*n}, g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$$

Il suffit donc de regrouper les éléments successifs lorsque  $s_i = s_{i+1}$  et supprimer les termes pour laquelle

$$a_i = 0 \text{ car dans ce cas } s_i^{a_i} = \text{Id}_E.$$

□

**Remarque 3.** Cette écriture n'est en générale pas unique (si  $\rho_1$  est une demi-tour alors  $\rho_1 = \rho_1^3$ ). Dans la partie suivante on va construire un exemple où cette décomposition sera unique, en d'autres mots on va construire un groupe libre de rang 2.

## 2.6 Construction d'un sous-groupe libre de rang 2 de $\mathcal{SO}(3)$ :

Dans ce qui suit on pose  $\alpha = \arccos(\frac{3}{5})$ .  $I_3$ ,  $R$  et  $T$  seront les matrices de  $\mathcal{SO}(3)$  définies par :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Soient  $\rho$  et  $\tau$  les rotations de  $E$  de matrices  $R$  et  $T$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , donc ils sont respectivement des rotations d'axes engendrés par  $e_3$  et  $e_1$ , et d'angle  $\alpha$ .

**Remarque 4.**  $G = \langle R, T \rangle \subset \mathcal{SO}(3)$  et  $G = \langle \rho, \tau \rangle \subset \mathcal{SO}(E)$  sont isomorphes, via l'application qui associe un élément de  $G$  sa matrice dans une base orthonormée.

Dans la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, a_n = 5^{|n|} \cos(n\alpha) \text{ et } b_n = 5^{|n|} \sin(n\alpha)$$

Et on considère la relation  $\equiv$  définie sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  par :

$$M \equiv M' \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [1, 3]^2, M[i, j] \equiv_{\mathbb{Z}} M'[i, j] \pmod{5}$$

Où  $a \equiv_{\mathbb{Z}} b \pmod{n}$  signifie  $n$  divise  $b - a$ .

**Lemme 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a que  $a_n$  et  $b_n$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et :

$$\forall n \neq 0, a_n \equiv_{\mathbb{Z}} 3 \pmod{5}, \forall n \geq 1, b_n \equiv_{\mathbb{Z}} 4 \pmod{5} \text{ et } \forall n \leq -1, b_n \equiv_{\mathbb{Z}} 1 \pmod{5}$$

*Démonstration.*

- On commence tout d'abord par montrer que les  $a_n$  et les  $b_n$  sont dans  $\mathbb{Z}$ . On a  $\cos((n+1)\alpha) + \cos((n-1)\alpha) = \frac{6}{5} \cos(n\alpha)$ , donc :

$$\forall n \geq 1, a_{n+1} = 5^{n+1} \cos((n+1)\alpha) = 5^{n+1} \left( \frac{6}{5} \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) \right) = 6a_n - 25a_{n-1}$$

De plus on a  $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$  et puisque  $\alpha \in [0, \pi]$  alors  $0 \leq \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{4}{5}$  donc

$$\forall n \geq 0, b_{n+1} = 5^{n+1} \sin((n+1)\alpha) = 5^{n+1} (\sin(n\alpha) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(n\alpha)) = 3b_n + 4a_n$$

Il suit que pour les entiers naturels on peut montrer par récurrence que  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers relatifs.

Pour les entiers relatifs négatifs, il suffit de remarquer que  $a_n = a_{-n}$  et que  $b_n = -b_{-n}$ , et donc on conclut que pour tout  $n$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers relatifs.

- On montre maintenant l'autre partie du lemme

On a  $a_1 = 3 \equiv_{\mathbb{Z}} 3 \pmod{5}$  donc par récurrence,  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1} \equiv_{\mathbb{Z}} 6 \times 3 - 25 \times 3 \equiv_{\mathbb{Z}} 3 \pmod{5}$  Pour  $n \leq 1$ , il suffit de remarquer que  $a_n = a_{-n}$  et donc

$$\forall n \neq 0, a_n \equiv_{\mathbb{Z}} 3 \pmod{5}$$

Par ailleurs,  $b_1 = 4 \equiv_{\mathbb{Z}} 4 \pmod{5}$  donc par récurrence,  $\forall n \geq 1, b_{n+1} = 3b_n + 4a_n \equiv_{\mathbb{Z}} 12 + 12 \equiv_{\mathbb{Z}} 4 \pmod{5}$

et on a  $b_n = -b_{-n} \equiv_{\mathbb{Z}} -4 \equiv_{\mathbb{Z}} 1 \pmod{5}$ , donc :

$$\forall n \geq 1, b_n \equiv_{\mathbb{Z}} 4 \pmod{5}, \forall n \leq -1, b_n \equiv_{\mathbb{Z}} 1 \pmod{5}$$

□

**Lemme 3.** La relation  $\equiv$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ , compatible avec le produit.

*Démonstration.*

Il est clair que  $\equiv$  est une relation d'équivalence, soient donc  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  tels que  $A \equiv B$  et  $C \equiv D$

Alors :

$$AC_{i,j} = \sum_{k=1}^3 a_{i,k} c_{k,j} \equiv_{\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^3 b_{i,k} d_{k,j} \pmod{5} \equiv_{\mathbb{Z}} BD_{i,j} \pmod{5}$$

car la congruence des entiers est compatible avec la somme et le produit.

□

On va s'appuyer sur les lemmes qui suivent pour montrer que  $T$  et  $R$  sont indépendants. On commence tout d'abord par montrer que  $T$  et  $R$  sont d'ordre infini.

**Lemme 4.** On a  $\forall k \in \mathbb{Z}, 5^{|k|}R^k, 5^{|k|}T^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  et :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 5^{|k|}R^k \equiv \begin{pmatrix} 3 & \epsilon_k & 0 \\ -\epsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } 5^{|k|}T^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \epsilon_k \\ 0 & -\epsilon_k & 3 \end{pmatrix} \text{ où } \epsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \epsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

De plus  $\forall k \in \mathbb{Z}^*, R^k, T^k \neq I_3$ .

*Démonstration.*

On a  $5^0R^0 = I_3$  et pour  $k > 0$  on vérifie simplement que :

$$5^kR^k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k & 0 \\ b_k & a_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$$

Pour  $k < 0$  on a que

$$5^{-k}R^{-|k|} = \begin{pmatrix} a_{-k} & b_{-k} & 0 \\ -b_{-k} & a_{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$$

On procède de la même manière pour  $T$  et on conclut que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 5^{|k|}R^k, 5^{|k|}T^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$$

Et donc en utilisant le Lemme 2

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 5^{|k|}R^k \equiv \begin{pmatrix} 3 & \epsilon_k & 0 \\ -\epsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } 5^{|k|}T^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \epsilon_k \\ 0 & -\epsilon_k & 3 \end{pmatrix} \text{ où } \epsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \epsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

De plus, si  $\exists k \neq 0$  tel que  $R^k = I_3$  alors  $5^{|k|}R^k \equiv 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})}$  ce qui est impossible, et de même pour  $T$ .  $\square$

On va montrer maintenant que les éléments  $R$  et  $T$  sont indépendants, et pour cela on va donner un lemme qui va nous aider dans la démonstration.

**Lemme 5.** Soient  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{*n}$ , et posons  $q = \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)$  nous avons alors que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}, a, b, c, d \not\equiv_{\mathbb{Z}} 0 \pmod{5}$$

*Démonstration.*

On raisonne par récurrence. Pour  $n = 1$ , par les lemmes 3 et 4 on a que

$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^*, 5^{|a_1|+|b_1|} T^{a_1} R^{b_1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \epsilon_{a_1} \\ 0 & -\epsilon_{a_1} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \epsilon_{b_1} & 0 \\ -\epsilon_{b_1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\epsilon_{a_1} & 4 & 0 \\ \epsilon_{a_1}\epsilon_{b_1} & 2\epsilon_{b_1} & 0 \end{pmatrix}$$

où  $2\epsilon_{a_1}, 4, \epsilon_{a_1}\epsilon_{b_1}$  et  $2\epsilon_{b_1}$  ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

Donc par récurrence : Soit  $n \geq 1$  et supposons que

$$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{*n}, 5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

où  $q = \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)$  et  $a, b, c$  et  $d$  ne sont pas congru à 0 modulo 5. Il en découle que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} 5^{|a_{n+1}| + |b_{n+1}|} T_{n+1}^{a_{n+1}} R_{n+1}^{b_{n+1}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\epsilon_{b_{n+1}} & 4 & 0 \\ \epsilon_{b_{n+1}} \epsilon_{a_{n+1}} & 2\epsilon_{a_{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2b\epsilon_{b_{n+1}} & 4b & 0 \\ 2d\epsilon_{b_{n+1}} & 4d & 0 \end{pmatrix}$$

où  $2b\epsilon_{b_{n+1}}, 4b, 2d\epsilon_{b_{n+1}}, 4d$  ne sont pas congrus à 0 modulo 5.  $\square$

Maintenant, on a tous ce qu'il nous faut pour montrer que les éléments  $R$  et  $T$  sont indépendants, ce qui est équivalent au lemme suivant.

**Lemme 6.** On a  $\forall n \geq 1, \forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{*n}, \beta \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} &\neq I_3 \\ T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} T^\beta &\neq I_3 \\ R^{a_1} T^{b_1} \dots R^{a_n} T^{b_n} &\neq I_3 \\ R^{a_1} T^{b_1} \dots R^{a_n} T^{b_n} R^\beta &\neq I_3 \end{aligned}$$

*Démonstration.*

Si  $\exists n \geq 1, \exists (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{*n}$  tel que  $T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} = I_3$ , alors :

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} = 5^q I_3 \equiv 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Ce qui n'est pas possible car d'après Lemme 5 :

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}, a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{5}$$

De plus :

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \dots T^{a_n} R^{b_n} T^\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \epsilon_\beta \\ 0 & -\epsilon_\beta & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b & b\epsilon_\beta \\ 0 & 3d & d\epsilon_\beta \end{pmatrix} \not\equiv 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Les deux autres affirmations se déduisent facilement en passant à l'inverse.  $\square$

**Corollaire 3.** D'après le Lemme 6,  $T$  et  $R$  sont indépendants, et donc  $\mathbb{G} = \langle R, T \rangle$  est libre.

**Proposition 3.**

$G = \langle \rho, \tau \rangle$  est libre  $\Rightarrow \forall g \in G - \{Id_E\}, \exists ! n, (s_1, \dots, s_n), (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z} \times \{\rho, \tau\}^n \times \mathbb{Z}^{*n}, s_i \neq s_{i+1}, g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$

*Démonstration.*

En utilisant la Proposition 2, on obtient que

$$\forall g \in G - \{Id_E\}, \exists n \in \mathbb{Z}, (s_1, \dots, s_n) \in \{\rho, \tau\}^n, s_i \neq s_{i+1}, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n, g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$$

Si on suppose que  $\exists n, n' \in \mathbb{N}^*, ((s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_n)) \in \{\rho, \tau\}^{n+n'}, (a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n) \in \mathbb{Z}^{n+n'}$  tel que :

$$s_i \neq s_{i+1}, s'_i \neq s'_{i+1}, g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} = (s'_1)^{a'_1} (s'_2)^{a'_2} \dots (s'_n)^{a'_n}$$

Alors on a que

$$s_n^{-a_n} \dots s_1^{-a_1} (s'_1)^{a'_1} \dots (s'_n)^{a'_n} = \text{Id}_E$$

et ceci ne peut être vrai que si  $\forall j, s_j^{-a_j} (s'_j)^{a'_j} = \text{Id}_E$  car sinon on trouve une contradiction avec le Lemme 6.

Donc on conclut que  $n = n', s_j = s'_j$  et  $a_j = a'_j$  pour tout  $j$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 5.** Par définition de  $G$  :

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \bigcup_{\substack{(s_1, \dots, s_n) \in \{\rho, \tau\}^n \\ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{*n}}} s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \right) \cup \{\text{Id}_E\}$$

Donc puisque  $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^{*n}$  et  $\{\rho, \tau\}^n$  sont dénombrables alors  $G$  l'est aussi.

Maintenant après avoir construit un groupe libre de rang 2, on va montrer que ce dernier peut être construit à partir de parties strictement incluses dans lui (après composition par des éléments de  $G$ ).

**Définition 6.** On appelle terme de tête de  $g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \in G - \{\text{Id}_E\}$  l'élément  $s_1$  lorsque  $a_1 > 0$  et  $s_1^{-1}$  lorsque  $a_1 < 0$ , on le note  $t(g)$ . Pour tout élément  $\sigma$  de  $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ , on note  $L(\sigma)$  l'ensemble des éléments  $g$  de  $G - \{\text{Id}_E\}$  pour lesquels  $t(g) = \sigma$

**Proposition 4.** On prenant les mêmes notations que dans la définition 6, on a que

$$G = L(\rho) \cup \rho L(\rho^{-1}) = L(\tau) \cup \tau L(\tau^{-1})$$

**Lemme 7.** On a que

$$\begin{aligned} L(\rho) &= \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1}) \\ L(\rho^{-1}) &= \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1} L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L(\tau^{-1}) \\ L(\tau) &= \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L(\rho^{-1}) \\ L(\tau^{-1}) &= \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1} L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1} L(\rho) \cup \tau^{-1} L(\rho^{-1}) \end{aligned}$$

et toutes ces réunions sont disjointes.

*Démonstration.* Pour un élément  $g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$  tel que  $t(g) = \rho$  c'est à dire  $a_1 > 0$ , on a :

$$a_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} g = \rho \text{ si } n=1 \\ g \in \rho L(\tau) \text{ si } a_2 > 0 \\ g \in \rho L(\tau^{-1}) \text{ si } a_2 < 0 \end{cases} \quad \text{et } a_1 \geq 2 \Rightarrow g \in \rho L(\rho)$$

Alors  $L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1})$ . Puisque les  $a_i$  sont définis de manière unique, l'union est disjointe

et on obtient une partition de  $L(\sigma)$  (de même pour les autres partitions).  $\square$

*Démonstration de la Proposition 4.*

D'après Lemme 7, on a :  $\rho L(\rho^{-1}) = \{\text{Id}_E\} \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$ , donc :

$$G = L(\rho) \cup \rho L(\rho^{-1}) = L(\tau) \cup \tau L(\tau^{-1})$$

La deuxième égalité se démontre de la même manière. De plus ces unions sont disjointes, ce qui donne une

partition de  $G$ .  $\square$

Après avoir construit un groupe libre  $G$  de rang 2, on va dans la partie suivante passer à la deuxième étape de la démonstration, en construisant un sous-ensemble  $X \subset S^2$  tel que l'action de  $G$  sur  $X$  soit libre.

## 2.7 Étude d'un sous ensemble X de $S^2$ sans points fixe de G.

On a vu dans 2.4.2 que l'ensemble  $X \subset S^2$  qu'on doit construire doit vérifier que l'action de G sur lui soit libre, ce qui nous amène à éviter les éléments  $x \in S^2$  qui vérifient  $g(x) = x$  pour un certain  $g \in G$ . On définit l'ensemble X de la façon suivante :

**Définition 7.** On considère l'ensemble

$$F = \{v \in S^2 \mid \exists g \in G - \{\text{Id}_E\}, g(v) = v\}$$

et on définit l'ensemble X comme étant le complémentaire de F c.à.d :

$$X = S^2 \setminus F$$

**Proposition 5.**

Pour tout élément  $g$  dans G, l'application :

$$\begin{aligned} g_X: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g(x). \end{aligned}$$

est bijective et :

$$\begin{aligned} \phi: G &\rightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g &\mapsto g_X. \end{aligned}$$

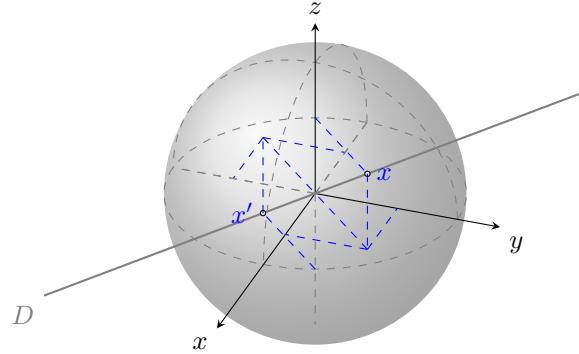
est un homomorphisme injectif de groupes.

**Lemme 8.** L'ensemble X n'est pas vide, et son complémentaire est dénombrable.

*Démonstration.*

On sait que G est un sous-groupe de  $\mathcal{SO}(E)$  et donc pour tout  $g$  dans G il existe une droite vectorielle D

tel que  $g$  est une rotation d'axe D.



Donc la droite vectorielle D intersecte  $S^2$  en deux points  $x_g$  et  $x'_g = -x_g$ , alors :

$$F = \bigcup_{g \in G - \{\text{Id}_E\}} \{x_g, -x_g\}$$

Or G est dénombrable et  $\{x_g, -x_g\}$  est fini donc F est dénombrable. De plus il est clair que la sphere  $S^2$

n'est pas dénombrable car si on prend juste un cercle de la sphere par exemple celui pour laquelle  $z = 0$

alors ce dernier est isomorphe à  $[-\pi, \pi[$  qui n'est pas dénombrable, et donc l'ensemble X ne peut pas être

vide; car sinon  $F = S^2$ , et l'un est dénombrable et l'autre ne l'est pas.

□

**Lemme 9.** *L'ensemble  $X$  est stable sous l'action de  $G$ , i.e :*

$$\forall g \in G, \forall v \in X, g(v) \in X$$

*Démonstration.*

Soit  $v \in X$  si  $g(v) \in F$  alors  $\exists g' \in G - \{\text{Id}_E\}, g'(g(v)) = g(v)$  et donc  $g^{-1}(g'(g(v))) = v \in F$ .  $\square$

**Lemme 10.** *Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $G$ . Si  $\exists v \in X$  vérifiant  $g(v) = h(v)$ , alors  $h = g$ .*

*Démonstration.*

Si  $h \neq g$ ,  $h^{-1} \circ g \neq \text{Id}_E$  et  $h^{-1} \circ g(v) = v$  alors  $v \in F$  ce qui n'est pas possible car  $v \in X = S^2 - F$ .  $\square$

Jusqu'ici on a montré que l'ensemble  $X$  est différent de  $\emptyset$ , et que l'application  $g_X: X \rightarrow X: x \rightarrow g(x)$  est bien définie  $\forall g \in G$ . Donc on va maintenant démontrer la Proposition 5.

*Démonstration de la Proposition 5.*

Puisque  $\forall g \in G, \forall v \in E, \|g(v)\| = \|v\|$ , la sphere unitaire est stable par  $g$ , et donc tout élément  $g$  induit une

bijection de  $S^2$ . D'après le Lemme 9

$$\forall v \in X, g(v) \in X, g^{-1}(v) \in X$$

donc  $g$  induit une bijection de  $X$  sur lui même que l'on notera  $g_X$ .

Soit  $v \in X$ , alors :

$$\begin{aligned} \phi(g \circ h)(v) &= g \circ h(v) \\ &= \phi(g) \circ \phi(h)(v) \text{ car } y = h(v) \in X \text{ et } g(y) \in X \end{aligned}$$

de plus  $\phi$  est injective, car si  $g(v) = h(v), \forall v \in X$  alors d'après le Lemme 10  $h = g$ .  $\square$

**Définition 8.** On sait que les orbites forment une partition de  $X$ , donc en utilisant l'axiome du choix on définit l'ensemble  $M$  en choisissant un représentant de chaque orbite, pour garantir une unicité des éléments de  $X$  après l'action de  $G$ .

**Lemme 11.** *La famille  $(g(M))_{g \in G}$  constitue une partition de  $X$ .*

*Démonstration.*

On vérifie facilement que

— Si  $x \in g(M) \cap g'(M)$  alors  $\exists y, y' \in M, x = g(y) = g'(y')$  ce qui n'est pas possible par définition de  $M$ .

—  $M \neq \emptyset$  donc  $\forall g \in G, g(M) \neq \emptyset$ .

—  $\bigcup_{g \in G} g(M) = \bigcup_{a \in M} \bigcup_{g \in G} g(a) = X$

Donc  $(g(M))_{g \in G}$  est une partition de  $X$ . Visuellement si on prend  $M = \{a_1, a_2, \dots\}$  alors :

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & . & . \\ \hline g_1(a_1) & g_1(a_2) & g_1(a_3) & . & . \\ \hline g_2(a_1) & g_2(a_2) & g_2(a_3) & . & . \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline a_1 \ a_2 \ a_3 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \hline g_1(a_1) \ g_1(a_2) \ g_1(a_3) \ . \ . \\ \hline g_2(a_1) \ g_2(a_2) \ g_2(a_3) \ . \ . \\ \hline . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \hline . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \hline \end{array}$$

c'est à dire qu'on peut répartir  $X$  soit horizontalement ou verticalement.  $\square$



**Proposition 6.** *On pose :*

$$X_0 = M, X_1 = \bigcup_{g \in L(\rho)} g(M), X_2 = \bigcup_{g \in L(\tau)} g(M), X_3 = \bigcup_{g \in L(\rho^{-1})} g(M), X_4 = \bigcup_{g \in L(\tau^{-1})} g(M)$$

*Les parties  $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ ,  $(X_1, \rho(X_3))$  et  $(X_2, \tau(X_4))$  forment des partitions de  $X$ .*

*Démonstration.*

Puisque  $G = \langle \rho, \tau \rangle = \{\text{Id}_E\} \cup L(\rho) \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$ , où  $\rho$  et  $\tau$  sont des isométries positives, et les réunions sont disjointes, et  $(g(M))_{g \in G}$  est une partition de  $X$  alors on conclut que :  $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$  est une partition de  $X$ .

On a déjà montré que :  $G = L(\rho) \cup \rho L(\rho^{-1}) = L(\tau) \cup \tau L(\tau^{-1})$ , où les réunions sont disjointes, et  $(g(M))_{g \in G}$  est une partition de  $X$  donc il suit que

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset \\ X &= X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset \end{aligned}$$

Il suit que  $(X_1, \rho(X_3))$  et  $(X_2, \tau(X_4))$  forment des partitions de  $X$ , et donc  $X$  est équidécomposable à deux copies de  $X$ .  $\square$

**Remarque 6.** *On remarque que les ensembles construits sont non mesurables (au sens le Lebesgue), et que c'est l'axiome du choix qui nous a permis de construire de tels ensembles.*

*En effet, si les ensembles étaient mesurable alors on aurait que*

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(X_0) + \mu(X_1) + \mu(X_2) + \mu(X_3) + \mu(X_4) = \mu(X_1) + \mu(\rho(X_3)) = \mu(X_2) + \mu(\tau(X_4)) \\ &= \mu(X_1) + \mu(X_3) = \mu(X_2) + \mu(X_4) \text{ (la rotation ne change pas la mesure d'un ensemble mesurable).} \\ &= 0, \text{ ce qui est absurde car } \mu(X) = \mu(S^2), \text{ puisque } F \text{ est dénombrable.} \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.

Dans la partie suivante on va essayer de décomposer  $S^2$  en parties et les réarranger après composition par des rotations et des translations pour construire l'ensemble  $X$ . Pour cela on va introduire la notion d'équidécomposabilité.

## 2.8 Équidécomposabilité.

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ . On dit que  $A$  est équidécomposable à  $B$  s'il existe une partition finie  $(A_i)_{i \in I}$  de  $A$  et  $(B_i)_{i \in I}$  partition finie de  $B$ , et une famille finie  $(g_i)_{i \in I}$  de déplacements de  $E$  (c.à.d des isométries affines positives) telles que :

$$\forall i \in I, B_i = g_i(A_i)$$

On écrit alors  $A \sim B$ .

**Proposition 7.** *La sphère  $S^2$  est équidécomposable à  $X$ .*

Pour démontrer la proposition on va procéder de la manière suivante.

- On va créer un ensemble symétrique par rapport à l'origine et strictement inclus dans  $S^2$ .
- Puis, on va construire une rotation,  $r$ , d'axe qui passe par deux éléments de cet ensemble (c'est pour ça qu'on a besoin de la symétrie), et on va montrer que  $\forall u, v \in F$  et  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $r^n(u) \neq r^m(v)$ .
- En fin, on va considérer cette rotation pour construire  $X$  à partir de parties incluses dans  $S^2$ .

**Lemme 12.**

*On note  $\Lambda = \{(u, v) \in F \times F \mid u \neq v\}$ , et pour  $(u, v) \in \Lambda$ , on note  $\Gamma_{u,v} = \{w \in S^2 \mid \|w - u\| = \|w - v\|\}$ .  $\Gamma_{u,v}$  est un cercle centré à l'origine.*

*Démonstration.*

Soient  $(u, v) \in \Lambda$  :

$$\begin{aligned} w \in \Gamma_{u,v} &\Leftrightarrow \|w - u\|^2 = \|w - v\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle w - u, w - u \rangle = \langle w - v, w - v \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle w, u - v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\Gamma_{u,v}$  est le cercle d'intersection du plan médiateur du segment  $[u, v]$ , et la sphere unité.  $\square$

**Lemme 13.**

Soit  $\Gamma = \bigcup_{(u,v) \in \Lambda} \Gamma_{u,v}$ . L'ensemble  $\Gamma \cup F$  est symétrique par rapport à l'origine, et strictement inclu dans  $S^2$ .

*Démonstration.*

Puisque  $F$  est dénombrable, alors  $\Lambda$  est dénombrable.

On a  $\Gamma$  et  $F$  sont symétrique par rapport à l'origine, puisque  $\Gamma$  est une réunion de cercles centrés à l'origine,

et  $F$  vérifie :

$$v \in F \Leftrightarrow \exists g \in G - \text{Id}_E, g(v) = v$$

et donc  $g(-v) = -v$ , alors  $\Gamma \cup F$  est symétrique par rapport à l'origine.

De plus pour un cercle  $C$  dans  $S^2$  non centré à l'origine on a :

$$(\Gamma \cup F) \cap C = (\Gamma \cap C) \cup (F \cap C) = \left( \bigcup_{(u,v) \in \Lambda} \Gamma_{u,v} \cap C \right) \cup (F \cap C)$$

Et on sait que  $F$  est dénombrable donc  $F \cap C$  l'est aussi, de plus  $\Gamma_{u,v} \cap C$  contient au plus deux éléments,

et  $\Lambda$  est dénombrable alors on conclut que  $(\Gamma \cup F) \cap C$  est dénombrable, et donc  $S^2 \neq \Gamma \cup F$  car  $S^2 \cap C = C$

n'est pas dénombrable.  $\square$

**Lemme 14.**

Il existe un élément  $r$  de  $\mathcal{SO}(E)$  dont l'axe ne rencontre pas  $\Gamma \cup F$  et tel que  $\forall p \in \mathbb{Z}^*, r^p \neq \text{Id}_E$ , et qui vérifie donc :  $\forall n \neq m, r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$ .

*Démonstration.*

— On sait que  $S^2 \neq \Gamma \cup F$  alors  $\exists x \in S^2$  tel que  $x \notin \Gamma \cup F$ , et par symétrie,  $-x \notin \Gamma \cup F$ . On prend l'axe vectoriel  $D$  qui passe par le centre et le point  $x$ , alors  $D$  rencontre la sphere en  $x$  et  $-x$  et donc ne rencontre pas  $\Gamma \cup F$ . Pour qu'une rotation  $r$  d'angle  $2\pi\alpha$  de  $\mathcal{SO}(3)$  vérifie  $\forall p \in \mathbb{Z}^*, r^p \neq \text{Id}_E$ , il faut que  $2\pi\alpha p \neq 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$  càd il faut que  $\alpha$  soit irrationnel, et donc on a construit une rotation dont l'axe ne rencontre pas  $\Gamma \cup F$  et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*, r^p \neq \text{Id}_E$$

— Soit  $(u, v)$  dans  $F \times F$ , montrons que  $\forall k > 0, r^k(u) \neq v$  :

Si  $u = v$ , alors si  $\exists k > 0, r^k(u) = u$  donc  $u \notin F$  par définition de  $F$ , et donc  $\forall k > 0, r^k(u) \neq u$ .

Si  $u \neq v$ , alors si  $\exists k > 0, r^k(u) = v$ , donc puisque  $r^k$  est une rotation d'axe  $D$ ,  $\langle r^k(u), x \rangle = \langle u, x \rangle$ , càd

$\langle v - u, x \rangle = 0$ , et donc  $x \in \Gamma_{u,v}$  ce qui est impossible car  $x \notin \Gamma \cup F$ .

Donc  $\forall n \neq m, r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$ , car sinon

$$\exists (u, v) \in F \times F, r^n(u) = r^m(v)$$

càd si  $n > m, r^{n-m}(u) = v$  ce qui est absurde.

□

**Définition 9.** Soit  $r$  une rotation de  $\mathcal{SO}(E)$ , qui vérifie les hypothèses du Lemme 14.

Passant maintenant à la démonstration de la Proposition 7.

*Démonstration de la Proposition 7.*

— On pose :

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n(F), \text{ et } Z = S^2 - Y$$

Il est clair que  $r(Y) = r(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n(F)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} r^n(F) \subset (Y)$  donc  $r(Y) \cap Z = \emptyset$ . De plus on a :

$F \subset Y$ , donc  $S^2 - Y \subset S^2 - F = X$ , et pour  $n > 0$ ,  $r^n(F) \cap F = \emptyset$  alors  $r(Y) \cup Z \subset S^2 - F = X$

Et donc :

$$S^2 = Y \cup Z = F \cup r(Y) \cup Z \Rightarrow X = S^2 - F = r(Y) \cup Z$$

D'où :

$$r(Y) \cap Z = \emptyset \text{ et } X = r(Y) \cup Z$$

— Il suffit donc de prendre  $A_1 = Y, B_1 = r(Y), g_1 = r$  et  $A_2 = Z, B_2 = Z, g_2 = \text{Id}_E$ , pour conclure que  $S^2$  est équidécomposable à  $X$ .

□

**Proposition 8.**

*Si  $A_1, A_2, B_1, B_2$  sont des sous-ensembles non vides de  $E$  tels que :*

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset, A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$$

*Alors :*

$$A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$$

*Et le résultat se généralise ; si  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  avec  $I$  fini sont deux familles d'éléments non vides de  $E$  tels*

*que les  $(A_i)_{i \in I}$  sont disjoints deux à deux, et  $(B_i)_{i \in I}$  sont disjoints deux à deux, et  $A_i \sim B_i, \forall i \in I$ , alors :*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} B_i$$

*Démonstration.*

Puisque  $A_1 \sim B_1$  et  $A_2 \sim B_2$ , alors  $\exists I, J$  et des partitions finies de  $A_1, A_2, B_1, B_2 : ((A_{1_i})_{i \in I}), ((B_{1_i})_{i \in I}),$

$((A_{2_j})_{j \in J}), ((B_{2_j})_{j \in J})$  et des familles finies de déplacements  $(g_i)_{i \in I}$  et  $(g_j)_{j \in J}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in I \times J, B_{1_i} = g_i(A_{1_i}), B_{2_j} = g_j(A_{2_j})$$

Et puisque  $(A_1, A_2)$  est une partition de  $A_1 \cup A_2$ , et  $(B_1, B_2)$  est une partition de  $B_1 \cup B_2$ , alors  $(A_{1_i} \cup A_{2_j})_{i \in I, j \in J}$  et  $(B_{1_i} \cup B_{2_j})_{i \in I, j \in J}$  sont des partitions de  $A_1 \cup A_2$ , et  $B_1 \cup B_2$  et  $(g_i, g_j)_{i \in I, j \in J}$

est une famille finie de déplacements, qui vérifient les conditions de d'équidécomposabilité, donc :

$$A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$$

Le résultat se généralise facilement pour toute collection de famille finies de sous ensembles non vides et disjoints de  $E$ . □

**Lemme 15.** *La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E) - \emptyset$ .*

*Démonstration.*

— réflexive :  $A$  est une partition de  $A$  et  $A = \text{Id}_E(A)$  donc  $A \sim A$ .

- symétrique : Si  $A \sim B$  alors  $\exists(A_i), (B_i), (g_i)$  tels que  $B_i = g_i(A_i)$  et donc  $A_i = g_i^{-1}(B_i)$  d'où  $B \sim A$ .
- transitive : si  $A \sim B$  et  $B \sim C$  alors  $\exists I, J$  ensembles finis,  $\exists(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}$  tels que :  $B_i = g_i(A_i), \forall i \in I$ , et  $\exists(B_j)_{j \in J}, (C_j)_{j \in J}, (g_j)_{j \in J}$  tels que :  $C_j = g_j(B_j), \forall j \in J$ .  
Donc si on considère l'ensemble  $K = \{(i, j) \in I \times J \mid B_i \cap B_j \neq \emptyset\}$  et on prend la partition  $(B_i \cap B_j)_{(i, j) \in K}$  de  $B$ , de plus  $(g_i^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j) \in K}$  et  $(g_j^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j) \in K}$  sont des partitions de  $A$  et de  $C$  respectivement, et  $g_i^{-1} \circ g_j(g_j^{-1}(B_i \cap B_j)) = g_i^{-1}(B_i \cap B_j)$  et donc  $A \sim C$ .

□

**Proposition 9.**

Si  $A \sim B$  alors il existe une bijection  $\psi$  de  $A$  dans  $B$  tel que pour tout sous-ensemble non vide  $C$  de  $E$  on a que  $C \sim \psi(C)$ .

*Démonstration.*

On suppose que  $A \sim B$ , et on pose :

$$\begin{aligned} \psi: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto g_i(x), \text{ avec } i \text{ tel que } x \in A_i. \end{aligned}$$

Puisque  $\forall i \in I, B_i = g_i(A_i)$  alors la fonction est clairement surjective, de plus si  $\psi(x) = \psi(y)$ , alors  $\exists i, j$  tel que  $g_i(x) = g_j(y)$ , si  $i \neq j$  alors  $g_i(x) \in B_i$  et  $g_j(y) \in B_j$  et  $B_i \cap B_j = \emptyset$  donc  $g_i(x) \neq g_j(y)$  et donc  $i = j$ .

Par injectivité de  $g_i$  on conclut que  $x = y$ , et alors  $\psi$  est injective, donc bijective. Pour tout sous-ensemble  $C$  de  $A$ , la collection  $(C \cap A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $C$  et  $(\psi(C) \cap B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $\psi(C)$ . Nous avons par ailleurs que  $g_i(C \cap A_i) = g_i(C) \cap B_i = \psi(C \cap A_i) = \psi(C) \cap B_i$  et donc  $C \sim \psi(C)$ . □

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles non vides de  $E$ . On écrira  $A \leq_\sim B$  lorsqu'il existe un sous-ensemble  $B'$  non vide de  $B$ , tel que  $A \sim B'$ . En particulier si  $A \sim B$  alors  $A \leq_\sim B$ .

La relation  $\leq_\sim$  est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de  $E$ . On observera par ailleurs que si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles non vides de  $X$  tels que  $A \subset B$ , il est évident que  $A \leq_\sim B$ .

**Théorème 2.** (Banach-Schröder-Bernstein) Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles non vides de  $E$  tels que  $A \leq_\sim B$  et  $B \leq_\sim A$ , alors  $A \sim B$ .

*Démonstration.* Admise à la première lecture, elle est faite au troisième chapitre 1. □

## 2.9 Ensembles Paradoxaux.

Un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides  $C, B$  de  $A$  tels que :

$$B \sim A, C \sim A \text{ et } B \cap C = \emptyset (*)$$

On va montrer dans cette partie que l'ensemble  $X$  est paradoxale, et on va passer cette propriété à  $S^2$  en utilisant l'équivalence par décomposition finie, pour enfin conclure que  $S^2$  est équidécomposable à deux copies de  $S^2$ .

**Proposition 10.**

Si  $A, B \neq \emptyset$  deux sous-ensembles  $E$ , tel que  $A \sim B$ , et  $A$  est paradoxal, alors  $B$  l'est aussi.

*Démonstration.*

Soient  $A, B \neq \emptyset$  deux sous-ensembles  $E$  telles que  $A \sim B$ , et  $A$  paradoxal, alors :

$$\exists D, C \text{ tel que } D \cap C = \emptyset, \text{ et } D \sim A, C \sim A$$

Et donc d'après la Proposition 9 :

$$\psi(D \cap C) = \psi(D) \cap \psi(C) = \emptyset, \text{ et } \psi(D) \sim D \sim A \sim B, \text{ et } \psi(C) \sim C \sim A \sim B$$

Alors  $B$  est paradoxal.

□

**Proposition 11.**

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ ,  $B$  et  $C$  deux ensembles non vides de  $A$  qui vérifient  $(*)$ .

Alors  $\exists(A_1, A_2)$  une partition de  $A$ , tel que  $A_1 \sim A, A_2 \sim A$ .

*Démonstration.*

En utilisant le Theorème 2, puisque  $B \subset A - C$  alors  $A \sim B \leq A - C$  donc  $A \leq A - C$ , de plus  $A - C \subset A$  donc  $A - C \leq A$  et alors  $A - C \sim A$

Donc  $A_1 = C$  et  $A_2 = A - C$  vérifient les hypothèse de la proposition.

□

**Lemme 16.** *L'ensemble  $X$  est paradoxal.*

*Démonstration.*

D'après la Proposition 6 :

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset$$

$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset$$

Donc  $X \sim X_1 \cup X_3$  et  $X \sim X_2 \cup X_4$  et  $(X_1 \cup X_3) \cap (X_2 \cup X_4) = \emptyset$ , i.e  $X$  est paradoxal.

□

**Lemme 17.** *Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux spheres unitées disjointes, alors  $S^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .*

*Démonstration.*

— D'après la Proposition 7,  $S^2 \sim X$ , et  $X \neq \emptyset$  est paradoxal, alors d'après la Proposition 10  $S^2$  est paradoxal.

— Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux spheres unitées disjointes, alors  $S^2 \sim \Sigma_1$  et  $S^2 \sim \Sigma_2$ , de plus soient  $A_1$  et  $A_2$  tels que

$(A_1, A_2)$  est une partition de  $S^2$ , et  $A_1 \sim S^2$ , et  $A_2 \sim S^2$ , alors :

$A_1 \sim S^2 \sim \Sigma_1$  et  $A_2 \sim S^2 \sim \Sigma_2$ , de plus  $S^2 = A_1 \cup A_2 \sim S^2$ , et donc  $S^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

□

## Chapitre 3

# Décomposition d'ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Dans ce chapitre on va étudier le paradoxe dans le cas général en s'appuyant sur les résultats du deuxième chapitre, et on va montrer en fin du chapitre que le paradoxe n'est pas vrai en dimension inférieur à 2 .

### 3.1 Propriétés générales de l'équivalence par décomposition finie.

Les raisonnements de ce chapitre sont valables pour les ensembles de points situés dans un espace quelconque, sur lequel est faite l'hypothèse unique qu'à tout couple de points  $(a, b)$  correspond un nombre réel  $\rho(a, b)$  appelé distance des points  $a$  et  $b$ . On va se baser dans ce chapitre sur les articles originaux de Stefan Banach et Alfred Tarski [3].

**Définition 1.** On dit que les ensembles de points  $A$  et  $B$  sont congruents et on écrit

$$A \cong B$$

S'il existe une fonction  $\varphi$  qui transforme d'une façon biunivoque  $A$  en  $B$ , et qui vérifie

$$\forall a, a' \in A, \rho(a, a') = \rho(\varphi(a), \varphi(a'))$$

**Définition 2.** On dit que les ensembles de points  $A$  et  $B$  sont équivalents par décomposition finie et on écrit :

$$A \sim B$$

s'il existe un  $n \in \mathbb{N}^*$  et des familles d'ensembles  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que :

1.  $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$  et  $B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$
2.  $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3.  $A_i \cong B_i, \forall i = 1, \dots, n$

**Proposition 1.** Si  $A \cong B$  alors  $A \sim B$

*Démonstration.* Ceci découle de la Définition 2, en prenant  $n = 1$ . □

**Proposition 2.** La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

*Démonstration.*

- Réflexivité :  $A$  est une partition de  $A$  et  $A = \text{Id}_E(A)$ , avec  $\text{Id}_E$  bijective de  $A$  dans  $A$  et vérifie :

$$\forall a, a' \in A, \rho(a, a') = \rho(\text{Id}_E(a), \text{Id}_E(a'))$$

Donc :

$$A \sim A$$

- Symétrie : Si  $A \sim B$  alors  $\exists (A_i)_{1 \leq i \leq n}, (B_i)_{1 \leq i \leq n}, (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que  $B_i = \varphi_i(A_i)$  et donc :

$$A_i = \varphi_i^{-1}(B_i), \forall i = 1, \dots, n$$

Avec  $\forall i = 1, \dots, n, \varphi_i^{-1}$  est bijective de  $B_i$  dans  $A_i$ , et :

$$\forall b = \varphi(a), b' = \varphi(a') \in B_i, \rho(b, b') = \rho(\varphi(a), \varphi(a')) = \rho(a, a') = \rho(\varphi_i^{-1}(b), \varphi_i^{-1}(b'))$$

D'où  $B \sim A$ .

- Transitivité : Si  $A \sim B$  et  $B \sim C$  alors,  $\exists I, J$  finies,  $\exists (A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}, (\varphi_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}, (C_j)_{j \in J}$  et  $(\varphi_j)_{j \in J}$  tels que  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $A$ ,  $(B_i)_{i \in I}$  et  $(B_j)_{j \in J}$  sont des partitions de  $B$  et  $(C_j)_{j \in J}$  est une partition de  $C$ , et  $\forall (i, j) \in I \times J$  :

$$\varphi_i \text{ est bijective de } A_i \text{ dans } B_i, \text{ et } \forall a, a' \in A, \rho(a, a') = \rho(\varphi_i(a), \varphi_i(a'))$$

et :

$$\varphi_j \text{ est bijective de } B_j \text{ dans } C_j, \text{ et } \forall b, b' \in B, \rho(b, b') = \rho(\varphi_j(b), \varphi_j(b'))$$

On considère l'ensemble  $K = \{(i, j) \in I \times J \mid B_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ , et on considère :

$$(B_i \cap B_j)_{(i, j) \in K}, (\varphi_i^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j) \in K} \text{ et } (\varphi_j^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j) \in K}$$

partitions de  $B$ ,  $A$  et  $C$  respectivement.

On a donc  $\forall (i, j) \in K, \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  est une bijection de  $(\varphi_j^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j)}$  dans  $(\varphi_i^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j)}$ .  
De plus

$$\forall c = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(a), c' = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(a') \in (\varphi_j^{-1}(B_i \cap B_j))_{(i, j)}$$

on a que

$$\rho(c, c') = \rho(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(a), \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(a')) = \rho(\varphi_i(a), \varphi_i(a')) = \rho(a, a') = \rho(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(c), \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(c'))$$

Il s'en suit que  $A \sim C$ .

□

**Proposition 3.** Soient  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux familles d'ensembles disjoints, tels que :

$$A_i \sim B_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Alors :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \sim \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$$

*Démonstration.* Il suffit de le prouver pour  $n = 2$  et on généralise le résultat par récurrence.

Soient donc  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  tels que  $A_1 \sim B_1$  et  $A_2 \sim B_2$ .

Alors  $\exists I, J$  et des partitions finies de  $A_1, A_2, B_1, B_2$  :  $((A_1)_i)_{i \in I}, ((B_1)_i)_{i \in I}, ((A_2)_j)_{j \in J}, ((B_2)_j)_{j \in J}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in I \times J, A_{1_i} \cong B_{1_i} \text{ et } A_{2_j} \cong B_{2_j}$$

Et puisque  $(A_1, A_2)$  est une partition de  $A_1 \cup A_2$ , et  $(B_1, B_2)$  est une partition de  $B_1 \cup B_2$ , alors :

$\left(\bigcup_i A_{1_i}\right) \cup \left(\bigcup_j A_{2_j}\right)$  et  $\left(\bigcup_i B_{1_i}\right) \cup \left(\bigcup_j B_{2_j}\right)$  sont des partitions de  $A_1 \cup A_2$ , et  $B_1 \cup B_2$  donc :

$$A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$$

Le résultat se généralise par récurrence pour toute collection de famille finies d'ensembles de points.

□

**Proposition 4.** Si  $A \sim B$  alors il existe une bijection  $\psi$  de  $A$  dans  $B$  tel que pour tout sous-ensemble  $C$  de  $A$  on a que  $C \sim \psi(C)$ .

*Démonstration.*

On suppose que  $A \sim B$ , et soient  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  qui vérifient les hypothèses de la définition

de l'équivalence par décomposition finie. On pose :

$$\begin{aligned}\psi: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto \varphi_i(x), \text{ avec } i \text{ tel que } x \in A_i.\end{aligned}$$

Puisque  $\forall i \in I, B_i = \varphi_i(A_i)$  alors la fonction est clairement surjective, de plus si  $\psi(x) = \psi(y)$ , alors  $\exists i, j$  tel que  $\varphi_i(x) = \varphi_j(y)$ , si  $i \neq j$  alors  $\varphi_i(x) \in B_i$  et  $\varphi_j(y) \in B_j$  et  $B_i \cap B_j = \emptyset$  donc  $\varphi_i(x) \neq \varphi_j(y)$  et donc  $i = j$ , et par injectivité de  $\varphi_i$  on conclut que  $x = y$ , et alors  $\psi$  est injective, donc bijective.

Pour tout sous-ensemble  $C$  de  $A$ , on a  $(C \cap A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $C$  et  $(\psi(C) \cap B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $\psi(C)$ , et  $\varphi_i(C \cap A_i) = \varphi_i(C) \cap B_i = \psi(C \cap A_i) = \psi(C) \cap B_i$  et donc  $\forall i :$

$$C \cap A_i \cong \psi(C) \cap B_i$$

et alors  $C \sim \psi(C)$ . □

**Corollaire 1.** Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une partition de  $A$  et soit  $B$  tel que  $A \sim B$ , alors il existe une partition  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $B$  telle que  $A_i \sim B_i, \forall i = 1, \dots, n$ .

*Démonstration.*

Il suffit de prendre  $B_i = \psi(A_i)$  où  $\psi$  est la fonction vérifiant les hypothèses de la proposition précédente, alors :

- $A_i \sim B_i, \forall i = 1, \dots, n$
  - $(B_i)_{1 \leq i \leq n} = (\psi(A_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une partition de  $B$  (en utilise le même raisonnement que dans corollaire 1 du préliminaires).
- 

**Corollaire 2.** Si  $A \sim B$ , alors pour tout ensemble  $C$  dans  $A$ , il existe un ensemble  $D$  dans  $B$  tel que :

$$C \sim D \text{ et si } C \neq A, \text{ alors } D \neq B$$

*Démonstration.* Il suffit encore de prendre  $D = \psi(C)$  alors :

- $C \sim D$
  - Si  $C \neq A$  alors  $D = \psi(C) \neq B$ , puisque  $\psi$  est bijective.
- 

**Théorème 1.** (Théorème de Banach-Schröder-Bernstein) Soient  $A_1 \subset A$  et  $B_1 \subset B$  tel que  $A \sim B_1$  et  $B \sim A_1$ , alors on a que  $A \sim B$ .

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un autre théorème qui va nous servir dans la démonstration.

**Théorème 2.** Soit  $\varphi$  une fonction qui transforme de façon biunivoque l'ensemble  $A$  en un sous ensemble de  $B$ , et  $\psi$  une fonction qui transforme de façon biunivoque un sous ensemble de  $A$  en l'ensemble  $B$ . Alors il existe une partition  $(A_1, A_2)$  de  $A$  et une partition  $(B_1, B_2)$  de  $B$  qui satisfait

$$\varphi(A_1) = B_1 \text{ et } \psi(A_2) = B_2$$

*Démonstration.* Soit  $a$  un élément de  $A$ , et soit  $C(a)$  l'intersection de tous les sous-ensembles  $X$  de  $A$  qui vérifient

- $a \in X$ .
- Si  $x \in X$  on a  $\psi^{-1} \circ \varphi(x) \in X$ .



— Et si  $x \in X$  et  $\varphi^{-1} \circ \psi(x)$  existe, on a  $\varphi^{-1} \circ \psi(x) \in X$ .

Les ensemble  $C(a)$  où  $a$  dans  $A$  sont soit disjoints soit égaux. Soit ensuite

$$A_2 = \{a \in A \mid C(a) \in \psi^{-1}(B)\}$$

et soit  $A_1$  le complémentaire de  $A_2$  c'est à dire

$$A_1 = A - A_2$$

Soient ensuite

$$B_1 = \varphi(A_1) \text{ et } B_2 = \psi(A_2)$$

on peut faire ça car  $A_2 \subset \psi^{-1}(B)$ .

On a alors  $B_1 \cup B_2 \subset B$ , montrons l'inclusion réciproque. Soit  $b \in B$ , et  $a = \psi^{-1}(b)$  alors on a que

— Si  $a \in A_2$  alors  $b \in \psi(A_2) = B_2$ .

— Si  $a \in A_1$  alors  $\varphi^{-1}(b)$  existe, car sinon  $a \in \psi^{-1}(B)$  et  $C(a) \subset \psi^{-1}(B)$  ce qui signifie que  $a \in A_2$  ce qui est absurde car  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . De plus  $\varphi^{-1}(b)$  existe et appartient à  $A_1$ , car  $C(\psi^{-1}(b)) = C(\varphi^{-1}(b))$  car  $\psi^{-1}(b) = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(b)$ , et  $\psi^{-1}(b) \in A_1$ .

On conclut donc que  $B \subset B_1 \cup B_2$  et alors  $B = B_1 \cup B_2$  □

*Démonstration du Théorème 1.* Théorème 2 et Proposition 4 affirment qu'on peut trouver une partition  $(A_1, A_2)$  de  $A$  et une partition  $(B_1, B_2)$  de  $B$  tels que  $A_1 \sim B_1$  et  $A_2 \sim B_2$ , alors  $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$  et alors  $A \sim B$ . □

**Corollaire 3.** Si  $C \subset B \subset A$  et  $C \sim A$ , alors :

$$A \sim B \text{ et } B \sim C$$

*Démonstration.* On a  $B \sim B \subset A$  et  $A \sim C \subset B$  donc d'après le Théorème 1, en prenant  $A_1 = C$  et  $B_1 = B$ , on trouve que  $A \sim B$ , et puisque  $A \sim C$  alors on a aussi  $B \sim C$  (car  $\sim$  est une relation d'équivalence). □

**Proposition 5.** Si  $A \sim A \cup B_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  alors :

$$A \sim A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i \right)$$

*Démonstration.*

— On va commencer par le cas où  $A, B_1, \dots, B_n$  sont disjoints deux à deux.

On va procéder par récurrence. La proposition est triviale pour  $n = 1$ , supposons qu'elle est vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , et montrons le pour  $n + 1$ . On a alors :

$$1. A \sim A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i \right).$$

$$2. A \sim A \cup B_{n+1}.$$

3. Les ensembles  $A, B_1, \dots, B_n, B_{n+1}$  sont disjoints.

On a alors d'après la proposition 3, 1. et 3. impliquent que :

$$4. A \cup B_{n+1} \sim A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} B_i \right)$$

Et puisque  $\sim$  est une relation d'équivalence alors d'après 2. et 4. on a :

$$A \sim A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} B_i \right)$$

Ce qui termine la démonstration dans le cas où  $A, B_1, \dots, B_n$  sont disjoints deux à deux.

— On va passer maintenant au cas général, et on pose :

$$C_1 = B_1 - A, \text{ et } C_k = B_k - \left( A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq k-1} B_i \right) \right), \text{ pour } k = 2, \dots, n$$

Il est clair que  $A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq k-1} C_i \right) = A \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq k-1} B_i \right)$ , et  $A \subset A \cup C_k \subset A \cup B_k$  pour tout  $k$ .  
Le corollaire 3, et le fait que  $A \sim A \cup B_k$ , pour  $k = 1, \dots, n$ , impliquent que  $A \sim A \cup C_k$ , pour  $k = 1, \dots, n$ .

Et puisque les ensembles  $A, C_1, \dots, C_n$  sont disjoints deux à deux par définition, alors on se ramène au premier cas, et on conclut donc la proposition est vraie.  $\square$

### 3.2 Retour à l'espace euclidien à 3 dimensions.

Les raisonnements de cette partie concernent l'espace euclidien à 3 dimensions. On rappelle le théorème de Hausdorff :

#### **Théorème 1.**

Toute sphère  $S$  est équidécomposable à deux copies d'elle même. En d'autres termes, si  $\Sigma_1$  et  $S$  sont deux sphères congruentes, alors :  $S \sim S \cup \Sigma_1$ .

**Proposition 1.** Soit  $A$  un ensemble borné d'un espace euclidien. Si  $A$  contient une sphère  $S$  alors  $A \sim S$ .

*Démonstration.* Puisque  $A$  est borné alors on peut le décomposer :  $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$  tel que chaque  $A_i$  est inclut dans une sphère  $S_i$  congruente à  $S$ .

Alors on a  $S \sim S \cup S_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et donc d'après la proposition 5,  $S \sim S \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i \right)$ .

Et puisque  $S \subset A \subset S \cup \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i \right)$ , alors d'après le corollaire 3, on conclut que  $A \sim S$ .  $\square$

**Théorème 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles bornés quelconques d'intérieurs non vides, situés dans un espace euclidien de dimension 3, alors  $A \sim B$ .

*Démonstration.* Soient  $S_1 \subset A$  et  $S_2 \subset B$ , tels que  $S_1 \sim S_2$ , (on peut trouver de telles sphères puisque  $A$  et  $B$  sont d'intérieurs non vides). Alors d'après la proposition 1,  $S_1 \sim A$  et  $B \sim S_2$ , et donc puisque  $\sim$  est une relation d'équivalence on conclut directement que  $A \sim B$ .  $\square$

### 3.3 L'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions .

Les raisonnements de cette partie concernent l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions.

**Théorème 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles linéaires ou plans bornés et mesurables au sens de Lebesgue, et soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue. On a alors que

$$A \sim B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$$

*Démonstration.* On admet que pour tout ensemble borné  $A$  d'un espace euclidien à 1 ou 2 dimensions, il existe un nombre réel positif  $f(A)$  qui vérifie

- (i) Si  $A \cong B$  alors  $f(A) = f(B)$ .
- (ii) Si  $A \cap B = \emptyset$  alors on a  $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ .
- (iii) Si  $A$  est mesurable au sens de Lebesgue alors on a que  $\mu(A) = f(A)$ .

Par définition de l'équivalence par décomposition finie, il existe un  $n \in \mathbb{N}^*$  et des familles d'ensembles  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que :

1.  $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$  et  $B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$
2.  $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3.  $A_i \cong B_i, \forall i = 1, \dots, n$

On trouve alors par (i) et 3. que  $\forall i = 1, \dots, n$  on a que  $f(A_i) = f(B_i), \forall i = 1, \dots, n$ . De plus par 2. et par récurrence on conclut que

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(A_i) = \sum_{i=1}^n f(B_i) = f(B)$$

Et puisque les ensembles  $A$  et  $B$  sont mesurables au sens de Lebesgue, alors d'après (iii) on a que  $\mu(A) = f(A)$  et  $\mu(B) = f(B)$ , et alors

$$\mu(A) = \mu(B)$$

□

**Remarque 1.** L'implication réciproque dans le théorème n'est pas vraie dans le cas général, mais elle l'est dans le cas des polygones.

Avant de démontrer l'implication réciproque pour le cas des polygones, on va énoncer un lemme qui va nous servir dans la démonstration.

**Lemme 1.** Soit  $A$  un ensemble plan qui n'est pas d'intérieur vide, et soit  $B$  un ensemble somme d'un nombre fini de segments, on a alors que

$$A \sim A \cup B$$

*Démonstration.*

— Commenant par le cas où  $A$  et  $B$  sont disjoints. Puisque  $A$  est d'intérieur non vide, on peut trouver un disque  $C$  inclu dans  $A$ . De plus on peut décomposer  $B$  en un nombre fini de segments

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

tel que tous les segments sont de longueur inférieure au rayon de  $C$ .

Soit  $k \in [1, n]$  et soit  $D_1$  un segment congruent à  $B_k$  et situé sur un rayon de  $C$  mais ne contenant pas le centre de  $C$ . Soit  $\alpha$  un angle qui n'est pas de la forme  $r\pi$  où  $r \in \mathbb{Q}$ .

Par récurrence, soit  $D_{n+1}$  le segment obtenu après rotation d'angle  $n\alpha$  le segment  $D_1$ . On pose

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_n, F = \bigcup_{i=2}^{\infty} D_n \text{ et } G = A - E$$

On a alors que

$$A = G \cup F \cup D_1 \text{ et } A \cup B_k = G \cup E \cup B_k$$

alors puisque  $F$  s'obtient en composant  $E$  par la rotation d'angle  $\alpha$  alors on a que

$$G \cong G, F \cong E \text{ et } B_k \cong D_1$$

De plus l'angle  $\alpha$  n'est pas de la forme  $r\pi$  où  $r \in \mathbb{Q}$  donc la décomposition précédente de  $A$  et  $A \cup B_k$  est disjointe, on a alors que

$$A \sim A \cup B_k$$

et donc d'après le Proposition 5, on a que

$$A \sim A \cup B$$

- Pour le cas général, on considère l'ensemble  $A - B$  qui n'est pas d'intérieur vide, puisque  $A - B$  et  $B$  sont disjoints, alors par ce qui précède

$$A - B \sim (A - B) \cup B = A \cup B$$

de plus on a que

$$A - B \subset A \subset A \cup B$$

donc d'après le corollaire 3 on conclut que

$$A \sim A \cup B$$

□

**Théorème 2.** Si deux polygones  $A$  et  $B$  ont même aire alors on a que  $A \sim B$ .

*Démonstration.* Puisque les polygones  $A$  et  $B$  ont le même aire, alors d'après le Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien (démontré dans l'annexe) on peut les décomposer en un nombre fini et égale de polygones respectivement congruents sans point intérieur communs. Soient donc  $A_1, \dots, A_n$  et  $B_1, \dots, B_n$  les intérieurs de ces polygones, on a alors que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \sim \bigcup_{i=1}^n B_i$$

et puisque les ensemble  $A - \bigcup_{i=1}^n A_i$  et  $B - \bigcup_{i=1}^n B_i$  se composent d'un nombre fini de segments, alors d'après le lemme précédent on a que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \sim \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \left( A - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = A, \text{ et de même } \bigcup_{i=1}^n B_i \sim B$$

Il s'en suit que  $A \sim B$ .

□

**Corollaire 1.** Deux polygones  $A$  et  $B$  sont équivalents par décomposition finie si et seulement si ils ont le même aire.

# Annexes

# Annexe 1

Les théorèmes présentés dans cette annexe servent à démontrer d'autres théorèmes dans les chapitres précédents ; l'axiome du choix va nous servir à démontrer le paradoxe de Hausdorff, et le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien à démontrer le théorème de Banach-Schröder-Bernstein.

**Théorème 1.** (Axiome du choix)[5]

Pour tout ensemble  $X$  d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur  $X$ , appelée fonction de choix, qui à chaque ensemble  $A$  appartenant à  $X$  associe un élément de cet ensemble.

**Théorème 2.** (Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien)[7]

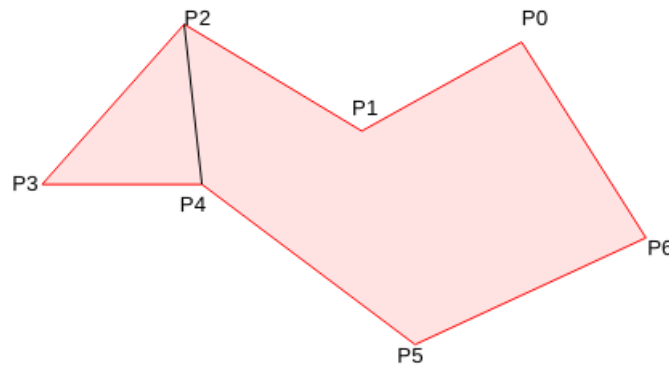
Pour que deux polygones du plan aient la même aire, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents par découpage fini.

La condition nécessaire découle du Théorème 1 de la partie 3.3, on va proposer une démonstration algorithmique de l'implication directe, on a tout d'abord besoin de quelques lemmes

**Lemme 1.** Tout polygone peut être scindé en un nombre fini de triangles.

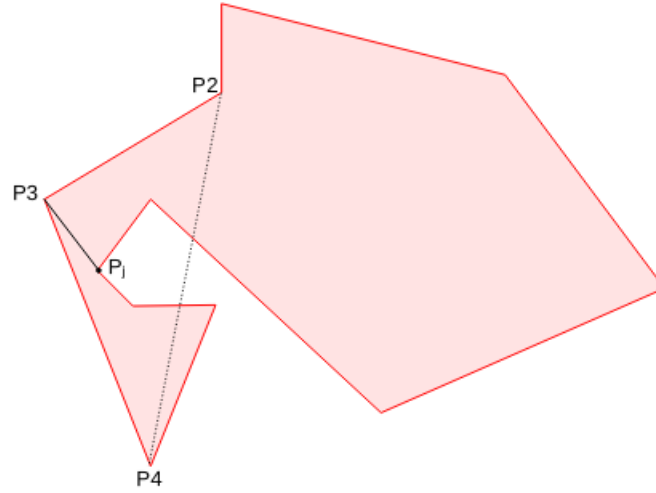
*Démonstration.*

On va procéder par récurrence sur le nombre de sommets du polygone. Pour un polygone à trois sommets c'est évident parce qu'il est déjà un triangle. Soit  $n \geq 3$  et on suppose que tout polygone à  $k$  sommets avec  $3 \leq k \leq n$  peut être scindé en un nombre fini de triangles. Considérons un polygone à  $n + 1$  sommets, et prenons le sommet le plus à gauche du polygone, ( $P_3$  sur la figure suivante), et le segment formé des deux sommets voisins ( $P_2$  et  $P_4$  sur la figure suivante), si ce dernier est inclu dans le polygone alors Le triangle formé par ces trois sommets ( $P_2P_3P_4$  sur la figure suivante) peut être ajouté à la liste des triangles qui composent le polygone. Le sommet ( $P_3$  sur la figure suivante) est enlevé du polygone, et on applique récursivement la triangulation au polygone restant ( $P_0P_1P_2P_4P_5P_6$  sur la figure suivante).



sinon si le segment formé des deux sommets voisins n'est pas inclu dans polygone, il existe nécessairement un ou plusieurs sommets à l'intérieur du triangle formé par ces sommets ( $P_2P_3P_4$  sur la figure suivante) puisque ce segment va couper nécessairement l'intérieur d'un autre segment  $[P_kP_l]$  et donc le sommet le plus à gauche entre  $P_k$  et  $P_l$  va être à l'intérieur du triangle. Soit  $P_j$  le

sommet situé dans le triangle  $P_2P_3P_4$  le plus loin de  $P_2P_4$ . Le segment  $P_3P_j$  est à l'intérieur du polygone, car si un côté coupait ce segment, il aurait une extrémité dans le triangle  $P_2P_3P_4$ , plus éloigné de  $P_2P_4$  que  $P_j$ . La diagonale  $P_3P_j$  permet de diviser le polygone initial en deux polygones le premier contient  $P_3, P_2$  et  $P_j$  et le deuxième contient  $P_3, P_4$  et  $P_j$  donc les deux polygones obtenus ont un nombre de sommets  $\leq n$ . On applique récursivement la triangulation à ces deux polygones.

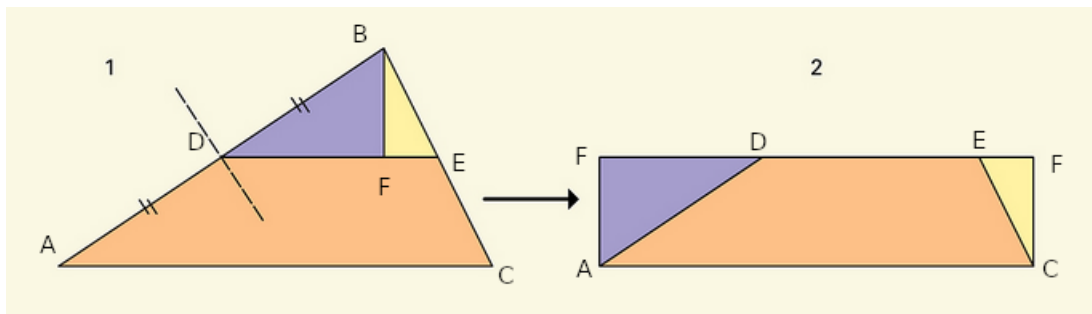


□

**Lemme 2.** Tout triangle peut être décomposé en un nombre fini de parties pour former un rectangle.

*Démonstration.*

Soit  $ABC$  un triangle, et supposons que la droite passante par  $B$  et perpendiculaire à la droite  $(AC)$  coupe cette dernière en un point intérieur au segment  $[AC]$  (on peut toujours trouver un tel  $B$  puisque il suffit de prendre le sommet du plus grand angle du triangle). Soit donc  $D$  le milieu du segment  $[AB]$ , et soit  $E$  l'intersection de la droite passante par  $D$  et parallèle à  $(AC)$ , et soit  $F$  la projection de  $B$  sur  $(DE)$ .



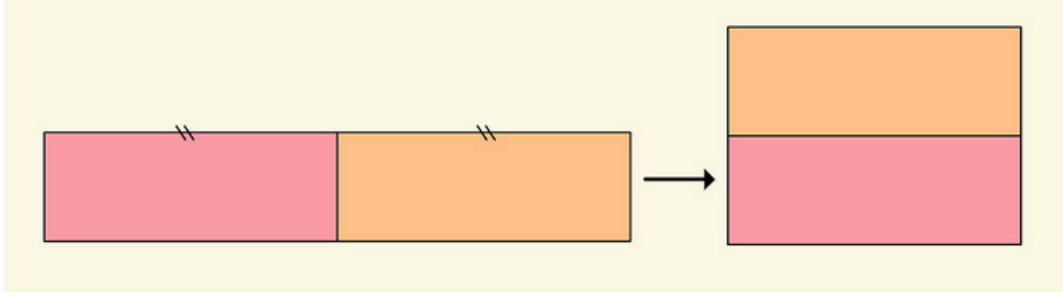
Pour faire la décomposition ci-dessus il faut que  $BE = EC$ , et  $DE + DF + FE = 2DE = AC$ , et ceci est une conséquence directe de théorème de Thalès.

□

**Lemme 3.** Tout rectangle peut être transformé en un autre dont la longueur est inférieur à quatre fois sa largeur.

*Démonstration.*

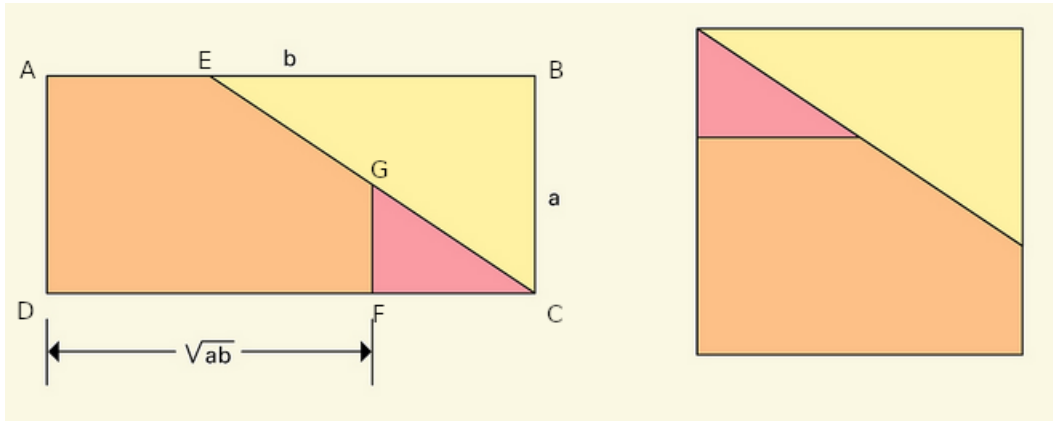
Si le rectangle a une longueur supérieure à quatre fois sa largeur on le découpe en deux (en longueur) et on le réarrange de la manière suivante



et on répète cette opération jusqu'à obtenir un rectangle dont la longueur est inférieure à quatre fois sa largeur.  $\square$

**Lemme 4.** Tout rectangle dont la longueur est inférieure à quatre fois sa largeur peut être décomposé en un caré.

*Démonstration.* Soit  $ABCD$  un rectangle et soient  $a = BC$  et  $b = AB$  tel que  $a < b$  (si  $a = b$  alors il est déjà un caré), et soit  $E$  le point du segment  $[AB]$  tel que  $AE = b - \sqrt{ab}$ , et soit  $F$  le point du segment  $[CD]$  tel que  $DF = \sqrt{ab}$ , la perpendiculaire à  $(CD)$  coupe  $[CE]$  en  $F$  si et seulement si  $\sqrt{ab} \geq b - \sqrt{ab}$  c'est à dire si et seulement si  $b \leq 4a$ , soit  $G$  cette intersection.



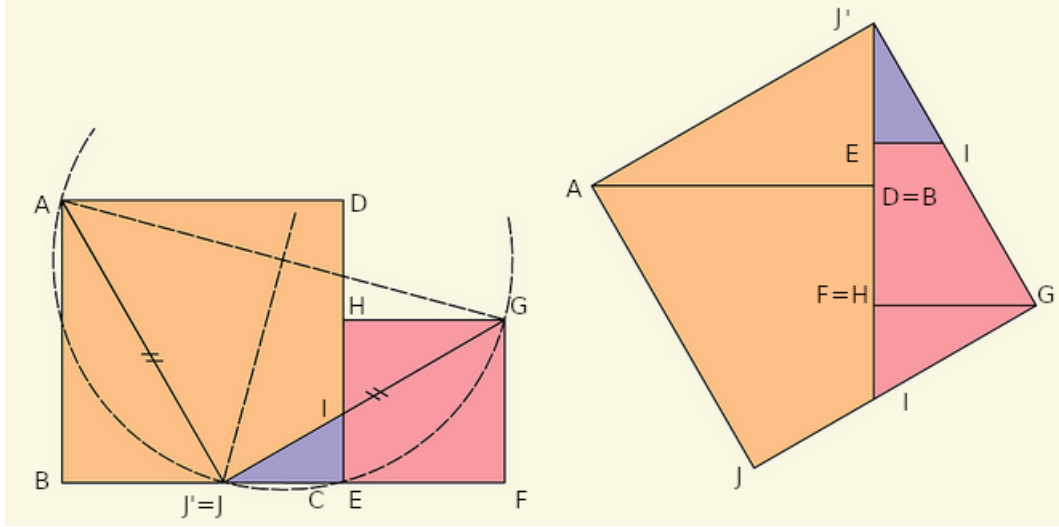
Pour pouvoir faire la décomposition ci-dessus, il faut que  $FG + AD = \sqrt{ab}$ . D'après le théorème de Thalès,  $\frac{FG}{BC} = \frac{FC}{EB}$  c.à.d  $FG = BC \frac{FC}{EB} = \frac{a(b - \sqrt{ab})}{\sqrt{ab}}$ , et donc  $FG + AD = FG + BC = \frac{a(b - \sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} + a = \sqrt{ab}$   $\square$

**Lemme 5.** Deux carrés peuvent être décomposés en un seul carré.

*Démonstration.*

Soit  $ABCD$  et  $EFGH$  deux carrés, et on suppose que la surface de  $EFGH$  est inférieure à celle de  $ABCD$ . Posons le caré  $EFGH$  à côté de  $ABCD$  de sorte que  $C = E$ .





Soit  $J = J'$  le point de  $[BC]$  tel que  $AJG$  est un triangle rectangle isocèle. On colle le triangle  $ABJ'$  avec le polygone  $AJGHD$  de sorte que  $[AD] = [AB]$ , on obtient donc un polygone  $AJGHJ'$  dont les coté  $AJ$ ,  $AJ'$  et  $GJ$  sont égaux et les angles  $\widehat{J'AJ}$  et  $\widehat{AJG}$  sont droits, donc il suffit de montrer que les triangles  $J'HG$  et  $GJF$  sont égaux ; c'est à dire il suffit de montrer que  $HG = FG$  et  $J'H = JF$ , puisque  $\widehat{J'HG} = \widehat{JFG} = 90$ . La première est évidente puisque  $EFGH$  est un carré, et on a  $J'H = JB + DH = AB - JE + AB - EF = 2AB - JF = JF$ , puisque les triangles  $ABJ$  et  $JGF$  sont égaux car ils ont 2 angles égaux et un coté en commun.

□

*Démonstration du Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien.*

- On décompose le premier polygone en un nombre fini de triangles.
- On transforme chaque triangle en un rectangle dont la longueur est inférieur à 4 fois la largeur.
- On transforme chaque rectangle en un carré.
- On fusionne les carrés, deux par deux, progressivement, jusqu'à avoir un unique grand carré.
- On refait la même chose pour le deuxième polygone et on superpose les découpages intervenus pour transformer le polygone 1 en carré à ceux obtenus pour transformer le polygone 2 en carré. Par construction, les pièces résultantes permettent de reconstituer le polygone 1 et le polygone 2.

□

# Bibliographie

- [1] Stefan Banach. Sur le problème de la mesure. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm4/fm412.pdf>.
- [2] Capes. deuxième composition de mathématiques. <https://capes-math.univ-rennes1.fr/capes-pdf/Annales/2004-2.pdf>, 2004.
- [3] Alfred Tarski Stefan Banach. sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm6/fm6127.pdf>, 1924. Fundamenta Mathematicae.
- [4] UNIVERSALIS. Le problème de la mesure «universelle». <https://www.universalis.fr/encyclopedie/stefan-banach/3-le-probleme-de-la-mesure-universelle/>.
- [5] Wikipedia. Axiome du choix. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome\\_du\\_choix](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix).
- [6] Wikipedia. Banach–tarski paradox. [https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox).
- [7] Wikipedia. Théorème de wallace-bolyai-gerwien. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Wallace-Bolyai-Gerwien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wallace-Bolyai-Gerwien).